Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1898

Vierter Theil. Zusammenfassende Principien der Dynamik

urn:nbn:at:at-ubi:2-6859

Vierter Theil.

Zusammenfassende Principien der Dynamik.

§ 58. Ueberblick.

Dem Inhalt nach fällt dieser letzte Theil des vorliegenden Bandes unter den Titel des vorangehenden dritten Theiles: Es handelt sich auch hier um die Dynamik eines Massensystems. Bisher ist gezeigt worden, wie man auf der Grundlage der Newton'schen Axiome und unter Annahme bestimmter Elementargesetze über die Natur der wirkenden Kräfte durch mathematische Operationen, nämlich durch Integration der Differentialgleichungen der Bewegung, die aus einem gegebenen Anfangszustand folgenden Bewegungen in einem System materieller Punkte herleiten kann. Die Uebereinstimmung dieser theoretischen Folgerungen mit den Beobachtungsthatsachen lieferte dabei stets den Beweis für die Richtigkeit der aufgestellten Voraussetzungen, sowohl der allgemeinen Axiome wie auch der speciellen Kraftgesetze. Das Princip der Energieerhaltung, welches ebenfalls zur Lösung gewisser Fragen herangezogen werden mufste, liefs sich aus den Newton'schen Gleichungen ableiten — beweisen, aber nur unter Annahme einer besonderen Eigenschaft der wirkenden Kräfte. Sei es nun, dafs diese Eigenschaft bereits implicite in der besonderen Form des Gesetzes der Kraft enthalten ist, wie bei den Centralkräften, sei es, dafs man sie bei allgemeinen Betrachtungen als besondere Bedingung einführt, oder endlich, dafs man direct das Energieprincip als neuen Grundsatz hinzunimmt: Jedenfalls hat man in dem Energieprincip eine selbständige Erfahrungsthatsache, welche zu dem Inhalt der Axiome Newton's hinzutritt. Mit diesem Material von Grundanschauungen ist es möglich, die verschiedensten dynamischen Probleme anzugreifen, indessen ist die Durchführung der Rechnung oft unüberwindlich oder wenigstens sehr umständlich, da schliefslich immer auf alle einzelnen Kraftcomponenten, welche die sämmtlichen Massenpunkte angreifen, zurückgegangen werden mufs.

Im Folgenden sollen zusammenfassende Principien aus den bisher behandelten abgeleitet werden, welche uns eine leichtere Uebersicht über das Verhalten des ganzen Massensystems gestatten, ohne dafs wir dabei immer die Bedingungen jedes einzelnen Massenpunktes besonders zu betrachten genöthigt werden. Wir beginnen diese Betrachtungen mit dem einfachsten Falle, in dem die wirkenden Kräfte das System in solcher Configuration angreifen, dafs keine resultirenden Beschleunigungen zu Stande kommen, dafs also die Kräfte sich aufheben und, falls Ruhe besteht, solche auch bestehen bleibt. Die Lehre von diesem Sonderfall der Kraftwirkungen nennt man Statik — Lehre vom Gleichgewicht. Nachher soll der allgemeine Fall betrachtet werden, dafs die Kräfte beschleunigte Bewegungen in dem System erzeugen. Diesem Theile wird oft als gegensätzliche Bezeichnung der Name Dynamik gegeben, den wir für das Gesammtgebiet der Kraftlehre gewählt haben. Indessen wird es nicht zu Mifsverständnissen führen, wenn wir unserer Bezeichnung treu bleiben und den sonst für das Ganze verwendeten Namen Mechanik auf die praktischen Anwendungen beschränken.

Erster Abschnitt.

Principien der Statik.

§ 59. Bedingungen des Gleichgewichts in einem conservativen Massensystem.

Die inneren Kräfte eines Massensystems halten sich im Gleichgewicht, wenn keiner seiner Punkte eine resultirende Beschleunigung erhält. Wenn daher alle Theile in Ruhe sind, so werden sie durch die inneren Kräfte auch nicht in Bewegung gesetzt. Diese Auffassung schliefst nicht aus, dafs das Massensystem sich in einer gewissen unbeschleunigten Bewegung befinden kann, die sowohl translatorisch wie rotatorisch sein mag. Bei festen Stützen und festen Verbindungen (von denen nachher ausführlich zu sprechen sein wird) können auch gewisse Verschiebungen der relativen Lage einzelner Theile vor sich gehen, ohne dafs dadurch die inneren Kräfte in die Lage kommen, beschleunigend zu wirken. Wegen der Möglichkeit solcher Bewegungen ist diese Definition des Gleichgewichts umfassender als jene, welche das System in absoluter Ruhe fordert. Wir werden nachher bei den einfachen mechanischen Maschinen solche Fälle betrachten, in denen sehr langsame Bewegungen, denen kein merklicher Betrag an kinetischer Energie entspricht, ausgeführt werden können, ohne dafs das System die Gleichgewichtsbedingungen dabei verläfst und ohne dafs im ganzen Energie aufgenommen oder abgegeben wird.

Zunächst wollen wir ein System von lauter frei beweglichen materiellen Punkten $m_\mathfrak{a}$ voraussetzen. Es ist klar, dafs dann Beschleunigungen nur dadurch ausgeschlossen werden können, dafs sämmtliche resultirende Kraftcomponenten $X_\mathfrak{a}$, $Y_\mathfrak{a}$, $Z_\mathfrak{a}$ einzeln gleich Null sein müssen. Wenn nämlich irgend eine dieser Kraftcomponenten nicht dieser Bedingung folgen würde, so müfste der betreffende Punkt in der Richtung dieser Kraft sich in beschleunigte Bewegung setzen. Haben wir es mit einem conservativen System zu thun, d. h. mit einem System, dessen Kräfte conservativ sind, so können wir die potentielle Energie Φ aufstellen. Die Gleichgewichtsbedingung fordert dann, dafs die Differentialquotienten von Φ, gebildet für sämmtliche darin steckende variable Coordinaten $x_\mathfrak{a}$, $y_\mathfrak{a}$, $z_\mathfrak{a}$, einzeln gleich Null werden müssen. Bezeichnen wir, wie schon früher, alle vorhandenen Coordinaten ohne Unterschied ihrer Richtung durch $x_\mathfrak{a}$, wobei also für n Massenpunkte $3n$ Indices $\mathfrak{a}$ existiren, so wird das Gleichgewicht bedingt durch die Erfüllung der folgenden Schaar von Bedingungen:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots\ldots, 3n. \tag{152}$$

Diese Gleichungen sind aber der analytische Ausdruck dafür, dafs die Function Φ für die zutreffenden Werthe der $x_\mathfrak{a}$ ein Grenzwerth wird: ein Minimum oder ein Maximum oder endlich ein sogenannter Sattelwerth. Zunächst ist also die Forderung, dafs die potentielle Energie ein Grenzwerth sei, gleichbedeutend mit der vorhergehenden Gleichgewichtsbedingung, dafs alle Kraftcomponenten einzeln verschwinden sollen, aber es knüpft sich an die neue Form die Möglichkeit, ein wesentlich verschiedenes Verhalten des Massensystems in verschiedenen Gleichgewichts-Lagen oder -Configurationen zu erklären je nach der Natur des Grenzwerthes von Φ. Das Gesetz von der Erhaltung der Energie liefert die Gleichung

$$L + \Phi = E,$$

wo E den unveränderlichen Betrag der Gesammtenergie mifst, während L die kinetische Energie bedeutet. Herrscht für den Fall eines Grenzwerthes von Φ vollkommene Ruhe, so bleibt diese auch gewahrt: L ist und bleibt dann gleich Null. Ertheilt man aber dem System durch eine geringe Erschütterung einen beliebig kleinen

Betrag an lebendiger Kraft, so vermehrt man dadurch die Energie des Systems, diese ist und bleibt dann um den geringen aber unveränderlichen Betrag gröfser als der Grenzwerth von Φ. Die Massenpunkte erhalten dabei kleine Geschwindigkeiten, welche sie aus der Gleichgewichtslage entfernen müssen.

Nehmen wir nun als erste Möglichkeit an, dafs Φ in der Ruhelage ein Minimum ist. Die Function mufs dann bei jeder kleinen Verschiebung — erfolge diese wie sie wolle — zunehmen; da aber E constant bleibt, mufs L dabei um ebensoviel abnehmen. Nun sollte aber L nur einen sehr geringen Betrag besitzen; es wird also Φ kein merkliches Wachsthum zeigen können, ohne dafs die lebendige Kraft erlischt. Negativ kann dieselbe als Summe von Quadraten nicht werden, es mufs also in sehr geringer Abweichung aus der Gleichgewichtslage Ruhe eintreten, welche aber nicht von Dauer sein kann, weil Φ in dieser veränderten Lage nicht mehr Grenzwerth ist. Die auftretenden Kräfte werden vielmehr das System nach diesem Stillstand wieder in Bewegung setzen, es tritt wieder Bewegung und damit lebendige Kraft auf, Φ mufs also sinken, d. h. die Richtung der Bewegung führt das System wieder der Lage entgegen, für welche Φ Minimum ist. Es können also nach einer Erschütterung nur Schwankungen um diese Gleichgewichtslage entstehen. Unterliegt die Bewegung etwa noch kleinen Reibungskräften, wie dies bei irdischen Systemen immer der Fall ist, so wird der kleine von dem Anstofs herrührende Ueberschufs an Energie bald verzehrt und das System kommt in der Gleichgewichtslage wieder zur Ruhe. Diesen Ruhezustand, welcher durch kleine Erschütterungen nicht dauernd gestört wird und sich nach Vernichtung des kleinen Betrages an kinetischer Energie immer wieder herstellt, nennt man stabiles Gleichgewicht.

Ganz anders verhält sich ein Massensystem, dessen Gleichgewicht durch ein Maximum der potentiellen Energie bedingt ist. In einem solchen mufs bei jeder kleinen Bewegung die Function Φ abnehmen; daraus folgt, dafs die kinetische Energie, welche in der Ruhelage nur den minimalen von der Erschütterung herrührenden Betrag besafs, zunehmen mufs, dafs sich also die Massenpunkte in beschleunigter Bewegung aus jener Lage entfernen. Diese Art des Ruhezustandes, welcher durch den geringsten Anstofs gestört wird und der sich auch im Laufe der folgenden Bewegungen niemals wieder herstellt, nennt man labiles Gleichgewicht. Von gleicher Unbeständigkeit ist das Gleichgewicht auch, wenn Φ einen Sattelwerth besitzt. Es giebt dann zwar gewisse Verrückungen der Punkte, bei denen Φ wächst, sich also verhält wie ein Minimum, in anderen Richtungen zeigen sich aber dieselben Erscheinungen wie bei einem Maximum; so lange also in einem solchen Falle die Verrückungen beliebig bleiben, wird das Gleichgewicht ebenfalls labil sein.

Man kann sich den charakteristischen Unterschied beider Gleichgewichtsformen auch klar machen, wenn man statt der vorher gedachten Erschütterung, also statt der Mittheilung einer kleinen lebendigen Kraft in der Ruhelage, annimmt, dafs das System in irgend einer von der Gleichgewichtsstellung sehr wenig abweichenden Lage oder Configuration zunächst durch äufseren Zwang in Ruhe gehalten werde und dann plötzlich sich selbst überlassen werde. Die gesammte Energie besteht alsdann nur in der potentiellen Energie der festgehaltenen Stellung, die kinetische Energie ist ja wegen der erzwungenen Ruhe zu Anfang gleich Null. Die inneren Kräfte, welche sich wegen der Verrückung aus der Gleichgewichtsstellung nicht vollständig aufheben, werden dann die Punkte des frei gewordenen Systems in Bewegung setzen, es wird lebendige Kraft auftreten, welche nach dem Gesetz der Energieerhaltung den Anfangswerth der potentiellen Energie in jedem Falle vermindern mufs. Bei einer nahe einem Minimum von Φ gelegenen Anfangsstellung werden also die Bewegungen der natürlichen Ruhelage zustreben, es wird eine oscillirende Bewegung um diese Stellung eintreten (stabiles Gleichgewicht); in der Nachbarschaft eines Maximums von Φ wird aber die Abnahme von Φ zu einer wachsenden Entfernung des Systems aus der Gleichgewichtsstellung führen, denn eine Annäherung an diese Stellung müfste eine Zunahme von Φ, also eine Abnahme von L bewirken, was nicht möglich ist, da L bereits im Anfangszustand seinen kleinsten Werth Null besitzt.

Es kann endlich auch der Fall vorkommen, dafs bei gewissen Verrückungen die potentielle Energie überhaupt nicht geändert wird, sie besitzt dann zwar keinen Grenzwerth, zeigt aber auch in der Umgebung dieser Lage kein Gefälle; dies ist immer der Fall, wenn Coordinaten vorhanden sind, von denen Φ nicht abhängt. Wenn dann für die übrigen Coordinaten Gleichgewicht besteht, so wird dieses nicht gestört, wenn man Verschiebungen der letzteren Art vornimmt. Man sagt dann, das System befindet sich diesen Verschiebungen gegenüber im indifferenten Gleichgewicht. So kann man z. B. ein freies Massensystem, dessen innere (elastische) Kräfte dasselbe in einer bestimmten Configuration erhalten, als ganzes verschieben oder drehen, ohne dafs dabei Φ verändert wird.

Eine Function vieler variabler Gröſsen, wie die potentielle Energie eines Massensystems, wird im Allgemeinen mehrere Minima besitzen, d. h. ein solches System wird mehrere Lagen oder Configurationen stabilen Gleichgewichts besitzen. Der Grad der Beständigkeit dieser Gleichgewichtszustände wird aber meist ein verschiedener sein, das soll heiſsen, die Grenze, welche die Erschütterungen oder die Verrückungen erreichen dürfen, ohne daſs dabei die Annahmen der vorangehenden Betrachtung ungültig werden, ist verschieden weit. Denken wir uns einen starren homogenen Körper von der Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, welcher von der Schwerkraft angegriffen wird. Sobald dieser mit einer seiner sechs Flächen auf einer horizontalen festen Grundlage ruht, ist er in stabilem Gleichgewicht. Die potentielle Energie der Schwerkraft ist nämlich, wie wir schon in § 18 sahen, für einen einzelnen Massenpunkt m gleich $g.m.z$, wo z die verticale Erhebung des Punktes über irgend einer festen Horizontalebene angiebt. Für einen aus vielen Massenpunkten bestehenden schweren Körper ist dieselbe:

$$\Phi = \sum g.m_{\mathfrak{a}}.z_{\mathfrak{a}} = g.\mathfrak{z}.\sum m_{\mathfrak{a}},$$

wo $\mathfrak{z}$ die Höhe des Schwerpunktes über der Grundebene bezeichnet [vergl. Gleichungen (88), S. 144], als welche wir die feste Unterlage hier ansehen können. Die möglichen Verrückungen des Körpers sind erstens horizontale Verschiebungen auf seiner Unterlage; dabei wird die Höhe $\mathfrak{z}$, mithin auch Φ nicht verändert, das Gleichgewicht ist für diese Verrückungen indifferent. Bei vollständigem Abheben von der Unterlage wächst $\mathfrak{z}$ und Φ, während eine Senkung wegen der festen Unterlage ausgeschlossen ist. Solchen Verrückungen gegenüber ist also das Gleichgewicht stabil. Als letzte Möglichkeit bleibt noch das Kippen des Körpers, wobei eine der vier die Grundebene begrenzenden Kanten als Drehungsaxe dient. Der Schwerpunkt bewegt sich dabei auf einem schräg ansteigenden Kreisbogen, die Höhe $\mathfrak{z}$ wird dadurch vergröſsert, die potentielle Energie nimmt in jedem Falle zu, also ist in der Lage auf einer der sechs Flächen Φ absolutes Minimum, das Gleichgewicht ist stabil. Beim Kippen dauert das Aufsteigen des Schwerpunktes so lange an, bis er vertical über der als Drehungsaxe dienenden Kante liegt. Diese Stellung bildet für die gedachte Art der Verrückung ein Maximum von $\mathfrak{z}$, mithin auch von Φ. Für eine andere Art von Verrückung aber verhält sich Φ in dieser Stellung noch wie ein Minimum; man kann nämlich den auf der Kante ruhenden Körper noch auf eine der beiden Ecken stellen, welche diese Kante begrenzen. Dabei hebt sich die Kante von der Unterlage, der Schwerpunkt wird abermals gehoben und erreicht seine höchste Lage erst, wenn er vertical über dem unterstützten Eckpunkte des Körpers liegt. Bei Unterstützung einer Kante bildet Φ einen Sattelwerth, bei Unterstützung einer Ecke haben wir ein absolutes Maximum, und zwar für alle acht Ecken dasselbe. Allen diesen letzteren Grenzwerthen der potentiellen Energie entspricht labiles Gleichgewicht des Körpers. Die sechs Lagen stabilen Gleichgewichtes sind paarweise gleich wegen der regelmäſsigen Gestalt des Parallelepipeds. Dagegen ist im Allgemeinen die Höhe des Schwerpunkts eine verschiedene, wenn der Körper nach einander auf die drei verschiedenen Flächen gelegt wird. Die niedrigste Lage, also auch das tiefste Minimum, tritt ein, wenn die gröſste Fläche unterstützt ist; diese Stellung erlaubt auch die gröſste Kippung, ohne daſs Φ einen Sattelwerth oder ein Maximum erreicht, diese Stellung besitzt daher die gröſste Stabilität. Das flachste Minimum tritt ein, wenn der Körper auf der kleinsten Fläche ruht, während zu der Lage auf der mittleren Fläche auch ein Minimum von mittlerer Tiefe gehört. Bei Unterstützung der kleinsten Fläche genügt auch die verhältniſsmäſsig kleinste Kippung, um den Körper aus dem Gebiete dieses flachen Minimums herauszubringen, so daſs er dann, sich selbst überlassen, umfällt und einer stabileren Lage zueilt. Dieses Gleichgewicht kann bei sehr kleiner Basis einem labilen Zustande sehr nahe kommen, indem schon eine sehr geringe Kippung hinreicht, um den Schwerpunkt in die kritische Lage über der Kante zu bringen. Das Parallelepiped besitzt in diesem Falle die Gestalt eines langen dünnen Stabes. Ist das untere Ende desselben überdies noch zugespitzt, so wird das Gleichgewicht in verticaler Stellung völlig labil. Man kann den Stab allerdings in dieser Stellung erhalten, wenn man sein oberes Ende nur leise mit dem Finger berührt; man spürt dabei auch keine von dem Stabe ausgehenden seitlichen Kräfte, welche das Streben desselben verriethen, sich nach irgend einer Richtung hin in Bewegung zu setzen. Die leise Berührung verhindert vielmehr nur die störende Wirkung kleinster Erschütterungen, durch die der Stab umgeworfen wird, so bald man ihn freiläſst. Durch Geschicklichkeit und Uebung kann man es auch dahin bringen, einen Stab einige Zeit lang auf der Hand als Unterlage zu „balanciren“. Man muſs dabei fortwährend gespannt auf die Richtungen achten, nach denen das obere Ende des Stabes sich zu neigen beginnt, und dann sofort die Hand in derselben Richtung verschieben, damit die untere Spitze des Stabes, welche an der Hand haftet, wieder vertical unter den bereits etwas verschobenen Schwerpunkt zu liegen kommt. Ein solcher Zustand des Stabes ist aber kein Gleichgewicht, vielmehr das fortwährende Spiel zweier kleiner Kräfte, die sich zu vernichten streben, von denen aber die von unserer Hand ausgeübte nothwendig etwas später wirkt, da die Richtung und Stärke der die Ruhe störenden Einflüsse erst an ihren Wirkungen auf den Stab mit den Augen beobachtet werden müssen.

Eine andere Gestalt des auf horizontaler Unterlage liegenden schweren Körpers, an welcher man die Unterschiede der Gleichgewichtstypen leicht anschaulich machen kann, ist das dreiaxige Ellipsoid. Grenzwerthe der Höhe des im Mittelpunkt liegenden Schwerpunktes, mithin auch der potentiellen Energie, treten ein, sobald das Ellipsoid mit einem Endpunkt einer der drei Hauptaxen aufliegt. Ist dies die kürzeste Axe, so hat der Schwerpunkt die tiefste Lage, Φ ist Minimum und das Gleichgewicht ist stabil. Nach einem geringen Anstofs beobachtet man Schwankungen um die Ruhelage, welche mit der Zeit durch Reibung vernichtet werden. Steht die mittlere Axe vertical, so besitzt Φ einen Sattelwerth. Wälzt man nämlich jetzt in der Weise, dafs die kürzeste Axe als Drehungsaxe dient, so wird der Schwerpunkt gehoben, Φ scheint Minimum, wälzt man aber um die gröfste Axe, so sinkt der Schwerpunkt, Φ scheint Maximum. Wenn endlich der Endpunkt der gröfsten Axe auf der Unterlage steht, so hat der Schwerpunkt seine höchste Lage, Φ ist Maximum. Beide Lagen zeigen labiles Gleichgewicht.

Die Fassung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung eines conservativen Systems in der vorher entwickelten Form, dafs sie gegeben ist durch einen Grenzwerth der potentiellen Energie, hat aufser der leichten Unterscheidung stabiler und labiler Zustände noch den grofsen Vortheil, dafs sie unabhängig von Wahl der Coordinaten erscheint. Denn Φ ist, abgesehen von der beliebigen additiven Constante, vollkommen bestimmt durch die Lage oder Configuration des Massensystems und weist bei bestimmten kleinen Verrückungen immer dieselben Variationen auf, gleichgültig, wie man die Abmessungen gewählt hat, welche die Lage der Punkte bestimmen. Während nun bei einem durch die mathematische Betrachtung nöthig erscheinenden Wechsel des Coordinatensystems oft umständliche Rechnungen nothwendig werden, um die alten Coordinaten und deren Functionen und auch die vorkommenden Differentialquotienten derselben zu transformiren, so bleibt die Forderung des Minimums der Function Φ unberührt durch die Wahl, die man für das Coordinatensystem treffen möge. Sind also $p_\mathfrak{a}$ die neuen Abmessungen irgend welcher Art, und hat man Φ als Function dieser Variabelen dargestellt, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts direct gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} = 0, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, 3n. \tag{152a}$$

Dieser Umstand ist für die Einfachheit der Betrachtung in vielen Fällen sehr wesentlich.

§ 60. Princip der virtuellen Verschiebungen.

Man kann die Schaar der Bedingungsgleichungen (152) in eine einzige Gleichung zusammenfassen, indem man jede derselben mit einem unserer Willkür überlassenen Factor erweitert, und dann die ganze Schaar addirt. Die Reihe der willkürlichen Coefficienten wollen wir im Hinblick auf eine später für dieselben einzusetzende besondere Bedeutung durch das Zeichen $\delta x_\mathfrak{a}$ ausdrücken. Man kommt so zu der einen Bedingung

$$\sum_\mathfrak{a} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} \right) . \, \delta x_\mathfrak{a} = 0. \tag{153}$$

Die Hinzufügung der unbestimmten Coefficienten ist bei diesem Schritt nothwendig. Wenn man einfach die Summe sämmtlicher Differentialquotienten von Φ gebildet hätte, so würde man zwar auch von dieser aussagen müssen, daſs sie beim Gleichgewicht eines conservativen Systems gleich Null ist, diese eine Aussage würde aber nicht die Schaar von Bedingungen, aus denen sie entstanden ist, ersetzen, denn das Verschwinden der Summe könnte ebensowohl dadurch zu Stande kommen, daſs die einzelnen Glieder, theils positiv, theils negativ, sich gegenseitig vernichten. Bei der Gleichung (153) kann man aber diese Erklärung nicht zulassen, denn wir können den willkürlichen $\delta x_\mathfrak{a}$ immer die gleichen Vorzeichen geben, welche die zugehörigen Differentialquotienten von Φ besitzen. Dadurch würden wir erreichen, daſs jeder einzelne Summand aus zwei gleichstimmigen Factoren zusammengesetzt, also nothwendig positiv ist. Die vorstehende Gleichung würde dann fordern, daſs die Summe von lauter positiven Gliedern gleich Null sein soll. Das ist aber nicht möglich, mithin stellt sich die Annahme, daſs die einzelnen Differentialquotienten von Φ nur durch ihr verschiedenes Vorzeichen die Summe zum Verschwinden bringen, als unzulässig heraus. Es muſs vielmehr jeder Summand einzeln verschwinden, d. h. es müssen die sämmtlichen Bedingungen (152) einzeln erfüllt sein.

Wir wollen nun den Factoren $\delta x_\mathfrak{a}$ die besondere Bedeutung geben, dafs sie die Componenten von sehr kleinen Verschiebungen sein sollen, welchen die Massenpunkte des Systems unterliegen. Im Gleichgewichtszustand werden solche Verschiebungen durch die wirkenden Kräfte nicht erzeugt, sie sind also unwirkliche, nur vorgestellte oder nach dem Sprachgebrauche der älteren Physiker „virtuelle Verschiebungen". Man findet dafür auch die Bezeichnung „virtuelle Geschwindigkeiten", welche aber den Sinn nicht trifft, da von einer Zeitgröfse, in welcher diese Verschiebungen erfolgen, gar keine Rede sein kann. Die $\delta x_\mathfrak{a}$ sind nur gedachte Variationen der Coordinaten des Systems und die linke Seite der Gleichung (153) ist die dazu gehörige Variation von Φ, also wegen der vollkommenen Freiheit, die wir annehmen, jede Variation von Φ. Bezeichnen wir diese allgemein durch $\delta \Phi$, so erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung:

$$\delta \Phi = 0, \tag{153a}$$

welche wiederum nur ein anderer mathematischer Ausdruck dafür ist, dafs Φ ein Grenzwerth sein soll.

Man kann dieselbe Ueberführung der ganzen Schaar von $3n$ Gleichungen in eine einzige Gleichung mit $3n$ unbestimmten Coefficienten auch vornehmen, ohne dabei auf den Begriff der potentiellen Energie einzugehen. Die Aussage, dafs sämmtliche Kraftcomponenten verschwinden, also die Gleichungsschaar

$$X_\mathfrak{a} = 0, \qquad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots\ldots, 3n$$

geht über in

$$\sum X_\mathfrak{a} \cdot \delta x_\mathfrak{a} = 0, \tag{153b}$$

welche ebenfalls die gesammte vorstehende Schaar von Bedingungen ersetzt. Die einzelnen Glieder der gleich Null gesetzten Summe sind nun ihrem Sinne nach Arbeitsgröfsen, welche die Kraftcomponenten $X_\mathfrak{a}$ beim Eintreten der Verschiebungen $\delta x_\mathfrak{a}$ leisten. Solche Arbeiten werden aber im Gleichgewichtszustande von den Kräften nicht geleistet, ebenso wenig, wie sie die gedachten Verschiebungen erzeugen, es sind dies also „virtuelle Arbeiten" oder im Sprachgebrauche der Begründer dieser Lehren „virtuelle Momente". Die Gleichgewichtsbedingung eines Massensystems läfst sich also nach dieser letzten Formulirung in dem Satze zusammenfassen:

Ein Massensystem befindet sich im Gleichgewicht, wenn für alle virtuellen Verschiebungen desselben die Summe der virtuellen Momente gleich Null ist. Diesen Satz nennt man das Princip der virtuellen Verschiebungen.

Das Verschwinden der Momentsumme kommt dadurch zu Stande, dafs jede Kraftcomponente $X_{\mathfrak{a}}$ einzeln gleich Null ist. Diese $X_{\mathfrak{a}}$ sind nun die nach den drei Axenrichtungen genommenen Componenten der Resultante aller den Punkt $m_{\mathfrak{a}}$ angreifenden Kräfte. Nehmen wir an, dafs die einzelnen Kräfte durch die Anwesenheit der übrigen Massenpunkte $m_{\mathfrak{b}}$ verursacht werden, dafs also zu setzen ist:

$$X_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}}' X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

so brauchen die einzelnen $X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ nicht gleich Null zu sein, diese Summe verschwindet vielmehr durch gegenseitige Vernichtung ihrer Theile. Die Summe der virtuellen Momente erhält nach Einführung der Elementarkräfte die Gestalt:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}}' (X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \delta x_{\mathfrak{a}}) = 0 \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots., 3n \\ \mathfrak{b} \text{ nicht } = \mathfrak{a}. \end{array}$$

Die einzelnen Glieder dieser im Gleichgewichtszustand verschwindenden Doppelsumme brauchen nicht einzeln gleich Null zu sein. Wenn nun die virtuellen Verschiebungen wirklich ausgeführt würden, so würden sich dabei die Kräfte $X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ verändern, ja sie könnten sich bei sehr kleinen Verschiebungen schon sehr stark und in unbekannter Weise verändern, so dafs die Berechnung der Arbeitsgröfsen, welche die Kräfte bei diesen Verschiebungen leisten, sehr erschwert oder ganz vereitelt wird. Für den Gleichgewichtszustand ist es nun aber offenbar ganz gleichgültig, wie die Kräfte sich verändern würden, wenn eine Bewegung einträte; von Wichtigkeit sind für die Beurtheilung nur die Werthe, welche in der Ruhelage gelten. Wir können also in obiger Doppelsumme die $X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ als constante Gröfsen ansehen, welche während der virtuellen Verschiebungen ihre Werthe bewahren. Dadurch unterscheiden sich begrifflich die virtuellen Momente von den bei realen Verschiebungen geleisteten Arbeiten.

Die Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem kann man hier beseitigen, wenn man die je drei zu demselben Punktpaar gehörigen Kraftcomponenten zur Resultante vereinigt und ebenso die drei auf einander senkrechten Verschiebungen jedes Punktes zur geometrischen Summe zusammenfasst. Unterscheiden wir dabei wieder die Zeichen X, Y, Z und x, y, z, so bedeutet jetzt $\mathfrak{a}$ die einfache Ordnungszahl des Massenpunktes $m_{\mathfrak{a}}$, man hat also n Ordnungszahlen. Die Resultante von $X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sei $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, die Resultante der Verschiebungscomponenten $\delta x_{\mathfrak{a}}$, $\delta y_{\mathfrak{a}}$, $\delta z_{\mathfrak{a}}$ sei

$\delta s_\mathfrak{a}$, dann ist die Summe eines solchen Tripels von virtuellen Momenten, ähnlich wie früher (Gleichungen 126a und b, Seite 212),

$$X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \delta x_\mathfrak{a} + Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \delta y_\mathfrak{a} + Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \delta z_\mathfrak{a} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cos(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, s_\mathfrak{a}) \,.\, \delta s_\mathfrak{a}$$

und die Gleichgewichtsbedingung fordert:

$$\sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{b}' K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, \cos(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, s_\mathfrak{a}) \,.\, \delta s_\mathfrak{a} = 0, \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{b} \text{ nicht } = \mathfrak{a} \end{array} \tag{153c}$$

Diese Form ist ebenfalls unabhängig von der Wahl der Coordinaten.

Es ist endlich bei der Herleitung gar nicht wesentlich geworden, mithin auch nicht nothwendig anzunehmen, dafs die $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sämmtlich innere Kräfte des Massensystems seien müssen, dieselben können zum Theil von aufsen auf die Massenpunkte des Systems einwirken. Dann bedeuten freilich die betreffenden Indices $\mathfrak{b}$ nicht Ordnungszahlen gewisser von $m_\mathfrak{a}$ verschiedener Punkte des Systems, sondern sie bedeuten äufsere Herkunft der Kraft.

Es soll als Erläuterung hierzu die Form des Princips der virtuellen Verschiebungen aufgestellt werden, wie sie gilt für ein Massensystem, dessen innere Kräfte eine potentielle Energie besitzen, und auf dessen Punkte noch äufsere Kräfte beliebiger Art wirken. Die $3n$ Coordinaten der n Massenpunkte seien wieder ohne Unterschied ihrer Richtung durch $x_\mathfrak{a}$ bezeichnet, die potentielle Energie sei Φ, die äufseren Kräfte seien bereits so zusammengefafst, dafs man die jeden einzelnen Punkt angreifende äufsere Resultante $K'_\mathfrak{a}$ kennt. Die Componenten dieser Kraft in Richtung der Coordinataxen seien bezeichnet durch $X'_\mathfrak{a}$. Die ursprüngliche Gleichgewichtsbedingung ist dann gegeben durch die Schaar von Gleichungen

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} + X'_\mathfrak{a} = 0 \text{ für } \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, 3n \tag{154}$$

oder durch

$$\sum_\mathfrak{a} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} + X'_\mathfrak{a}\right) \,.\, \delta x_\mathfrak{a} = 0. \tag{154a}$$

Für die $X'_\mathfrak{a}$ gilt bei Vornahme der virtuellen Verschiebungen wieder die Bemerkung, dafs es für das Gleichgewicht ohne Einflufs ist, wie die äufseren Kräfte sich etwa verändern würden, wenn die Verschiebungen thatsächliche wären, dafs mithin die $X'_\mathfrak{a}$ nicht als Coordinatenfunctionen, sondern einfach als Constanten angesehen werden dürfen, die an den Variationen nicht theilnehmen. Man kann dann die Gleichgewichtsbedingung der oben für ein freies conservatives System gefundenen Form $\delta \Phi = 0$ entsprechend gestalten, wenn man zu Φ hinzufügt die Summe aller Producte von der Form $-X'_\alpha . x_\alpha$, und verlangt, dafs

$$(\Phi - \sum_\alpha X'_\alpha x_\alpha)$$

ein Minimum werden solle, d. h. dafs

$$\delta(-\Phi + \sum_\alpha X'_\alpha x_\alpha) = 0 \tag{154b}$$

sein solle. Führt man diese Variation in allgemeinster Weise aus, indem man alle x_α variirt, so findet man

$$\sum_\alpha - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \sum_\alpha X'_\alpha \delta x_\alpha = 0,$$

das ist die vorher aufgestellte Form der Gleichgewichtsbedingungen. Diese Form genügt in allen Fällen, eine vorliegende Stellung und Configuration darauf hin zu prüfen, ob sie ein Gleichgewichtszustand ist oder nicht; umgekehrt ist aber diese Form in manchen Fällen nicht ausreichend. Man kann zwar die innere Configuration und Orientirung des Massensystems daraus ableiten, nicht aber die absolute Lage im Raume, denn da wir die X'_α als unveränderlich betrachtet haben, wird eine Parallelverschiebung des ganzen Systems nichts an dieser Bedingungsgleichung ändern, das Gleichgewicht ist dagegen indifferent. Wenn aber thatsächlich die äufseren Kräfte vom Ort abhängen, so wird eine besondere Betrachtung nöthig sein, in welcher Stellung die angenommenen X'_α zutreffen, ja man wird im Allgemeinen deren zutreffende Werthe erst finden können, nachdem man die Gleichgewichtsposition gefunden hat. Völlig erschöpfend ist die Bedingung nur in dem Falle, dafs die äufseren Kräfte in Wahrheit unveränderlich in Gröfse und Richtung sind, wenn man Verschiebungen vornimmt, wie dies z. B. bei der Schwerkraft für die meisten Untersuchungen mit ausreichender Genauigkeit zutrifft.

§ 61. Beschränkte Bewegungsfreiheit.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelten Formen der Gleichgewichtsbedingungen, Gleichungen (153), (153b und c) und (154a), fallen bei der Betrachtung frei beweglicher Massensysteme immer wieder auseinander in die ursprüngliche Forderung, dafs jede der $3n$ Kraftcomponenten einzeln verschwinden mufs; die durch Einführung der unbestimmten Coefficienten δx_α ermöglichte Zusammenfassung führt deshalb schliefslich doch zu derselben Behandlung des Gleichgewichtsproblems, die man auch unmittelbar auf Grundlage der Bedingungen $X_\alpha = 0$ durchführen kann. Die daraus hergeleiteten Sätze vom Minimum der potentiellen Energie oder vom Verschwinden der Summe der virtuellen Momente entfalten ihren wesentlichen Nutzen und ihre Ueberlegenheit erst, wenn noch Bedingungen vorgeschrieben sind, welche die nach allen Richtungen freie und unabhängige Verschiebbarkeit der Massenpunkte beschränken, wenn z. B. der Abstand gewisser Massen von einander oder von festen Punkten unveränderlich sein soll, oder wenn Massenpunkte gezwungen sind, bei ihren Bewegungen auf vorgeschriebenen Flächen oder Curven zu bleiben, an denen sie übrigens noch frei gleiten können.

