Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1907

Dritter Teil. Elektromagnetische Wechselwirkungen

Dritter Theil.
Elektromagnetische Wechselwirkungen.

Erster Abschnitt.
Das magnetische Feld stationärer elektrischer Ströme.

---

§ 62. Das magnetische Feld linearer Ströme, dargestellt mit Hülfe Ampère'scher Flächen.

In dem vorhergehenden Abschnitt haben wir nur das elektrische Feld stationärer Ströme besprochen. Wie zuerst Örsted und Ampère fanden, üben solche aber auch magnetische Wirkungen aus.

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse beim linearen Strom, in dessen Umgebung sich zunächst weder ein permanenter Magnet noch ein magnetisirbarer Körper befinden soll. Er wird von geschlossenen magnetischen Kraftlinien umkreist; sind in Figur 20 die Punkte 1 und 2 die Durchstoſspunkte des Stromkreises durch die Zeichenebene, und flieſst der Strom in 1 von unten nach oben, in 2 dagegen von oben nach unten, so geben die um sie herum geführten, mit Richtungssinn versehenen Curven qualitativ den Verlauf der Kraftlinien an. Wie man aus ihr sieht, läſst sich der Richtungssinn der Umkreisung durch die Ampère'sche Regel angeben, welche aussagt, daſs ein in Richtung des elektrischen Stroms Schwimmender die magnetischen Kraftlinien von rechts nach links vor sich vorüberziehen sieht.

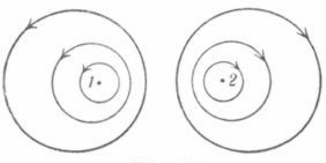

Fig. 20.

Ein magnetisches Feld mit geschlossenen Kraftlinien läſst sich nicht durch eine Potentialfunction darstellen; das letztere ist nur möglich, wenn das Linienintegral der Kraft für jede geschlossene

Curve verschwindet. Hier ist es aber offenbar von Null verschieden, wenn man es für eine der geschlossenen Kraftlinien bildet. Nun wollen wir aber zunächst einmal festsetzen, dafs wir nur solche geschlossene Curven in Betracht ziehen, welche eine bestimmte, vom Stromkreis umrandete, sonst aber beliebig ausgewählte Fläche nicht durchsetzen. Die Erfahrung zeigt, dafs für alle diese das Linienintegral Null ist. Nun macht aber die genannte Fläche — man nennt sie die Ampère'sche — aus dem den Stromkreis umgebenden zweifach zusammenhängenden Raum einen einfach zusammenhängenden. In dem letzteren können wir also die magnetische Kraft wiederum aus einer Potentialfunction ableiten. An der Ampère'schen Fläche findet dabei natürlich ein Potentialsprung statt; die fragliche Potentialfunction ist also die einer Doppelschicht. Nun ist die Kraft an diesem physikalisch gar nicht vorhandenen Gebilde selbstverständlich ebenso stetig, wie an anderen Stellen des Raumes. Nach § 19 hätte eine Doppelfläche von veränderlichem Moment aber Unstetigkeit der Tangentialcomponenten zur Folge. Der lineare elektrische Strom ist also einer Doppelfläche von constantem Moment äquivalent.

Nur in einem Punkte versagt die Aequivalenz. Stellt man sich die Doppelschicht als aus zwei entgegengesetzt gleich geladenen Flächen bestehend vor, so findet man für das Linienintegral der magnetischen Kraft auch dann den Werth 0, wenn der geschlossene Integrationsweg die Fläche durchsetzt. Das Curvenstück zwischen den Belegungen compensirt alle übrigen, denn wenn man die Belegungen bei constantem Moment immer näher an einander rücken läfst, so nimmt auch die Kraft in dem Zwischenraume über alle Grenzen zu. Dagegen ist die Feldstärke in der Ampère'schen Fläche natürlich ebenso wie sonst im Raum endlich. Will man also die Beziehung, dafs die Differenz der Potentialwerthe im Anfangs- und Endpunkt dem Linienintegral der Kraft gleich ist, beim linearen Strom allgemein aufrecht erhalten, so mufs man jedesmal, wenn der Integrationsweg die Ampère'sche Fläche durchsetzt, zur Potentialfunction eine Constante hinzufügen, welche dem an ihr stattfindenden Potentialsprung an Gröfse gleich ist; welches Vorzeichen man ihr zu geben hat, hängt von dem Sinn ab, in welchem man die Fläche durchschreitet. Dann wird die Potentialfunction zwar überall stetig, aber um ganze Vielfache dieser Constanten mehrdeutig. Wir werden im Folgenden der eindeutigen Potentialfunction der äquivalenten Doppelschicht meist den Vorzug geben; da wir diese, abgesehen von der Randcurve, beliebig wählen können, dürfen wir den Punkt, in welchem wir das magnetische Feld untersuchen, stets als aufserhalb der Fläche befindlich ansehen.

Die Potentialfunction einer Doppelfläche haben wir schon in § 19 berechnet; wir wollen sie aber, um einen anderen Weg kennen zu lernen, hier noch einmal aus dem GREEN'schen Satz ableiten. Da magnetische Ladungen nirgends auftreten, mufs sie überall der Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = 0$$

genügen und abgesehen von dem Sprung an der Doppelfläche, den wir in Anschlufs an früher gebrauchte Bezeichnungen mit $4 \pi \mathfrak{M}$ bezeichnen, endlich und stetig sein. Das letztere gilt auch für ihre Ableitungen, freilich mit Ausnahme der vom elektrischen Strom durchflossenen Curve. Denn berechnen wir das Linienintegral der magnetischen Kraft für einen Kreis vom kleinen Radius ϱ, dessen Mittelpunkt in der Stromcurve liegt und dessen Ebene zu der Richtung der Curve in diesem Punkt senkrecht ist, so mufs man nach dem Gesagten den allen die Stromcurve umschlingenden Integrationswegen gemeinsamen, also von ϱ unabhängigen Werth finden. Dazu ist erforderlich, dafs die in der Peripherie liegende Componente der Kraft mit abnehmendem ϱ wächst wie $\frac{1}{\varrho}$. Dagegen bleibt die in Richtung von ϱ weisende Componente endlich und stetig; bilden wir nämlich für die Oberfläche eines die Stromcurve umgebenden Fadens vom Radius ϱ das Flächenintegral

$$\overline{\iint} d s \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = \overline{\iint} d s \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho},$$

so mufs es, da die Stromcurve wegen der Aequivalenz des Stromes mit einer Doppelfläche keine magnetische Ladung trägt, Null sein. Würde aber $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ für sehr kleine Werthe von ϱ sehr grofs, so müfste es für die ganze Fadenfläche aus Symmetrie dasselbe Vorzeichen haben, das Integral wäre also sicher von Null verschieden. Daraus ist zu schliefsen, dafs $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ auch bei beliebiger Annäherung an die Stromcurve endlich bleibt. Schliefslich mufs φ im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{R}$ Null werden, seine Ableitungen mindestens wie $\frac{1}{R^2}$.

Wir wenden die GREEN'sche Umformung auf das über den gesammten Raum gebildete Integral

$$\iiint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

an, wo

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

ist; auszuschliefsen sind nur die Unstetigkeitsstellen der Functionen φ und $\frac{1}{r}$ und ihrer Ableitungen. Dementsprechend sind als Grenzen des Integrationsgebietes zu betrachten 1. die beiden Seiten der Doppelschicht; 2. die Oberfläche des die Stromcurve umgebenden Fadens, dessen Radius ϱ man schliefslich unter alle Grenzen abnehmen läfst; 3. eine Kugel vom Radius ϱ um den Unstetigkeitspunkt ξ, η, ζ der Function $\frac{1}{r}$, auch hier geht man schliefslich zur Grenze $\varrho=0$ über; 4. die unendlich ferne Fläche, diese spielt aber wegen der Voraussetzungen über das Verhalten von φ auf ihr keine Rolle.

Das genannte Raumintegral ist nun wegen $\Delta\varphi=0$ gleich

$$-\iint\frac{ds}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i},$$

andererseits wegen $\Delta\frac{1}{r}=0$ gleich

$$-\iint ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}.$$

n_i ist die in das Integrationsgebiet hinein weisende Normale. Beide Integrale sind für die gesammte Begrenzung zu bilden. In dem ersteren verschwindet der Antheil der Doppelfläche, weil auf ihren beiden Seiten $\frac{1}{r}$ denselben, $\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}$ entgegengesetzt gleiche Werthe hat; es verschwindet ebenso der Antheil der Fadenoberfläche im Grenzfall $\varrho=0$, weil dann die Ausdehnung des Integrationsgebietes 0 wird, und die zu integrirende Function

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$$

endlich bleibt; es verschwindet endlich auch der Antheil der um den Punkt ξ, η, ζ beschriebenen Kugelfläche, weil dort

$$-\overline{\iint}\frac{ds}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = -\frac{1}{\varrho}\overline{\iint} ds\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{\varrho}\iiint\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz$$

(das letztere Integral soll über das Volumen der Kugel ausgeführt werden) wegen $\Delta\varphi = 0$ verschwindet. Daraus folgt, dafs auch

$$\overline{\iint} ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i} = 0$$

ist. Hier beträgt aber der Antheil der Doppelfläche

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\iint ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = 4\pi\mathfrak{M}\iint ds\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right),$$

wenn die Normale n von der negativ geladenen Seite 1 zu der positiven Seite 2 weist; der Antheil der Fadenfläche verschwindet freilich im Grenzfall wieder, da auch hier der Integrand endlich bleibt; dagegen liefert die Kugel im Grenzfall $\varrho = 0$ den Beitrag

$$\lim_{\varrho=0}\overline{\iint} ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r} = -\varphi_{\xi,\eta,\zeta}\lim_{\varrho=0}\frac{1}{\varrho^2}\overline{\iint} ds = -4\pi\varphi_{\xi,\eta,\zeta},$$

so dafs man die Gleichung

$$\varphi_{\xi,\eta,\zeta} = \mathfrak{M}\iint ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} \tag{230}$$

erhält; sie ist identisch mit (68).

Das Flächenintegral in dieser Formel ist über die Ampère'sche Fläche zu bilden, deren Form und Lage, von der Randcurve abgesehen, willkürlich ist. Das Integral darf also nur von der letzteren abhängen. In der That ist

$$ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{ds}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{ds}{r^2}\cos(r, n);$$

$-ds\cos(r, n)$ ist aber die Projection von ds auf eine um den Punkt ξ, η, ζ beschriebene, durch den Ort von ds hindurchgehende

Kugelfläche, $-\frac{ds}{r^2}\cos(r,n)$ defshalb der körperliche Winkel $d\Omega$, unter dem ds vom Punkt ξ, η, ζ aus gesehen wird, und zwar ist $d\Omega$ positiv, wenn ds diesem Punkt die positiv geladene Seite 2 zuweist; denn dann ist $\cos(r,n) < 0$. Führt man die Integration über $d\Omega$ aus, so findet man unter Fortlassung des jetzt überflüssigen Index von φ

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega\,, \tag{230a}$$

wo Ω die gesammte perspectivische Ausdehnung oder den körperlichen Winkel (Kegelecke) der Ampère'schen Fläche für einen Beobachter im Punkt ξ, η, ζ bedeutet. Flächenelemente ds, welche wie in Figur 21 die Elemente ds_1 und ds_2 unter gleichen, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmenden Winkeln $d\Omega$ erscheinen, heben sich bei dieser Integration gegenseitig auf. Daher hängt Ω thatsächlich nur von der Form und Lage der Stromcurve ab. Ist Ω' der Werth, dem Ω zustrebt, wenn man sich einem Punkt der Ampère'schen Fläche von der positiven Seite beliebig nähert, so ist (siehe Figur 22)

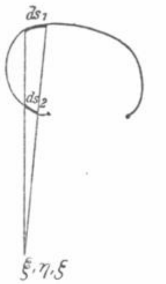

Fig. 21.

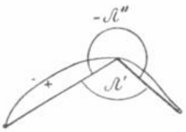

Fig. 22.

$$\Omega'' = -(4\pi - \Omega')$$

der Grenzwerth für eine Annäherung von der negativen Seite her. Der Potentialsprung beträgt demnach

$$\mathfrak{M}(\Omega' - \Omega'') = 4\pi\,\mathfrak{M}\,,$$

was uns zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurückführt.

Noch eine andere Deutung läfst Gleichung (230) zu. $\frac{1}{r}$ ist die Potentialfunction eines magnetischen Einheitspoles im Punkt ξ, η, ζ, $-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$ also die von der negativen zur positiven Seite der Ampère'schen Fläche weisende Componente seiner Feldstärke und

$$+\iint ds\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$$

die Anzahl der Kraftlinien, welche er von der positiven zur negativen Seite durch die AMPÈRE'sche Fläche entsendet; als positiv zählt also eine Kraftlinie, wenn sie in der entgegengesetzten Richtung wie die vom Strom herrührenden Kraftlinien die Fläche durchdringt; Kraftlinien, welche sie zweimal in entgegengesetztem Sinne schneiden, zählen nicht mit. Gleichung (230) sagt also aus, dafs φ der Anzahl der Kraftlinien proportional ist, die ein Einheitspol im Punkt ξ, η, ζ durch die Stromcurve hindurch schickt. Da das Potential einer Reihe von Magnetpolen $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das magnetische Feld des Stromes

$$P = \sum \mathfrak{m}\,\varphi = \mathfrak{M}\int\!\!\int ds \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \tag{230b}$$

ist, so ist sie ebenfalls proportional zu der Anzahl der Kraftlinien, welche das magnetische System durch die Stromcurve sendet. Arbeit wird nur bei einer Verrückung geleistet, welche die Zahl dieser Kraftlinien verändert; ihr Betrag wird durch $-\delta P$ gemessen.

Schon in § 52 haben wir gezeigt, dafs die Energie der Wechselwirkung eines elektrisch polarisirten Körpers mit einem elektrischen Felde

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

beträgt. Auf das Gebiet der permanenten Magnete übertragen, lautet dieser Ausdruck:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz;$$

er geht durch eine schon in § 54 benutzte partielle Integration unter Berücksichtigung von (193) über in:

$$\begin{aligned} P &= -\int\!\!\int\!\!\int \varphi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz - \overline{\int\!\!\int} ds\, \varphi\, \sigma_{n_i} \\ &= \int\!\!\int\!\!\int \varphi\, \mu'\, dx\, dy\, dz + \overline{\int\!\!\int} ds\, \varphi\, m'. \end{aligned}$$

Versteht man unter φ die Potentialfunction eines linearen Stromes, unter μ' und m' die scheinbare Ladung eines Magneten, so giebt der letztere Ausdruck die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung.

Wie wir nun soeben sahen, ist φ mehrwerthig, wenn wir volle Umläufe um die Stromcurve mit in Betracht ziehen; führen wir den

Magneten einmal um den Strom herum in seine alte Lage, so durchschneidet jeder Theil von ihm einmal die AMPÈRE'sche Fläche, so dafs in der letzten Gleichung überall die Constante $\pm 4\pi\mathfrak{M}$ zu φ hinzugefügt werden mufs. Dadurch wird aber P nicht geändert, da nach § 49 die gesammte freie Ladung des Magneten

$$\iiint \mu'\,dx\,dy\,dz + \iint ds\,m' = 0$$

ist. P ist also trotzdem einwerthig, d. h. eine dauernde Kreisbewegung des Magneten um den Strom kann nicht von selbst eintreten.

Anders aber, wenn sich ein Theil des Stromleiters mit den Magneten bewegt. In Figur 23 sollen K_1 und K_2 zwei metallische, kreisförmige und gleichgrofse Gleitschienen sein, denen der Strom durch die Drähte D_1 und D_2 zugeführt wird. Um ihre gemeinsame Axe A kann der Magnet M rotiren, dessen positives Ende zwischen den Gleitschienen liegt, während sein negatives Ende sich noch über der oberen von ihnen befindet. Die Drähte d_1 und d_2 sind mit ihm fest verbunden; sie gleiten auf K_1 und K_2 und schliefsen den Strom durch die ebenfalls leitende Axe.

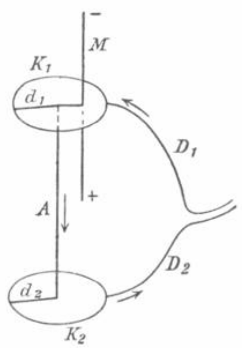

Fig. 23.

Die AMPÈRE'sche Fläche ist hier deformirbar; rechnet man zu ihr das Rechteck, von dem d_1, A und d_2 drei Seiten sind, so besteht ihre Deformation darin, dafs sie sich bei einer Drehung der beweglichen Theile des Apparates um Stücke der durch K_1 und K_2 gehenden Cylinderfläche vergröfsert oder verkleinert. Bei einer vollen Umdrehung kommt die ganze Cylinderfläche einmal hinzu. Für einen am positiven Ende des Magneten befindlichen Beobachter nimmt ihre perspectivische Ausdehnung Ω dabei zu, und zwar fast um $\pm 4\pi$, wenn der Cylinder recht lang und schmal ist, so dafs seine Grundflächen in ihrer perspectivischen Ausdehnung verschwindend klein sind; befindet sich der Beschauer aber am negativen Ende, so ändert sich Ω für ihn fast gar nicht. Für den einen Theil des Magneten ist demnach

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega$$

mehrwerthig, für den anderen nicht. Dann ist auch P mehrwerthig und kann bei dauernder Rotation in infinitum abnehmen; die ponderomotorischen Kräfte, welche stets eine Abnahme von P herbeizuführen streben, führen mithin den Magneten dauernd im Kreis herum.

Um schliefslich ein Beispiel für die Verwendung von (230a) zu geben, fragen wir nach der magnetischen Kraft, welche ein Kreisstrom vom Radius R in einem Punkt seiner Axe hervorruft. Sie kann aus Symmetrie nur in der Richtung der Axe liegen; daher brauchen wir φ auch nur für Punkte der Axe zu bestimmen. Ist ξ der Abstand eines solchen vom Kreismittelpunkt, so ist

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{\xi}$$

der Winkel, welchen der von ihm nach einem Punkt der Stromcurve gezogene Radiusvector mit der Axe bildet, so dafs

$$\Omega = 2\pi \int_0^\alpha \sin\alpha \, d\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}\right),$$

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega = 2\pi\,\mathfrak{M}\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}\right),$$

und die magnetische Feldstärke

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{2\pi\,\mathfrak{M}\,R^2}{\sqrt{R^2 + \xi^2}^3}$$

wird. Bei der Tangentenbussole benutzt man diese Gleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{M}$, indem man die Ebene des Kreisstromes in den magnetischen Meridian stellt und mit Hülfe einer kleinen Magnetnadel die Richtung der Resultante aus der bekannten Horizontalintensität des erdmagnetischen Feldes und der magnetischen Kraft des Stroms beobachtet. Der Winkel zwischen ihr und dem Meridian giebt in seiner Tangente das Verhältnifs der beiden Kräfte an.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Stromstärke definirt als die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Stromleiters hindurchgehende Elektricitätsmenge. Daraus ergiebt sich eine Möglichkeit, die Stromstärke elektrostatisch zu messen, da wir Elektricitätsmengen in absolutem Maafs bestimmen können. Eine andere Methode, Stromstärken wenigstens relativ zu messen, beruht auf dem Faraday'schen Gesetz, dafs die Quantität der an der Grenze elektrolytischer Leiter ausgeschiedenen Stoffe der hindurchgesandten Elektricitätsmenge, also der Stromstärke und der Zeit proportional ist, während welcher der Strom wirkte. Unabhängig davon können wir jetzt den Strom durch seine magnetischen Wirkungen bestimmen. Das sogenannte elektromagnetische Maafssystem setzt seine Intensität gleich dem Moment $\mathfrak{M}$ der äquivalenten Doppelfläche. Erfahrungsgemäfs ist der so bestimmte Werth I_{em} proportional zu dem elektrostatisch gemessenen, I_{es}. Die Dimension des Proportionalitätsfactors findet man aus der Ueberlegung, dafs $\mathfrak{M}$ das Product einer Flächendichte und einer Länge, also auch

$$I_{em} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

ist; dagegen ist (siehe § 61)

$$I_{es} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}]$$

daraus folgt

$$\frac{I_{es}}{I_{em}} = [L T^{-1}],$$

der Proportionalitätsfactor A ist der Dimension nach eine Geschwindigkeit. Die Versuche von W. Weber und R. Kohlrausch ergaben A als gleich der rund $3 \cdot 10^{10}$ cm. sec.$^{-1}$ betragenden Lichtgeschwindigkeit im Vacuum und zwar stimmten die beiden Werthe mit einer Genauigkeit überein, die zu der Annahme zwang, dafs dies nicht auf einen Zufall, sondern auf einen tiefgehenden Zusammenhang zwischen elektromagnetischen und optischen Erscheinungen zurückzuführen wäre. Der Maxwell'schen Theorie zufolge sind geradezu die optischen Erscheinungen rein elektromagnetischer Natur, wie wir weiter unten sehen werden.

