universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die mathematischen Principien der Akustik

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1898

Erster Theil. Theorie der kleinen Oscillationen discreter Massenpunkte um eine Lage stabilen Gleichgewichtes

urn:nbn:at:at-ubi:2-6867

Erster Theil.

Theorie der kleinen Oscillationen discreter Massenpunkte um eine Lage stabilen Gleichgewichtes.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung.

---

§ 2. Die Bewegungsgleichung und die Form der Bewegung.

Wir wollen die Annahme machen, dafs die Kraft, welche einen Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurücktreibt und dadurch die Oscillationen zu Stande kommen läfst, dem Gesetz der sogenannten elastischen Kräfte folgt, d. h. dafs sie proportional der Gröfse der Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ist.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn ein einzelner Punkt, dessen Masse gleich m, in der Richtung der x-Axe aus der Gleichgewichtslage, die wir in dem Punkte $x = 0$ annehmen wollen, verschoben worden ist. Dann ist die auftretende Kraft einmal in Folge der über sie gemachten Annahme gleich $-a^2 x$, wo a^2 eine stets positive Gröfse bezeichnen soll, und ferner ist sie nach dem NEWTON'schen Kräftemaafs auszudrücken durch $m\frac{d^2x}{dt^2}$. Wir haben daher

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x \tag{1}$$

zu setzen.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) kann man dadurch finden, dafs man einen Multiplicator für sie sucht, der beide Seiten derselben in Differentialquotienten nach der Zeit

verwandelt. Ein solcher ist $\frac{dx}{dt}$. Dann läfst sie sich in die Form bringen:

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 \cdot x^2\right] = 0 \qquad (1\,a)$$

Die letztere Gleichung sagt aus, dafs die in die eckige Klammer eingeschlossene Gröfse nicht von der Zeit abhängt. Da sie nun in unserem Falle keine andere Veränderliche enthält, ist sie constant zu setzen. Ihren constanten Werth bezeichnen wir mit $\frac{1}{2} a^2 h^2$; dann ist also

$$\tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x^2 = \tfrac{1}{2} a^2 h^2. \qquad (1\,b)$$

In dieser Form drückt die Gleichung das Gesetz von der Constanz der Energie aus. Das erste Glied der linken Seite ist der Werth der actuellen Energie der bewegten Masse, das zweite mifst den noch vorhandenen Rest der potentiellen Energie, deren Werth für das angenommene Wirkungsgesetz der elastischen Kraft wir hier kennen lernen. Die charakteristische Eigenthümlichkeit dieser Gröfse ist die, dafs sie eine Function der Coordinaten ist, deren negativ nach einer der in ihr enthaltenen Coordinaten gebildeter Differentialquotient

$$-\frac{d}{dx}\left[\tfrac{1}{2} a^2 x^2\right] = -a^2 x$$

die in Richtung der betreffenden Coordinate wirksame Kraftcomponente giebt.

Gleichung (1 b) ergiebt weiter:

$$\pm \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{m}}$$

oder indem wir nach t integriren:

$$\text{arc} \cdot \sin\left(\frac{x}{h}\right) = C + \frac{a\,t}{\sqrt{m}}$$

oder

$$x = h \cdot \sin\left[C + \frac{a\,t}{\sqrt{m}}\right] \qquad (1\,c)$$

Da ein Sinus eines reellen Winkels immer ein echter Bruch ist, dessen Werthe zwischen $+1$ und -1 liegen, so liegt der Werth von x immer zwischen $+h$ und $-h$. Zwischen diesen beiden Punkten ist die Bewegung hin- und hergehend (oscillirend). Die Gröfse h heifst die Amplitude der Schwingung, der wechselnde Werth von x die zeitweilige Elongation des schwingenden Punktes. Wächst t um die Gröfse

$$\frac{\sqrt{m}}{a} . 2\pi = T,$$

so wächst der Bogen um 2π und der Sinus bekommt wieder denselben Werth, wie zu Anfang dieser Zeit; ebenso auch x und $\frac{dx}{dt}$. Also wiederholen sich vollkommen gleiche Zustände des bewegten Körpers, nachdem einmal die Zeit T oder ein beliebiges ganzes Multiplum derselben abgelaufen ist. Man nennt T die Schwingungsdauer oder die Periode der oscillirenden Bewegung; der reciproke Werth $\frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi\sqrt{m}}$ ergiebt die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit. Den Werth der Periode und der Amplitude pflegt man immer positiv zu nehmen. Schreibt man

$$x = h . \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + C \right], \tag{1 d}$$

so bezeichnet man C als die Phasenconstante. Diese Gröfse kann immer zwischen 0 und 1 angenommen werden, da es auf ein Vielfaches von 2π in dem Argument des Sinus nicht ankommt; sie giebt an, welcher Bruchtheil der Schwingungsperiode von dem Augenblick $t = -CT$ des Durchgangs des Punktes m durch die Gleichgewichtslage bis zum Zeitpunkt $t = 0$ vorübergegangen ist.

Man kann die Gleichung (1) auch nach einer anderen Methode integriren, indem man beachtet, dafs diese Gleichung zu einer gewissen Klasse von Differentialgleichungen gehört, die in der Physik eine ausgedehnte Anwendung finden.

Man pflegt solche Gleichungen, in denen die unbekannten veränderlichen Gröfsen selbst oder ihre Differentialquotienten erster oder höherer Ordnung, genommen nach den unabhängigen Veränderlichen, in jedem Gliede vorkommen, aber nur in erster Potenz und nicht in Producten je zweier derselben, homogene lineare Differentialgleichungen zu nennen. Für dieselben gelten folgende Sätze:

1. Wenn wir zwei Lösungen derselben Gleichung, z. B. ξ_1 und ξ_2 haben, beide als Function der unabhängigen Variablen gegeben, so ist jede homogene lineare Function von ξ_1 und ξ_2 ebenfalls eine Lösung. Denn setzen wir in die gegebene Differentialgleichung einmal ξ_1 und das andere Mal ξ_2 ein, so ergiebt sich durch Addition der entstehenden Gleichungen, dafs auch $(\xi_1 + \xi_2)$ eine Lösung derselben Differentialgleichung ist. Weil ferner Multiplication von dem Integral ξ mit irgend einem constanten Factor α oder β die Differentialgleichung nicht ungültig macht, da der Factor aus dieser sich wieder fortheben läfst, so sind auch $\alpha\xi_1$ und $\beta\xi_2$ Lösungen, und mit Berücksichtigung des eben Gesagten erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$x = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2.$$

Falls die gelöste Differentialgleichung eine Bewegungsgleichung ist, nennt man die durch die Lösung $\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 = x$ dargestellte zusammengesetzte Bewegung eine Superposition (geometrische Addition) der durch die Lösungen $\alpha\xi_1$ und $\beta\xi_2$ dargestellten Einzelbewegungen. Weil wir in dieser zusammengesetzten Bewegung jede der componirenden Bewegungen als ungestört vorhanden betrachten können, so bezeichnet man dieses Princip auch wohl als das Princip der ungestörten Superposition der Bewegungen. — Es darf bei der Bildung dieser homogenen linearen Function aus mehreren Einzellösungen auch $\sqrt{-1}$ als Factor in den Coefficienten gebraucht werden. Denn da Gleichungen zwischen complexen Gröfsen nur erfüllt werden können, wenn sowohl die reellen wie die imaginären Theile beider Seiten der Gleichung einander gleich sind, so sagt eine solche Gleichung nichts anderes aus, als was man schon bei ihrer Bildung wufste, dafs nämlich sowohl der reelle wie der imaginäre Theil des Werthes eine Lösung darstellt. Die Rechnung wird aber in vielen Fällen durch Einführung imaginärer Glieder viel kürzer und bequemer.

2. Die Gleichung (1) ist nun offenbar eine solche homogene lineare Differentialgleichung. Aber sie hat noch eine andere Eigenthümlichkeit, welche eine besondere Integrationsmethode anwendbar macht, sie hat nämlich constante Coefficienten ihrer Glieder. Bei solchen homogenen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten kann man particuläre Integrale immer in der Weise finden, dafs man die Unbekannte gleich setzt einer Constanten, multiplicirt mit einer Exponentialfunction der unabhängigen Variabeln, bez. wenn deren mehrere sind, mit einer solchen

Function, deren Exponent eine lineare Function der genannten Variablen ist.

Setzen wir in die Gleichung (1) den Werth

$$x = e^{pt}$$

ein, so ergiebt sich, da nunmehr

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p^2 x$$

ist,

$$mp^2 = -a^2$$

also

$$p = \pm i\sqrt{\frac{a^2}{m}}\,.$$

Wir erhalten daher die beiden Einzellösungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= e^{+it\sqrt{\frac{a^2}{m}}} = \cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + i\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \\ \xi_2 &= e^{-it\sqrt{\frac{a^2}{m}}} = \cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) - i\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nach dem, was wir soeben über die Superposition der Einzelbewegungen erfahren, ist die allgemeinste Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\alpha + i\beta)\left[\cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + i\,.\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \\ &\quad + (\gamma + i\delta)\left[\cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) - i\,.\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \\ &= (\delta - \beta)\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + (\alpha + \gamma)\cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) \\ &\quad + i\left[(\alpha - \gamma)\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + (\beta + \delta)\cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da in dieser Lösung nun der reelle Theil und der reelle Factor des imaginären Theiles mit Rücksicht darauf, daſs α, β, γ, δ völlig willkürlich sind, ganz übereinstimmende Form haben, so können wir die allgemeine Lösung schreiben:

$$x = F\,.\sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right) + G\,.\cos\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}}\right). \quad (4)$$

Setzen wir nun

$$F = h \,.\, \cos c$$

$$G = h \,.\, \sin c$$

so wird

$$x = h \,.\, \sin\left(t\sqrt{\frac{a^2}{m}} + c\right) \tag{5}$$

übereinstimmend mit dem, was wir oben in (1 d) gefunden. Durch die Combination der beiden particulären Integrale der Gleichungen (2) gelingt es also auch hier, ein vollständiges Integral zu finden, welches zwei willkürliche Constanten enthält, F und G oder h und c, über welche man so verfügen kann, dafs zur Zeit $t = 0$ der bewegte Punkt mit einer beliebig vorgeschriebenen Ablenkung x und Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ seine Bewegung beginnt.

Wir fanden seine Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi\sqrt{m}}\,.$$

Die hier beschriebene Bewegung ist, wie bemerkt, eine periodische, deren Periode T nur von der Masse m des Punktes und der Gröfse der elastischen Kraft a^2 abhängt. Sie wird einfache Schwingung (oder Sinusschwingung, bez. pendelartige Schwingung) genannt und läfst sich geometrisch so beschreiben:

Denken wir uns, dafs ein Punkt auf einem Kreise mit dem Radius h mit gleichförmiger Geschwindigkeit herumläuft, so ist die Projection dieser Bewegung auf einen Durchmesser eine Sinusschwingung.

Wenn unter den hier gemachten Annahmen die Bewegung einmal eingeleitet ist, so wird sie bis in die Unendlichkeit fortbestehen. Unsere Ableitung setzt aber voraus, dafs keine die Bewegung hindernden Kräfte vorhanden sind. In Wirklichkeit wird dieses nun in aller Strenge nie der Fall sein, sondern es wird immer eine Uebertragung der lebendigen Kraft an die Umgebung stattfinden (durch Reibung u. s. w.). Es kommen freilich viele Fälle vor, wo eine solche Form der Bewegung, wie wir sie hier abgeleitet haben, sich mit sehr grofser Annäherung vollzieht, weil die hindernd einwirkenden Kräfte verschwindend klein sind gegenüber der elastischen Kraft, welche die Bewegung unterhält.

§ 3. Die Beziehung der Bewegungsform zu den Eigenschaften des Klanges.

Von der Schwingungsdauer bez. der Schwingungszahl hängt das ab, was das Ohr als die Höhe des Tones empfindet, und zwar ergeben sich für die harmonischen Intervalle einfache numerische Beziehungen zwischen den Werthen der Schwingungszahlen. Es wird dieses schon von ARISTOTELES erwähnt, doch ist unbekannt, in welcher Weise er zu dieser Kenntnifs gekommen ist; PYTHAGORAS kannte nur das Verhältnifs der Saitenlängen zu den musikalischen Intervallen.

Das Verhältnifs der Schwingungszahlen ist bei den verschiedenen harmonischen Intervallen das folgende:

1 : 2	. .	Octave
2 : 3	. .	Quinte
3 : 4	. .	Quarte
4 : 5	. .	grofse Terz
5 : 6	. .	kleine Terz
3 : 5	. .	grofse Sext
5 : 8	. .	kleine Sext.

Es ist ersichtlich, dafs man mit der Octave, der Quinte und der grofsen Terz alle anderen Intervalle unmittelbar oder mittelbar bestimmen kann; denn es ist:

Quarte	= Octave minus Quinte		= 3 : 4
kleine Terz	= Quinte minus grofse Terz		= 5 : 6
grofse Sext	= Octave minus kleine Terz = Quarte plus grofse Terz		= 3 : 5
kleine Sext	= Octave minus grofse Terz		= 5 : 8.

Sobald also die Schwingungszahl für einen Ton festgesetzt ist, sind die Schwingungszahlen aller anderen Töne ebenfalls gegeben.

SCHEIBLER war der Erste, der die Schwingungszahlen mit einiger Genauigkeit vergleichen lehrte. Er benutzte dazu eine subjectiv-akustische Methode (Schwebungen), während später LISSAJOUS eine optische Methode (die nach ihm benannten Schwingungsfiguren) in Anwendung brachte.

Von SCHEIBLER rührt auch die erste Festlegung der absoluten Schwingungszahl für einen bestimmten Ton her. Auf seinen Vorschlag nahm die deutsche Naturforscherversammlung im Jahre 1834 für den sogenannten Kammerton a' die Schwingungszahl 440 in

der Secunde an. Durch den internationalen Musiker-Congrefs im Jahre 1885 wurde diese Zahl auf 435 festgesetzt. Diese Zahlen bedeuten hier die Anzahl ganzer Perioden, während deren der schwingende Punkt einen ganzen Hin- und Hergang ausführt. Die französischen Physiker rechnen meist nach halben Perioden, und haben deshalb doppelt so grofse Schwingungszahlen. Diese Sitte ist vom Uhrpendel hergenommen, welches bei jedem Durchgang durch die Gleichgewichtslage, von rechts, wie von links kommend, einen Schlag macht.

Die Schwingungszahlen der musikalisch verwendbaren Töne liegen zwischen 40 und 4000 ganzen Schwingungen, für das Ohr wahrnehmbar sind allerdings auch noch Schwingungen mit kleinerer und gröfserer Schwingungszahl; aber eine scharfe Auffassung der Intervalle ist bei ihnen nicht mehr möglich.

Die Sinusschwingungen sind nun nicht die einzigen der Zeit nach periodischen Functionen, sondern es sind für jeden Werth von T unendlich viele Formen periodischer Bewegung möglich. Sie sind aber alle zusammensetzbar aus Sinusschwingungen, und ihre Form ist die physikalische Grundlage für das, was das Ohr als Klangfarbe auffafst. Das Ohr zerlegt in der Empfindung jede periodische Bewegung, deren Schwingungszahl innerhalb der wahrnehmbaren Grenzen liegt, in nicht weiter zerlegbare Sinusschwingungen, die einfach empfunden werden. Die einfache pendelartige Schwingung ist also die Grundform, auf welche alle anderen Schwingungsformen, sowohl objectiv-mechanisch als subjectiv-akustisch, reducirt werden können.

Die oben (§ 2) gefundene Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x^2 = \tfrac{1}{2} a^2 h^2 \qquad (1\,\mathrm{b})$$

giebt, wie dort schon bemerkt ist, die Werthe der Energie an. Das erste Glied der linken Seite stellt die lebendige Kraft oder die actuelle Energie dar. Das zweite Glied giebt die Quantität der Spannkräfte, die potentielle Energie an. Die wichtige mechanische Bedeutung dieser Gröfsen ist die, dafs sie die unzerstörbaren Arbeitswerthe der stattfindenden Bewegung angeben. Diese können, wie in der allgemeinen Dynamik gezeigt wird, nur dadurch verändert werden, dafs äufsere Einwirkungen auf den schwingenden Punkt stattfinden, die entweder ihm neue Arbeitsäquivalente zuführen, oder ihm die vorhandenen entziehen können. Von diesen Arbeitswerthen des schwingenden Punktes hängt nun überhaupt der

Arbeitswerth aller anderen Wirkungen ab, welche die schwingende Masse auf andere Naturkörper ausüben kann, unter anderen auf unsere Sinnesorgane, und man pflegt deshalb diesen Arbeitswerth $\frac{1}{2}a^2.h^2$ vorzugsweise als Maafs für die Intensität des Schalles zu benutzen. Bezeichnen wir mit u die gröfste Geschwindigkeit, welche der schwingende Punkt annehmen kann, was offenbar im Punkt $x = 0$ geschieht, so ist:

$$\tfrac{1}{2}a^2h^2 = \tfrac{1}{2}mu^2. \tag{6}$$

Die Intensität kann also auch durch die beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage eintretende lebendige Kraft gemessen werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflufs conservativer Kräfte in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage.

---

§ 4. Die allgemeinen Eigenschaften des Systems.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, eine Reihe von Eigenthümlichkeiten abzuleiten und nachzuweisen, welche in Systemen von Massenpunkten vorhanden sind, die kleine Bewegungen in der Nähe einer Lage ausführen, in welcher sie unter anderen Umständen auch in stabilem Gleichgewichte ruhen könnten.

Wir nehmen ein beliebig aus Massenpunkten zusammengesetztes mechanisches System an. Jeder Punkt sei bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit seiner Gleichgewichtslage zusammenfällt. Die Richtung der Coordinatenaxen braucht für die verschiedenen Punkte nicht dieselbe zu sein. Es ist nicht nothwendig, dafs dabei die drei Coordinaten jedes einzelnen Punktes durch die Benennung unterschieden werden, und so wollen wir sie durch s_a, s_b, s_c u. s. w. fortlaufend durch das ganze System ausdrücken. Die Massen der einzelnen Punkte seien mit m_a, m_b, m_c u. s. w. bezeichnet. Da nun aber jedem Punkte drei Coordinaten und also auch drei Indices zukommen, so haben wir, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Indices sind, die demselben Punkte angehören, $m_\mathfrak{a} = m_\mathfrak{b} = m_\mathfrak{c}$ zu setzen. Es giebt im Allgemeinen also dreimal so viel Werthe $s_\mathfrak{a}$ als $m_\mathfrak{a}$, doch kann ein Theil dadurch wegfallen, dafs gewisse Punkte,

die Kräfte auf die übrigen ausüben, entweder ganz unbeweglich, oder gezwungen sind, sich auf gewissen Ebenen oder Geraden zu bewegen, die dann als Coordinatebenen oder Coordinataxen für die Lage dieser Punkte zu brauchen sind.

Es ist die Bedingung gestellt worden, dafs die auf die Massenpunkte einwirkenden Kräfte (Kräfte des Systems selbst und äufsere Kräfte) conservativ sein sollen. Diese Bedingung sagt aus, dafs jede Kraftcomponente S_a, welche einen der Punkte, m_a, in Richtung einer der Coordinaten, s_a, angreift, ihrer Gröfse nach bestimmt werde durch eine Gleichung von der Form

$$S_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_a}, \tag{7}$$

wo Φ als eine Function sämmtlicher Coordinaten s_a dargestellt werden kann, welche aber nicht direct die Zeit t enthalten darf. Die mechanische Bedeutung dieser Funktion Φ ist, dafs sie den Werth der Arbeit (potentiellen Energie) mifst, die aufgewendet werden mufs, um die sämmtlichen Massenpunkte m_a aus der Ruhelage in die durch die Coordinaten s_a bestimmte Lage zu bringen.