Derartige Beschränkungen kann man in der praktischen Mechanik durch Verwendung sogenannter starrer Verbindungen wie Schnüre, Ketten, Stangen, Schienen, Lager u. s. w. herstellen. Wir haben derartige Einrichtungen im Verlauf früherer Betrachtungen bereits angenommen, so beim mathematischen Pendel und bei der Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine festgelegte Axe. Es existiren thatsächlich viele mechanische Einrichtungen, durch die man praktisch mit grofser Annäherung gewisse geometrische Gröfsen, welche die Lage des Systems mitbestimmen, unveränderlich machen kann. Doch widerspricht die Vorstellung, dafs gewisse das System angreifende Kräfte völlig unwirksam sein sollen und deshalb unberücksichtigt bleiben können, unseren Grundanschauungen der Dynamik, nach denen eine Kraft nur aufgehoben werden kann durch eine ihr entgegengesetzt gleiche. Diese Gegenkraft mufs aber eine Ursache haben, und der Widerspruch wird nicht dadurch gehoben, dafs man kurz sagt, sie rühre von der starren Verbindung her, denn eine starre Verbindung mufs man sich als unveränderlich vorstellen. Dieselbe bleibt auch bestehen, wenn die von aufsen angreifende Kraft entfernt oder verändert wird, und man wäre zu der Vorstellung genöthigt, dafs von dieser starren Verbindung je nach Bedarf beliebige Gegenkräfte ausgehen, ohne dafs irgend eine andere Veränderung damit verbunden ist. Dies widerstrebt unserer Grundanschauung von der objectiven Gesetzmäfsigkeit der Kraftwirkungen. Zur Erklärung der Gegenkräfte, welche bei sogenannten starren Bindungen die angreifenden Kräfte aufheben, müssen daher Veränderungen im Zustand der Verbindungsstücke nothwendig herangezogen werden, Deformationen d. h. Abweichungen von dem Verhalten der idealen starren Körper. Es läfst sich auch durch genügend feine Beobachtungsmittel stets nachweisen, und wurde in diesem Buche bei früheren Gelegenheiten stets betont, dafs es absolut starre Bindungen nicht giebt, sondern nur solche, die bereits bei sehr geringen Deformationen, die gegenüber den sonst zu betrachtenden Abmessungen des Massensystems und seiner freien Verschiebungen völlig verschwinden, Kräfte erzeugen, welche jeden erforderlichen Betrag erreichen. Alle Probleme, in denen solche starre Bindungen vorgeschrieben sind, bilden daher nur ideale Fälle, die sich allerdings den thatsächlichen Verhältnissen stark nähern können, ohne dass sie indess der entsprechenden Wirklichkeit gleichkommen.

Wir wollen daher vor allem eine mit unseren dynamischen Principien verträgliche Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen bei Anwesenheit sogenannter starrer Verbindungen suchen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke ein Massensystem auf dessen Punkte conservative Kräfte wirken, theils innere, welche dem Reactionsprincip folgen, theils auch äussere. Diese alle werden für jede Configuration und Lage des Systems einen Ausdruck für die potentielle Energie Φ ergeben, welche im Allgemeinen eine differenzirbare Function sämmtlicher Coordinaten $x_1, x_2 \ldots, x_\alpha \ldots, x_{3n}$ ist, aus der die Kraftcomponenten als die negativen Differentialquotienten gefunden werden. Aufserdem nehmen wir an, dafs noch eine und zunächst nur eine vorgeschriebene Beziehung zwischen den Coordinaten durch sogenannt starre Verbindungen aufrecht erhalten werde. Diese sei gegeben durch die Gleichung:

$$G(x_1, x_2 \ldots, x_\alpha \ldots, x_{3n}) = 0. \tag{155}$$

Wir nehmen der Allgemeinheit wegen an, dafs G eine Function sämmtlicher Coordinaten sei, es können aber auch nur einige Abmessungen durch diese Gleichung in Verbindung gebracht werden, während die übrigen nicht davon berührt werden. Rein geometrisch betrachtet, sagt die Gleichung $G = 0$ aus, dafs die darin vorkommenden Coordinaten nicht mehr unabhängig von einander veränderlich sind, dafs vielmehr, wenn man virtuelle Verschiebungen anwendet, eine derselben nicht mehr willkürlich ist, sondern durch die übrigen bestimmt wird. Bestehen mehrere solche Bedingungsgleichungen, so werden auch mehrere Verschiebungen unfrei. Dadurch wird aber dem Princip der virtuellen Verschiebungen die Grundlage entzogen, auf welcher wir dasselbe errichtet haben, nämlich die freie Verfügbarkeit über sämmtliche δx_α. Man kann allerdings auch jetzt noch erkennen, dass in gewissen Configurationen die Summe der virtuellen Momente verschwindet für die mit den Bedingungen verträglichen beschränkten Verschiebungen, dafs dies indessen eine hinreichende Gewähr für das Gleichgewicht ist, folgt nicht ohne Weiteres daraus, denn man kann gar nichts aussagen darüber, was eintreten würde bei Verschiebungen, welche jenen Bedingungsgleichungen zuwiderlaufen.

Im physikalischen Sinne bedeutet nun die Bedingung $G = 0$, nicht, dafs gewisse Verschiebungen unmöglich sind, denn es giebt keine absolut starren Bindungen; sie bedeutet vielmehr nur, dafs bereits bei sehr kleinen, jene Gleichung störenden Verschiebungen bedeutende Kräfte auftreten, welche die Punkte zurückziehen in Lagen, wo diese Gleichung wieder zutrifft. Diese Kräfte sind nicht inbegriffen unter jenen, für welche die potentielle Energie Φ aufgestellt wurde. Es ist nun statthaft, auch diese Kräfte als conservativ anzusehen und ihnen eine potentielle Energie zuzuschreiben, die wir Ψ nennen wollen. Diese tritt dann als Summand neben Φ in der Beurtheilung der Gleichgewichtslage auf. Wir wollen jetzt die potentielle Energie Ψ gesondert betrachten. Sie ist als differenzirbare Coordinatenfunction anzusehen. Die Kraftcomponenten, welche von den Bindungen ausgehen, werden durch $-\partial \Psi / \partial x_\mathfrak{a}$ dargestellt, sie treten nur auf, wenn G von Null verschieden ist, nicht aber, wenn $G = 0$ ist. Man mufs deshalb annehmen, dafs Ψ nur in der Weise von den Coordinaten abhängt, dafs es eine differenzirbare Function der Coordinatenfunction G ist mit der Besonderheit, dafs sie für $G = 0$ ein Minimum bildet, dagegen bereits für geringe positiv oder negativ von Null abweichende Beträge des G ein sehr steiles Wachsthum besitzt. Diese Annahme läfst die Form von Ψ noch sehr unbestimmt; bereits für die Function G kann man ja, um eine bestimmte Art der Gebundenheit auszudrücken, mannigfaltige Ausdrücke aufstellen. (Soll beispielsweise der Punkt $m_\mathfrak{a}$ gezwungen sein auf einer mit dem Radius a um den Anfangspunkt gelegten Kugel zu bleiben, so ist dies eine ganz bestimmte Gebundenheit, welche ihren einfachsten mathematischen Ausdruck findet in der Gleichung

$$G = x_\mathfrak{a}^2 + y_\mathfrak{a}^2 + z_\mathfrak{a}^2 - a^2 = 0.$$

Ebenso gut kann man statt dessen auch fordern

$$G = \sqrt{x_\mathfrak{a}^2 + y_\mathfrak{a}^2 + z_\mathfrak{a}^2} - a = 0$$

oder

$$G = \frac{x_\mathfrak{a}^2 + y_\mathfrak{a}^2}{a^2 z_\mathfrak{a}^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{z_\mathfrak{a}^2} = 0$$

oder noch andere Formen.)

Es ist nur nöthig anzunehmen, dafs G in der Nähe des Werthes 0 einen regulären Verlauf hat; dafs G selbst an dieser Stelle einen Grenzwerth bilde, ist durchaus nicht zu fordern, wir werden daher endliche Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung voraussetzen.

Der Minimalwerth, welchen Ψ bei Erfüllung der Bedingungsgleichung zeigt, ist wegen des jeder potentiellen Energie anhaftenden unbestimmten aber constanten Addendus willkürlich zu wählen. Wir setzen

$$\Psi_{G=0} = 0, \tag{156}$$

messen also nur die Erhebungen von Ψ über den Minimalwerth. Die Bedingung des Minimums fordert ferner

$$\left(\frac{d\,\Psi}{d\,G}\right)_{G=0} = 0. \tag{156a}$$

Das sehr steile Wachsthum von Ψ bei solchen Verschiebungen, welche der Gleichung $G = 0$ widersprechen, erklärt sich am einfachsten durch die bedeutende Gröſse des zweiten Differentialquotienten

$$\left(\frac{d^2\,\Psi}{d\,G^2}\right)_{G=0} = C. \tag{156b}$$

Entwickelt man nach diesen Angaben die Function Ψ in eine Potenzreihe von G, so beginnt dieselbe erst mit dem quadratischen Gliede, höhere Potenzen in der Nähe von $G = 0$ zu berücksichtigen, ist jedenfalls unnöthig, man erhält also:

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\,C\,.\,G^2.$$

Nun wollen wir aber Ψ als Function der in G steckenden Coordinaten ansehen. Wir gehen aus von einer Werthgruppe $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots, \bar{x}_\mathfrak{p} \ldots, \bar{x}_{3n})$, welche $G = 0$ macht und entwickeln Ψ nach Potenzen der Abweichungen von dieser Configuration. Diese Abweichungen seien durch $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_\mathfrak{p} \ldots, \xi_{3n}$ bezeichnet. Es ist dann:

$$\Psi = \Psi_{G=0} + \sum_\mathfrak{p} \left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}}\right)_{G=0} \xi_\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{p} \sum_\mathfrak{q} \left(\frac{\partial^2\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}\,\partial\,x_\mathfrak{q}}\right)_{G=0} \xi_\mathfrak{p}\,\xi_\mathfrak{q} + \cdots \tag{157}$$

Allgemein gilt dabei

$$\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}} = \frac{d\,\Psi}{d\,G} \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{p}}$$

und

$$\frac{\partial^2\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}\,\partial\,x_\mathfrak{q}} = \frac{\partial}{\partial\,x_\mathfrak{q}}\left(\frac{d\,\Psi}{d\,G} \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{p}}\right) = \frac{d^2\,\Psi}{d\,G^2} \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{p}} \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{q}} + \frac{d\,\Psi}{d\,G} \cdot \frac{\partial^2\,G}{\partial\,x_\mathfrak{p}\,\partial\,x_\mathfrak{q}}.$$

In der Reihenentwickelung sind nur diejenigen Werthe dieser Differentialquotienten einzusetzen, welche für $G = 0$ gelten, dann erhalten wir aber wegen der Gleichungen (156a und b)

$$\left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}}\right)_{G=0} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2\,\Psi}{\partial\,x_\mathfrak{p}\,\partial\,x_\mathfrak{q}}\right)_{G=0} = C \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{p}} \cdot \frac{\partial\,G}{\partial\,x_\mathfrak{q}}$$

folglich

$$\Psi = \frac{C}{2} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{p}} \xi_{\mathfrak{q}}. \tag{157a}$$

Die gesammte potentielle Energie setzt sich aus Φ und Ψ zusammen; die Gleichgewichtsbedingung fordert, dafs für jedes $\mathfrak{a}$

$$\frac{\partial (\Phi + \Psi)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0$$

sei, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \frac{C}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{p}} \xi_{\mathfrak{q}} = 0. \tag{158}$$

Die Differentiation der vollständigen Doppelsumme liefert:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{q}}} \xi_{\mathfrak{p}} \cdot \xi_{\mathfrak{q}} \\ = {} & \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \cdot 2 \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \xi_{\mathfrak{p}} \\ + {} & \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}} \left(\frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x_{\mathfrak{q}} . \partial x_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_{\mathfrak{p}} . \partial x_{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{q}}} \right) \xi_{\mathfrak{p}} \cdot \xi_{\mathfrak{q}}. \end{aligned}\right\} \tag{158a}$$

Da nun die durch $\partial \Phi / \partial x_{\mathfrak{a}}$ dargestellten Kräfte in jeder vorkommenden Configuration endliche Werthe haben, dagegen C über alle Grenzen wachsen soll, so ist die Gleichung (158) nur erfüllbar, wenn der mit C multiplicirte Differentialquotient der Doppelsumme verschwindend klein wird, und sich für den Grenzfall der Null nähert. Dieses Verschwinden könnte erklärt werden dadurch, dafs alle ersten Differentialquotienten von G nach den Coordinaten gleich Null werden, das würde aber aussagen, dafs G von den Verschiebungen der Coordinaten nicht beeinflufst wird, dies können wir nach unseren Voraussetzungen nicht annehmen, da doch G Function der Coordinaten sein sollte. Einige Differentialquotienten können allerdings gleich Null sein, d. h. die Coordinaten fehlen in der Bedingungsgleichung. Für diese behalten wir dann auch eine freie Verschiebbarkeit. Für alle Coordinaten, die in der Function G vorkommen, müssen wir dagegen, um die Gleichung (158) erfüllen zu können, annehmen, dafs die Verschiebungen ξ selbst unmerklich bleiben und im Grenzfall in Null übergehen. Unter dieser Bedingung wird aber in Gleichung (158a) die Doppelsumme, welche die Producte je zweier ξ als Factoren der einzelnen Glieder enthält, verschwinden gegen die einfache Summe, welche wir dann allein beibehalten dürfen. Die Gleichgewichtsbedingung wird dann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + C \cdot \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\partial G}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \xi_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ für jedes einzelne } \mathfrak{a}. \tag{158b}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden $\xi_\mathfrak{p}$ kann man eliminiren. Denkt man nämlich jede Coordinate einzeln aus der Lage $G = 0$ verschoben, während alle übrigen ungeändert bleiben, so erhält man eine Reihe von Specialwerthen der potentiellen Energie Ψ, die wir mit $\Psi_\mathfrak{p}$ bezeichnen, und die nach Gleichung (157a) dargestellt werden durch:

$$\Psi_\mathfrak{p} = \frac{C}{2} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x_\mathfrak{p}} \cdot \xi_\mathfrak{p} \right)^2. \tag{159}$$

Jene Doppelsumme reducirt sich dabei auf ein einziges Diagonalglied, da nur ein einziges $\xi_\mathfrak{p}$ von Null verschieden ist. Dieses kann man dann durch $\Psi_\mathfrak{p}$ ausdrücken

$$\xi_\mathfrak{p} = \frac{1}{\frac{\partial G}{\partial x_\mathfrak{p}}} \cdot \sqrt{\frac{2\,\Psi_\mathfrak{p}}{C}}. \tag{159a}$$

Setzt man diese Form statt $\xi_\mathfrak{p}$ in unsere Gleichgewichtsbedingung ein, so findet man:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} + \frac{\partial G}{\partial x_\mathfrak{a}} \cdot \left\{ \sqrt{C} \cdot \sum_\mathfrak{p} \sqrt{2\,\Psi_\mathfrak{p}} \right\} = 0 \text{ für jedes } \mathfrak{a}. \tag{159b}$$

Die geschweifte Klammer in dieser Gleichung mufs nothwendig einen endlichen Werth besitzen, dessen Betrag sich auch bei genauer Kenntnifs der Function Ψ angeben lassen würde. Wenn wir aber zur Bedingung der absoluten Starrheit übergehen, können wir nur sagen, dafs $\sqrt{C}$ unendlich und $\sum_\mathfrak{p} \sqrt{2\,\Psi_\mathfrak{p}}$ verschwindend klein wird. Wir können daher für den ganzen Complex nur einen unbestimmten endlichen Werth fordern, den wir mit γ bezeichnen wollen. Derselbe hängt nicht ab von der Ordnungszahl $\mathfrak{a}$, ist vielmehr für alle $\mathfrak{a}$ derselbe. Die Gleichgewichtsbedingung lautet nun:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}} + \gamma \frac{\partial G}{\partial x_\mathfrak{a}} = 0 \text{ für jedes } \mathfrak{a}. \tag{159c}$$

Dies sind $3n$ Gleichungen. Wir haben aber aufser den $3n$ aufzufindenden Coordinaten $x_\mathfrak{a}$ darin noch eine überzählige Unbekannte γ, welche daraus nicht gefunden werden kann, und als Coefficient die ganze Lösung unbestimmt macht. Nun haben wir auch im Falle der idealen Starrheit noch eine $(3n+1)$ste Gleichung, welche erfüllt sein mufs, nämlich $G(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}) = 0$. Die Schaar der vorhandenen Gleichungen genügt also zur vollständigen Lösung der Aufgabe.

In gleicher Weise kann man das Problem behandeln, wenn statt der einen Bedingungsgleichung (155) eine ganze Reihe solcher Gleichungen für die Coordinaten als Beschränkungen der Bewegungsfreiheit vorgeschrieben sind. Die Anzahl dieser Gleichungen sei m, diese Zahl m mufs nothwendig kleiner als die Anzahl der Coordinaten sein, also $m < 3n$, wenn nämlich $m = 3n$ wäre, so würde man aus diesen Bedingungen allein feste Werthe der Coordinaten berechnen können, eine Bewegung wäre dann nicht mehr möglich. Ferner aber müssen wir voraussetzen, dafs die vorgeschriebenen Bedingungen unter einander verträglich sind. Fordert beispielsweise eine der Gleichungen, dafs der Massenpunkt m_1 auf einer fest vorgeschriebenen Fläche bleiben soll, so darf eine andere Gleichung nicht etwa fordern, dafs m_1 auf einer anderen Fläche bleibe, welche mit jener ersten keine gemeinsamen Punkte hat, wohl aber ist die zweite Bedingung verträglich, wenn die beiden Flächen sich durchsetzen. Dann drücken beide Forderungen zusammen aus, dafs der Massenpunkt auf der Schnittlinie der beiden Flächen bleiben mufs. Endlich wollen wir voraussetzen, dafs die Bedingungsgleichungen von einander unabhängig sind, dafs also nicht etwa mehrere dieselbe Gebundenheit ausdrücken und sich deshalb durch Transformation identisch machen lassen. Die Schaar dieser Bedingungen sei dargestellt durch die Gleichungen:

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\mathfrak{b} = 0, \ldots, \quad G_m = 0, \tag{160}$$

in denen die $G_\mathfrak{b}$ vorgeschriebene Functionen der Coordinaten sind. Ueber den geometrischen und den physikalischen Sinn dieser Gleichungen gelten die gleichen Anschauungen, die oben an das Bestehen einer einzigen Gleichung $G = 0$ geknüpft wurden. Für die Kräfte, welche bei kleinen den Bedingungsgleichungen widersprechenden Verschiebungen auftreten, setzen wir wieder eine potentielle Energie Ψ, welche ihren Minimalwerth 0 besitzt, sobald die Configuration den Gleichungen folgt, welche aber sofort steil ansteigt, wenn eine oder mehrere der Gleichungen nur wenig verletzt werden. Die einfachste Vorstellung ist, Ψ als eine Summe zu betrachten, deren Glieder von je einer einzelnen Function $G_\mathfrak{b}$ abhängen, und zwar in derselben Weise, wie dies oben angenommen wurde. Wir setzen also:

$$\Psi = \sum_\mathfrak{b} \Psi_\mathfrak{b}(G_\mathfrak{b}) \tag{161}$$

und benutzen für jedes $\Psi_\mathfrak{b}$ die in den Formeln (156 bis 157a) aufgestellten Eigenschaften. Dann ist

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial G_{\mathfrak{b}}}\right)_0 = \left(\frac{d\,\Psi_{\mathfrak{b}}}{d\,G_{\mathfrak{b}}}\right)_0 = 0 \text{ für jedes } \mathfrak{b}. \tag{161a}$$

Der Index 0 bedeutet, daſs der Differentialquotient in einer mit den Gleichungen (160) übereinstimmenden Configuration gebildet ist. Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial G_{\mathfrak{b}}^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2\,\Psi_{\mathfrak{b}}}{d\,G_{\mathfrak{b}}^2}\right)_0 = C_{\mathfrak{b}} \text{ für jedes } \mathfrak{b}. \tag{161b}$$

Dabei bedeutet $C_{\mathfrak{b}}$ für jedes $\mathfrak{b}$ eine besondere, groſse positive Constante; nachher werden wir alle $C_{\mathfrak{b}}$ ins Unendliche wachsen lassen. Die Entwickelung von Ψ nach Potenzen der Coordinaten in der Nähe einer Nulllage läſst sich nach dem Vorbilde von Gleichung (157) durchführen, man erhält entsprechend (157a)

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{p}}\sum_{\mathfrak{q}} \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{q}}}\right)_0 \xi_{\mathfrak{p}}\, \xi_{\mathfrak{q}}. \tag{162}$$

Auch die Bildung der Differentialquotienten $\partial\,\Psi / \partial\, x_{\mathfrak{a}}$ erfolgt in gleicher Weise, sowie die Schluſsfolgerung, daſs für alle in den Bedingungsgleichungen vorkommenden Coordinaten die Verschiebungen ξ verschwindend werden müssen, sobald die C sehr groſs werden. Entsprechend (158b) findet man die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial\, x_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \frac{\partial\, G_{\mathfrak{b}}}{\partial\, x_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\partial\, G_{\mathfrak{b}}}{\partial\, x_{\mathfrak{p}}} \cdot \xi_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ für jedes einzelne } \mathfrak{a}. \tag{163}$$

Die Elimination der $\xi_{\mathfrak{p}}$ durch Einführung von Specialwerthen der potentiellen Energie Ψ geschieht folgendermaſsen: Läſst man nur eine einzige Coordinatenverschiebung $\xi_{\mathfrak{p}}$ eintreten, während alle übrigen in den durch die Gleichungen (160) vorgeschriebenen Lagen bleiben, so wird die potentielle Energie den Specialwerth $\Psi_{\mathfrak{p}}$ annehmen, welcher aus Gleichung (162) folgt:

$$\Psi_{\mathfrak{p}} = \tfrac{1}{2}\,\xi_{\mathfrak{p}}^2 \cdot \sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial\, G_{\mathfrak{b}}}{\partial\, x_{\mathfrak{p}}}\right)_0^2, \tag{164}$$

mithin:

$$\xi_{\mathfrak{p}} = \sqrt{\frac{2\,\Psi_{\mathfrak{p}}}{\sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial\, G_{\mathfrak{b}}}{\partial\, x_{\mathfrak{p}}}\right)_0^2}}. \tag{164a}$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird nach Einsetzung dieses Ausdrucks für $\xi_{\mathfrak{p}}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \left[C_{\mathfrak{b}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \sqrt{\frac{2 \Psi_{\mathfrak{p}}}{\sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \right)^2}} \right] = 0$$

oder anders angeordnet

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \cdot \left\{ \sqrt{C_{\mathfrak{b}}} \cdot \sum_{\mathfrak{p}} \sqrt{2 \Psi_{\mathfrak{p}} \cdot \left(\frac{C_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \right)^2}{\sum_{\mathfrak{b}} C_{\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}} \right)^2} \right)} \right\} \right] = 0. \quad (164\mathrm{b})$$

Die runde Klammer in vorstehendem Ausdruck ist ein echter Bruch, denn der Nenner besteht aus einer Summe von positiven Gliedern, während im Zähler nur eines dieser Glieder steht. Dieser Bruch als Factor verkleinert also noch die einzelnen $\Psi_{\mathfrak{p}}$, welche sich bei stark wachsenden Werthen der $C_{\mathfrak{b}}$ der Null so nähern müssen, dafs der ganze Inhalt der geschweiften Klammer für jedes $\mathfrak{b}$ einem gewissen endlichen, aber zunächst unbestimmten Grenzwerth $\gamma_{\mathfrak{b}}$ zustrebt. Die Endlichkeit dieser Grenzwerthe $\gamma_{\mathfrak{b}}$ ist für die letzte Gleichung durchaus erforderlich, da sowohl $\partial \Phi / \partial x_{\mathfrak{a}}$ wie auch die sämmtlichen $\partial G / \partial x_{\mathfrak{a}}$ endlich vorausgesetzt sind. Im idealen Falle vollkommener Starrheit werden die Gleichgewichtsbedingungen entsprechend (159c)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \gamma_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0 \text{ für jedes } \mathfrak{a}. \quad (164\mathrm{c})$$

Dies sind wiederum $3n$ Bestimmungsgleichungen für die $3n$ zu suchenden Unbekannten. Darin stecken noch m überzählige Unbekannte $\gamma_{\mathfrak{b}}$; wir haben aber bei vollkommener Starrheit auch noch die m Gleichungen (160) als erfüllt anzusehen und zur Lösung der Aufgabe heranzuziehen, wodurch das Problem vollständig bestimmt ist. Die Bedeutung der Coefficienten $\gamma_{\mathfrak{b}}$ ergiebt sich leicht aus der vorstehenden Gleichung, die einzelnen $\gamma_{\mathfrak{b}} . \partial G_{\mathfrak{b}} / \partial x_{\mathfrak{a}}$ sind Componenten der von den starren Verbindungen ausgeübten Kräfte, die $\gamma_{\mathfrak{b}}$ bestimmen also die Intensitäten dieser Kräfte. Die Erscheinung, dafs die starren Verbindungen jede erforderliche Gröfse der Kräfte hervorzubringen im Stande sind, findet ihren Ausdruck in der ursprünglichen Unbestimmtheit der Coefficienten $\gamma_{\mathfrak{b}}$.

Wir wollen nun untersuchen, welche Form das Princip der virtuellen Verschiebungen für den Fall beschränkter Bewegungsfreiheit annimmt. Die virtuellen Verschiebungen bezeichnen wir, wie früher, mit $\delta x_{\mathfrak{a}}$, multipliciren jede Gleichung mit dem zugehörigen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ und addiren die ganze Schaar, bilden also die im Gleichgewichtsfalle verschwindende Summe der virtuellen Momente

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{3n} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{m} \gamma_{\mathfrak{b}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \right\} \delta x_{\mathfrak{a}} = 0. \tag{165}$$

Diese Summe kann man folgendermaſsen zerlegen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} + \gamma_1 \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} + \gamma_2 \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_2}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} + \dots \\ \dots + \gamma_{\mathfrak{b}} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} + \dots \gamma_m \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_m}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \partial x_{\mathfrak{a}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{165a}$$

Wegen der Unbestimmtheit der Coefficienten γ kann diese Forderung nur erfüllt werden, wenn jedes Glied einzeln gleich Null wird. Wir finden also die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} = 0. \tag{166}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial G_m}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{167}$$

Die erste dieser Gleichungen, (166), ist scheinbar identisch mit der für ein ungebundenes System geltenden Bedingung, Gleichung (153), den Unterschied ihrer Bedeutung erkennt man aber aus dem Hinzutreten der nachfolgenden m Gleichungen (167). Diese fordern, daſs die durch die virtuellen Verschiebungen verursachten Variationen der m Functionen $G_{\mathfrak{b}}$ gleich Null bleiben müssen, daſs also die Functionen $G_{\mathfrak{b}}$ selbst dabei ihren vorgeschriebenen Werth Null bewahren müssen. Man könnte diese m homogenen linearen Gleichungen der $3n$ Gröſsen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ dazu benutzen um m derselben durch die übrigen auszudrücken. Es bleiben alsdann nur $(3n - m)$ willkürliche virtuelle Verschiebungen übrig, die anderen m Verschiebungen sind dadurch bereits bestimmt und zwar als vorgeschriebene homogene lineare Functionen der willkürlich gebliebenen. Die hierdurch gefundene Beschränkung der $\delta x_{\mathfrak{a}}$ überträgt sich nun auch auf die erste Gleichung (166). Man könnte die Ausdrücke für die m unfrei gewordenen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ in diese Gleichung einsetzen, und das Polynom ordnen nach den frei gebliebenen. Die Summe fällt dann nicht mehr, wie beim unbeschränkten System, in $3n$ einzeln gleich Null zu setzende Theile, aus denen sie entstanden ist, auseinander, sondern nur in $(3n - m)$ solche Theile. Wir erhalten deshalb aus dieser Zerfällung auch nur $(3n - m)$ Bestimmungsgleichungen für Coordinaten, die zur Lösung fehlenden m Gleichungen sind dann die vorgeschriebenen Bindungen $G_{\mathfrak{b}} = 0$ für $\mathfrak{b}$ von 1 bis m.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen behält also auch im Falle beschränkter Bewegungsfreiheit seine Gültigkeit, und zwar sind nur solche Verschiebungen zu berücksichtigen, welche mit den vorgeschriebenen Gleichungen (160) verträglich sind. Sobald die Summe der virtuellen Momente für jede durch die starren Verbindungen noch offen gelassene Verschiebung des Systems gleich Null wird, befindet sich das System in einer Gleichgewichtslage. Charakteristisch für diese erlaubten Verschiebungen ist dabei der Umstand, dafs sie die von den festen Verbindungen ausgeübten Kräfte zu keiner Arbeitsleistung veranlassen, dafs daher unter den virtuellen Momenten solche nicht vorkommen, welche von den Kräften der starren Verbindungen herrühren, sondern nur diejenigen, deren Ursprung in den durch die potentielle Energie Φ bedingten Kräften liegt. Hierin liegt der Grund, dafs diejenigen Theoretiker, welche an der physikalischen Unmöglichkeit starrer Verbindungen keinen Anstofs genommen haben und jene Widerstandskräfte aus der Betrachtung einfach weggelassen haben, zu richtigen Resultaten gekommen sind. Der Gang ihrer Ueberlegung war ungefähr der umgekehrte als der hier gegebene, nämlich: Wenn die Bindungen (160) vorgeschrieben sind, bestehen für die virtuellen Verschiebungen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ gewisse nothwendige Beschränkungen, welche ihren Ausdruck in Gleichungen (167) finden. Dafs nun das Princip der virtuellen Verschiebungen für diese beschränkte Freiheit eine hinreichende Bedingung des Gleichgewichts liefert, wird vorausgesetzt, demnach Gleichung (166) als Gleichgewichtsbedingung eingeführt. Mit diesem Material von Gleichungen kann man dann die Aufgabe lösen. Entweder bestimmt man aus den Gleichungen (167) m Verschiebungen durch die übrigen und setzt die gefundenen Ausdrücke in (166) ein, spaltet dann diese Gleichung nach den übrig gebliebenen willkürlichen Verschiebungen in $(3n - m)$ einzelne Nullforderungen, und nimmt die m Gleichungen (160) hinzu; so findet man die erforderlichen $3n$ Gleichungen zur Berechnung der Gleichgewichtslage, oder man wendet, um die Unsymmetrie der Betrachtung zu vermeiden, die LAGRANGE'sche Methode der Multiplicatoren an: Man vereinigt die Bedingungen (167) dadurch mit der Hauptgleichung (166), dafs man jede der ersteren, mit einem unbestimmten Factor multiplicirt zur letzteren addirt. Bezeichnet man diese Multiplicatoren durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mathfrak{b}, \ldots, \gamma_m$, so kommt man auf Gleichung (165a) oder nach Vertauschung der Reihenfolge der Summationen auf Gleichung (165). Diese kann man dann nach sämmtlichen einzelnen Verschiebungscomponenten zerspalten und findet so die $3n$ Gleichungen (164c). Da diese Gleichungen aufser den $3n$ Coordinaten noch die überschüssigen Variabeln $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ enthalten, so müssen auch hier natürlicher Weise noch die vorgeschriebenen m Gleichungen (160) zur Lösung der Aufgabe herangezogen werden. Eine Elimination der Gröfsen $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ ist nicht erforderlich, vielmehr liefert die Behandlung der Gleichungen als Nebenresultat bestimmte Werthe für diese vorher als unbestimmt eingeführten Coefficienten, d. h. die von den starren Verbindungen ausgeübten Kräfte werden durch die Methode der Multiplicatoren doch in die Betrachtung hineingebracht.

Wie weit man von den vereinfachenden Annahmen der Starrheit — und in dieselbe Begriffsgattung gehört auch die Incompressibilität der Flüssigkeiten — Gebrauch machen darf, hängt durchaus von Natur des Problems und von der erforderlichen Genauigkeit der Angaben ab. Es kommen Fälle genug vor, in denen man zu den vollständigeren Bedingungen der elastischen Körper übergehen mufs, sowohl bei Gleichgewichts- wie auch bei Bewegungserscheinungen. Namentlich ist dies erforderlich, wenn sehr grofse Kräfte auftreten. Wenn z. B. ein bewegter Körper gegen ein sogenannt starres Widerlager stöfst, so wird die Geschwindigkeit in der aufserordentlich kurzen Zeit des Stofses entweder vernichtet, oder sogar in eine entgegengesetzt gerichtete verwandelt. Diese sehr schnelle Veränderung der Geschwindigkeit deutet auf eine aufserordentlich grofse Beschleunigung, d. h. auf eine eben solche Kraft, welche von dem Widerlager ausgeht. Die Annahme der absoluten Starrheit führt dann zu Resultaten, welche mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmen. Es pflanzt sich nämlich die beim Stofs erlittene Deformation in dem ausgedehnten Körper des Widerlagers als Schallwelle fort, welche ein bestimmtes Energiequantum enthält, und die Betrachtung dieser Bewegung, welche zu dem ganzen Vorgang mit dazu gehört, erfordert, dafs man den Körper, welcher das Widerlager bildet, als deformirbar ansieht.

Ein einfaches statisches Beispiel, welches ebenfalls diesen Unterschied in der Betrachtung klarstellt, wollen wir noch hinzufügen. Ein schwerer Körper, den wir hier als einen einzelnen Massenpunkt (Schwerpunkt) von der Gröfse m ansehen können, soll in einem vorgeschriebenen Abstand l von einem Aufhängungspunkte bleiben. Man erreicht dies nahezu, wenn man ihn an einem sogenannt undehnsamen Faden, etwa einem Stahldraht von der gewünschten Länge aufhängt. Als Ruhelage findet man den im Abstand l vertical unter dem Aufhängungspunkt gelegenen Ort der Masse m, denn diese Lage entspricht der starren Bindung und die noch freien virtuellen Verschiebungen liegen alle horizontal, liefern also unter der Wirkung der Schwerkraft stets virtuelle Momente gleich Null. Die potentielle Energie der Schwere Φ ist ein Minimum, dem wir den Werth Null geben können. Wenn man nun genau beobachtet, findet man, dafs unsere Betrachtung ungenau ist. Die Ruhelage liegt thatsächlich ein wenig tiefer, denn der Draht ist elastisch dehnbar. Sobald aber Verschiebungen, die der Bindung zuwiderlaufen, also in unserem Falle verticale, zugelassen werden, ist $\Phi = 0$ kein Minimum mehr, bei einer Senkung des Punktes m um die Strecke ξ würde $\Phi = -g m \xi$ also kleiner als Null werden; aufserdem würde dann Φ nicht mehr die gesammte potentielle Energie darstellen. Es kommt vielmehr von der elastischen Deformation des Drahtes ein Antheil hinzu:

$$\Psi = \tfrac{1}{2} C \xi^2,$$

wo C eine sehr grofse Constante ist.