Natürlich hat diese Veränderung der Stromeinheit die Veränderung der anderen elektrischen Einheiten zur Folge. Nicht nur die Stromdichte und die Elektricitätsmenge, deren Beträge sich wie die der Stromstärke von dem einen in das andere Maafssystem umrechnen, sondern auch die elektrische Feldstärke, der Widerstand und die Leitfähigkeit werden hierdurch betroffen, wenn anders man nicht die Werthe der in den Gleichungen (229) bis (229f) auftretenden Energiequanten ändern will. Dies wäre aber unpraktisch, da die Energie sich unabhängig von allen elektrischen Methoden in absolutem Maafs bestimmen läfst. Nach (229b), (229d) und (229f) ist defshalb

$$\frac{\mathfrak{E}_{es}}{\mathfrak{E}_{em}} = \frac{I_{em}}{I_{es}} = \frac{1}{A} \qquad \mathfrak{E}_{em} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$$

$$\frac{\tau_{es}}{\tau_{em}} = \frac{I^2_{es}}{I^2_{em}} = A^2 \qquad \tau_{em} = [L^{-2} T]$$

$$\frac{w_{es}}{w_{em}} = \frac{I^2_{em}}{I^2_{es}} = \frac{1}{A^2} \qquad w_{em} = [L T^{-1}].$$

Das COULOMB'sche Gesetz lautet im elektromagnetischen Maafssystem

$$K = A^2 \frac{\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2}{r^2}.$$

Wir wollen im Folgenden der Einheitlichkeit wegen das elektrostatische Maafssystem beibehalten, obwohl die Einführung des elektromagnetischen die Formeln dieses Abschnitts vereinfachen würde. Die Gleichungen (230), (230a) und (230b) lauten dann bei Einführung der Stromstärke I

$$\varphi = \frac{1}{A} I \iint d s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{A} I \Omega \tag{230c}$$

$$P = \frac{I}{A} \iint d s \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \tag{230d}$$

§ 63. Das magnetische Feld eines linearen Stroms, dargestellt durch Integrale über die Stromcurve. Die Rückwirkung einer magnetischen Feldstärke auf den Stromleiter.

Aus der Formel (230b) wollen wir jetzt allgemein die magnetische Kraft berechnen. Dazu müfsten wir eigentlich dem Punkt ξ, η, ζ eine Verschiebung $-dq$ ertheilen. Da es aber nur auf seine relative Lage zum Stromleiter ankommt, können wir statt dessen dem letzteren die Verschiebung $+dq$ geben, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen da, db, dc heifsen sollen; $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ ist dann die in Richtung von dq weisende Kraftcomponente am Ort ξ, η, ζ.

Zunächst aber müssen wir, um Vorzeichenzweideutigkeiten zu vermeiden, eine Bestimmung über die Lage der drei Coordinatenaxen zu einander machen; diese ist nämlich durch die Forderung der Rechtwinkligkeit nicht eindeutig bestimmt, man bekommt aus einem System ein anderes, welches sich durch keinerlei Drehungen mit dem ersteren zur Deckung bringen läfst, wenn man den Richtungssinn der einen Axe umkehrt. Wir setzen nun fest, dafs im Folgenden stets die z-Axe für einen in der positiven y-Richtung blickenden Beobachter nach oben weisen soll, wenn die x-Axe vor ihm von links nach rechts vorüberführt (siehe Figur 24).

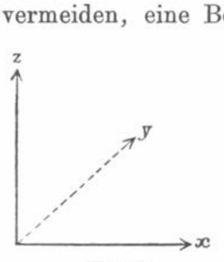

Fig. 24.

Ferner rechnen wir das Linienelement dl der Stromcurve, dessen Projectionen auf die Axen dx, dy, dz heifsen sollen, positiv in der Stromrichtung und fassen seinen Abstand r vom Punkt ξ, η, ζ als einen von dem letzteren fort weisenden Vector auf, wie wir es auch bisher thaten.

Bei der Verschiebung um dq beschreibt das Linienelement dl eine Fläche von der Gröfse

$$dl\, dq \sin(dl, dq),$$

deren Projectionen auf die Coordinatenebenen gleich

$$\pm \begin{vmatrix} dy & dz \\ db & dc \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} dz & dx \\ dc & da \end{vmatrix}, \quad \pm \begin{vmatrix} dx & dy \\ da & db \end{vmatrix}$$

sind. Seine Projection auf die um den Punkt ξ, η, ζ beschriebene, durch den Ort von dl hindurchgehende Kugel ist also

$$\pm \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r, x) & \cos(r, y) & (\cos r, z) \end{vmatrix},$$

und die entsprechende Veränderung von Ω, der perspectivischen Ausdehnung der AMPÈRE'schen Fläche,

$$d\,\Omega = \pm \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r, x) & \cos(r, y) & \cos(r, z) \end{vmatrix}.$$

Das Vorzeichen, welches zu wählen ist, ist entweder stets das positive oder stets das negative. Diese Frage läfst sich daher an einem Beispiel beantworten.

Die Stromcurve liege in der xz-Ebene, dl weise in die positive x-Richtung, dq in die positive z-Richtung, während $\eta < 0$ sein soll; dann ist

$$\begin{matrix} dx > 0 & dy = 0 & dz = 0 \\ da = 0 & db = 0 & dc > 0 \end{matrix}$$

und

$$\cos(r, y) > 0;$$

demnach

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r, x) & \cos(r, y) & \cos(r, z) \end{vmatrix} = -\, dx\, dc \cos(r, y) < 0.$$

Liegt ferner, wie in der Figur 25, dl im tiefsten Punkt der Stromcurve, so kehrt die AMPÈRE'sche Fläche dem Beschauer in ξ, η, ζ die positive Seite zu; denn innerhalb der Stromcurve durchstofsen nach der AMPÈRE'schen Schwimmerregel die Kraftlinien in der auf ihn zuführenden Richtung die xz-Ebene. Daher ist $\Omega > 0$, und da es durch die Verrückung von dl um dq dem absoluten Werth nach abnimmt, $d\Omega < 0$. Läge dl im höchsten Punkt, so wäre $\Omega < 0$, nähme aber, absolut genommen, zu. Also gilt in der letzten Gleichung für $d\Omega$ das Vorzeichen $+$ und wir finden durch Integration nach dl über die ganze Stromcurve:

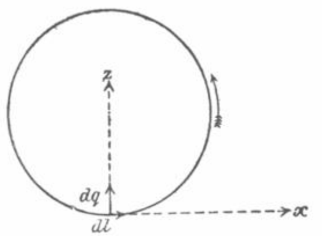

Fig. 25.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q}\, dq = \frac{I}{A} \overline{\int} \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r,x) & \cos(r,y) & \cos(r,z) \end{vmatrix} dl.$$

Die Kraftcomponenten nach den Coordinatenrichtungen ergeben sich hieraus, wenn man dq der Reihe nach mit da, db, dc identificirt; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dz \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{y-\eta}{r^3}\, dz - \frac{z-\zeta}{r^3}\, dy \right) \\ M &= \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dz + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dx \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{z-\zeta}{r^3}\, dx - \frac{x-\xi}{r^3}\, dz \right) \\ N &= \frac{\partial \varphi}{\partial c} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{dy}\, dx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{dx}\, dy \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{x-\xi}{r^3}\, dy - \frac{y-\eta}{r^3}\, dx \right); \end{aligned}\right\} \quad (231)$$

denn es ist

$$\frac{1}{r^2} \cos(r,x) = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = + \frac{x-\xi}{r^3} \quad \text{etc.}$$

Die Form dieser Gleichungen legt es nahe, dem Stromelement dl an den berechneten Kraftcomponenten die Antheile

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dz\right) = \frac{I}{Ar^3}\left[(y-\eta)\,dz - (z-\zeta)\,dy\right]\\
M &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dx\right) = \frac{I}{Ar^3}\left[(z-\zeta)\,dx - (x-\xi)\,dz\right]\\
N &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dy\right) = \frac{I}{Ar^3}\left[(x-\xi)\,dy - (y-\eta)\,dx\right]
\end{aligned}\right\} \tag{231a}$$

zuzuschreiben. Doch ist dieser Schlufs keineswegs zwingend; vielmehr verträgt sich mit (231) jeder Zusatz zu (231a), der bei der Integration über eine geschlossene Curve verschwindet. Stellt man sich aber auf den Standpunkt der letzteren Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}
L(x-\xi) + M(y-\eta) + N(z-\zeta) &= 0\\
L\,dx \quad + M\,dy \quad + N\,dz \quad &= 0;
\end{aligned}$$

die magnetische Kraft steht also sowohl auf der Entfernung r als auf der Richtung des Linienelements dl senkrecht. Ihre Gröfse berechnet man am einfachsten, wenn man bedenkt, dafs

$$(y-\eta)\,dz - (z-\zeta)\,dy = \begin{vmatrix} y-\eta & z-\zeta \\ dy & dz \end{vmatrix}$$

etc. die Projectionen des Parallelogramms aus r und dl auf die Coordinatenebenen sind, und dafs dessen Flächeninhalt gleich $r\,dl \sin(r, dl)$ ist; demnach ist

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \frac{I}{Ar^2}\,dl \sin(r, dl). \tag{231b}$$

Diese Gleichung spricht das Biot-Savart'sche Gesetz aus. Hier liegt der schon in der Einleitung angekündigte Fall einer Kraft vor, welche weder anziehend noch abstofsend, sondern im Kreise um dl herumführend wirkt.

Erfahrungsgemäfs gilt für die Wechselwirkung zwischen stationären Strömen und Magneten das Princip von der Gleichheit von actio und reactio. Nach (231a) ist

$$\frac{I}{A}\,\mathfrak{m}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dz\right)$$

die x-Componente der vom Stromelement dl auf einen im Punkt ξ, η, ζ liegenden Magnetpol $\mathfrak{m}$ ausgeübten Kraft,

$$\mathfrak{X} = -\frac{I}{A}\,\mathfrak{m}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,dz\right),$$

mufs also die entsprechende Componente der von dem Magnetpol auf dl ausgeübten Wirkung sein. Nun sind aber

$$-\mathfrak{m}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = L, \quad -\mathfrak{m}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = M, \quad -\mathfrak{m}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = N$$

die Componenten der von dem Pol $\mathfrak{m}$ ausgehenden Feldstärke, also sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{I}{A}(N\,dy - M\,dz) \\ \mathfrak{Y} &= \frac{I}{A}(L\,dz - N\,dx) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{I}{A}(M\,dx - L\,dy) \end{aligned}\right\} \qquad (232)$$

die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche dl in einem magnetischen Felde erfährt, dessen Feldstärke die Componenten L, M, N hat.

Die gilt zunächst nur für den Fall einer magnetischen Punktladung. Liegen deren mehrere oder stetig vertheilte Ladungen vor, so treten in dem aus dem Princip der Gleichheit von actio und reactio hervorgehenden Schwerpunktssatz die vom Strom auf die Theile der Ladung ausgeübten Kräfte additiv auf. Folglich müssen sich auch die Rückwirkungen auf den Stromleiter addiren; und da sich die Feldstärken ebenfalls addiren, bleiben die Gleichungen (232) in Gültigkeit. Es folgt aus ihnen

$$\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz = 0,$$

$$\mathfrak{X}\,L + \mathfrak{Y}\,M + \mathfrak{Z}\,N = 0,$$

die ponderomotorische Kraft steht also sowohl auf dem Stromelement dl als der Richtung der magnetischen Feldstärke senkrecht, und zwar liegen Stromrichtung, Feldstärke und ponderomotorische Kraft qualitativ — der Winkel ϑ zwischen Stromrichtung und Feldstärke beträgt im Allgemeinen nicht $\frac{\pi}{2}$ — zu einander wie die x-, y- und z-Axe, denn wählt man

$$dx > 0, \qquad dy = 0, \qquad dz = 0,$$

$$\mathfrak{L} = 0, \qquad M > 0, \qquad N = 0,$$

so wird nach (232)

$$\mathfrak{X} = 0 \qquad \mathfrak{Y} = 0 \qquad \mathfrak{Z} > 0.$$

(Siehe Figur 26). Der Schwimmer, von dem die Ampère'sche Regel spricht, wird nach links gedrängt, wenn er in Richtung der Kraftlinie blickt. Der Werth der resultirenden ponderomotorischen Kraft ist

$$\mathfrak{K} = \frac{I}{A}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\sin\vartheta\, dl,$$

also proportional zur Stromintensität, zur magnetischen Feldstärke und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Die Gleichungen (232) können zunächst ebenso wie (231a) nur in dem Sinn Gültigkeit beanspruchen, daſs sie bei der Integration über einen geschlossenen Strom Richtiges ergeben. Aber während sich die von dem Element dl ausgehende magnetische Wirkung nicht isoliren läſst, ist die ponderomotorische Wirkung auf dl bei deformirbaren Stromleitern für sich allein der Beobachtung zugänglich; es zeigt sich dann, daſs die Gleichungen (232) sie richtig zu berechnen gestatten.

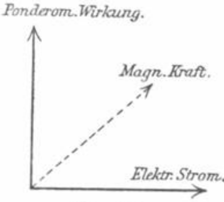

Fig. 26.

§ 64. Die Wechselwirkung zwischen linearen Strömen.

Da ein Strom eine magnetische Kraft hervorruft, andererseits von einer solchen ponderomotorische Wirkungen erleidet, müssen auch zwei lineare Ströme auf einander ponderomotorisch wirken. Die Stromstärken sollen I und J, die Elemente der Stromcurven dl und $d\lambda$, ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz und $d\xi$, $d\eta$, $d\xi$ sein; unter x, y, z; ξ, η, ζ verstehen wir die Coordinaten ihres Orts. Schlieſslich ist wie bisher ihre Entfernung,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

ein Vector, dem wir die Richtung vom Punkt ξ, η, ζ nach dem Punkt x, y, z beilegen.

Vertauscht man in (232) I und dx, dy, dz mit J und $d\xi, d\eta, d\zeta$ und setzt für L, M, N die sich aus (231a) ergebenden Werthe, so findet man für die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche dl auf $d\lambda$ ausübt, das „GRASSMANN'sche Elementargesetz“:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dx\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\}\\
\mathfrak{Y} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dy\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\}\\
\mathfrak{Z} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dz\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (233)$$

Es giebt, wie aus der Ableitung hervorgeht, eine zu $d\lambda$ senkrechte Kraft an, welche dem Princip der Gleichheit von actio und reactio nicht genügt; denn dl und $d\lambda$ lassen sich nicht ohne Aenderung mit einander vertauschen.

Indessen ist die Gleichung (233) in demselben Sinne hypothetisch, wie die zur Ableitung benutzte Formel (231a). Erst wenn man sie über die Stromcurve von I integrirt, muſs sie Richtiges liefern. Das fragliche Elementargesetz kann man daher noch in weitgehendem Maaſse willkürlich gestalten. Nach AMPÈRE üben z. B. die Elemente Anziehungs- und Abstoſsungskräfte auf einander aus. Wir wollen das AMPÈRE'sche Gesetz ableiten, indem wir (233) nach dl integriren, das Integral durch partielle Integration umformen und dann wieder von der ganzen Stromcurve auf das Linienelement dl zurückschlieſsen.

Wir führen diese Umformung nur an dem Ausdruck für $\mathfrak{X}$ durch. Da

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{x - \xi}{r^3}$$

und

$$dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = dl\, d\lambda \cos(dl, d\lambda)$$

ist, finden wir für die x-Componente der Integralwirkung zunächst den Betrag:

$$\frac{IJ}{A^2}\left\{d\xi \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} dl + d\eta \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{dl} dl + d\zeta \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dx}{dl} dl \right.$$

$$\left. + d\lambda \overline{\int} \frac{x - \xi}{r^3} \cos(dl, d\lambda)\, dl \right\}.$$

Der Integrationsweg ist eine geschlossene Curve; daher heben sich bei der partiellen Integration die Terme fort, welche sich auf die Integrationsgrenzen beziehen, und es ist

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d(x - \xi)}{dl} dl = - \overline{\int} (x - \xi) \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) dl$$

$$= \overline{\int} (x - \xi) \frac{d}{dl} \left(\frac{y - \eta}{r^3}\right) dl = \overline{\int} \frac{x - \xi}{r^3} \left(\frac{dy}{dl} - 3 \frac{y - \eta}{r} \frac{\partial r}{\partial l}\right) dl.$$

Ebenso ist

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{x - \xi}{r^3} \left(\frac{dx}{dl} - 3 \frac{x - \xi}{r} \frac{\partial r}{\partial l}\right) dl,$$

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{x - \xi}{r^3} \left(\frac{dz}{dl} - 3 \frac{z - \zeta}{r} \frac{\partial r}{\partial l}\right) dl.$$

Bedenkt man ferner, daſs

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos(r, dl)$$

$$\frac{x - \xi}{r} d\xi + \frac{y - \eta}{r} d\eta + \frac{z - \zeta}{r} d\zeta = \cos(r, d\lambda)\, d\lambda$$

ist, so findet man für die in Rede stehende Kraftcomponente den Werth

$$\frac{IJ}{A^2}\,d\lambda\int\frac{x-\xi}{r^3}\big(2\cos(dl,d\lambda)-3\cos(r,dl)\cos(r,d\lambda)\big)\,dl\,.$$

Zieht man endlich den Schlufs von der Integral- auf die Elementarwirkung, so erhält man für die AMPÈRE'sche Anziehungskraft den Betrag

$$\mathfrak{K}=\frac{IJ}{A^2}\cdot\frac{dl\,d\lambda}{r^2}\big(2\cos(dl,d\lambda)-3\cos(r,dl)\cos(r,d\lambda)\big)\,; \qquad (234)$$

denn es ist ihre x-Componente

$$\mathfrak{X}=\frac{x-\xi}{r}\,\mathfrak{K}\,,$$

und für die beiden anderen würden die entsprechenden Umformungen liefern

$$\mathfrak{Y}=\frac{y-\eta}{r_1}\,\mathfrak{K}\,,\qquad \mathfrak{Z}=\frac{z-\zeta}{r}\,\mathfrak{K}\,.$$

Zu einer einfachen Deutung dieser Gleichung gelangt man, wenn man die x-Axe parallel zur Entfernung r legt. Wegen der Identität

$$\cos(dl,d\lambda)=\cos(x,dl)\cos(x,d\lambda)+\cos(y,dl)\cos(y,d\lambda)+\cos(z,dl)\cos(z,d\lambda)$$

nimmt (234) dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}=\frac{IJ}{A^2}\,\frac{dl\,d\lambda}{r^2}\Big(&-\cos(x,dl)\cos(x,d\lambda)\\&+2\big(\cos(y,dl)\cos(y,d\lambda)+\cos(z,dl)\cos(z,d\lambda)\big)\Big)\\=\frac{IJ}{A^2}\,&\frac{-dx\,d\xi+2(dy\,d\eta+dz\,d\zeta)}{r^2}\,.\end{aligned}$$

Die Componenten von dl und $d\lambda$ in Richtung der Entfernung r üben demnach die Kraft

$$-\frac{IJ\,dx\,d\xi}{A^2\,r^2}\,,$$

die dazu senkrechten dagegen die Kraft

$$+2\,\frac{IJ(dy\,d\eta+dz\,d\zeta)}{A^2\,r^2}$$

auf einander aus. Je nachdem diese Werthe positiv oder negativ sind, bedeuten sie Anziehung oder Abstofsung.

Schliefslich wollen wir noch zeigen, dafs sich die Wirkungen zweier Stromkreise auf einander aus einem Potential

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{\cos(dl, d\lambda)}{r}\,dl\,d\lambda \tag{235}$$

herleiten lassen in der Art, dafs wenn der vom Strom J durchflossene Draht eine Verschiebung erfährt, deren Componenten für das Element $d\lambda$ gleich $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sind, die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$\overline{\int} d\lambda\left\{\delta\xi\overline{\int}\mathfrak{X}\,dl + \delta\eta\overline{\int}\mathfrak{Y}\,dl + \delta\zeta\overline{\int}\mathfrak{Z}\,dl\right\} = -\delta P \tag{236}$$

ist. (Hier ist die Bezeichnung insofern verändert, als an die Stelle von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ getreten ist: $\mathfrak{X}\,dl\,d\lambda$, $\mathfrak{Y}\,dl\,d\lambda$, $\mathfrak{Z}\,dl\,d\lambda$). Dabei betrachten wir $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zwar nicht als längs der Stromcurve constant — diese wird also im Allgemeinen deformirt —, wohl aber als stetig veränderlich. Gleitstellen sind hierdurch ausgeschlossen.

Zu diesem Zweck gehen wir vom GRASSMANN'schen Elementargesetz aus. Wir setzen in (233) zunächst

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta$$
$$= -\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}d\zeta\right) = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}d\lambda$$

und führen dann zur Festlegung eines Punktes auf der Stromcurve J den Parameter $\varkappa$ ein, so dafs

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}d\lambda = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\varkappa}d\varkappa = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}d\varkappa$$

wird. Den gleichen Dienst leistet für die Stromcurve I der Parameter k. Dann folgt aus (233) und (235)

$$\mathfrak{X}\,dl\,d\lambda = -\frac{IJ}{A^2}\left\{\frac{dx}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{dk} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{dk} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{dk}\right)\right\}dk\,d\varkappa, \tag{233a}$$

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right)dk\,d\varkappa.$$

Also wird

$$\delta P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\left\{\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\delta\zeta\right)\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\delta\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\delta\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\delta\zeta}{d\varkappa}\right)\right\} dk\,d\varkappa;$$

formen wir dann den zweiten Theil dieses Integrals durch partielle Integration nach $\varkappa$ um, so findet man

$$\delta P = \frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\left\{\delta\xi\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dx}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\delta\varkappa}\right]\right.$$
$$+ \delta\eta\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dy}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}\right]$$
$$\left. + \delta\zeta\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dz}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}\right]\right\} dk\,d\varkappa;$$

der Vergleich mit (233a) bestätigt unmittelbar die Richtigkeit von (236).