Bezeichnen wir mit dA die Arbeit, welche verwendet werden mufs, um eine Verrückung aller m_a um ds_a zu Stande zu bringen gegen die Wirkung seiner Kräfte S_a, so ist diese

$$dA = -\sum S_a \cdot ds_a = +\sum \frac{\partial \Phi}{\partial s_a} \cdot ds_a . \tag{8}$$

Da Φ nur von den s_a abhängen soll, stellt die letzte Summe die ganze Aenderung des Φ dar, und wir erhalten also

$$dA = d\Phi. \tag{8a}$$

Die durch die Gleichungen $s_a = 0$ charakterisirte Lage soll eine Ruhelage sein. Sie kann dies nur sein, wenn alle Bewegungskräfte gleich Null sind, d. h. alle $\frac{\partial \Phi}{\partial s_a} = 0$. Diese letztere Bedingung tritt ein, wenn in der Gleichgewichtslage die Function Φ ein Minimum oder ein Maximum oder auch ein sogenannter Sattelwerth, ein Minimo-Maximum ist. Wir werden gleich sehen, dafs bei der Forderung, das Gleichgewicht solle stabil sein, nur die Annahme eines Minimums zulässig ist.

§ 5. Bildung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für unser System.

Die Bewegungsgleichung der einzelnen Punkte erhält nun nach NEWTON's Definition der Bewegungskraft die Form

$$m_\alpha \cdot \frac{d^2 s_\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha}. \tag{9}$$

Wir haben so viele Gleichungen dieser Art, als veränderliche Coordinaten vorhanden sind. Multipliciren wir die Gleichung mit $\frac{ds_\alpha}{dt}$, so erhalten wir:

$$m_\alpha \cdot \frac{ds_\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2 s_\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} \cdot \frac{ds_\alpha}{dt}, \tag{9a}$$

und wenn wir die Summe über das ganze System bilden:

$$\sum_\alpha m_\alpha \cdot \frac{ds_\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2 s_\alpha}{dt^2} = -\sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} \cdot \frac{ds_\alpha}{dt}. \tag{10}$$

Nun hängt aber Φ nur insofern von t ab, als die einzelnen s_α von t abhängen, so dafs

$$-\sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} \cdot \frac{ds_\alpha}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ist. Indem wir auch die linke Seite der Gleichung als vollständiges Differential umformen, ergiebt sich

$$\frac{d}{dt} \sum_\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{ds_\alpha}{dt} \right)^2 \right\} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{11}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{ds_\alpha}{dt} \right)^2 \right\} + \Phi \right] = 0, \tag{11a}$$

also ist:

$$\sum_\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{ds_\alpha}{dt} \right)^2 \right\} + \Phi = \text{Const.} \tag{11b}$$

Diese Gleichung spricht das Gesetz von der Constanz der Energie aus; denn es ist das erste Glied der linken Seite gleich der lebendigen Kraft, der actuellen Energie, und, wie wir schon gesehen haben, ist Φ gleich der potentiellen Energie des Systems.

Wenn in einer bestimmten Lage das Gleichgewicht stabil sein soll, so mufs in dieser Φ immer kleiner sein, als in allen un-

mittelbar benachbarten Lagen, weil dann bei einer kleinen Störung der Ruhelage durch irgend einen kleinen Anstofs die dadurch erregte lebendige Kraft L, welche eine nothwendig positive Gröfse ist, um so kleiner werden mufs, je mehr sich das System aus der Gleichgewichtslage entfernt, aber keinenfalls kleiner werden kann, als Null. Daraus folgt, dafs auch die Zunahme von Φ nicht über einen gewissen kleinen Betrag hinaus gehen kann, der durch die Gröfse des Anstofses bedingt ist. Wissen wir also, dafs Φ in der Ruhelage ein Minimum ist, so kann das System bei keiner Art von Verschiebung sich über die der Zunahme des Φ entsprechenden Grenzen hinaus entfernen.

Anders liegt es, wenn Φ nicht für alle Combinationen von Verschiebungen ein Minimum ist. Denn dann kann beim Verlassen der Ruhelage die lebendige Kraft wachsen, und das System mit gesteigerter Geschwindigkeit sich aus der Ruhelage entfernen. Solches Gleichgewicht heifst labil.

§ 6. Beschränkung in der Allgemeinheit der bisherigen Annahmen.

Wir wollen nun hinsichtlich der Function Φ die beschränkende Annahme machen, dafs Φ in der Nachbarschaft der Gleichgewichtslage des Systems den allgemeinen Charakter einer Function habe, die nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sei, bez. nach der Modification dieser Reihe, die nach Mac Laurin genannt ist und die sich nur dadurch unterscheidet, dafs für den Ausgangspunkt die unabhängigen Variablen alle gleich Null gesetzt sind. Es ist dann:

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \right\} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}} \, \partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} + \dots \quad (12)$$

wo die Summationen in der Weise auszuführen sind, dafs die Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unabhängig von einander durch alle ganzzahligen Werthe laufen.

Die Werthe der $s_{\mathfrak{a}}$ sollen nun so klein gewählt werden, dafs wir die Glieder dritter Ordnung vernachlässigen können. Nun sind aber für die Gleichgewichtslage die Werthe von $\frac{\partial \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}}}$ alle gleich Null, und wir können aufserdem, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen,

$$\Phi_0 = 0 \quad (13)$$

setzen, weil in den Bewegungsgleichungen nur Differentialquotienten dieser Gröfse vorkommen. Wir erhalten alsdann:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}} \, \partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\}. \tag{14}$$

Da die hier vorkommenden zweiten Differentialquotienten alle für einen unveränderlichen Werth jeder Variablen, nämlich für $s_{\mathfrak{a}} = 0$ zu nehmen sind, so haben sie ebenfalls bestimmte constante Werthe, und wir wollen die letzte Gleichung daher schreiben:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\}, \tag{15}$$

wobei zu beachten ist, dafs $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = P_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial s_{\mathfrak{a}} \cdot \partial s_{\mathfrak{b}}}_{s_{\mathfrak{a}} = s_{\mathfrak{b}} = 0.}$

Bilden wir nun für ein bestimmtes $\mathfrak{a}$, das wir p nennen wollen, die Kraftcomponente in der Richtung s_p, so ist

$$S_p = - \frac{\partial \Phi}{\partial s_p} \tag{16}$$

$$= - \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ P_{p,\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \right\} - \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{p,\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\} \tag{16a}$$

oder, da wir den Sinn der letzten Summe nicht ändern, wenn wir ihren durchgehenden Index $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen:

$$S_p = - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ P_{p,\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \right\}. \tag{16b}$$

Da nun ferner

$$S_p = m_p \frac{d^2 s_p}{d t^2} \tag{17}$$

ist, so erhalten wir als Bewegungsgleichung für den Punkt p

$$m_p \frac{d^2 s_p}{d t^2} = - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ P_{p,\mathfrak{a}} \cdot s_{\mathfrak{a}} \right\}, \tag{18}$$

welche wir nunmehr, um auf den gerade näher betrachteten Massenpunkt auch wieder die früheren laufenden Indices anwenden zu können, schreiben wollen:

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 s_{\mathfrak{a}}}{d t^2} = - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}} \right\}, \tag{18a}$$

Dieser Bewegungsgleichungen sind im Allgemeinen dreimal so viel vorhanden, als Massenpunkte in dem System. Es ist oben schon

darauf hingewiesen, dafs die Zahl der Gleichungen verringert wird, wenn einzelne Punkte gezwungen sind, sich auf bestimmten Linien oder Flächen zu bewegen. Dann fehlen aber auch entsprechend viele Unbekannte in den Gleichungen. Die Anzahl der veränderlichen Coordinaten wollen wir im Folgenden mit N bezeichnen.

§ 7. Aufsuchung von Integralgleichungen.

Da die Bewegungsgleichungen alle homogen und linear sind mit constanten Coefficienten, so werden sie erfüllt, indem

$$s_a = a_a \cdot e^{nt} \tag{19}$$

gesetzt wird. Dann ist

$$m_a \cdot n^2 \cdot a_a = -\sum_b \left\{P_{a,b} \cdot a_b\right\}$$

oder

$$m_a \cdot n^2 \cdot a_a + \sum_b \left\{P_{a,b} \cdot a_b\right\} = 0. \tag{20}$$

Aus diesem System von N Bedingungsgleichungen sind die Verhältnisse der N Coefficienten a und aufserdem der Werth von n zu bestimmen. Da dieselben homogen und linear in Bezug auf die a sind, so würden sie für einen beliebig gewählten Werth n im Allgemeinen nur die Werthe $a_a = 0$ zulassen. Ausnahmen hiervon treten nur ein, wenn die Determinante der Coefficienten der a_a gleich Null wird, was durch Wahl bestimmter Werthe des n erreicht werden kann. Wenn diese Bedingung erfüllt wird, ist eine der Gleichungen Folge der anderen, und es sind also dann nur noch $(N-1)$ Gleichungen vorhanden, aus denen $(N-1)$ Gröfsen a als Functionen der Nten bestimmt werden können. Die Gleichung, welche die Determinante gleich Null setzt, kann man direct zur Auffindung der Werthe von n^2 benutzen. Die Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned}
&(P_{1,1} + m_1 n^2)a_1 + P_{1,2} \cdot a_2 + P_{1,3} \cdot a_3 + P_{1,4} \cdot a_4 + \ldots. = 0\\
&P_{2,1} \cdot a_1 + (P_{2,2} + m_2 n^2)a_2 + P_{2,3} \cdot a_3 + P_{2,4} \cdot a_4 + \ldots. = 0\\
&P_{3,1} \cdot a_1 + P_{3,2} \cdot a_2 + (P_{3,3} + m_3 n^2)a_3 + P_{3,4} \cdot a_4 + \ldots. = 0\\
&P_{4,1} \cdot a_1 + P_{4,2} \cdot a_2 + P_{4,3} \cdot a_3 + (P_{4,4} + m_4 n^2)a_4 + \ldots. = 0\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Wir erhalten also als Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} (P_{1,1}+m_1 n^2), & P_{1,2}, & P_{1,3}, & P_{1,4}\cdots \\ P_{2,1}, & (P_{2,2}+m_2 n^2), & P_{2,3}, & P_{2,4}\cdots \\ P_{3,1}, & P_{3,2}, & (P_{3,3}+m_3 n^2), & P_{3,4}\cdots \\ P_{4,1}, & P_{4,2}, & P_{4,3}, & (P_{4,4}+m_4 n^2)\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

Die diagonalen Glieder enthalten alle n^2, folglich ist die Gleichung, wenn wir N Coordinaten haben, Nten Grades nach n^2 und giebt im Allgemeinen N Werthe von n^2. Was die Art der Wurzeln betrifft, so läfst sich zunächst zeigen, dafs dieselben nicht positiv reell sein können. Zu dem Ende beachte man, dafs, wenn n^2 reell ist, alle Coefficienten der a_α in den Gleichungen (20) reell sind, und diese Gleichungen also auch nur reelle Verhältnifswerthe zwischen den einzelnen a_α ergeben können. Es muss dann möglich sein, die Gleichungen (20) durch lauter reelle Werthe der a_α zu befriedigen. Wenn man nun jede der Gleichungen mit demjenigen a_α multiplicirt, das mit n^2 multiplicirt in dem ersten Gliede derselben vorkommt, und sie alle addirt, so erhält man:

$$n^2 \cdot \sum_\alpha (m_\alpha a_\alpha^2) = -\sum_\alpha \sum_\beta \left[P_{\alpha,\beta} \cdot a_\alpha \cdot a_\beta \right] \qquad (22a)$$

Wegen der Forderung, dafs das Gleichgewicht des Systems stabil sein solle, müssen aber die schon in Gleichung (8) implicite vorkommenden Coefficienten $P_{\alpha,\beta}$ von solcher Art sein, dafs sie, mit allen möglichen reellen Werthen multiplicirt, die man den verschiedenen Gröfsen s_α beilegt, immer einen positiven Werth des Φ ergeben. Es ist dies bekanntlich der Fall, wenn die homogene Function zweiten Grades, die den Werth des Φ ausdrückt, in eine Summe von Quadraten von homogenen linearen Functionen der s_α verwandelt werden kann, welche Quadrate nur mit positiven Constanten multiplicirt werden.

Daraus folgt, dafs die genannte Function auch nur positive Werthe bekommen kann, wenn man den s_α die Werthe a_α giebt, wie dies in der Gleichung (22a) geschehen ist. Da nun der Coefficient des n^2 in dieser Gleichung ebenfalls eine Summe von Quadraten mit positiven Coefficienten bildet, und also nur positiv sein kann, so folgt: Wenn die Wurzel n^2 der Gleichung (22) reell ist, so mufs sie negativ, d. h. das n selbst imaginär sein. Dieser Schlufs bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Gröfsen a_α complex

sind. Denn da ihre Verhältnisse, wie wir eben sahen, reell sind, so müfsten sie alle als Producte eines und desselben complexen Factors mit reellen Gröfsen darstellbar sein. Hebt man das Quadrat dieses Factors auf beiden Seiten der Gleichung (22a) weg, so folgt wie oben, dafs n^2, falls es reell ist, nothwendig negativ sein mufs. Nun läfst sich aber zeigen, dafs n^2 nicht complex sein kann. Denn wäre n^2 complex, so müfste auch mindestens ein Theil der Werthe von a complex sein, wie die Gleichungen (20) erkennen lassen, und zwei conjugirten Werthen von n^2, z. B. $\varrho + \sigma i$ und $\varrho - \sigma i$, müfsten auch zwei conjugirte Werthe der Lösungen für a entsprechen, z. B. $a_\mathfrak{b} = \alpha_\mathfrak{b} + i\beta_\mathfrak{b}$ und $a'_\mathfrak{b} = \alpha_\mathfrak{b} - i\beta_\mathfrak{b}$. Schreiben wir nun die Gleichungen (21) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} -m_1 a_1 . n^2 &= P_{1,1} . a_1 + P_{1,2} . a_2 + P_{1,3} . a_3 + \ldots . \\ -m_2 a_2 . n^2 &= P_{2,1} . a_1 + P_{2,2} . a_2 + P_{2,3} . a_3 + \ldots . \\ -m_3 a_3 . n^2 &= P_{3,1} . a_1 + P_{3,2} . a_2 + P_{3,3} . a_3 + \ldots . \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}\right\} \quad (21\,a)$$

multipliciren die erste Gleichung mit a'_1, die zweite mit a'_2 u. s. w. und addiren sämmtliche Gleichungen, so erhalten wir:

$$-n^2 \sum_\mathfrak{b} m_\mathfrak{b} \left(\alpha_\mathfrak{b}^2 + \beta_\mathfrak{b}^2\right) = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} \left(P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} . a_\mathfrak{a} . a'_\mathfrak{b}\right). \quad (21\,b)$$

Nun ist aber die Doppelsumme auf der rechten Seite reell, weil erstens die bei der Multiplication entstandenen imaginären Glieder, wie $\pm i P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} [\alpha_\mathfrak{a} \beta_\mathfrak{b} - \alpha_\mathfrak{b} \beta_\mathfrak{a}]$, sich bei der Summirung wieder aufheben, und die reellen Glieder, wie $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} [\alpha_\mathfrak{a} \alpha_\mathfrak{b} + \beta_\mathfrak{a} \beta_\mathfrak{b}]$, die Summe zweier nothwendig positiven Functionen bilden, wie eben vorher in Beziehung auf die entsprechende Summe in Gleichung (22a) erörtert ist. Da demnach die Summe auf der rechten Seite der Gleichung reell ist, so ist es unmöglich, dafs unsere Annahme, n^2 sei complex, richtig sein kann.

Daraus folgt also, dafs n^2 nur negativ reell sein kann; alle Wurzeln für n sind also imaginär, und wir dürfen daher allgemein

$$n^2 = -\nu^2, \quad \text{also} \quad n = \pm i . \nu$$

setzen.

§ 8. Schwingungsformen des Systems für einfache Töne, wenn alle Wurzeln n^2 der Gleichung (22) von einander verschieden sind.

Wir haben vorher gesehen, dafs wir im Allgemeinen N Werthe von n^2 aus der Gleichung (22) erhalten können. Ausnahmsweise

kann es vorkommen, dafs zwei dieser Wurzeln einander gleich werden. Wenn solche Ausnahme nicht eintritt, wird durch Einsetzen eines richtig bestimmten Werthes von n in das System der Gleichungen (20) nur eine der Gleichungen eine Folge der $(N-1)$ übrigen, und aus den unabhängig von einander bleibenden übrigen $(N-1)$ Gleichungen können wir die Verhältnisse von $(N-1)$ Gröfsen a_α zu einer von ihnen finden, welche Verhältnisse reell sein müssen, da alle Coefficienten der linearen Gleichungen reell sind. Das eine willkürlich gewählte a kann aber auch einen complexen Factor, wie $e^{i\gamma}$, erhalten, dann mufs derselbe aber auch allen anderen a_α zukommen.

Alle diese Verhältnisse erleiden Aenderungen, wenn einer der Ausnahmefälle eintritt, und zwei oder mehrere Wurzelwerthe des n^2 einander gleich werden. Wir wollen hier zunächst den allgemeinen Fall behandeln, und in diesem und den folgenden Paragraphen die Voraussetzung festhalten, dafs beim Einsetzen des Werthes von n^2 in die Gleichungen (21) nur eine der Gleichungen Folge der anderen wird, $(N-1)$ derselben aber unabhängig von einander bestehen bleiben. Dann bekommen also die verschiedenen s_α Werthe von der Form:

$$s_\alpha = a_\alpha \cdot e^{i\gamma + i\nu t} \tag{23}$$

worin alle a_α reell anzunehmen sind. Trennen wir die reellen und imaginären Theile, so geben uns die ersteren:

$$s_\alpha = a_\alpha \cdot \cos(\nu t + \gamma), \tag{23a}$$

die letzteren:

$$\sigma_\alpha = a_\alpha \cdot \sin(\nu t + \gamma). \tag{23b}$$

Beide Lösungen sind nicht wesentlich von einander verschieden, da die erstere in die Form der letzteren übergeht, wenn man $\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$ statt γ setzt. Auch ein Wechsel im Vorzeichen des ν, wie er erlaubt ist, da $n = \pm i\nu$, wirkt nur wie eine Aenderung der Phasenconstante γ in $-\gamma$ oder γ in $-\gamma + \pi$, so dafs also die Form der Gleichung (23a) mit der einen willkürlichen Constanten γ, und dem einen willkürlichen Werth des einen a, der als Factor in a_α steckt, die für den Werth ν möglichen Bewegungsformen vollständig darstellt. Die physikalische Bedeutung des ν ist, dafs es die Schwingungszahl in 2π Secunden angiebt. Man sieht übrigens aus der Gleichung (23a), dafs alle Punkte Bewegungen ausführen, deren Componenten einfache, pendelartige Schwingungen

darstellen, die alle gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage durchgehen, wenn $\cos[\nu t + \gamma] = 0$, und ihre äufsersten Elongationen gleichzeitig erreichen, wenn $\cos(\nu t + \gamma) = \pm 1$.

Zu jedem Punkte gehören nun aber drei Coordinaten s_a, und da alle drei im Verhältnifs des $\cos(\nu t + \gamma)$ wachsen, so ist der Weg, den der Punkt beschreibt, eine Gerade, und die Form der Bewegung auf dieser Geraden ist eine einfache, pendelartige Schwingung.

Ein solches Integral, welches auf eine Wurzel von n Bezug nimmt, stellt eine sogenannte Eigenschwingung des Systems dar.

§ 9. Das vollständige allgemeine Integral.

Es giebt nun aber nicht nur ein solches Integral unserer Bewegungsgleichung, sondern, da wir N Werthe von n^2 haben, haben wir auch N derartige Bewegungsformen des Systems, welche alle unbeschränkt lange Zeit unverändert fortbestehen können, und von denen jede, eine Eigenschwingung des Systems darstellend, einer der N verschiedenen Wurzeln von n^2 entspricht.