Die Gleichgewichtsbedingung wird dann:

$$\Phi + \Psi = -g m \xi + \tfrac{1}{2} C \xi^2 = \text{Minimum}.$$

Daraus berechnet man $\xi = g m / C$, eine Dehnung des Drahtes, die zwar bei unendlich grofs gesetztem C verschwindet, welche aber thatsächlich besteht und welche mit hinreichend feinen Hülfsmitteln auch gemessen wird, um daraus einen Schlufs zu ziehen auf die Gröfse der elastischen Constanten C.

Wir haben in diesem Paragraphen die Functionen Φ und Ψ wie auch die Bedingungsgleichungen $G = 0$ in cartesischen Coordinaten ausgedrückt gedacht, indessen lassen sich auch im Falle beschränkter Bewegungsfreiheit die mathematischen Schlufsfolgerungen für jedes andere Coordinatensystem in gleicher Weise durchführen. Die Gleichungen verändern ihre Gestalt dabei durchaus nicht, da wir gar keine bestimmten Functionsformen betrachtet haben. Wenn daher $3n$ irgendwie gewählte Abmessungen $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathfrak{a}}, \ldots, p_{3n}$ die Lage des Massensystems bestimmen, in welchem eine Reihe von Bedingungen

$$G_1(p_1, p_2 \ldots) = 0, \ldots, \qquad G_{\mathfrak{b}}(p_1, p_2 \ldots) = 0 \ldots$$

zu erfüllen sind, so würde die Gleichgewichtsbedingung entsprechend Gleichung (165) lauten:

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{3n} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{m} \gamma_{\mathfrak{b}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right\} \delta p_{\mathfrak{a}} = 0. \tag{168}$$

Die allgemeinen Coordinaten brauchen nicht Längenabmessungen zu sein, häufig kann man unbenannte Zahlen als Coordinaten brauchen, wie z. B. die Winkel im Polarcoordinatensystem oder die elliptischen Coordinaten. Dann stellen die $\delta p_{\mathfrak{a}}$ nicht direct die vorher betrachteten virtuellen Verschiebungen dar, indessen sind die einzelnen Summanden der vorstehenden Gleichung doch stets wahre virtuelle Momente von der Dimension der Arbeit. Die Wahl eines geeigneten Coordinatensystems kann in vielen Fällen die Berechnung wesentlich erleichtern, namentlich wenn es gelingt, solche Coordinaten zu finden, in denen die Bedingungsgleichungen eine besonders einfache Form annehmen. Kann man z. B. eine Bedingung darauf zurückführen, dafs eine einzelne Coordinate $p_{\mathfrak{a}}$ unverändert bleiben soll, während die übrigen frei bleiben, so braucht man sich um diese Bedingungsgleichung nicht weiter zu bekümmern. Man setzt vielmehr für dieses $p_{\mathfrak{a}}$ den constanten Werth ein und läfst das mit dem entsprechenden $\delta p_{\mathfrak{a}}$ behaftete Glied in der Summe der virtuellen Momente fort, da es ja doch wegen $\delta p_{\mathfrak{a}} = 0$ verschwindet. Man hat dann überhaupt nur noch $(3n - 1)$ Variabele in dem Problem. Lassen sich mehrere Bedingungen auf diese einfachste Form bringen, so kann man dadurch eben so viele Coordinaten aus dem Problem eliminiren. Ist z. B. ein Massenpunkt gezwungen sich auf einer vorgeschriebenen geraden Linie im Raume zu bewegen, so thut man gut ein cartesisches Coordinatensystem zu Grunde zu legen, dessen x-Axe mit dieser Geraden zusammenfällt, dann werden die y- und z-Abmessung dieses Punktes stets gleich Null bleiben, und wir behalten statt dreier Variabeler x, y, z nur die eine x. Ist ein Punkt gezwungen, auf einem festen Ellipsoide zu bleiben, so wähle man ein elliptisches Coordinatensystem, welchem dieses Ellipsoid angehört. Man kann dann die eine der drei elliptischen Coordinaten constant setzen und hat nur noch die beiden anderen als Variabele zu betrachten.

§ 62. Ein Grad von Freiheit. Einfache mechanische Maschinen.

Die Anzahl der in einem Massensystem mit beschränkter Bewegungsfreiheit noch übrig bleibenden unabhängigen Variationen der Coordinaten nennt man „die Anzahl der Grade von Freiheit". Ein Massensystem von n Punkten, in welchem keine Bindungen vorgeschrieben sind, besitzt also $3n$ Grade von Freiheit. Bestehen m Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten, so bleiben nur $3n - m$ Grade. Damit nur ein Grad von Freiheit übrig bleibe, die Lage des Systems also durch Angabe eines einzigen Coordinatenwerthes bestimmt sei, sind also $3n - 1$ Bedingungen vorzuschreiben, welche natürlicher Weise mit einander verträglich und von einander unabhängig sein müssen.

Zunächst wollen wir die Frage erörtern, wieviel Grade von Freiheit ein ideal-starrer Körper besitzt. Wir betrachten einen solchen Körper als ein Massensystem von sehr vielen (n) materiellen Punkten, in welchem die Bedingungen erfüllt sind, dafs die Abstände aller Punkte von einander unveränderlich bleiben. Würden wir zwischen jedem Punktepaar $m_\mathfrak{a}$ und $m_\mathfrak{b}$ die entsprechende Bedingungsgleichung einführen

$$(x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b})^2 + (y_\mathfrak{a} - y_\mathfrak{b})^2 + (z_\mathfrak{a} - z_\mathfrak{b})^2 - r^2_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 0,$$

wo $r_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ für jedes Paar eine vorgeschriebene Constante ist, so würden wir zu viele Bedingungen fordern; die sämmtlichen $r_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sind nicht unabhängig von einander. Zu einer gerade ausreichenden Schaar von Bedingungen kommt man auf folgende Weise: Man wählt drei nicht in einer geraden Linie liegende Massenpunkte m_1, m_2, m_3 aus, und stellt die drei Gleichungen auf, welche aussagen, dafs $r_{1.2}, r_{2.3}, r_{3.1}$ constant bleiben.

Jeder weitere Massenpunkt $m_4, m_5, \ldots$ bildet mit dem ausgewählten Dreieck ein Tetraeder, die relative Lage eines Massenpunktes m_4 gegen das Dreieck wird fest bestimmt durch Angabe der drei Kantenlängen $r_{1.4}, r_{2.4}, r_{3.4}$ und ebenso für jeden weiteren Punkt. Sind nun die Lagen gegen das Dreieck unverrückbar, so sind auch die Lagen der übrigen Punkte gegen einander fest bestimmt, d. h. die Bedingungen des starren Körpers sind hiermit erschöpft. Die ersten drei Punkte erforderten zu ihrer relativen Festlegung 3 Gleichungen, die übrigen $(n - 3)$ Punkte erforderten jeder 3 Gleichungen, wir haben also im Ganzen $3 + 3(n - 3) = 3n - 6$ Bedingungen für $3n$ Coordinaten. Der starre Körper besitzt also, so lange er in keiner Weise gehalten wird, 6 Grade von Freiheit. Um ihn auf einen Grad von Freiheit zu beschränken, braucht man 5 Bedingungen. Man kann zum Beispiel einen Grad von Freiheit herstellen, wenn man zwei Punkte des Körpers unverrückbar festhält. Man giebt dem Körper zu dem Zwecke zwei nach entgegengesetzten Richtungen hervorragende harte Spitzen, diese bilden dann die festgehaltenen Punkte, sobald man sie zwischen zwei unbeweglich festzustellenden conisch ausgehöhlten Lagern einklemmt. Die einzigen Bewegungen, welche der starre Körper dann noch ausführen kann, sind Rotationen um die Axe, welche die beiden festen Punkte verbindet. Mathematisch wird diese Gebundenheit scheinbar durch 6 Gleichungen ausgedrückt, denn der feste Ort jedes der beiden Punkte erfordert die Angabe von je drei Coordinaten, indessen sind diese 6 Angaben nicht unabhängig von einander, da ja der Abstand der beiden Punkte bereits durch eine Bedingung des starren Körpers vorgeschrieben ist. Man kann diese dazu benutzen, aus 5 Coordinaten zweier Punkte die sechste zu berechnen. Thatsächlich sind nur 5 Bedingungen in der Festlegung einer Rotationsaxe enthalten. Es genügt nun in der That eine einzige Angabe, um die Lage des ganzen Körpers zu fixiren. Man kann einen beliebigen geeigneten Punkt als Zeiger benutzen. Sobald man dem Kreise, den der Zeiger durchläuft, eine Theilung und einen Nullpunkt gegeben hat, bestimmt diese eine Coordinate eindeutig die Lage.

Eine andere wichtige Form eines Grades von Freiheit besitzt ein starrer Körper, der durch eine sogenannte Schlittenführung oder durch Räder, welche nicht von festen Schienen loskommen können, oder durch noch andere Einrichtungen beschränkt wird, auf Parallelverschiebungen. Sobald auf der Schiene, welche die Bahn vorschreibt, eine Längentheilung und ein Nullpunkt markirt ist, und man irgend einen Punkt des starren Körpers, der die Schiene berührt, zum Zeiger gemacht hat, ist ebenfalls durch diese eine Coordinate die Lage des ganzen Körpers angegeben.

Bei der Beurtheilung des Gleichgewichts eines starren Körpers oder eines Systems solcher Körper, die durch undehnsame Stangen oder Seile mit einander verbunden sind, nimmt das Princp der virtuellen Verschiebungen, sobald nur ein Grad von Freiheit gelassen ist, eine besonders einfache Gestalt an. Nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen ist dieses Princip nur auf die mit den Bindungen verträglichen Verschiebungen auszudehnen. Diese lassen sich aber jetzt herleiten aus der Verschiebung eines einzigen Punktes, etwa des als Zeiger dienenden Punktes. Diese Verschiebung tritt dann als gemeinsamer Factor aller virtuellen Momente vor die gleich Null zu setzende Summe. Man erhält dadurch stets eine einzige Gleichung zwischen den wirksamen Kraftcomponenten und den Coordinaten der angegriffenen Punkte. Da aber alle Coordinaten durch Angabe einer einzigen bestimmt sind, kann man daraus eine Gleichung bilden zwischen der einen Zeigercoordinate und den Kräften, d. h. man kann den Werth dieser Coordinate und somit die Gleichgewichtslage finden.

In der angewandten Mechanik und in der Maschinentechnik geht man immer darauf aus, den starren Maschinentheilen nur einen Grad von Freiheit zu lassen, damit die Maschine sich nur in einer vorgeschriebenen Richtung vorwärts oder rückwärts bewegen könne und keine willkürlichen seitlichen Ausweichungen mehr möglich seien. Deshalb haben die Gleichgewichtsbedingungen bei einem Grade von Freiheit besonderes praktisches Interesse.

Wir wollen hier nur die einfachsten mechanischen Maschinen betrachten und deren Gleichgewichtsbedingungen aus dem Princip der virtuellen Verschiebungen ableiten.

Ein Hebel ist ein starrer Körper, welcher um eine feste Axe drehbar ist. Geht diese Axe durch seinen Schwerpunkt, so ist er der Schwerkraft gegenüber im indifferenten Gleichgewicht, die auf die Hebelmasse selbst wirkenden Schwerkräfte heben sich in jeder Lage derselben auf und fallen deshalb aus der Betrachtung heraus.

Greifen nun in verschiedenen Punkten äufsere Kräfte an, so wird der Hebel im Gleichgewicht sein, wenn die Summe der virtuellen Momente gleich Null ist. Die virtuellen Verschiebungen sind die von den Angriffspunkten beschriebenen kleinen Kreisbögen, welche entstehen, wenn man dem Hebel eine virtuelle Drehung um einen kleinen Winkel ertheilt denkt, wenn also die Zeigercoordinate, Winkel ϑ, einen Zuwachs $\delta\vartheta$ erfährt. Sind die Abstände der Angriffspunkte von der Drehungsaxe $r_1, r_2, \ldots r_\mathfrak{z}$, so werden die virtuellen Verschiebungen:

$$\delta s_1 = r_1 . \delta\vartheta, \quad \delta s_2 = r_2 . \delta\vartheta, \quad \ldots, \quad \delta s_\mathfrak{z} = r_\mathfrak{z} . \delta\vartheta.$$

Diese sind als gerade Strecken anzusehen, welche senkrecht auf den Radien r stehen. Von den Kräften sind nur die in Richtung der δs fallenden Componenten zu berücksichtigen; man findet diese, wenn man die Kräfte als gerichtete Strecken in den Angriffspunkten ansetzt und auf die Richtungen der Verschiebungen projicirt. Fallen diese Projectionen in die Richtung der δs, so rechnen wir sie positiv, fallen sie in entgegengesetzte Richtung, so rechnen wir sie negativ.

Bezeichnen wir diese wirksamen Kraftcomponenten mit $S_1, S_2, \dots S_\mathfrak{z}$, so wird die Summe der virtuellen Momente

$$S_1 . \delta s_1 + \dots + S_\mathfrak{z} . \delta s_\mathfrak{z} = (S_1 r_1 + \dots S_\mathfrak{z} r_\mathfrak{z}) . \delta \vartheta.$$

Da diese Summe verschwinden muss und $\delta \vartheta$ von Null verschieden ist, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung

$$S_1 r_1 + S_2 r_2 + \dots + S_\mathfrak{z} . r_\mathfrak{z} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt übrigens überein mit der Forderung, dafs die Rotationsmomente der Kräfte für die feste Axe sich vernichten müssen (vergl. § 45).

Wenn die Drehungsaxe des Hebels nicht durch den Schwerpunkt geht, so kommt zu der linken Seite der vorstehenden Gleichung noch ein Glied $+ \mathfrak{S} . \mathfrak{r}$ hinzu, in welchem $\mathfrak{r}$ den Abstand des Schwerpunktes von der Axe und $\mathfrak{S}$ diejenige Componente des vertical abwärts gerichteten Gewichts des Hebels bezeichnet, welche in Richtung der virtuellen Verschiebung des Schwerpunktes fällt.

Ein besonders einfaches und oft vorkommendes Beispiel des Hebelgleichgewichtes beobachtet man an einem linearen Hebel, d. h. an einem hauptsächlich in Richtung einer geraden Linie ausgedehnten balkenförmigen Körper von geringem Querschnitt, der um eine horizontale Axe senkrecht zu seiner Längsrichtung drehbar ist und der durch zwei auf den beiden Seiten angehängte oder aufgelegte Gewichte belastet wird. Einen solchen Hebel kann man als eine starre Linie ansehen. Die beiden Angriffspunkte werden bestimmt durch die Länge der beiden Hebelarme, welche eine gerade Linie bilden. Die Winkel, welche die verticalen Schwerkräfte der beiden angehängten Gewichte mit den virtuellen Verschiebungen bilden, sind Supplementwinkel, ihre Cosinus, mit denen die Schwerkräfte multiplicirt werden müssen, sind entgegengesetzt gleich, heben sich also, bis auf das Vorzeichen, nebst der Intensität der Schwere g aus der Nullsetzung der Momentsumme heraus. Man erhält als Gleichgewichtsbedingung des Hebels die einfache Beziehung:

$$m_1 . r_1 = m_2 . r_2,$$

wo m_1 und m_2 die links und rechts von der Drehungsaxe angebrachten beiden Massen, und r_1 und r_2 deren Hebelarme bedeuten. Man schreibt diese Gleichung oft als Proportion

$$m_1 : m_2 = r_2 : r_1,$$

in Worten: Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Hebelarme sich umgekehrt wie die aufgelegten Gewichte verhalten. Sobald diese Bedingung nicht erfüllt ist, setzt sich der Hebel nach der einen oder der anderen Richtung in beschleunigte Bewegung. Ist aber die Vorschrift erfüllt, so bleibt der Hebel in jeder Stellung in einem indifferenten Gleichgewicht; man kann ihn dann ohne äufsere Arbeitsleistung durch den geringsten Anstofs nach jeder von beiden Richtungen in eine langsame unbeschleunigte Bewegung versetzen, man kann z. B. das schwere Gewicht aufsteigen lassen, während das leichtere herabsinkt: Die auf der einen Seite gewonnene Arbeit ist dabei immer gleich der auf der anderen Seite verbrauchten. Der Nutzen des Hebels zum Heben schwerer Lasten beruht darin, dafs man mit Hülfe einer geringeren Kraft eine gröfsere überwinden kann. Freilich mufs die schwächere Kraft einen entsprechend längeren Weg hindurch wirken, als der Weg ist, um den die schwere Last gehoben wird.

Eine andere Form der einfachen Maschinen finden wir in den „schiefen Ebenen“. Wenn wir uns auf die Wirkungen der Schwerkraft beschränken, können wir diese Maschinen definiren als Einrichtungen, durch welche schwere Massen gezwungen werden auf einer von der Verticalen abweichenden schrägen Bahn aufwärts oder abwärts zu laufen. Alle solche Einrichtungen verursachen bei der Bewegung viel bedeutendere Reibungskräfte, als beim Hebel zu befürchten sind; doch wollen wir hier diese energieverzehrenden Einflüsse aus der Betrachtung ausschliefsen, etwa ganz glatte Schienen und Räder und reibungslose Axenlager voraussetzen. Der schwere Körper, welcher auf der schrägen Bahn bewegt werden soll, sei an ein biegsames Seil geknüpft, welches über eine am oberen Ende der schiefen Ebene befestigte Rolle läuft und auf der anderen Seite durch frei herabhängende Gewichte gespannt wird. Eine Rolle verändert nur die Richtung des über sie gelegten Seiles ohne indessen die Spannung zu beeinflussen. Freilich erfährt die Axe der Rolle von den beiden verschieden gerichteten Zugkräften der beiden Seilhälften einen resultirenden Druck, dieser wird aber bei hinreichender Starrheit ohne merkliche Deformation ausgeglichen. Das frei herabhängende Gewicht $g.m$ kann man so wählen, dafs die Last auf der schiefen Ebene gerade im Gleichgewicht gehalten wird. Das ganze System besitzt einen Grad von Freiheit, die virtuellen Verschiebungen sind wegen der Seilübertragung für alle Massenpunkte des Systems von gleicher absoluter Länge, aber auf der schiefen Ebene von anderer Richtung als bei dem frei hängenden Gewicht. Wir wollen uns eine Verschiebung δs vorstellen, welche die Last von der Masse M auf der schiefen Ebene aufwärts und die Masse m

vertical abwärts rückt. Um die virtuellen Momente zu bilden, müssen wir die in Richtung der Verschiebungen fallenden Kraftcomponenten suchen. Das Gewicht der Last ist die vertical abwärts gerichtete Kraft $g.M$, die in Richtung der Bahn fallende Componente derselben ist $-g.M.\sin\alpha$, wo α den Steigungswinkel der Bahn bedeutet. Das negative Vorzeichen tritt hinzu, weil die Componente der von uns gewählten Richtung der Verschiebung entgegengesetzt ist. Die Kraft $g.m$ wirkt mit ihrem vollen Betrage in Richtung der verticalen Verschiebung der Masse m. Das Verschwinden der virtuellen Momente liefert daher die Bedingungsgleichung:

$$-g.M.\sin\alpha.\delta s + g.m.\delta s = 0$$

oder:

$$m = M\sin\alpha.$$

Sobald m diesen Werth besitzt, kann man das System ohne Arbeitsleistung in langsamer unbeschleunigter Bewegung erhalten, ohne dabei die statischen Bedingungen zu verlassen. Letzteres gilt wenigstens so lange man das Gewicht des Seiles vernachlässigen darf. (Ist das Seil dagegen selbst von bedeutendem Gewicht, so erhält man nur eine einzige Ruhelage, in welcher M und m gleiche Höhenlage haben, und zwar entspricht diese Lage einem labilen Gleichgewicht. Wir wollen indessen hier das Gewicht des Seiles vernachlässigen.) Die fallende Masse m leistet die Arbeit, welche durch die Aufwärtsbewegung von M wiedergewonnen wird. Der Nutzen der schiefen Ebene besteht, wie der des Hebels, darin, daſs man groſse Kräfte mit Hülfe geringerer Kräfte überwinden kann: Ein Pferd kann auf einer mäſsig ansteigenden Fahrstraſse Lasten bergauf befördern, die es auſser Stande wäre direct vertical zu heben, etwa mittelst eines über Rollen gelegten Seiles, an dessen Ende die Last hängt.

Eine dritte Grundform mechanischer Maschinen bilden die Flaschenzüge, deren allereinfachsten Typus wir hier betrachten wollen. An der Unterseite eines festen Balkens B (Fig. 17) sei bei A ein langes Seil angeknüpft und daneben eine Rolle mit der Axe C befestigt. Das Seilende sei über diese Rolle geführt und in der dadurch gebildeten Schlinge hänge eine Rolle, deren Axe nicht festgehalten ist, sondern in einem frei beweglichen Axenlager R läuft. An dieses Axenlager können Gewichte angehängt werden, ebenso an das frei herabhängende Seilende. Wie müssen diese Gewichte gewählt werden, damit das System im Gleichgewicht ist? Man kann nicht behaupten, daſs ein solcher Flaschenzug nur einen Grad von

Freiheit besitze, die beweglichen Massen können vielmehr mancherlei Pendelbewegungen ausführen, auch kann die bifilar aufgehängte Rolle mit ihrer Belastung um eine verticale Axe schwingen, gleich als hinge sie an einem tordirbaren Drahte. Alle diese Verschiebungen schliefsen wir aus, ihnen kommt eine selbstverständliche Ruhelage zu, um welche jene Bewegungen herum pendeln. Uns interessirt nur diejenige Verschiebung, bei welcher die am freien Seilende aufgehängte Masse m vertical abwärts geführt wird, bei welcher also ein dieser Verschiebung gleiches Stück des Seiles über die feste Rolle gezogen wird; diese Bewegung hat nur einen Freiheitsgrad, und man kann die virtuelle Verschiebung der losen Rolle nebst der daran hängenden Masse M aus derjenigen der Masse m berechnen. Sinkt nämlich m um die Höhe h, so wird die Seilschleife um die Länge h, jede ihrer Hälften um $h/2$ verkürzt, mithin steigt die lose Rolle um $h/2$ aufwärts. Das ist also die virtuelle Verschiebung. Die Schwerkräfte wirken mit ihrem ganzen Betrage in Richtung der Verschiebungen, und zwar ist die Kraft $g.m$ positiv zu setzen, liefert also das virtuelle Moment $g.m.h$, während $g.M$ als entgegengesetzt der Verschiebung negativ zu rechnen ist und das Moment $-gM.h/2$ liefert. Das Gleichgewicht fordert nun

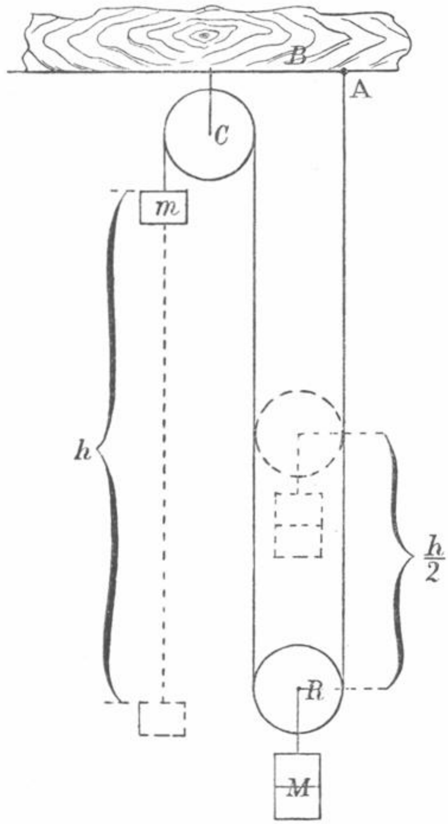

Fig. 17.

$$g m h - g M \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

d. h.

$$m = \frac{M}{2}.$$

In der Masse M ist dabei die Masse der losen Rolle selbst mit einbegriffen zu denken.

Stehen die Massen in diesem Verhältnifs, so ist der Flaschenzug im Gleichgewicht, man kann ihn mühelos in langsame Bewegung setzen, ohne dafs er dabei die statischen Bedingungen verläfst (das Seil selbst nehmen wir dabei wieder gewichtlos an). Im Ganzen wird auch hierbei Arbeit weder gewonnen noch verloren. Der Nutzen der Einrichtung besteht darin, dafs man die Schwerkraft $g.M$ durch eine halb so grofse Kraft überwinden kann. In gleicher Weise findet man auch die statischen Bedingungen der zusammengesetzteren Flaschenzüge mit mehreren beweglichen Rollen, bei denen das Verhältnifs der arbeitenden Kraft zu der gehobenen Last ein noch günstigeres ist als 1/2.

Die Einrichtungen der einfachen Maschinen sind sehr mannigfaltig, lassen sich aber im Princip auf die hier besprochenen Grundformen zurückführen. So kann man die in einander greifenden Zahnräder als Zusammenstellungen einer ganzen Reihe von Hebeln ansehen, welche beim Laufe des Räderwerkes abwechselnd zur Anwendung kommen. Dasselbe gilt von den durch Treibriemen gekoppelten Riemenscheiben von verschiedenem Durchmesser. Die Keile, durch welche man Körper spaltet, die einer Trennung ihrer Theile grofse Kräfte entgegensetzen, sind anzusehen als Verbindungen zweier schiefer Ebenen, die unter hinreichend spitzem Winkel zusammentreffen. Einige dieser Einrichtungen sind bereits im Alterthume erfunden und benutzt worden, die Gesetze des Gleichgewichts am Hebel und an den Flaschenzügen waren bereits dem Archimedes bekannt.

Zweiter Abschnitt.

Principien der Bewegung.

§ 63. Das d'Alembert'sche Princip.

Unsere weitere Aufgabe ist nun, die Gesetze, nach denen die Bewegungen in der Natur vor sich gehen, in eine allgemeine Aussage zusammenzufassen, ähnlich, wie wir dies im vorigen Abschnitt für den besonderen Fall des Gleichgewichts gethan haben. Wir betrachten also wieder ein System von beliebig vielen materiellen Punkten, welche unter der Wirkung beliebiger innerer und äufserer

Kräfte stehen, doch wollen wir jetzt nicht annehmen, daſs diese Kräfte sich gegenseitig vernichten oder durch feste Verbindungen unwirksam werden, vielmehr sollen beschleunigte Bewegungen auftreten. Je nach der Natur der Kräfte, je nach der Art der etwa bestehenden Beschränkungen der Bewegungsfreiheit und je nach dem Anfangszustand (Configuration und Geschwindigkeit) werden die eintretenden Bewegungen sehr verschiedenartig ausfallen; das durchgehend Gesetzmäſsige haben wir bisher nur ausdrücken können in den Newton'schen Differentialgleichungen der Bewegung (siehe z. B. Gleichung (113) auf Seite 194), deren es ebensoviele als Coordinaten in dem System giebt. Feste Verbindungen müssen dabei ihrem wahren physikalischen Sinne nach als Kraftwirkungen in Folge kleiner Deformationen angesehen werden, wenn es nicht gerade gelingt durch geschickte Wahl der Coordinaten die Bedingungsgleichungen in solche Form zu bringen, daſs einige Variabele ganz eliminirt, d. h. constanten Gröſsen gleichgesetzt werden, die übrigbleibenden aber frei sind.

Das Princip, welches der berühmte französische Mathematiker d'Alembert um die Mitte des 18. Jahrhunderts aufgestellt hat, faſst nun die ganze Schaar von Gesetzen, nach denen sich die einzelnen Coordinaten aller Punkte verändern, in eine einzige Forderung zusammen, welche sich in ihrer Form direct anschlieſst an das Princip der virtuellen Verschiebungen, und aus welcher man alle Bewegungserscheinungen so herauslesen kann, wie sie in der That beobachtet werden. Die Ueberlegung, durch welche d'Alembert zu seinem zusammenfassenden Princip der Dynamik gelangte, war folgende: Die Bewegungen der Massenpunkte werden nicht geändert, wenn man für jeden Punkt zwei Kräfte hinzufügt, welche sich jederzeit und allerorten aufheben, welche also stets gleiche Intensität und entgegengesetzte Richtung haben. Solche Kräfte kann man in jeder beliebigen Intensität und Richtung zu dem System zugesetzt denken, ohne daſs an den Bedingungen etwas geändert würde; d'Alembert nahm nun solche Zusatzkräfte von ganz bestimmter Art an: Die einen sollten so beschaffen sein, daſs sie allein den angegriffenen Massenpunkten, wenn diese frei beweglich wären und von keinen anderen Kräften angegriffen würden, dieselben Bewegungen ertheilen, welche thatsächlich in dem Systeme vorkommen. Die anderen Zusatzkräfte muſsten dann, der Abmachung zu Folge, den ersteren entgegengesetzt gleich angenommen werden für alle Punkte. Die ersteren Kräfte ertheilen dann den Punkten ihre wirklichen Bewegungen, sie sind ja so gewählt, daſs ihre Intensitäten und Richtungen gerade die thatsächlichen Beschleunigungen hervorrufen. Es wird also in der Bewegungserscheinung nichts geändert, wenn man alle aufserdem noch wirkenden Kräfte unterdrückt; damit ist aber gesagt, dafs alle diese Kräfte sich im Gleichgewicht halten müssen, denn sie erzeugen keinerlei resultirende Beschleunigungen mehr. Sie bestehen erstens in den negativen Zusatzkräften D'ALEMBERT's, ferner in den inneren und äufseren Kräften, welche die Punkte des Massensystems angreifen und endlich in den möglicherweise vorhandenen Widerstandskräften der vorgeschriebenen sogenannt festen Verbindungen. Das Problem ist dadurch auf eine Gleichgewichtsfrage zurückgeführt, zu deren Lösung man das Princip der virtuellen Verschiebungen benutzen kann, als diejenige Form der statischen Bedingung, welche beim Bestehen von festen Verbindungen die einfachste Darstellung erlaubt, indem nur diejenigen virtuellen Verschiebungen zu betrachten sind, welche mit den Bedingungsgleichungen $G_{\mathfrak{b}} = 0$ verträglich sind. Es mag noch erwähnt werden, dafs solche Bedingungsgleichungen jetzt auch die Zeit explicite enthalten können, dafs dann aber die virtuellen Verschiebungen, welche man zum Erkennen eines Gleichgewichtszustandes ausgeführt denkt, verschieden sind von den bei der wirklichen Bewegung in dem Zeitelement dt durchlaufenen Wegen. Zur Auffindung der mit den Bedingungsgleichungen verträglichen virtuellen Verschiebungen hat man vielmehr der Zeit einen constanten Werth zu ertheilen, nämlich denjenigen, für welchen man die Bedingungen aufstellt. Dies ist nun im Allgemeinen jeder Zeitpunkt, wir werden deshalb auch die virtuellen Verschiebungen als Functionen der Zeit ansehen und im Folgenden von dieser Auffassung Gebrauch machen.

Die einfachste mathematische Darstellung des Princips erhalten wir unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen cartesischen Coordinatensystems, welches auch D'ALEMBERT benutzte. In diesem System haben wir bereits die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen dargestellt und können deshalb die Zusatzkräfte direct durch die thatsächlichen Beschleunigungen ausdrücken. Wir müssen uns dabei alle Kräfte in Componenten nach den drei Axenrichtungen zerlegt denken. Die Axenrichtungen brauchen wir auch hier nicht durch verschiedene Buchstaben zu unterscheiden, sondern können kurz von $3n$ Coordinaten $x_{\mathfrak{a}}$ sprechen, welche die n Punkte in ihrer Lage bestimmen. Die inneren und äufseren Kräfte, welche das System regieren, ergeben, jeder Coordinate entsprechend, eine Kraftcomponente $X_{\mathfrak{a}}$, und die D'ALEMBERT'schen Zusatzkräfte geben ein erstes System von Componenten, welches wir mit $+ X'_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen, und ein entgegengesetzt gleiches $-X'_\alpha$. Da nun die Kräfte X'_α allein die thatsächlichen Beschleunigungen der Punkte m_α erzeugen sollen, so haben wir einfach nach der NEWTON'schen Definition zu setzen:

$$X'_\alpha = m_\alpha \cdot \frac{d^2 x_\alpha}{d t^2}.$$

Die sich im Gleichgewicht haltenden Kräfte sind dann die X_α und die $-X'_\alpha$, welche sich als gleichgerichtete Gröſsen für gleiches α algebraisch addiren zu

$$X_\alpha - X'_\alpha = X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{d t^2}.$$

Das Princip der virtuellen Verschiebungen drückt dieses Gleichgewicht aus in der Forderung:

$$\sum_{\alpha=1}^{3n} \left(X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{d t^2} \right) \delta x_\alpha = 0. \tag{169}$$

Dies ist der mathematische Ausdruck des zusammenfassenden Princips der Bewegung in der von D'ALEMBERT gegebenen Form, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten.

Auf andere Coordinaten kann man diese Form nicht so direct übertragen, wie dies beim Gleichgewicht möglich war [vergl. Gleichung (152a) und (168)], denn die zweiten zeitlichen Differentialquotienten beliebiger Abmessungen bedeuten nicht in der Regel die Beschleunigungen, welche in der NEWTON'schen Kraftdefinition gemeint sind; im allgemeinen erfordert vielmehr der Uebergang zu einem anderen Coordinatensystem eine mehr oder weniger umständliche Transformation der Gleichung.

Wenn nun in dem System den Massenpunkten keine bestimmten Bahnen oder sonstige Bindungen vorgeschrieben sind, sondern die von den Kräften hervorgebrachten Beschleunigungen voll zur Erscheinung kommen, so lehrt uns die symbolische Formel des D'ALEMBERT'schen Princips nichts Neues; das Verschwinden der Summe liefert dann sofort die $3n$ einzelnen Gleichungen

$$X_\alpha - m_\alpha \cdot \frac{d^2 x_\alpha}{d t^2} = 0,$$

das sind aber die NEWTON'schen Grundgleichungen. Der strenge Beweis dieser Behauptung läſst sich ebenso führen, wie wir ihn früher schon für die Statik angegeben haben: Wäre die Kraftsumme $\left(X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{d t^2} \right)$ nicht jederzeit gleich Null, sondern eine

Function der Zeit, welche bald positiv, bald negativ sein kann, so könnten wir die Verschiebungen $\delta x_\mathfrak{a}$, welche ebenfalls Functionen der Zeit sind, und zwar bei Abwesenheit von festen Bindungen jede eine unabhängige selbstständige Function, so wählen, dafs sie jederzeit dasselbe Vorzeichen haben wie die Kraft, mit welcher sie multiplicirt sind, dafs also das Product beider stets positiv ist. Eine Summe von lauter positiven Gliedern kann aber nimmermehr Null geben. Die vorstehenden Gleichungen müssen also für jedes einzelne $\mathfrak{a}$ zu allen Zeiten erfüllt sein.