Nun hatten wir soeben Gleitstellen ausgeschlossen. Es könnte scheinen — und thatsächlich ist dieser Einwand erhoben worden —, als wäre die Allgemeingültigkeit der Gleichung (236) dadurch beeinträchtigt. Man darf sich aber das Gleiten zweier Stücke des leitenden Systems nicht als unvermittelte Bewegung absolut starrer Körper vorstellen; denn hierbei würde jeder Stromfaden, insofern er aus einer continuirlichen Reihe materieller Theile besteht, zerrissen werden. Erfahrungsgemäſs häuft sich die Elektricität an solchen Stellen aber nicht an, sondern gleicht sich durch neugebildete Schlieſsungen sofort aus. Wir müssen deſshalb die beiden Enden des materiellen Theils des Stromfadens nicht als Enden der Leitung überhaupt, sondern als durch ein äuſserst kleines, von materiellen Theilen freies Stromfadenelement verbunden denken. In diesem Sinne läſst sich unsere Rechnung durchaus aufrecht erhalten.

Thatsächlich kommt eine wirkliche Unstetigkeit der Bewegung in der Natur nicht vor. Vielfach muſs man, um zu groſse Reibung zu vermeiden, zwischen die Enden der festen, an einander „gleitenden" Theile der Leitung eine Flüssigkeit bringen. Jede reibende Flüssigkeit haftet mit ihrer Grenzschicht aber fest an der Wandung, vermittelt also die Stetigkeit der Bewegung. Und wo es keine Flüssigkeit thut, erzeugen fast continuirlich überspringende Funken Metalldampf, welcher ebenso wirkt, und vermeidet man auch diese, indem man die gleitenden Körper fest gegen einander preſst, so entstehen durch gegenseitige Abschleifung Uebergangsschichten.

Historisch sei bemerkt, daſs Helmholtz an Stelle des Neumann'schen Potentials (235) früher[1]) ein anderes benutzte, welches entsteht, wenn man zu (235) die Identität

$$0 = \frac{1}{2A^2}(1-k)\overline{\int}\overline{\int}\frac{\partial^2 r}{dl\,d\lambda}\,dl\,d\lambda,$$

wo k eine unbestimmte Constante ist, hinzuaddirt. Da, was hier nicht bewiesen werden soll,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial\lambda} = \frac{1}{r}\left(\cos(r, dl)\cos(r, d\lambda) - \cos(dl, d\lambda)\right)$$

ist, findet man die Formel

$$P = -\frac{1}{2}\,\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\,[(1+k)\cos(dl, d\lambda) + (1-k)\cos(r, dl)\cos(r, d\lambda)]\,dl\,d\lambda.$$

Wir werden von ihr keinen Gebrauch machen.

Wollte man nach (236) das Potential eines linearen Stromes auf sich selbst berechnen, so erhielte man keinen bestimmten Werth, weil $r = 0$ wird, wenn dl und $d\lambda$ mit einander identisch werden. Zu diesem Zwecke muſs man unter allen Umständen die räumliche Vertheilung des Stromes berücksichtigen.

§ 65. Das magnetische Feld räumlich vertheilter Ströme.

Ein räumlich vertheilter Strom läſst sich als aus Stromfäden bestehend betrachten, deren jeder einen linearen Strom repräsentirt, die Anwendung der Gleichungen (231) also unmittelbar zuläſst. Man braucht nur über alle Stromfäden zu integriren, um die magnetische Kraft der räumlichen Strömung zu finden. An die Stelle der Stromstärke I tritt dabei das Product aus der Stromdichte q (Compo-

---

[1]) Zur Zeit dieser Vorlesung betrachtete Helmholtz selbst den nach ihm benannten Ausdruck für das Potential P als veraltet, wie aus seinem Notizbuch hervorgeht. Der Herausgeber.

nenten: u, v, w) und dem senkrechten Querschnitt dQ des Stromfadens, es wird also

$$I\,dl = q\,d\,Q\,dl$$
$$I\,dx = I\,dl\cos(x, dl) = q\cos(x, dl)\,d\,Q\,dl = u\,d\,Q\,dl$$
etc.

Hier ist $d\,Q\,dl$ ein Volumelement des Stromleiters, freilich von besonderer Form, da ja dl in Richtung der Stromröhre liegt. Bei der Integration über das Volumen kommt es aber nicht darauf an, wie wir uns die Elemente gelagert denken; wir können defshalb $d\,Q\,dl$ durch $dx\,dy\,dz$ ersetzen und finden so aus (231) für die Componenten der magnetischen Feldstärke eines räumlich vertheilten Stromes:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}v - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}w\right)dx\,dy\,dz \\ M &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}w - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}u\right)dx\,dy\,dz \\ N &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}u - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}v\right)dx\,dy\,dz\,. \end{aligned}\right\} \tag{237}$$

Hier ersetzen wir die Differentiation von $\frac{1}{r}$ nach x, y, z durch die nach ξ, η, ζ. Da diese Coordinaten bei der Integration nach x, y, z constante Parameter sind, können wir dann die Reihenfolge von Integration und Differentiation umkehren und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ M &= \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ N &= \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \end{aligned}\right\} \tag{237 a}$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{A}\iiint\frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz \\ V &= \frac{1}{A}\iiint\frac{v}{r}\,dx\,dy\,dz \\ W &= \frac{1}{A}\iiint\frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \tag{238}$$

ist. Die Gröſsen U, V, W berechnen sich, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{A}$, aus den Componenten u, v, w des Vectors q wie das scalare Potential φ aus der scalaren Raumdichte der elektrischen Ladung. Man kann sie selbst als die Componenten eines Vectors betrachten, den man als das Vectorpotential der Stromdichte bezeichnet. Denkt man sich einem Continuum eine unendlich kleine Verrückung ertheilt, welche in jedem Punkte dem dort herrschenden Vectorpotential gleichgerichtet und an Gröſse proportional ist, so sind die Terme (siehe Band II dieser Vorlesungen, § 9)

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

proportional den Drehungen, welche ein Volumelement um die x-, die y- und die z-Richtung erfährt; sie sind die Componenten eines neuen Vectors, welchen man dieser Analogie halber als den Wirbel oder Curl des Vectors U, V, W bezeichnet. Die magnetische Feldstärke ist nach (237a) gleich dem Wirbel des Vectorpotentials der Stromdichte.

Wir bilden nun die Wirbelcomponenten der Feldstärke selbst; aus (237a) folgt für die x-Componente:

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right) - \varDelta U.$$

Nach (238) ist aber

$$\varDelta U = - \frac{4 \pi u}{A} \tag{238a}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{1}{A} \iiint \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) dx\, dy\, dz;$$

hier ist über den ganzen Raum zu integriren, soweit er vom Strom durchflossen ist. Setzen wir nun wiederum

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \text{ etc.,}$$

so können wir partiell integriren, wobei ein Flächenintegral über alle Unstetigkeitsflächen der Stromdichte auftritt; die Grenze des Stromgebietes gehört auch dazu:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}$$

$$= \frac{1}{A} \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz + \frac{1}{A} \iint \frac{ds}{r} (q_{n_1} + q_{n_2}).$$

Nach (218a) und (218b) ist aber beim stationären Strom:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$q_{n_1} + q_{n_2} = 0.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0 \tag{238 b}$$

und wir finden für den Wirbel der magnetischen Kraft die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} &= \frac{4\pi}{A} u \\ \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{4\pi}{A} v \\ \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} &= \frac{4\pi}{A} w. \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

Der Wirbel der magnetischen Kraft ist gleich dem 4π-fachen der elektromagnetisch gemessenen Stromdichte; aufserhalb des Stromgebietes verschwindet er; dort ist also die Bedingung erfüllt, unter welcher man die magnetische Kraft durch Differentiation aus einer scalaren Potentialfunction ableiten kann; innerhalb des Stromgebietes ist dies nicht möglich. Für die Divergenz der Kraft folgt aus (237a)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = 0; \tag{239a}$$

magnetische Raumladungen treten nicht auf; und da nach (238) (vgl. § 11) die ersten Ableitungen von U, V, W überall stetig sind, gilt dasselbe nach (237a) von den Componenten der magnetischen Kraft, so dafs auch Flächenbelegungen ausgeschlossen sind. Die Kraftlinien laufen daher alle in sich zurück.

Auf demselben Wege, wie von (231) und (237), gelangt man von (232) zu den Gleichungen für die ponderomotorische Kraft, welche das Volumelement $dx\,dy\,dz$ des stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld von der Feldstärke L, M, N erfährt:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \frac{1}{A}(Nv - Mw)\,dx\,dy\,dz\\ \mathfrak{Y} &= \frac{1}{A}(Lw - Nu)\,dx\,dy\,dz\\ \mathfrak{Z} &= \frac{1}{A}(Mu - Lv)\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\} \tag{240}$$

Und ebenso läſst sich die Gleichung (235) für das NEUMANN'sche Potential zweier Ströme auf einander übertragen. Giebt man den Componenten der Stromdichte und den Coordinaten in dem einen von beiden zur Unterscheidung den Index 1, so findet man, da $dl\,d\lambda\cos(dl,d\lambda) = dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta$ ist, und $IJ(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)$ durch $(u u_1 + v v_1 + w w_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1$ ersetzt werden muſs:

$$P = -\frac{1}{A^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\frac{1}{r}(u u_1 + v v_1 + w w_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1; \tag{241}$$

oder wenn man nach (238) das Vectorpotential U_1, V_1, W_1 der Strömung u_1, v_1, w_1 einführt

$$P = -\frac{1}{A}\int\!\!\int\!\!\int(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\,dx\,dy\,dz. \tag{241a}$$

Will man das Potential eines Stromes auf sich selbst berechnen, so erhält man jetzt, da nach (238) U_1, V_1, W_1 überall endliche Functionen sind, einen bestimmten Werth; man muſs nur in (241) die Integrationen nach $dx\,dy\,dz$ und $dx_1\,dy_1\,dz_1$ über dasselbe Stromgebiet ausführen. Dabei zählt man freilich zunächst jedes Paar von Volumelementen doppelt, indem einmal das Element 1 unter der Bezeichnung $dx\,dy\,dz$ und das Element 2 unter der Benennung $dx_1\,dy_1\,dz_1$ auftritt, das andere Mal umgekehrt. Um dies auszugleichen, setzt man den Factor $\frac{1}{2}$ dazu und findet so für das Selbstpotential eines Stromsystems:

$$\left.\begin{aligned}P &= -\frac{1}{2A^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\frac{1}{r}(uu_1 + vv_1 + ww_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1\\ &= -\frac{1}{2A}\int\!\!\int\!\!\int(Uu + Vv + Ww)\,dx\,dy\,dz;\end{aligned}\right\} \tag{241 b}$$

denn den Index 1 kann man in der letzten Gleichung, wo U, V, W die Componenten des Vectorpotentials der Strömung u, v, w selbst sind, fortlassen. Diese Formel umfaſst natürlich auch den Fall, daſs das Stromsystem aus mehreren unabhängigen Strömen besteht. Sie erinnert in ihrem Aufbau an die Gleichung (210 a) für die Energie eines elektrischen Feldes; denn dort wird über das Product aus der Dichte der Ladung und dem aus ihr abgeleiteten Potential integrirt, hier über die Summe der Producte aus den Componenten der Stromdichte und denen ihres Vectorpotentials. Freilich hat (241 b) das negative Vorzeichen (vgl. § 68).

§ 66. Der Stokes'sche Satz.

Treten auſser den elektrischen Strömen noch permanente Magnete als Ursachen des magnetischen Feldes auf, so superponirt sich zu dem Feld der Ströme das durch die Potentialfunction φ darstellbare Feld der Magnete; an die Stelle der Gleichungen (237 a) tritt dann

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ M &= \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ N &= \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Bildet man die Wirbelcomponenten $\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \xi}$ etc., so heben sich die Differentialquotienten von φ fort, so daſs (239) in Gültigkeit bleibt, bildet man die Divergenz, so verschwinden dagegen die Differentialquotienten des Vectorpotentials und man findet statt der Gleichung (239 a)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = - \Delta \varphi. \tag{242 a}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daſs der Vector L, M, N, von dessen physikalischer Bedeutung wir zunächst vollkommen absehen können, überall endlich und stetig ist und im Unendlichen mindesten wie $\frac{1}{R^2}$ abnimmt und zeigen, daſs er dann durch Angabe seiner Divergenz und seines Wirbels eindeutig bestimmt ist. Stimmen nämlich zwei derartige Vectoren L, M, N und L', M', N' in den Wirbeln überein, so sind die Wirbelcomponenten des Vectors, der durch vectorielle Subtraction der beiden entsteht und die Componenten $L - L'$, $M - M'$, $N - N'$ besitzt,

$$\frac{\partial (N - N')}{\partial \eta} - \frac{\partial (M - M')}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{etc.}$$

Dieser Vector ist also sicher aus einer scalaren Potentialfunction φ ableitbar. Stimmen nun aber die erstgenannten Vectoren auch noch in der Divergenz überein, d. h. ist

$$\frac{\partial (L - L')}{\partial \xi} + \frac{\partial (M - M')}{\partial \eta} + \frac{\partial (N - N')}{\partial \zeta} = 0\,,$$

so verschwindet auch die Δ-Ableitung der Potentialfunction φ. Weiter wissen wir noch von der Function φ, daſs ihre Ableitungen überall endlich und stetig sind, und daſs dasselbe von ihr selbst gilt. Denn wäre sie irgendwo im Endlichen unendlich groſs, so müſste dasselbe bei den Ableitungen der Fall sein, wäre sie aber unstetig, so würde dies auf das Auftreten von Doppelschichten hinweisen, deren Moment entweder von Ort zu Ort veränderlich — dann wären die Ableitungen nach § 19 unstetig — oder constant sein müſste, — dann würden die letzteren längs der Randcurve nach § 62 unendlich. Ferner müssen nach unseren Annahmen die Ableitungen im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{R^2}$ verschwinden und φ muſs sich in Folge dessen dort mindestens wie $\frac{1}{R}$ einer Constanten nähern, die wir, da es darauf nicht weiter ankommt, gleich Null setzen. Daraus folgt aber nach (83), daſs das für den ganzen Raum zu bildende Integral

$$\iiint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) dx\, dy\, dz = 0$$

sein muſs, was nur für $\varphi = 0$, also auch $L - L' = 0$, $M - M' = 0$, $N - N' = 0$ möglich ist; was zu beweisen war.

Im Allgemeinen, wenn man Unstetigkeitsflächen der Functionen L, M, N zuläſst, muſs man noch die Flächendivergenz und einen als „Flächenwirbel" bezeichneten Vector zur Bestimmung hinzuziehen; doch ist damit eigentlich nichts Neues gewonnen, da man zu solchen Unstetigkeiten immer durch Grenzprocesse gelangen kann.

Die Gleichungen (242) sind also die allgemeinste Darstellung eines überall endlichen und stetigen Vectors, welche physikalische

Bedeutung er auch haben mag. φ ist in ihnen nach (242 a) allein durch seine Divergenz, U, V, W nach (238) allein durch seinen Wirbel bestimmt. Das Vectorpotential U, V, W ist freilich nicht wie φ durch (242) eindeutig definirt; vielmehr kann man, da nur seine Wirbelcomponenten dort auftreten, seine Divergenz noch als beliebige Ortsfunction wählen. Setzt man sie überall gleich Null, so folgt aus (242) ähnlich wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} = - \Delta U. \quad \text{etc.}$$

Nur unter dieser Voraussetzung bestimmt es sich aus dem Wirbel von L, M, N in der durch (238) gegebenen Weise.

Als Circulationswerth des Vectors L, M, N für eine geschlossene Curve bezeichnen wir das Linienintegral

$$\overline{\int}(L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta)$$

erstreckt über diese. Er ist Null, wenn der Vector aus einer Potentialfunction ableitbar ist, mufs also durch den Wirbel des Vectors bestimmt sein.

Um diesen Gedanken weiter zu verfolgen, betrachten wir (siehe Figur 27) als Integrationsweg zunächst eine beliebige, nicht geschlossene Curve α, deren Anfangs- und Endpunkt A und B heifsen mögen; einen Punkt ξ, η, ζ auf ihr bestimmen wir durch den Parameter k. L, M, N sollen stetige und differenzirbare Functionen des Ortes sein. Dann variiren wir die Curve so, dafs wir bei constantem k die Coordinaten ξ, η, ζ um $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ wachsen lassen; nur an den Endpunkten A und B sollen diese Verrückungen verschwinden. Integriren wir dann längs der variirten Curve β von A und B und längs der ursprünglichen zurück von B nach A, so ist der Circulationswerth für diesen Umlauf gleich der Differenz $\delta\Phi$ der Werthe, welche das Integral

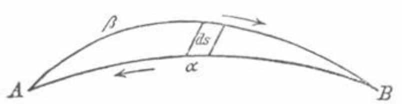

Fig. 27.

$$\Phi = \int_A^B (L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta) = \int_A^B \left(L\frac{d\xi}{dk} + M\frac{d\eta}{dk} + N\frac{d\zeta}{dk}\right) dk$$

für die beiden Curven annimmt.

Nun ist aber

$$\delta \Phi = \int_A^B \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{d\zeta}{dk} \right) \delta \xi \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial \eta} \frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{d\zeta}{dk} \right) \delta \eta$$
$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} \frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} \frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dk} \right) \delta \zeta$$
$$\left. + \left(L \frac{d\delta\xi}{dk} + M \frac{d\delta\eta}{dk} + N \frac{d\delta\zeta}{dk} \right) \right\} dk,$$

oder wenn man den letzten Theil durch partielle Integration umformt und ein wenig umstellt:

$$\delta \Phi = \int_A^B \left\{ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{d\zeta}{dk} \delta\eta - \frac{d\eta}{dk} \delta\zeta \right) \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \left(\frac{d\xi}{dk} \delta\zeta - \frac{d\zeta}{dk} \delta\xi \right)$$
$$\left. + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \right) \left(\frac{d\eta}{dk} \delta\xi - \frac{d\xi}{dk} \delta\eta \right) \right\} dk.$$

Bezeichnet man aber mit ds das Flächenstück, welches das dem Differential dk entsprechende Curvenstück bei der Verrückung beschreibt, so ist

$$dk \left(\frac{d\zeta}{dk} \delta\eta - \frac{d\eta}{dk} \delta\zeta \right) = ds \cos(n, x)$$
$$dk \left(\frac{d\xi}{dk} \delta\zeta - \frac{d\zeta}{dk} \delta\xi \right) = ds \cos(n, y)$$
$$dk \left(\frac{d\eta}{dk} \delta\xi - \frac{d\xi}{dk} \delta\eta \right) = ds \cos(n, z);$$

also

$$\left. \begin{aligned} \delta \Phi = \int ds \left\{ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \cos(n, y) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \right) \cos(n, z) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Die Integration bezieht sich auf den unendlich schmalen Streifen zwischen beiden Curven, daher steht nur ein Integralzeichen da;

und die Richtung der Normalen n ist so gewählt, daſs $\cos(n, z) = -1$ wird, wenn

$$\frac{d\xi}{dk}dk > 0 \qquad \frac{d\eta}{dk}dk = 0 \qquad \frac{d\zeta}{dk}dk = 0$$

$$\delta\xi = 0 \qquad \delta\eta > 0 \qquad \delta\zeta = 0$$

ist. Die Normale und die Umlaufsrichtung, in der wir den Integrationsweg durchlaufen, liegen also zu einander wie die positive z-Axe und eine Drehung um sie, welche von der positiven x- zur positiven y-Axe führt, oder so, wie die Stromrichtung zu den sie umkreisenden magnetischen Kraftlinien.

Um nun den Circulationswerth für einen beliebigen Integrationsweg zu berechnen, bestimmen wir auf ihm zwei willkürlich gewählte Punkte A und B (siehe Figur 28). Durch diese wird er in zwei Theile α und β getheilt. Nun ziehen wir auf einer von ihm berandeten, sonst aber willkürlich gewählten Fläche eine beliebige Curve γ von A nach B und bilden die Circulationswerthe erstens für den von A über β nach B und über γ nach A zurückführenden Weg, zweitens für den Umlauf von A über γ nach B und über α zurück; der zu berechnende Circulationswerth ist die Summe dieser beiden, denn die zweimalige Integration über γ erfolgt in entgegengesetztem Sinn, fällt bei der Addition also heraus.

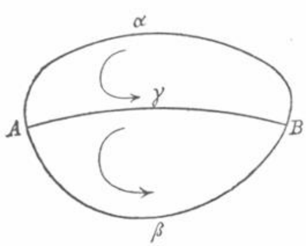

Fig. 28.

Fährt man so fort, so sieht man, daſs man zum Ziel kommt, wenn man die Fläche in unendlich viele, unendlich schmale, von A nach B führende Streifen theilt, die Circulationswerthe $\delta\Phi$ für ihre Berandung ermittelt und dann über alle Streifen integrirt. Nach (243) findet man so den STOKES'schen Satz

$$\left.\begin{aligned}\overline{\int}(Ld\xi + Md\eta + Nd\zeta) = \int\delta\Phi = \iint ds\Big\{\Big(\frac{\partial N}{\partial\eta} - \frac{\partial M}{\partial\zeta}\Big)\cos(n, x)\\ + \Big(\frac{\partial L}{\partial\zeta} - \frac{\partial N}{\partial\xi}\Big)\cos(n, y) + \Big(\frac{\partial M}{\partial\xi} - \frac{\partial L}{\partial\eta}\Big)\cos(n, z)\Big\};\end{aligned}\right\} \tag{243 a}$$

das geschlossene Linienintegral des Vectors L, M, N ist hier in ein Flächenintegral über die Normalcomponente seines Wirbels verwandelt. Die der Integration zu Grunde zu legende Fläche ist dabei bis auf ihre Berandung beliebig gewählt. Führt man sie für zwei verschiedene, aber von derselben Curve berandete Flächen durch, so ist die Differenz der gefundenen Werthe gleich dem Integral

$$\iint ds \left\{ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) \cos(n_i, y) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \right) \cos(n_i, z) \right\}$$

erstreckt über die von ihnen gebildete geschlossene Oberfläche, wenn n_i die in das Innere des eingeschlossenen Raumes weisende Normale ist. Nach dem GAUSS'schen Satz läfst sich das letztere in das Raumintegral

$$-\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

verwandeln, welches verschwindet, weil der Integrand, die Divergenz eines Wirbels, identisch Null ist.