Wir wollen nunmehr die den verschiedenen Eigenschwingungen des Systems entsprechenden Werthsysteme der a und n mit dem laufenden Index q versehen, so dafs wir die der Schwingungszahl n_q entsprechende Lösung schreiben können:

$$s_{a,q} = b_{a,q} \cdot \sin(\nu_q \cdot t) + c_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t), \tag{24}$$

wo $b_{a,q} = -a_{a,q} \cdot \sin\gamma_q$ und $c_{a,q} = a_{a,q} \cdot \cos\gamma_q$ ist, und wenn wir alle Einzellösungen zum vollständigen Integral superponiren

$$s_a = \sum_q F_q \cdot \left\{ b_{a,q} \cdot \sin(\nu_q \cdot t) + c_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \right\} \tag{25}$$

Früher (§ 7) haben wir gesehen, dafs ein Werth von a willkürlich zu wählen ist, und dafs diese Wahl die übrigen Werthe von a proportional beeinflufst. Wir wollen, um diesem unbestimmten Factor einen festen Werth zu geben, festsetzen, dafs er so gewählt werden soll, um für jeden Einzelton ν_q

$$\sum_a (m_a \cdot a_{a,q}^2) = 1 \tag{26}$$

zu machen, wo der Index q anzeigt, dafs die Summation über diejenigen Werthe von a auszuführen ist, welche der $q$ten von den N verschiedenen Werthen der Wurzeln von n^2 entsprechen.

Nunmehr können wir schreiben:

$$s_a = \sum_q \left\{ A_q \cdot a_{a,q} \cdot \sin(\nu_q \cdot t) + B_q \cdot a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \right\} \tag{27}$$

wo A_q, B_q für $-F_q \sin \gamma_q$ und $F_q \cos \gamma_q$ geschrieben sind. Da der laufende Index q bis N geht, so haben wir also $2N$ willkürliche Constanten in dieser allgemeinsten Lösung zur Verfügung.

§ 10. Anpassung des allgemeinen Integrals an einen gegebenen Anfangszustand des Systems.

Wir wollen jetzt annehmen, dafs für einen bestimmten Moment, den wir ja zum Anfangspunkt der Zeit $t = 0$ wählen können, für alle Punkte des Systems uns die Werthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten gegeben seien. Es tritt uns dann die Aufgabe entgegen, die Constanten des vollständigen Integrals (27) diesem Anfangszustand entsprechend zu bestimmen. Dies läfst sich verhältnifsmäfsig leicht und direct leisten.

Die für die Zeit $t = 0$ gegebenen Coordinaten seien mit $\overline{s_a}$, die Geschwindigkeiten mit $\overline{\frac{d s_a}{d t}}$ bezeichnet, wir haben dann

$$\overline{s_a} = \sum_q \left\{ B_q \cdot a_{a,q} \right\} \tag{28}$$

$$\overline{\frac{d s_a}{d t}} = \sum_q \left\{ \nu_q \cdot A_q \cdot a_{a,q} \right\} \tag{29}$$

Es sind nun aus diesen gegebenen Werthen die Coefficienten A und B zu bestimmen. Die Anzahl der Gleichungen genügt; denn wir haben $2N$ Coefficienten und ebenso viel Werthe von $\overline{s}$ und $\overline{\frac{d s}{d t}}$.

Zur Bestimmung des Coefficienten B_p, der der $p$ten Eigenschwingung des Systems, also der $p$ten Wurzel für n^2 entspricht, multipliciren wir die Gleichung (28) mit $m_a \cdot a_{a,p}$, dann ergiebt sich:

$$m_a \cdot a_{a,p} \cdot \overline{s_a} = \sum_q \left\{ B_q \cdot a_{a,q} \cdot a_{a,p} \cdot m_a \right\}. \tag{30}$$

und, wenn wir die Summation über das ganze System vornehmen:

$$\sum_a \left\{ m_a \cdot a_{a,p} \cdot \overline{s_a} \right\} = \sum_a \sum_q \left\{ B_q \cdot a_{a,q} \cdot a_{a,p} \cdot m_a \right\} \tag{30a}$$

Die rechte Doppelsumme läfst sich nun wesentlich vereinfachen, wobei wir zunächst auf unsere früheren Bedingungsgleichungen (§ 7)

für die Werthe von a und n zurückgreifen müssen. Dieselben lauten zufolge Gleichung (20) für irgend einen der Werthe n_ν

$$n_\nu^2 \cdot m_\alpha \cdot a_{\alpha,\nu} = -\sum_\beta \left\{P_{\alpha,\beta} \cdot a_{\beta,\nu}\right\}.$$

Denken wir uns diese Gleichungen für alle α aufgestellt, mit dem Factor $a_{\alpha,p}$ multiplicirt, wo p sich auf irgend einen anderen der Werthe von n^2 bezieht, und dann addirt, so erhalten wir:

$$n_\nu^2 \sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,\nu} \cdot a_{\alpha,p}\right\} = -\sum_\alpha \sum_\beta \left\{P_{\alpha,\beta} \cdot a_{\beta,\nu} \cdot a_{\alpha,p}\right\}. \tag{31}$$

Vertauschen wir nun p und ν, so bleibt die rechte Seite unverändert. Wir erhalten daher bei der Subtraction

$$(n_\nu^2 - n_p^2) \cdot \sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,\nu} \cdot a_{\alpha,p}\right\} = 0. \tag{31a}$$

Da wir nun hier voraussetzen, dafs alle Wurzeln für n^2 verschieden sind, so folgt

$$\sum_\alpha{}' \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,\nu} \cdot a_{\alpha,p}\right\} = 0. \tag{31b}$$

Unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses heben sich alle diejenigen Glieder in der Gleichung (30a) auf, in denen η von p verschieden ist. Wir erhalten daher

$$\sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,p} \cdot \overline{s_\alpha}\right\} = B_p \cdot \sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,p}^2\right\} \tag{30b}$$

Nun haben wir aber festgesetzt, dafs

$$\sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,p}^2\right\} = 1$$

ist, und daher ergiebt sich

$$B_p = \sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,p} \cdot \overline{s_\alpha}\right\} \tag{30c}$$

Damit haben wir die Coefficienten B aus der Beschaffenheit des Systems und den gegebenen Anfangswerthen der Coordinaten bestimmt.

In ähnlicher Weise lassen sich die Coefficienten A aus den Werthen von $\overline{\frac{ds_\alpha}{dt}}$ berechnen; es ergiebt sich nämlich durch eine völlig analoge Betrachtung, dafs

$$A_p = \frac{1}{\nu_p} \cdot \sum_\alpha \left\{m_\alpha \cdot a_{\alpha,p} \cdot \overline{\frac{ds_\alpha}{dt}}\right\}. \tag{32}$$

Setzen wir die Werthe für A und B in unser allgemeines Integral ein, so erhalten wir

$$s_a = \sum_q \left[\frac{1}{\nu_q} \cdot a_{a,q} \cdot \sin(\nu_q \cdot t) \cdot \sum_b \left\{ m_b \cdot a_{b,q} \cdot \overline{\frac{ds_b}{dt}} \right\} \right. \\ \left. + a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \sum_b \left\{ m_b \cdot a_{b,q} \cdot \overline{s_b} \right\} \right] \tag{33}$$

Somit ist der Werth von s_a vollständig ausgedrückt durch die für die Zeit $t = 0$ gegebenen Elongationen und Geschwindigkeiten, und es zeigt sich, dafs die von uns gefundene allgemeine Form des Integrals (25) wirklich allen beliebig gegebenen Anfangszuständen angepafst werden kann.

§ 11. Das Reciprocitätsgesetz und das Huyghens'sche Princip.

In der soeben abgeleiteten Form für s_a ist eine merkwürdige Beziehung enthalten, die allen oscillatorischen Bewegungen zukommt.

1. Sind für $t = 0$ alle Geschwindigkeiten gleich Null und ist nur eine Elongation, z. B. $s_b = S$, von Null verschieden, so ist

$$m_a \cdot s_a = \sum_q \left\{ a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \cdot m_a \cdot m_b \cdot a_{b,q} \cdot S \right\}. \tag{34}$$

Der Factor von S ist nach a und b symmetrisch; daraus folgt, dafs das Product von Masse und Elongation, $m \cdot s$, im Punkte a dasselbe ist, wenn man den Punkt b zur Zeit $t = 0$ um S verschoben, als es im Punkte b wird, wenn man den Punkt a zur selben Zeit um S verschoben hätte. Der Punkt a wirkt also ebenso nach Ablauf der Zeit t auf Punkt b ein, wie Punkt b nach derselben Zeit auf Punkt a.

2. Wenn zur Zeit $t = 0$ alle Elongationen gleich Null sind und von den Geschwindigkeiten nur $\frac{ds_b}{dt} = S'$ von Null verschieden, so ist:

$$m_a \cdot \frac{ds_a}{dt} = \sum_q \left\{ a_{a,q} \cdot \cos(\nu_q \cdot t) \cdot m_a \cdot m_b \cdot a_{b,q} \cdot S' \right\}. \tag{35}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt also hier dasselbe, was wir für die Elongationen fanden.

Von diesen Reciprocitätssätzen kann man in vielen Fällen nützliche Anwendung machen, besonders wenn man darauf verzichten mufs, ganz allgemein die Form der Bewegung für ein bestimmtes System zu finden.

Wenn bei einer bestimmten Eigenschwingung von der Schwingungszahl ν_q ein bestimmter Massenpunkt mit dem Index a sich in der betreffenden Coordinatenrichtung nicht bewegt, so ist in derjenigen Bewegung, welche dadurch entsteht, dafs wir allein jenem Massenpunkte a in dieser Coordinatenrichtung einen Anstofs geben, also ihm eine Geschwindigkeit ertheilen, jene Eigenschwingung von der Schwingungszahl ν_q als Partialschwingung nicht enthalten. Denn wenn in der Formel (33) die der betreffenden Schwingungszahl ν_q entsprechenden Glieder für beliebige Werthe von t verschwinden sollen, was auch immer für Anfangswerthe $\overline{\frac{d s_b}{d t}}$ und $\overline{s_b}$ gegeben sind, so mufs $a_{a,q}$ Null sein. Wenn nun andererseits das System dadurch in Schwingungen versetzt wird, dafs für $t = 0$ nur $\overline{\frac{d s_a}{d t}}$ oder $\overline{s_a}$ von Null verschieden ist, so kommen, weil $a_{a,q} = 0$, in den Ausdrücken

$$s_b = \sum_q \left\{ \frac{1}{\nu_q} a_{b,q} \sin(\nu_q . t) . m_a . a_{a,q} . \overline{\frac{d s_a}{d t}} + a_{b,q} \cos(\nu_q . t) . m_a . a_{a,q} . \overline{s_a} \right\}$$

die der betreffenden Schwingungszahl ν_q entsprechenden Glieder nicht vor. Einen solchen Punkt nennt man einen „Knotenpunkt" der betreffenden Eigenschwingung. Man kann also eine Bewegung hervorrufen, welche eine bestimmte Eigenschwingung nicht enthält, sobald man einen Knotenpunkt der letzteren kennt.

Da man den Anfangspunkt der Zeit beliebig wählen kann, so können die in einem beliebigen Zeitmoment vorhandenen Verschiebungen und Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte betrachtet werden als hervorgerufen in demselben Moment, und die in Folge des gegebenen Bewegungszustandes ablaufende weitere Bewegung des Systems als eine Superposition aller derjenigen Wellenformen des Systems, welche durch die in dem genannten Zeitmoment bestehenden Elongationen und Geschwindigkeiten aller einzelnen Massenpunkte des Systems erregt werden würden (Huyghens'sches Princip).

§ 12. Behandlung als Variationsproblem.

Wir hatten das System der Gleichungen (20)

$$n^2 m_a a_a = -\sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \right\}$$

oder

$$\nu^2 \cdot m_a \cdot a_a = \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \right\}. \tag{20a}$$

Multipliciren wir die Gleichungen der Reihe nach mit δa_1, δa_2 u. s. w., welche Gröfsen wir als verschwindend kleine Zusätze zu den Werthen a_1, a_2 u. s. w. betrachten und als Variationen dieser Werthe bezeichnen, und bilden die Summe des dann entstehenden Systems von Gleichungen, so haben wir:

$$\tfrac{1}{2}\nu^2 \cdot \delta \sum_a \left\{ m_a \cdot a_a^2 \right\} - \tfrac{1}{2}\delta \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_a \cdot a_b \right\} = 0. \tag{36}$$

Bei der Bildung der Variation des letzten Summanden ist zu bemerken, dafs

$$\sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_a \, \delta a_b \right\} = \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \, \delta a_a \right\};$$

denn beide Doppelsummen bezeichnen Summen derselben Glieder. Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$R = \tfrac{1}{2} \sum_a \left\{ m_a \cdot a_a^2 \right\} \tag{37}$$

und

$$S = \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_a \cdot a_b \right\}, \tag{38}$$

so ist Gleichung (36) zu schreiben:

$$\nu^2 \cdot \delta R - \delta S = 0.$$

Hätten wir gleichzeitig die beiden Gleichungen zu erfüllen

$$\delta R = 0 \tag{39}$$

und

$$\delta S = 0, \tag{40}$$

so würden wir eine derselben mit einem willkürlichen Factor multipliciren können, der oben in (36) durch ν^2 dargestellt ist, und die beiden Gleichungen in die eine vereinigen können:

$$\nu^2 \cdot \delta R - \delta S = 0. \tag{41}$$

Diese Gleichung sagt also aus: Wenn wir die a_a so variiren, dafs $\delta R = 0$, d. h. dafs R constant bleibt, so ist auch $\delta S = 0$, d. h.

S ist ein Grenzwerth (ein Maximum, Minimum oder Maximo-Minimum), wie wir auch die a_α variiren mögen, wenn dies nur immer so geschieht, dafs R constant bleibt, und wir können also die Bedingungsgleichungen (20a) in der Form aussprechen, dafs wir die Forderungstellen, dafs bei constant bleibendem R die Doppelsumme S ein Grenzwerth werde.

Der Werth der Schwingungszahl findet sich dann aus der Gleichung $\nu^2 . R = S$, sobald die a^2 der genannten Bedingung gemäfs bestimmt sind.

Der hier aufgestellte Satz ist oft nützlich, um angenähert richtige Lösungen zu verbessern, namentlich wenn er auf Systeme von unendlich vielen Massenpunkten übertragen wird. Wenn man Ausdrücke mit mehreren unbestimmten Parametern hat, kommt man der richtigen Lösung möglichst nahe dadurch, dafs man diese Parameter der hier aufgestellten Bedingung gemäfs bestimmt.

§ 13. Veränderte Lösung des Problems bei Existenz gleicher Wurzeln für n^2.

Wenn die Wurzeln für n^2 nicht alle verschieden sind, so bestehen für die Factoren a_α, welche uns die Intensität der die Gesammtbewegung zusammensetzenden Einzelbewegungen angeben, zum Theil andere Bedingungen.

Bezeichnen wir die Determinante der Bedingungsgleichungen mit D und die Unterdeterminanten, in denen je eine Verticalreihe und je eine Horizontalreihe des D weggelassen sind, mit $D_{1,1}, D_{1,2} \ldots$, $D_{2,1}, D_{2,2} \ldots$, so ist, wenn wir D nach n^2 differentiiren:

$$\frac{\partial D}{\partial n^2} = m_1 D_{1,1} + m_2 D_{2,2} + m_3 D_{3,3} + \ldots . \tag{42}$$

und wenn wir mit $D_{1,1}$ multipliciren:

$$D_{1,1} \cdot \frac{\partial D}{\partial n^2} = m_1 . D_{1,1}^2 + m_2 . D_{1,1} . D_{2,2} + m_3 . D_{1,1} . D_{3,3} + \ldots . \tag{42a}$$

Nun ist aber, nach einer allgemeinen Eigenschaft der Determinanten, so oft

$$D = 0$$

ist,

$$D_{p,q} . D_{r,s} = D_{p,s} . D_{r,q},$$

also auch

$$D_{u,u} . D_{v,v} = D_{u,v} . D_{v,u} .$$

Weil aber in unserem Falle $P_{u,v} = P_{v,u}$ ist, so ist hier $D_{u,v} = D_{v,u}$; wir haben demnach

$$D_{u,u} \cdot D_{v,v} = D_{u,v}^2.$$

Es verwandelt sich unsere Gleichung (42a) also in:

$$D_{1,1} \frac{\partial D}{\partial n^2} = m_1 \cdot D_{1,1}^2 + m_2 \cdot D_{1,2}^2 + m_3 \cdot D_{1,3}^2 + \ldots.$$
$$= \sum_{\alpha} \left\{ m_\alpha D_{1,\alpha}^2 \right\} \tag{42b}$$

Nun ist aber, wenn zwei Wurzeln n^2 einander gleich werden:

$$\frac{\partial D}{\partial n^2} = 0.$$

Wir erhalten daher:

$$0 = \sum_{\alpha} \left\{ m_\alpha \cdot D_{1,\alpha}^2 \right\}. \tag{43}$$

Das ist aber nur möglich, wenn jede Unterdeterminante $D_{1,\alpha}$ gleich Null ist. Dieser Beweis gilt ebenso für die Unterdeterminanten $D_{2,\alpha}$, $D_{3,\alpha}$ u. s. w. Es sind daher sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung gleich Null. In diesem Falle sind also zwei der aufgestellten allgemeinen Bedingungsgleichungen (21) von den übrigen abhängig, und wir können zwei Werthe von a willkürlich wählen.

§ 14. Die Form der Partialbewegungen.

Als wir lauter verschiedene Wurzeln für n^2 voraussetzten, waren zwar für a_α auch complexe Werthe zulässig, da wir einen Werth von a ganz beliebig wählen konnten, aber ihre Verhältnisse unter einander mufsten reell sein. Wenn wir hier nun z. B. zwei gleiche Wurzeln für n^2 annehmen, können wir zwei Werthe von a_α völlig willkürlich wählen; das Verhältnifs derselben kann also complex sein; es sei $\varrho \cdot e^{i\omega}$. Dann haben wir z. B. für die $\mathfrak{f}$te Wurzel von ν^2

$$\left.\begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{i\nu_\mathfrak{f} t} \\ s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \cdot e^{i\nu_\mathfrak{f} t} = a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot \varrho \cdot e^{i(\nu_\mathfrak{f} t + \omega)} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Dabei können $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$, ϱ, ω beliebige Werthe haben. Nehmen wir z. B. $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ reell an und beschränken die Ausdrücke für $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$ auf die reellen Theile, so wird

$$\left.\begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_\mathfrak{f} t) \\ s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} &= a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot \varrho \cdot \cos(\nu_\mathfrak{f} t + \omega) \end{aligned}\right\} \tag{44a}$$

Daraus geht hervor, dafs $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $s_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$, wenn sie auch harmonische Bewegungen gleicher Schwingungsdauer darstellen, erstens nicht wie früher zu gleicher Zeit die Gleichgewichtslage zu passiren brauchen und zweitens jedes beliebige Amplitudenverhältnifs haben können. Es besteht im Allgemeinen eine Phasendifferenz zwischen den beiden Schwingungsformen. Dasselbe gilt von irgend zwei anderen Elongationen s_p, s_q, sofern sie der Eigenschwingung von der Schwingungszahl $\nu_{\mathfrak{f}}$ entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} s_{p,\mathfrak{f}} &= [a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot A_0 + a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \cdot A_1] e^{i\nu_{\mathfrak{f}} t} \\ s_{q,\mathfrak{f}} &= [a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot B_0 + a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} \cdot B_1] e^{i\nu_{\mathfrak{f}} t}, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

wo $A_0\, A_1\, B_0\, B_1$ bestimmte reelle Werthe haben. Da nun $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ und $a_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$ beliebige complexe Werthe haben können, so kann man die reellen Theile auf die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} s_{p,\mathfrak{f}} &= A \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \gamma_p) \\ s_{q,\mathfrak{f}} &= B \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \gamma_q), \end{aligned}\right\} \quad (45\,\mathrm{a})$$

wo A, B, γ_p, γ_q irgendwelche Werthe haben können. Auch hier stellen $s_{p,\mathfrak{f}}$ und $s_{q,\mathfrak{f}}$ harmonische Bewegungen derselben Periode dar. Aber während in dem Falle ungleicher Wurzeln n^2 die Amplituden ein bestimmtes Verhältnifs hatten und kein Phasenunterschied stattfand, können hier die Amplituden beliebige Werthe haben, und die Gleichgewichtslage wird bei $s_{p,\mathfrak{f}}$ und $s_{q,\mathfrak{f}}$ im Allgemeinen zu verschiedenen Zeiten passirt.

Wenn drei gleiche Wurzeln für die Determinantengleichung existiren, werden von den zu ihnen gehörigen Coefficienten $a_{\mathfrak{a}}$ drei willkürlich gewählt werden können, die anderen sind dann alle bestimmt.