Wenn ferner Beschränkungen der Bewegungsfreiheit vorhanden sind, und wir diesen auf den Grund gehen, dieselben also als elastische Kräfte erkennen, welche bereits bei sehr kleinen Verstöfsen gegen die festen Bindungen sehr grofse Intensitäten erreichen, so ist das Massensystem auch dann als ein ungebundenes anzusehen: Man mufs ein gliedweises Verschwinden der Summe in Gleichung (169) verlangen, nur sind dann in die $X_\mathfrak{a}$ auch jene elastischen Kräfte mit einzuschliefsen. Der Inhalt der Bewegungsgleichungen wird dadurch ein anderer, dem entsprechen dann auch die veränderten Bewegungen des gebundenen Systems gegenüber dem freien. Da nun aber die Annahme absolut starrer Bindungen, als eine in vielen wichtigen Fällen ausreichende Annäherung an die Wirklichkeit, die Betrachtungen wesentlich vereinfacht, so wollen wir diese Annahme, deren Folgerungen für die Statik wir bereits ausführlich besprochen haben, auch auf das D'ALEMBERT'sche Princip übertragen, welches in diesem Falle wirklich einen praktischen Nutzen bietet. Die vorgeschriebenen Bedingungen werden ganz allgemein ausgedrückt durch m Gleichungen zwischen den Coordinaten und der Zeit; es ist nicht nöthig, dafs die Zeit in diesen Gleichungen vorkommt, gleichwie auch einige Coordinaten fehlen können. Diese Gleichungen schreiben wir in der Form:

$$\left.\begin{aligned} & G_1(x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_\mathfrak{a},\, \ldots\, x_{3n},\, t) = 0\,, \\ \text{ebenso}\quad & G_2 = 0\,, \ldots\quad G_\mathfrak{b} = 0\,, \ldots\quad G_m = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Man kann in diesen Gleichungen die Coordinaten variiren und erhält dadurch m lineare homogene Gleichungen für die virtuellen Verschiebungen. Diese lauten:

$$\sum_\mathfrak{a} \frac{\partial G_1}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} = 0\,, \ldots \qquad \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial G_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} = 0 \ldots \tag{170a}$$

Es können also m von diesen Gröfsen als abhängig von den übrigen ausgedrückt werden, und in die Summe des D'ALEMBERT'schen Princips eingesetzt werden. Die Summe kann man dann nach den übrig bleibenden $3n - m$ Verschiebungen ordnen; der Coefficient jeder einzelnen dieser willkürlich gebliebenen Variationen mufs einzeln gleich Null sein (Beweis wie oben); man erhält also $3n - m$ Differentialgleichungen, welche zusammen mit den m Gleichungen (170) das Problem vollständig bestimmen. Der Nutzen des D'ALEMBERT'schen Princips liegt also darin, dafs es jetzt so viele Differentialgleichungen liefert, als Freiheitsgrade in dem System bestehen.

Die Elimination von m Variationen macht die Rechnung unsymmetrisch. Falls nicht etwa durch besonders einfache Form der Bedingungsgleichungen die Elimination einiger $\delta x_{\mathfrak{a}}$ nahe gelegt wird, ist es übersichtlicher, sämmtliche Verschiebungen beizubehalten, was durch die LAGRANGE'sche Methode der unbestimmten Coefficienten erreicht wird. Man erweitert jede der Variationsgleichungen (170a) mit einem unbestimmten Factor; die Reihe dieser Factoren, welche als Functionen der Zeit anzusehen sind, bezeichnen wir durch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\mathfrak{b}}, \ldots, \gamma_m$; dann addirt man die so erweiterten Gleichungen zu der allgemeinen Form des D'ALEMBERT'schen Princips und fafst die entstehende Summe nach den einzelnen Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ zusammen. Man erhält dann die Forderung:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left(X_{\mathfrak{a}} - m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{d t^2} + \sum_{\mathfrak{b}} \gamma_{\mathfrak{b}} \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \right) \delta x_{\mathfrak{a}} = 0.$$

Die vorgeschriebenen Verbindungen zwischen den Punkten sind jetzt in die Gleichung des Princips mit aufgenommen, wir müssen also jetzt die Coefficienten sämmtlicher $\delta x_{\mathfrak{a}}$ einzeln gleich Null setzen; dies liefert folgende $3n$ Differentialgleichungen:

$$X_{\mathfrak{a}} - m_{\mathfrak{a}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{d t^2} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{m} \gamma_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = 0,$$

welche man auch schreiben kann:

$$m_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{d t^2} = X_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{m} \gamma_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial G_{\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}, \tag{171}$$

Dieses System von Differentialgleichungen wurde von LAGRANGE für die Bewegungen eines Systems mit den durch die Gleichungen (170) vorgeschriebenen Bedingungen aufgestellt und ist eine directe Folgerung des D'ALEMBERT'schen Princips. Die Gleichungen enthalten aufser den $3n$ unbekannten Zeitfunctionen $x_{\mathfrak{a}}$ noch die m unbekannten Gröfsen $\gamma_{\mathfrak{b}}$. Zur Lösung sind auch noch die m Gleichungen (170) heranzuziehen. Ferner bringt die Integration der zweiten Differentialquotienten für jede Coordinate zwei Integrationsconstanten mit sich. Diese müssen bestimmt werden aus dem Anfangszustand, welcher für die Zeit $t = 0$ jedem x_a und jedem $d x_a / d t$ einen gegebenen Werth vorschreibt.

Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen unterscheiden sich von den für die Statik beim Bestehen fester Bindungen gefundenen Gleichungen (164c) wesentlich nur dadurch, dafs die Kraftsummen, welche damals gleich Null waren, hier gleich den positiven Zusatzkräften gesetzt werden, welche die thatsächlichen Beschleunigungen der Massenpunkte erzeugen. Jene Gleichgewichtsbedingungen stellen also nur denjenigen Specialfall der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen dar, in welchem keine Beschleunigungen auftreten, sondern entweder Ruhe herrscht, oder höchstens unbeschleunigte Bewegungen vorkommen, bei denen das System die statischen Bedingungen nicht verläfst.

§ 64. Das Hamilton'sche Princip.

Eine noch einfachere Gestalt kann man dem durch das D'ALEMBERT'sche Princip gefundenen Grundgesetz der Dynamik geben, wenn man die wirkenden Kräfte als conservativ erkannt hat, wenn man also einen Ausdruck der potentiellen Energie Φ gefunden hat, aus welchem sich die Kräfte herleiten als die negativen Differentialquotienten nach den Coordinaten. Wir können die D'ALEMBERT'sche Summe wegen der Gleichgültigkeit der Reihenfolge ihrer einzelnen Bestandtheile in folgender Weise spalten:

$$\sum_a X_a \,.\, \delta x_a = \sum_a m_a \cdot \frac{d^2 x_a}{d t^2} \cdot \delta x_a. \tag{172}$$

Gelten nun für die X_a die Bedingungen der conservativen Kräfte:

$$X_a = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a},$$

so stellt die linke Seite der vorstehenden Gleichung, wie wir bereits bei Betrachtung des Gleichgewichts, Gleichungen (153) und (153a), sahen, die Variation von $-\Phi$ dar, welche durch die virtuellen Verschiebungen erzeugt wird:

$$\sum X_a \, \delta x_a = \sum - \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a = - \delta \Phi.$$

Der zweite Theil der D'ALEMBERT'schen Summe, welchen wir auf die rechte Seite der Gleichung (172) gestellt haben, läſst eine Umformung jedes einzelnen Gliedes zu, welches sich als Theil eines vollständigen Differentialquotienten ansehen läſst. Es ist nämlich:

$$\frac{d}{dt}\left(m_\alpha \frac{d x_\alpha}{dt}\,\delta x_\alpha\right) = m_\alpha \cdot \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\,\delta x_\alpha + m_\alpha \cdot \frac{d x_\alpha}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_\alpha}{dt},$$

folglich:

$$m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\,\delta x_\alpha = \frac{d}{dt}\left(m_\alpha \frac{d x_\alpha}{dt}\,\delta x_\alpha\right) - m_\alpha \frac{d x_\alpha}{dt} \cdot \frac{d\,\delta x_\alpha}{dt}. \qquad (172\,\mathrm{a})$$

Diese Umformung ist nicht bloſs eine formale Aenderung der Ausdrucksweise, sie enthält auch eine Forderung. Wir hatten schon früher eingesehen, daſs im Bewegungsprincip die virtuellen Verschiebungen als Zeitfunctionen aufzufassen sind; im letzten Glied der vorstehenden Gleichung kommt nun der Differentialquotient von δx_α nach der Zeit vor, wenn wir also diese Umformung brauchen wollen, werden wir genöthigt, die δx_α als differenzirbare Functionen der Zeit einzuführen. Durch diese Forderung wird die Willkürlichkeit ihrer Wahl noch nicht beeinträchtigt. Wenn wir beispielsweise zum Beweise des nothwendig-gliedweisen Verschwindens der D'ALEMBERT'schen Summe vorschrieben, daſs die δx_α jederzeit dasselbe Vorzeichen haben sollten, wie die mit ihnen vereinigten Kraftsummen, so kann man einen solchen Zeichenwechsel mit der Stetigkeit und Differenzirbarkeit doch vereinen. Die δx_α sind eben kleine Gröſsen, welche sehr nahe bei Null bleiben und ohne Sprünge durch Null hindurch von positiven zu negativen Werthen und umgekehrt übergehen können, wie man es braucht. Die Forderung der Differenzirbarkeit sagt nur aus, daſs durch die virtuellen Verschiebungen, die einem Punkte des Massensystems zu jeder Zeit ertheilt werden, eine von der wirklichen Bewegung abweichende variirte Bewegung vorgestellt wird, welche stetig und mit einer stets angebbaren Geschwindigkeit ausgeführt wird. Diese Geschwindigkeit wird sich im Allgemeinen unterscheiden von derjenigen, welche der Punkt im gleichen Zeitelement in seiner wirklichen Bahn besitzt. Die Aenderungsgeschwindigkeit der Coordinate x_α ist $d x_\alpha / d t$, die der variirten Coordinate ist

$$\frac{d}{dt}(x_\alpha + \delta x_\alpha) = \frac{d x_\alpha}{dt} + \frac{d\,\delta x_\alpha}{dt},$$

das zweite Glied giebt also die durch die Variation der Bewegung verursachte Aenderung der Geschwindigkeit, welche man in der

Schreibweise der Variationsrechnung ausdrückt durch $\delta(d x_\mathfrak{a} / d t)$, es ist also:

$$\frac{d\,\delta x_\mathfrak{a}}{d t} = \delta \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t}.$$

Diese Gleichung spricht die Regel von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Variation und Differentiation aus. Vorausgesetzt mufs dabei nur werden, dafs die Variabele, nach welcher differenzirt wird, also hier die Zeit, nicht von der Variation betroffen wird. Dieser Voraussetzung entspricht unsere Annahme, dafs die variirten Lagen der Punkte zu denselben Zeiten durchschritten gedacht werden, wie die wirklichen Lagen. (Man kann auch andere Variationsbedingungen aufstellen und durchführen, bei denen die Zeit selbst auch variirt wird; davon wollen wir hier aber absehen.) Das letzte Glied der Gleichung (172 a) erhält durch die Vertauschung der Zeichen $d/d t$ und δ die Form:

$$m_\mathfrak{a} \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} \cdot \delta \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} = \delta \left\{ \frac{m_\mathfrak{a}}{2} \left(\frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} \right)^2 \right\},$$

stellt sich also heraus als die Variation des $\mathfrak{a}$-ten Summanden der kinetischen Energie L des Systems. Die rechte Seite der Gleichung (172) ist daher:

$$\sum m_\mathfrak{a} \frac{d^2 x_\mathfrak{a}}{d t^2} \delta x_\mathfrak{a} = \frac{d}{d t} \sum m_\mathfrak{a} \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} \delta x_\mathfrak{a} - \delta L$$

und das D'ALEMBERT'sche Princip geht über in die Form:

$$\delta \Phi - \delta L = \delta(\Phi - L) = - \frac{d}{d t} \sum m_\mathfrak{a} \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} \delta x_\mathfrak{a}.$$

Verfolgt man nun die Bewegung des Massensystems von einer Anfangszeit t_0 bis zu einem Ziel t_1, so liegt der Gedanke nahe, den totalen Differentialquotienten, welcher die rechte Seite der vorstehenden Gleichung bildet, für den betrachteten Zeitraum zu integriren. Man erhält dann:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(\Phi - L) . d t = \overline{\underline{- \sum m_\mathfrak{a} \frac{d x_\mathfrak{a}}{d t} \delta x_\mathfrak{a}}}_{t_0}^{t_1}$$

Auf der rechten Seite steht die Differenz zwischen dem Anfangswerthe der Summe und dem Endwerthe derselben. Diese beiden Grenzwerthe hängen davon ab, wie man die virtuellen Verschiebungen zu den Zeiten t_0 und t_1 wählt. Setzt man fest, dafs für beide Grenzen die sämmtlichen $\delta x_a = 0$ werden sollen, dafs also die variirten Bahnen der Massenpunkte alle von der wahren Anfangslage auslaufen und zur wahren Endlage führen, so wird die rechte Seite der vorstehenden Integralgleichung gleich Null. Auf der linken Seite kann man noch die Reihenfolge von Integration und Variation vertauschen, denn das Integral ist nur eine Summe von Variationen, während das Zeitdifferential dt sowohl wie die Zeitgrenzen t_0 und t_1 nach unserer Voraussetzung von der Variirung nicht betroffen werden. Man findet dann als Schlufsresultat die merkwürdig einfache Forderung:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Phi - L)\, dt = 0. \tag{173}$$

Dies ist das HAMILTON'sche Princip der Dynamik, welches in einer einzigen symbolischen Gleichung alle Gesetzmäfsigkeiten der Kraftwirkung auf träge Massen zusammenfafst. Freilich haben wir conservative Kräfte vorausgesetzt, als wir die potentielle Energie einführten, doch scheint es, dafs das Princip allgemeiner ist, als die Bedingungen, unter denen wir es abgeleitet haben (dafs beispielsweise die Function Φ, von welcher die Kräfte in bekannter Weise abgeleitet werden, die Zeit als explicite Variabele neben den Coordinaten enthalten kann, wie JACOBI nachgewiesen hat. Davon im letzten Abschnitt).

Das Integral, dessen Variation bei der wirklichen Bewegung verschwinden soll, würde, dividirt durch den festgesetzten Zeitraum $t_1 - t_0$, als Mittelwerth der Gröfse $(\Phi - L)$ für das betrachtete Zeitintervall anzusehen sein. Man kann deshalb das HAMILTON'sche Princip folgendermafsen in Worte kleiden: Unter allen Bewegungsarten, welche ein Massensystem aus einer gegebenen Anfangsposition in einer vorgeschriebenen Zeit zu einer gegebenen Endposition führen, ist diejenige die wirkliche (oder sind diejenigen wirkliche), für welche der Mittelwerth der Function $(\Phi - L)$ ein Grenzwerth wird.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs die eine Formel des HAMILTON'schen Princips die ganze Schaar der NEWTON'schen Bewegungsgleichungen ersetzt, dafs man also letztere aus dem Princip ableiten kann. Wir brauchen dabei im Wesentlichen nur den Entwickelungsgang der zur Gleichung (173) führte, rückwärts zu verfolgen. Es ist:

$$\delta \int (\Phi - L)\, dt = \delta \int \Phi\, dt - \delta \int L\, dt.$$

Die unveränderlichen Integrationsgrenzen t_0 und t_1 sind hier und im Folgenden immer hinzuzudenken. Diese Trennung kann man immer dann vornehmen, wenn Φ und L einzeln als endliche Gröſsen anzusehen sind, also nicht etwa dadurch eine endliche Differenz bilden, daſs sie in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ zusammentreten. Dies können wir aber stets voraussetzen. Dann ist weiter

$$\delta \int \Phi\, d t = \int \delta\, \Phi\, d t = \int \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a \right) d t = - \int d t \sum X_a \delta x_a$$

und

$$\delta \int L\, d t = \int \delta L\, d t = \int d t . \delta \sum \frac{m_a}{2} \left(\frac{d x_a}{d t} \right)^2 = \int \sum \left\{ m_a \frac{d x_a}{d t} \cdot \delta \frac{d x_a}{d t}\, d t \right\}.$$

Da nun die Zeit von der Variation nicht betroffen werden sollte, kann man setzen:

$$\delta \frac{d x_a}{d t} \cdot d t = \frac{d\, \delta x_a}{d t} \cdot d t = d\, \delta x_a.$$

Ferner kann man Integration und Summation vertauschen, und findet dann:

$$\delta \int L\, d t = \sum m_a \int \frac{d x_a}{d t} \cdot d\, \delta x_a.$$

Die partielle Integration liefert:

$$\delta \int L\, d t = \sum m_a \cdot \overline{\underline{\frac{d x_a}{d t} \cdot \delta x_a}}_{t_0}^{t_1} - \sum m_a \int d t \cdot \frac{d^2 x_a}{d t^2} \cdot \delta x_a.$$

Der integrirte Theil liefert aber, zwischen den Grenzen genommen, Null, weil die δx_a sowohl für t_0 wie für t_1 verschwinden sollten. Man erhält also nach abermaliger Vertauschung von Summation und Integration im letzten Gliede:

$$\delta \int L\, d t = - \int d t \sum m_a \frac{d^2 x_a}{d t^2} \delta x_a.$$

Deshalb ist

$$\delta \int (\Phi - L)\, d t = - \int d t \sum X_a\, \delta x_a + \int d t \sum m_a \frac{d^2 x_a}{d t^2} \delta x_a$$

oder nach Vereinigung der beiden Integrale rechts und Nullsetzung der linken Seite (Hamilton's Princip):

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} d t \sum \left(X_a - m_a \frac{d^2 x_a}{d t^2} \right) \delta x_a.$$

Man kann nun wieder die Variationen δx_a jederzeit so wählen, daſs sie das gleiche Vorzeichen haben, wie die mit ihnen multiplicirten Kräfte. Deshalb darf man nicht annehmen, das Integral verschwinde, weil der Integrand im Laufe des Zeitintervalls bald positive, bald negative Beiträge liefert, die sich schlieſslich vernichten. Es folgt daraus vielmehr als Forderung, daſs der Integrand jederzeit gleich Null sei; das liefert aber das D'ALEMBERT'sche Princip, aus welchem bei einem ungebundenen System die NEWTON'schen Bewegungsgleichungen direct abzulesen sind, und aus dem bei beschränkter Freiheit die LAGRANGE'schen Differentialgleichungen in der ersten Form vorher abgeleitet wurden.

§ 65. Zweite Form der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

Was haben wir nun gewonnen durch die Umformung des D'ALEMBERT'schen Princips in das HAMILTON'sche? Es wurde schon darauf aufmerksam gemacht, daſs durch die Zusammenfassung D'ALEMBERT's der Sinn der Bewegungsgleichungen nicht verändert wird, daſs dasselbe vielmehr immer wieder in jene NEWTON'schen Gleichungen auseinanderfällt, wenn keine festen Verbindungen vorgeschrieben sind durch Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten. Ist letzteres aber der Fall, so geht man möglichst darauf aus, die Zahl der Coordinaten durch Elimination zu verringern, was am einfachsten geschieht durch Einführung passender Coordinaten, welche durch die vorgeschriebenen Bedingungen zum Theil constant gesetzt werden, während die übrigen unbeschränkt frei bleiben. Um die constant gesetzten hat man sich dann nicht weiter zu kümmern. In Beziehung auf solche Coordinatentransformationen ist nun gerade die HAMILTON'sche Gleichung von groſsem Nutzen. Denn die Transformation des D'ALEMBERT'schen Princips in allgemeine Coordinaten erfordert die Umrechnung der zweiten Differentialquotienten $d^2 x_a / d t^2$ auf das neue System von Abmessungen, was meist zu unbequemen und weitläufigen Ausdrücken führt, während im HAMILTON'schen Princip die Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem gar nicht vorkommt. Ersetzen wir also die cartesischen Coordinaten x_a durch irgend welche andere Abmessungen, die wir allgemein mit p_a bezeichnen wollen und von denen sich weiter nichts Gemeinsames aussagen läſst, als daſs sie geometrische Gröſsen im Raume sind, welche die Lage eines jeden Punktes bestimmt definiren können, so läſst sich die potentielle Energie, welche nur von der jeweiligen

Lage oder Configuration des Massensystems abhängt, eben so gut, mitunter noch einfacher, als Function der p_a angeben, wie als Function der x_a. Für die kinetische Energie haben wir allerdings einen sehr einfachen Ausdruck in cartesischen Coordinaten, nämlich $\sum_a \frac{m_a}{2} \cdot \left(\frac{d x_a}{d t}\right)^2$. Die Transformation verlangt aber hier nur die Umrechnung erster Differentialquotienten. Wir müssen im Allgemeinen bei der Transformation jedes x_a als Function aller p_a ansehen. Die ersten zeitlichen Differentialquotienten der x_a werden dann nach den Regeln der Differentialrechnung folgendermafsen zu bilden sein:

$$\frac{d x_a}{d t} = \sum_b \frac{\partial x_a}{\partial p_b} \cdot \frac{d p_b}{d t}. \tag{174}$$

Die hier auftretenden Aenderungsgeschwindigkeiten der p_b (welche ihrer Dimension nach nicht Weggeschwindigkeiten zu sein brauchen) bezeichnen wir im Folgenden kurz durch:

$$\frac{d p_b}{d t} = q_b. \tag{174a}$$

Die cartesischen Geschwindigkeitscomponenten stellen sich also dar als lineare homogene Functionen der q. Die Coefficienten $\partial x_a / \partial p_b$ sind bedingt durch den geometrischen Zusammenhang der beiden Coordinatensysteme; man kann sie sowohl durch die x wie die p darstellen. Da wir aber zu dem System der p übergehen wollen, denken wir die Coefficienten als Functionen der neuen Coordinaten p.

Erheben wir nun, um auf die kinetische Energie zu kommen, die Gleichung (174) ins Quadrat, multipliciren mit $m_a/2$ und summiren über alle Massenpunkte, so erhalten wir für L eine homogene Function zweiten Grades der q, deren Coefficienten von den p abhängen.

Man kann nun unter Zugrundelegung der allgemeinen Coordinaten die Variation des Hamilton'schen Integrales so ausführen, dafs die einzelnen δp_a als virtuelle Verschiebungen heraustreten. Da Φ nur von den p_a abhängt, ist:

$$\delta \Phi = \sum_a \frac{\partial \Phi}{\partial p_a} \delta p_a.$$

Dagegen hat man wegen der Abhängigkeit des L von den p_a und q_a zu setzen:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial p_a} \delta p_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta q_a.$$

Die Variation $\delta q_\mathfrak{a}$ läſst sich durch partielle Integration auf $\delta p_\mathfrak{a}$ zurückführen, denn δL wird im HAMILTON'schen Princip mit dt multiplicirt und zwischen den Grenzen integrirt. Zunächst ist, weil die Zeit nicht variirt wird, $\delta q_\mathfrak{a} = \delta \frac{d p_\mathfrak{a}}{d t} = \frac{d \delta p_\mathfrak{a}}{d t}$, durch das Hinzutreten des Differentials dt wird $\delta q_\mathfrak{a} . dt = d \delta p_\mathfrak{a}$ und die partielle Integration des zweiten Theils von δL liefert:

$$\int dt \sum \frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}} \delta q_\mathfrak{a} = \int \sum \frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}} d \delta p_\mathfrak{a} = \overline{\underline{\sum \frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}} \delta p_\mathfrak{a}}} - \int dt \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \delta p_\mathfrak{a}.$$

Der integrirte Theil verschwindet aber, da an beiden Grenzen die $\delta p_\mathfrak{a}$ Null sein sollten. Es bleibt also übrig:

$$\delta \int (\Phi - L)\, dt = \int dt \sum \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} \delta p_\mathfrak{a} - \int dt \sum \frac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} \delta p_\mathfrak{a}$$
$$+ \int dt \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \delta p_\mathfrak{a}.$$

Die linke Seite ist nach dem Princip gleich Null, die rechte Seite kann man in das Integral einer Summe zusammenfassen und erhält:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \,.\, \sum_\mathfrak{a} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} - \frac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \right\} \delta p_\mathfrak{a} = 0.$$

Durch dieselbe Schlussweise, die wir bei frei verfügbaren Variationen $\delta p_\mathfrak{a}$ schon mehrfach gebraucht haben, folgt hieraus, daſs für jede Coordinate $p_\mathfrak{a}$ einzeln und zu jeder Zeit die Gleichung erfüllt sein muſs:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} - \frac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) = 0, \tag{175}$$

Dies sind die von LAGRANGE aufgestellten Differentialgleichungen der Bewegung; wir wollen sie im Gegensatz zu den früheren Gleichungen (171), welche häufig auch mit diesem Namen bezeichnet werden, die zweite Form der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen nennen. Dieselben beziehen sich in unserer Ableitung zunächst auf conservative Kräfte, welche in allgemeinen Coordinaten durch $-\partial \Phi / \partial p_\mathfrak{a}$ dargestellt werden. (Dabei ist zu bemerken, daſs diese negativen Differentialquotienten von Φ nach den Coordinaten nur dann die Dimension der NEWTON'schen Kräfte besitzen, wenn die

p_a lineare Abmessungen sind; ganz allgemein gilt aber, dafs die virtuellen Momente $-\partial \Phi/\partial p_a \,.\, \delta p_a$ von der Dimension der Energie sind.) Die Verallgemeinerung sowohl des HAMILTON'schen Princips wie auch der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen in der zweiten Form für den Fall, dafs das System äufseren Kräften gegenüber, welche nicht conservativ zu sein brauchen, Reactionen äufsert, werden wir im letzten Abschnitt dieses Bandes behandeln.

Die Bedeutung der auf der rechten Seite der LAGRANGE'schen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach den Coordinaten und nach den Geschwindigkeiten kann man sich an einem einfachen Beispiel veranschaulichen. Denken wir uns einmal die Bewegung eines Massenpunktes m dargestellt durch ein Polarcoordinatensystem in derjenigen Ebene, in welcher die Bahn des Punktes augenblicklich verläuft; r sei der Radiusvector, ϑ der Richtungswinkel von r. Die beiden Componenten der Geschwindigkeit sind dann dr/dt und $r.d\vartheta/dt$, erstere liegt in Richtung des Radiusvector, letztere steht senkrecht darauf. Die lebendige Kraft des Massenpunktes ist dann dargestellt durch:

$$L = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\},$$

bildet also eine homogene quadratische Function der beiden Differentialquotienten dr/dt und $d\vartheta/dt$, als Coefficient kommt darin die Coordinate r vor, während ϑ fehlt. Von Differentialquotienten nach den Coordinaten kommt also nur in Betracht:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m.r.\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck besitzt eine der Centrifugalkraft analoge Bildung; jene wurde durch das Product aus Masse, Krümmungsradius und Winkelgeschwindigkeitsquadrat gemessen, der vorstehende Ausdruck fällt also mit jener Kraft zusammen, sobald der Pol des Coordinatensystems in den Krümmungsmittelpunkt der Bahn gelegt wird. Die beiden $\partial L/\partial q_a$ unseres Beispiels sind:

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{dr}{dt}\right)} = m\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)} = m r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

und stellen Momente der Bewegung (Bewegungsgröſsen, siehe § 10) dar. Der erste giebt direct das Product der bewegten Masse und der Radialgeschwindigkeit, der zweite ist das Product des Trägheitsmomentes ($m r^2$) mit der Winkelgeschwindigkeit, würde sich aber durch Division mit r, welches ja bei dieser partiellen Differentiation constant zu setzen ist, auch auf die Dimension des Bewegungsmomentes bringen lassen. Wir erkennen aus diesem Beispiel, daſs wir in den Lagrange'schen Differentialgleichungen die $\partial L / \partial p_a$ als Analoga der Centrifugalkraft anzusehen haben, während die $\partial L / \partial q_a$ Bewegungsmomente repräsentiren, deren zeitliche Aenderung eben auf das Wirken von Kräften hinweist.

Dritter Abschnitt.

Anwendung. Rotationen starrer Körper. Theorie des Kreisels.

§ 66. Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

Der Hauptzweck der Einschaltung dieses Abschnittes ist, an einem Beispiele zu zeigen, welchen Nutzen das Hamilton'sche Princip oder die daraus herzuleitenden Lagrange'schen Gleichungen in der zweiten Form bei der Behandlung dynamischer Probleme dadurch bieten, daſs sie gestatten, die für das Problem geltenden Differentialgleichungen direct in solchen allgemeinen Coordinaten aufzustellen, welche für die mathematische Darstellung der Bewegung am geeignetsten erscheinen. Nebenbei wird die Behandlung des gewählten Beispiels unsere bereits in den §§ 42 bis 46 begonnenen Betrachtungen über die Rotation starrer Körper erweitern und uns bekannt machen mit den interessanten Wirkungen äuſserer Kräfte auf schnell rotirende Massen. Bevor wir den zu Anfang genannten Hauptzweck erfüllen, wollen wir in den ersten drei Paragraphen einigen vorbereitenden Betrachtungen Raum geben.

Die allgemeinste Bewegung, welche ein starrer Körper ausführen kann, läſst sich in jedem hinreichend kurzen Zeitelement auffassen als die Superposition einer Parallelverschiebung und einer Drehung um eine bestimmte durch den Körper gelegte Axe. Wirken beliebige äuſsere Kräfte auf den Körper, welche erstens eine auf den Schwerpunkt zu übertragende Resultante, zweitens auch ein resultirendes Kräftepaar liefern, welch' letzteres den Körper zu drehen strebt, so wird im Allgemeinen weder die Bewegung des Schwerpunktes eine gleichförmige sein, noch wird die Drehung um eine festgerichtete Axe und mit constanter Winkelgeschwindigkeit erfolgen, vielmehr werden die bestimmenden Gröfsen unter Wirkung endlicher Kräfte differenzirbare Functionen der Zeit sein. Es soll nur gesagt werden, dafs zu jeder Zeit eine bestimmte translatorische Geschwindigkeit des Schwerpunktes und eine bestimmte rotatorische Geschwindigkeit um eine bestimmte Axenrichtung die wirkliche Bewegung vollständig darstellt. Diese Aussage stimmt auch überein mit unserer früher (§ 62) gewonnenen Erkenntniss, dafs ein freier starrer Körper 6 Grade von Freiheit besitzt: Die Bewegung des Schwerpunktes wird bestimmt durch drei Angaben, etwa durch die drei Geschwindigkeitscomponenten parallel den Coordinatenaxen oder durch zwei Winkel, welche die Richtung der Bewegung im Raume festlegen und die Gröfse der Geschwindigkeit selbst; ebenso erfordert die Angabe der Rotation drei Stücke; man wählt etwa zwei Winkel, welche die Richtung der Drehungsaxe festlegen, und die Winkelgeschwindigkeit um diese Axe, oder man zerlegt die wirkliche Rotation geometrisch in drei Componenten, deren Axen den Coordinataxen parallel laufen, dann hat man drei Winkelgeschwindigkeiten anzugeben.

§ 67. Erscheinungen am Kreisel.

Wir wollen im Folgenden den allgemeinsten Fall der Bewegung eines starren Körpers nicht weiter verfolgen, obwohl sich die Differentialgleichungen dafür aufstellen und unter Annahme bestimmter Kräfte auch bisweilen vollständig integriren lassen. Die translatorischen Bewegungen sollen von vornherein aus dem Spiel bleiben, man kann diese meist ohne Schwierigkeit und ohne Störung der übrigen Rechnung hinzusetzen, wo es nöthig erscheint. Es soll jetzt angenommen werden, dafs ein bestimmter Punkt des Körpers durch irgend einen Mechanismus festgehalten werde, doch so, dafs der Körper sich noch in jeder Richtung ungestört um diesen festen Punkt drehen kann. Das vollkommenste Mittel, um diese Gebundenheit herzustellen, ist die sogenannte Cardanische Aufhängung, welche wir nachher näher erläutern werden, indessen genügen bisweilen in den wichtigsten Beziehungen auch viel einfachere Einrichtungen für diesen Zweck.

Wir sahen bereits am Schlusse von § 46, daſs ein Körper, welcher um die durch den Schwerpunkt gelegte Axe des gröſsten Trägheitsmomentes in Rotation versetzt ist, die Richtung dieser Axe zu erhalten strebt, auch wenn sie nicht durch äuſsere Mittel festgelegt ist. Endet diese Hauptaxe unten in einer Spitze, mit welcher man sie senkrecht auf eine horizontale Unterlage, etwa eine Tischplatte aufsetzt, so wird der Körper nicht umfallen, obwohl er ohne Rotation im labilen Gleichgewicht sein würde, sondern er wird mit stillstehender Axe gleichmäſsig weiter rotiren, wie man dies ja auch an den als Spielzeug bekannten Kreiseln beobachten kann. Wenn man die langsamen Ortsveränderungen des Kreisels unbeachtet läſst, so kann man auch bei diesem einfachen Instrument irgend einen Punkt der Drehungsaxe, entweder den unteren Endpunkt oder den Schwerpunkt, als unbeweglich ansehen. Die eben beschriebene einfachste Rotationsart wird beim Kreisel nur dann vorkommen, wenn die Wirkung der Schwerkraft aufgehoben ist, also bei genau verticaler Stellung der Axe. Nämlich den Schwerpunkt greift die abwärts gerichtete Schwerkraft an, der Unterstützungspunkt erfährt von der Tischplatte einen entgegengesetzt gleichen Auftrieb; beide vernichten sich nur bei verticaler Axenstellung, bilden aber sonst immer ein Kräftepaar, welches die Kreiselaxe in der Weise zu drehen strebt, wie dies beim Umfallen des nicht rotirenden Körpers eintritt, sobald man ihn auf die untere Spitze der Axe stellen will. Es kommt bei schräger Stellung des rotirenden Kreisels unter der Wirkung dieses Kräftepaares in der That eine Bewegung der Axe zu Stande, diese erfolgt aber bei schneller Drehung fast genau senkrecht zu der Verticalebene des Kräftepaares, also in wesentlich horizontaler Richtung, die Kreiselaxe beschreibt einen Kegelmantel, dessen Axe vertical steht. Als fester Punkt, also als Spitze des Kegels tritt dabei ein bestimmter Punkt der Drehungsaxe auf. Ist die unterstützte Spitze sehr scharf, so daſs sie sich in der Tischplatte eine kleine Vertiefung bohrt, aus welcher sie nicht herauskommen kann, so bildet diese den festen Punkt, ist dagegen das untere Axenende abgerundet und glatt oder die Unterlage sehr hart, so daſs dies Ende leicht gleiten kann, so bildet der Schwerpunkt des Kreisels den festen Punkt.