Nach (243 a) können wir für den Wirbel die Definition geben, dafs seine zum Flächenelement ds normale Componente gleich dem Verhältnifs des für den Umfang von ds gebildeten Linienintegrals $\int (L\, d\xi + M\, d\eta + M\, d\zeta)$ zum Inhalt von ds ist. Die analoge Definition für die Divergenz lautet, dafs sie das Verhältnifs des Flächenintegrals $-\iint ds\, (L \cos(n_i, x) + M \cos(n_i, y) + N \cos(n_i, z))$, gebildet über die Begrenzung des Volumelements, zu dem Volumelement selbst ist. Betrachten wir nun ein Element einer Unstetigkeitsfläche; wir können die x-Axe seiner Normalen parallel wählen. Berechnen wir nach dieser Definition die Wirbelcomponente, welche senkrecht zu einem unendlich kleinen, sehr langgestreckten, von der Unstetigkeitsfläche halbirten Rechteck mit den Seiten $d\xi$, $d\eta$ ist (siehe Figur 29), so findet man unter Vernachlässigung des von $d\xi$ herrührenden Theils des Linienintegrals den Werth

$$\frac{(M_1 - M_2)\, d\eta}{d\xi\, d\eta},$$

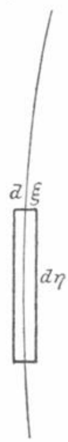

Fig. 29.

der unendlich ist wie $\frac{1}{d\xi}$. Das Entsprechende geschieht, wenn man die Divergenz für eine unendlich kleine, sehr flache von der Unstetigkeitsfläche halbirte Kapsel berechnet, deren

Höhe $d\xi$ und deren Grundfläche $d\eta\, d\zeta$ ist; denn man findet sie gleich

$$\frac{(L_1 - L_2)\, d\eta\, d\zeta}{d\xi\, d\eta\, d\zeta}.$$

Wir wissen nun schon (vergl. § 23), dafs man, um diesen unendlichen Werth der Divergenz zu umgehen, den Begriff der Flächendivergenz bildet, indem man nicht durch das Volumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, sondern durch das Flächenelement $d\eta\, d\zeta$ dividirt. Dementsprechend gelangen wir zur Definition des Flächenwirbels, wenn wir anstatt durch das Flächenelement $d\xi\, d\eta$ durch das Linienelement $d\eta$ dividiren. $L_1 - L_2$ findet man so als Werth der Flächendivergenz, $M_1 - M_2$ und ebenso $N_1 - N_2$, d. h. den Sprung der Tangentialcomponenten, als den Betrag der z- und der y-Componente des Flächenwirbels. Seine x-Componente ist 0; seine Richtung liegt also stets in der Fläche. Wie aus seiner Definition hervorgeht, ist er der Grenzfall starker räumlicher Wirbel; machen wir im Folgenden, wie wir es thun wollen, von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch, so können wir von ihm absehen. Es sei nur erwähnt, dafs im STOKES'schen Satz im Allgemeinen zum Flächenintegral des räumlicheu Wirbels ein Linienintegral des Flächenwirbels hinzutritt.

Zum Schlufs dieses Paragraphen geben wir noch zwei Beispiele für die Anwendung des STOKES'schen Satzes (243 a). Verstehen wir unter L, M, N wieder die Componenten der magnetischen Kraft, so folgt aus (239) und (224) für einen den Strom I umschlingenden Weg:

$$\overline{\int}(L d\xi + M d\eta + N d\zeta) = \frac{4\pi}{A}\int\!\!\int ds\,(u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z))$$

$$= \frac{4\pi}{A}\int\!\!\int ds\, q_n = \frac{4\pi}{A} I,$$

was uns zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurückführt, da $\frac{I}{A}$, die elektromagnetisch gemessene Stromstärke, gleich dem Moment der äquivalenten Doppelfläche ist. Das andere Beispiel bezieht sich auf die Deutung des NEUMANN'schen Potentials für die Wechselwirkung zwischen einem linearen Strom I und einem beliebigen Stromsystem, dessen magnetische Feldstärke mit L_1, M_1, N_1, und dessen Vectorpotential mit U_1, V_1, W_1 bezeichnet werden soll. Formel (241 a) ergiebt, wenn dl das Linienelement, dQ der Querschnitt des linearen Leiters ist, vermöge den Substitutionen

$$u\, dQ\, dl = q\, dQ \cos(x, dl)\, dl = I dx$$

für $u\,dx\,dy\,dz$ etc. (vergleiche den Anfang von § 64)

$$P = -\frac{I}{A}\overline{\int}(U_1\,dx + V_1\,dy + W_1\,dz). \tag{244}$$

Daraus folgt nach (243 a) und (237 a)

$$P = -\frac{I}{A}\int\!\!\int ds \left\{ \left(\frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial x}\right)\cos(n, y) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right\}$$
$$= -\frac{I}{A}\int\!\!\int ds\,(L_1\cos(n, x) + M_1\cos(n, y) + N_1\cos(n, z)),$$

d. h. das Potential der Wechselwirkung ist gleich der Anzahl der Kraftlinien, welche das Stromsystem durch die Stromcurve des Stromes I hindurchsendet, wenn als positiv eine Kraftlinie gerechnet wird, welche durch die Stromschleife in entgegengesetztem Sinne hindurchführt, wie die Kraftlinien des Stromes I selbst. Denn die Richtung von n fällt mit dem Richtungssinn der letzteren zusammen. Dies Ergebnifs steht in Einklang mit dem entsprechenden für die Wechselwirkung zwischen einem linearen Strom und einem Magnetsystem, das wir in § 62 ableiteten; und so mufs es ja auch sein, wenn anders der lineare Strom einer magnetischen Doppelschicht äquivalent sein soll.

§ 67. Die Ampère'sche Magnetismushypothese; das Vectorpotential eines magnetischen Körpers.

Nach (230b) ist

$$\varphi = \frac{I}{A}\int\!\!\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

die Potentialfunction des magnetischen Feldes eines linearen Stromes. Rückt der Punkt ξ, η, ζ in eine gegen die Dimensionen der Stromcurve grofse Entfernung von ihr, so kann man in der Gleichung

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\Big(\cos(x, r)\cos(x, n) + \cos(y, r)\cos(y, n) + \cos(z, r)\cos(z, n)\Big)$$

r und seine Richtungscosinus für die Integration über die AMPÈRE'sche Fläche als constant betrachten und findet

$$\varphi = -\frac{I}{A r^2}\left(\cos(r,x)\iint ds\cos(n,x) + \cos(r,y)\iint ds\cos(n,y) + \cos(r,z)\iint ds\cos(n,z)\right).$$

Dies ist aber die Potentialfunction eines Dipols, bei welchem (vgl. 190b)

$$\frac{I}{A}\iint ds\cos(n,x), \qquad \frac{I}{A}\iint ds\cos(n,y), \qquad \frac{I}{A}\iint ds\cos(n,z)$$

die Componenten des Moments sind. Auf grofse Entfernungen ist der Strom also einer magnetisirten Molekel äquivalent. AMPÈRE gründete hierauf die Hypothese, dafs aller Magnetismus auf moleculare elektrische Ströme zurückzuführen ist. In der That ist es dann ohne Weiteres verständlich, warum es nicht gelingt, positiven und negativen Magnetismus von einander zu trennen. Doch hat diese Vorstellung den Nachtheil, dafs diese Molekularströme im Gegensatz zu den sonst bekannten keinen Energieumsatz bewirken, d. h. weder JOULE'sche Wärme produciren, noch durch die Arbeit elektromotorischer Kräfte unterhalten werden müssen. Da die Aequivalenz von Strom und Doppelfläche innerhalb der letzteren versagt, würde eine Beobachtung des magnetischen Feldes in einer Molekel zwar die Entscheidung zwischen der AMPÈRE'schen und der bisher angewandten Vorstellung zulassen; da sie aber nicht möglich ist, ist eine directe empirische Entscheidung überhaupt ausgeschlossen.

Nun haben wir in § 65 das magnetische Feld eines Stromsystems durch ein Vectorpotential darzustellen gelernt. Ist der aus magnetisirten Molekeln bestehende magnetisirte Körper aber einem System elektrischer Ströme äquivalent, so mufs die von ihm hervorgerufene Feldstärke auch durch ein Vectorpotential darstellbar sein; man braucht nur das Vectorpotential des Dipols zu bilden und über alle Dipole zu summiren. Wenn wir dies durchzuführen versuchen, stofsen wir auf dieselbe Schwierigkeit, die schon in § 49 auftrat, dafs nämlich die Magnetisirung der Molekeln eine unstetige, noch dazu in unbekannter Weise springende Function des Ortes ist. Man mufs defshalb auch hier wieder zur Mittelwerthbildung über alle Molekeln, die ein kleines Volumen $dx\,dy\,dz$ erfüllen, schreiten. Dabei verwischt sich aber der Unterschied zwischen den Räumen zwischen den Molekeln, in denen die Darstellung des Feldes durch ein Vectorpotential möglich sein mnfs, und zwischen dem Inneren der Molekeln, wo dies nicht der Fall ist. So kommt es, daſs das Vectorpotential im ganzen vom magnetisirten Körper erfüllten Volumen die Feldstärke nicht richtig wiedergiebt, während es im Auſsenraume zu denselben Resultaten führt, wie wenn man vom scalaren Potential φ ausgeht.

Wir machen von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch und behaupten, daſs

$$\left.\begin{aligned} U' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ V' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz \\ W' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

die Componenten des Vectorpotentials des magnetisirten Körpers sind. Wir brauchen, um dies zu beweisen, nur zu zeigen, daſs im Auſsenraum die Componenten der Feldstärke durch die Gleichungen [vgl. (237a)]

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W'}{\partial \eta} - \frac{\partial V'}{\partial \zeta} \\ M &= \frac{\partial U'}{\partial \zeta} - \frac{\partial W'}{\partial \xi} \\ N &= \frac{\partial V'}{\partial \xi} - \frac{\partial U'}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \tag{245a}$$

bestimmt sind, und daſs in Analogie zu (238b) die Divergenz

$$\frac{\partial U'}{\partial \xi} + \frac{\partial V'}{\partial \eta} + \frac{\partial W'}{\partial \zeta} = 0$$

ist.

Beides sieht man leicht ein, wenn man (245) durch partielle Integration umformt und dann $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ mit $-\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$ etc. vertauscht. So findet man

$$U' = -\iiint \left(\nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint \left(\nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dx\, dy\, dz$$

etc., also

$$\left. \begin{aligned} U' &= \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \\ V' &= \frac{\partial \varLambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ W' &= \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial \varLambda}{\partial \eta}, \end{aligned} \right\} \tag{245b}$$

wenn man

$$\left. \begin{aligned} \varLambda &= \iiint \frac{\lambda}{r}\, dx\, dy\, dz \\ M &= \iiint \frac{\mu}{r}\, dx\, dy\, dz \\ N &= \iiint \frac{\nu}{r}\, dx\, dy\, dz \end{aligned} \right\} \tag{246}$$

setzt. Allein aus der Form von (245b) folgt, dafs die zweite der genannten Forderungen erfüllt ist. Dagegen mufs man (245b) in 245a) substituiren, um zu sehen, dafs L, M, N die Componenten der Feldstärke sind. Man findet so

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varLambda}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) - \Delta \varLambda .$$

Da nun aber nach (246)

$$\Delta \varLambda = -4 \pi \lambda,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varLambda}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} &= \iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dx\, dy\, dz \\ &= - \iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &= - \varphi \end{aligned} \tag{246a}$$

[φ das scalare Potential des magnetisirten Körpers; siehe (198a)] ist, so folgt für den Aufsenraum, in welchem λ verschwindet:

$$L = - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

was zu beweisen war. Im Magneten dagegen ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial \eta} - \frac{\partial V'}{\partial \zeta} &= L + 4\pi\lambda \\ \frac{\partial U'}{\partial \zeta} - \frac{\partial W'}{\partial \xi} &= M + 4\pi\mu \\ \frac{\partial V'}{\partial \xi} - \frac{\partial U'}{\partial \eta} &= N + 4\pi\nu\end{aligned}\right\} \tag{245c}$$

Diese Gleichungen gelten, wenn Ströme fehlen. Sind hingegen nur Ströme als Erreger des magnetischen Feldes vorhanden, so ist nach (237a)

$$L + 4\pi\lambda = L = \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

etc.,

so daſs im allgemeinsten Fall des Zusammenwirkens von Strömen und magnetisirten Körpern

$$\left.\begin{aligned}L + 4\pi\lambda &= \frac{\partial (W + W')}{\partial \eta} - \frac{\partial (V + V')}{\partial \zeta} \\ M + 4\pi\mu &= \frac{\partial (U + U')}{\partial \zeta} - \frac{\partial (W + W')}{\partial \xi} \\ N + 4\pi\nu &= \frac{\partial (V + V')}{\partial \xi} - \frac{\partial (U + U')}{\partial \eta}.\end{aligned}\right\} \tag{245d}$$

Es folgt hieraus für den vorliegenden, allgemeinsten Fall die Gleichung

$$\frac{\partial (L + 4\pi\lambda)}{\partial \xi} + \frac{\partial (M + 4\pi\mu)}{\partial \eta} + \frac{\partial (N + 4\pi\nu)}{\partial \zeta} = 0, \tag{245e}$$

die gemäſs (201a) die Nichtexistenz wahrer magnetischer Ladung ausspricht.

Aber noch in anderer Weise spielt das Vectorpotential U', V', W' dieselbe Rolle wie das Vectorpotential U, V, W. In § 52 zeigten wir, daſs das Potential der Wechselwirkung zwischen einem Dipol und einem durch die Potentialfunction φ dargestellten Kraftfeld gleich

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -(\lambda L + \mu M + \nu N)$$

ist. Für das magnetische Feld von Strömen läſst sich dies zunächst nur beweisen, wenn sich der Dipol auſserhalb des Stromgebietes befindet; sonst existirt ja keine Potentialfunction. Liegt er aber im Stromgebiet, so wollen wir zunächst die Strömung in dem durch ihn führenden Stromfaden aufgehoben denken. Dann gilt die Gleichung. Stellen wir sie nun wieder her, so macht das für die Werthe von L, M, N nach (237a) nur unendlich wenig aus; denn die dort auftretenden Integrale $\iiint v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} dx\,dy\,dz$ haben dieselbe Form, wie in der Elektrostatik die Ausdrücke für die Componenten der von Raumladungen herrührenden Kraft. Für diese wurde aber schon in § 11 der entsprechende Satz bewiesen. Also ist ganz allgemein das Potential der Wechselwirkung zwischen einem magnetisirten Körper und einem Stromsystem gleich

$$P = -\iiint (\lambda L + \mu M + \nu N)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

L, M, N sind hier die Componenten der allein von den Strömen herrührenden Feldstärke. Wir setzen nach (237a) ihre Werthe ein, wenden dann partielle Integration an, wobei Flächenintegrale wegen der Voraussetzung stetiger Uebergänge nicht auftreten, und finden so, wenn wir dann noch (238) hinzunehmen:

$$\begin{aligned}
P = &-\iiint \left\{ \lambda \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \nu \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
= &-\iiint \left\{ U \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) + V \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial \nu}{\delta \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + W \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
= &-\frac{1}{A} \iiiiiint \frac{1}{r} \left\{ u \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) + v \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + w \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

Nach (245) gilt also für das Potential der Wechselwirkung magnetisirter Körper und elektrischer Ströme die Formel

$$P = -\frac{1}{A} \iiint (U'u + V'v + W'w)\, dx\, dy\, dz$$

in der U', V', W', d. h. das Vectorpotential des magnetisirten Körpers genau dieselbe Rolle spielt, wie U_1, V_1, W_1 in der Gleichung (241a). Handelt es sich demnach um die Wechselwirkung zwischen einem Stromsystem (u, v, w) mit einem anderen u_1, v_1, w_1, dessen Vectorpotential U_1, V_1, W_1 ist und zugleich mit Magneten, so ist das Potential

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{1}{A}\iiint\left((U_1+U')u+(V_1+V')v+(W_1+W')w\right)dx\,dy\,dz \\ &= -\frac{1}{A}\iiint\left[\left(U_1+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)u+\left(V_1+\frac{\partial \Lambda}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)v\right. \\ &\qquad\left.+\left(W_1+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right)w\right]dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (247)$$

[Vgl. (245b).]

Für einen linearen Strom I gilt analog zu (244):

$$\left.\begin{aligned} P = -\frac{I}{A}\int\left[\left(U_1+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dx+\left(V_1+\frac{\partial \Lambda}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\right. \\ \left.+\left(W_1+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right)dz\right] \end{aligned}\right\} \quad (247a)$$

Dies gilt noch ohne jede Einschränkung; woher auch die Magnetisirung stammen mag, immer ist $-\delta P$ die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte bei einer Verschiebung des vom Strom u, v, w durchflossenen Leiters. Jetzt aber schliefsen wir permanenten Magnetismus aus und betrachten U_1', V_1', W_1' als das Vectorpotential desjenigen Antheils der Magnetisirung, der von der Strömung u_1, v_1, w_1 allein inducirt ist; dann wird

$$P = -\frac{1}{A}\iiint\left\{(U_1+U_1')u+(V_1+V_1')v+(W_1+W_1')w\right\}dx\,dy\,dz$$

das Potential der Wechselwirkung zwischen beiden Stromsystemen. Denn $-\delta P$ ist jetzt die Arbeit derjenigen am Gebiet der Strömung u, v, w angreifenden Kräfte, die ihr Dasein der Strömung u_1, v_1, w_1 verdanken. Dafs P seinen Werth nicht ändert, wenn man hier die Rollen der beiden Strömungen vertauscht, erkennt man, indem man ihre Antheile an der magnetischen Feldstärke als L, M, N und L_1, M_1, N_1 von einander unterscheidet. Die Anwesenheit magnetisirter Körper hat nach § 66 auf die Gröfse ihrer Wirbel keinen Einflufs; deshalb gelten ganz allgemein für den ersteren Antheil die Formeln (239)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A} u$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4\pi}{A} v$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4\pi}{A} w .$$

Benutzt man sie in der letzten Gleichung für P, so geht diese in Hinsicht auf (245d) über in:

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{(U_1 + U_1')\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + (V_1 + V_1')\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$+ (W_1 + W_1')\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\Big\} dx\,dy\,dz$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{L\left(\frac{\partial (W_1 + W_1')}{\partial y} - \frac{\partial (V_1 + V_1')}{\partial z}\right)$$

$$+ M\left(\frac{\partial (U_1 + U_1')}{\partial z} - \frac{\partial (W_1 + W_1')}{\partial x}\right)$$

$$+ N\left(\frac{\partial (V_1 + V_1')}{\partial x} - \frac{\partial (U_1 + U_1')}{\partial y}\right)\Big\} dx\,dy\,dz$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint\{L(L_1 + 4\pi\lambda_1) + M(M_1 + 4\pi\mu_1) + N(N_1 + 4\pi\nu_1)\} dx\,dy\,dz.$$

Nun ist aber nach (203a)

$$L_1 + 4\pi\lambda_1 = (1 + 4\pi\varkappa) L_1 ;$$

also findet man für P die für beide Strömungen symmetrische Gleichung:

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L L_1 + M M_1 + N N_1)\, dx\,dy\,dz .$$

Läfst man sie mit einander identisch werden, so wird aus P das Selbstpotential der Strömung, nur mufs man, wie schon früher in ähnlichen Fällen, den Factor $\frac{1}{2}$ hinzufügen. Denn man zählt dann die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden 1 und 2 insofern doppelt, als man einmal den Beitrag des Stromfadens 1 zu $(U_1 + U_1')$ etc. berechnet und das Integral $\iiint\left\{(U_1 + U_1')u + .. + ..\right\} dx\,dy\,dz$ für das Volumen des anderen bildet, das zweite Mal aber umgekehrt verfährt. Also ist

$$P = -\frac{1}{2A}\iiint\Big\{(U+U')u+(V+V')v+(W+W')w\Big\}dx\,dy\,dz \quad (247\,\mathrm{b})$$

das Selbstpotential eines beliebigen Stromsystems bei Anwesenheit magnetisirbaren Substanzen.

Ist die Magnetisirungszahl $\varkappa$ in der ganzen in Betracht kommenden Umgebung des Stromsystems constant, so ist nach (203a) und (239)

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z} = \varkappa\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{4\pi\varkappa}{A}u\,,$$

und nach (245) und (238)

$$U' = \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \frac{4\pi\varkappa}{A}\iiint\frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\varkappa U$$

also, wenn man diese und die entsprechenden Beziehungen für V' und W' in (247b) einsetzt:

$$P = -\frac{1+4\pi\varkappa}{2A}\iiint(Uu+Vv+Ww)\,dx\,dy\,dz,$$

d. h. das Selbstpotential ist proportional zur magnetischen Permeabilität $1+4\pi\varkappa$. Dasselbe gilt von den ponderomotorischen Kräften zwischen Strömen, im Gegensatz zu den Kräften zwischen Ladungen. Denn nach § 52ff. sind diese umgekehrt proportional zu $1+4\pi\varkappa$. Auch in diesem Punkte versagt die Aequivalenz linearer Ströme mit Doppelschichten.