Wenn wir die Elongationen eines der materiellen Punkte des Systems unter Einflufs der den drei gleichen Wurzeln entsprechenden Bewegungen mit x, y, z bezeichnen, ist aus den vorstehenden Erörterungen leicht erkennbar, dafs wir diese auf die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= [A_0\, a_{\mathfrak{a}} + A_1\, a_{\mathfrak{b}} + A_2\, a_{\mathfrak{c}}] e^{i\nu t} \\ y &= [B_0\, a_{\mathfrak{a}} + B_1\, a_{\mathfrak{b}} + B_2\, a_{\mathfrak{c}}] e^{i\nu t} \\ z &= [C_0\, a_{\mathfrak{a}} + C_1\, a_{\mathfrak{b}} + C_2\, a_{\mathfrak{c}}] e^{i\nu t} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

bringen können, wo die Coefficienten A, B, C reell sind, $a_{\mathfrak{a}}$, $a_{\mathfrak{b}}$, $a_{\mathfrak{c}}$ aber beliebige complexe Werthe haben können. Schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} A_0 a_a + A_1 a_b + A_2 a_c &= A e^{\alpha i} \\ B_0 a_a + B_1 a_b + B_2 a_c &= B e^{\beta i} \\ C_0 a_a + C_1 a_b + C_2 a_c &= C e^{\gamma i}, \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

so erhalten wir für die reellen Theile, auf die man sich ohne Verlust an Allgemeinheit beschränken kann:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\nu t + \alpha) = \mathfrak{A}_1 \cos \nu t + \mathfrak{A}_2 \sin \nu t \\ y &= B\cos(\nu t + \beta) = \mathfrak{B}_1 \cos \nu t + \mathfrak{B}_2 \sin \nu t \\ z &= C\cos(\nu t + \gamma) = \mathfrak{C}_1 \cos \nu t + \mathfrak{C}_2 \sin \nu t. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Hier sind die sechs Gröfsen $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{C}_1\ \mathfrak{C}_2$ beliebig. Wir können den Formeln eine geometrische Bedeutung geben. Es zeigt sich nämlich sofort, dafs der Punkt $x\,y\,z$ in der Ebene

$$\left.\begin{vmatrix} x & y & z \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{C}_2 \end{vmatrix} = 0\right\} \quad (49)$$

oder

$$x(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 \mathfrak{B}_2) + y(\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_2) + z(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2) = 0 \quad (49\,a)$$

liegt. Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, also durch die Gleichgewichtslage des betrachteten Massenpunktes geht.

Ferner erhalten wir durch einfache Umformungen:

$$\left(\frac{\mathfrak{B}_1 x - \mathfrak{A}_1 y}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{B}_2 x - \mathfrak{A}_2 y}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2}\right)^2 = 1, \quad (50)$$

also die Gleichung eines Cylinders zweiten Grades. Seine Schnittlinie mit der eben abgeleiteten Ebene ist die Bahn, welche der Punkt beschreibt. Die im Raume thatsächlich ausgeführte Bewegung des Massenpunktes ist demnach eine Ellipse, wobei die Grenzfälle (Kreis und Gerade) mit einbegriffen sind.

§ 15. Indifferentes Gleichgewicht.

Indifferentes Gleichgewicht tritt ein, wenn für gewisse Arten von Verschiebungen s die potentielle Energie Φ constant gleich Null bleibt. Dies ist zum Beispiel für ein frei im Raume schwebendes, von äufseren Kräften nicht angegriffenes System der Fall bei Ver-

schiebungen seines Schwerpunktes und Drehungen um Axen, die durch den Schwerpunkt gehen, wobei die Punkte des Systems zu einander in relativer Ruhe bleiben, dann ist dauernd

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\}=0. \tag{51}$$

Berücksichtigen wir nun, dafs ganz allgemein

$$-n^2\sum_{\mathfrak{a}}\left\{m_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{a}}^2\right\}=\sum_{\mathfrak{a}}\sum_{\mathfrak{b}}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\cdot a_{\mathfrak{a}}\cdot a_{\mathfrak{b}}\right\},$$

so folgt daraus, dafs

$$in=\nu=0 \tag{52}$$

und

$$T=\frac{1}{\nu}=\infty. \tag{53}$$

Oscillationen von endlicher Dauer werden also nicht entstehen, und jede einmal begonnene, sowohl fortschreitende wie drehende Bewegung erhält sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit unendlich lange.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einflufs einer elastischen Kraft und einer Dämpfung.

§ 16. Die Bewegungsgleichung und ihre Lösungen.

Wir haben in dem Bisherigen nachgewiesen, dafs bei der ausschliefslichen Annahme conservativer Kräfte eine einmal eingeleitete oscillatorische Bewegung stets unverändert fortdauert. Die Erfahrung lehrt uns nun, dafs solche Bewegungen aber thatsächlich nach einiger Zeit stets erlöschen. Es müssen also in Wirklichkeit stets Ursachen vorhanden sein, die der Bewegung entgegenwirken. Bekannte Kräfte dieser Art sind gegeben in der Reibung oder in dem Widerstand der umgebenden flüssigen Medien.

Die lebendige Kraft wird scheinbar vernichtet, thatsächlich verwandelt sie sich aber in Wärme, oder sie entgeht unserer Beobachtung, indem sie übertragen wird auf das den schwingenden Körper umgebende Medium oder an diejenigen Körper, welche zur

Befestigung dienen u. s. w. Die Abgabe der Bewegung an die Luft ist besonders leicht zu erkennen, wenn die Schwingungszahl der Bewegung innerhalb der oben (§ 3) angeführten Grenzen der Schwingungszahlen der hörbaren Töne liegt. Wir sind dann in Folge der Uebertragung der Schwingungen des bewegten Körpers an unser Ohr berechtigt, den betreffenden Körper als einen tönenden zu bezeichnen. Die ganze Akustik als physiologische Wissenschaft würde ohne eine solche Abgabe der Schwingungen an die Umgebung nicht existiren.

Wir haben also, um uns den thatsächlichen Verhältnissen besser anzupassen, in die frühere Bewegungsgleichung (1) Glieder einzuführen, welche eine allmähliche Abnahme der Schwingungen bedingen. Das würden alle Kräfte thun, die dauernd der zeitigen Geschwindigkeit entgegenwirken. Die einfachste Form einer solchen Annahme ist die Einführung von Kräften, die der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden, aber mit einem negativen Coefficienten. Auch stimmen die Folgerungen aus einer solchen Annahme mit den Erfahrungen genügend gut überein, namentlich wenn in den mitbewegten flüssigen und luftförmigen Körpern keine Wirbel entstehen, und wenn keine „klebenden Kräfte“ ins Spiel kommen. Diese Ausnahmefälle wollen wir aber hier zunächst nicht weiter beachten.

Wir haben dann für einen einzelnen Punkt, dessen Masse gleich m ist, und der sich in der Richtung der x-Axe (mit der Gleichgewichtslage in $x = 0$) bewegt, die Bewegungsgleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b\frac{dx}{dt}, \tag{54}$$

worin b stets als positiv anzunehmen ist.

Nach den allgemeinen Integrationsregeln homogener linearer Differentialgleichungen erhalten wir eine Lösung, indem wir setzen

$$x = A.e^{nt}. \tag{55}$$

Dann folgt, wenn wir für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Werthe $\frac{dx}{dt} = n.x$ und $\frac{d^2x}{dt^2} = n^2x$ einsetzen:

$$m.n^2.x = -a^2.x - b.n.x.$$

Diese Gleichung ist nun erfüllt, wenn entweder

$$x = 0,$$

d. h. wenn gar keine Bewegung vorhanden ist, welchen Fall wir natürlich nicht weiter zu berücksichtigen haben, oder wenn

$$m \cdot n^2 = -a^2 - b \cdot n, \tag{56}$$

also

$$n = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}. \tag{56a}$$

Es giebt also zwei Werthe für n, welche der Gleichung genügen. Ob sie reell oder complex sind, hängt von der Wurzelgröfse ab. Abgesehen von der Annahme, dafs $b = 0$, die wir schon im ersten Abschnitt behandelt haben, kommen hier drei verschiedene Fälle vor.

$$b^2 < 4a^2 m,$$

$$b^2 = 4a^2 m$$

und

$$b^2 > 4a^2 m,$$

die wir nunmehr gesondert erörtern wollen.

1. Die Reibung ist so klein, dafs

$$b^2 < 4a^2 m$$

oder

$$\frac{b^2}{4m^2} < \frac{a^2}{m}.$$

Dann ist die Wurzel imaginär, und indem wir setzen

$$\alpha = \frac{b}{2m}$$

und

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

wo nunmehr α und β reelle positive Gröfsen bezeichnen, ergiebt sich

$$n = -\alpha \pm i\beta.$$

Wir erhalten daher

$$x = A \cdot e^{nt} = A \cdot e^{(-\alpha \pm i\beta) \cdot t} \tag{57}$$

$$= A \cdot e^{-\alpha t} \cdot (\cos \beta t \pm i \sin \beta t). \tag{57a}$$

Die reelle Form der allgemeinen Lösung ist demnach

$$x = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \beta t + B \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t. \tag{58}$$

Wir werden sie im folgenden Paragraphen weiter behandeln.

2. Die Reibung ist gerade so stark, dafs

$$b^2 = 4a^2 m$$

ist; dann verschwindet die Wurzel, und wir erhalten

$$n = -\frac{b}{2m}.$$

Es ist dann die allgemeine Lösung

$$x = A.e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} + B.t.e^{-\frac{b}{2m}\cdot t}. \tag{59}$$

Sie geht aus der allgemeinen Lösung (58) hervor, wenn man in dieser statt der willkürlichen Constante B den Ausdruck $\frac{B}{\beta}$ einsetzt, der ebenfalls eine willkürliche Constante bezeichnet; denn lässt man nun β Null werden, so geht $\frac{\sin \beta t}{\beta}$ in t über und Gleichung (58) verwandelt sich in die Gleichung (59).

Die Bewegung besteht darin, dafs von der Anfangslage $x = A$, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden, der Punkt sich mit wachsender Zeit entweder sofort oder nach einem einmaligen Wechsel des Bewegungssinnes asymptotisch der Ruhelage $x = 0$ nähert.

3. Die Reibung ist so grofs, dafs

$$b^2 > 4a^2 m,$$

also

$$\frac{b^2}{4m^2} > \frac{a^2}{m};$$

dann ist die Wurzel reell, und wir erhalten zwei reelle, aber stets negative Werthe für n, die wir mit n_1 und n_2 bezeichnen wollen. Die allgemeine Lösung ist dann

$$x = A.e^{n_1 t} + B.e^{n_2 t}. \tag{60}$$

In diesem Falle nähern sich, ähnlich wie im vorigen, falls der Punkt einmal aus seiner Ruhelage herausgebracht ist, die Werthe von x mit zunehmender Zeit t entweder sofort oder nach einem einmaligen Wechsel des Bewegungssinnes asymptotisch dem Werthe Null. Denn es ist

$$\frac{dx}{dt} = n_1 . A e^{n_1 t} + B.n_2 e^{n_2 t}.$$

Ein Umkehren kann nur eintreten für

$$n_1 A e^{n_1 t} + B n_2 e^{n_2 t} = 0$$

oder für

$$e^{(n_2 - n_1)t} = -\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{A}{B}.$$

Da diese Gleichung nur für einen einzigen reellen Werth von t erfüllt sein kann, so ist es nicht möglich, dafs die Bewegung mehr als einmal umkehrt.

§ 17. Die Bewegungsform der gedämpften Schwingungen.

Für die Akustik hat nur der erste der behandelten Fälle, wo nämlich die Reibung so gering angenommen wurde, dafs $b^2 < 4a^2m$ ist, praktische Bedeutung. Wir erhielten (Gleichung 58) als allgemeine Lösung

$$x = A.e^{-\alpha t}.\cos\beta t + B.e^{-\alpha t}.\sin\beta t,$$

worin α und β reelle positive Gröfsen und A und B willkürliche Constanten bezeichneten.

Setzen wir nunmehr

$$A = R.\sin c$$

und

$$B = R.\cos c,$$

so wird

$$x = R.e^{-\alpha t}.\sin(\beta t + c). \tag{61}$$

Wir haben hier also eine Bewegung, welche von den pendelartigen Schwingungen nur darin abweicht, dafs die Amplitude $R.e^{-\alpha t}$ keinen constanten Werth hat, sondern in Folge des in ihr enthaltenen Factors $e^{-\alpha t}$ mit der Zeit abnimmt. Es sind gedämpfte Schwingungen. Je kleiner b wird, desto kleiner wird auch α, also desto geringer ist die Abnahme der Amplitude.

Ist für einen bestimmten Werth von t die Elongation gleich Null, d. h. geht der Punkt durch die Gleichgewichtslage, so wird dieses nach der Zeit $\frac{2\pi}{\beta}$ wieder eintreten. Wir haben also die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\beta}, \tag{62}$$

und die Schwingungszahl

$$N = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \cdot$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{m}}\cdot\sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2m}} \cdot \tag{63}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{m}}$$

gleich der Schwingungszahl, falls keine Reibung vorhanden wäre.

Der Einfluſs der Reibung bewirkt also, daſs die Schwingungszahl im Verhältniſs

$$1 : \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,a^2\,m}}$$

vermindert wird. Ist b nun klein gegen a, so wird die Abnahme der Schwingungszahl unbedeutend sein, besonders wenn die Masse des Punktes sehr groſs ist.

Der Factor $e^{-\alpha t}$ in dem Werthe für die Elongation in der Gleichung (61)

$$x = R.e^{-\alpha t}.\sin(\beta t + c)$$

bewirkt nun aber nicht nur eine stete Abnahme der Amplitude und constante Aenderung der Schwingungszahl im Vergleich zu den ungedämpften Schwingungen, sondern er verschiebt auch den Zeitpunkt der maximalen Elongation. Bei der ungedämpften harmonischen Schwingung liegt, wie aus der Gleichung (1c) und (5) unmittelbar hervorgeht, die maximale Elongation in der Mitte zwischen zwei Durchgängen durch die Gleichgewichtslage. Um nun hier bei den gedämpften Schwingungen die Lage der maximalen Elongation, wo also $\frac{dx}{dt} = 0$ ist, zu finden, bilden wir

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha.R.e^{-\alpha t}.\sin(\beta t + c) + \beta.R.e^{-\alpha t}.\cos(\beta t + c) \quad (61\,a)$$

und wenn wir dieses gleich Null setzen, ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{cotg}(\beta t + c). \quad (64)$$

Da die Durchgänge durch die Gleichgewichtslage stattfinden, wenn $\sin(\beta t + c)$ gleich Null ist, so ist in dem in der Mitte zwischen beiden gelegenen Zeitmoment $\operatorname{cotg}(\beta t + c)$ gleich Null. Aus Gleichung (64) ergiebt sich nun aber, daſs im Zeitpunkt der maximalen Elongation $\operatorname{cotg}(\beta t + c)$ einen positiven Werth hat, der um so kleiner ist, je kleiner α, also je geringer die Dämpfung ist. Die Umkehr des schwingenden Punktes findet mithin nicht in der Mitte, sondern etwas näher dem vorausgegangenen Durchgang durch die Gleichgewichtslage statt. Die Abweichung ist um so geringer, je kleiner die Dämpfung; sie ist unabhängig von der Gröſse der zeitweiligen Amplitude. Zwei maximale Elongationen sind demnach stets genau durch den Zeitraum einer Schwingungsdauer von einander getrennt.

Bezeichnen wir zwei auf einander folgende Maxima von x mit $\overline{x_1}$ und $\overline{x_2}$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \overline{x_1} &= C.e^{-\alpha t} \\ \text{und} \\ \overline{x_2} &= C.e^{-\alpha(t+T)} \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

wo C für $R\sin(\beta t + c)$ geschrieben ist, oder

$$\left.\begin{aligned} \log\overline{x_1} &= \log C - \alpha t \\ \log\overline{x_2} &= \log C - \alpha(t+T). \end{aligned}\right\} \quad (65a)$$

Daraus folgt:

$$\log\overline{x_1} - \log\overline{x_2} = \alpha . T. \quad (65b)$$

Der Werth von α ist also aus zwei auf einander folgenden Maxima und der Schwingungszeit zu berechnen. Man nennt $\alpha . T$ das logarithmische Decrement der Schwingungen.

Ist die Dämpfung sehr gering, so können wir die durch sie verursachte Vergrößerung der Schwingungsdauer, die gegen α von zweiter Ordnung ist, vernachlässigen und für T den Werth der ungedämpften Schwingung einsetzen. Wir erhalten dann das logarithmische Decrement

$$\alpha . T = \pi \cdot \frac{b}{a\sqrt{m}}. \quad (66)$$

Vierter Abschnitt.

Die Bewegungen eines beliebigen Systems von Massenpunkten unter dem Einflufs conservativer Kräfte mit Berücksichtigung der Reibung.

---

§ 18. Die Bewegungsgleichung.

Für die ungedämpfte Bewegung eines Systems von Massenpunkten hatten wir die Gleichungen (18a)

$$m_\mathfrak{a} \cdot \frac{d^2 s_\mathfrak{a}}{dt^2} = -\sum_\mathfrak{b}\left\{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot s_\mathfrak{b}\right\}.$$

Hier ist nun ein weiteres Glied hinzuzufügen, das sich auf die Reibung bezieht. Bei jedem Punkte ist die Reibung nun sowohl bedingt durch die eigene Bewegung dieses Punktes in Bezug auf

die anderen Punkte des Systems und die äufseren Körper, als auch durch die Bewegungen der anderen Punkte. Beides wird berücksichtigt, wenn wir die Bewegungsgleichung nunmehr schreiben:

$$m_a \frac{d^2 s_a}{dt^2} = -\sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot s_b \right\} - \varepsilon \cdot \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \frac{d s_b}{dt} \right\}. \qquad (67)$$

Hinsichtlich der Coefficienten Q ist zu bemerken, dafs wegen der Gleichheit von Action und Reaction

$$Q_{a,b} = Q_{b,a} \qquad (68)$$

sein mufs, und dafs die Coefficienten $Q_{a,a}$, $Q_{b,b}$ u. s. w. nur Bezug haben auf die Reibung der Massenpunkte m_a, m_b u. s. w. gegen feste Punkte, welche dem System nicht angehören; ist das System also ein freies System, so ist

$$Q_{a,a} = Q_{b,b} = \ldots = 0.$$

Der Factor ε, den wir positiv annehmen, ist als Maafs der Reibung anzusehen, und durch seine Aenderung können wir jede Aenderung in der Gesammtgröfse der Reibung ausdrücken.

Multipliciren wir die Gleichung (67) mit $\frac{d s_a}{dt}$, und summiren dann nach a, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \sum_a \left\{ m_a \frac{d^2 s_a}{dt^2} \cdot \frac{d s_a}{dt} \right\} = &-\sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot s_b \cdot \frac{d s_a}{dt} \right\} \\ &- \varepsilon \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \frac{d s_a}{dt} \cdot \frac{d s_b}{dt} \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Wenn wir nun mit L die actuelle, und mit Φ die potentielle Energie des Systems bezeichnen, so ist

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{d s_a}{dt} \right)^2 \right\} \right] = \sum_a \left\{ m_a \cdot \frac{d^2 s_a}{dt^2} \cdot \frac{d s_a}{dt} \right\} \qquad (70)$$

und

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot s_a \cdot s_b \right\} \right] = \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot s_b \cdot \frac{d s_a}{dt} \right\} \qquad (71)$$

und wir erhalten daher

$$\frac{d}{dt}(L + \Phi) = -\varepsilon \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \frac{d s_a}{dt} \cdot \frac{d s_b}{dt} \right\}. \qquad (69\,a)$$

Es liegt nun in dem Wesen der Reibung, dafs die gesammte Energie des Systems mit der Zeit abnimmt; es ist also die linke

Seite dieser Gleichung negativ, und daher müssen die Coefficienten Q so beschaffen sein, dafs für alle reellen Werthe von $\frac{ds_a}{dt}$

$$\sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \frac{ds_a}{dt} \cdot \frac{ds_b}{dt} \right\} > 0. \tag{72}$$

§ 19. Aufsuchung von Integralgleichungen.