Es ist dies auf den ersten Anblick eine sehr paradox scheinende Wirkung der Kräfte, deren Nothwendigkeit man sich aber ohne analytische Rechnung auf folgende Weise klar machen kann. In Fig. 18 ist ein Kreisel veranschaulicht als eine massive Kreisscheibe, durch deren Mittelpunkt eine Nadel als Rotationsaxe senkrecht hindurchgestochen ist. Die Nadel bildet die Axe des gröfsten Trägheitsmomentes, der Kreisel kann also dauernd um diese Axe rotiren, sobald deren Richtung vertical ist. Diese Stellung des Kreisels ist in Fig. 18*a* in Seitenansicht wiedergegeben; die Drehungsrichtung ist durch den in den vorderen sichtbaren Scheibenrand eingezeichneten Pfeil angedeutet, die Drehung erfolgt mithin, von oben betrachtet, in Richtung des Uhrzeigers. Fragen wir nun, was für Kräfte man auf die Nadel wirken lassen mufs, um ihr oberes Ende aus der Ebene der Zeichnung heraus nach vorn um einen kleinen Winkel zu drehen, um also eine Stellung des rotirenden Kreisels hervorzubringen, wie sie in Fig. 18*b* in Seitenansicht dargestellt ist? Man kann nach früheren Auseinandersetzungen die Drehung um die (oben) nach vorn geneigte Axe zerlegen in zwei Drehungen, von denen die erste um die unverschobene Axenrichtung vor sich geht, zu der nun noch eine zweite hinzutritt, deren horizontale Axe senkrecht auf dem Papier stehend zu denken ist. Die Richtung dieser zweiten Drehung kann man in Fig. 18*b* ablesen aus den beiden Pfeilen am Vorderrand und am Hinterrand der jetzt in der perspectivischen Darstellung elliptisch erscheinenden Kreisscheibe, denn die Ränder der Scheibe geben zugleich die Bahnen der Randpunkte an. Die zweite Drehung erfolgt also, vom Beschauer aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers und in der Ebene des Papiers. Nach den Gesetzen der geometrischen Addition, welche für gleichzeitige Rotationen um verschiedene Axen gelten, ist die erste Componente gleich der resultirenden Rotation multiplicirt mit dem Cosinus des kleinen Ablenkungswinkels, den wir der Kreiselaxe ertheilt denken: Dieser Cosinus unterscheidet sich nicht merklich von 1, also ist die erste Componente wesentlich identisch mit der ursprünglichen Rotation in Fig. 18*a*. Die Wirkung der gesuchten Kräfte mufs also darin bestehen, dafs sie ein Rotationsmoment der Bewegungen, welches ursprünglich nicht vorhanden war, entstehen und anwachsen läfst bis zu einem Werth, welcher gleich dem ur-

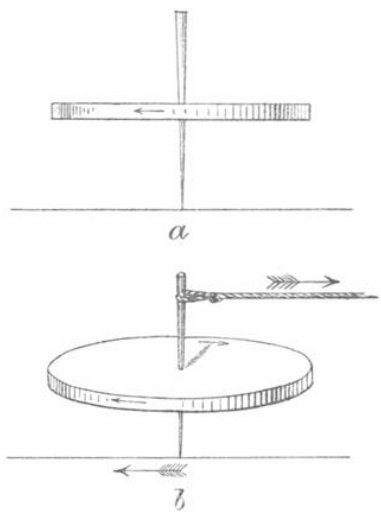

Fig. 18*a* und *b*.

sprünglich vorhandenen Hauptrotationsmoment mal dem Sinus des kleinen Ablenkungswinkels ist. Dies Anwachsen eines Rotationsmomentes, also das Existiren eines zeitlichen Differentialquotienten erfordert nach Gleichungen (91) (Seite 151) ein Rotationsmoment von Kräften um die Axe der entstehenden Bewegung, d. h. ein Kräftepaar in der Ebene des Papiers, und zwar mufs dieses Kräftepaar die oberen Theile der Nadel in der Richtung nach rechts angreifen, die unteren nach links. Wenn die untere Spitze der Axe sich in einer kleinen Vertiefung der Tischplatte festgesetzt hat, so genügt eine einzelne am oberen Axenende angreifende Kraft, der Widerstand des Lagers liefert dann von selbst die entgegengesetzt gleiche Kraft am unteren Ende, welche das Kräftepaar vervollständigt. Legt man also um das obere Ende der Axe vorsichtig eine leichte Fadenschleife und spannt den Faden durch einen leisen Zug der Hand in der Richtung nach rechts, wie dies in Fig. 18*b* angedeutet ist, so neigt sich die Axe nach vorn aus der Ebene des Papiers heraus, also quer gegen die Richtung der Kraft. In ganz ähnlicher Weise wirkt nun auf einen Kreisel mit bereits schiefstehender Axe das Kräftepaar, welches die Schwerkraft dann auf diese Axe ausübt. Nehmen wir an, die Axe sei in der Ebene der Zeichnung nach rechts geneigt; die Schwere strebt dann die Axe im Sinne des Uhrzeigers weiter abwärts zu drehen. Es ist dies derselbe Drehungssinn, den auch der nach rechts gespannte Faden hervorbrachte, die Axe wird sich also unter diesen Umständen ebenfalls nach vorn aus der Ebene des Papiers herausdrehen.

So gut wie rein treten diese merkwürdigen Erscheinungen nur bei sehr schneller Rotation, beträchtlichem Trägheitsmoment und verhältnifsmäfsig schwachen äufseren Kräften ein, sonst ist die Wirkung eine gemischte, indem die gewöhnlichen Bewegungserscheinungen, welche an rotationslosen Massen durch Kräftepaare hervorgebracht werden, sich auch bemerklich machen; streng genommen fehlen letztere Wirkungen niemals ganz. Wird die Rotation durch Reibung allmählich verlangsamt, so hat dies zur Folge, dafs der Oeffnungswinkel des Kegels, welchen die Drehungsaxe um die Verticale beschreibt, allmählich zunimmt, dafs also die obere Spitze des Kreisels nicht genau einen festen horizontalen Kreis durchläuft, sondern eine auf einer Kugeloberfläche gezeichnete Spirale, welche in zahlreichen, engen, fast horizontalen Windungen abwärts führt. Es tritt also dann mit der Zeit eine zunehmende Neigung der Axe ein.

§ 68. Folgerungen aus der Constanz der kinetischen Energie und des Hauptrotationsmomentes bei Abwesenheit äufserer Kräfte.

Wir wollen uns jetzt orientiren über die Bewegungen, die ein starrer Körper ausführen wird, wenn man ihm um eine beliebige durch den festen Schwerpunkt gelegte Axe eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ertheilt hat, und ihn dann ohne Wirkung äufserer Kräfte sich selbst überläfst. Wir wissen schon, dafs die anfängliche Axe nur dann beibehalten wird, wenn sie entweder dem gröfsten oder dem kleinsten Hauptträgheitsmoment entspricht, der mittleren Hauptträgheitsaxe entspricht nur eine labile Ruhelage, allen anderen Axen überhaupt keine Beständigkeit. Der vorgeschriebene Anfangszustand giebt dem Körper einen bestimmten Betrag an kinetischer Energie L, welcher während der Bewegung gewahrt bleiben mufs, da wir äufsere Kräfte, mithin auch Arbeitsleistungen bei der Bewegung ausgeschlossen haben. Aus denselben Gründen mufs auch das Hauptrotationsmoment R und die Richtung seiner Axe (oder die invariable Ebene) gewahrt bleiben. Diese beiden Erhaltungsgesetze werden uns einigen Aufschlufs über den Verlauf der Bewegungen geben.

Man kann in Folge der Additionsregeln gerichteter Gröfsen die herrschende Winkelgeschwindigkeit zu jeder Zeit in drei auf einander senkrechte Componenten zerlegen. Am einfachsten wird die Betrachtung, wenn man die Zerlegung vornimmt nach den drei Hauptträgheitsaxen des Körpers. Die Winkelgeschwindigkeit um die Axe des gröfsten Trägheitsmomentes $\mathfrak{A}$ sei bezeichnet durch $d\alpha/dt = \alpha'$, wo α eine Winkelabmessung ist; in gleicher Weise gehöre zur Axe des mittleren Hauptträgheitsmomentes $\mathfrak{B}$ die Geschwindigkeit $d\beta/dt = \beta'$ und zum kleinsten Trägheitsmoment $\mathfrak{C}$ gehöre $d\gamma/dt = \gamma'$. Wir wollen nun zunächst nachweisen, dafs die gesammte kinetische Energie gefunden wird als Summe der kinetischen Energien dieser drei Rotationscomponenten. Für eine einfache Rotation haben wir den Betrag von L in Gleichung (98) (Seite 172) aufgestellt gleich dem halben Product aus dem zur Axe gehörigen Trägheitsmoment und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit. Für unsere drei Bewegungscomponenten, einzeln genommen, würden wir also die Beträge $\frac{1}{2}\mathfrak{A}.\alpha'^2$, $\frac{1}{2}\mathfrak{B}.\beta'^2$, $\frac{1}{2}\mathfrak{C}.\gamma'^2$ finden. Um das L der resultirenden Bewegung zu finden, müssen wir zunächst die aus den Drehbewegungen $\alpha' \beta' \gamma'$ sich zusammensetzende Drehung σ' bilden. Diese wird:

$$\sigma' = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

Die Axe, um welche diese Drehung erfolgt, bildet mit den im Körper festen Hauptträgheitsaxen Winkel, deren Cosinus sind:

$$\frac{\alpha'}{\sigma'}, \quad \frac{\beta'}{\sigma'}, \quad \frac{\gamma'}{\sigma'}.$$

Das sind die allgemeinen Regeln für die Composition dreier auf einander senkrechter Vectoren. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{S}$ um die resultirende Drehungsaxe findet man nach Gleichung (107b) (Seite 178) aus den Hauptmomenten und den Richtungscosinus folgendermafsen:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}\left(\frac{\alpha'}{\sigma'}\right)^2 + \mathfrak{B}\left(\frac{\beta'}{\sigma'}\right)^2 + \mathfrak{C}\left(\frac{\gamma'}{\sigma'}\right)^2.$$

Die lebendige Kraft L ist nun gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{S} . \sigma'^2$, d. h. es ist:

$$2L = \mathfrak{A} . \alpha'^2 + \mathfrak{B} . \beta'^2 + \mathfrak{C} . \gamma'^2. \tag{176}$$

Also, wie sich auch in der Zeit die Winkelgeschwindigkeiten verändern, dieser gleich $2L$ gesetzte Complex mufs seinen Werth bewahren. Das Hauptrotationsmoment R setzen wir nun ebenfalls geometrisch zusammen aus den drei auf einander senkrechten Componenten. Jedes Rotationsmoment eines starren Körpers kann definirt werden als das Product aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit um eine bestimmte Axe; unsere Componenten in Richtung der Hauptaxen sind demnach gleich $\mathfrak{A} . \alpha'$, $\mathfrak{B} . \beta'$, $\mathfrak{C} . \gamma'$ und vereinigen sich nach dem pythagoräischen Satze zur Resultante. Man hat also:

$$R^2 = \mathfrak{A}^2 . \alpha'^2 + \mathfrak{B}^2 . \beta'^2 + \mathfrak{C}^2 . \gamma'^2. \tag{177}$$

Dieser gleich R^2 gesetzte Complex mufs ebenfalls constant bleiben.

Die Forderungen dieser beiden Gleichungen kann man sich durch ein geometrisches Bild veranschaulichen, indem man die Variabelen $\alpha' \beta' \gamma'$ als die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes im Raume ansieht. Der Umstand, dafs die Winkelgeschwindigkeiten ihrer Dimension nach keine Strecken sind, hindert diese Auffassung nicht; über die Möglichkeit, beliebige gerichtete Gröfsen durch Strecken zu versinnlichen, haben wir uns schon früher (Seite 154) versichert. Die beiden Gleichungen (176) und (177) definiren in diesem Bilde die Oberflächen zweier concentrischer und coaxialer

Ellipsoide, deren gröfste und kleinste Axen gleiche Lage haben. Die Haupthalbaxen des ersten Ellipsoides sind, nach zunehmender Gröfse geordnet:

$$\sqrt{\frac{2L}{\mathfrak{A}}} < \sqrt{\frac{2L}{\mathfrak{B}}} < \sqrt{\frac{2L}{\mathfrak{C}}}, \tag{178}$$

die des zweiten sind in derselben Reihenfolge:

$$\frac{R}{\mathfrak{A}} < \frac{R}{\mathfrak{B}} < \frac{R}{\mathfrak{C}}, \tag{179}$$

das zweite Ellipsoid ist von gestreckterer Gestalt als das erste, denn das Verhältniss der gröfsten Axe zur kleinsten ist im ersten Falle $\sqrt{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}$, im zweiten aber $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ und die Quadratwurzel einer über 1 liegenden Zahl ist immer kleiner als diese Zahl selbst. Die Gestalt oder das Aussehen beider Ellipsoide wird allein bestimmt durch die Gröfsenverhältnisse der Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ihre absolute Gröfse wird festgelegt durch die Constanten L und R. Da nun der vorgeschriebene Anfangszustand, also die Anfangswerthe von $\alpha' \beta' \gamma'$, in unserem Bilde einen Punkt darstellen, welcher auf beiden Ellipsoidoberflächen liegen mufs, so müssen sich beide Flächen nothwendigerweise durchschneiden; es ist ausgeschlossen, dafs die eine Fläche die andere ohne Berührung umschliefst, höchstens können unter singulären Bedingungen die Grenzfälle vorkommen, dafs die beiden Ellipsoide sich in den Endpunkten der gröfsten oder der kleinsten Axen berühren. Diese Fälle treten ein, wenn die ertheilte Anfangsrotation genau um die Axe des kleinsten oder des gröfsten Trägheitsmomentes erfolgt. In allen anderen Fällen durchschneiden sich die beiden Oberflächen längs zweier symmetrischer geschlossener Raumcurven, von deren verschiedenen möglichen Lagen und Formen die Figuren 19 *a*, *b*, *c* einige Anschauung bieten sollen. Die Conturen der beiden Ellipsoide sind in den Figuren zu erkennen; so weit dieselben von der anderen Fläche verdeckt werden, sind sie durch gestrichelte Linien angedeutet. Die Richtung der α' ist vertical, die der γ' horizontal und die der β' senkrecht auf dem Papier angenommen. Für das L-Ellipsoid ist in allen drei Zeichnungen die gleiche Gröfse gewählt, das gestreckte R-Ellipsoid dagegen ist, unter Bewahrung der Aehnlichkeit, anschwellend gedacht. Das kleinste Format, welches für dies zweite Ellipsoid möglich ist, berührt sich mit dem L-Ellipsoid in den spitzen Polen. Lassen wir nun R wachsen, so treten zunächst die beiden Spitzen der längsten Axe heraus (Fig. 19*a*). Die Schnittcurve umgiebt dann in beiden Oberflächen den Pol der zu den Abmessungen γ', also zum kleinsten Trägheitsmoment $\mathfrak{C}$ gehörigen Axe. Dies gilt, bis das R-Ellipsoid so groſs geworden ist, daſs dessen mittlere β'-Axe gleich der mittleren Axe des L-Ellipsoides ist. Dann hat die Schnittcurve eine besondere Gestalt, die in Fig. 19b angegeben ist, die beiden Aeste

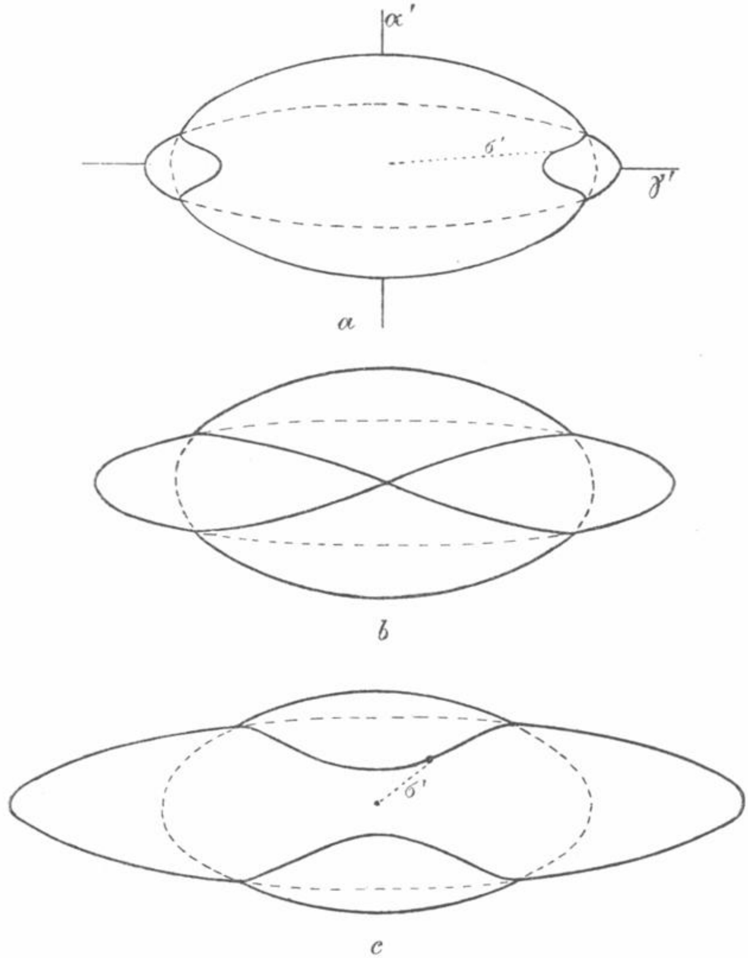

Fig. 19a, b, c.

des Schnittes treffen im gemeinsamen Pol der β'-Axe beider Ellipsoide zusammen, so daſs es unsicher wird, wie man die Fortsetzung zu machen hat, wenn man die Schnittcurve durchläuft und in diesen Doppelpunkt kommt. Lassen wir nun die veränderliche Fläche weiter anschwellen, so verschlingt sie immer mehr das L-Ellipsoid, von welchem jetzt nur die Umgebungen der flachen Pole der α'-Axe noch herausragen (Fig. 19 c). Die Schnittcurven umschliefsen also jetzt in beiden Ellipsoiden die Pole der kürzesten Axe, und zwar werden diese Umschliefsungen bei weiter wachsendem R immer enger, bis endlich der letzte Grenzfall eintritt, welcher dem gröfstmöglichen Werthe von R entspricht, nämlich der Fall, dafs die platten Pole beider Oberflächen sich berühren, dafs also das L-Ellipsoid ganz von dem R-Ellipsoid umschlossen ist.

Das geometrische Bild dieser beiden einander durchdringenden Ellipsoide soll uns nun über die Art der eintretenden Bewegung aufklären; das ganze Gebilde, folglich auch die Lage und Gestalt der Schnittlinien ist fest bestimmt durch den vorgeschriebenen Anfangszustand, der ja die Werthe von L und R bereits festlegt. Die Winkelgeschwindigkeiten $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, welche jederzeit den beiden Gleichungen (176) und (177) genügen, deren Repräsentanten im Bilde also Punkte sein müssen, die beiden Ellipsoidflächen zugleich angehören, werden nur auf den Schnittcurven zu suchen sein, und die resultirende Winkelgeschwindigkeit σ' wird dargestellt durch den vom gemeinsamen Mittelpunkt beider Oberflächen nach irgend einem Punkte der Schnittlinie gelegten Radiusvector. Ein solcher Vector ist in Fig. 19 a und c durch je eine punktirte Linie mit der Bezeichnung σ' angedeutet. Da nun von vornherein nicht anzunehmen ist, dafs bei einer Anfangsdrehung um eine beliebig im Körper gelegene Axe die Bewegung in der Weise einer unveränderten Rotation um diese Axe weiter geht, so ist klar, dafs der Vector σ' zu verschiedenen Zeiten nach verschiedenen Punkten der Schnittlinie hinzeigen mufs und da die Veränderungen der Geschwindigkeit stetige sein werden, so kommen wir zu der Vorstellung, dafs der Leitpunkt des Vectors σ' die Schnittcurve durchläuft. Andererseits folgt aber aus der Erhaltung des Hauptrotationsmomentes, dafs die absolute Richtung der resultirenden Drehungsaxe im Raume, also die Richtung des Vectors σ', eine unverrückbare sein mufs. Das Wandern der verschiedenen Punkte der Schnittcurve durch die feste Richtung σ' kann also nur in der Weise vor sich gehen, dafs die beiden fest verwachsenen Ellipsoide sich um ihren festen Mittelpunkt so drehen, dafs dabei die zwischen ihnen bestehende Schnittcurve durch den festen Strahl σ' geleitet wird. Die Hauptaxen der beiden Ellipsoide, denen in der wirklichen Bewegung des Körpers die drei Hauptträgheitsaxen entsprechen, werden also bei der Bewegung ihre Lage im Raume immerfort wechseln, die resultirende Drehungsaxe, um welche der Körper mit schwankender

Winkelgeschwindigkeit, entsprechend der verschiedenen Länge des Vectors σ' an verschiedenen Stellen der Schnittcurve, rotirt, steht zwar im Raume fest, nicht aber im Körper, die Drehungspole wechseln vielmehr fortwährend, indem immer andere und andere Punkte des Körpers diesen augenblicklich geschwindigkeitslosen Zustand annehmen. Der Bewegungszustand kann sich aber nach Durchlaufen des ganzen Umfanges der Schnittcurve periodisch wiederholen.

Dadurch ist der allgemeine Charakter dieser complicirten Bewegungen angegeben; vollständig ist die Beschreibung nicht, über den zeitlichen Verlauf des Umlaufes der Schnittcurve ist daraus noch nichts zu schliefsen. Unsere Betrachtung ist dadurch unvollständig, dafs wir nicht die den drei Graden von Freiheit entsprechenden drei Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt und integrirt haben, sondern uns hier auf nur zwei fertige Integralgleichungen beschränkt haben, deren man stets sicher ist, wenn keine äufseren Kräfte mitspielen. Die vollständige Lösung des Problems, die wir hier nicht behandeln wollen, führt auf elliptische Functionen der Zeit für die Winkelgeschwindigkeiten α', β', γ'.

Zum Beschlufs dieser Betrachtungen wollen wir noch auf die drei möglichen singulären Fälle eingehen, dafs die längsten Hauptaxen oder die mittleren oder endlich die kürzesten Hauptaxen der beiden durch L und R charakterisirten Ellipsoide gleiche Gröfse besitzen. Man kann diese singulären Fälle dadurch im Anfangszustande herstellen, dafs man dem Körper eine reine Rotation um die Axe des kleinsten oder des mittleren oder des gröfsten Hauptträgheitsmomentes ertheilt. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann man aus der Betrachtung der Ausdrücke für die Hauptaxen (178) und (179) direct erkennen. Besteht z. B. zu Anfang nur eine Winkelgeschwindigkeit α', so ist $2L = \mathfrak{A} . \alpha'^2$ und $R = \mathfrak{A} . \alpha'$, es ist also dann $\sqrt{\frac{2L}{\mathfrak{A}}} = \frac{R}{\mathfrak{A}} = \alpha'$, also sind die beiden kürzesten Axen gleich. Besteht zu Anfang nur β', so sind die mittleren Hauptaxen der beiden Ellipsoide gleich lang, haben wir endlich zu Anfang nur die Rotation γ', so stimmen die längsten Axen überein. Im ersten und dritten Falle degenerirt die Schnittlinie in den Berührungspunkt der platten resp. der spitzen Pole, im zweiten Falle besitzt sie die in Fig. 19*b* dargestellte Form. Ohne jede äufsere Störung kann in allen drei Fällen die Rotation um die anfänglich bestehenden Axen im Körper fortbestehen.

Erfolgt aber irgend ein Stofs, so wird dadurch sowohl L wie R verändert, beide Ellipsoide ändern ein wenig ihre Gröfse (nicht ihre Gestalt), im ersten und dritten Fall kann die zu einem Punkte degenerirte Schnittlinie dadurch nur zu einer kleinen, den betreffenden Pol eng umschliefsenden Curve werden, welche während der folgenden Bewegung in der oben beschriebenen Weise durchlaufen wird, dabei bleibt also die ursprünglich als Drehungsaxe dienende Hauptträgheitsaxe immer in nächster Nähe der jetzt herrschenden Axe, das Gleichgewicht dieser Axen ist also ein stabiles.

Verändern sich aber in Fig. 19*b* die Gröfsen der beiden Ellipsoide nur um ein geringes, so fällt die sich kreuzende Schnittcurve sofort auseinander in zwei getrennte Zweige, welche je nach der Art des Stofses den Figuren 19*a* oder 19*c* ähneln, eine dieser Curven giebt dann den Weg für die Weiterbewegung an, welche sich ganz anders gestaltet als vor dem Anstofs. Das Gleichgewicht bei einer reinen Drehung um die mittlere Hauptträgheitsaxe ist also ein labiles.

§ 69. Coordinatenwahl. Cardanische Aufhängung.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen wollen wir nun die Theorie der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt für gewisse, besonders wichtige Fälle in exacter Form durchführen, und müssen uns zu diesem Zwecke zunächst nach geeigneten Coordinaten umsehen, welche jede mögliche Stellung des Körpers vollständig anzugeben geeignet sind. Es werden auf jeden Fall dazu drei Angaben, entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade, erforderlich und ausreichend sein, welche man noch in verschiedener Weise wählen kann. Legt man z. B. durch den festen Drehpunkt drei auf einander senkrechte, im Raume festliegende Coordinatebenen, so kann man jede Lage des Körpers dadurch fixiren, dafs man die Orte zweier im Körper bezeichneter Punkte angiebt, welche nicht mit dem Drehpunkt in einer geraden Linie liegen. Das erfordert für jeden Punkt drei, zusammen also sechs Coordinatenbestimmungen, welche aber nicht unabhängig von einander sind, sondern verbunden durch die drei Relationen, welche aussagen, dafs die Abstände der beiden bezeichneten Punkte sowohl von einander, als auch vom Drehpunkt unveränderlich vorgeschrieben sind; thatsächlich bleiben also nur drei unabhängige Variabele. Eine andere häufiger gebrauchte Art von Bestimmungsstücken findet man dadurch, dafs man aufser dem im Raume festliegenden cartesischen Coordinatensystem auch noch ein in dem Körper befestigtes System von drei auf einander senkrechten Axen sich vorstellt. Sehr geeignet sind dazu die Axen der drei Hauptträgheitsmomente. Jede dieser Hauptaxen bildet bei beliebiger Stellung des Körpers mit den drei Coordinatrichtungen drei Winkel. Die Lage des Körpers ist bestimmt durch die neun Winkel, welche die drei Hauptträgheitsaxen mit den Coordinatenaxen bilden. Zwischen den Cosinus dieser neun Winkel bestehen aber sechs bekannte Relationen; unabhängig bleiben auch bei dieser Art von Coordinaten nur drei Stücke. Es wird häufig unbequem, mit einer gröſseren Zahl von Variabeln zu rechnen, als bei der Gebundenheit des Systems erforderlich sind, weil man dabei immer nebenbei die festen Relationen beachten muſs; wenn man anderseits nach Willkür einige dieser ganz gleichberechtigten Abmessungen mit Hülfe der Relationen eliminirt, so werden die mathematischen Ausdrücke dadurch unsymmetrisch und weniger übersichtlich. Das sind Uebelstände solcher zum Theil von einander abhängiger Coordinaten.

Wir wollen hier für unseren drehbaren Körper drei besonders geeignete unabhängige Coordinaten einführen, deren Bedeutung man sich am leichtesten veranschaulichen kann bei der Betrachtung der sogenannten cardanischen Aufhängung, der vollkommensten Einrichtung, um in irdischen Verhältnissen einen Körper frei drehbar um einen festen Punkt in seinem Innern zu machen. In Fig. 20 ist die Construction der Aufhängung schematisch dargestellt. Der Körper ist dort als abgeplattetes Rotationsellipsoid gezeichnet, doch ist diese Besonderheit zunächst bei der Aufstellung der Coordinaten nicht wesentlich. Die Axe des gröſsten Trägheitsmomentes, AA, ist als Drehungsaxe mit zwei spitzen Enden versehen und läuft reibungslos in zwei conischen Axenlagern, welche einander diametral gegenüber in einem starren Ringe I eingesetzt sind. (Alle rein technischen Einzelheiten, wie Stellschrauben, Axenlager u. s. w. sind in der Figur weggelassen.) Der Ring I selbst, mit dem von ihm gehaltenen Körper, ist wiederum drehbar um eine Axe BB, welche senkrecht zur Axe AA in der Ringebene festgelegt ist. Der Ring I besitzt zu diesem Zwecke an der Aussenseite seiner Peripherie zwei Spitzen, deren Lager in einem zweiten etwas weiteren Ringe II einander gegenüberstehen. Dieser Ring II ist endlich mittelst Spitzen drehbar um eine absolut festliegende Axe FF, welche in der Ebene II senkrecht auf der Axe BB steht. Der dritte Ring III, welcher die Axenlager der Axe FF tragen soll, ist unbeweglich und bestimmt dadurch eine feste Ebene, welche in der Figur als Ebene des Papiers gedacht ist. Folglich liegt auch FF in der Papierebene und zwar ist diese Axe vertical angenommen. Die Axe BB muſs daher stets horizontal liegen und wird im Allgemeinen aus der Ebene des Papieres heraustreten.

Bei dieser Art der Befestigung des Körpers wird der gemeinsame Durchschnittspunkt 0 der drei Axen A, B und F, welcher ein bestimmter Punkt des Körpers (bei richtiger Justirung des Apparates der Schwerpunkt) ist, unverschiebbar festgelegt; im Uebrigen ist aber der Körper, wie man leicht durchschaut, noch um jede beliebig gerichtete Axe drehbar und in jede gewünschte Stellung zu bringen. Eine Stellung des Körpers ist nun fest definirt, wenn erstens die Lage des Körpers im Ringe I, zweitens die Lage des

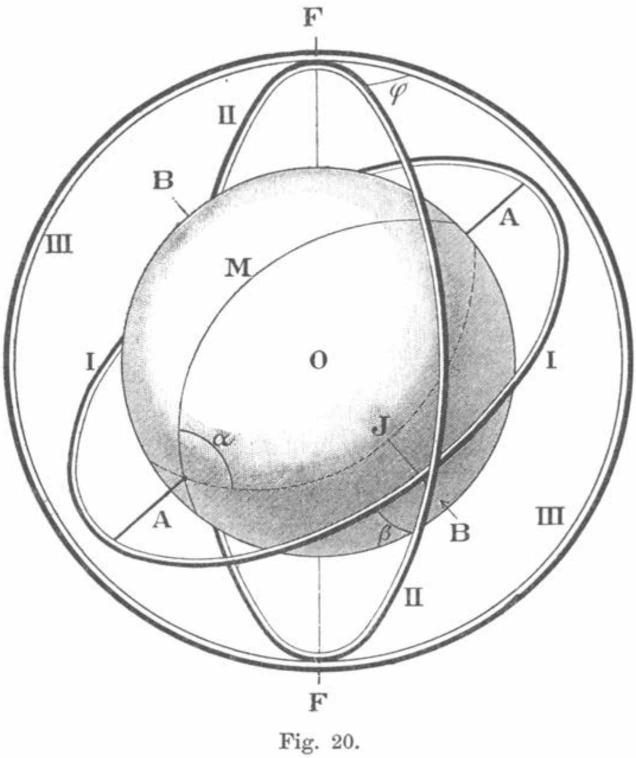

Fig. 20.

Ringes I im Ringe II, und endlich die Lage des Ringes II im feststehenden Ringe III angegeben ist. Wir denken nun auf der Oberfläche des Körpers einen bestimmten Meridian bezeichnet, welcher eine besondere durch die Axe AA gelegte Schnittebene in dem Körper festlegt; in Fig. 20 soll AMA diesen Meridian vorstellen. Die Ebene des Ringes I schneidet den Körper in einem anderen Meridian von veränderlicher Lage im Körper, dieser sei durch die gestrichelte Linie AJA angedeutet. Sobald man den Längenwinkel α zwischen diesen beiden Meridianen kennt, ist die Lage des Körpers gegen den Ring I bestimmt. Der Winkel zwischen den Ebenen I und II, die sich längs der BB-Axe durchschneiden, ist durch β bezeichnet, er bestimmt die Lage des ersten Kreises im zweiten. Der Ebenenwinkel, unter welchem sich die Ebenen II und III längs der FF-Axe durchschneiden, soll φ heifsen, er bestimmt die Lage des Ringes II gegen den im Raume festen Ring III. Also sind die drei Winkel α, β, φ unabhängige und ausreichende Coordinaten des um den Punkt 0 drehbaren Körpers. Selbstverständlich mufs man die Nullstellungen und den Drehungssinn, in welchem die Winkel positiv gerechnet werden sollen, im Voraus festsetzen, um Zweideutigkeiten zu vermeiden.

§ 70. Ausdruck der lebendigen Kraft für einen Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten.

Es soll nun die vereinfachende Annahme gemacht werden, dafs der Körper senkrecht zur Axe AA, also zum Hauptträgheitsmoment $\mathfrak{A}$ zwei gleiche Hauptträgheitsmomente besitze, dafs also $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ sei. Das schon in § 46 betrachtete Trägheitsellipsoid ist dann ein Rotationsellipsoid, daraus folgt, dafs die Trägheitsmomente um alle zur Polaraxe AA senkrechten, äquatorealen Axen die gleiche Gröfse $\mathfrak{B}$ besitzen. Der Körper selbst braucht deshalb nicht nothwendig ein drehrunder zu sein, die gleiche Eigenschaft kommt noch mannigfachen anderen Körperformen zu, z. B. auch jeder geraden Säule, deren Querschnitt ein reguläres Polygon, etwa ein Quadrat ist. Indessen wird es die allgemeinere Gültigkeit der folgenden Betrachtungen nicht beeinträchtigen, wenn wir uns von nun an den Körper als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid vorstellen, wie dies bereits in Fig. 20 geschehen ist.

Da die drei Winkel α, β, φ die Lage des Körpers vollständig bestimmen, so mufs der Bewegungszustand zu jeder Zeit angegeben werden durch die Aenderungsgeschwindigkeiten dieser Coordinaten, d. h. durch die drei Winkelgeschwindigkeits-Componenten:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha', \qquad \frac{d\beta}{dt} = \beta', \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'.$$

Die Axen der Drehungen α' und β' stehen immer senkrecht auf einander, ebenso die Axen von β' und φ', dagegen bilden die Axen von α' und φ' den veränderlichen Winkel β mit einander; dies kann man direct aus Fig. 20 ablesen. Wir können also jetzt die gesammte lebendige Kraft der resultirenden Drehung nicht so einfach zusammensetzen, wie dies in Gleichung (176) für die drei auf einander senkrechten Componenten α', β', γ' möglich war. Zur Auffindung des Ausdruckes der lebendigen Kraft kann man zwei äufserlich etwas verschiedene Wege einschlagen. Der erste Weg bedient sich der fertigen Formel (176), verlangt also, dafs wir drei auf einander senkrechte Drehungscomponenten auffinden. Dies geschieht dadurch, dafs man die Drehung φ' zerlegt in eine Componente um die Axe AA und eine zweite darauf senkrechte um diejenige äquatoreale Axe, welche in der durch AA und FF fixirten Verticalebene liegt. Erstere giebt die Winkelgeschwindigkeit $\varphi'.\cos\beta$, welche sich algebraisch mit α' zu der Summe $(\alpha' + \varphi'.\cos\beta)$ vereinigt, letztere giebt $\varphi'.\sin\beta$, in der dritten Richtung bleibt β' bestehen; zu beiden letzteren Drehungen gehören Trägheitsmomente von der Gröfse $\mathfrak{B}$, zur ersteren gehört $\mathfrak{A}$. Der doppelte Werth der lebendigen Kraft setzt sich daraus nach Gleichung (176) folgendermafsen zusammen:

$$2L = \mathfrak{A}.(\alpha' + \varphi'\cos\beta)^2 + \mathfrak{B}.\beta'^2 + \mathfrak{B}.\varphi'^2\sin^2\beta. \qquad (181)$$

Der andere Weg folgt demselben Gedankengang, welcher uns zur Aufstellung von Gleichung (176) führte; man hat danach erstens aus α', β' und φ' die resultirende Drehung zu bestimmen, und dann das Trägheitsmoment für diese schräg gelegene resultirende Drehungsaxe zu bilden. Zunächst bilden wir die geometrische Summe ψ' der beiden Vectoren α' und φ', welche den Winkel β einschliefsen. Diese ist nach einem bekannten trigonometrischen Satze direct aus Fig. 21a (a. folg. S.) abzulesen; man findet:

$$\psi'^2 = \alpha'^2 + \varphi'^2 + 2\alpha'\varphi'\cos\beta.$$

Der Winkel ε, welchen die Axe der Drehung ψ' mit der Axe von α' einschliefst, wird bestimmt durch

$$\sin\varepsilon = \frac{\varphi'}{\psi'}\sin\beta,$$

woraus unter Benutzung des vorstehenden Ausdrucks für ψ'^2 folgt:

$$\cos\varepsilon = \frac{\alpha' + \varphi'.\cos\beta}{\psi'}.$$

Zu ψ' tritt nun noch die darauf senkrechte Componente β' hinzu. Die Gesammtresultante σ' ist also gegeben durch die Gleichung:

$$\sigma'^2 = \psi'^2 + \beta'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \varphi'^2 + 2\alpha'\varphi'.\cos\beta.$$

Der Winkel η zwischen den Axen von ψ' und σ' wird bestimmt durch

$$\cos\eta = \frac{\psi'}{\sigma'}.$$

Aus ε und η läſst sich nun der Winkel ϑ berechnen, um welchen die zu σ' gehörende resultirende Drehungsaxe von der

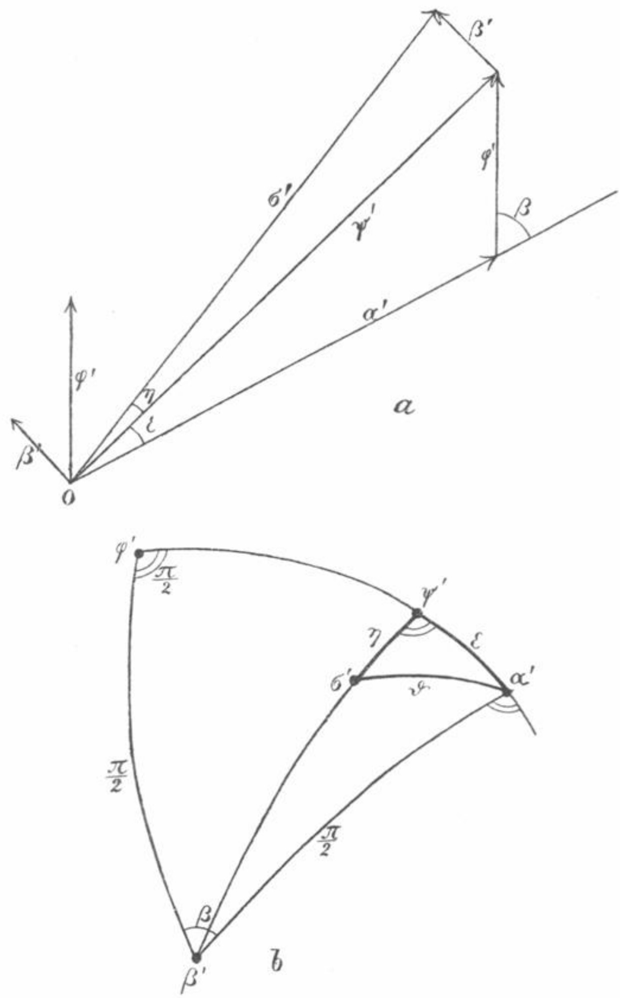

Fig. 21 *a* und *b*.