§ 68. Die Energie des magnetischen Feldes elektrischer Ströme.

In § 54 [Gleichung (211d)] fanden wir für die Energie des magnetischen Feldes im Gleichgewichtszustand den Werth

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Zwar war er nur unter der Voraussetzung der Existenz einer Potentialfunction abgeleitet. Stellt man sich aber auf den Standpunkt, dafs das Energiequantum

$$\frac{1}{8\pi}(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz$$

im Volumelement $dx\,dy\,dz$ localisirt ist, wie es die FARADAY-MAXWELL'sche Auffassung thut, so mufs man diese Gleichung als allgemein gültig betrachten, denn es läfst sich ja an dem Zustand in diesem Element noch nicht entscheiden, ob eine solche Function existirt oder nicht. Wir behalten diese Gleichung daher unter Berufung auf die Erfahrung auch hier bei und wenden sie sogleich auf den allgemeinsten Fall an, dafs sowohl elektrische Ströme als permanent und temporär magnetisirte Körper auftreten.

An der Feldstärke unterscheiden wir durch die Indices 1 und 2 die Antheile, welche einerseits von den permanenten Magneten allein, andererseits von den Strömen allein herrühren. Dann ist

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_{12} + \mathfrak{W}_2,$$

wo

$$\mathfrak{W}_1 = \frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\,dx\,dy\,dz$$

die Energie des von den Magneten allein erregten Feldes ist, während

$$\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_2^2 + M_2^2 + N_2^2)\,dx\,dy\,dz$$

die Energie des Stromsystems allein angiebt. Der dritte Summand

$$\mathfrak{W}_{12} = \frac{1}{4\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2)\,dx\,dy\,dz$$

entspricht der Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten. Wir berechnen zunächst den Werth des letztgenannten.

L_2, M_2, N_2 ist die Feldstärke, welche beim Fehlen permanenter Magnetisirung aufträte; wir können also nach (203a)

$$(1 + 4\pi\varkappa)L_2 = L_2 + 4\pi\lambda_2 \quad \text{etc.}$$

setzen, während sich L_1 aus der Potentialfunction φ der permanenten Magnetisirung und der von ihr inducirten gemäfs den Gleichungen

$$L_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

ableitet. Defshalb ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_{12} &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{(L_2 + 4\pi\lambda_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (M_2 + 4\pi\mu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right.\\ &\qquad\left. + (N_2 + 4\pi\nu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz\\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint\varphi\left\{\frac{\partial(L_2 + 4\pi\lambda_2)}{\partial x} + \frac{\partial(M_2 + 4\pi\mu_2)}{\partial y}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial(N_2 + 4\pi\nu_2)}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Denn, wie des öfteren erwähnt [vergl. (245 e)], verschwindet die Divergenz des Vectors mit den Componenten $L + 4\pi\lambda$, $dl + 4\pi\mu$, $N + 4\pi\nu$ überall; Flächenintegrale treten bei der soeben ausgeführten partiellen Integration aber nicht auf, weil wir Stetigkeit aller Uebergänge annahmen und im Unendlichen φ mindestens wie $\frac{1}{R}$, $L + 4\pi\lambda = L$ etc. aber mindestens wie $\frac{1}{R^2}$ abnimmt.

Aehnlich berechnen wir $\mathfrak{W}_2$, indem wir nach (203 a) und (245 d)

$$(1 + 4\pi\varkappa) L_2{}^2 = (L_2 + 4\pi\lambda_2) L_2 = L_2 \left(\frac{\partial(W + W')}{\partial y} - \frac{\partial(V + V')}{\partial z}\right)$$
etc.

setzen. Dann folgt mittelst partieller Integration ähnlich wie im vorigen Paragraphen (S. 360):

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{8\pi}\iiint\Big\{ & L_2\left(\frac{\partial(W + W')}{\partial y} - \frac{\partial(V + V')}{\partial z}\right) \\ & + M_2\left(\frac{\partial(U + U')}{\partial z} - \frac{\partial(W + W')}{\partial x}\right) \\ & + N_2\left(\frac{\partial(V + V')}{\partial x} - \frac{\partial(U + U')}{\partial y}\right)\Big\}\, dx\, dy\, dz \\ = \frac{1}{8\pi}\iiint\Big\{ & (U + U')\left(\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial z}\right) + (V + V')\left(\frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{\partial N_2}{\partial x}\right) \\ & + (W + W')\left(\frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial L_2}{\partial y}\right)\Big\}\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (239), die wir zunächst nur unter der Voraussetzung der Abwesenheit magnetisirbarer Körper abgeleitet haben, sind nun aber allgemein gültig, weil sich der von den letzteren herrührende Antheil an der Feldstärke aus einer Potentialfunktion ableiten läſst, demnach wirbelfrei ist. Also wird nach (247 b)

$$\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{2A}\iiint\Big\{(U + U')u + (V + V')v + (W + W')w\Big\}\, dx\, dy\, dz = -P. \quad (247\,\mathrm{c})$$

Obwohl bei der Verschiebung eines Stromes gegen einen Magneten von den ponderomotorischen Kräften Arbeit geleistet wird, ändert sich also die Energie des magnetischen Feldes nicht, da $\mathfrak{W}_{12}$ dauernd gleich 0 ist. Und verschieben wir zwei Stromsysteme gegen einander, so ist sogar diese durch $-\delta P$ gemessene Arbeit gleich der Zunahme der Energie. Das erscheint zunächst als Widerspruch gegen das Energieprincip. Doch ist zu bedenken, daſs allen Erörterungen dieses Abschnittes die Voraussetzung constanter Stromstärken zu Grunde liegt, und diese lassen sich bei einer Verschiebung nur durch Energiezufuhr constant erhalten. Das führt uns zu den im nächsten Abschnitt zu behandelnden Inductionserscheinungen.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Schwingungen.

§ 69. Induction.

Im Gegensatz zu allem Bisherigen gehen wir jetzt zu zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern, also zu Schwingungen im weitesten Sinn des Wortes über. Es ist zu erwarten, daſs wir dabei auf gänzlich Neues stoſsen werden, und es kann zweifelhaft scheinen, ob wir die bisherigen Ergebnisse überhaupt noch verwenden können. Nun sind aber stationäre Zustände nur Grenzfälle sehr langsamer zeitlicher Veränderungen. Für hinreichend langsame Schwingungen müssen die bisherigen Resultate also gültig bleiben; daſs sie es sind, wollen wir in diesem Paragraphen voraussetzen. Dadurch ist für den Geltungsbereich des Folgenden eine Grenze gegeben; wo sie liegt, kann erst später entschieden werden.

Wird in einem linearen Stromkreis ein stationärer Strom I von elektromotorischen Kräften im Gesammtbetrage E unterhalten, so folgt aus der Anwendung der Gleichung (225 b) auf die geschlossene Stromcurve

$$E = Iw,$$

da $\varphi_1 = \varphi_2$ ist; und hieraus durch Multiplication mit $I\,dt$:

$$EI\,dt = I^2 w\,dt$$

(vgl. § 61). Die Arbeit der elektromotorischen Kräfte ist gleich der vom Strom erzeugten Joule'schen Wärme.

Nun verschieben wir aber einen Magneten gegen den Stromkreis. Nach (230 d) wird dabei, wenn I constant bleibt, die Arbeit:

$$-\frac{dP}{dt}\,dt = -I\frac{d\psi}{dt}\,dt$$

geleistet, wenn wir zur Abkürzung

$$\psi = \frac{1}{A}\iint ds \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial I}$$

setzen. Die Energie des magnetischen Feldes ändert sich nach § 68 aber nicht. Dem Energieprincip zufolge mufs dies Arbeitsquantum defshalb im Stromkreis geleistet werden, und zwar ist die einzige mögliche Art die, dafs die elektromotorische Kraft E verstärkt wird. Der Betrag der notwendigen Verstärkung berechnet sich aus der Forderung

$$E\,I\,dt = \left(I^2 w - I\frac{d\psi}{dt}\right) dt\,,$$

indem wir durch $I\,dt$ dividiren, so dafs

$$E = Iw - \frac{d\psi}{dt}$$

entsteht, zu $-\frac{d\psi}{dt}$. Demnach ist

$$+\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) \tag{248}$$

die durch Bewegung des Magneten inducirte elektromotorische Kraft, zu deren Ueberwindung der E ertheilte Zuwachs dient. Sie ist von I unabhängig und tritt erfahrungsgemäfs auch dann ein, wenn $I = 0$ ist, obwohl unsere Schlufsweise wegen der Division durch $I\,dt$ in diesem Fall versagt. Ist sie positiv, so wirkt sie in derselben Richtung wie E, oder da E das in der Stromrichtung genommene Integral der localen elektromotorischen Kräfte ist, in dieser.

Auf Grund der Aequivalenz von Strömen und Magneten können wir dies Ergebnifs auch auf die Verrückung übertragen, welche zwei lineare Ströme im Vacuum gegen einander erfahren. Ihr Potential auf einander ist nach (235)

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\cos(dl, d\lambda)\,dl\,d\lambda = -IJp$$

wo p eine nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige Constante, den gegenseitigen Inductionscoefficienten der Stromkreise, bedeutet. Halten wir beide Stromstärken constant, so ist

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -J\frac{dp}{dt}\\ &\text{die im Stromkreis von } I,\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial J}\right) = -I\frac{dp}{dt}\end{aligned}\right\} \tag{248a}$$

die im Stromkreis von J inducirte elektromotorische Kraft.

Das Potential P kann sich aber auch auf andere Weise ändern, nämlich durch Stromschwankungen. Auch dann wird man in Verallgemeinerung des Ergebnisses (248) und in Uebereinstimmung mit der Erfahrung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -p\frac{dJ}{dt}$$

als die im Stromkreis I inducirte elektromotorische Kraft ansehen, so dafs beim Zusammenwirken beider Ursachen daselbst

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -J\frac{dp}{dt} - p\frac{dJ}{dt} \tag{248b}$$

inducirt wird. Auf die Selbstinduction können wir an dieser Stelle noch nicht schliefsen; denn bei der Ableitung wurde der Strom I als constant betrachtet. Wir werden das weiter unten nachholen.

Ist bei der Verschiebung eines Magneten $\frac{d\psi}{dt} > 0$, so mufs die Bewegung durch Zuführung von Arbeit gegen die ponderomotorischen Kräfte erzwungen werden, die Induction sucht dann I und die ihm proportionalen Kräfte zu vergröfsern, die Bewegung zu hemmen; ist $\frac{d\psi}{dt} < 0$, so sucht sie die ponderomotorischen Kräfte, die dann die Bewegung selbst unterhalten, zu schwächen, wirkt also wiederum hemmend (Lenz'sche Regel). Nach § 62 und § 66 ist P proportional zu der Anzahl der Kraftlinien, welche der Magnet oder der Strom J durch die Stromschleife von I entsendet. Daraus ergiebt sich die Faraday'sche Form des Inductionsgesetzes, dafs die inducirte Kraft proportional zur zeitlichen Aenderung dieser Zahl ist. Dabei macht es aber einen wesentlichen Unterschied, ob die Induction durch Verschiebung oder durch Stromverstärkung hervorgerufen wird. In dem ersteren Fall kann sich die Zahl der Kraftlinien nur dadurch ändern, dafs einige von ihnen unter Durchschneidung der Stromcurve in die Stromschleife ein- oder austreten; denn ihre Gesammtzahl bleibt unverändert. Bei der Stromverstärkung aber vermehrt sich ihre Gesammtzahl und es tritt Induction ein, ohne dafs die Stromcurve von Kraftlinien geschnitten würde. Besonders deutlich tritt dies hervor, wenn der inducirende Strom in einem in sich geschlossenen Solenoïd verläuft. Sein magnetisches Kraftfeld liegt dann ganz im Innenraum des Solenoïds. Trotzdem ruft jede Aenderung seiner Intensität in einem das letztere umschlingenden Draht Induction hervor. Dagegen ist hier Induction durch Verschiebung unmöglich, wie auch keine ponderomotorischen Kräfte auftreten. Der Inductionscoefficient p bleibt in diesem Fall bei jeder möglichen Verrückung unverändert.

Während der Schlufs auf (248a) und (248b) ein nur durch die Uebereinstimmung mit der Erfahrung in Strenge zu rechtfertigender Analogieschlufs war, läfst sich die Theorie der Selbstinduction wieder aus dem Energieprincip ableiten. Die magnetische Energie eines einzelnen Stromes I ist proportional zu I^2, da die Feldstärke proportional zu I ist; das heifst nach (247c):

$$\mathfrak{W} = -P = \tfrac{1}{2} p I^2,$$

wo p eine stets positive Constante, der sogenannte Selbstinductionscoefficient ist. Wird der Stromkreis bei constanter Stromstärke deformirt, so wird die Arbeit $-\frac{dP}{dt}dt$ von den ponderomotorischen Kräften geleistet, während die magnetische Energie um den gleichen Betrag wächst. Daher mufs die den Strom treibende elektromotorische Kraft so verstärkt werden, dafs sie $-2\frac{dP}{dt}dt$ mehr Arbeit leistet, als JOULE'sche Wärme erzeugt wird, d. h. es mufs

$$E I dt = \left(I^2 w - 2\frac{dP}{dt}\right) dt = \left(I^2 w + I^2 \frac{dp}{dt}\right) dt$$

oder

$$E = I w + I \frac{dp}{dt}$$

sein. $-I\frac{dp}{dt}$ ist demnach die inducirte elektromotorische Kraft.

Aendert sich andererseits P durch eine Schwankung des Stroms I, so verlangt das Energieprincip, dafs die Arbeit der elektromotorischen Kraft gleich der Zunahme der magnetischen Energie plus der erzeugten JOULE'schen Wärme ist; also:

$$E I dt = \left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt} + I^2 w\right) dt,$$

denn andere Energiearten treten dabei nicht auf. Setzt man hier $\mathfrak{W} = \frac{1}{2} p I^2$, so folgt

$$E = Iw + p \frac{dI}{dt} \cdot \tag{248c}$$

$-p \frac{dI}{dt}$ ist also die durch Stromschwankung inducirte Kraft. Wirken beide Ursachen zusammen, so bekommt sie den Betrag:

$$-p \frac{dI}{dt} - I \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) \tag{248d}$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so sehen wir, dafs die inducirte elektromotorische Kraft stets gleich $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)$ ist, wo P einmal das Potential des Stromes auf einen Magneten, das andere Mal sein Potential auf andere Ströme, das dritte Mal sein Selbstpotential ist. Da influenzirter Magnetismus von wechselnder Stärke nach § 67 ebenso wie ein variabler Strom wirkt, ist auch seiner Inductionswirkung dieselbe Gröfse beizulegen. Das Potential eines aus permanent und durch Influenz magnetisirten Körpers, sowie aus elektrischen Strömen bestehenden Systems setzt sich aber additiv aus diesen Theilen zusammen; bezeichnen wir es jetzt allein mit P, so wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) \tag{248e}$$

in allen Fällen die im Stromkreis von I inducirte elektromotorische Kraft.

Integrirt man diesen Ausdruck nach der Zeit von t_1 bis t_2, so erhält man als Zeitintegral der inducirten Kraft:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)_2 - \left(\frac{\partial P}{d I}\right)_1,$$

d. h. einen vom Wege, auf dem die Veränderung vor sich ging, unabhängigen Werth. Für das Zeitintegral des inducirten Stromes, welches nach dem Ohm'schen Gesetz diesem Ausdruck proportional ist, gilt dasselbe.

Wir wären jetzt durchaus im Stande, den im vorhergehenden Paragraphen geforderten Beweis zu erbringen, dafs die Theorien der Elektrodynamik und Induction zusammen dem Energieprincip genügen. Wir ziehen aber vor, ihn auf eine spätere Gelegenheit zu verschieben und zunächst an Stelle dieser für langsame zeitliche

Veränderungen gültigen Gesetze die streng gültigen abzuleiten. Dann können wir erst beurtheilen, in wiefern wir überhaupt von dieser angenäherten Theorie verlangen können, dafs sie mit dem streng geltenden Energieprincip in Einklang steht.

Zu diesem Zwecke nehmen wir nun an, dafs der lineare Stromkreis I, in dem wir die Stärke der Induction berechnen wollen, ruht. Das Potential der Wechselwirkung zwischen ihm und anderen Strömen, sowie beliebig gelegenen permanent oder temporär magnetisirten Körpern ist nach (247a):

$$P = -\frac{I}{A}\overline{\int}\Big[\Big(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\Big)dx + \Big(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big)dy + \Big(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\Big)dz\Big],$$

die inducirte elektromotorische Kraft also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial P}{\partial I}\Big) = -\frac{1}{A}\overline{\int}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\Big)dx \\ + \frac{\partial}{\partial t}\Big(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big)dy + \frac{\partial}{\partial t}\Big(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\Big)dz\Big].\end{aligned}\right\} \quad (248\,e)$$

Wie man diese auf die Linienelemente des geschlossenen Stromkreises vertheilen will, ist natürlich in hohem Maafse willkürlich. Ist F eine beliebige Ortsfunction, so giebt jeder Ansatz von der Form

$$X = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\Big(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\Big) - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\Big(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) - \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\Big(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big) - \frac{\partial F}{\partial z}$$

für das Linienintegral der inducirten elektrischen Kraft den verlangten Werth

$$\overline{\int}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial P}{\partial I}\Big).$$

Bildet man nun aber die Wirbelcomponenten der elektrischen Kraft, so fällt die Function F heraus; und man findet dann, indem man nach (245 b)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = U'$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = V'$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = W'$$

und nach (245 d)

$$\frac{\partial (W + W')}{\partial y} - \frac{\partial (V + V')}{\partial z} = L + 4\pi\lambda$$

$$\frac{\partial (U + U')}{\partial z} - \frac{\partial (W + W')}{\partial x} = M + 4\pi\mu$$

$$\frac{\partial (V + V')}{\partial x} - \frac{\partial (U + U')}{\partial y} = N + 4\pi\nu$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda) \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(M + 4\pi\mu) \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(N + 4\pi\nu). \end{aligned}\right\} \tag{249}$$

Die elektrische Kraft ist in zeitlich veränderlichen magnetischen Feldern also nicht mehr, wie bisher stets, wirbelfrei, vielmehr sind die Wirbelcomponenten der elektrischen Feldstärke gleich der zeitlichen Abnahme der Vectorcomponenten $L + 4\pi\lambda$, $M + 4\pi\mu$ und $N + 4\pi\nu$, dividirt durch die Lichtgeschwindigkeit A.

Wendet man auf die elektrische Feldstärke den STOKES'schen Satz [Gleichung (243 a)] an, so folgt aus (249)

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\iint ds\,\{(L + 4\pi\lambda)\cos(n, x) + (M + 4\pi\mu)\cos(n, y) + (N + 4\pi\nu)\cos(n, z)\}$$

eine Gleichung, welche sich vermöge der soeben angewandten Formeln (245 b) und (245 d) in die Ausgangsgleichung dieser Betrachtung (248 e) umformen läfst. Beide sind also gleichwerthig. Ferner sieht man, dafs die FARADAY'sche Form des Induktionsgesetzes im Allgemeinen dahin zu ergänzen ist, dafs nicht die Veränderung der Anzahl der Kraftlinien, sondern der den Vector

$L + 4\pi\lambda$, $M + 4\pi\mu$, $N + 4\pi\nu$ darstellenden Linien die Stärke der inducirten elektromotorischen Kraft mifst.[1])

Die Gleichungen (249) sind nur unter der eingangs erwähnten Voraussetzung langsamer Veränderungen abgeleitet. Wir thun nun aber den entscheidenden Schritt, dafs wir sie als allgemein gültig betrachten. Zu rechtfertigen ist er natürlich nur so, dafs wir die Consequenzen aus ihm ziehen und sie mit der Erfahrung vergleichen.

§ 70. Ungeschlossene Ströme. Fernwirkung und endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen.

Das Analogon zu den Gleichungen (249) für das magnetische Feld bilden die Gleichungen (239)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A} u$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4\pi}{A} v$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4\pi}{A} w,$$

welche den Wirbel der magnetischen Kraft bestimmen. Sie können aber nicht allgemein gelten. Denn es folgt aus ihnen für die räumliche Divergenz der Stromdichte

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

und ebenso mufs die Flächendivergenz verschwinden; denn legen wir die x-Axe in die Richtung der Normalen n_1, so folgt aus der Stetigkeit der Tangentialcomponenten der magnetischen Kraft (nach § 66 können wir diese als das Verschwinden des Flächenwirbels bezeichnen)

$$\frac{\partial (N_1 - N_2)}{\partial y} - \frac{\partial (M_1 - M_2)}{\partial z} = \frac{4\pi}{A}(u_1 - u_2) = 0;$$

u_1 und u_2 sind hier die Normalcomponenten der Strömung; bei anderer Lage des Coordinatensystems lautet diese Bedingung also

$$q_{n_1} + q_{n_2} = 0.$$

---

[1]) Aus diesem Grunde bezeichnet man diesen Vector jetzt auch durchgängig als „magnetische Induction“. Der Herausgeber.