Da die Gleichungen (67) homogene lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten sind, so erhalten wir Lösungen von der Form

$$s_a = a_a \cdot e^{nt}.$$

Setzen wir dies ein, so ergiebt sich

$$m_a \cdot n^2 \cdot a_a = -\sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \right\} - \varepsilon \cdot n \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot a_b \right\}$$

oder

$$m_a \cdot n^2 \cdot a_a + \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \right\} + \varepsilon \cdot n \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot a_b \right\} = 0. \tag{73}$$

Wir haben nun so viel derartige Gleichungen, als wir Werthe von a_a haben. Die Gleichungen können nur dann bestehen, wenn entweder alle $a_a = 0$, d. h. wenn keine Bewegung vorhanden ist, welchen Fall wir hier ausschliefsen wollen, oder wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, also

$$\begin{vmatrix} (n^2 m_1 + P_{1,1} + \varepsilon n Q_{1,1}), & (P_{1,2} + \varepsilon n Q_{1,2}), & (P_{1,3} + \varepsilon n Q_{1,3}) \cdots \\ (P_{2,1} + \varepsilon n Q_{2,1}), & (n^2 m_2 + P_{2,2} + \varepsilon n Q_{2,2}), & (P_{2,3} + \varepsilon n Q_{2,3}) \cdots \\ (P_{3,1} + \varepsilon n Q_{3,1}), & (P_{3,2} + \varepsilon n Q_{3,2}), & (n^2 m_3 + P_{3,3} + \varepsilon n Q_{3,3}) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0. \tag{74}$$

Diese Gleichung ist ebenso, wie bei den ungedämpften Schwingungen eines Systems von Massenpunkten, wenn N veränderliche Coordinaten vorhanden sind, vom $(2N)$ten Grade für n. Sie kann zur Bestimmung der Werthe von n benutzt werden. Multipliciren wir jede der Gleichungen (73) mit dem im ersten Gliede vorkommenden Werthe a_a, und summiren dann über das ganze System, so erhalten wir

$$n^2 \sum_a \left\{ m_a a_a^2 \right\} + \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_a \cdot a_b \right\} + \varepsilon \cdot n \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot a_a \cdot a_b \right\} = 0. \tag{75}$$

Positive reelle Wurzeln für n können nicht vorkommen; denn dann würden in Folge der Gleichungen (73) auch alle Werthe der a

reell angenommen werden können, und damit die linke Seite der Gleichung (75) positiv sein, da die beiden Doppelsummen nach früheren Erörterungen positiv sind. Die Gleichung (75) kann also unter dieser Annahme nur dann bestehen, wenn alle $a = 0$ sind, d. h. wenn keine Bewegung vorhanden ist.

Negative reelle Wurzeln für n können aber, wie aus einer ähnlichen Ueberlegung hervorgeht, bestehen. Dann haben wir

$$s_a = a_a \cdot e^{-\mu t},$$

wo nunmehr a_a reell und μ positiv ist. Die Elongation jedes einzelnen Massenpunktes nähert sich also mit wachsender Zeit t asymptotisch dem Werthe Null. Die Bewegung des Systems ist daher eine aperiodische.

Sind complexe Wurzeln von n vorhanden, so müssen, da die Gleichung (74) nur reelle Coefficienten hat, stets conjugirte Paare vorkommen, also

$$n = \mu \pm i\nu$$

und aus den Gleichungen (73) folgt dann ferner, dafs einem solchen conjugirten Paare von n auch zwei conjugirte Systeme der Werthe von a entsprechen. Bezeichnen wir die conjugirten Werthe von a mit a_a und α_a, a_b und α_b u. s. w., multipliciren dann jede der Gleichungen (73) mit dem entsprechenden conjugirten Werthe α_a und summiren wieder über das ganze System, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} n^2 \sum_a \left\{ m_a \cdot a_a \cdot \alpha_a \right\} + \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} \\ + \varepsilon \cdot n \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Unter den Summenzeichen heben sich, wie früher (§ 7) nachgewiesen, alle imaginären Theile weg, so dafs die Summen also reelle und zwar positive Gröfsen sind. Setzen wir nun für n den Werth $\mu \pm i\nu$ ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (\mu^2 - \nu^2 \pm 2 i \mu \nu) \sum_a \left\{ m_a \cdot a_a \cdot \alpha_a \right\} + \sum_a \sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} \\ + \varepsilon (\mu \pm i\nu) \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (76\,a)$$

Da nun sowohl die Summe der reellen als auch der imaginären Theile dieser Gleichung, jede für sich, gleich Null sein mufs, so ergiebt sich

$$2 i \mu \nu \sum_a \left\{ m_a \cdot a_a \cdot \alpha_a \right\} + \varepsilon i \nu \sum_a \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} = 0$$

oder

$$2\mu \sum_{a} \left\{ m_a \cdot a_a \cdot \alpha_a \right\} + \varepsilon \sum_{a} \sum_{b} \left\{ Q_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\} = 0. \tag{77}$$

Daraus folgt:

$$\mu = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum_{a} \sum_{b} \left\{ Q_{a,b} \cdot \alpha_a \cdot a_b \right\}}{\sum_{a} \left\{ m_a \cdot a_a \cdot \alpha_a \right\}}. \tag{77a}$$

Weil nach unserer Festsetzung ε positiv ist, so mufs μ negativ sein, und es kann μ nur gleichzeitig mit ε, d. h. mit der Reibung verschwinden. So lange also Reibung vorhanden ist, sind rein imaginäre Werthe von n unmöglich.

Wir haben schon erwähnt, dafs einem Paare conjugirter complexer Werthe von n auch zwei Systeme conjugirter Werthe von a entsprechen müssen. Wir wollen nun festsetzen, dafs die beiden der früheren $\mathfrak{f}$ten Wurzel von n^2 entsprechenden Werthe

$$n_{\mathfrak{f}} = -\varkappa_{\mathfrak{f}} \pm i\nu_{\mathfrak{f}}, \tag{78}$$

wo wir also für μ den Werth $-\varkappa$ eingeführt haben, für den $\mathfrak{a}$ten Massenpunkt ergeben

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} = \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{\pm i\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}}. \tag{79}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{\pm i\beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}} \cdot e^{(-\varkappa_{\mathfrak{f}} \pm i\nu_{\mathfrak{f}}) \cdot t} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \cdot \{\cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \pm i \sin(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}})\} \\ &= \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) \pm i\, \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}). \end{aligned} \tag{80}$$

Da der reelle Theil sowohl wie der imaginäre eine Lösung für $s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}$ darstellt, so ist also in diesem Falle die Bewegung des Massenpunktes eine gedämpfte Sinusschwingung, deren allgemeine Form wir unter Einführung der Coefficienten $A_{\mathfrak{f}}$ und $B_{\mathfrak{f}}$ schreiben können:

$$s_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} = \varrho_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \{A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}}) + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{\mathfrak{a},\mathfrak{f}})\}. \tag{81}$$

$A_{\mathfrak{f}}$ und $B_{\mathfrak{f}}$ sind dabei willkürliche Constanten. Die Form solcher Schwingungen haben wir oben bei einem einzelnen unter dem Einflufs der Reibung schwingenden Massenpunkte in § 17 eingehend besprochen.

§ 20. Anpassung des allgemeinen Integrals an einen gegebenen Anfangszustand des Systems.

Das vollständige Integral für s_a erhalten wir, indem wir sämmtliche Einzellösungen $s_{a,\mathfrak{f}}$, wie sie in der letzten Gleichung (81) dargestellt sind, summiren. Es ergiebt sich also:

$$s_a = \sum_{\mathfrak{f}} \varrho_{a,\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \left\{ A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{a,\mathfrak{f}}) + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{a,\mathfrak{f}}) \right\} \tag{82}$$

Die Geschwindigkeit, welche dem $a$ten Massenpunkte in jedem Momente zukommt, erhalten wir durch Differentiation nach der Zeit, so dafs

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds_a}{dt} = \sum_{\mathfrak{f}} \Big[\varrho_{a,\mathfrak{f}} \cdot e^{-\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot t} \cdot \Big\{ & - A_{\mathfrak{f}} \cdot (\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} t + \beta_{a,\mathfrak{f}}) \\ & + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{a,\mathfrak{f}})) + B_{\mathfrak{f}} \cdot (- \varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \sin(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{a,\mathfrak{f}}) \\ & + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \cos(\nu_{\mathfrak{f}} \cdot t + \beta_{a,\mathfrak{f}})) \Big\} \Big] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Bezeichnen wir nun die Elongationen und die Geschwindigkeiten zur Zeit $t = 0$ mit $\overline{s_a}$ und $\overline{\frac{ds_a}{dt}}$, so erhalten wir

$$\overline{s_a} = \sum_{\mathfrak{f}} \varrho_{a,\mathfrak{f}} \left\{ A_{\mathfrak{f}} \cdot \cos \beta_{a,\mathfrak{f}} + B_{\mathfrak{f}} \cdot \sin \beta_{a,\mathfrak{f}} \right\} \tag{84}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{ds_a}{dt}} = \sum_{\mathfrak{f}} \Big[\varrho_{a,\mathfrak{f}} \Big\{ & - A_{\mathfrak{f}} (\varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \cos \beta_{a,\mathfrak{f}} + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \sin \beta_{a,\mathfrak{f}}) \\ & + B_{\mathfrak{f}} (- \varkappa_{\mathfrak{f}} \cdot \sin \beta_{a,\mathfrak{f}} + \nu_{\mathfrak{f}} \cdot \cos \beta_{a,\mathfrak{f}}) \Big\} \Big] \cdot \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Um den Werth von s_a völlig zu bestimmen, haben wir zweimal so viel Coefficienten nöthig, als die nach $\mathfrak{f}$ genommene Summe Summanden hat; nach unserer früheren Festsetzung also $2N$. Nun haben wir aber auch N lineare Gleichungen (84) und ebenfalls N solcher Gleichungen (85). Daraus kann man die $2N$ Werthe der Coefficienten A und B eindeutig bestimmen.

§ 21. Die Reibung ist sehr klein.

Wir wollen uns nunmehr auf den Fall beschränken, welcher für die Akustik allein praktische Bedeutung hat, dafs nämlich die Reibung sehr gering sei. Dann hat in unseren Gleichungen ε einen

sehr kleinen Werth, und zwar wollen wir die Annahme machen, dafs wir die höheren Potenzen gegenüber den niederen vernachlässigen dürfen.

Differentiiren wir die früher erhaltene Gleichung (74) nach ε und setzen $\varepsilon = 0$, so haben wir jede einzelne Horizontalreihe für sich zu differentiiren, z. B. die erste so:

$$\begin{vmatrix} 2n\frac{dn}{d\varepsilon}m_1 + nQ_{11}, & nQ_{12}, \cdots \\ P_{21} & n^2 m_2 + P_{22}, \cdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

und die Summe der so entstandenen Determinanten gleich Null zu setzen. Nun kann man aus jeder differentiirten Horizontalreihe den Factor n herausziehen. Daher erhält man für $\frac{dn}{d\varepsilon}$ die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} 2\frac{dn}{d\varepsilon}m_1 + Q_{11}, & Q_{12}, \cdots \\ P_{21} & n^2 m_2 + P_{22}, \cdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \text{etc.} \qquad (86)$$

aus der sich, da n^2 für $\varepsilon = 0$ reell ist, ein reeller Werth für $\frac{dn}{d\varepsilon}$ ergiebt.

Bezeichnen wir nun mit n' den Werth für den Fall, dafs keine Reibung vorhanden, also $\varepsilon = 0$ ist, so können wir bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$n = n' + \frac{dn}{d\varepsilon}\cdot\varepsilon \qquad (87)$$

setzen. Im zweiten Abschnitt haben wir aber gefunden, dafs bei einem solchen System von Massenpunkten, in dem keine reibenden Kräfte wirksam sind,

$$n' = \pm iv$$

war, wo v die Schwingungszahl in 2π Secunden ausdrückte, und im § 19 fanden wir, dass der reelle Theil von n negativ sein muss. Also kann $\frac{dn}{d\varepsilon}$ nur negativ sein. Wir setzen nun

$$\frac{dn}{d\varepsilon}\cdot\varepsilon = -\varkappa,$$

wo also $\varkappa$ in Folge unserer Annahme einer kleinen Reibung und des Nachweises, daſs $\frac{dn}{d\varepsilon}$ reell und negativ ist, eine kleine positive reelle Gröſse bezeichnet. Wir haben dann

$$n = -\varkappa \pm i\nu, \tag{87a}$$

und wenn wir dieses in unsere oben (§ 19) gefundene Lösung

$$s_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} \cdot e^{nt}$$

einsetzen, ergiebt sich

$$\begin{aligned} s_\mathfrak{a} &= a_\mathfrak{a} \cdot e^{-\varkappa t \pm i\nu t} \\ &= a_\mathfrak{a} \cdot e^{-\varkappa t} \cdot (\cos \nu t \pm i \sin \nu t). \end{aligned} \tag{88}$$

Ebenso, wie bei einem einzelnen schwingenden Massenpunkte, der unter dem Einfluſs der Reibung steht, haben wir also auch hier bei jedem Punkte des Massensystems eine gedämpfte pendelartige Schwingung; die Amplitude nimmt, da $\varkappa$ dem Werthe von ε proportional, um so schneller ab, je gröſser ε ist. — Die Schwingungszahl ist aber durch die hinzugetretene Reibung innerhalb der hier befolgten Genauigkeit der Berechnung unverändert geblieben. Erst eine weiter gehende Annäherung würde ergeben, daſs sie sich um eine Gröſse zweiter Ordnung ändert (und zwar kleiner wird), wenn ε eine Gröſse erster Ordnung ist.

Nunmehr wollen wir den Einfluſs einer kleinen Aenderung auf die Gröſse der Amplituden $a_\mathfrak{a}$ betrachten.

Wir gehen aus von der Gleichung (73)

$$m_\mathfrak{a} n^2 a_\mathfrak{a} + \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\} + \varepsilon n \sum_\mathfrak{b} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\} = 0,$$

und differentiiren wiederum nach ε, indem wir auch die Aenderung der a beachten. Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir dann:

$$\left.\begin{aligned} 2 m_\mathfrak{a} n \frac{dn}{d\varepsilon} \cdot a_\mathfrak{a} + m_\mathfrak{a} n^2 \frac{da_\mathfrak{a}}{d\varepsilon} + \sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{da_\mathfrak{b}}{d\varepsilon} \right\} \\ + n \cdot \sum_\mathfrak{b} \left\{ Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Eine solche Gleichung ist nun für jedes $\mathfrak{a}$ aufzustellen, und in dem dann entstehenden System von Gleichungen haben wir die Differentialquotienten $\frac{da}{d\varepsilon}$ als die Unbekannten zu betrachten. Die Coefficienten P und $m_\mathfrak{a} n^2$, mit denen diese Unbekannten multiplicirt sind, sind nun reell, während alle übrigen Glieder rein imaginär

sind; denn die Werthe von m, n^2, a, $\frac{dn}{d\varepsilon}$ und $\sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot a_b \right\}$ sind reell und n ist rein imaginär. Es müssen also die Werthe von $\frac{da}{d\varepsilon}$ sämmtlich rein imaginär sein.

Durch die Reibung kommt also zu den dem reibungsfreien System entsprechenden Werthen von a, die wir hier mit a' bezeichnen wollen, ein imaginärer Theil hinzu, der ε proportional ist; wir haben also

$$a_a = a'_a + i\beta_a\varepsilon, \tag{90}$$

wo β_a eine reelle Gröfse ist.

Für s_a ergiebt sich mithin

$$s_a = (a'_a + i\beta_a\varepsilon) \cdot e^{-\varkappa t} \cdot e^{\pm i\nu t} \tag{91}$$

oder

$$\begin{aligned} &= \varrho_a \cdot e^{i\omega_a} \cdot e^{-\varkappa t} \cdot e^{\pm i\nu t} \\ &= \varrho_a \cdot e^{-\varkappa t} \cdot e^{i(\omega_a \pm \nu t)} \\ &= \varrho_a \cdot e^{-\varkappa t} \cdot \{\cos(\omega_a \pm \nu t) + i \cdot \sin(\omega_a \pm \nu t)\}, \end{aligned} \tag{91a}$$

wo

$$\varrho_a^2 = a_a'^2 + \beta_a^2\varepsilon^2$$

und

$$\operatorname{tg}\omega_a = \frac{\beta_a\varepsilon}{a'_a}$$

ist. Die Amplitude wird also durch die Reibung, abgesehen von dem Factor $e^{-\varkappa t}$, nur um eine Gröfse zweiter Ordnung geändert und die Hauptwirkung der Reibung ist eine Phasenänderung.

Da nun ω_a mit dem Index a sich ändert, so werden die verschiedenen Massenpunkte, sowie auch die Coordinaten desselben Massenpunktes im Allgemeinen einen Phasenunterschied gegen einander haben, und die thatsächlich ausgeführte Bewegung jedes Massenpunktes wird demnach eine Ellipse sein, wobei die Grenzfälle (Gerade und Kreis) eingeschlossen sind.

Fünfter Abschnitt.

Das Mitschwingen eines einzelnen Massenpunktes.

§ 22. Die Bewegungsgleichung und allgemeine Integrationsregeln für dieselbe.

In den bisherigen Abschnitten haben wir die Ursache, welche am Anfang der betrachteten Bewegung den Massenpunkt oder das Massenpunktsystem aus seiner Gleichgewichtslage herausbrachte, unberücksichtigt gelassen. Wir haben nur stillschweigend angenommen, dafs die Kraft, welche diese Ablenkung bewirkte, zu der Zeit, auf welche sich unsere Gleichungen bezogen, nicht mehr vorhanden war, so dafs also ausschliefslich die sogenannte elastische Kraft und die Reibung in den Bewegungsgleichungen Ausdruck fanden. Wir wollen nunmehr annehmen, dafs neben der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung eine dauernde äufsere Einwirkung stattfindet. Es entstehen dann Schwingungen, welche unter günstigen Umständen eine beträchtliche Amplitude erhalten können. Man nennt diesen Vorgang gewöhnlich „Mitschwingen“. Wir wollen ihn hier zunächst für einen einzelnen Massenpunkt behandeln, und zwar unter der Voraussetzung, dafs wir die Entfernungen aus der Gleichgewichtslage, also die Elongationen, stets als sehr klein ansehen dürfen.

Bezeichnen wir die einwirkende äufsere Kraft, welche zunächst als eine beliebige Funktion der Zeit gegeben sein mag, mit F_φ, so haben wir die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b\frac{dx}{dt} + F_\varphi \tag{92}$$

Ueber die Integration dieser Gleichung lassen sich zwei allgemeine Regeln aufstellen.

1. Es seien ξ_1 und ξ_2 zwei Lösungen der Gleichung, so dafs also

$$m\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -a^2\xi_1 - b\frac{d\xi_1}{dt} + F_\varphi$$

und

$$m\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -a^2\xi_2 - b\frac{d\xi_2}{dt} + F_\varphi,$$

so erhalten wir durch Subtraction

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\xi_2 - \xi_1) = -a^2(\xi_2 - \xi_1) - b\frac{d}{dt}(\xi_2 - \xi_1),$$

d. h. dieselbe Bewegungsgleichung, die wir im dritten Abschnitt behandelt haben, und welche sich auf das ausschliefsliche Vorhandensein der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung bezieht. Haben wir also ein einziges Integral ξ_1 unserer Bewegungsgleichung (92) gefunden, und kennen wir das allgemeine Integral η derselben Gleichung, nachdem wir in ihr $F_{(t)} = 0$ gesetzt haben, so ist $\eta + \xi_1$ das allgemeine Integral der Gleichung (92).