Polaraxe der Drehung α' abweicht. Nämlich die drei Bögen ε, η und ϑ bilden auf einer um den festen Drehpunkt geschlagenen Kugelfläche die Seiten eines rechtwinkeligen sphärischen Dreieckes, welches in Fig. 21 b nebst anderen die Figur bestimmenden Elementen gezeichnet und durch stärkere Umrandung hervorgehoben ist; der rechte Winkel liegt zwischen den Seiten ε und η am Durchstich der Axe von ψ'. Nach einer bekannten sphärischen Formel ist dann:

$$\cos\vartheta = \cos\varepsilon \, . \cos\eta \, ,$$

also nach den beiden vorstehenden Ausdrücken für $\cos\varepsilon$ und $\cos\eta$:

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha' + \varphi' . \cos\beta}{\sigma'} \, .$$

Hieraus folgt noch unter Benutzung des Werthes für σ'^2

$$\sin^2\vartheta = \frac{\beta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\beta}{\sigma'^2} \, .$$

Das Trägheitsmoment $\mathfrak{S}$ um die resultirende Drehungsaxe findet man nun nach der schon in Gleichung (107b) (Seite 178) gegebenen Regel, welche sich für $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ noch vereinfacht:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cos^2\vartheta + \mathfrak{B} \sin^2\vartheta \, ,$$

also nach den eben entwickelten Ausdrücken für $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \frac{(\alpha' + \varphi' . \cos\beta)^2}{\sigma'^2} + \mathfrak{B} \frac{\beta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\beta}{\sigma'^2} \, .$$

Die doppelte lebendige Kraft der Rotation ist nun

$$2L = \mathfrak{S} \, . \, \sigma'^2 ,$$

das heifst:

$$2L = \mathfrak{A} . (\alpha' + \varphi' . \cos\beta)^2 + \mathfrak{B} . (\beta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\beta) . \qquad (181)^*$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem auf die andere Art gefundenen, Gleichung (181) überein; die Berechnung wurde auch in der zweiten Weise durchgeführt, weil sie ein gutes Beispiel für die geometrische Addition auch schief zu einander stehender Rotationen bildet.

Es ist bei den Betrachtungen dieses Paragraphen stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dafs den beweglichen Ringen der cardanischen Aufhängung keine merkliche Trägheit, also bei ihrer Drehung auch keine lebendige Kraft zukommt. Wenn der rotirende Körper ein verhältnifsmäfsig grofses Trägheitsmoment besitzt und die Ringe so leicht wie möglich gearbeitet sind, kann man sich diese

Vereinfachung auch meistens gestatten, namentlich in solchen Fällen, wo die Rotation α' die schnellste ist, während die Ringe nur langsame Drehungen ausführen. Wir wollen uns hier und im Folgenden um die Massen der Ringe nicht weiter bekümmern.

§ 71. Ableitung der Differentialgleichungen für den Fall, daſs keine äuſseren Kräfte auf den Körper wirken.

Wenn der durch die cardanische Aufhängung festgelegte Drehpunkt der Schwerpunkt des Körpers ist, so muſs dieser bei allen möglichen Drehbewegungen die gleiche Höhenlage behalten; die potentielle Energie der Schwerkraft, welche gleich dem Product aus dem Gewicht des Körpers und der Höhe seines Schwerpunktes ist, bleibt daher bei jeder Bewegung constant, die Schwere kann also bei diesen Bewegungen keine Arbeit leisten, es ist ihr jeder Einfluſs auf den Körper entzogen, die statischen Momente, welche von der Schwere der einzelnen Massentheilchen des Körpers herrühren, vernichten sich in ihrer Summe für jede Stellung, der Körper ist der Schwerkraft gegenüber im indifferenten Gleichgewicht, er bewegt sich, als ob die Schwerkraft gar nicht vorhanden wäre. Wir wollen nun diese Bedingung als erfüllt ansehen und ferner annehmen, daſs auch keine anderen äuſseren Kräfte wirken, die potentielle Energie Φ ist dann als eine Constante zu behandeln, ihre partiellen Differentialquotienten nach den unabhängigen Coordinaten sind einzeln gleich Null zu setzen, gleichwie auch für jede mögliche virtuelle Verschiebung die Variation $\delta\,\Phi = 0$ sein muſs. Das Hamilton'sche Princip nimmt für diesen Fall die Gestalt an:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \,.\, dt = 0. \tag{182}$$

Die lebendige Kraft L haben wir im vorigen Paragraphen als homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten α' β' φ' mit Coefficienten, die von α, β, φ abhängen, aufgestellt. Wir könnten also aus der vorstehenden Form des Princips die Differentialgleichungen der Bewegungen herauslesen, indem wir erst α allein, dann β allein und endlich φ allein variiren, dabei würden die Variationen der Geschwindigkeiten $\delta\,\alpha'$, $\delta\,\beta'$, $\delta\,\varphi'$ gleich den Differentialquotienten der Variationen der Coordinaten zu setzen, und diese Differentialquotienten durch partielle Integration in $\delta\,\alpha$, $\delta\,\beta$, $\delta\,\varphi$ zu verwandeln sein. Indessen haben wir diese Umformungen des Hamilton'schen

Integrals bereits für den ganz allgemeinen Fall durchgeführt in § 65; wir können uns deshalb hier direct der dort abgeleiteten Resultate bedienen, nämlich der in Gleichung (175) aufgestellten LAGRANGE'-schen Differentialgleichungen. Diese Gleichungen nehmen für constantes Φ die einfachere Form an

$$-\frac{\partial L}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) = 0. \tag{182a}$$

Die p_a sind in unserem Falle die drei Winkel α, β, φ, die q_a sind die Winkelgeschwindigkeiten α', β', φ'. Von den Coordinaten selbst kommt in dem gefundenen Ausdruck für L (Gleichung 181 oder 181*) nur β vor, α und φ fehlen. Man findet nach den Regeln der Differentialrechnung die drei $-\partial L/\partial p_a$:

$$-\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \beta} = \mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\,.\,\varphi' \sin\beta - \mathfrak{B}\,.\,\varphi'^2 \sin\beta \cos\beta.$$

Die drei $\partial L/\partial q_a$ werden:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha'} = \mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = \mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\,.\cos\beta + \mathfrak{B}\,.\,\varphi'\,.\sin^2\beta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta'} = \mathfrak{B}\,.\,\beta'.$$

Aus diesen Daten setzen sich nun nach Gleichung (182a) die für das Problem geltenden Differentialgleichungen der Bewegung folgendermaſsen zusammen:

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\right\} = 0 \tag{183α}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\,.\cos\beta + \mathfrak{B}\,.\,\varphi'\,.\sin^2\beta\right\} = 0 \tag{183φ}$$

$$\mathfrak{A}\,.\,(\alpha' + \varphi' \cos\beta).\varphi'.\sin\beta - \mathfrak{B}.\varphi'^2 \sin\beta\cos\beta + \frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{B}\,.\,\beta'\right\} = 0. \tag{183β}$$

Die kurze und mühelose Rechnung, welche uns von dem Ausdruck der lebendigen Kraft zu diesen Differentialgleichungen geführt hat, zeigt deutlich den grofsen Nutzen, welchen die LAGRANGE'schen Gleichungen oder das im Wesentlichen damit identische HAMILTON'sche Princip in solchen Fällen gewähren, wo in Folge von inneren Bindungen im System die cartesischen Coordinaten nicht unabhängig von einander bleiben, und deshalb die Einführung anderer Abmessungen, welche durch die Bindungen nicht unfrei werden, zu einfacheren Darstellungen führt. Hätten wir das D'ALEMBERT'sche Princip oder die erste Form der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen angewendet, so hätten wir eine weit umständlichere Reihe von Umformungen unter steter Berücksichtigung der Schaar von Bedingungsgleichungen durchführen müssen, um schliefslich zu denselben Differentialgleichungen zu kommen.

§ 72. Eine besonders einfache Form der Bewegung.

Die soeben abgeleiteten drei Differentialgleichungen (183) bilden die vollständige Grundlage für die Berechnung der möglichen Bewegungen eines um seinen Schwerpunkt frei beweglichen Körpers mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten $\mathfrak{B}$ bei Abwesenheit äufserer Kräfte. Der Anfangszustand, aus welchem sich die nachfolgende Bewegung auf Grund jener Differentialgleichungen entwickelt, wird definirt durch die Angabe einer bestimmten Rotation. Dazu gehört erstens die Angabe der Lage der Rotationsaxe sowohl im Körper wie im Raume und zweitens die Angabe der Rotationsgeschwindigkeit um diese Axe. Diese Anfangsdaten werden geliefert, wenn man für die Zeit $t = 0$ die Werthe von α, β, φ und von α', β', φ' feststellt. Die Integration läfst sich in jedem Falle durch goniometrische Functionen ausführen und liefert im Ganzen sechs Integrationsconstanten, welche man dem Anfangszustand anzupassen hat. Hier soll der allgemeine Fall nicht durchgeführt werden, es mögen nur einige Bemerkungen über denselben Platz finden.

Zwei Integrationsconstanten kann man unmittelbar ablesen; da nämlich in den ersten beiden Differentialgleichungen je ein zeitlicher Differentialquotient gleich Null gesetzt wird, so müssen die beiden in geschweifte Klammern eingeschlossenen Ausdrücke constante Werthe bewahren:

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{A}\,.(\alpha' + \varphi' \cos\beta) = R_1\\&\mathfrak{A}\,.(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\cos\beta + \mathfrak{B}\,.\,\varphi' \sin^2\beta = R_2.\end{aligned}\right\}\qquad(184)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt noch

$$R_1 \cos\beta + \mathfrak{B} . \varphi' . \sin^2\beta = R_2 . \qquad (184a)$$

Die Constanten R_1 und R_2 werden bestimmt, indem man in den linken Seiten die Anfangswerthe von α', φ' und β einsetzt. Mit Hülfe dieser beiden Integrale kann man α' und φ' durch β und constante Gröſsen ausdrücken und diese Ausdrücke in die dritte Differentialgleichung (183β) einsetzen, welche dadurch zu einer reinen Differentialgleichung zweiter Ordnung für β wird. Eine erste Integration dieser Gleichung kann man durch Erweiterung mit dem integrirenden Factor $\beta' = d\beta/dt$ ermöglichen (es ist das derselbe Kunstgriff, den wir bereits auf Seite 60 bei der Lösung eines einfacheren Problems anwendeten). Das Resultat ist die Darstellung von β'^2 als Function von β, additiv behaftet mit einer dritten Integrationsconstante, welche durch die Anfangswerthe von β' und β einen festen Betrag erhält. Die zweite Integration ist dann eine einfache Quadratur, welche zunächst die Zeit als eine Arcusfunction von $\cos\beta$ liefert, dann aber umgekehrt auch β als Function der Zeit erkennen läſst. Nachdem diese gefunden ist, kann man mit Hülfe der Gleichungen (184) auch α' und φ' durch die Zeit darstellen. Das Interesse an der Frage ist damit oft befriedigt, da die Winkel α und φ selbst von geringer Bedeutung sind. Man kann aber auch, wo es gefordert wird, diese letzten Integrale aufsuchen.

In dieser Weise lieſse sich also der allgemeine Fall behandeln. Wir wollen uns hier nur die besondere Frage vorlegen, welche Bewegungen möglich sind bei constantem Winkel β. Solche Bewegungen würden darin bestehen, daſs der Körper, welcher in Fig. 20 dargestellt war, um seine Axe AA rotirt, während vielleicht diese Axe noch den Mantel eines Kreiskegels um die Axe FF beschreibt, während aber die Ringe I und II ihre gegenseitige Stellung dabei nicht ändern. Es ist klar, daſs eine solche besonders einfache Form der Bewegung bestimmte Beschränkungen in der Wahl des Anfangszustandes erfordert; wir wollen jetzt voraussetzen, daſs eine derartige Bewegung eingeleitet worden sei. In der dritten Differentialgleichung (183β) muſs dann der an letzter Stelle stehende Term $d\{\mathfrak{B} . \beta'\}/dt$ zu allen Zeiten verschwinden, diese Gleichung gewinnt dadurch, etwas anders angeordnet, folgende Gestalt:

$$\mathfrak{A} . \alpha' . \varphi' . \sin\beta + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) . \varphi'^2 . \sin\beta . \cos\beta = 0. \qquad (185)$$

Wenn wir nun, um φ'^2 zu isoliren, diese Gleichung durch $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) . \sin\beta . \cos\beta$ dividiren und die rechte Seite dann wieder gleich Null setzen, so liegen darin die drei Voraussetzungen, dafs weder $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$ noch $\sin\beta$ noch $\cos\beta$ gleich Null sind, anderenfalls wäre dieser Schritt nicht zulässig. Wir müssen also annehmen, dafs erstens das polare Trägheitsmoment $\mathfrak{A}$ verschieden ist von den äquatorealen Trägheitsmomenten $\mathfrak{B}$, und dafs zweitens β weder 0 noch $\pi/2$, noch π, noch $3\pi/2$ etc., sondern ein wesentlich spitzer oder stumpfer Winkel ist. Wir wollen diese Beschränkungen als erfüllt ansehen; die dadurch ausgeschlossenen Verhältnisse bilden singuläre Fälle von grofser Einfachheit der Erscheinungen, die uns hier nicht interessiren. Nach Ausführung der bezeichneten Division und Absonderung des einen Factors φ' erhält man:

$$\varphi' \cdot \left(\varphi' + \frac{\mathfrak{A} \cdot \alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cos\beta}\right) = 0. \tag{186}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn zu allen Zeiten

$$\varphi' = 0 \tag{186a}$$

oder

$$\varphi' = - \frac{\mathfrak{A}\, \alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cos\beta} \tag{186b}$$

ist. Der erste Fall $\varphi' = 0$ stellt die gleichförmige Rotation des Körpers um die feststehende Polaraxe AA dar; die Gelenkigkeit der cardanischen Aufhängung wird dabei gar nicht beansprucht, beide bewegliche Ringe stehen dabei still in der Lage, welche der Anfangsstellung der Rotationsaxe AA entsprechen. Dafs die Winkelgeschwindigkeit α' in diesem Falle constant sein mufs, bedarf kaum eines besonderen Nachweises, da die Erhaltung der lebendigen Kraft sowohl wie des Hauptrotationsmomentes diese Constanz fordern, ausdrücklich folgt sie aus der ersten der Gleichungen (184), welche für $\varphi' = 0$ übergeht in $\mathfrak{A}\, \alpha' = R_1$.

Es war von vornherein zu erwarten, dafs dieser Fall in der Lösung der Aufgabe enthalten sein würde, denn $\mathfrak{A}$ ist entweder das gröfste oder auch das kleinste Trägheitsmoment des Körpers; die Stabilität der Rotation um die unveränderte Axenrichtung eines dieser beiden Momente hatten wir bereits früher eingesehen. Weniger selbstverständlich erscheint der zweite Fall, in welchem eine ganz bestimmte Drehungsgeschwindigkeit φ' als Bedingung dafür auftritt, dafs der Winkel β unverändert bleibe. In dem Ausdruck (186b) bedeutet das negative Vorzeichen, dafs die Drehung φ' im entgegengesetzten Sinne stattfindet, wie die Drehung α', dabei mufs man aber beide Drehungen von derselben Seite aus betrachten, das Auge also nach einander in die beiden Verlängerungen derjenigen beiden Axenrichtungen halten, welche den Winkel β einschliefsen. Dreht sich z. B. der Körper in Fig. 20, von rechts oben betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers um die Axe AA, so mufs sich der Ring II, vertical von oben betrachtet, entgegengesetzt dem Uhrzeiger um die Axe FF drehen. Ferner erkennt man, dafs die Geschwindigkeit φ' direct proportional der Geschwindigkeit α' ist und zwar ist der Proportionalitätsfactor $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos\beta$ stets gröfser als 1, die Drehung φ' ist also eine schnellere als die Drehung α'. Wenn der Winkel β klein ist, so wird $\cos\beta$ nahezu gleich 1, die Geschwindigkeit φ' wird dann unabhängig von dem kleinen Winkel β. Man kann derartige Bewegungen häufig beobachten bei Kreiseln, welche auf einer horizontalen Unterlage schnell umlaufen. Steht die Kreiselaxe vertical, so bleibt sie feststehend; führt man dann einen leisen Schlag von der Seite her gegen das obere Ende, so kann man hinterher beobachten, wie das obere Axenende sehr schnell einen kleinen Kreis, die ganze Axe also einen sehr spitzen Kreiskegel dnrchläuft. Wenn die Drehungsgeschwindigkeit des Kreisels um die stillstehende verticale Hauptträgheitsaxe vor dem Stofse gleich α'_1 war, so tritt nach dem Stofse an deren Stelle erstens eine Drehung

$$\varphi'_2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot \alpha'_1, \tag{187}$$

welche die Symmetrieaxe des Kreisels den spitzen Kegel um die verticale Richtung beschreiben läfst, und zweitens eine rückläufige Drehung

$$\alpha'_2 = -\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,\alpha'_1, \tag{187a}$$

welche der Kreisel um seine Symmetrieaxe ausführt. Die angeführten Werthe sind nur dann als richtig anzunehmen, wenn der Stofs so gering war, dafs weder die lebendige Kraft noch das Rotationsmoment merklich dadurch verändert wurde, wenn also auch der Ablenkungswinkel β der Symmetrieaxe aus der Verticalen so klein geblieben ist, dafs höhere Potenzen von β vernachlässigt werden dürfen. Man überzeugt sich leicht, dafs sowohl die Bedingung (186b) zwischen φ'_2 und α'_2 erfüllt ist, so lange man $\cos\beta=1$ setzen darf, als auch davon, dafs unter der gleichen Beschränkung die kinetische Energie und das Hauptrotationsmoment vor und nach dem Stofse bis auf unendlich kleine Gröfsen dieselben geblieben sind.

Das Phänomen einer Kreiselbewegung mit sehr schnell vibrirender Symmetrieaxe steht also mit unserer Theorie im Einklang.

Man kann auch bei beliebiger Gröfse des Winkels β derartige Bewegungen hervorrufen, wenn man dem Körper nur den geeigneten Anfangszustand zu ertheilen vermag, was experimentell nicht leicht ist. Man mufs zu dem Zwecke dem in cardanischer Befestigung aufgehängten Körper einerseits eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit um seine Hauptaxe AA beibringen, die wir α'_0 nennen wollen und gleichzeitig noch eine schnellere rückläufige Drehung um die Axe FF, deren Geschwindigkeit φ'_0 in ganz bestimmter Weise dem Anfangswinkel β_0, unter welchem man die Hauptaxe A gegen die feste Axe F eingestellt hat, angepasst werden mufs. Es mufs nämlich gewählt werden

$$\varphi'_0 = -\frac{\mathfrak{A}\,\alpha'_0}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos\beta_0}. \tag{188}$$

Dagegen darf man dem inneren Ringe keine Drehung gegen den äufseren geben, also

$$\beta'_0 = 0. \tag{188a}$$

Setzt man diese Anfangswerthe α'_0, φ'_0 und β_0 in die dritte Differentialgleichung (183β) ein, so überzeugt man sich leicht, dafs auf der linken Seite alle Glieder bis auf den Differentialquotient von $\mathfrak{B}.\beta'$ fortfallen; da die rechte Seite gleich Null ist, mufs also die aus dem vorgeschriebenen Anfangszustand folgende Bewegung in der Weise beginnen, dafs sich dabei β' nicht verändert. Zu Anfang war aber $\beta'_0 = 0$. Die Bewegung wird also zunächst bei ungeändertem Winkel $\beta = \beta_0$ ablaufen. Deshalb werden auch (nach Gleichungen 184 und 184a) α' und φ' unverändert ihre Anfangswerthe bewahren, es werden sich in der dritten Differentialgleichung auch fernerhin alle Glieder bis auf das letzte vernichten, so dafs immer $d\beta'/dt = 0$ bleibt. Wir erhalten also aus dem gewählten Anfangszustande thatsächlich eine solche Bewegung, bei welcher die Axe AA fortdauernd mit grofser rückläufiger Geschwindigkeit einen festen Kreiskegel um die Axe FF durchläuft.

§ 73. Wirkung conservativer Kräfte.

Es sollen nun die Differentialgleichungen des Kreiselproblems in der Weise erweitert werden, dafs sie auch solche Fälle umfassen, in denen äufsere Kräfte auf den rotirenden Körper ausgeübt werden. Das HAMILTON'sche Princip oder die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen führen auch hier sofort zum Ziele, sobald es gelungen ist, die den Kräften zugehörende potentielle Energie Φ des Körpers als Function der Coordinaten α, φ, β aufzustellen. Man braucht dann zu den bereits gebildeten drei Differentialgleichungen (183), welche aus dem Schema (182a) hervorgingen, nur die entsprechenden Terme $\partial \Phi / \partial p_a$ auf den linken Seiten hinzuzufügen, also zur ersten $\partial \Phi / \partial \alpha$, zur zweiten $\partial \Phi / \partial \varphi$ und zur letzten $\partial \Phi / \partial \beta$, und man hat den gewünschten Ansatz für die Rechnung.

Als erstes Beispiel wollen wir die Wirkung der Schwere auf eine schrägstehende Drehungsaxe untersuchen. Unser Körper ist in der cardanischen Aufhängung den Einflüssen der Schwere völlig entzogen, wie wir bereits früher erkannt haben; man kann aber einen solchen Einfluſs wiederherstellen, indem man den Ring I an irgend einer Stelle belastet. Wir wollen annehmen, es sei bei dem in Fig. 20 nach rechts oben gewendeten Ende der Axe AA auf dem Ring I eine kleine Masse m befestigt worden, welche das Gleichgewicht des sonst sorgfältig justirten Apparates stört. Besitzt der Körper keine Rotationsgeschwindigkeit, so wird eine Bewegung des Systems eintreten, bei welcher die Masse m auf einem verticalen Kreisbogen ihre tiefste Lage aufsucht und um diese Lage Pendelschwingungen ausführt. Das davon völlig abweichende Verhalten des Körpers, im Falle er in schneller Rotation begriffen ist, wollen wir nun aufsuchen. Die potentielle Energie der Schwerkraft setzt sich zusammen aus einem unveränderlichen Theile, der sich auf den Drehkörper inclusive Ringsystem bezieht, und einem variabelen Theile, der in bekannter Weise von der Höhenlage der Masse m abhängt. Da wir nur die Differentialquotienten von Φ brauchen, interessirt uns allein der letztere Theil. Die Höhenlage der in ihrem Schwerpunkt concentrirt gedachten Masse m werde von der durch den festen Drehpunkt gelegten Horizontalebene aus gemessen. Bezeichnen wir den Radius des Ringes (oder genauer den Abstand des Massenpunktes m vom Drehpunkt) mit a, so ist bei einer Neigung der Axe um den Winkel β die Höhe über (resp. unter) der Mittelebene $a.\cos\beta$, mithin die potentielle Energie

$$\Phi = m.g.a.\cos\beta = C\cos\beta, \tag{189}$$

dabei bedeutet g das Maſs der Schwere, das constante Product $m.g.a$ werde der Kürze halber durch C bezeichnet.

Da die potentielle Energie in diesem Beispiel nur von der einen der drei Coordinaten, nämlich β, abhängt, bleiben die beiden ersten

Differentialgleichungen (183α und φ) unverändert, nur zur letzten ist auf der linken Seite hinzuzufügen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = - C \sin \beta \,. \tag{189a}$$

Die drei Differentialgleichungen, welche die Bewegungen beherrschen, sind daher:

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\right\} = 0 \tag{190α}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\cos\beta + \mathfrak{B}\,\varphi' \sin^2\beta\right\} = 0 \tag{190φ}$$

$$- C\sin\beta + \mathfrak{A}(\alpha' + \varphi' \cos\beta)\,\varphi' \sin\beta - \mathfrak{B}\,\varphi'^2 \sin\beta\cos\beta + \mathfrak{B}\,.\,\beta'' = 0. \tag{190β}$$

In der letzten Gleichung ist dabei $\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{B}\,\beta'\right\} = \mathfrak{B}\,.\,\beta''$ gesetzt, β'' bedeutet den zweiten Differentialquotienten des Winkels β nach der Zeit. Die Form der Lösung wird abhängen von dem Anfangswinkel β_0 und von den anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten α_0', φ_0', β_0'.

Wir wollen nun auch hier die einfachen Fälle aufsuchen, in denen die Bewegung bei unveränderlichem Winkel β verläuft; dafs sich stets ein geeigneter Anfangszustand finden läfst, welcher eine solche Bewegung einleitet, werden wir nachher zeigen. Es ist also jetzt immer $\beta'' = 0$ zu setzen; die dritte Gleichung (190β) verlangt dann:

$$- C\sin\beta + \mathfrak{A}\,\alpha'\,\varphi' \sin\beta + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\,\varphi'^2 \cos\beta \sin\beta = 0. \tag{191}$$

Diese Relation kann dazu benutzt werden, um φ' durch α' und β auszudrücken. Wir dividiren zu dem Zwecke durch $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta\,.\,\sin\beta$, machen also zunächst wieder dieselben Ausschliefsungen von Sonderfällen, welche wir im Texte zwischen den Gleichungen (185) und (186) bezeichnet hatten. Dann erhalten wir die Normalform einer quadratischen Gleichung für φ'

$$\varphi'^2 + \frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta}\cdot\varphi' - \frac{C}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta} = 0, \tag{191a}$$

deren Lösung man durch ein bekanntes Verfahren findet:

$$\varphi' = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{A}^2\,\alpha'^2}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2\cos^2\beta} + \frac{C}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta}}$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$\varphi' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta}\cdot\left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\,C(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta}{\mathfrak{A}^2\,\alpha'^2}}\right\}. \tag{191b}$$

Man erhält also zwei verschiedene reelle Werthe für die Geschwindigkeit φ'.

Wir wollen nun die Beschränkung einführen, dafs der in letzter Gleichung unter dem Wurzelzeichen zu 1 hinzuaddirte Bruch eine sehr kleine Zahl ist. Man übersieht leicht, welche Bedingung dadurch in das Problem hineingebracht wird, wenn man den Bruch folgendermafsen spaltet:

$$\varepsilon = \frac{2\,C}{\frac{1}{2}\mathfrak{A}\,\alpha'^2} \cdot \frac{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta}{\mathfrak{A}}. \tag{191 c}$$

Der zweite Factor dieses Ausdruckes ist im Allgemeinen ein echter Bruch von endlicher Gröfse, folglich mufs der erste Theil des Productes sehr klein sein und $\varepsilon < \frac{2\,C}{\frac{1}{2}\mathfrak{A}\,\alpha'^2}$. Der Zähler, $2C = m.g.(2a)$, giebt den erlaubten Spielraum der potentiellen Energie zwischen der höchsten und tiefsten Stellung des den Ring beschwerenden Gewichtes m an, der Nenner $\frac{1}{2}.\mathfrak{A}\,\alpha'^2$ mifst die kinetische Energie des um seine Hauptaxe rotirenden Körpers. Letztere kann man verhältnifsmäfsig grofs machen, indem man einen Körper von bedeutendem Trägheitsmoment wählt und diesem eine schnelle Axendrehung ertheilt. Man kann also bei hinreichender Kleinheit des Zulagegewichts m immer bewirken, dafs jener Bruch sehr klein wird. Dafs man dabei gar nicht zu extremen Verhältnissen zu greifen braucht, möge folgende Ueberschlagsrechnung zeigen. Der Körper sei einem Schwungrade ähnlich, dessen Masse M zum gröfsten Theile im Rande zusammengedrängt ist, sein Radius sei nahezu gleich a gemacht worden, so dafs $\mathfrak{A} = Ma^2$ ist. Macht das Rad in einer Secunde n Umdrehungen, so ist $\alpha' = 2\pi n$, mithin die kinetische Energie $\frac{1}{2}\mathfrak{A}\,\alpha'^2 = 2\,Ma^2\pi^2 n^2$ und der in Rede stehende Bruch

$$\varepsilon < \frac{m.g.}{Ma\,\pi^2 n^2}.$$

Messen wir alle Gröfsen im C.G.S.-System, so kann für diese Schätzung hinreichend genau die Mafszahl von g gleich $100\,\pi^2$ (d. i. 986) gesetzt werden, dann wird

$$\varepsilon < \frac{100}{n^2} \cdot \frac{m}{Ma}.$$

Läfst man nun den Körper etwa 10 Touren in der Secunde ausführen, was einer durchaus mäfsigen Rotationsgeschwindigkeit entspricht, die man durch kräftiges Abziehen einer um den dünnen

Axenstiel gewickelten Schnur bei weitem übertreffen kann, so wird $\varepsilon < m / M a$.

Denken wir uns, um einen handlichen gyroskopischen Apparat anzunehmen, den Radius des Schwungrades etwa 5 cm grofs und dessen Masse gleich etwa 400 g, so wird $\varepsilon < m / 2000$; das aufgesetzte Gewicht kann also immerhin mehrere Gramm schwer sein, ohne dafs dadurch ε die Gröfsenordnung von 1/1000 übersteigt.

Bei schnelleren Rotationsgeschwindigkeiten wird der Bruch wegen des im Nenner stehenden Quadrates der Tourenzahl, resp. der Winkelgeschwindigkeit α', noch bedeutend kleiner.

Diese experimentell sehr gut herstellbaren Bedingungen wollen wir jetzt als erfüllt annehmen, und zusehen, welche Vereinfachungen dadurch in dem Ausdruck für φ' in Gleichung (191b) eintreten. Bei kleinem ε wird es hinreichen, in der Reihenentwickelung der Quadratwurzel das lineare Glied allein beizubehalten, also zu setzen:

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

die genannte Gleichung geht dann über in:

$$\varphi' = \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cos\beta} \left\{ -1 \pm (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon) \right\}.$$

Setzt man den Werth von ε aus Gleichung (191c) ein, so erhält man, wenn das positive Vorzeichen der Wurzel gilt:

$$\varphi'_{+} = \frac{C}{\mathfrak{A} . \alpha'}, \tag{191d}$$

wenn das negative Vorzeichen gilt:

$$\varphi'_{-} = - \frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cos\beta} - \frac{C}{\mathfrak{A}\,\alpha'} \tag{191e}$$

Vergleichen wir diese beiden Lösungen mit den beiden Lösungen der anlogen quadratischen Gleichung (186) bei Abwesenheit äufserer Kräfte. Die Wurzel φ'_{+} entspricht der damaligen Lösung $\varphi' = 0$, während φ'_{-} nahezu übereinstimmt mit der anderen Lösung (186b), welche die Bewegung mit schnell vibrirender Axe darstellte. Der erste Theil von φ'_{-} stellt nämlich ganz wie in jenem anderen Falle eine rückläufige Rotation um die feste Axe FF dar, deren Winkelgeschwindigkeit gröfser als α' ist, der zweite hinzukommende Antheil ist verschwindend klein dagegen, wie man sich überzeugen kann, wenn man bedenkt, dafs

$$\frac{C}{\mathfrak{A}\,\alpha'} = \frac{C}{\mathfrak{A}\,\alpha'^{2}} \cdot \alpha'$$

ist. Dieser Antheil kann also vernachlässigt werden. Die zweite Lösung lehrt uns nichts wesentlich Neues, sagt nur aus, dafs auch unter der Wirkung einer äufseren Kraft solche Bewegungen mit schnell vibrirender Symmetrieaxe möglich sind. Von besonderem Interesse ist dagegen die erste Lösung (191d), welche eine, gegen α' verglichen, aufserordentlich langsame rechtläufige Drehung des rotirenden Körpers um die feste Verticalaxe FF anzeigt, bei welcher also die Symmetrieaxe AA nicht feststeht, sondern allmählich herumgeführt durch den Mantel eines Kreiskegels vom Oeffnungswinkel β. Diese Drehungsgeschwindigkeit φ'_+ zeigt sich unabhängig von β und umgekehrt proportional dem Rotationsmoment $\mathfrak{A}\alpha'$. Je gröfser letzteres also ist, um so langsamer wird das Vorrücken der Axe in dem Kegelmantel erfolgen, um so deutlicher wird sich also das Streben des rotirenden Körpers offenbaren, im Widerstand gegen die äufsere Kraft die Richtung seiner Axe im Raume zu bewahren; aber eine allmähliche Drehung um die Verticalaxe wird immer eintreten, wie dies auch experimentell stets zu beobachten ist, sowohl an den Apparaten mit cardanischer Aufhängung des Körpers nach Befestigung eines kleinen Uebergewichts am Ende der Axe als auch an den gewöhnlichen Kreiseln, deren Axen doch niemals genau vertical gestellt werden können.

Es sei noch bemerkt, dafs bei dieser Art der Bewegung die Specialfälle $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = 0$ und $\cos\beta = 0$, welche bei der Ableitung der Wurzeln der quadratischen Gleichung ausgeschlossen wurden, keine wirklichen Ausnahmen bilden, sondern zu demselben Resultate führen. Man kann dies schon daraus schliefsen, dafs die im Nenner des Ausdruckes φ' in Gleichung (191b) auftretenden Factoren $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\cos\beta$ sich bei der Bildung von φ'_+ in Gleichung (191d) wegheben, anderseits kann man in diesen Specialfällen auch direct auf die Gleichung (191) zurückgehen, welche dann ihr letztes, φ'^2 enthaltendes Glied verliert und zu einer linearen Gleichung für φ' wird, aus welcher die eine Wurzel φ'_+ sofort folgt, sobald der Fall $\sin\beta = 0$ ausgeschlossen bleibt.