Diese mit (218a) und (218b) identischen Gleichungen sagen aus, daſs die Stromlinien geschlossen sind; das ist bei stationären Strömen stets der Fall, bei nichtstationären aber, wie sie beispielsweise bei dem Ladungsausgleich zwischen zwei auf verschiedenem Potential befindlichen Conductoren eintreten, wenn man sie leitend verbindet, trifft es sicher nicht zu. Es erhebt sich also die Frage nach der Elektrodynamik der ungeschlossenen Ströme: Wie sind die Gleichungen (239) zu ergänzen, damit sie allgemein gelten?

Diese Frage hat der Wissenschaft viele Schwierigkeiten bereitet; denn während sich die Gleichungen (249) für den Wirbel der elektrischen Kraft an den in geschlossenen Metalldrähten auftretenden Inductionsströmen leicht und genau empirisch prüfen lassen, giebt es kein ähnliches Mittel zur Untersuchung des Wirbels der magnetischen Kraft. Man muſste sich deshalb zunächst von einer Hypothese führen lassen, um auf diesem Gebiet vorwärts zu kommen. Sie besteht darin, daſs man nach einer Fortsetzung des elektrischen Stromes von den Grenzen der Conductoren, an denen er nach der bisherigen Auffassung aufhört, in das Dielektricum hinein sucht.

In einem geladene Conductoren umgebenden Dielektricum besteht elektrische Polarisation. Diese führten wir darauf zurück, daſs die elektrischen Ladungen der Molekeln, welche sich im Ruhezustand neutralisiren, unter dem Einfluſs der Feldstärke scheiden. Aenderung der Polarisation ist danach Aenderung der Ladungsvertheilung in den Molekeln, d. h. ein Strömen der Elektricität; es liegt nahe, ihr dieselbe Beziehung zum magnetischen Feld zuzuschreiben, wie dem Leitungsstrom in leitenden Körpern.

Um diesen Gedanken mathematisch einzukleiden, denken wir uns die Ladung einer Molekel aus zwei entgegengesetzt gleichen Punktladungen $\pm\,\mathfrak{e}$ an den Orten x_+, y_+, z_+ und x_-, y_-, z_- bestehend;

$$\mathfrak{e}(x_+ - x_-), \quad \mathfrak{e}(y_+ - y_-), \quad \mathfrak{e}(z_+ - z_-)$$

sind die Componenten ihres elektrischen Moments. Die Componenten l, m, n der Polarisation finden wir durch Bildung der Mittelwerthe dieser Gröſsen für ein Volumelement. Nehmen wir an, es wären alle Molekeln gleich polarisirt, und $\mathfrak{N}$ sei ihre Anzahl pro Volumeinheit, so ist

$$\begin{aligned} l &= \mathfrak{N}\,\mathfrak{e}\,(x_+ - x_-) \\ m &= \mathfrak{N}\,\mathfrak{e}\,(y_+ - y_-) \\ n &= \mathfrak{N}\,\mathfrak{e}\,(z_+ - z_-). \end{aligned}$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist noch nachträglich über alle Gruppen gleich polarisirter Molekeln zu summiren, wodurch die

Ueberlegung nicht wesentlich geändert wird. Nun sollen sich alle positiven Ladungen um die Strecke dx_+ in der Zeit dt verschieben. Durch eine zur x-Axe senkrechte Fläche $dy\,dz$ treten dann alle die Punktladungen in der positiven x-Richtung hindurch, welche vorher in einem über $dy\,dz$ als Grundfläche errichteten Parallelepiped von der Höhe dx_+ lagen, d. h. das positive Elektricitätsquantum

$$\mathfrak{N}\mathrm{e}\,dy\,dz \cdot \frac{d x_+}{d t}\,d t\,;$$

denn $\mathfrak{N}$ ist auch die Zahl der positiven Punktladungen pro Volumeinheit. Verschieben sich die negativen Ladungen in der gleichen Zeit um dx_-, so tritt in derselben Richtung das negative Elektricitätsquantum

$$\mathfrak{N}\mathrm{e}\,dy\,dz\,\frac{d x_-}{d t}\,d t$$

durch $dy\,dz$ hindurch. Nach der Definition der Stromdichte (§ 57) haben diese Verschiebungen also denselben Elektricitätstransport zur Folge wie ein Leitungsstrom, bei dem die Componenten der Dichte die Beträge

$$\begin{gathered}
\frac{1}{dy\,dz} \cdot \mathfrak{N}\mathrm{e}\left(\frac{d x_+}{d t} - \frac{d x_-}{d t}\right) dy\,dz = \mathfrak{N}\mathrm{e}\left(\frac{d x_+}{d t} - \frac{d x_-}{d t}\right) = \frac{\partial l}{\partial t} \\
\mathfrak{N}\mathrm{e}\left(\frac{d y_+}{d t} - \frac{d y_-}{d t}\right) = \frac{\partial m}{\partial t} \\
\mathfrak{N}\mathrm{e}\left(\frac{d z_+}{d t} - \frac{d z_-}{d t}\right) = \frac{\partial n}{\partial t}
\end{gathered}$$

haben. Fügen wir diese Componenten des sogenannten Verschiebungsstromes in (239) zu den Componenten u, v, w des Leitungsstromes hinzu, so finden wir

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{4\pi}{A}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{4\pi}{A}\left(v + \frac{\partial m}{\partial t}\right) \\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{4\pi}{A}\left(w + \frac{\partial n}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{250}$$

In Folge dieses Zusatzes sind die Gleichungen (249) und (250) einander sehr ähnlich geworden. Dafs dem Auftreten des Leitungsstroms in (249) nichts entspricht, ist leicht verständlich, aber der elektrische Verschiebungsstrom $\frac{\partial l}{\partial t}$ etc. findet sein vollkommenes Analogon in den Gliedern $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ etc. der ersteren Gleichungen. Dagegen fehlt in (250) der Differentialquotient der Feldstärke nach der Zeit, welche in (249) auftritt.

Ziehen wir jetzt aus den Gleichungen (249) und (250) die Folgerungen, welche sich für das Innere homogener Dielektrica ergeben. In ihnen ist nach (203) und (203a)

$$\begin{array}{lll} l = k X & m = k Y & n = k Z \\ \lambda = \varkappa L & \mu = \varkappa M & \nu = \varkappa N, \end{array}$$

also gehen die genannten Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial l}{\partial t} \\ \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial m}{\partial t} \\ \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial n}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{251}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \frac{1}{k}\left(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\right) &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \frac{1}{k}\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\right) &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \nu}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{252}$$

Aus ihnen folgt zunächst

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+4\pi k}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{252 a}$$

Die links stehenden Terme sind die zeitlichen Veränderungen der Dichte der wahren Elektricität und des scheinbaren Magnetismus; die letztere ist von allen homogenen Körpern allein in den permanenten Magneten von Null verschieden, dort aber zeitlich unveränderlich, die erstere im Dielektricum ebenfalls zeitlich constant — in Uebereinstimmung mit diesen Formeln. Da uns ein von elektrischen und magnetischen Ladungen herrührendes statisches Feld, dessen Gesetze wir schon kennen, nicht mehr interessirt, so setzen wir im Folgenden stets

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 .\end{aligned}\right\} \tag{253}$$

Im Allgemeinen würde sich dies Feld, da die Gleichungen (251) und (252) linear sind, zu den jetzt zu betrachtenden Vorgängen superponiren.

Man kann aus (251) und (252) die Magnetisirung eliminiren, indem man die dritte der Gleichungen (252) nach y, die zweite nach z differenzirt und subtrahirt, so dafs man unter Berücksichtigung von (253)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = \frac{A\varkappa}{(1+4\pi\varkappa)k}\,\Delta l$$

erhält. Differenzirt man die erste der Gleichungen (251) nach t, so findet man aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = \frac{4\pi\varkappa}{A}\,\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} .$$

Also gelten für die Componenten der Polarisation die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\Delta l &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} \\ \Delta m &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 m}{\partial t^2} \\ \Delta n &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} .\end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Vertauscht man in dieser Ableitung die Rollen der Gleichungen (251) und (252), so findet man einmal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) = -\frac{A}{4\pi\varkappa}\,\Delta\lambda ,$$

das andere Mal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) = -\frac{(1+4\pi\varkappa)k}{\varkappa A}\,\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} ;$$

also gelten für die Magnetisirung die entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\lambda &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\\ \varDelta\mu &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\\ \varDelta\nu &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\}\tag{254a}$$

Diese Gleichungen haben die Form der sogenannten Wellengleichung

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

welche in allen Schwingungsproblemen eine fundamentale Rolle spielt. Diejenige particuläre Lösung, welche ebenen, in der positiven x-Richtung fortschreitenden Wellen entspricht, lautet:

$$\begin{aligned} l &= F_1(x-at) & \lambda &= G_1(x-at)\\ m &= F_2(x-at) & \mu &= G_2(x-at)\\ n &= F_3(x-at) & \nu &= G_3(x-at),\end{aligned}$$

wo die willkürlichen Functionen F_1, F_2, F_3 und G_1, G_2, G_3 wegen (251), (252) und (253) freilich nicht von einander unabhängig sind. Wir gehen später näher auf die analoge Frage bei der MAXWELL'schen Theorie (§ 72) ein. Hier genügt es, an dieser Lösung zu constatiren, daſs sich nach unserer Theorie elektrische und magnetische Wirkungen durch Dielektrica mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{A}{\sqrt{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}}\tag{254b}$$

ausbreiten.

Im Vacuum, wo k und $\varkappa$ Null sind, und nach unserer bisherigen Anschauung weder Magnetisirung noch Polarisation existirt, gehen die Gleichungen (249) und (250) statt in (251) und (252) über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial L}{\partial t}\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial M}{\partial t}\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial N}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{251a}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}=0\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{252a}$$

Differenzirt man hier die dritte der Gleichungen (251a) nach y, die zweite nach z und subtrahirt, so findet man noch ähnlich wie oben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=+A\,\Delta X,$$

aus (252a) folgt aber im Gegensatz zum Obigen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0,$$

so dafs

$$\Delta X=0, \quad \Delta Y=0, \quad \Delta Z=0$$

wird. Ebenso überzeugt man sich leicht, dafs auch

$$\Delta L=0, \quad \Delta M=0, \quad \Delta N=0$$

ist. Die Divergenz der Feldstärken ist entsprechend der Gleichung (253) dabei Null gesetzt. Diese Gleichungen lassen sich nun als Wellengleichungen

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

mit unendlich grofser Fortpflanzungsgeschwindigkeit a auffassen. Unsere Theorie ergiebt also neben endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit in ponderablen Dielektriken Fernwirkung im Vacuum, entsprechend der schon in § 56 am Schlufs erwähnten Auffassung.

§ 71. Uebergang zur Maxwell'schen Theorie.

Ist nun in den Gleichungen (250) die Schwierigkeit betreffs der ungeschlossenen Ströme wirklich gehoben? Man kann diese Frage auch ohne Rechnung verneinen. In Vacuum ist ja der Zusatz $\frac{\partial l}{\partial t}$ etc. Null, er nützt bei Fehlen ponderabler Dielektrica überhaupt nichts. In der That ist nach der Definition der Stromdichte das für eine geschlossene Fläche gebildete Integral

$$\overline{\iint} q_{n_i}\, ds = -\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz - \iint (q_{n_1} + q_{n_2})\, ds$$

das zweite Flächenintegral gilt für Unstetigkeitsflächen im eingeschlossenen Raum) gleich der Zunahme der wahren Ladung in ihrem Innern, d. h.

$$\overline{\iint} q_{n_i}\, ds = \iiint \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\, dx\,dy\,dz + \iint ds\, \frac{\partial e}{\partial t}\,.$$

Da dies für jede Fläche gilt, muſs

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= -(q_{n_1} + q_{n_2}) \end{aligned}\right\} \tag{255}$$

sein. Nach (201 a) ist aber

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(X + 4\pi l) + \frac{\partial}{\partial y}(Y + 4\pi m) + \frac{\partial}{\partial z}(Z + 4\pi n)\right] \\ e &= \frac{1}{4\pi}\left[(\mathfrak{E}_{n_1} + 4\pi s_{n_1}) + (\mathfrak{E}_{n_2} + 4\pi s_{n_2})\right], \end{aligned}\right\} \tag{201a}$$

so daſs stets die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m)\right) & \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)\right) = 0 & \\ \left[q_{n_1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}_{n_1} + 4\pi s_{n_1})\right] + \left[q_{n_2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}_{n_2} + 4\pi s_{n_2})\right] = 0 & \end{aligned}\right\} \tag{255a}$$

gelten. Dagegen folgt aus (250)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{\partial m}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{\partial n}{\partial t}\right) = 0 \tag{255b}$$

und (vergleiche den Anfang von § 70)

$$(q_{n_1} + s_{n_1}) + (q_{n_2} + s_{n_2}) = 0\,.$$

Die Gleichungen (250) können also auch noch nicht streng richtig sein. Wohl aber fällt diese Unstimmigkeit fort, wenn man in ihnen zu den Ausdrücken $u + \frac{\partial l}{\partial t}$ etc. noch $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. hinzuaddirt.

Dies thut die MAXWELL'sche Theorie, welche für den Wirbel der magnetischen Kraft die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + \frac{\partial(X + 4\pi l)}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + \frac{\partial(Y + 4\pi m)}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + \frac{\partial(Z + 4\pi n)}{\partial t}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (256)$$

ansetzt. Die Analogie zu (249) ist jetzt, vom Leitungsstrom und dem Vorzeichen abgesehen, vollkommen. Bezeichnet man den aus Leitungs- und Verschiebungsstrom resultirenden Vector als elektrischen Gesammtstrom, so gilt nach (256) der Satz: Der elektrische Strom ist stets geschlossen; und zwar ist dies gemäfs (255) nur eine neue Formulirung des Satzes von der Unzerstörbarkeit der elektrischen Quanten. Damit ist die Frage nach der Elektrodynamik ungeschlossener Ströme beantwortet.

Die physikalische Bedeutung dieses Zusatzes ist leicht zu erkennen. Die bisher von uns benutzte, auf POISSON zurückführende Vorstellung legte Polarisation nur der Materie bei, sie macht zwischen Vacuum und Materie den Unterschied, dafs man es im ersteren nur mit der Feldstärke, in dem von der Materie eingenommenen Volumen aber aufserdem noch mit der Polarisation zu thun hat. Die erstere gehört auch hier dem alle Materie durchdringenden Aether an; die letztere hat dagegen ihren Sitz allein in den Molekeln der Materie. Nach der FARADAY-MAXWELL'schen Auffassung ist hingegen der Aether gerade so polarisirbar, wie die Materie; und zwar beträgt seine Polarisation das $\frac{1}{4\pi}$-fache der Feldstärke. Die ganze Polarisation erhält man erst durch Addition der Antheile des Aethers und der Materie, d. h. diese ist gleich dem Vector, dessen Componenten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} X + l &= \frac{1}{4\pi}(X + 4\pi l)\\
\frac{1}{4\pi} Y + m &= \frac{1}{4\pi}(Y + 4\pi m)\\
\frac{1}{4\pi} Z + n &= \frac{1}{4\pi}(Z + 4\pi n)
\end{aligned}$$

sind. Als Componenten des Verschiebungsstroms mufs man dann aber consequenter Weise die Gröfsen:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l), \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m), \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)$$

bezeichnen; so entstehen die Gleichungen (256).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daſs FARADAY die Erklärung des Diamagnetismus in der Annahme der Magnetisirbarkeit des Aethers suchte. Die gesammte Magnetisirung des Aethers und der Materie ist ganz analog durch die Componenten $\frac{1}{4\pi}(L + 4\pi\lambda)$, $\frac{1}{4\pi}(M + 4\pi\mu)$, $\frac{1}{4\pi}(N + 4\pi\nu)$ gegeben, und die in (249) auftretenden Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda)$ etc. lassen sich als die Componenten des magnetischen Verschiebungsstroms bezeichnen.

Das Verhältniſs der Polarisation in der alten zu der in der neuen Auffassung ist

$$\frac{l}{\frac{1}{4\pi}X + l} = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}.$$

Es wird 1 wenn man k über alle Gröſsen wachsen läſst. Auf diesem Wege muſs sich also die in § 70 vorgetragene Theorie in die MAXWELL'sche überführen lassen. Um dies näher auszuführen, multipliciren wir alle Werthe von k mit einer Zahl $\mathfrak{N}^2$, alle Werthe der Stromdichte q und ihrer Componenten u, v, w, sowie der Polarisation s und ihrer Componenten l, m, n und schlieſslich die Constante A mit $\mathfrak{N}$. Die Gleichungen (249), welche sich, wenn k von Null verschieden ist, auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{k}\right) = -\frac{1}{A}\frac{\partial(L + 4\pi\lambda)}{\partial t} \text{ etc.}$$

bringen lassen, bleiben davon ebenso unberührt, wie die Gleichungen (250)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) \text{ etc.}$$

Lassen wir nun $\mathfrak{N}$ über alle Grenzen wachsen, so verschwinden die Gröſsen $X = \frac{1}{k}$ etc. wie $\frac{1}{\mathfrak{N}}$, und mit ihnen der Unterschied zwischen den Gleichungen (256) und (250), sowie der zwischen (255 a) und (255 b). Durch die beiden Gleichungentripel (243) und (258) nebst den nöthigen Nebenbedingungen ist aber der Vorgang, wie wir in § 76 zeigen werden, eindeutig bestimmt. Im Grenzfall $\mathfrak{N} = \infty$

geben also beide Theorien für die Werthe der Polarisation, Magnetisirung etc. dieselben Resultate.

Gegenstand der Beobachtung sind aber niemals diese Gröfsen selbst, sondern die von ihnen herrührenden ponderomotorischen Kräfte und die Energiequanten, welche der elektrische Strom in einander umsetzt. Die Formeln für die ponderomotorischen Wirkungen des statischen magnetischen Feldes werden nun durch die Multiplication mit $\mathfrak{N}$ nicht berührt. Aus dem Ausdruck (210b) für die Dichte der elektrischen Energie

$$\frac{1+4\pi k}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)=\frac{1+4\pi k}{8\pi k^2}(l^2+m^2+n^2)$$

hebt sich nun aber $\mathfrak{N}$ im Grenzfall $\mathfrak{N}=\infty$ wieder heraus; dasselbe mufs deswegen auch für die ponderomotorischen Wirkungen des elektrischen Feldes gelten, was man am einfachsten an den Gleichungen (217) und (217 a)

$$\mathfrak{X}=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z},\ \text{etc.}$$

$$X_x=\frac{1+4\pi k}{8\pi}(X^2-Y^2-Z^2)+\frac{1}{2}\Theta(X^2+Y^2+Z^2),$$

$$Y_z=Z_y=\frac{1+4\pi k}{4\pi}YZ$$

bestätigt; denn Θ transformirt sich wie k. Und die Gleichungen (240) für die Kraft, die ein Element des Stromleiters im Magnetfeld erfährt

$$\mathfrak{X}=\frac{1}{A}(Nv-Mw)\,dx\,dy\,dz\quad\text{etc.}$$

werden von der Multiplication mit $\mathfrak{N}$ ebenso wenig betroffen, wie Gleichung (229 b) für die vom Strom producirte Energie

$$J=\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz-\iint ds\,E_{12}\,q_n,$$

da sich E_{12} wie X transformirt. Die Uebereinstimmung zwischen der bisherigen Theorie und der ihr zu Grunde liegenden Erfahrung wird also durch den Grenzübergang nicht gestört.

Führt man ihn an den Gleichungen (217 c) durch, so verschwindet die durch Spannungen nicht vermittelte Fernwirkung, welche sich in den Gliedern

$$-\varepsilon'\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varepsilon' X=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)X$$

etc.

ausdrückt wie $\frac{1}{\mathfrak{N}^2}$. Dafür gehen die Spannungscomponenten X_x' etc. in die MAXWELL'schen Werthe (217 a) über.

§ 72. Ebene elektromagnetische Wellen in Dielektriken.

Wir legen von jetzt an die MAXWELL'sche Theorie der Betrachtung zu Grunde, d. h. wir gehen von den Gleichungen (249) und (256) aus:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda)\\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(M + 4\pi\mu)\\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(N + 4\pi\nu)
\end{aligned}\right\} \tag{257}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + \frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l)\right)\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + \frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m)\right)\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + \frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{258}$$

Für homogene leitende Körper gehen sie nach (203), (203 a) und (213) über in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial L}{\partial t}\\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial M}{\partial t}\\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial N}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{259}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau X + (1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right\}\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau Y + (1 + 4\pi k)\frac{\partial Y}{\partial t}\right\}\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau Z + (1 + 4\pi k)\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{260}$$

Die letzteren sind insofern specieller als (258), als bei Verwendung von (219) das Fehlen localer elektromotorischer Kräfte angenommen ist. Für nichtleitende Substanzen ($\tau = 0$) folgt aus ihnen zunächst analog zu (252a)

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0\,,$$

was wiederum die Unveränderlichkeit der wahren elektrischen und der scheinbaren magnetischen Ladungen ausspricht. Wir setzen, um statische Felder von der Betrachtung auszuschliefsen, die Divergenzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{261}$$

und wollen diese Gleichungen unter Vorbehalt späterer Rechtfertigung (siehe § 74) auch auf leitende Körper übertragen.