2. Es sei ξ eine Lösung der Gleichung (92), so dafs also

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -a^2\xi - b\frac{d\xi}{dt} + F_{(t)}.$$

Wir nehmen nunmehr an, dafs an Stelle der Kraft $F_{(t)}$ eine andere, etwa $G_{(t)}$, vorhanden sei, und dafs dann η eine Lösung der dann gültigen Bewegungsgleichung sei, so dafs

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = -a^2\eta - b\frac{d\eta}{dt} + G_{(t)}.$$

Dann erhalten wir durch Addition

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\xi + \eta) = -a^2(\xi + \eta) - b\frac{d}{dt}(\xi + \eta) + F_{(t)} + G_{(t)}.$$

Daraus folgt also, dafs beim gleichzeitigen Einwirken zweier Kräfte die Lösung erhalten wird durch Summirung der für das Vorhandensein der einzelnen Kräfte gültigen Integrale. Es findet demnach eine vollständige Superposition der entsprechenden Bewegungen bei gleichzeitigem Einwirken mehrerer Kräfte statt.

§ 23. Umformung und Integration der Bewegungsgleichung.

Wir können nunmehr die allgemeine Function $F_{(t)}$ in unserer Gleichung (92) durch eine Summe anderer Functionen ersetzen und für jede derselben dann eine Lösung suchen.

Bei den akustischen Phänomenen ist die durch $F_{(t)}$ dargestellte Kraft im Allgemeinen eine nach der Zeit periodische Function, und diese können wir dann in eine FOURIER'sche Reihe auflösen. Auch können wir uns die Glieder der FOURIER'schen Reihe als die reellen (oder die imaginären) Theile von Exponentialfunctionen der Form $A.e^{nt}$ denken, wo n einen imaginären Werth hat.

Wir wollen daher $F_{(t)}$ durch $A \cdot e^{nt}$ ersetzen und erhalten somit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - a^2 x - b \frac{dx}{dt} + A \cdot e^{nt}. \tag{93}$$

Diese Gleichung entspricht dann einem einzelnen Gliede der FOURIER'schen Reihe, in die wir $F_{(t)}$ aufgelöst haben, und nachdem wir für alle Glieder die Lösung gefunden, ergiebt sich durch Summation die Lösung für die allgemeine periodische Function $F_{(t)}$.

Ein einzelnes particuläres Integral der Gleichung (93) ist

$$x = B \cdot e^{nt}. \tag{94}$$

Setzen wir diesen Werth ein und dividiren durch e^{nt}, so ergiebt sich

$$m n^2 B = - a^2 B - b \cdot n \cdot B + A \tag{95}$$

oder

$$B(m n^2 + a^2 + b n) = A$$

oder

$$B = \frac{A}{m n^2 + a^2 + b n}. \tag{95a}$$

Somit ist also aus den gegebenen Constanten der Gleichung der Werth von B bestimmt.

Da n nach unseren Voraussetzungen imaginär ist, so wollen wir

$$n = i v$$

setzen, und erhalten dann

$$B = \frac{A}{- m v^2 + a^2 + i b v}. \tag{95b}$$

Wir setzen nunmehr

$$\left.\begin{aligned} - m v^2 + a^2 &= \varrho \cdot \cos c \\ \text{und} \qquad b v &= \varrho \cdot \sin c, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

so dafs also

$$\varrho^2 = (a^2 - m v^2)^2 + b^2 v^2 \tag{96a}$$

und

$$\operatorname{tg} c = \frac{b v}{- m v^2 + a^2} \tag{96b}$$

ist. Wir erhalten dann

$$B = \frac{A}{\varrho \cdot e^{ic}} = \frac{A}{\varrho} \cdot e^{-ic} \tag{95c}$$

und somit

$$x = \frac{A}{\varrho} \cdot e^{-ic} \cdot e^{ivt} = \frac{A}{\varrho} e^{i(vt - c)}$$

$$= \frac{A}{\varrho} [\cos(v t - c) + i \sin(v t - c)] \tag{94a}$$

Nun war aber die einwirkende Kraft

$$A \cdot e^{nt} = A \cdot e^{i\nu t}$$

$$= A \cdot [\cos \nu t + i \sin \nu t].$$

Dem reellen Theile des Ausdruckes für die einwirkende Kraft entspricht auch der reelle Theil des Werthes von x. Wir sehen also, dafs durch die einwirkende pendelartige Schwingung $A \cdot \cos \nu t$ der Massenpunkt m in eine pendelartige Schwingung von der Form

$$x = \frac{A}{\varrho} \cdot \cos (\nu t - c) \tag{97}$$

gebracht wird. Die Schwingungszahl ist dieselbe, aber die Amplitude im Allgemeinen verschieden; aufserdem besteht eine Verschiebung der Phase.

Das allgemeine Integral erhalten wir nun aus diesem particulären, indem wir das für $A = 0$ bestehende allgemeine Integral addiren. Nehmen wir an, dafs die Reibung gering sei, so können wir das letztere [vergl. § 17, Gleichung (61)] schreiben

$$R \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin (\beta t + c')$$

und erhalten dann hier als allgemeines Integral für den mitschwingenden Punkt

$$x = \frac{A}{\varrho} \cos (\nu t - c) + R \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin (\beta t + c'). \tag{98}$$

Die beiden willkürlichen Constanten R und c' erlauben die Bewegung für einen bestimmten Zeitpunkt einer gegebenen Elongation und Geschwindigkeit anzupassen.

Das zweite Glied hat aber in Folge des Factors $e^{-\alpha t}$ nur für den Anfang Bedeutung, es schwindet immer mehr, während das erste Glied seinen Werth beibehält.

Ist die entstandene Bewegung hörbar, so treten, wenn ν und β nahezu gleich sind, am Anfang Schwebungen auf, die aber je nach der Gröfse von α mehr oder minder schnell verlöschen, und es bleibt dann nur derjenige Ton bestehen, der der Schwingungszahl der erregenden Kraft entspricht, von dem Eigenton des erregten Punktes aber völlig unabhängig ist.

§ 24. Die Stärke des Mitschwingens.

Die dauernde Form der entstehenden Bewegung ist gegeben durch Gleichung (97)

$$x = \frac{A}{\varrho} \cdot \cos(\nu t - c)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{(a^2 - m\nu^2)^2 + b^2\nu^2}} \cdot \cos(\nu t - c). \qquad (97\,a)$$

Setzen wir nun

$$N^2 = \frac{a^2}{m}, \qquad (99)$$

wo also N die auf 2π Secunden bezogene Schwingungszahl bezeichnet, welche dem Massenpunkt m unter dem ausschliefslichen Einflufs der ihn in die Gleichgewichtslage zurücktreibenden Kraft zukommt, so wird

$$x = \frac{A}{\sqrt{m^2(N^2 - \nu^2)^2 + b^2\nu^2}} \cdot \cos(\nu t - c). \qquad (97\,b)$$

Das Mitschwingen ist also um so stärker, je genauer die Schwingungszahl der zugeleiteten Bewegung mit der Schwingungszahl der reibungsfreien Eigenbewegung des erregten Körpers übereinstimmt. Sind beide Schwingungszahlen gleich, so ist die Amplitude der entstandenen Bewegung der Dämpfung umgekehrt proportional und von der sonstigen Beschaffenheit des erregten Körpers unabhängig, da wir in diesem Falle

$$x = \frac{A}{b\nu} \cdot \cos(\nu t - c) \qquad (100)$$

haben. Bei sehr kleinem b, d. h. bei sehr geringer Reibung würde dann die Stärke des Mitschwingens, also die Amplitude der erregten Bewegung ungemein grofs werden können. Doch ist zu beachten, dafs für diesen Fall unsere ganze Betrachtung den Bereich ihrer Gültigkeit überschreitet, da wir von der Voraussetzung kleiner Elongationen ausgegangen sind.

Ist b sehr klein, so wird schon eine geringe Abweichung in den Schwingungszahlen die Stärke des Mitschwingens sehr beeinflussen, weil das Verhältnifs von $m^2(N^2 - \nu^2)^2 + b^2\nu^2$ zu $b^2\nu^2$ schnell mit $N^2 - \nu^2$ wächst.

Ist b hingegen sehr grofs, so kommt eine Differenz zwischen den Schwingungszahlen nicht so sehr in Betracht.

§ 25. Die Gröfse des Phasenunterschiedes.

Der Phasenunterschied zwischen der erregenden und der erregten oscillirenden Bewegung ist gegeben durch den Winkel c. Nehmen wir für ϱ den positiven Werth an, so ergiebt sich, dafs c innerhalb der ersten beiden Quadranten liegt, da $\varrho \,.\, \sin c = b \,.\, v$ ist, und somit $\sin c$ stets einen positiven Werth hat.

Wir haben ferner die Beziehung (Gleichung 96)

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, \cos c &= -\, m v^2 + a^2 \\ &= m (N^2 - v^2). \end{aligned} \tag{101}$$

Ist nun

1) $N > v$, so ist $\varrho \,.\, \cos c$ also auch $\cos c$ positiv;

demnach liegt dann c im ersten Quadranten,

2) $N = v$; dann ist $\cos c = 0$, also $c = 90^0$;

3) $N < v$; so ist $\cos c$ negativ, und somit liegt c im zweiten Quadranten.

Die nebenstehende Fig. 1 stellt diese Verhältnisse in übersichtlicher Weise dar.

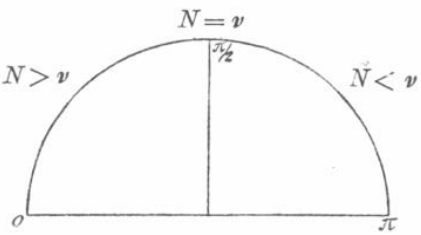

Fig. 1.

Die Gröfse des Phasenunterschiedes ist also abhängig von dem Unterschiede zwischen der Schwingungszahl des erregenden und derjenigen des Eigentones des erregten Massenpunktes. Sind die Schwingungszahlen genau gleich, so beträgt der Phasenunterschied eine Viertelschwingung. Ist die Schwingungszahl des erregenden Körpers die kleinere, so ist die Phasendifferenz geringer als eine Viertelschwingung; ist sie die gröfsere, so beträgt die Phasendifferenz mehr als eine Viertelschwingung.

Bei geringer Reibung des erregten Massenpunktes, — und dieses ist der gewöhnlich vorkommende Fall —, folgt aus der Gleichung (96b)

$$\operatorname{tg} c = \frac{b\,v}{-\,m\,v^2 + a^2} = \frac{b\,v}{m\,(N^2 - v^2)}, \tag{96c}$$

dafs die Phasendifferenz c nur dann einen von Null oder 180^0 erheblich verschiedenen Werth hat, wenn N und v sehr nahe über-

einstimmen. Eine geringe Zunahme der Differenz zwischen N und ν hat, da hier nur das Verhältnifs zu dem kleinen Werthe $b\nu$ in Betracht kommt, schon eine beträchtliche Verkleinerung von $\operatorname{tg} c$ zur Folge. Bei schwacher Dämpfung ist die Phasendifferenz von den Schwingungszahlen also in ähnlicher Weise abhängig, wie die Stärke des Mitschwingens, und sie kann in diesem Falle somit als ein ziemlich empfindlicher Maafsstab für die Stärke der Resonanz benutzt werden; bei manchen akustischen Phänomenen läfst sie sich nun mittelst optischer Beobachtungen (LISSAJOUS'sche Figuren) leicht bestimmen, so dafs wir also auch die Stärke des Mitschwingens in einem gegebenen Falle leicht beurtheilen können.

Sechster Abschnitt.

Das Mitschwingen eines Systems von Massenpunkten.

---

§ 26. Das System der Bewegungsgleichungen und die allgemeine Form der Lösung.

Wir wollen den Vorgang des Mitschwingens, den wir im vorigen Abschnitt bei einem einzelnen Massenpunkte betrachtet haben, nunmehr auf ein System von Massenpunkten ausdehnen. Es wirken dann also neben der sogenannten elastischen Kraft und der Reibung noch äufsere Kräfte ein.

Für diese Annahme gilt dasselbe Gesetz der Superposition der Bewegungen bei gleichzeitigem Einwirken mehrerer Kräfte, welches wir oben in § 22 für einen einzelnen mitschwingenden Massenpunkt abgeleitet haben. Wir brauchen uns daher auch hier nur auf den Fall zu beschränken, dafs die auf jeden Punkt einwirkende Kraft durch eine Function von der Form $A \cdot e^{nt}$ dargestellt werden kann.

Mit Benutzung der in den früheren Abschnitten gebrauchten Bezeichnungen besteht hier für die einzelnen das System bildenden Massenpunkte die Bewegungsgleichung:

$$m_a \frac{d^2 s_a}{dt^2} = -\sum_b (P_{a,b} \cdot s_b) - \varepsilon \sum_b \left(Q_{a,b} \cdot \frac{d s_b}{dt} \right) + A_a \cdot e^{nt} \qquad (102)$$

Nach Analogie der früheren Darlegungen ist zu schliefsen, dafs ein Integral dieser Gleichung sich in der Form

$$s_a = a_a \cdot e^{nt} \tag{103}$$

schreiben läfst. Haben wir ein einziges derartiges Integral gefunden, so sind ebenso, wie bei einem einzelnen mitschwingenden Massenpunkt, alle anderen Integrale bekannt; denn wir erhalten sie, indem wir zu dem erst gefundenen die Integrale der im vierten Abschnitt aufgestellten Gleichungen addiren.

Setzt man nun den Werth für s_a aus Gleichung (103) in die Gleichung (102) ein, so ergiebt sich

$$m_a n^2 a_a + \sum_b (P_{a,b} \cdot a_b) + \varepsilon n \sum_b (Q_{a,b} \cdot a_b) = A_a \tag{104}$$

Alle diese Gleichungen, deren für das ganze System so viele aufgestellt werden können, als veränderliche Coordinaten vorhanden, sind linear nach den Gröfsen a_a, aber nicht homogen. Ist nun die Determinante dieses Gleichungssystems von Null verschieden, so lassen sich die Werthe a_a eindeutig und linear aus den Werthen von A_a bestimmen.

Da nun in unserem Falle die zugeleitete Bewegung eine periodische ist, so ist n eine rein imaginäre Gröfse, und daher ist die Bedingung, dafs die Determinante nicht verschwinden darf, erfüllt.

Die Lösungen von der Form der Gleichung (103) geben ein System von einfachen, pendelartigen Schwingungen, welche im Allgemeinen elliptisch sind und mit unveränderter Amplitude so lange dauern, als die Kraft einwirkt. Ihnen superponiren sich dann noch in der allgemeinen Lösung Schwingungen, welche den Eigenschwingungen des Systems entsprechen, aber, wie im vierten Abschnitt gezeigt worden, mit der Zeit verlöschen.

Durch geeignete Bestimmungen der vorkommenden Coefficienten kann der Anfangszustand des Systems gegebenen Bedingungen angepafst werden.

§ 27. Die Stärke des Mitschwingens.

Wir haben oben gesehen, dafs jedes System von discreten Massenpunkten, welche durch elastische Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage gehalten oder wieder in diese zurückgeführt werden, im Allgemeinen so viel verschiedene Eigenschwingungen ausführen kann, als das System Veränderliche besitzt. Nunmehr wollen wir untersuchen, ob zwischen diesen Eigenschwingungen und der Stärke

des Mitschwingens, welches wir jetzt betrachten, irgend welche Beziehung besteht.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte das Mitschwingen bewirken, so haben wir bei einem einzelnen Punkte gesehen (§ 22), dafs dann die durch die einzelnen Kräfte gegebenen Bewegungen sich superponiren. Bei einem System von Massenpunkten haben wir nun dieselbe Form der Bewegungsgleichungen, und daher gilt das gleiche Gesetz auch hier.

Die Gröfse der von aufsen einwirkenden Kräfte ist hier durch das System der Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ gegeben. Wir können nun jeden dieser Coefficienten $A_\mathfrak{a}$ in eine Reihe von Gliedern zerlegen, von denen jedes einzelne einer Eigenschwingung entspricht, die in dem Punktsystem in Folge der inneren Kräfte auftreten kann.

Bezeichnen wir mit α die Amplituden der einzelnen Massenpunkte in einem von äufseren Kräften freien System (die wir früher in § 19 u. d. folg. a genannt haben), und wählen für die verschiedenen Massenpunkte $\mathfrak{a}$ und für die verschiedenen Eigenschwingungen $\mathfrak{p}$ als laufenden Index, so können wir ein System von Gleichungen

$$m_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{p} (B_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}) = A_\mathfrak{a} \tag{105}$$

aufstellen, aus dem sich die Werthe $B_\mathfrak{p}$ bestimmen lassen.

Wirkt nun an Stelle von $A_\mathfrak{a}$ nur die eine Componente $m_\mathfrak{a} \cdot B_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}$ ein, welche der $\mathfrak{p}$ten Eigenschwingung des Systems entspricht, und bezeichnen wir die dann bestehende Amplitude des $\mathfrak{a}$ten Punktes mit $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}$, so haben wir anstatt der Gleichung (104) nunmehr die Gleichungen

$$m_\mathfrak{a} n^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \sum_\mathfrak{b} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) + \varepsilon n \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) = m_\mathfrak{a} \cdot B_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}. \tag{106}$$

Die früheren Gleichungen (73) lauten nunmehr mit Benutzung der jetzt eingeführten Bezeichnung

$$m_\mathfrak{a} \cdot n_\mathfrak{p}^2 \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \sum_\mathfrak{b} (P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) + \varepsilon n_\mathfrak{p} \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{b},\mathfrak{p}}) = 0. \tag{107}$$

Den Gleichungen (106) kann man für $\varepsilon = 0$ dadurch genügen, dafs man

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} = C_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} \tag{108}$$

setzt. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (107) mit $C_\mathfrak{p}$ und subtrahirt sie von den Gleichungen (106), so ergiebt sich:

$$C_\mathfrak{p} \cdot \left\{ (n^2 - n_\mathfrak{p}^2) \cdot m_\mathfrak{a} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \varepsilon (n - n_\mathfrak{p}) \sum_\mathfrak{b} (Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}) \right\} = m_\mathfrak{a} \cdot B_\mathfrak{p} \cdot \alpha_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}}. \tag{109}$$

Diese Gleichungen sind für $\varepsilon = 0$ erfüllt, wenn man setzt:

$$C_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p} \cdot \frac{1}{n^2 - n_\mathfrak{p}^2} \cdot \tag{110}$$

Nun ist aber nach Gleichung (108) in der Gröfse der Amplitude des Mitschwingens der Coefficient $C_\mathfrak{p}$ als Factor enthalten, und es sagt demnach Gleichung (110) aus, dafs die Stärke des Mitschwingens abhängig ist von der Uebereinstimmung zwischen $n_\mathfrak{p}$ und n, also zwischen den Schwingungszahlen des Eigentones und des erregenden Tones, und ferner davon, welche Gröfse bei der Zerlegung der Gesamtamplitude $A_\mathfrak{a}$ des erregenden Tones in die Partialamplituden der Coefficient $B_\mathfrak{p}$ erhält. Fällt der Angriffspunkt einer Kraft mit dem Knotenpunkt einer Partialschwingung zusammen, so ist für diese der Coefficient $B = 0$.

Ist die Reibung nicht gleich Null, aber klein, so tritt zu dem Werthe von a ein imaginärer Theil hinzu, der, wie wir oben bei der Schwingung eines Punktes gesehen, einer Phasendifferenz entspricht, aber keine merkliche Aenderung der Intensität des Mitschwingens anzeigt. Nur wenn die Schwingungszahlen der erregenden Kraft und der Eigenschwingung des Systems ganz übereinstimmen hat die Reibung einen beträchtlicheren Einfluſs.

§ 28. Das Reciprocitätsgesetz beim Mitschwingen.