Wir wollen nun zum Schlusse dieser Betrachtung noch zeigen, dafs es stets möglich ist, einen Anfangszustand so zu wählen, dafs die Theorie daraus eine Bewegung mit constantem Winkel β, welche wir ja vorausgesetzt haben, berechnen mufs. Der gesuchte Anfangszustand wird darin bestehen, dafs man dem Körper eine bedeutende Rotationsgeschwindigkeit α_0' ertheilt um seine Axe AA, welche einen bestimmten Winkel β_0 mit der Verticalen bildet, und in deren oberem Endpunkt das kleine Uebergewicht m angebracht ist, dafs ferner $\beta_0' = 0$ ist, und daſs schlieſslich dem Körper um die Axe FF die kleine Drehungsgeschwindigkeit $\varphi_0' = C/\mathfrak{A}\,\alpha_0'$ ertheilt ist. Setzt man diese Anfangsdaten in die Differentialgleichungen (190 β) ein, so ergiebt sich der Anfangswerth $\beta_0'' = 0$. (Exact mathematisch ergiebt sich zwar nicht 0, sondern ein Betrag, welcher von höherer Ordnung verschwindend klein ist, das kommt aber nur daher, daſs die Lösung φ'_+ in Gleichung (191 d) durch eine abgekürzte Reihenentwickelung der Quadratwurzel der genauen Lösung (191 b) erhalten ist.) Wegen $\beta_0'' = 0$ und $\beta_0' = 0$ wird also die Bewegung zunächst anlaufen bei constantem Winkel β_0, dann folgt aber aus den Gleichungen (184) und (184 a), welche auch in diesem Falle, wo die äuſsere Kraft nur von der Coordinate β abhängt, ihre Gültigkeit bewahren, daſs φ' und α' zunächst ihre festen Anfangswerthe bei der Bewegung beibehalten müssen, d. h. daſs auch später noch diese Anfangsdaten in der dritten Differentialgleichung (190 β) herrschen müssen, daſs also β'' dauernd gleich Null bleibt, mithin auch kein β' entstehen kann, daſs also aus diesem Anfangszustand thatsächlich eine Bewegung folgt, bei welcher die Symmetrieaxe AA einen festen Kreiskegel durchläuft. Wenn man in den Anfangsbedingungen die sehr langsame Drehung φ'_0 nicht mit aufnimmt, sondern $\varphi'_0 = 0$ setzt, so mögen wohl die Bewegungen ein wenig anders verlaufen, der Winkel β wird kleine Schwankungen aufweisen, doch bleibt der Typus dieser merkwürdigen Erscheinungen wesentlich derselbe. Es mischen sich in der praktischen Ausführung der Versuche ohnehin noch mancherlei Einflüsse ein, die hier unbeachtet geblieben sind, namentlich Luftwiderstand und Reibung in den Axenlagern, die mit der Zeit den Verlauf in der Weise beeinflussen, daſs die Gesammtenergie sich allmählich verringert; α' nimmt dabei ab, φ' muſs zunächst wachsen und der Winkel β wird sich vergröſsern.

§ 74. Präcessionsbewegung der Erde.

Das zweite Beispiel, welches wir jetzt betrachten wollen, soll uns über die sogenannte Präcessionsbewegung der Erdaxe eine allgemeine Aufklärung geben. Die vollständige, allen thatsächlichen Verhältnissen entsprechende Theorie dieser Erscheinung ist ein sehr complicirtes Problem, man kann sich indessen durch Annahme gewisser der wahren Natur nahekommender Vereinfachungen bereits einen Ueberblick verschaffen, mit dem wir uns hier begnügen wollen. Die Erde läuft in einer nahezu kreisförmigen Bahn um die Sonne, wir wollen hier eine ideal kreisförmige Bahn annehmen, dann wird die dabei auftretende Centrifugalkraft jederzeit im Gleichgewicht gehalten durch die Anziehungskraft der Sonne. Diese beiden Kräfte mufs man sich als Resultanten im Mittelpunkt der Erde angreifend denken; es ist indessen zu beachten, dafs die der Sonne zugekehrten Theile des ausgedehnten Erdkörpers wegen ihres geringeren Abstandes eine stärkere, die der Sonne abgekehrten Theile wegen ihres gröfseren Abstandes eine schwächere Attraction erfahren, als das Centrum der Erde, während die Centrifugalbeschleunigung der Revolutionsbewegung in allen Theilen die gleiche Gröfse hat. (Die Rotation der Erde hat hierauf keinen Einflufs, da deren Centrifugalkräfte mit der irdischen Schwere zusammen einen constanten Gleichgewichtszustand in der abgeplatteten Gestalt der Erde bilden.) Es bleibt also auf der Tagseite der Erde ein gewisser Ueberschufs der Anziehung, auf der Nachtseite ein eben so grofser Ueberschufs der Centrifugalkraft übrig; diese beiden Kraftreste werden aber keine anziehende oder abstofsende Resultante auf den Erdkörper als Ganzes ausüben, nur die beweglichen Wassermassen an der Oberfläche werden davon betroffen und erzeugen die Erscheinung der Ebbe und Fluth, welche wir hier gleichfalls aus dem Spiele lassen wollen. Wenn die starre Erde eine vollkommene Kugel wäre und in concentrischen Schichten gleiche Dichtigkeit besäfse, so würden diese beiden Kräfte auch kein Drehungsmoment auf die Erde ausüben; da indessen in Folge seiner Rotation der Erdkörper am Aequator angetrieben ist, und die Erdaxe eine schiefe Stellung gegen die Ebene ihrer Bahn um die Sonne (d. i. die Ekliptik) zeigt, so kommt in der That ein Drehungsmoment zu Stande, welches den Aequatorwulst und folglich den ganzen fest mit ihm verbundenen Erdball angreift und zwar strebt dieses Kräftepaar in allen Stellungen der Erde zur Sonne den Aequator in die Ebene der Ekliptik hineinzuziehen, also die Polaraxe senkrecht zu ihr zu stellen. Die Tendenz dieser angestrebten Drehung ist immer dieselbe, die Intensität ist aber verschieden: Am gröfsten im Sommer und im Winter, zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen aber den Werth Null berührend. Auch die jährlichen Schwankungen dieses Drehungsmomentes wollen wir nicht berücksichtigen, da sie sich in der sehr langsamen Präcessionsbewegung, welche wir hier erklären wollen, vollkommen ausgleichen.

Wir denken uns also die Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, welchem eine gewisse Winkelgeschwindigkeit α' um die Axe des gröfsten Trägheitsmomentes $\mathfrak{A}$ ertheilt worden ist, und auf dessen Axe ein Kräftepaar wirkt, welches dieselbe senkrecht zu der festen Ebene der Ekliptik zu stellen strebt. Von dieser erstrebten Stellung weiche die Axe um den Winkel β ab; bei der Erde ist ungefähr $\beta = 23{,}5^0$. Das statische Moment dieses Kräftepaares kann von dem Winkel β abhängen, soll aber sonst von der Zeit unabhängig sein. Dadurch sind dieselben Bedingungen hergestellt, denen der rotirende Körper in der cardanischen Befestigung (Fig. 20) unterliegt; wir können den Ausdruck der lebendigen Kraft in Gleichung (181) verwenden, es handelt sich nur noch um den zutreffenden Ausdruck der potentiellen Energie, welcher jenes Kräftepaar zu erklären geeignet ist.

Um die für dieses Beispiel passende Form der Function Φ zu finden, genügt es, den Aequatorwulst als einen massiven Gürtel aufzufassen, welcher fest um die übrigens kugelförmig gedachte Erde gelegt ist, und die potentielle Energie der Sonnenanziehung auf diesen Gürtel zu berechnen für eine Stellung, welche die geringsten analytischen Schwierigkeiten verursacht. Wir wählen die Stellung zur Zeit des Sommer- oder Wintersolstitiums. Die Sonnenmasse sei $\mathfrak{M}$, die Längendichtigkeit des Massengürtels λ, der Radius desselben a, der Längenwinkel α werde gezählt von derjenigen Stelle des Aequators, welche Mittag hat. Die potentielle Energie eines Massenelementes $\lambda . a . d\alpha$ ist dann nach dem Gravitationsgesetz (vgl. z. B. Gleichung (183a) Seite 250):

$$d\Phi = -G \cdot \frac{\mathfrak{M} . (\lambda\, a\, d\alpha)}{r} + \text{const.}$$

Dabei bedeutet r den Abstand des Massenelementes vom Sonnencentrum. Die Strahlen r können wegen der grofsen Entfernung der Sonne für alle Theile des Aequatorgürtels parallel angenommen werden dem Strahle, welcher die Centra beider Himmelskörper verbindet. Die Länge dieses Centralabstandes sei l. Wir müssen nun die Länge r ausdrücken durch l, a, α und den Neigungswinkel β der Aequatorebene gegen die Ekliptik. Zu diesem Zwecke denken wir uns den in der Ekliptik liegenden Aequatorealdurchmesser gezogen, welcher zur Zeit des Solstitiums senkrecht auf dem Strahle l steht. Der senkrechte Abstand des durch den Winkel α bezeichneten Massenelementes von diesem Durchmesser ist $a . \cos\alpha$, die Projection dieser Strecke auf die Ebene der Ekliptik ist dann $a . \cos\alpha . \cos\beta$, diesen Betrag haben wir von l abzuziehen, um r zu finden:

$$r = l - a \cos\alpha \cos\beta.$$

Da nun a verschwindend klein gegen l ist, können wir für $1/r$ eine abgekürzte Reihenentwickelung bis zum quadratischen Gliede setzen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l\left(1 - \frac{a}{l}\cos\alpha\,.\cos\beta\right)} = \frac{1}{l} + \frac{a}{l^2}\cos\alpha\,.\cos\beta + \frac{a^2}{l^3}\cos^2\alpha\,.\cos^2\beta.$$

Die potentielle Energie des ganzen Gürtels findet man durch Integration von $d\,\Phi$ nach α zwischen den Grenzen 0 und 2π, das giebt unter Verwendung vorstehender Reihe:

$$\Phi = -\,G\frac{\mathfrak{M}\,\lambda\,a}{l}\int\limits_0^{2\pi} d\,\alpha - G\frac{\mathfrak{M}\,\lambda\,a^2}{l^2}\cos\beta\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\,\alpha$$

$$-\,G\frac{\mathfrak{M}\,\lambda a^3}{l^3}\cos^2\beta\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\,\alpha + \text{const.}$$

Nun ist:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\,\alpha = 2\,\pi,\quad \int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\,\alpha = 0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\,\alpha = \pi,$$

ferner ist die Gesammtmasse des Gürtels:

$$M = 2\,\pi\,a\,\lambda,$$

man findet also:

$$\Phi = -\,G\frac{\mathfrak{M}\,M}{l} - G\,\frac{\mathfrak{M}\,M\,a^2}{2\,l^3}\cos^2\beta + \text{const.}$$

Der erste Summand giebt den Werth, den man allein erhalten würde, wenn die Masse M gleich wie die übrige Erdmasse im Erdmittelpunkt concentrirt gedacht wird. Dieser Antheil ist nach unseren Annahmen unveränderlich, gesellt sich also zu der unbestimmten Constanten, mit welcher jedes Φ behaftet ist; der zweite Summand ist die gesuchte Function von β, aus welcher man auch noch einen constanten Theil absondern kann, indem man $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$ setzt, der variable Theil von Φ ist dann

$$\Phi = +\,C\sin^2\beta \tag{192}$$

Die Constante $C = G\dfrac{\mathfrak{M}\,M}{2\,l}\cdot\dfrac{a^2}{l^2}$ ist eine aufserordentlich kleine Energiegröfse im Vergleich zur potentiellen Energie zwischen Erde und Sonne im Ganzen; es läfst sich schätzen, dafs sie auch verschwindend klein ist gegen die kinetische Energie der Rotationsbewegung der Erde um ihre Axe, welche in unserer Bezeichnung durch $\frac{1}{2}\,.\,\mathfrak{A}\,.\,\alpha'^2$ gegeben ist.

Nachdem wir nun in Gleichung (192) den gesuchten Ausdruck für Φ gefunden haben, können wir, wie früher, aus den LAGRANGE'schen Grundgleichungen die Differentialgleichungen unseres Problems herleiten. Die beiden auf α und φ bezüglichen Gleichungen behalten dieselben Formen, die wir schon in (183α und φ) und in (190α und φ) angeführt haben. Zur Bildung der dritten Differentialgleichung müssen wir zu (183β) hinzufügen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 2\,C \sin\beta\,.\cos\beta,$$

erhalten also:

$$\left.\begin{aligned} 2\,C\sin\beta\cos\beta + \mathfrak{A}\,(\alpha' + \varphi'\cos\beta)\,\varphi'\sin\beta \\ - \mathfrak{B}\,\varphi'^2\sin\beta\cos\beta + \mathfrak{B}\,\beta'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (192\beta)$$

Wir suchen wieder nach Bewegungen, welche bei constantem Winkel β möglich sind, setzen also $\beta'' = 0$ und erhalten nach Division mit $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sin\beta\cos\beta$ die quadratische Gleichung:

$$\varphi'^2 + \frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos\beta}\,\varphi' + \frac{2\,C}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} = 0,$$

deren Lösung ist:

$$\varphi' = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos\beta}\cdot\left\{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\,C(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos^2\beta}{\mathfrak{A}^2\,\alpha'^2}}\right\}.$$

Die Quadratwurzel können wir wegen der Kleinheit des im Radicandus zu 1 tretenden Gliedes durch die beiden ersten Glieder ihrer Reihenentwickelung ersetzen. Je nachdem man das positive oder negative Vorzeichen gelten läfst, erhält man dann die Werthe:

$$\varphi'_+ = -\frac{2\,C\cos\beta}{\mathfrak{A}\,\alpha'} \qquad (193)$$

oder

$$\varphi'_- = -\frac{\mathfrak{A}\,\alpha'}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos\beta} + \frac{2\,C\cos\beta}{\mathfrak{A}\,\alpha'}. \qquad (193\text{a})$$

Die zweite Lösung stellt wiederum eine Bewegung mit schnell vibrirender Axe dar, welche an der Erde nicht beobachtet wird, und deshalb hier nicht interessirt. Die erste Lösung φ'_+ liefert die sogenannte Präcessionsbewegung, welche die Erdaxe ausführt. Diese

Bewegung, bei welcher also die Polaraxe einen Kegelmantel um die Axe der Ekliptik beschreibt, geht so aufserordentlich langsam vor sich, dafs sie nach Verlauf eines einzelnen Jahres eine nur durch feine Messungen erkennbare Verschiebung von 50,24 Bogensecunden hervorbringt; der ganze Umlauf vollzieht sich in einem Zeitraum von etwa 25 800 Jahren. Für kürzere Zeitläufte kann man daher die Richtung der Erdaxe als unveränderlich ansehen, dem entsprechen auch die alljährlich periodisch wiederkehrenden gleichen Stellungen der Fixsterne am Himmel.

Ganz langsam vollzieht sich indessen die fortschreitende Veränderung, welche in dem beträchtlichen Zeitraum von etwa 2000 Jahren, auf den die wissenschaftliche Beobachtung der Sternorte seit Hipparch bis auf die Gegenwart zurückblicken kann, bereits fast den zwölften Theil des ganzen Umganges durchlaufen hat. Welcher Art ist nun diese Veränderung? Da die Ekliptik dabei als feste Ebene stehen bleibt, so wird die Sonne ihren jährlichen Lauf stets durch denselben gröfsten Kreis am Fixsternhimmel nehmen; es ist dies derjenige Kreis, welchen bereits die antiken Astronomen durch Gruppirung von zwölf etwa gleich weit ausgedehnten, immer wieder zu erkennenden Sternbildern bezeichnet und mit dem Namen Thierkreis — Zodiakos — belegt haben. Wegen der kegelförmigen Drehung der Polaraxe bleibt auch die Neigung, d. h. der Winkel zwischen diesem Kreis und dem Himmeläquator immer derselbe, aber der Durchschnittspunkt beider gröfster Kreise ändert seinen Ort im Thierkreise. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche im Frühling unserer nördlichen Halbkugel, nahe am 21. März, durchschreitet die Sonne den Himmelsäquator in aufsteigender Richtung und tritt auf die nördliche Himmelshälfte herüber; diesen Durchschnitt nennt man kurz den Frühlingspunkt. Zu Hipparch's Zeiten (etwa 150 J. v. Chr. Geb.) lag dieser Punkt des Thierkreises im Sternbilde des Widders, nahe der Grenze zum Sternbild der Fische, welches die Sonne im vorhergehenden Monat durchlaufen hatte. Heutzutage liegt der Frühlingspunkt im Sternbilde der Fische näher der Grenze des vorhergehenden Sternbildes Wassermann. Der Frühlingspunkt rückt also sehr langsam in den Sternbildern des Thierkreises rückwärts, d. h. entgegengesetzt der Richtung, in welcher die Sonne alljährlich den Thierkreis durchläuft. Diese Richtung entspricht auch dem negativen Vorzeichen der Wurzel φ'_+ in Gleichung (193). Betrachten wir nämlich die Erde von derjenigen Seite, von welcher aus wir ihren Nordpol sehen können, so findet die Rotation α' sowohl wie der Umlauf um die Sonne entgegengesetzt dem Uhrzeiger statt. Da nun die Drehung φ' das entgegengesetzte Vorzeichen hat, so findet diese im Sinne des Uhrzeigers statt; in diesem Sinne mufs also auch der Schnitt der Ekliptik und der Aequatorebene, d. h. am Himmel der Frühlingspunkt im Thierkreise fortschreiten. Diese Richtung ist mithin dem jährlichen Sonnenlauf entgegengesetzt. Das Wort Präcession, welches ein Vorwärtsrücken bezeichnet, entspricht diesem Sinne der Drehung nicht, doch ist dasselbe als Terminus technicus für diese Bewegung allgemein angenommen; es ist wohl dadurch entstanden, dafs man den Frühlingspunkt der Ekliptik als festen Punkt angenommen hat und nun beobachtete, dafs die Fixsterne im Laufe der Zeiten langsam vorwärts rückten, in demselben Sinne, in welchem die Sonne selbst ihren jährlichen Lauf durch den Sternenhimmel ausführt, dafs beispielsweise das Sternbild des Widders, welches früher beim Frühlingspunkte lag, jetzt bedeutend auf die nördliche Halbkugel herübergerückt ist. Dieses Vorwärtsrücken der Fixsterne beschränkt sich selbstverständlich nicht auf die Sternbilder des Thierkreises, sondern wird am gesammten Sternhimmel wahrgenommen als eine langsame positive Drehung um den Himmelspol der Ekliptik.

Die wesentlichen Merkmale der Präcessionsbewegung lassen sich also mit der Erfahrung übereinstimmend aus den vereinfachten Annahmen unserer Theorie herleiten. Die kleinen Abweichungen, welche sorgfältige astronomische Messungen ergeben haben, sind übrigens nicht nur auf die in der vorhergehenden Auseinandersetzung ausführlich bezeichneten Vernachlässigungen zu schieben, sondern rühren wesentlich von einem Umstand her, den wir gar nicht erwähnt haben: Nämlich der Trabant unserer Erde, der Mond, welcher zwar nur einen aufserordentlich kleinen Theil der Sonnenmasse enthält, übt vermöge seines geringen Abstandes von der Erde eine Anziehung auf diese aus, welche doch knapp $^1/_{100}$ der Sonnenanziehung beträgt. Diese Anziehung liefert für den Aequatorgürtel ebenfalls ein Drehungsmoment, dessen Wirkung sich mit dem von der Sonne herrührenden vollkommen vermischen würde, wenn die Ebene der Mondbahn, in welche der Aequatorgürtel hineingezogen wird, mit der Ekliptik zusammenfiele. Nun aber besitzt die Mondbahn eine, wenn auch kleine, so doch merkliche Neigung von etwa 5^0 gegen die Ekliptik, und die Knoten, in welchen diese beiden gröfsten Kreise am Himmel sich durchschneiden, rücken in etwa 18,6 Jahren durch den ganzen Umkreis der Ekliptik. Deshalb erzeugt der Mond noch eine zweite langsame Schwankung der Erdaxe, welche sich theils im periodisch langsameren oder schnelleren Wachsthum des Winkels φ, theils in einem periodischen Schwanken der Gröfse des Winkels β anzeigt. Diese sehr unbedeutenden Richtungsänderungen der Axe, welche sich der Präcessionsbewegung superponiren, nennt man die Nutation der Erdaxe.

Die Betrachtung der beiden Beispiele: des Kreisels unter Wirkung der Schwerkraft und der abgeplatteten Erde unter Wirkung der Sonnenanziehung ergaben sehr ähnliche Resultate, nur war beim Kreisel die Kegelbewegung der Axe im gleichen, bei der Erde im entgegengesetzten Drehungssinne wie die Rotation α'. Man würde gleichartige Bewegungsformen überall da aus der Theorie folgern, wo für die äufseren Kräfte eine potentielle Energie existirt, welche nur von der einen Coordinate β abhängt, wie das ja in diesen beiden Fällen zutraf (vgl. Gleichungen (189) und (192)). Man hat dann immer die beiden unveränderten Differentialgleichungen (190 α und φ) oder (183 α und φ) nebst deren Integralgleichungen (184 und 184a), nur die auf β bezügliche Differentialgleichung hängt ab von der besonderen Form der potentiellen Energie, deren Differentialquotient nach β im Allgemeinen auch eine Function von β ist, die mit $F(\beta)$ bezeichnet werde. Die Rechnung läfst sich dann stets in derselben Weise durchführen, und wenn man die äufsere Kraftwirkung sehr klein annimmt und Bewegungen sucht, welche bei constantem Winkel β vor sich gehen sollen, erhält man immer eine sehr langsame Präcessionsbewegung, welche durch

$$\varphi'_{+} = -\frac{F(\beta)}{\mathfrak{A}\,\alpha' \sin\beta} \tag{194}$$

definirt ist. Es ist auch stets möglich, einen Anfangszustand anzugeben, aus welchem sich diese Bewegungsart entwickelt, dieser wird durch die Daten $\beta = \beta_0$, $\alpha' = \alpha_0'$, $\beta_0' = 0$, $\varphi_0' = -\dfrac{F(\beta_0)}{\mathfrak{A}\,\alpha_0' \sin\beta_0}$ geliefert. Der Beweis dieser letzten Behauptung wird in derselben Weise geführt wie am Schlusse von § 72.

Vierter Abschnitt.

Ausdehnung des Geltungsbereiches der dynamischen Principien.

§ 75. Zusatz beliebiger äufserer Kräfte.

Im zweiten Abschnitt dieses vierten Theiles wurden als zusammenfassendes Princip für die Wirkungsweise der reinen Bewegungskräfte das HAMILTON'sche Princip gefunden

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Phi - L)\, d t = 0, \tag{173}$$

aus welchem sich durch Ausführung der darin vorgeschriebenen Art der Variation des Zeitintegrales die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen für beliebige Coordinaten in der dort angegebenen Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} - \frac{\partial L}{\partial p_a} + \frac{d}{d t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) = 0 \tag{175}$$

herleiteten. In diesen beiden nur formell verschiedenen Ausdrucksweisen treten als Functionen des Zustandes die bekannten beiden Formen der Energie, die potentielle Φ und die kinetische L auf; die Anwendbarkeit dieser Principien wird dadurch beschränkt auf conservative Massensysteme, deren wirkende Kräfte entweder ausschliefslich innere sind (freie Systeme), oder doch solche äufsere Kräfte, für welche man den Ausdruck der potentiellen Energie kennt, z. B. die Schwerkraft oder die Sonnenanziehung in den Beispielen der §§ 73 und 74. Nun kommt man häufig in die Lage, die Wirkung äufserer Kräfte berücksichtigen zu müssen, deren Gröfse und Richtung in jedem Zeitpunkt man zwar kennt, um deren Conservativität man sich aber nicht bekümmern mag oder kann; dies gilt von allen jenen unvollständigen Betrachtungen, in denen man mit Kräften rechnet, welche als vorgeschriebene Zeitfunctionen eingeführt werden (vergl. S. 120). Man kann nun die vorstehenden Principien so erweitern, dafs sie auch für Probleme der eben erwähnten Art die richtige Grundlage der Rechnung liefern, indem man nämlich zu der potentiellen Energie bestimmte Zusatzglieder fügt, welche bei der Differentiation nach den Coordinaten die äufseren Kräfte neben den conservativen inneren Kräften liefern. Diese äufseren

Kräfte kann man sich in Componenten zerlegt denken, deren jede nur eine Coordinate des Systems beschleunigt; die zur Abmessung $p_\mathfrak{a}$ gehörige Componente bezeichnen wir durch $(-P_\mathfrak{a})$. Das gewählte negative Vorzeichen enthält keine sachliche Beschränkung für den Richtungssinn, da $P_\mathfrak{a}$ selbst noch als algebraische Gröſse anzusehen ist. Tritt bei der Bewegung des Systems eine Veränderung der Coordinate von der Gröſse $+dp_\mathfrak{a}$ ein, so wird die äuſsere Kraft dabei Arbeit leisten, wenn $(-P_\mathfrak{a})$ einen positiven Werth hat, die Energie des Systems wird also vermehrt, dagegen wird bei dieser Veränderung das System selbst auf Kosten seines Energievorrathes Arbeit leisten, wenn $(-P_\mathfrak{a})$ negativ ist, also wenn $P_\mathfrak{a}$ selbst einen positiven Werth hat. Der Betrag dieser nach auſsen abgegebenen Energie ist nach der Definition des Arbeitsbegriffes gleich $+P_\mathfrak{a}.dp_\mathfrak{a}$, die positive Form dieser vom System geleisteten Arbeit wurde bei Einführung des negativen Vorzeichens der äuſseren Kraft beabsichtigt; man kann sagen, daſs $P_\mathfrak{a}$ diejenige Kraft ist, mit welcher das System gegen die äuſseren Einflüsse auf Vergröſserung der Coordinate $p_\mathfrak{a}$ hinwirkt. Sobald man die Bedingung einführt, daſs die $P_\mathfrak{a}$ vom inneren Zustande des Systems unabhängig, vorgeschriebene Functionen der Zeit, oder im einfachsten Falle überhaupt constante Gröſsen sind, kann man die gesuchten Zusatzglieder leicht finden in der Form einer Summe, welche jede der Kräfte $P_\mathfrak{a}$ multiplicirt mit der zugehörigen Coordinate $p_\mathfrak{a}$ enthält. (Einen eben solchen Zusatz haben wir bereits am Schlusse von § 60 in den Gleichgewichtsbedingungen gemacht, Gleichung (154b), nur war dort das Vorzeichen desselben entgegengesetzt, weil die äuſseren Kräfte positiv eingeführt worden waren.) Das HAMILTON'sche Princip erhält dann die erweiterte Form:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Phi - L + \sum_\mathfrak{a} \mathrm{P}_\mathfrak{a} p_\mathfrak{a})\, dt = 0. \tag{195}$$

Die Variation des Integrals läſst sich auch jetzt noch in derselben Weise durch Variation der $p_\mathfrak{a}$ durchführen wie in § 65, wobei festzuhalten ist, daſs die durch virtuelle Verschiebungen entstehenden Lagen gleichzeitig mit den wirklichen Lagen durchschritten werden und daſs die $P_\mathfrak{a}$ als reine Zeitfunctionen nicht an der Variation theilnehmen. Man erhält dann die Forderung:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \,.\, \sum_\mathfrak{a} \left\{ P_\mathfrak{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} - \frac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \right\} \delta p_\mathfrak{a} = 0,$$

welche bei der Willkürlichkeit der Zeitfunctionen δp_a nur erfüllt werden kann, wenn zu allen Zeiten der Inhalt der geschweiften Klammer für jedes a einzeln gleich Null ist. Man erhält also folgendes Gleichungssystem:

$$P_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right), \tag{196}$$

welches die gewünschte Erweiterung der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen bildet. Die Reaction des bewegten Systems gegen die äufseren Kräfte — denn das ist der Sinn der Gröfsen P_a — setzt sich hiernach zusammen aus den inneren Kräften $(-\partial \Phi / \partial p_a)$ und den Analogen der Centrifugalkraft $(+\partial L / \partial p_a)$, von welchen die Aenderungsgeschwindigkeiten der Bewegungsgröfsen abzuziehen sind, die mutationes motus des zweiten NEWTON'schen Axioms, welche nach Ausführung der mit L vorzunehmenden Differentiationen sich als lineare homogene Functionen der Beschleunigungen darstellen. Sind die p_a etwa gar im Raume feste cartesische Coordinaten, so ist

$$L = \tfrac{1}{2} \sum m_a \left(\frac{d x_a}{dt}\right)^2,$$

folglich sind die

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = m_a \frac{d x_a}{dt}$$

und die

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) = m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2},$$

also nach der NEWTON'schen Definition diejenigen Kräfte, welche den angegriffenen Punkten, wenn sie frei wären, gerade ihre thatsächlichen Beschleunigungen ertheilen würden. Mit dem negativen Vorzeichen, welches diese Glieder in Gleichungen (196) führen, entsprechen diese Antheile der Reaction durchaus den negativen D'ALEMBERT'schen Zusatzkräften, welche die angreifenden Kräfte im Gleichgewicht zu halten vermögen, während dann die positiven D'ALEMBERT'schen Zusatzkräfte allein die Bewegung regieren. Man könnte übrigens auch die Gleichungen (196) in der Weise umstellen, dafs man die Differentialquotienten der Bewegungsmomente mit positivem Vorzeichen nach links, dagegen die P_a mit negativem Vorzeichen nach rechts bringt, dann haben wir es nicht mit den Reactionen zu thun, sondern wir haben Gleichungen, welche die Beschleunigungen als Wirkungen der inneren und äufseren Kräfte hinstellen.

§ 76. Das kinetische Potential.

Im HAMILTON'schen Princip kommen die beiden Energiearten nur zusammengefafst zur Differenz $(\Phi - L)$ vor, bei der Ausführung der Variation wurden beide aus einander gerissen. Es ist indessen leicht, die LAGRANGE'schen Differentialgleichungen (sowohl die ursprünglichen (175) als die erweiterten (196)) so zu schreiben, dafs die beiden Energien auch darin nur verbunden zur Differenz auftreten. Da nämlich die potentielle Energie nur von den Coordinaten, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängig ist, sind alle $\frac{\partial \Phi}{\partial q_a}$ und folglich auch alle $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_a}\right)$ gleich Null. Addiren wir also letztere Ausdrücke zu den Gleichungen (196), so werden diese dadurch nicht gestört, man kann sie dann aber folgendermafsen schreiben:

$$P_a = -\frac{\partial(\Phi - L)}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\Phi - L)}{\partial q_a}\right), \tag{196a}$$

so dafs auch hier nur die Differenz $(\Phi - L)$ vorkommt, deren Zeitintegral nach dem HAMILTON'schen Integral ein Grenzwerth sein soll. Wir wollen nun diese Function, auf welche es hiernach bei der Darstellung der dynamischen Principien allein ankommt, durch ein einheitliches Zeichen H ausdrücken:

$$\Phi - L = H \tag{197}$$

und sie als das „kinetische Potential" des Systems bezeichnen. Das kinetische Potential ist von der Dimension der Energie und wegen des Bestandtheiles Φ behaftet mit einer unbestimmten additiven Constante. In den statischen Problemen, wo die lebendige Kraft entweder Null ist, oder einen von gleichförmiger Bewegung des ganzen Systems herrührenden constanten Werth L besitzt, welcher sich mit der unbestimmten Constante vermischt, deckt sich begrifflich das kinetische Potential mit der potentiellen Energie, die Gleichgewichtsbedingung (153a) (Seite 278) kann auch geschrieben werden:

$$\delta H = 0.$$

Direct ausgeführt fordert dies zwar nur: $\delta \Phi - \delta L = 0$, aber die Annahme, diese Gleichung könnte dadurch befriedigt werden, dafs $\delta \Phi = \delta L$ und dabei beide einzeln von Null verschieden sind, verstöfst gegen das Energieprincip, welches nicht zuläfst, dafs bei irgend einer Variation Φ und L gleichzeitig wachsen, es bleibt also nur

$\delta\,\Phi = 0$ und $\delta\,L = 0$ übrig; das sind die früher aufgestellten statischen Bedingungen.

Für bewegte Systeme unterliegt die Function H jetzt noch den Beschränkungen, welche aus ihrer Definition abzulesen sind: Sie mufs bestehen aus einer reinen Function der Coordinaten p_a, von welcher subtrahirt wird eine wesentlich positive, homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten q_a, deren Coefficienten ebenfalls nur von den p_a abhängen können. Die Einführung des Zeichens H ist zunächst nur eine formale Vereinfachung, ebenso fördert die Einführung des Namens „kinetisches Potential" nicht unsere Erkenntnifs, kann vielmehr nur einer kürzeren Ausdrucksweise dienen, wenn wir das HAMILTON'sche Princip in Worte kleiden wollen. Die weittragende Bedeutung dieser Function kann man erst daraus erkennen, dafs es möglich geworden ist, über die Grenzen der offenbaren Bewegungsvorgänge hinaus, Gesetze der Thermodynamik und Elektrodynamik in dieselben Formen zu zwingen, welche das HAMILTON'sche Princip für die Dynamik ponderabler Massen bildet, wobei freilich H nicht mehr den eben angeführten beschränkenden Bedingungen unterliegt, sondern als eine in jedem Gebiet besonders aufzusuchende Function der den Zustand bestimmenden Gröfsen p_a und q_a erscheint, zweier Reihen von Parametern, welche nicht einmal vollständig correspondiren müssen, in denen vielmehr gewisse q vorkommen können, deren zugehörige p fehlen und umgekehrt.

Derartige allgemeine Principien, in denen verlangt wird, dass das Integral einer gewissen Function des Zustandes, ausgedehnt über den ganzen Verlauf einer Zustandsänderung, ein Grenzwerth, mitunter nothwendig ein Minimum wird, sind mehrfach aufgestellt worden unter verschiedenen Formen, welche verschiedenen Bedingungen bei der Variation entsprechen, welche aber bei richtiger Ausführung der geforderten Variationen zu denselben Differentialgleichungen für den Verlauf der Processe führen. Das älteste dieser Integralprincipien war das von MAUPERTUIS aufgestellte Princip der kleinsten Action, welches aussagte, dafs bei allen in der Natur vorgehenden Processen der Mittelwerth der lebendigen Kraft ein Minimum sei. Die für mechanische Probleme dabei gültigen Variationsbedingungen sind erst von LAGRANGE gefunden worden, und dadurch ist dieses Princip erst streng wissenschaftlich begründet worden. Wir können vom modernen Standpunkt aus diese Bedingungen dadurch definiren, dafs wir fordern, die Gesammtenergie der variirten Bewegung solle gleich der der wirklichen bleiben. Uebrigens leistet dieselben Dienste das HAMILTON'sche

Princip, bei welchem eine andere Bedingung besteht, dafs nämlich die Zeit nicht von der Variation betroffen wird. Letzteres bietet überdies noch den Vortheil, dafs wir die auf äufsere Kräfte bezüglichen Zusatzglieder zu H hinzufügen können. Wir wollen deshalb bei der HAMILTON'schen Form bleiben, welche jetzt unter Wahrung derselben Variationsbedingung lautet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = 0 \tag{198}$$

und in erweiterter Form:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (H + \sum P_a p_a) dt = 0. \tag{198a}$$

Die erweiterten LAGRANGE'schen Gleichungen erhalten die Form:

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_a}\right). \tag{198b}$$

§ 77. Eliminationen von Variabelen im kinetischen Potential.