Dann wenden wir hier dasselbe Verfahren an, durch welches wir in § 70 zu den Wellengleichungen gelangten; d. h. wir differenziren die dritte der Gleichungen (259) nach y, die zweite nach z und subtrahiren; differenziren wir ferner die erste der Gleichungen (260) nach t, so erhalten wir

$$\frac{A}{1 + 4\pi\varkappa}\,\Delta X = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau\frac{\partial X}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right\}.$$

Vertauscht man bei diesem Verfahren die Rollen der Gleichungen (259) und (260) mit einander, so findet man entsprechend

$$\begin{aligned} A\,\Delta L &= -\,4\pi\tau\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - (1 + 4\pi k)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\left\{4\pi\tau\frac{\partial L}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right\}, \end{aligned}$$

so dafs für die je drei Componenten der beiden Feldstärken Differentialgleichungen von der Form

$$\Delta\varphi = \frac{1 + 4\pi\varkappa}{A^2}\left\{4\pi\tau\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} \tag{262}$$

gelten.

Zunächst wollen wir nun die Vorgänge in einem nichtleitenden Medium in's Auge fassen. Gleichung (261) geht für $\tau = 0$ über in die Wellengleichung

$$\Delta \varphi = \frac{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi \varkappa)}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{262a}$$

welcher durch den Ansatz

$$\left.\begin{array}{ll} X = F_1(x - a t) & L = G_1(x - a t) \\ Y = F_2(x - a t) & M = G_2(x - a t) \\ Z = F_3(x - a t) & N = G_3(x - a t) \end{array}\right\} \tag{263}$$

genügt wird. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ebener Wellen ist dabei nach (262a)

$$a = \frac{A}{\sqrt{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi \varkappa)}}. \tag{264}$$

Die sechs Functionen F und G müssen nun aber noch gewisse Relationen erfüllen, damit auch den Gleichungen (259), (260) und den Relationen (261) genügt wird. Die beiden letzteren gehen nämlich für (263) über in

$$F_1' = 0$$

$$G_1' = 0,$$

wo F_1' und G_1' die Derivirten der Function F und G nach ihrem Argument sein sollen. X und L müssen also räumlich und zeitlich constant, und da wir statische Felder ausschliefsen wollen, Null sein. Die Componenten beider Feldstärken in der Fortpflanzungsrichtung sind Null; ebene elektromagnetische Wellen sind daher transversal.

Die Gleichungen (259) vereinfachen sich unter diesen Umständen zu den folgenden Beziehungen zwischen F_2, F_3, G_2 und G_3:

$$-\frac{\partial Z}{\partial x} = -F_3' = -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{a}{A}(1 + 4\pi\varkappa)G_2' = \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varkappa}{1 + 4\pi k}}\, G_2'$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = F_2' = -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{a}{A}(1 + 4\pi\varkappa)G_3' = \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varkappa}{1 + 4\pi k}}\, G_3'.$$

Die Gleichungen (260) liefern nichts Neues, weil sie aus (259) und den Wellengleichungen für die sechs Kraftcomponenten hervorgehen. Da nun aber keine dieser vier Functionen einen zeitlich und räumlich constanten Summanden enthalten darf — sonst kämen wir ja wieder auf statische Felder —, so mufs

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= -\sqrt{\frac{1+4\pi\varkappa}{1+4\pi k}}\,G_2 \\ F_2 &= \sqrt{\frac{1+4\pi\varkappa}{1+4\pi k}}\,G_3 \end{aligned}\right\} \tag{265}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{\sqrt{1+4\pi\varkappa}} &= \frac{N}{\sqrt{1+4\pi k}} \\ \frac{Z}{\sqrt{1+4\pi\varkappa}} &= -\frac{M}{\sqrt{1+4\pi k}} \end{aligned}\right\} \tag{265a}$$

sein. Hieraus folgt

$$YM + ZN = 0;$$

die elektrische und die magnetische Kraft stehen auf einander senkrecht. Nun enthält der Ansatz (263) immer noch zwei willkürliche Functionen, F_2 und F_3; er stellt also zwei unabhängige, einander überlagernde und, wenn wir einen bekannten Begriff aus der Optik übertragen, senkrecht zu einander polarisirte Wellen dar. Um die eine davon zu isoliren, setzen wir $F_3 = 0$. Dann verschwinden Z und M und man erkennt, dafs in einer elektrischen Welle Fortpflanzungsrichtung, elektrische und magnetische Kraft wie die x-, die y- und die z-Axe zu einander liegen (siehe Figur 30).

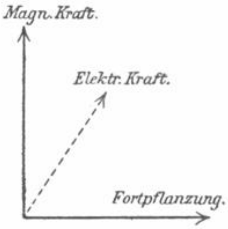

Fig. 30.

Nach (264) ist im Vacuum die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen a gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum. Dies legt den Gedanken, dafs Lichtwellen nichts Anderes als elektrische Wellen von sehr kleiner Wellenlänge (10^{-5} cm) sind, äufserst nahe. Soll er zutreffen, so mufs für nichtmagnetisirbare Substanzen der Brechungsindex

$$\frac{A}{a} = \sqrt{1 + 4\pi k}$$

sein. Diese von Maxwell zuerst entdeckte Beziehung zur Dielektricitätsconstanten bewährt sich zwar bei einigen Substanzen auffallend gut, bei anderen freilich garnicht, doch kann die Theorie (siehe Band V dieser Vorlesungen) auch über die Abweichungen Rechenschaft geben. Die auf Grund der elastischen Lichttheorie nie entschiedene Streitfrage, ob das Licht in der Polarisationsebene oder senkrecht zu ihr schwingt, ist dann dahin zu beantworten, dafs die eine der beiden Feldstärken in ihr[1]), die andere senkrecht zu ihr liegt. Beide sind nach (265) mit einander verknüpft. Elektrische Wellen können nicht ohne magnetische bestehen und umgekehrt.

§ 73. Kugelwellen in Dielektriken.

Eine andere einfache Lösung der Wellengleichung (262a) erhalten wir, wenn wir festsetzen, dafs die Function F die Coordinaten nur in der Verbindung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

enthalten soll, und dann

$$\varphi = \frac{F}{r}$$

setzen. Durch Differentiation folgt dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{F}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) x$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{F}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{3F}{r^4} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right);$$

bildet man anlog die anderen beiden zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten, so folgt durch Addition:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

also geht die Differentialgleichung für φ

$$\Delta \varphi = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

über in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

deren eine Lösung, welche einer vom Punkt $r = 0$ ausgehenden Welle entspricht,

$$F = F(r - a\,t)$$

lautet. Die andere

$$F = F(r + a\,t)$$

---

[1]) Nach neueren Forschungen die magnetische. Der Herausgeber.

ergäbe Wellen, welche nach dem Nullpunkt hin laufen. Nur dieser selbst ist ausgeschlossen, weil wir soeben durch $\frac{1}{r}$ dividirt haben.

Nun können wir aus dieser einen Lösung der Wellengleichung durch beliebig oft wiederholte Differentiation nach den Coordinaten und der Zeit und durch Addition solcher Differentialquotienten neue Lösungen gewinnen. Z. B. überzeugt man sich leicht, dafs nach dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} & L &= 0 \\ Y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & M &= -\frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \\ Z &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} & N &= \frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

der Wellengleichung durch alle sechs Functionen X, Y, Z und L, M, N genügt ist. Zugleich aber sind, wie man durch Einsetzen sieht, auch die Gleichungen (259) und (260) befriedigt. Die Divergenz der elektrischen und magnetischen Kraft ist gleich Null, wie es sein mufs, wenn aus (259) und (260) die Wellengleichung folgen soll.

Um den Ansatz (266) zu discutiren, setzen wir in ihm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{x^2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right); \end{aligned}$$

denn wie die Function F ist auch φ nur von r und t abhängig.

Dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{y^2 + z^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ Y &= -\frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ Z &= -\frac{xz}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ L &= 0 \\ M &= -\frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \\ N &= \frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{y}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{266a}$$

Hieraus folgt

$$Lx + My + Nz = 0$$

d. h. die magnetische Kraft steht auf dem Radiusvector r senkrecht. Da $L = 0$, steht sie auch auf der x-Richtung senkrecht, d. h. ihre Richtung ist durch die Breitenkreise einer Kugel um den Punkt $r = 0$ gegeben, wenn man die Durchstoſspunkte der x-Axe als die Pole ansieht. Ferner folgt

$$XL + YM + ZN = 0;$$

d. h. elektrische und magnetische Feldstärke sind zu einander senkrecht. Dagegen ist

$$Xx + Yy + Zz = 2\frac{x}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

oder anders geschrieben

$$\left(X - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)x + Yy + Zz = 0.$$

Man darf also die Transversalität der elektrischen Wellen nicht dahin miſsverstehen, daſs die elektrische Kraft immer senkrecht zur Richtung nach der Erregungsstelle wäre. Vielmehr superponirt sich zu einer in der Meridianrichtung der genannten Kugel liegenden Feldstärke, deren Componenten $\left(X - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$, Y, Z sind, die in der x-Richtung liegende, auf der ganzen Kugel gleiche Kraft $\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$.

Setzt man in (266a)

$$\varphi = \frac{F}{r},$$

so hat man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}F + \frac{1}{r}F'$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{3F}{r^4} - \frac{3F'}{r^3} + \frac{F''}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t} = \frac{a}{r^2}F' - \frac{a}{r}F''$$

zu setzen. Behält man dann nur die niedrigsten Potenzen von r bei, so erhält man die folgenden Annäherungsformeln für groſse Entfernungen vom Ausgangspunkt:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{y^2+z^2}{r^3}F'' & L &= 0 \\ Y &= -\frac{xy}{r^3}F'' & M &= \sqrt{\frac{1+4\pi k}{1+4\pi\varkappa}}\frac{z}{r^2}F'' \\ Z &= -\frac{xz}{r^3}F'' & N &= -\sqrt{\frac{1+4\pi k}{1+4\pi\varkappa}}\frac{y}{r^2}F''. \end{aligned}\right\} \quad (266\text{b})$$

Es gelten mit derselben Annäherung die drei Relationen

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

$$Lx + My + Nz = 0$$

$$XL + YM + ZN = 0;$$

Fortpflanzungsrichtung, elektrische und magnetische Feldstärke werden im Unendlichen wie bei einer ebenen Welle auf einander senkrecht.

§ 74. Ebene Wellen in leitenden Körpern.

Um die Vorgänge in leitenden Körpern zu untersuchen, gehen wir zunächst auf die Gleichungen (259) und (260)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{1+4\pi k}{A}\frac{\partial L}{\partial t}$$

etc.

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau X + (1+4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right\}$$

zurück. Eine Lösung von ihnen erhält man, wenn man die magnetische Feldstärke für alle Zeit gleich Null setzt. Dann ist auch der Wirbel der elektrischen Kraft Null, diese also aus einer Potentialfunction ableitbar. Trotzdem ist das elektrische Feld kein statisches; vielmehr genügt die Componente X der Differentialgleichung

$$4\pi\tau X + (1+4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t} = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$X = X_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1+4\pi k}t}$$

ist. Ebenso ist

$$Y = Y_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1+4\pi k}t}$$

$$Z = Z_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1+4\pi k}t}.$$

Der Vector X_0, Y_0, Z_0 ist dabei nur der Bedingung unterworfen, daſs er wirbelfrei ist. Ein nach den Gesetzen der Elektrostatik über den Leiter vertheiltes Feld klingt also, wenn es einmal bestanden hat, nach dem Exponentialgesetz ab; und zwar ist die Zeit, in der die Kraft auf den e-ten Theil herabgeht gleich

$$\frac{1 + 4\pi k}{4\pi\tau}$$

und wegen der Gröſse von τ bei gutleitenden Stoffen unmeſsbar klein. Das Gleiche gilt von der elektrischen Ladung, da sie der Divergenz der elektrischen Kraft proportional ist. Auch sie verschwindet praktisch momentan; der Leitungsstrom aber, welcher den Ladungsausgleich bewirkt, wird — dies ist der Sinn der besprochenen Lösung — in seinen magnetischen Wirkungen vollkommen durch den Verschiebungsstrom compensirt. Hieraus folgt unsere Berechtigung, bei der Untersuchung elektrischer Wellen gemäſs (261) auch bei leitenden Substanzen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

zu setzen. Im Allgemeinen superponirt sich noch solch' ein wirbelfreies, abklingendes Feld über den Schwingungsvorgang.

Unter dieser Voraussetzung haben wir schon in § 72 aus (259) und (260) die Differentialgleichung (262) abgeleitet, welcher die Componenten beider Feldstärken gehorchen. Setzt man zur Abkürzung

$$a = \frac{A}{\sqrt{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi\varkappa)}}$$

$$b = \frac{4\pi\tau(1 + 4\pi k)}{A^2},$$

so lautet sie

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + b\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{267}$$

Da sie linear und homogen ist und constante Coefficienten besitzt, ist

$$\varphi = \alpha e^{ipt + sx} \tag{268}$$

eine Lösung, wenn die Constanten p und s der Gleichung

$$s^2 = -\frac{p^2}{a^2} + ibp \tag{268a}$$

genügen. Der reelle und der imaginäre Theil von (268) giebt jeder für sich eine in der x-Richtung fortschreitende ebene Welle. Dabei sind p und s im Allgemeinen complex. Zeitlich rein periodischen Schwingungen entspricht ein reeller Werth von p; die Schwingungsdauer beträgt dann $\frac{2\pi}{p}$.

Um den letzteren Fall näher zu untersuchen, setzen wir

$$s = q + i r,$$

wo q und r beide reell sein sollen, und finden durch Trennung der reellen und imaginären Glieder in (268a) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r^2 - q^2 &= \frac{p^2}{a^2} \\ 2qr &= bp \end{aligned}\right\} \tag{268b}$$

zur Bestimmung von r und q. Aus ihnen folgt (die Vorzeichenfrage entscheidet sich dadurch, dafs q^2 und r^2 positiv sein müssen)

$$q^2 = \frac{p^2}{2a^2}\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} - 1\right)$$

$$r^2 = \frac{p^2}{2a^2}\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} + 1\right).$$

Nach (268) ist aber

$$\varphi = \alpha e^{qx} e^{i(pt + rx)}. \tag{268c}$$

Sollen die Wellen in der positiven X-Richtung fortschreiten, so mufs also ($p > 0$ vorausgesetzt) $r < 0$ sein. Aus der zweiten der Gleichungen (268b) geht dann auch $q < 0$ hervor, so dafs

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{p}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} - 1\right)} \\ r &= -\frac{p}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} + 1\right)} \end{aligned}\right\} \tag{268d}$$

zu setzen ist.

Nach (268c) ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\left|\frac{p}{r}\right| = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} + 1\right)}},$$

d. h. um so gröfser, je kleiner die Periode $\frac{2\pi}{p}$ ist. Für sehr schnelle Schwingungen, für welche $\frac{b^2 a^4}{p^2}$ neben 1 fortgelassen werden kann, nimmt sie den für einen Nichtleiter von gleicher Dielektricitätsconstante $1 + 4\pi k$ und Permeabilität $1 + 4\pi \varkappa$ geltenden Werth a an. Im Gegensatz zu den Wellen in Nichtleitern ist aber die durch (268c) angegebene Welle gedämpft; ihre Amplitude nimmt, da $q < 0$, in der Fortschreitungsrichtung ab. Und zwar, da

$$\frac{d(q^2)}{dp} = \frac{p}{2a^2} \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1}} > 0$$

um so stärker, je kleiner die Periode $\frac{2\pi}{p}$ ist. Dennoch bleibt q auch dann endlich, wenn p über alle Grenzen wächst; denn da

$$\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{b^2 a^4}{p^2} + \ldots,$$

so ist

$$\lim_{p=\infty} q = -\frac{ab}{2}.$$

Mit unendlich wachsender Leitfähigkeit τ wachsen auch b und q in's Unendliche. In dem durch $\tau = \infty$ charakterisirten „vollkommenen" Leiter können sich Wellen also überhaupt nicht fortpflanzen. Das folgt auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (267); ist $b = \infty$, so mufs $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ sein, da $\varDelta \varphi$ stets endlich bleibt.

Für sehr langsame, durch kleine Werthe von p ausgezeichnete Schwingungen kann man in (268 a) $\frac{p^2}{a^2}$ neben bp vernachlässigen, oder was dasselbe sagt, in der Differentialgleichung (267) das Glied $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Diese geht dann in die Wärmeleitungsgleichung

$$\varDelta \varphi = b \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

über.

§ 75. Grenzbedingungen. Die Reflexion elektrischer Wellen am vollkommenen Leiter.

Während wir bisher nur das Innere homogener Körper der Betrachtung zu Grunde legten, wollen wir jetzt die allgemein gültigen Gleichungen (249) und (256) zur Ableitung der Grenzbedingungen an einer Unstetigkeitsfläche benutzen. Die Normale des zu betrachtenden Flächenelements weise in die x-Richtung; wir bilden den Circulationswerth der magnetischen Kraft für den Umfang eines unendlich kleinen, sehr lang gestreckten, von der Unstetigkeitsfläche halbirten Rechtecks $d\xi\, d\eta$. Nach (256) ist er, da die auf $d\xi$ bezüglichen Theile zu vernachlässigen sind:

$$(M_1 - M_2)\, d\eta = \frac{1}{A}\left(4\pi w + \frac{\partial (Z + 4\pi n)}{\partial t}\right) d\xi\, d\eta\,. \tag{269}$$

Läſst man hier $d\xi$ kleiner und kleiner werden, so findet man als Grenzbedingung

$$M_1 = M_2\,.$$

Da man genau so

$$\left.\begin{aligned} & \\ N_1 &= N_2 \end{aligned}\right\} \tag{270}$$

ableiten kann und wegen der Symmetrie zwischen (249) und (256) für die elektrische Kraft dasselbe gelten muſs, wie für die magnetische, so ist auch

$$Y_1 = Y_2\,, \qquad Z_1 = Z_2\,. \tag{270a}$$

Die tangentiellen Componenten beider Feldstärken sind stetig. Drückt man dies im Anschluſs an § 66 dahin aus, daſs ihr Flächenwirbel verschwindet, so tritt besonders deutlich hervor, daſs diese Grenzbedingung nur ein Grenzfall der Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie sind. Es sind dies dieselben Bedingungen, die wir schon früher, freilich für einen engeren Gültigkeitsbereich, kennen gelernt haben.

Nur eine Ausnahme giebt es. Die Stromdichte q muſs stets endlich sein, wo es die Leitfähigkeit τ ist. Sonst würden nach (229d) unendlich groſse Energiequanten als Joule'sche Wärme auftreten. Beim vollkommenen Leiter dagegen kann q auch unendlich sein. Dem entsprechend kann sich das Glied $w\, d\xi$ in (265) mit abnehmendem $d\xi$ nicht dem Werth 0, sondern einem von Null verschiedenen Grenzwert w' nähern. An die Stelle von (270) treten dann die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} M_1 - M_2 &= \frac{4\pi}{A} w' \\ N_1 - N_2 &= \frac{4\pi}{A} v', \end{aligned}\right\} \tag{270 b}$$

wenn v' analog der Grenzwerth von $v\,d\xi$ ist. Nun können aber nach den vorigen Paragraphen Schwingungen im vollkommenen Leiter nicht fortpflanzen, es ist also $M_2 = N_2 = 0$ zu setzen, wenn der Leiter auf der durch den Index 2 gekennzeichneten Seite der Grenzfläche liegt. Also sind

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{4\pi}{A} w' \\ N_1 &= \frac{4\pi}{A} v'. \end{aligned}\right\} \tag{270 c}$$

Wie man an den Gleichungen

$$\lim_{d\xi = 0} (w\,d\xi\,d\eta) = w'\,d\eta$$
$$\lim_{d\xi = 0} (v\,d\xi\,d\zeta) = v'\,d\zeta$$

erkennt, sind $w'd\eta$ und $v'd\zeta$ die Intensitäten der durch die Rechtecke $d\xi\,d\eta$ und $d\xi\,d\zeta$ hindurchtretenden Ströme. Es entspricht genau der in § 66 gegebenen Definition des Flächenwirbels, wenn wir den durch $u' = 0$, w' und v' als Componenten definirten Vector als die Dichte des elektrischen Flächenstroms bezeichnet. Die Gleichungen (270 b) lassen sich dann mit den Worten ansprechen: Der Flächenwirbel der magnetischen Feldstärke ist gleich dem 4π-fachen der elektromagnetisch gemessenen Dichte des Flächenstroms. Der letztere schützt das Innere des vollkommenen Leiters vor dem Eindringen der Wellen.

Die Grenzbedingungen (270 a) für die elektrische Kraft gehen am vollkommenen Leiter über in

$$Y_1 = 0\,, \; Z_1 = 0\,. \tag{270 d}$$

Dies wollen wir benutzen, um die Reflexion ebener Wellen, welche auf die ebene Grenze eines vollkommenen Leiters senkrecht auftreffen, zu erörtern.