Um die Werthe der Amplituden $a_\mathfrak{a}$ aus dem System der Gleichungen (104) zu finden, mufs man jede derselben mit der betreffenden Unterdeterminante multipliciren und dann alle addiren. Bezeichnen wir mit D die Hauptdeterminante des Systems, und bei der Berechnung von a_p die verschiedenen Unterdeterminanten mit $D_{\mathfrak{a},p}$, bei der Berechnung von a_q aber mit $D_{\mathfrak{a},q}$, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{\sum_\mathfrak{a} (D_{\mathfrak{a},p} \cdot A_\mathfrak{a})}{D} \\ \text{und} \qquad & \\ a_q &= \frac{\sum_\mathfrak{a} (D_{\mathfrak{a},q} \cdot A_\mathfrak{a})}{D} \cdot \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Nehmen wir nun an, dafs in dem Falle, wo wir a_p berechnen, nur die Kraft A_q, und in dem anderen Falle, wo also a_q gesucht wird, nur die Kraft A_p vorhanden ist, so reduciren sich die in diesen

Gleichungen vorkommenden Summen auf je ein Glied, und wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} a_p &= \frac{D_{q,p} \cdot A_q}{D} \\ \text{und} \\ a_q &= \frac{D_{p,q} \cdot A_p}{D}. \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Es ist aber:

$$D_{q,p} = D_{p,q}, \quad (113)$$

weil wir bei der Anordnung des Gleichungssystems die Vertical- und Horizontalreihen mit einander vertauschen können, ohne dafs sich etwas ändert. Setzen wir

$$\frac{D_{q,p}}{D} = \frac{D_{p,q}}{D} = R, \quad (113a)$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= A_q \cdot R \\ a_q &= A_p \cdot R. \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

Wirkt demnach eine oscillirende Kraft von bestimmter Gröfse in der Richtung der $q$ten Coordinate, und verursacht in Richtung der $p$ten Coordinate eine Bewegung von bestimmter Intensität, so bewirkt eine Kraft von derselben Gröfse in Richtung der $p$ten Coordinate eine der ersten an Intensität gleiche Bewegung in Richtung der $q$ten Coordinate.

Zwischen den das Mitschwingen erregenden Kräften und den erzeugten Bewegungen besteht also ein ähnliches Reciprocitätsgesetz, wie wir es oben in § 11 zwischen den Anfangselongationen bez. den Anfangsgeschwindigkeiten fanden.

Dieses Gesetz ist von grofser Wichtigkeit, weil durch dasselbe für ganze Klassen von Erscheinungen gewisse Erklärungen ausgeschlossen werden. So kommen z. B. bei der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Magnetismus und bei den Fluorescenzerscheinungen solche reciproken Beziehungen nicht vor, und wir können daher ohne weiteres schliefsen, dafs bei diesen Vorgängen Kräfte anderer Art wirken, als wir sie hier vorausgesetzt haben. In der Akustik sind es z. B. die Klirrtöne, welche diesem Reciprocitätsgesetz nicht unterworfen sind, und daher müssen sie also durch die Kräfte erzeugt werden, bei denen die Abhängigkeit der Gröfse der auftretenden in die Gleichgewichtslage zurückstrebenden Kraft ein anderes ist, als es bei sogenannten elastischen Kräften der Fall.

§ 29. Mitschwingen bei gezwungener Bewegung eines Punktes.

Wir wollen nun annehmen, dafs nur auf einen einzigen Punkt in Richtung einer Coordinate eine äufsere oscillirende Kraft einwirke, während im übrigen das ganze System ausschliefslich unter dem Einflufs seiner inneren Kräfte stehe. Diese äufsere Kraft soll aber so grofs sein, dafs sie jeden Widerstand überwältigt. Es ist dann die Bewegung in Richtung dieser einen Coordinate gegeben. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn wir eine schwingende Stimmgabel auf eine Saite setzen; dann wird der Saitenpunkt, welcher am Griff der Gabel anliegt, ohne irgend welche praktisch in Betracht kommende Reaction mitgenommen. Die Metallzungen in den Blasinstrumenten bleiben ebenfalls von der mitschwingenden, wenig widerstrebenden Luft unbeeinflufst, während die anliegenden Theile der letzteren ihre Schwingungen genau mitmachen müssen.

In diesem Falle sind die Coordinaten eines Punktes, dem wir den Index 0 beilegen wollen, als Coordinaten der Zeit gegeben, und zwar wollen wir setzen:

$$s_0 = a_0 \cdot e^{nt}, \tag{115}$$

worin n einen imaginären Werth haben soll.

Für die übrigen Punkte bestehen dann Bewegungsgleichungen, die mit den Gleichungen (67) übereinstimmen, so dafs wir, falls das ganze System aus N Punkten besteht, für $N-1$ Punkte Gleichungen von der Form

$$m_a \frac{d^2 s_a}{dt^2} = -\sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot s_b \right\} - \varepsilon \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot \frac{d s_b}{dt} \right\} \tag{116}$$

erhalten.

Wir haben früher schon gesehen, dafs die Integrale solcher homogenen linearen Differentialgleichungen sich in der Form

$$s_a = a_a \cdot e^{\nu t}$$

schreiben lassen. Da nun hier der Werth von ν mit dem Werthe von n in Gleichung (115) identisch sein mufs, so erhalten wir also für die Elongationen die Werthe

$$s_a = a_a \cdot e^{nt}. \tag{117}$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichungen (116) ein, so ergiebt sich

$$m_a n^2 a_a = -\sum_b \left\{ P_{a,b} \cdot a_b \right\} - \varepsilon n \sum_b \left\{ Q_{a,b} \cdot a_a \right\}. \tag{118}$$

Da in diesem Gleichungssystem n einen rein imaginären Werth hat, so ist die Hauptdeterminante desselben nicht gleich Null, und es können daher auch die Unterdeterminanten von je $N-1$ Verticalreihen nicht durchgängig gleich Null sein. Die Werthe der $a_\mathfrak{a}$ sind demnach alle durch den gegebenen Werth von a_0 zu bestimmen.

Wie die Bewegung des Systems bei sehr kleiner Dämpfung vor sich geht, kann man am besten überblicken, wenn man die Dämpfung als verschwindend klein annimmt, also $\varepsilon = 0$ setzt. Dann fällt in jeder der Gleichungen (118) das letzte Glied fort, und wir haben:

$$m\, n^2\, a_\mathfrak{a} = -\sum_\mathfrak{b} \left\{ P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot a_\mathfrak{b} \right\}. \tag{119}$$

Wenn nun n mit der Schwingungszahl einer der Eigenschwingungen des Systems zusammenfällt, so wird eben diese Eigenschwingung entstehen, und die Amplituden für die verschiedenen Massenpunkte sind dadurch gegeben, dafs a_0 gegeben ist; denn die Verhältnisse der verschiedenen Werthe $a_\mathfrak{a}$ unter einander sind ja durch das Gleichungssystem bestimmt. Kennt man eine Amplitude, so kennt man alle.

Fällt gerade ein Knotenpunkt der Eigenschwingung, also ein Punkt, der die Amplitude Null haben sollte, in den Punkt, welcher der vorausgesetzten Zwangsbewegung unterworfen ist, so mufs er nun eine Bewegung mit endlicher Amplitude ausführen, d. h. es wird die Gröfse seiner Bewegung auf das Unendlichfache gesteigert, und dem entsprechend würden alle übrigen Punkte, welchen sonst bei dieser Eigenschwingung endliche Amplituden zukommen, nunmehr solche von unendlicher Gröfse haben müssen. Dieses wird nun thatsächlich durch die stets vorhandene Dämpfung verhindert; aber bei mäfsiger Reibung ist die Stärke der erregten Eigenschwingung doch immer bedeutend. Man benutzt diesen Umstand z. B., wenn die Länge einer Saite gefunden werden soll, die dem Eigenton einer Stimmgabel entspricht. Diese wird dann schwingend mit dem Griff auf die Saite aufgesetzt und so lange verschoben, bis in der letzteren ein Maximum der Eigenschwingung auftritt. Dabei ist natürlich der nicht in Betracht kommende Theil der Saite durch den aufgelegten Finger zu dämpfen.

Siebenter Abschnitt.

Der Hamilton'sche Satz. — Uebergang auf continuirlich verbreitete Massen.

§ 30. Ableitung der Hamilton'schen Gleichung mit Benutzung rechtwinkliger Coordinaten.

Bisher haben wir die allgemeinen Gesetze entwickelt, welche sich auf die verschwindend kleinen oscillatorischen Bewegungen eines Massenpunktes oder eines Systems von Massenpunkten beziehen, die sich unter dem Einflufs conservativer Kräfte in der Nähe stabilen Gleichgewichtes befinden. Wir haben dabei die Massenpunkte als vollkommen frei betrachtet, höchstens wurden einzelne einer gezwungenen Bewegung unterworfen und dadurch zu Centren gemacht, von denen Kräfte auf die anderen Punkte einwirkten. Unter diesen Umständen konnten wir die Bewegung jedes einzelnen Punktes auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, wobei wir dann in den einzelnen Massenpunkten keine verschiedenen Geschwindigkeiten der verschiedenen Theile zu unterscheiden hatten, sondern jeden derselben als ein untheilbares, in allen Eigenschaften in sich übereinstimmendes Ganze betrachteten.

Nun giebt es aber andere Systeme, bei denen feste Verbindungen bestehen, und zwar entweder zwischen den Massenpunkten des Systems und äufseren Körpern, oder zwischen diesen Punkten unter einander. Es können z. B. unausdehnsame Stränge zwischen einzelnen Punkten vorkommen, oder einige der Punkte können gezwungen sein, während der Bewegung auf einer bestimmten Linie oder Fläche zu bleiben, u. s. f. Man stellt solche Eigenschaften des Systems am besten durch Gleichungen dar, in denen ausgesagt ist, dafs gewisse Beziehungen zwischen den Coordinaten unverändert bleiben sollen. In einem solchen Falle sind dann nicht alle Coordinaten der Punkte für die oscillatorische Bewegung frei, sondern die Zahl der veränderlichen Coordinaten wird reducirt um die Anzahl der Gleichungen zwischen den Coordinaten, welche die festen Verbindungen u. s. w. ausdrücken. Wenn wir in einem solchen Falle die rechtwinkligen Coordinaten festhalten wollten, so würde ein ziemlich complicirtes System von Gleichungen entstehen, und um dies zu vermeiden, kann man die HAMILTON'sche Form be-

nutzen, durch welche man die Bewegungsgleichungen als Minimalproblem ausdrücken kann.

Bezeichnen wir mit x_a die Coordinate des Massenpunktes m_a, wobei sich auf jeden frei beweglichen Massenpunkt drei Indices a beziehen, so dafs also stets je drei Werthe m_a identisch sind; ferner sei Φ die potentielle Energie des Systems, dann lauten unter der Voraussetzung frei beweglicher Massenpunkte und conservativer Kräfte die Bewegungsgleichungen

$$m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_a}. \tag{121}$$

Eine unendlich kleine, von der Zeit abhängige Aenderung der Coordinate x_a wollen wir mit δx_a bezeichnen, so dafs also nun zur Zeit t die Coordinate von m_a nicht mehr x_a, sondern $x_a + \delta x_a$ ist. Es sind natürlich diese Werthe δx_a continuirliche Functionen der Zeit; denn wären sie dieses nicht, so würde uns jedes Mittel fehlen, über den Zeitpunkt, in dem die Discontinuität der Bewegung stattfindet, hinüber die Identität der betreffenden Massenpunkte zu beweisen. Vollziehen sich nur continuirliche Lagenänderungen, so kann man jeden einzelnen Punkt dauernd verfolgen.

Multipliciren wir die Gleichung (121) mit δx_a, und summiren über das ganze System, so ergiebt sich:

$$\sum_a m_a \delta x_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -\sum_a \delta x_a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_a}. \tag{122}$$

Da nun die Abhängigkeit der potentiellen Energie Φ von der Zeit nur durch die Abhängigkeit der Coordinaten x_a von der Zeit bedingt ist, so stellt die Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Variation von Φ dar. Bezeichnen wir sie mit $\delta \Phi$, so ist:

$$\delta \Phi = \sum_a \delta x_a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \tag{123}$$

und wir können also schreiben:

$$\sum_a m_a \delta x_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -\delta \Phi. \tag{122a}$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dt}\left(\delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right) = \delta x_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\delta x_a}{dt} \tag{124}$$

und wenn wir mit m_a multipliciren und nach a summiren:

$$\left.\begin{aligned}\sum_a m_a \cdot \frac{d}{dt}\left(\delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right) &= \sum_a m_a \,\delta x_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} \\ &\quad + \sum_a m_a \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad (124a)$$

Die erste Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber mit der linken Seite der Gleichung (122a) identisch und wir erhalten daher

$$\sum_a m_a \frac{d}{dt}\left(\delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right) - \sum_a m_a \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt} = -\delta \Phi. \quad (122b)$$

Ferner ist:

$$\delta\left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt}$$

und daher ist, wenn wir mit L_a den zum Index a gehörigen Bruchtheil der lebendigen Kraft bezeichnen,

$$\delta L_a = \tfrac{1}{2} m_a \,\delta\left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 = m_a \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt}. \quad (125)$$

Summiren wir über das ganze System und bezeichnen dessen lebendige Kraft mit L, so erhalten wir

$$\delta L = \sum_a m_a \frac{dx_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt} \quad (125a)$$

Wir können also nunmehr die Gleichung (122b) schreiben:

$$\sum_a m_a \frac{d}{dt}\left(\delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right) - \delta L = -\delta \Phi$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_a m_a \cdot \delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right\} = \delta(L - \Phi). \quad (122c)$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dt und integriren zwischen den Zeitgrenzen t_0 und t_1, so erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left\{\sum_a m_a \cdot \delta x_a \cdot \frac{dx_a}{dt}\right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta(L - \Phi) \cdot dt. \quad (122d)$$

Die unbestimmte Integration der linken Seite läfst sich leicht ausführen. Wenn wir nun durch Einschliefsen eines Ausdrucks in

zwei horizontale Striche andeuten, daſs sein Werth zwischen den angeschriebenen Grenzen zu nehmen ist, so ergiebt sich

$$\overline{\sum m_a \delta x_a \frac{d x_a}{d t}}_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \delta (L - \Phi) . d t. \tag{122e}$$

Wir wollen nunmehr festsetzen, daſs die Variation, die bisher keinerlei Beschränkung unterlag, an den Grenzen des Integrationsintervalls, also zu den Zeiten t_0 und t_1, gleich Null sei, so daſs also hier alle Werthe von $\delta x_a = 0$ sind. Dann enthalten sämmtliche Summanden, aus denen sich die Summen zusammensetzen, welche die oberen und unteren Grenzwerthe auf der linken Seite der Gleichung bilden, den Factor Null, und es wird also diese Seite der Gleichung selbst gleich Null, so daſs demnach

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta (L - \Phi) d t. \tag{126}$$

Da die Grenzen der Zeit bestimmt sind, so können wir das Variationszeichen auch vor das Integralzeichen setzen und erhalten somit

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (L - \Phi) d t \tag{126a}$$

als gewöhnliche Form der Hamilton'schen Gleichung.

Aus der Hamilton'schen Gleichung können wir nun auch wieder umgekehrt die Bewegungsgleichungen (121) ableiten, von denen wir oben ausgegangen sind. Ja es können aus der Hamilton'schen Gleichung die Bewegungsgleichungen auch noch für den Fall abgeleitet werden, daſs zwischen den Coordinaten irgend welche Bedingungsgleichungen bestehen. Setzen wir nämlich in

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (\delta L - \delta \Phi) d t$$

den Werth für δL aus Gleichung (125a) und für $\delta \Phi$ aus Gleichung (123) ein, so ergiebt sich

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_a \left(m_a \cdot \frac{d x_a}{d t} \cdot \frac{d \delta x_a}{d t} \right) - \sum_a \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a \right) \right\} d t. \tag{127}$$

Es sind zwar die Werthe δx_a willkürlich anzunehmende Functionen

der Zeit, die nur der Einschränkung unterliegen, dafs die Gröfsen $x_a + \delta x_a$ den Bedingungsgleichungen genügen; sind aber die Werthe von x_a und δx_a einmal angenommen, so sind damit auch die Werthe der Geschwindigkeiten $\frac{d\,\delta x_a}{dt}$ ebenfalls gegeben, und sie können nicht mehr als willkürlich betrachtet werden.

Indem wir die erste der beiden in der Gleichung (127) vorkommenden Summen partiell integriren, ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_a \left(m_a \frac{d x_a}{dt} \frac{d\,\delta x_a}{dt} \right) &= \sum_a m_a \overline{\frac{d x_a}{dt} \cdot \delta x_a}^{t_1}_{t_0} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_a \left(m_a \frac{d^2 x_a}{dt} \cdot \delta x_a \right)\end{aligned}\right\} \quad (128)$$

Zu den Zeiten t_0 und t_1 sollen aber die Variationen δx_a gleich Null sein, und es fällt daher das erste Glied der rechten Seite fort, so dafs

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_a \left(m_a \cdot \frac{d x_a}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_a}{dt} \right) = - \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_a \left(m_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} \cdot \delta x_a \right) \quad (128\,a)$$

wird. Setzen wir diesen Werth in Gleichung (127) ein, so erhalten wir:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \sum_a \delta x_a \left(- m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \right). \quad (127\,a)$$

Daraus folgt, dafs für die den Bedingungsgleichungen genügenden Variationen

$$\sum_a \delta x_a \left(- m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \right) = 0 \quad (127\,b)$$

sein mufs. Denn wäre der Ausdruck nicht Null, sondern z. B. für irgend einen Werth von t positiv, so könnte man die Gröfsen δx_a da, wo er nicht positiv wäre, gleich Null setzen und erreichte so, dafs die Gleichung (127 a) nicht erfüllt wäre. Die Bedingung (127 b) ist identisch mit den Bewegungsgleichungen von D'Alembert, nach dem die Kräfte

$$- m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a}$$

durch die Bedigungsgleichungen im Gleichgewicht gehalten werden müssen. Sind keine Bedingungsgleichungen vorhanden, so folgen sofort die Gleichungen (121)

$$m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} .$$

§ 31. Unabhängigkeit von der Wahl der Coordinaten.

Wie wir gesehen haben, ist in der HAMILTON'schen Gleichung eigentlich nichts enthalten, was nicht auch schon die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen aussagen. Ihre grofse Bedeutung liegt darin, dafs die HAMILTON'sche Form unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems ist. Es wird nur ausgesagt, dafs die Bewegung des betreffenden Punktes von der Anfangslage bis in die Endlage so geschehen soll, dafs die lebendige Kraft, vermindert um die potentielle Energie, ein Minimum wird. Bei der Variation, die hier vorausgesetzt ist, sollen die Werthe von x variirt werden, und deren Variationen hatten wir mit δx bezeichnet. Es war vorbehalten, dafs letztere beliebige Functionen der Coordinaten und der Zeit sein sollten; nur mufsten sie continuirliche Functionen der Zeit, im Anfangs- und Endzustande gleich Null sein und die variirten Coordinaten mufsten den Bedingungsgleichungen genügen. Die Gleichung hatten wir nun zwar für ein rechtwinkliges Coordinatensystem entwickelt; aber sie gilt auch ebenso, wenn wir dafür andere Coordinaten wählen. Nur ist darauf Gewicht zu legen, dafs die Lage jedes einzelnen Punktes zu der gegebenen Zeit durch sie vollkommen bestimmt ist. Es sind z. B. Irrthümer dadurch vorgekommen, dafs man geglaubt hat, als Coordinaten die Länge eines bisher zurückgelegten Weges benutzen zu dürfen, dessen Länge aber von der eingeschlagenen Art der Bewegung abhängt. Dann ist es aber nicht der augenblickliche Werth der Coordinaten, welcher die Lage der Punkte bestimmt, sondern man würde auch noch den Weg kennen müssen, auf welchem der betreffende Punkt in diese Lage gekommen ist. Wir können aber wohl statt der rechtwinkligen Coordinaten irgend welche Beziehungen zwischen den Punkten oder den Winkeln, welche die Verbindungslinien der Punkte mit einander oder mit festen Flächen bilden, oder sogar körperliche Volumina zur Bestimmung benutzen.

§ 32. Einführung allgemeiner Coordinaten. — Die Gleichung von Lagrange.

Wir wollen nun zu ganz allgemeinen Coordinaten übergehen, welche mit $p_\mathfrak{b}$ bezeichnet werden sollen. Dann wird die geforderte Bedingung, dafs die Coordinaten $p_\mathfrak{b}$ die Lage der Punkte vollständig bestimmen, erfüllt sein, wenn die Gröfsen $x_\mathfrak{a}$ als Functionen der $p_\mathfrak{b}$ bestimmt werden können. Es ist dabei möglich, dafs die Gleichungen, welche zwischen den Gröfsen $x_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{b}$ bestehen, mehrdeutige und mehrfache Wurzeln haben. Dieses ist kein Hindernifs, falls nur die Gleichungen der Art sind, dafs sämmtliche Werthe der Gröfsen $x_\mathfrak{a}$ durch die Gröfsen $p_\mathfrak{b}$ ausgedrückt werden. Dabei sollen die Gröfsen p von einander unabhängig sein. Wenn N die Anzahl der Coordinaten ist und r die Zahl der Bedingungsgleichungen zwischen den $x_\mathfrak{a}$ ist, so ist $N-r$ die Zahl der Gröfsen p. Dann wird also, wenn wir die Gröfsen x als Functionen der Gröfsen p bestimmen können, Φ, welches eine Function der x ist, durch Einsetzung der neuen Werthe für x, als Function der p dargestellt werden können.

Ist $x_\mathfrak{a}$ als Function der Gröfsen p gegeben, so wird der Werth von $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$ sich zusammensetzen aus Gliedern von der Form $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dt}$, weil die $x_\mathfrak{a}$ nur insofern von t abhängen, als die Gröfsen p von t abhängig sind. Wir erhalten den Werth von $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$ demnach, wenn wir jene Glieder für die verschiedenen p bilden und dann summiren. Dann erhalten wir:

$$\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}=\sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial p_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}\right]. \tag{129}$$

Der Werth für die lebendige Kraft ergiebt sich, indem wir diese Summen quadriren, jede mit der Masse $\frac{m_\mathfrak{a}}{2}$ multipliciren, und dann wieder über das ganze System summiren, so dafs also

$$L=\tfrac{1}{2}\sum_\mathfrak{a}\left\{m_\mathfrak{a}\left[\sum_\mathfrak{b}\left(\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial p_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}\right)\right]^2\right\}. \tag{130}$$

Wenn wir nun die Quadrate dieser Summen bilden, so bekommen wir homogene Ausdrücke zweiten Grades nach $\frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}$. Die lebendige Kraft L wird also im Allgemeinen dargestellt durch eine Summe,

welche homogen vom zweiten Grade nach $\frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}$ ist, und zwar durch eine Doppelsumme, die nach den Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fortläuft. Die Glieder haben die Form $\frac{dp_\mathfrak{a}}{dt} \cdot \frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}$, und ihre Coefficienten werden Gröfsen sein, welche die Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ nicht mehr enthalten, und welche aus den Coefficienten $m_\mathfrak{a}$ und den Quadraten, bez. den Doppelproducten der Gröfsen $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial p_\mathfrak{b}}$ zusammengesetzt sind. Wir wollen sie mit $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bezeichnen. Dann ist die lebendige Kraft:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt} \cdot \frac{dp_\mathfrak{b}}{dt}. \tag{130a}$$

Für die Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ wollen wir nun die Bezeichnung q mit Benutzung der laufenden Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einführen. Der Ausdruck für die lebendige Kraft formt sich dadurch um in

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b} [F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{a} \cdot q_\mathfrak{b}]. \tag{130b}$$

Es ist also eine Function zweiten Grades der $\frac{dp}{dt}$ oder q, deren Coefficienten von den p abhängen, d. h. irgend welche Functionen derselben sind.

Wenn wir daher die Variationen für die HAMILTON'sche Gleichung ausführen, und zwar zunächst nur nach einer der Coordinaten, die wir mit $p_\mathfrak{c}$ bezeichnen wollen, so ist zu berücksichtigen, dafs in den Coefficienten $F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ der Werth von $p_\mathfrak{c}$ enthalten ist. Es treten also zunächst Glieder von der Form $\delta p_\mathfrak{c} \cdot \frac{\partial F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial p_\mathfrak{c}} \cdot q_\mathfrak{a} \cdot q_\mathfrak{b}$ auf. Ferner aber ist, wenn wir während der Bewegung $p_\mathfrak{c}$ ändern, damit auch $q_\mathfrak{c}$ geändert. Demnach kommen noch weitere Glieder von der Form $F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b} \cdot \delta\left(\frac{dp_\mathfrak{c}}{dt}\right)$ hinzu. Da nun aber

$$\delta\left(\frac{dp_\mathfrak{c}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta p_\mathfrak{c}),$$

so können wir diese Glieder schreiben: $F_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b} \cdot \frac{d}{dt}(\delta p_\mathfrak{c})$. Um die Variation auf das ganze System auszudehnen, haben wir noch nach $\mathfrak{b}$

zu summiren. Wir erhalten also unter der Voraussetzung, daſs sich die Variation auf p_c beschränkt:

$$\delta L = \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \left[\frac{\partial F_{a,b}}{\partial p_c} \cdot q_a \cdot q_b \cdot \delta p_c \right] + \sum_b \left[F_{c,b} \cdot q_b \cdot \frac{d\,\delta p_c}{dt} \right]. \quad (131)$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist bei der zweiten Summe wegzulassen, weil bei der Differentiation nach einem bestimmten q_c der Factor 2 auftritt, gegen den $\frac{1}{2}$ sich weghebt.

Wird nun nach p_c variirt, so ist

$$\delta \Phi = \delta p_c \frac{\partial \Phi}{\partial p_c}. \quad (132)$$

Da die HAMILTON'sche Gleichung nun für alle Variationen δp_c gelten soll, so gilt sie auch, wenn wir nur nach p_c variiren und, indem wir aus den Gleichungen (131) und (132) die Werthe für δL und $\delta \Phi$ in Gleichung (126) einsetzen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \left(\frac{\partial F_{a,b}}{\partial p_c} \cdot q_a \cdot q_b \cdot \delta p_c \right) \\ & + \sum_b \left(F_{c,b} \cdot q_b \cdot \frac{d\,\delta p_c}{dt} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_c} \cdot \delta p_c \Big\} dt. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Die zweite Summe, in welcher die Differentialquotienten von δp_c vorkommen, können wir durch partielle Integration umformen. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_b \left[F_{c,b} \cdot q_b \cdot \frac{d}{dt} (\delta p_c) \right] . dt = & \sum_b \overline{[\delta p_c \,.\, F_{c,b} \cdot q_b]} \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \delta p_c \frac{d}{dt} \left[\sum_b F_{c,b} \cdot q_b \right] dt, \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

wo die Einschlieſsung des ersten Ausdrucks auf der rechten Seite in zwei horizontale Striche wieder bezeichnet, daſs für ihn die Differenz zwischen den beiden Integrationsgrenzen der Zeit zu nehmen ist. Nach den Festsetzungen, die wir gemacht haben, ist zur Zeit t_0 und t_1 die Lage der Punkte des Massensystems fest bestimmt, so daſs für diese beiden Zeitmomente die Werthe von δp_c

gleich Null sind. Daher fällt das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung fort, und wir erhalten also:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{a} F_{c,\,b}\cdot q_b\cdot\frac{d}{dt}(\delta p_c)\right]dt=-\int_{t_0}^{t_1}\delta p_c\,\frac{d}{dt}\left\{\sum_{b}[F_{c,\,b}\cdot q_b]\right\}.dt. \quad (134a)$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung (133) ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}0=\int_{t_0}^{t_1}\delta p_c\Bigg\{&-\frac{\partial\Phi}{\partial p_c}+\tfrac{1}{2}\sum_{a}\sum_{b}\left[\frac{\partial F_{a,\,b}}{\partial p_c}\cdot q_a\cdot q_b\right]\\&-\frac{d}{dt}\left[\sum_{b}F_{c,\,b}\cdot q_b\right]\Bigg\}dt.\end{aligned}\right\} \quad (133a)$$

Wir haben also hier ein Integral über die Zeit, welches gleich Null gesetzt wird, und in welchem jedes Glied mit dem Factor δp_c versehen ist. Dieser Factor ist aber vollkommen willkürlich, er mufs nur eine continuirliche Function der Zeit sein; das Integral kann also nur dann verschwinden, wenn

$$0=\tfrac{1}{2}\sum_{a}\sum_{b}\left[\frac{\partial F_{a,\,b}}{\partial p_c}\cdot q_a\cdot q_b\right]-\frac{d}{dt}\sum[F_{c,\,b}\cdot q_b]-\frac{\partial\Phi}{\partial p_c}. \quad (135)$$

Diese Gleichung können wir nun mit Benutzung des in Gleichung (130b) aufgestellten Ausdruckes für die lebendige Kraft

$$L=\tfrac{1}{2}\sum_{a}\sum_{b}[F_{a,\,b}\cdot q_a\cdot q_b]$$

umformen. Es ist nämlich L insofern eine Function der Werthe p_c, als diese in den Coefficienten F stecken; wenn wir also die Gröfsen q und p für die hier vorkommende Differentiation als unabhängig von einander betrachten, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{a}\sum_{b}\left[\frac{\partial F_{a,\,b}}{\partial p_c}\cdot q_a\cdot q_b\right]=\frac{\partial L}{\partial p_c}. \quad (130c)$$

Thatsächlich sind die Werthe von p und q ja auch unabhängig von einander; denn bei jeder Lage des Systems würde jeder Punkt des Systems eine besondere Geschwindigkeit haben können. Die p beziehen sich auf die Lage, die q auf die Aenderung der Lage, also sind es von einander unabhängige Gröfsen, die den Zustand des Systems durch Lage und Bewegung der Punkte in dem gegebenen Augenblick bestimmen.

Das zweite Glied der Gleichung könnten wir ebenfalls einfacher schreiben, indem wir berücksichtigen, dafs auf Grund einer der bei der Gleichung (131) angestellten völlig analogen Betrachtung

$$\sum_{\mathfrak{b}} [F_{\mathfrak{c},\,\mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}}] = \frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{c}}}. \tag{130d}$$

Wir können nunmehr die Gleichung (135) schreiben:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{c}}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{c}}}\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\mathfrak{c}}}. \tag{135a}$$

Damit haben wir die Form der Bewegungsgleichung für allgemeine Coordinaten gefunden. Sie wird als die Gleichung von LAGRANGE bezeichnet. Es bestehen so viele derartige Gleichungen, als Indices $\mathfrak{c}$, d. h. als unabhängig veränderliche Coordinaten vorhanden sind. Durch sie wird die Lage des Systems in jedem Augenblicke vollständig bestimmt.

Wenn keine Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x_{\mathfrak{a}}$ bestehen, so können wir statt der $p_{\mathfrak{c}}$, die ja beliebige Coordinaten sind, die rechtwinkligen Coordinaten setzen. Dann wird das erste Glied gleich

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\left[\tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{a}} \left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)^2\right] \tag{136}$$

und fällt fort, weil weder $m_{\mathfrak{a}}$ noch $\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}$ von $x_{\mathfrak{a}}$ abhängig sind. Das zweite Glied wird:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)}\right] &= -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)}\left(\tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{a}}\left(\frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right)^2\right)\right] \\ &= -\frac{d}{dt}\left(m_{\mathfrak{a}} \frac{d x_{\mathfrak{a}}}{dt}\right) \\ &= -m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} \end{aligned} \tag{137}$$

und endlich ist das dritte Glied dann gleich $-\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$. Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (135a) ein, so ergiebt sich:

$$0 = m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$$

oder

$$m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}}.$$

Das ist aber dieselbe Form der Bewegungsgleichung, welche wir für rechtwinklige von einander unabhängige Coordinaten aufgestellt hatten. Damit ist nachgewiesen, dafs in der LAGRANGE'schen Form der Bewegungsgleichung die NEWTON'sche Form enthalten ist.

§ 33. Anwendung auf verschwindend kleine Bewegungen in der Nähe stabilen Gleichgewichts.

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, dafs die eintretenden Verschiebungen und Geschwindigkeiten unendlich klein sind.

Die Differentialquotienten $\frac{\partial L}{\partial p_a}$ bestehen dann nach Gleichung (130c) aus Producten zweiten Grades von unendlich kleinen Gröfsen, da die Geschwindigkeiten auch in ihrem Maximum verschwindend klein sind. Sie fallen daher fort im Vergleich zu dem Gliede, in welchem der Differentialquotient $\frac{\partial L}{\partial q_a}$ vorkommt, und welches Gröfsen enthält, die unendlich klein vom ersten Grade sind. Differentiiren wir

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = \sum_b \left\{ F_{a,b} \cdot q_b \right\}$$

nach der Zeit, so müssen wir zunäohst in jedem Gliede der Summe den ersten Factor, das F, differentiiren. Da dieser Differentialquotient aber eine lineare homogene Function der Gröfsen q wird, so werden sich hier wieder Producte bilden, die vom zweiten Grade unendlich klein sind; hingegen sind die weiteren Glieder, bei denen q_b nach der Zeit differentiirt wird, vom ersten Grade unendlich klein. Wir erhalten daher unter der hier gemachten Voraussetzung für Gleichung (135a) nunmehr

$$0 = -\sum_b \left(F_{a,b} \frac{dq_b}{dt} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_a}, \tag{138}$$

wobei nur statt des Index c der Buchstabe a gesetzt ist.

Betrachten wir nun ebenso wie bei der Benutzung rechtwinkliger Coordinaten Φ als Function der p, und gehen von einer festen Anfangslage, nämlich der Lage des stabilen Gleichgewichts, aus, so können wir Φ in eine TAYLOR'sche Reihe entwickeln und erhalten, wenn wir den Werth von Φ in der Gleichgewichtslage

mit Φ_0 und die in Folge der Bewegung eintretende Aenderung der Werthe von p_a mit π_a bezeichnen

$$\Phi = \Phi_0 + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial p_a} \cdot \pi_a + \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_a \partial p_b} \pi_a \pi_b + \dots \quad (139)$$

Nun hatten wir uns schon früher in § 6 davon überzeugt, daſs bei stabilem Gleichgewicht die Glieder, in denen die ersten Potenzen der Verschiebungen vorkommen, gleich Null sein müssen, was ja auch das bekannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aussagt. Das zweite Glied der Gleichung (139) fällt also, wenn wir, was von jetzt an geschehen soll, voraussetzen, daſs das System in seiner ursprünglichen Lage im stabilen Gleichgewicht sein soll, fort. Die zweite Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichts besteht darin, daſs in dem folgenden Gliede, welches die Producte zweiter Ordnung von den Verschiebungen π enthält, die Coefficienten so beschaffen sein müssen, daſs die gesammte Summe immer nothwendig eine positive Function ist. Diese Coefficienten sind als constant zu betrachten, da sie denjenigen Werthen der Differentialquotienten entsprechen, welche für die Gleichgewichtslage gelten.

Wir wollen nun für diese Coefficienten eine vereinfachte Bezeichnungsweise einführen und, indem wir zugleich die höheren Glieder weglassen, schreiben:

$$\Phi = \Phi_0 + \tfrac{1}{2} \sum_a \sum_b [A_{a,b} \cdot \pi_a \cdot \pi_b]. \quad (140)$$

Da nun π der veränderliche Theil der Coordinaten ist, dieser aber hier allein in Betracht kommt, so ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi}$$

und demnach

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_a} = \sum_b [A_{a,b} \cdot \pi_b]. \quad (140a)$$

Indem wir diesen Werth benutzen und ferner berücksichtigen, daſs

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d^2 \pi}{dt^2}$$

ist, erhält Gleichung (138) nunmehr die Form

$$0 = -\sum_b [A_{a,b} \cdot \pi_b] - \sum_b \left[F_{a,b} \cdot \frac{d^2 \pi_b}{dt^2} \right]. \quad (141)$$

Eine solche Gleichung ist für jeden Index a des Systems aufzustellen.

Mit unseren früheren entsprechenden Gleichungen (127 b) stimmt hierin das von der potentiellen Energie herrührende Glied völlig überein; aber das andere Glied war dort einfacher, weil bei den rechtwinkligen Coordinaten in dem Gliede der lebendigen Kraft nur die einfachen Quadrate vorkommen, und an Stelle der $F_{a,\mathfrak{b}}$ dort die Massen der zu bewegenden Punkte stehen. Dort kam in jeder Gleichung nur die Beschleunigung nach einer Coordinate vor, während hier das Gleichungssystem dadurch anders ist, dafs in jeder dieser Gleichungen die Beschleunigung nach jeder Coordinate vorkommt.

Wenn wir berücksichtigen, dafs dieses System von Bewegungsgleichungen linear und homogen nach den Werthen von $\pi_{\mathfrak{b}}$ und ihren Differentialquotienten ist, und dafs die vorkommenden Coefficienten constant sind, so besteht eine unbeschränkte Möglichkeit der Superposition der einzelnen Integrale, die sich für dieses System ergeben.

Wir werden nun auch hier (vergl. § 7) Integrale finden können, indem wir setzen

$$\pi_{\mathfrak{b}} = B_{\mathfrak{b}} \cdot e^{int}. \tag{142}$$

Führt man diese Lösung in die Gleichung (141) ein, so erhalten wir

$$0 = \sum_{\mathfrak{b}} B_{\mathfrak{b}} \cdot \left(A_{a,\mathfrak{b}} - n^2 F_{a,\mathfrak{b}}\right). \tag{143}$$

Dadurch ist ein System von linearen Gleichungen gegeben, aus denen das Verhältnifs der Coefficienten $B_{\mathfrak{b}}$ zu bestimmen ist. Wir haben so viele Gleichungen als veränderliche Coordinaten, und damit auch, als Unbekannte $B_{\mathfrak{b}}$ vorhanden sind; es werden also die Verhältnisse der $B_{\mathfrak{b}}$ zu finden sein, wenn die Determinante dieser Gleichungen gleich Null ist; einer der Werthe $B_{\mathfrak{b}}$ ist aber willkürlich anzunehmen. Indem wir die Determinante dieses Gleichungssystems gleich Null setzen, finden wir die Werthe für n^2, und zwar bekommen wir deren so viele, als wir laufende Indices $\mathfrak{b}$ haben. Die ganze weitere Behandlungsweise wird also dieselbe wie früher (§ 7 u. f.), und wir sehen, dafs die für rechtwinklige Coordinaten durchgeführte Behandlung des Problems sich auf beliebige Coordinaten übertragen läfst.

§ 34. Uebergang zu continuirlich verbreiteten Massen.

Geht man nun von dem bisher betrachteten System discreter Massenpunkte auf ein continuirliches System über, so tritt der Nutzen dieser neuen Umformung der Bewegungsgleichungen be-

sonders hervor. Da wir dann gewissermafsen ein System von unendlich vielen Massenpunkten haben, so ist die Zahl der Coordinaten eine unendliche, wodurch eine gewisse Schwierigkeit entsteht. Wir können zwar auch bei den Systemen mit continuirlichen Massen die Differentialgleichungen aufstellen, dann die einzelnen particulären Integrale solcher Differentialgleichungen finden und, indem wir die Bewegungen, welche diesen einzelnen particulären Integralen entsprechen, superponirt denken, sehr verschiedene Bewegungsformen herstellen; aber wir können nicht sicher die Entwicklung einer gegebenen Anfangsform- und Anfangsgeschwindigkeit des Systems in eine Reihe ausführen, welche aus den einzelnen particulären Integralen zusammengesetzt ist. Bei einem System aus vereinzelten Massenpunkten hatten wir so viel verschiedene Integrale für die Bewegung, als wir veränderliche Coordinaten hatten, und wir konnten in jedem Falle einfache Methoden angeben, wie die Bewegung ausfallen würde, wenn das System von einer beliebigen Anfangslage mit beliebig gegebenen Geschwindigkeiten ausginge. Wir hatten willkürliche Coefficienten für die particulären Integrale zur Verfügung, welche dieses immer ermöglichten, und es liefs sich sogar eine directe Methode angeben, um die Coefficienten für die Integrale zu finden. Aber sobald die Anzahl der Integrale unendlich wird, ist wenigstens nicht immer der Beweis zu geben, dafs die gefundene Reihe auch wirklich die gegebene Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit darstellt. Die Methoden, welche dabei benutzt werden, sind ähnlich wie die, welche wir bei einer endlichen Anzahl von Massenpunkten gebraucht haben. Man kommt im Allgemeinen nicht weiter, als nachzuweisen, dafs eine bestimmte Reihe die richtige ist, falls die Bewegung durch das gegebene System von particulären Integralen dargestellt werden kann, nicht aber dahin, nachzuweisen, dafs eine bestimmte Reihe wirklich den Werth darstellt. Es giebt freilich einzelne Fälle, wo man auch für eine unendliche Anzahl von Massenpunkten diesen Beweis führen kann.