Die Grenzebene habe die Gleichung $x = 0$, der Leiter erfülle die Raumhälfte, in welcher x positiv ist, während die andere Hälfte von einem Dielektrikum eingenommen sein soll. Der Ansatz (263) giebt deshalb für die Darstellung einer ebenen auf die Grenzfläche auftreffenden Welle, wenn man $F_3 = 0$, $F_2 = F$ setzt und (265) beachtet, die Gleichungen

$$X = 0 \quad Y = F(x - a\,t) \quad Z = 0$$
$$L = 0 \quad A\,t = 0 \qquad N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\, F(x - a\,t).$$

Der Grenzbedingung $Y = 0$ für $x = 0$ ist hier, abgesehen von dem trivialen Fall $F = 0$, nicht genügt. Deshalb entsteht an der Grenze eine neue, in der negativen x-Richtung fortschreitende Welle, deren elektrische Feldstärke die der einfallenden in der Grenzebene gerade aufhebt. Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \quad Y = -F(-x - a\,t) \quad Z = 0 \\ L = 0 \quad M = 0 \quad N = \sqrt{\dfrac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\, F(-x - a\,t) \end{array}\right\} \tag{271}$$

geben aber eine in der negativen x-Richtung fortschreitende Welle, weil diese zu den Richtungen der beiden Feldstärken die in Fig. 30 angegebene Lage hat. Und für $x = 0$ ist die aus beiden Wellen resultirende elektrische Kraft

$$Y = F(x - a\,t) - F(-x - a\,t)$$

unabhängig von t gleich Null, während die resultirende magnetische Kraft

$$N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\big(F(x - a\,t) + F(-x - a\,t)\big)$$

dort den Betrag $2\sqrt{\dfrac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\, F(-a\,t)$ hat. Die Gleichungen (271) enthalten demnach die Darstellung der reflektirten Welle. Sie ist an Intensität der einfallenden gleich.

Bei periodischen Schwingungen kann man

$$F(x - a\,t) = \sin s\,(x - a\,t)$$

setzen, die resultirenden Feldstärken erhalten dann die Beträge

$$Y = \sin s\,(x - a\,t) + \sin s\,(x + a\,t) = 2\sin(s\,x)\cos(s\,a\,t)$$
$$N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\,(\sin s\,(x - a\,t) - \sin s\,(x + a\,t))$$
$$= -2\sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}}\cos(s\,x)\sin(s\,a\,t).$$

Es bilden sich an der reflektirenden Fläche demnach stehende Wellen, und zwar liegen in ihr sowie in den Abständen $\frac{\pi}{s}, \frac{2\pi}{s}, \frac{3\pi}{s} \ldots$ von ihr Knoten der elektrischen und Bäuche der magnetischen Kraft; dagegen in den Abständen $\frac{\pi}{2s}, \frac{3\pi}{2s}, \frac{5\pi}{2s} \ldots$ Knoten der magnetischen und Bäuche der elektrischen Kraft.

Heinrich Hertz hat diese stehenden Wellen experimentell nachgewiesen. Er erzeugte elektrische Wellen im Luftraum, indem er in einem mittels des Inductoriums aufgeladenen Leitersystem Entladungsschwingungen (siehe § 77) hervorrief. Zur Auffindung der Lage von Knoten und Bäuchen diente ihm ein kreisförmiger, an einer Stelle durch ein Funkenmikrometer unterbrochener Draht, an dem sich die Inductionswirkung der Wellen durch Ueberspringen von Funken kundgab. So konnte er an der Lebhaftigkeit des Funkenspiels die Lage der Knoten und Bäuche erkennen, den Abstand benachbarter Knotenebenen, d. h. die Wellenlänge $\frac{2\pi}{s}$ bestimmen und nach einer Schätzung der Schwingungsdauer $\mathfrak{T}$ zur Ermittelung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft

$$a = \frac{2\pi}{s\mathfrak{T}}$$

gelangen. Dafs er dabei einen der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum sehr nahen Werth fand, spricht sehr für die Maxwell'sche Theorie; denn da k und $\varkappa$ für Luft sehr klein sind, stimmt dies mit Gleichung (264) überein. Die in § 70 vorgetragene, die Fernwirkung im Vacuum beibehaltende Theorie würde dagegen nach (254 b) einen sehr viel gröfseren Wert ergeben.

§ 76. Das Energieprincip in der Maxwell'schen Theorie. Eindeutigkeit der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Die Gleichungen (249) wurden in § 69 für ruhende Körper abgeleitet. Defshalb ist für permanente Magnete $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ etc. zu setzen und die Gleichungen (249) gehen für sie über in

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = - \frac{1}{A} \frac{\partial L}{\partial t}$$

etc.

Wir können diese Form aber auch aus den Gleichungen (259) erzielen, wenn wir den permanenten Magneten den Wert $\varkappa = 0$ zuschreiben, wie wir es schon im § 54 taten; diese Festsetzung ist auch notwendig, wenn die Formel (211 d) für die magnetische Energie gelten soll. Dann sind die Gleichungen (259) ebenso allgemein wie (249). Wir führen sie zur Erleichterung der nachfolgenden Rechnung hier noch einmal an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial L}{\partial t}\\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial M}{\partial t}\\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial N}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{259}$$

Der zweite Tripel unserer schlechthin als MAXWELL'sche Gleichungen bezeichneten Grundformeln lautet in der analogen, noch ganz allgemein gültigen Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + (1+4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + (1+4\pi k)\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + (1+4\pi k)\frac{\partial Z}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{272}$$

Diese sechs Gleichungen multipliciren wir nun mit $-L$, $-M$, $-N$, X, Y, Z und addiren sie; dann finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{A}{4\pi}\Bigg\{X\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\\
- L\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - M\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - N\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\Bigg\}\\
= (Xu + Yv + Zw) + \frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\frac{1+4\pi k}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)\\
+ \frac{(1+4\pi\varkappa)}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite läſst sich nun leicht auf die Form bringen:

$$-\frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(ZL - XN) + \frac{\partial}{\partial z}(XM - YL).\right\}$$

Integriren wir also über einen abgeschlossenen Theil des Raumes, so liefert die Anwendung des Gauss'schen Satzes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\\
&\quad+\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz\\
&\quad=\frac{A}{4\pi}\iint ds\left\{(YN-ZM)\cos(n_i,x)\right.\\
&\qquad\quad\left.+(ZL-XN)\cos(n_i,y)+(XM-YL)\cos(n_i,z).\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(273)$$

Dabei ist Stetigkeit aller Uebergänge vorausgesetzt. Das erste Glied der linken Seite ist nach (210 b) und (211 d) die Zunahme der Summe aus der elektrischen und magnetischen Energie pro Zeiteinheit, das zweite die von elektrischen Strömen pro Zeiteinheit erzeugte Energie, welche bei veränderlichen Strömen im Gegensatz zu stationären nicht für jedes abgeschlossene Stromgebiet Null zu sein braucht, sondern sowohl positive als negative Werte annehmen kann (vgl. § 69). Die rechte Seite giebt also an, wie viel Energie in der Zeiteinheit in das betrachtete Raumgebiet durch die Oberfläche hineinströmt. Es ist wichtig, daſs das Flächenintegral für die unendlich ferne Fläche nicht immer verschwindet. Bei der Kugelwelle z. B. zeigen die Formeln (266 b), daſs die Componenten beider Feldstärken im Unendlichen nur wie $\frac{1}{R}$ abnehmen, die Ausdrücke $(YN-MZ)$ etc. also wie $\frac{1}{R^2}$, so daſs das fragliche Integral für die unendlich ferne Fläche einen von Null verschiedenen Grenzwerth hat. Das hängt damit zusammen, daſs das Erregungscentrum der Kugelwelle Energie ins Unendliche ausstrahlt.

An die Gleichung (273) knüpft sich der schon in § 70 angekündigte Beweis, daſs das elektromagnetische Feld in einem Raumtheil (der auch unendlich groſs sein kann) gemäſs den Gleichungen (259) und (272) eindeutig bestimmt ist, wenn

1. der Anfangszustand X_0, Y_0, Z_0; L_0, M_0, N_0 für $t=0$,
2. die locale elektromotorische Kraft δ (Componenten: α, β, γ),
3. an der Grenze die tangentialen Componenten der elektrischen oder magnetischen Feldstärke für alle Zeiten $t>0$ bekannt sind.

Zu diesem Zweck verwandeln wir Gleichung (273) durch Anwendung von (221) in

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right.\\&\left.+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\\&+\iiint\frac{1}{\tau}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint(\alpha u+\beta v+\gamma w)\,dx\,dy\,dz\\&+\overline{\iint} ds\left\{(YN-ZM)\cos(n_i,x)\right.\\&\qquad\left.+(ZL-XN)\cos(n_i,y)+(XM-YL)\cos(n_i,z).\right\}\end{aligned}\right\}\quad(273\,\mathrm{a})$$

Wir bemerken zunächst, dafs der Integrand des Flächenintegrals nur von den Tangentialcomponenten der beiden Feldstärken abhängt; denn legt man die x-Axe in die Richtung von n_i, so geht er über in $(YN-ZM)$. Angenommen nun, wir hätten zwei Lösungen X', Y', Z'; L', M', N' und X'', Y'', Z''; L'', M'', N'' der MAXWELL'schen Gleichungen, welche beide denselben unter 1., 2. und 3. angegebenen Nebenbedingungen genügen, so gehören ihnen nach (221) gewisse Werthe u', v', w' und u'', v'', w'' der Componenten der Stromdichte zu. Die Differenzen $X=X'-X''$, $Y=Y'-Y''\ldots u=u'-u''\ldots$ genügen dann ebenfalls den MAXWELL'schen Gleichungen, aber den Nebenbedingungen, dafs

1. im Anfangszustand beide Feldstärken Null sind,
2. die locale elektromotorische Kraft verschwindet,
3. die tangentielle Componente der elektrischen oder der magnetischen Feldstärke an der Grenze dauernd Null sind.

Den beiden letzten zu Folge ist die rechte Seite von (273a) gleich Null, also da

$$\iiint\frac{1}{\tau}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz\geqq 0\,,$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\leqq 0\,.\end{aligned}$$

Im Anfangszustand sind aber nach der Nebenbedingung 1. elektrische und magnetische Energie beide Null; negativ können sie nicht werden; also mufs hier das Gleichheitszeichen gelten, woraus unmittelbar

$$X = X' - X'' = 0$$
$$Y = Y' - Y'' = 0$$
$$\text{etc.,}$$
$$u = u' - u'' = 0$$
$$\text{etc.}$$

d. h. die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

§ 77. Das Energieprincip in der Theorie der quasistationären Ströme.

Wir sind jetzt in der Lage, den in § 68 geforderten Beweis zu führen, dafs die in dem ersten Theil des dritten Abschnitts dargelegte Elektrodynamik zusammen mit der in § 69 entwickelten Theorie der Induction dem Energieprincip genügt. Im § 69 erwähnten wir sogleich am Anfang, dafs die Inductionsgesetze nicht streng, sondern nur für relativ langsame zeitliche Veränderungen gelten können. Zunächst müssen wir fragen, wodurch die Grenze ihres Gültigkeitsbereichs bestimmt ist.

Die Antwort darauf lautet sehr einfach: Da wir in § 69 die magnetische Wirksamkeit des Verschiebungsstromes nicht berücksichtigten, so können die dort abgeleiteten Resultate nur gelten, so lange in (272) alle vorkommende Werthe von $(1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. gegen den Leitungsstrom u, v, w vernachlässigt werden dürfen. Für hinreichend langsame Schwingungen mufs das stets der Fall sein. Wir bezeichnen die Ströme dann als quasistationär, um anzudeuten, dafs wir sie für ihre magnetischen Wirkungen als stationär betrachten. Consequenter Weise müssen wir dann in (273) die zeitliche Vermehrung der elektrischen Energie

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi k)(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx\,dy\,dz\right\}$$

gegen das vom Strom in Energie nichtelektromagnetischer Art umgesetzte Energiequantum

$$\iiint(Xu + Yv + Zw)\,dx\,dy\,dz$$

vernachlässigen. Zugleich werden die Componenten der magnetischen Kraft im Unendlichen wie $\frac{1}{R^3}$ Null, da dies für das statische magnetische Feld stets gilt, mag es nun von Strömen oder von permanenten Magneten oder von beidem erregt werden. Daher verschwindet das Flächenintegral in (273) für die unendlich ferne Fläche, so daſs für die Anwendung auf den unendlichen Raum nur übrig bleibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\left\{\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\\ +\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz=0\,;\end{aligned}\right\}\quad(273\,\mathrm{b})$$

Daſs wir bei der Theorie der Induction von der elektrischen Energie absahen, war also durchaus gerechtfertigt.

Für ein System linearer Ströme I_a, welche Stromkreise mit den Widerständen w_a und den elektromotorischen Kräften E_a durchflieſsen, ist (vergl. § 61)

$$\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz=\sum(I_a^2 w_a-E_a I_a).$$

Bezeichnet $\mathfrak{W}$ die magnetische Energie des Systems, so geht (273 b) über in

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt}-\sum E_a I_a+\sum I_a^2 w_a=0\,. \qquad (273\,\mathrm{c})$$

Für den einzelnen Strom haben wir in § 69 die Gesetze der Selbstinduction sowie die der Induction durch Verschiebung eines Magneten aus dem Energiesatz abgeleitet. Für mehrere Ströme würde das miſslingen; denn dieser Satz liefert auch für mehrere Variabele nur eine Gleichung, reicht also im Allgemeinen nicht aus. Die zu (248 a) und (248 b) führende Betrachtung war nicht, wie der zu (248) leitende Schluſs, streng, sondern beruhte nur auf Analogie. Nur die Uebereinstimmung mit der Erfahrung sicherte ihr Ergebnis. Wohl aber muſs es nachträglich möglich sein, die Uebereinstimmung unserer Inductionstheorie mit dem Energieprincip nachzuweisen.

Dieser Nachweis ist aus dem Grunde noch nicht in dem allgemeinen Theorem des vorhergehenden Paragraphen enthalten, weil wir dort nur von ruhenden Körpern sprachen. Für bewegte Körper haben wir keine allgemeine Theorie aufgestellt. Aus Stetigkeitsgründen können wir aber schlieſsen, daſs, wenn die Bewegungen hinreichend langsam erfolgen, und die Ströme quasistationär sind, auſser magnetischer Energie, Joule'scher Wärme und Arbeit elektrischer Kräfte nur noch Arbeit ponderomotorischer Kräfte in merklicher Gröfse auftreten kann. Diese wird aber durch die Abnahme des Selbstpotentials P des Stromsystems gemessen, welche so zu berechnen ist, wie wenn die Stromstärken konstant blieben. Deuten wir diese Bedingung durch die Schreibweise

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\text{const}}$$

an, so ist (273 c) zu vervollständigen zu der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt} - \sum E_a I_a + \sum I_a^2 w_a - \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\text{const}} = 0.$$

Die Summationen sind über alle Stromkreise auszuführen. Da nach (247 c) $\mathfrak{W} = -P$ ist, geht sie über in

$$\frac{dP}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\text{const}} + \sum I_a \left(E_a - I_a w_a\right) = 0. \tag{275}$$

Dies mufs nach der Inductionstheorie eine Identität sein, wenn sie und die Elektrodynamik mit dem Energieprincip verträglich sein sollen.

Nun ist bei Ausschlufs permanenter Magnetisirung die magnetische Energie eine homogene quadratische Function der Stromstärken, da die Componenten der Feldstärke lineare homogene Functionen von ihnen sind; also

$$\mathfrak{W} = -P = \frac{1}{2}\sum^a \sum^b p_{ab}\, I_a I_b, \qquad p_{ab} = p_{ba} \tag{276}$$

Die Constanten p_{aa} sind die Selbstinductionscoefficienten, p_{ab} (a verschieden von b) die gegenseitigen Inductionscoefficienten der Stromkreise (siehe § 69); die letzteren können im Gegensatz zu den ersteren auch negativ sein, doch ist ihnen, da $\mathfrak{W}$ nie negativ und Null nur, wenn alle I_a gleichzeitig verschwinden, werden kann, die Bedingung

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

auferlegt. Die im Stromkreis von I_a inducirte Kraft ist nach (248 e) gleich $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right)$, d. h. es besteht die Gleichung

$$E_a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) = I_a w_a.$$

Multiplicirt man sie mit I_a und summirt über alle Ströme, so findet man

$$\sum I_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0. \tag{277}$$

Nun besteht aber die Identität:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum I_a \frac{\partial P}{\partial I_a}\right) = \sum I_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) + \sum \frac{\partial P}{\partial I_a} \cdot \frac{d I_a}{dt},$$

und nach dem Euler'schen Satz für homogene Functionen ist

$$\sum I_a \frac{\partial P}{\partial I_a} = 2P,$$

wie man an (276) leicht bestätigt. Benutzt man diese beiden Gleichungen, so geht (277) über in

$$2\frac{dP}{dt} - \sum \frac{\partial P}{\partial I_a}\frac{d I_a}{dt} + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0;$$

und dies ist, da

$$\frac{dP}{dt} = \sum \frac{\partial P}{\partial I_a}\frac{d I_a}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I = \text{const}},$$

identisch mit der das Energieprincip formulierenden Gleichung (275)

$$\frac{dP}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I = \text{const}} + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0.$$

Dieser Beweis macht implicite davon Gebrauch, daſs man ein System von elektrischen Strömen als cyclisches System betrachten kann. Das Nähere hierüber siehe Band I dieser Vorlesungen § 75 u. f.

Nicht ganz in den Rahmen der hier besprochenen Annäherung passen die Entladungsschwingungen eines elektrischen Condensators; denn wenn auch längs des Schlieſsungsdrahtes der Leitungsstrom den Verschiebungsstrom weit überwiegt, so fehlt der erstere zwischen den Belegungen des Condensators ganz, und da die Summe aus Leitungs- und Verschiebungsstrom, der elektrische Gesammtstrom, nach § 71 stets geschlossen ist, ist der letztere hier bestimmt nicht zu vernachlässigen. Aber weil er nur zwischen den Condensatorplatten merklich auftritt und nach (256) magnetisch gerade so wirkt wie der Leitungsstrom, bestimmt sich das magnetische Feld, wie wenn der Condensator keine Unterbrechung der leitenden Strombahn, sondern nur eine Verbreiterung wäre. Aus demselben Grunde wie oben fällt daher in der Energiegleichung (273) das Flächenintegral für die unendlich ferne Fläche fort.

Dagegen mufs die elektrische Energie des Condensators durchaus berücksichtigt werden; sind die Schwingungen nicht zu schnell, so mufs sie wie im statischen Fall gleich $\frac{\mathfrak{e}^2}{2C}$ sein, wo $\mathfrak{e}$ die Ladung der einen Belegung, C die Capacität bedeutet. Aus der Energiegleichung folgt also, wenn wir die magnetische Energie mit Hülfe des Selbstinductionscoefficienten p berechnen,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{e}^2}{C} + \frac{1}{2} p I^2\right) + I^2 w = 0 .$$

Dabei ist von einer elektromotorischen Kraft im Schliefsungsdraht abgesehen. Führt man hier die Differentiation nach t aus und benutzt die Relation

$$-\frac{d\mathfrak{e}}{dt} = I,$$

so findet man

$$-\frac{\mathfrak{e} I}{C} + p I \frac{dI}{dt} + I^2 w = 0; \tag{278}$$

und durch Division durch I und nochmalige Differentiation nach t

$$p\frac{d^2 I}{dt^2} + w\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 . \tag{279}$$

Dies ist die Differentialgleichung gedämpfter Schwingungen; und zwar vertritt, wenn man sie mechanisch deuten will, der Selbstinductionscoefficent p die Masse, $\frac{I}{C}$ die treibende Kraft, während das Glied mit w die Dämpfung bestimmt. Ihre vollständige Lösung lautet

$$I = I_1 e^{\alpha_1 t} + I_2 e^{\alpha_2 t},$$

wobei I_1 und I_2 die beiden Integrationsconstanten, α_1 und α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$p\alpha^2 + w\alpha + \frac{1}{C} = 0$$

sind; es ist demnach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2p}\left(-w + \sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2p}\left(-w - \sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}}\right).$$

Für die Discussion sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Ist

$$w < 2\sqrt{\frac{p}{C}},$$

so sind α_1 und α_2 complex und die vollständige Lösung lautet:

$$I = e^{-\frac{w}{2p}t}\left(I_1 e^{\frac{i}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\,t} + I_2 e^{-\frac{i}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\,t}\right).$$

Hier ist I freilich noch complex; zwei unabhängige reelle Lösungen gewinnt man aber leicht, wenn man über die Integrationsconstanten I_1 und I_2 so verfügt, daſs man einmal $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I'$, das andere Mal $I_2 = -I_1 = -\frac{I''}{2i}$ setzt; diese lauten

$$I = I' e^{-\frac{w}{2p}t} \cos\left(\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2 \cdot t}\right)$$

und

$$I = I'' e^{-\frac{w}{2p}t} \sin\left(\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2 \cdot t}\right).$$

Die Entladungsschwingungen sind dann periodisch, wenn sie auch gemäſs dem Factor $e^{-\frac{w}{2p}t}$ mit der Zeit abklingen. Die Periode beträgt

$$\frac{4\pi p}{\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}},$$

also bei sehr kleinem, gegen $2\sqrt{\frac{p}{C}}$ zu vernachlässigenden Werth des Widerstandes w

$$2\pi\sqrt{pC};$$

Nach dieser Formel schätzte Hertz die Periode seiner Schwingungen bei den in § 75 erwähnten Versuchen, wenngleich sie dafür nur in roher Annäherung gelten kann. Im Allgemeinen wächst aber die Periode mit zunehmendem Widerstand. Wird schliefslich

$$w > 2\sqrt{\frac{p}{C}},$$

so sind α_1 und α_2 beide reell und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (279),

$$I = I_1 e^{\frac{1}{2p}\left(\sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}} - w\right)t} + I_2 e^{-\frac{1}{2p}\left(\sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}} + w\right)t},$$

zeigt, dafs die Entladung aperiodisch vor sich geht.

Eine ausführlichere Discussion dieser Differentialgleichung findet sich in Band I dieser Vorlesungen § 32.