Es sollen in diesem Bande nicht die verschiedenen Formen des kinetischen Potentials für die einzelnen Gebiete nicht reiner Bewegungsvorgänge aufgestellt werden, es soll aber jetzt gezeigt werden, dafs man auch, ohne über die Grenzen der Betrachtung der Ponderabilia hinauszugehen, Erscheinungen findet, deren Verlauf sich aus unseren zusammenfassenden Principien herleiten läfst, in denen jedoch das kinetische Potential nicht an die Beschränkungen gebunden bleibt, welche aus seiner Definition herstammen. Solche freiere Formen können aus dem ursprünglichen H in Gleichung (197) entstehen, wenn es in der Natur des betrachteten Problems begründet liegt, dafs man einen Theil der Geschwindigkeiten oder der Coordinaten eliminiren kann.

Derartige Fälle sind uns schon früher begegnet, als wir die Beschränkungen der Bewegungsfreiheit durch starre Bindungen betrachteten. Dabei hatten wir eine Reihe vorgeschriebener Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten zu erfüllen, was wenigstens in der Idee immer dadurch geschehen konnte, dass man diese Gleichungen zur Wegschaffung ebenso vieler Variabelen benutzte. Diese am häufigsten betrachtete Art von Elimination führt uns hier zu nichts Neuem, da Φ und L, mithin auch H dabei dieselben charakteristischen Formen behalten, nur beschränkt auf eine geringere Zahl von Variabelen. Anders ist es bei einem Massensystem, in welchem cyklische Bewegungen erregt sind, welche ungestört durch sonstige Veränderungen gleichmäſsig fortlaufen. Denken wir uns eine ununterbrochene Reihe von gleichartigen Partikelchen, welche in einem bestimmten geschlossenen Wege dicht hinter einander laufen, so daſs sie die ganze in sich zurücklaufende Bahn überall gleich dicht und ohne merkliche Lücke mit Masse füllen. Ist diese Kette von Massentheilchen, welche durch starre Verbindungen an einander und an die vorgeschriebene Bahn geknüpft sein mögen, einmal in eine bestimmte Bewegung gesetzt, so wird sie vermöge ihres Beharrungsvermögens unverändert umlaufen, wenn keine beschleunigenden oder verzögernden Kräfte auf die Theilchen eine resultirende Wirkung üben. Eine in dieser Weise bewegte Kette liefert ein Beispiel für eine cyklische Bewegung. Ferner gehört dahin die Drehung eines Kreisels oder eines anderen Rotationskörpers, z. B. eines Schwungrades. Die Weggeschwindigkeiten der Kettenglieder und die Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte der Rotationskörper erscheinen dabei an allen Stellen des Umlaufs nothwendig als die gleichen. Dies liegt übrigens nicht im Wesen der cyklischen Bewegungen als solcher, sondern nur in der Natur der gewählten Beispiele begründet; eine Wassermasse, welche in einem ringförmig geschlossenen Rohre in Circulation versetzt ist, besitzt ebenfalls eine cyklische Bewegung, zeigt aber die bezeichnete Eigenthümlichkeit nur, wenn das Rohr überall gleichen Querschnitt besitzt. Ist dies nicht der Fall, so strömt das Wasser an den engeren Stellen schneller, an den weiteren langsamer; constant bleibt in dem Falle die Wassermenge, welche in gleicher Zeit durch sämmtliche Querschnitte strömt. Die wesentliche Forderung an die cyklischen Bewegungen besteht nur darin, daſs sie in sich zurücklaufen und an allen Stellen einen stationären Zustand zeigen. Es treten in einen bestimmten Ort des Umkreises immer andere Theilchen ein, zeigen aber dann immer denselben Bewegungszustand, so daſs die Verfolgung einzelner Massen entbehrlich wird, und eine vollständige Beschreibung gegeben ist, wenn man für alle Orte des Umlaufs den Zustand der Bewegung kennt.

Ein Massensystem, in welchem eine einzige solche cyklische Bewegung erregt ist, nennt man ein monocyklisches System, dazu gehören auch noch solche Systeme, in welchen mehrere cyklische Bewegungen gekoppelt sind, so daſs durch die Bewegung eines einzelnen alle übrigen zugleich bestimmt sind, wie dies z. B.

bei einer Combination mehrerer Zahnräder oder bei Verwendung von Treibriemen und noch anderen mechanischen Hülfsmitteln eintritt. Finden dagegen mehrere von einander unabhängige cyklische Bewegungen statt, so nennt man das System ein polycyklisches.

Einer cyklischen Bewegung gehört ein ganz bestimmter Inhalt an lebendiger Kraft, welcher sich zusammensetzt aus den lebendigen Kräften aller in dem Cyklus laufender Massenpunkte. Da nun die Verfolgung der einzelnen Punkte bei der stationären Bewegung nicht nöthig ist, da immer neue gleichartige an die Stelle der weitergerückten treten, so wird durch die jeweilige Lage der Massen in der geschlossenen Bahn die lebendige Kraft L nicht beeinflusst. Ebenso wenig kann die potentielle Energie Φ von der Stellung der circulirenden Masse abhängen, das kinetische Potential H kann also die Coordinaten der einzelnen in cyklischer Bewegung befindlichen Massenpunkte nicht als Variabele enthalten. Wir wollen diese Coordinaten, welche in H fehlen, zum Unterschiede von den übrigen $p_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen durch $p_{\mathfrak{b}}$, der Index $\mathfrak{b}$ bezeichnet also nicht eine einzelne Ordnungszahl, sondern eine ganze Gruppe. Wenn die cyklische Bewegung gleichmäſsig fortlaufen soll, dürfen sie keine Kräfte von auſsen beschleunigen oder hemmen, also:

$$P_{\mathfrak{b}} = 0. \tag{199}$$

Wohl können auf den ganzen Cyklus verändernde Kräfte vom übrigen System oder von auſsen her einwirken, das sind aber keine $P_{\mathfrak{b}}$, sondern $P_{\mathfrak{a}}$, Kräfte, welche auf diejenigen Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ wirken, welche die Lage und Gestalt der Bahn der cyklischen Bewegung angeben, nicht aber einzelner Massenpunkte in ihr. Bei dem in Fig. 20 gegebenen, um die Axe AA rotirenden Körper z. B. wird die Lage einzelner Massenpunkte angegeben durch den Winkel α, dieser ist solch' eine Coordinate $p_{\mathfrak{b}}$, und spielt gar keine Rolle. Die Lage des Cyklus wird bestimmt durch die Winkel β und φ, welche den $p_{\mathfrak{a}}$ entsprechen, und auch von äuſseren Kräften verändert werden können.

Die Lagrange'schen Gleichungen nehmen für die Indices $\mathfrak{b}$ eine sehr einfache Form an, denn erstens sind die $P_{\mathfrak{b}} = 0$, ferner auch die $\partial H / \partial p_{\mathfrak{b}} = 0$, es bleibt also nur:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right) = 0, \tag{199a}$$

woraus direct folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = c_{\mathfrak{b}}. \tag{199b}$$

Dabei bedeutet $c_{\mathfrak{b}}$ eine Reihe von Constanten, die ihrem Sinne nach die unveränderlichen Bewegungsmomente der cyklischen Bewegungen darstellen. In monocyklischen Systemen wird sich die Zahl derselben auf eine reduciren lassen, doch können wir hier die Rechnung auch für polycyklische Systeme verfolgen. Da nun nach der ursprünglichen Definition H die sämmtlichen $q_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ in Form einer homogenen quadratischen Function enthält, so werden die Differentialquotienten $\partial H / \partial q_{\mathfrak{b}}$ homogene lineare Functionen aller q sein, deren Coefficienten von den $p_{\mathfrak{a}}$ allein abhängen, da ja die $p_{\mathfrak{b}}$ nicht vorkommen. Man erhält also aus (199b) ein System von $\mathfrak{b}$ linearen Gleichungen, aus denen man die $q_{\mathfrak{b}}$ als lineare Functionen der $q_{\mathfrak{a}}$ ausdrücken kann. Durch Einsetzung in den Ausdruck H werden dann die $q_{\mathfrak{b}}$ eliminirt, es kommen nun nur die $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ und die Constanten $c_{\mathfrak{b}}$ vor. Den durch diese Eliminationen veränderten Ausdruck H wollen wir mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen. Die Differentialquotienten $\partial \mathfrak{H} / \partial p_{\mathfrak{a}}$ und $\partial \mathfrak{H} / \partial q_{\mathfrak{a}}$ werden verschieden sein von den entsprechenden Differentialquotienten der ursprünglichen Function H, denn $\mathfrak{H}$ enthält die $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ erstens an denselben Stellen, wo sie auch in H zu finden waren, ferner aber auch an denjenigen Stellen, wo in H die $q_{\mathfrak{b}}$ standen, welche jetzt ebenfalls mit Hülfe der $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ ausgedrückt sind. Nach den Regeln für die Differentiation von theilweise impliciten Functionen wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}$$

und ebenso:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}}.$$

In den Summen kann man nach Gleichung (199b) die $c_{\mathfrak{b}}$ einsetzen und findet dann:

$$\sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \, q_{\mathfrak{b}}$$

$$\sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \, q_{\mathfrak{b}}.$$

Es ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} &= \frac{\partial}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \left\{ \mathfrak{H} - \sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \, q_{\mathfrak{b}} \right\} \\ \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} &= \frac{\partial}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \left\{ \mathfrak{H} - \sum_{\mathfrak{b}} c_{\mathfrak{b}} \, q_{\mathfrak{b}} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

Diese beiden Gleichungen drücken die auf die Indices $\mathfrak{a}$ bezüglichen Differentialquotienten von H durch die gleichartig gebildeten Differentialquotienten einer anderen Function aus, in welcher nur die $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{a}$ vorkommen, denn an Stelle der $q_\mathfrak{b}$ hat man sich die Lösungen der linearen Gleichungen (199 b) gesetzt zu denken. Diese neue Function vertritt also die Stelle von H, die LAGRANGE'schen Gleichungen erhalten durch sie die Gestalt:

$$P_\mathfrak{a} = -\frac{\partial}{\partial p_\mathfrak{a}}(\mathfrak{H} - \sum c_\mathfrak{b}\, q_\mathfrak{b}) + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial q_\mathfrak{a}}(\mathfrak{H} - \sum c_\mathfrak{b}\, q_\mathfrak{b})\right]. \qquad (200\,\text{a})$$

Das neue kinetische Potential:

$$\left\{\mathfrak{H} - \sum_\mathfrak{b} c_\mathfrak{b}\, q_\mathfrak{b}\right\},$$

welches durch die Elimination der $q_\mathfrak{b}$ entstanden ist, hat eine wesentlich andere Zusammensetzung als das ursprüngliche; zwar gelten für $\mathfrak{H}$ noch dieselben Bedingungen, daſs es besteht aus einem nur von den $p_\mathfrak{a}$ abhängigen Theile und einem zweiten Theile, welcher eine homogene quadratische Function der $q_\mathfrak{a}$ ist; dazu treten aber die Glieder $-\sum c_\mathfrak{b}\, q_\mathfrak{b}$, welche nach Einsetzung der Lösungen $q_\mathfrak{b}$ die Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{a}$ in erster Potenz enthalten. Solche Glieder waren in dem ursprünglichen Ausdruck H unmöglich; man sieht also, daſs hier bereits die Regel durchbrochen ist und daſs das kinetische Potential jetzt freier in seiner Zusammensetzung ist. Das Auftreten dieser linearen Glieder erklärt eine wichtige Besonderheit der polycyklischen Systeme. Will man nämlich eine Reihe von Zustandsänderungen des Systems — einen Proceſs — nach seiner Beendigung rückgängig machen, so daſs der Anfangszustand wieder hergestellt wird, und man kehrt zu diesem Zwecke die Vorzeichen aller Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{a}$ um, so bleibt die rein quadratische Function der Geschwindigkeiten dabei ungeändert, die linearen Glieder wechseln aber ihr Vorzeichen, man erhält für den Rückgang ein anderes kinetisches Potential, mithin auch andere Differentialgleichungen, die Bewegung kann dann nicht in gleicher Weise rückwärts wie vorwärts durchlaufen werden: Der Proceſs ist nicht umkehrbar. Die Umkehrbarkeit könnte nur hergestellt werden durch gleichzeitige Umkehrung der hier eliminirten cyklischen Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{b}$; dann würden nämlich beim Rückgang auch alle Constanten $c_\mathfrak{b}$ die entgegengesetzt gleichen Werthe annehmen, es würde $(-c_\mathfrak{b})\cdot(-q_\mathfrak{b}) = +c_\mathfrak{b}\cdot q_\mathfrak{b}$ bleiben.

Man kann sich aber Fälle vorstellen, in welchen die cyklischen Bewegungen gar nicht entdeckt werden. Denkt man sich beispielsweise den circulirenden Theil des Systems von einem undurchdringlichen Mantel umgeben, also etwa eine schnell rotirende Kugel eingeschlossen in eine Hülse, welche an ihrer Innenseite zugleich die festen Lager der Drehungsaxe trägt, so wird man aufsen nichts von der lebhaften Bewegung im Inneren wahrnehmen, so lange der Körper ruht. Wenn man ihn aber bewegt, so bemerkt man, dafs man ihn nicht unter Wirkung derselben Kräfte durch blofse Umkehrung der sichtbaren Endgeschwindigkeit wieder zurückbewegen kann. Dieser mechanischen Analogie gemäfs kann man physikalische Vorgänge, welche sich durch ein mit linearen Geschwindigkeitsgliedern behaftetes kinetisches Potential darstellen lassen, allgemein als Fälle mit verborgenen Bewegungen bezeichnen, ohne dafs damit gesagt werden soll, dafs wir irgend eine Kenntnifs von der Natur solcher Bewegungen hätten. Es ist auch nicht nöthig, dafs diese verborgenen Bewegungen gerade den regelmäfsig geordneten Charakter der cyklischen Bewegungen zeigen. Die Hypothese der kinetischen Gastheorie z. B. nimmt eine völlig ungeordnete Bewegung der Molekeln an, welche mit den cyklischen Bewegungen nur gemeinsam hat, dafs ihr eine bedeutende lebendige Kraft entspricht, welche nicht abhängt von den Coordinaten der einzelnen bewegten Theile, und dafs in jedem gegen den Molekularabstand grofsen Volumen der Bewegungszustand trotz seiner Regellosigkeit im Einzelnen ein stationärer ist und dafs dieser endlich bei der Umkehrung eines Processes nicht mit umgekehrt werden kann. Also die kinetische Gastheorie erklärt die thermischen Eigenschaften und Gesetze durch Aufstellung einer Hypothese, während die Betrachtung der cyklischen Systeme bei bekannten Bewegungsvorgängen stehen bleibt, und aus diesem Gesetze herausliest, welche weitgehende Analogie mit den Hauptsätzen der Thermodynamik zeigen.

Unter gewissen besonderen Voraussetzungen über die Art der Bewegungen und der äufseren Kräfte lassen sich noch andere Coordinaten-Eliminationen ausführen, welche viel eingreifendere Veränderungen in der Gestalt des kinetischen Potentials herbeiführen. Setzen wir nämlich die cyklischen Coordinaten $p_{\mathfrak{b}}$, welche in H fehlen, als schnell veränderlich, die $q_{\mathfrak{b}}$ also als grofs voraus, während alle anderen Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$, welche als Parameter der Lage und Configuration des Systems noch auftreten, sich nur sehr langsam verändern sollen, so werden die $q_{\mathfrak{a}}$ gegen die $q_{\mathfrak{b}}$ verschwindend klein sein. Ebenso werden die Beschleunigungen $d q_{\mathfrak{a}}/d t$ sehr kleine Gröfsen sein müssen, die Zustände werden also immer in nächster Nachbarschaft der statischen Bedingungen bleiben, ähnlich wie auch bei den einfachen mechanischen Maschinen (Hebel, schiefe Ebene, Flaschenzug) durch die langsamen Bewegungen, welche bei ihrer Benutzung ausgeführt werden, die Gleichgewichtsbedingungen nicht merklich verletzt werden. Das kinetische Potential wird dann bis auf verschwindende Beiträge allein bestimmt durch die $p_\mathfrak{a}$ und die $q_\mathfrak{b}$; die $p_\mathfrak{b}$ fehlen von vornherein, die $q_\mathfrak{a}$ bleiben ohne merklichen Einfluſs, ihnen entspricht ein verschwindender Beitrag zur lebendigen Kraft des Systems. Wir wollen jetzt nicht nothwendig ausschlieſsen, daſs die cyklischen Geschwindigkeiten durch Kräfte $P_\mathfrak{b}$ beschleunigt werden, doch sollen diese Veränderungen so langsame sein, daſs auch die Beschleunigungen $d q_\mathfrak{b}/d t$ in die Klasse der verschwindenden Gröſsen gehören. Die LAGRANGE'schen Gleichungen vereinfachen sich unter diesen Voraussetzungen. Zunächst lauten dieselben:

$$\left.\begin{aligned} P_\mathfrak{b} &= \qquad\quad + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}\right) \\ P_\mathfrak{a} &= -\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{201}$$

Die nach der Zeit differenzirten Glieder bilden in beiden Gleichungen verschwindend kleine Gröſsen; denn jedes $\partial H/\partial q_\mathfrak{b}$ und $\partial H/\partial q_\mathfrak{a}$ ist eine lineare Function aller $q_\mathfrak{b}$ und $q_\mathfrak{a}$, deren Coefficienten nur von den $p_\mathfrak{a}$ abhängen, in den zeitlichen Differentialquotienten erhält man also eine erste Reihe von Gliedern, welche die $d q_\mathfrak{b}/d t$ oder $d q_\mathfrak{a}/d t$ als Factoren zeigen, und deshalb sehr klein sind, dazu tritt eine zweite Reihe, in welcher die Differentiation der Coefficienten ausgeführt ist, also die $q_\mathfrak{a}$ und die groſsen $q_\mathfrak{b}$ unversehrt stehen bleiben, in diesen treten aber stets Factoren $d p_\mathfrak{a}/d t$ auf, welche nach Voraussetzung verschwindend sind. So sieht man also erstens, daſs die Kräfte $P_\mathfrak{b}$ verschwindend klein bleiben müssen, und zweitens, daſs die Kräfte $P_\mathfrak{a}$ bis auf verschwindend kleine Antheile dargestellt werden durch Differentialquotienten des kinetischen Potentials nach den Coordinaten allein. Vernachlässigen wir nun die verschwindenden Antheile, so erhalten die auf $\mathfrak{a}$ bezüglichen Gleichungen die Form:

$$P_\mathfrak{a} = -\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}}, \tag{201a}$$

ihrem Sinne nach sind dies statische Bedingungen, in denen äuſsere und innere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, ohne beschleunigend zu wirken; dies entspricht ganz den gemachten Voraussetzungen. Wir wollen nun eine letzte besondere Annahme einführen: Für eine gewisse Gruppe von Parametern, die wir, zum Unterschiede von den übrigen $p_{\mathfrak{a}}$, mit $p_{\mathfrak{c}}$ bezeichnen wollen, sollen die äufseren Kräfte fehlen, d. h.:

$$P_{\mathfrak{c}} = 0,$$

folglich erhält man eine Gruppe von Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} = 0. \tag{202b}$$

Da nun H in Bezug auf die $p_{\mathfrak{c}}$ eine ganz willkürlich gebaute Function sein kann, so gilt dies auch von den Ableitungen $\partial H / \partial p_{\mathfrak{c}}$, die vorstehenden Gleichungen werden die $p_{\mathfrak{c}}$ in recht verwickelten Verbindungen mit den übrigen $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ enthalten können. Gelingt es indessen einige oder alle $p_{\mathfrak{c}}$ aus diesen Gleichungen als Unbekannte zu berechnen, so kann man die für sie gefundenen Ausdrücke in H einsetzen, und dadurch die $p_{\mathfrak{c}}$ eliminiren. Bei dieser Elimination verändert sich aber die Zusammensetzung der Function aus den übrig gebliebenen Variabelen in ganz unbestimmbarer Art. Denn die Lösungen $p_{\mathfrak{c}}$ der Gleichungen (202b) können die $p_{\mathfrak{a}}$ und auch die $q_{\mathfrak{b}}$ in jedem Grade analytischer Complication enthalten. Die durch Elimination entstandene Function sei bezeichnet mit H', dafs man dieselbe noch als kinetisches Potential in den LAGRANGE'-schen Gleichungen brauchen kann, erkennt man, sobald man die dabei erforderten Differentialquotienten bildet. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial p_{\mathfrak{a}}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \qquad \mathfrak{a} \text{ nicht} = \mathfrak{c} \\ \frac{\partial H'}{\partial q_{\mathfrak{b}}} &= \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}} . \end{aligned}\right\} \tag{202c}$$

Die hier über die $\mathfrak{c}$ erstreckten Summen sind aber wegen der Factoren $\partial H / \partial p_{\mathfrak{c}}$ gliedweise gleich Null, die Differentialquotienten von H' sind gleich den entsprechenden von H, mithin kann H' als kinetisches Potential betrachtet werden, so weit man nur nach den Parametern $p_{\mathfrak{a}}$ fragt; in Bezug auf die $p_{\mathfrak{c}}$ ist die Betrachtung unvollständig.

Derartige dynamische Probleme, wie wir in diesem Paragraphen bezeichnet haben, bieten mannigfache Analogien mit anderen physikalischen Erscheinungen, welche sich nicht auf bekannte Bewegungen ponderabler Massen zurückführen lassen — thermodynamischen und elektrodynamischen. Es besteht deshalb das Bestreben in der modernen theoretischen Physik die verschiedenen beobachteten Gesetzmäfsigkeiten herzuleiten aus einem solchen zusammenfassenden Princip, welches der äufseren Form nach übereinstimmt mit dem verallgemeinerten HAMILTON'schen Princip (198) resp. (198a) und den daraus folgenden verallgemeinerten LAGRANGE'schen Gleichungen (198b), in welchen aber das kinetische Potential nicht mehr den ursprünglich dafür geltenden Formbeschränkungen unterliegt, sondern als eine gewisse, für jedes Gebiet zu suchende Function allgemeiner Art von zwei Reihen von Variabelen p und q erscheint, welche einander nicht paarweise entsprechen müssen. Unter den p werden dabei immer die Parameter zu finden sein, welche die Lage der als Träger dienenden Massen bestimmen, deren beschleunigte Bewegung auf ponderomotorische Kräfte hinweist, die q brauchen dabei aber nicht als Geschwindigkeiten ponderabler Massen erkannt zu sein, können vielmehr als mefsbare Gröfsen anderer Art, als Functionen der Temperatur oder als Intensitäten elektrischer Ströme, als Zunahmen dielektrischer oder magnetischer Polarisation eingeführt werden. Das kinetische Potential H wird dabei stets von der Dimension einer Energie sein, welche ja auch in allen Gebieten der Physik sich in bestimmter Weise aus der Variabelen des Zustandes zusammensetzt, indessen wird von einzelnen Theilen der Function H nicht gesagt werden können, ob sie Φ oder L repräsentiren.

§ 78. Das Energieprincip bleibt gewahrt.

Wir wollen annehmen, wir hätten für ein abgeschlossenes Gebiet von physikalischen Erscheinungen das kinetische Potential H als eine ganz beliebige differenzirbare Function der zwei Reihen von Variabelen p_a und q_a gefunden. So weit die q durch dieselben Indices correspondiren mit bestimmten p, sei:

$$q_a = \frac{d p_a}{d t}.$$

Die $(- P_a)$ seien beliebige äufsere Kräfte, bei deren positiver oder negativer Arbeitsleistung wir Veränderungen aufserhalb des betrachteten Systems vorhandener Energiequanta nicht verfolgen. Es läfst sich dann beweisen, dafs in der Gültigkeit unseres zusammenfassenden dynamischen Princips die Erhaltung der Energie ebenfalls gewahrt bleibt.

Wir schreiben unser Princip wiederum in Form der Gleichungen:

$$P_a = - \frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial H}{\partial q_a} \right),$$

welche ja direct durch Ausführung der Variation des HAMILTON'schen Integrales ohne Einschränkungen gefunden werden. Jede Gleichung erweitern wir mit dem zugehörigen $q_\mathfrak{a}$, und summiren die ganze Schaar. (Dies ist dieselbe Operation, welche in § 48 mit den NEWTON'schen Gleichungen (113) vorgenommen wurde.) Es folgt dann:

$$\sum_\mathfrak{a} P_\mathfrak{a} q_\mathfrak{a} = - \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} q_\mathfrak{a} + \sum_\mathfrak{a} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \cdot q_\mathfrak{a}.$$

Die zweite Summe rechts ist Theil eines vollständigen zeitlichen Differentialquotienten, es ist nämlich:

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a} = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \cdot q_\mathfrak{a} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot \frac{d q_\mathfrak{a}}{dt};$$

in den beiden anderen Summen können wir $q_\mathfrak{a}$ durch $d p_\mathfrak{a}/dt$ ersetzen. Dann erhält man:

$$\frac{\sum P_\mathfrak{a}\, d p_\mathfrak{a}}{dt} = \left\{- \sum \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} \cdot \frac{d p_\mathfrak{a}}{dt} - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot \frac{d q_\mathfrak{a}}{dt}\right\} + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} q_\mathfrak{a}.$$

Da H nur von den $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{a}$ abhängt, bilden die beiden in geschweifte Klammer eingeschlossenen Summen zusammen den vollständigen zeitlichen Differentialquotienten von $-H$, es ist also:

$$\frac{\sum P_\mathfrak{a}\, d p_\mathfrak{a}}{dt} = - \frac{dH}{dt} + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} q_\mathfrak{a},$$

oder nach Weglassung des gemeinsamen Nenners dt:

$$\sum P_\mathfrak{a}\, d p_\mathfrak{a} = - d\left(H - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} q_\mathfrak{a}\right). \tag{203}$$

Die linke Seite dieser Gleichung bezeichnet die bei der Vergröfserung der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ um die Differentiale $d p_\mathfrak{a}$ nach aufsen geleistete Arbeit. Diese Arbeit wird gleichgesetzt der Abnahme einer Function:

$$E = H - \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a}, \tag{203a}$$

welche nur von den $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{a}$, also vom Zustand des Systems abhängt. Diese Function wird fortdauernd in demselben Mafse abnehmen oder wachsen, wie das System Arbeit ausgiebt oder aufnimmt, E bezeichnet den Energievorrath des Systems. Unser Princip schliefst also das Princip der Erhaltung der Energie ein, und zwar in seiner allgemeinsten Form, denn wir können weder sagen, in welchen Formen die Energie vor der Aufnahme und nach der Abgabe seitens des Systems bestanden hat, noch können wir im vorstehenden Ausdruck für E die bekannten Formen Φ und L wieder erkennen.

Angesichts dieser ungewohnten Form, in welcher die Energie in Gleichung (203a) durch das kinetische Potential ausgedrückt ist, mag hier noch gezeigt werden, dafs in den Fällen, wo das kinetische Potential die ursprüngliche Form

$$H = \Phi - L,$$

zeigt, die Energie E, welche durch die soeben gefundene Gleichung definirt wird, übereinstimmt mit dem früher bezeichneten Begriff. Die Variabelen $q_\mathfrak{a}$ kommen nur in L vor, also ist:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} = \frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}.$$

L ist eine homogene quadratische Function aller $q_\mathfrak{a}$, eine solche kann man allgemein ausdrücken durch

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{p} \sum_\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \cdot q_\mathfrak{p} \cdot q_\mathfrak{q}. \tag{204}$$

Die Indices $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sollen in der Summe alle Ordnungszahlen des Systems durchlaufen, für die Coefficienten gilt die Bedingung:

$$A_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}.$$

Will man dieses L nach einer bestimmten Variabelen $q_\mathfrak{a}$ differenziren, so hat man zuerst aus der Doppelsumme alle Glieder abzusondern, welche $q_\mathfrak{a}$ als Factor enthalten, die übrig bleibenden Summen, in denen die Ordnungszahl $\mathfrak{a}$ dann ausgelassen werden mufs, sollen mit einem Häkchen (′) bezeichnet werden, es ist dann:

$$L = \tfrac{1}{2} A_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a}^2 + q_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{p}{}' A_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{p} + \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{p}{}' \sum_\mathfrak{q}{}' A_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \cdot q_\mathfrak{p} \cdot q_\mathfrak{q},$$

folglich:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a} + \sum_\mathfrak{p}{}' A_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{p},$$

d. h.:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} = \sum_\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{p}, \qquad (\mathfrak{p} \text{ auch } = \mathfrak{a})$$

und die in dem vorstehenden Ausdruck E (Gleichung (203a)) auftretende Summe wird:

$$-\sum_\mathfrak{a} \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} q_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{a} \sum_\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p},\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{p} \cdot q_\mathfrak{a}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach Gleichung (204) nichts anderes als $2L$, mithin ist:

$$E = H + 2L$$

und schlieſslich, wegen $H = \Phi - L$

$$E = \Phi + L.$$

Dies ist der bekannte Ausdruck für die gesammte Energie in einem conservativen Massensystem.

Bei dieser Beweisführung wurde nur von einer allgemeinen Eigenschaft der homogenen quadratischen Functionen Gebrauch gemacht; man kann nämlich jede homogene quadratische Function L eine Schaar von Variabelen $q_\mathfrak{a}$ darstellen in der Form:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{a} \frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a}. \tag{204a}$$

Es wurde in diesem Paragraphen nachgewiesen, daſs die Gleichungen (198b), mithin auch deren Quelle, das HAMILTON'sche Princip in der Form Gleichung (198a) das Gesetz von der Energieerhaltung immer einschlieſsen. Umgekehrt ist aber dieses Princip nicht immer erfüllt, wenn sich aus den Differentialgleichungen die Erhaltung der Energie nachweisen läſst. Diese Behauptung brauchen wir nur durch ein Beispiel zu stützen. Nehmen wir an, daſs zwei der LAGRANGE'schen Differentialgleichungen, welche sich auf die bestimmten Ordnungszahlen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$ beziehen, nicht die bisher angenommene Form haben, sondern daſs zur rechten Seite der $\mathfrak{i}$-ten Gleichung noch ein Glied $+ \varphi \cdot q_\mathfrak{k}$, zu der $\mathfrak{k}$-ten Gleichung noch ein Glied $- \varphi \cdot q_\mathfrak{i}$ hinzutrete, wo φ irgend eine Function der Coordinaten p vorstellen soll. Die beiden Gleichungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} P_\mathfrak{i} &= - \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{i}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{i}}\right) + \varphi \cdot q_\mathfrak{k} \\ P_\mathfrak{k} &= - \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{k}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{k}}\right) - \varphi \cdot q_\mathfrak{i} \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Macht man nun die vorgeschriebene Operation, erweitert also die erste Gleichung mit $q_\mathfrak{i}$, die zweite mit $q_\mathfrak{k}$ und addirt dann die ganze Schaar, so heben sich die zugesetzten Glieder fort, das Resultat, welches die Erhaltung der Energie lehrt, bleibt also trotz dieser Zusätze gültig. Dagegen wird man sich vergeblich bemühen, im

Integrandus des Hamilton'schen Integrals einen Zusatz derart zu finden, daſs daraus bei Ausführung der Variation gerade diese beiden und nur diese beiden Zusatzglieder zu der $\mathfrak{i}$-ten und $\mathfrak{k}$-ten Differentialgleichung hinzutreten; man könnte dies nur erreichen, wenn man ganz bestimmte Forderungen an die Function φ stellt. Der Zusatz dieser Glieder widerspricht also nicht dem Energieprincip, wohl aber dem Hamilton'schen Princip. Letzteres sagt also mehr und Bestimmteres aus über den besonderen Charakter der Naturkräfte, als was in ihrer Bezeichnung als conservative Kräfte bereits ausgedrückt ist. Wollte man daraus den Schluſs ziehen, daſs das Hamilton'sche Princip eine zu enge Grenze ziehe, so könnte dies nur nachgewiesen werden durch Naturerscheinungen, welche sich demselben nicht fügen, solche sind aber, soweit überhaupt eine Fühlung der Naturgesetze mit diesem Princip gelungen — und das ist bereits in vielen wichtigen Fällen gelungen — noch nicht gefunden worden. Man ist daher zu der Annahme berechtigt, daſs dieses Princip eine universelle Gültigkeit hat, so daſs man es in Gebieten, wo die Beweise für seine Richtigkeit noch fehlen, doch mit Nutzen als Leitfaden für die Auffindung der Gesetze benutzen kann, deren Bestätigung oder Widerlegung dann Aufgabe der experimentellen Forschung ist. Es ergeben sich aus dem Princip nothwendige Beziehungen zwischen dem Verhalten eines Systems gegenüber gewissen Veränderungen der Kräfte, reciproke Beziehungen, welche bisher immer bestätigt gefunden wurden. Die Grundlagen dieser Folgerungen sollen im folgenden letzten Paragraphen dieses Bandes angegeben werden.

§ 79. Reciprocitätsgesetze.

Wenn man die in den Lagrange'schen Differentialgleichungen vorkommenden Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right)$ ausrechnen will, so muſs man beachten, daſs die $\partial H / \partial q_{\mathfrak{a}}$ die Zeit nicht explicite enthalten, sondern, gleichwie H selbst, differenzirbare Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ sind. Man findet dann:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right) = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} \cdot \partial p_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{b}}}{dt} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} \cdot \partial q_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{d q_{\mathfrak{b}}}{dt}.$$

In der ersten Summe treten die Geschwindigkeiten $d p_{\mathfrak{b}} / dt = q_{\mathfrak{b}}$ als Factoren auf, deshalb brauchen aber die Ausdrücke nicht linear nach den $q_\mathfrak{b}$ zu sein, denn die zweiten Differentialquotienten von H können ja die $q_\mathfrak{b}$ auch noch enthalten. In der zweiten Summe treten die Beschleunigungen

$$\frac{d\,q_\mathfrak{b}}{d\,t} = q'_\mathfrak{b}$$

als Factoren auf, und bilden dadurch nothwendig eine lineare Function, weil an anderer Stelle die $q'_\mathfrak{b}$ nicht vorkommen. Die Kräfte $P_\mathfrak{a}$ werden also dargestellt als lineare Functionen der sämmtlichen Beschleunigungen, denn man hat:

$$P_\mathfrak{a} = -\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} + \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial p_\mathfrak{b}} q_\mathfrak{b} + \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{b}} q'_\mathfrak{b}. \tag{206}$$

(Bei cartesischen Coordinaten ist man gewöhnt die Kraft $P_\mathfrak{a}$ nur durch die ihr gleichgerichtete Beschleunigung $q'_\mathfrak{a}$ linear ausgedrückt zu finden, im Allgemeinen können aber auch, wie man sieht, die anderen Einfluſs haben.)

Differenzirt man $P_\mathfrak{a}$ nach einer bestimmten Beschleunigung $q'_\mathfrak{c}$, so bleibt nur der eine Coefficient aus der linearen Function übrig, es ist:

$$\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q'_\mathfrak{c}} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{c}}.$$

Die rechte Seite ist in Bezug auf die beiden Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ symmetrisch; man würde deshalb denselben Ausdruck gefunden haben, wenn man $P_\mathfrak{c}$ nach $q'_\mathfrak{a}$ differenzirt hätte, es muſs also sein:

$$\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q'_\mathfrak{c}} = \frac{\partial P_\mathfrak{c}}{\partial q'_\mathfrak{a}}. \tag{207}$$

Dies ist eine reciproke Beziehung zwischen Kräften und Beschleunigungen, in Worte gekleidet: Wenn ein bestimmter Zuwachs der Beschleunigung $q'_\mathfrak{c}$ die Kraft $P_\mathfrak{a}$ vergröſsert, so muſs der gleiche Zuwachs, wenn man ihn der Beschleunigung $q'_\mathfrak{a}$ ertheilt, die Kraft $P_\mathfrak{c}$ vergröſsern und zwar um denselben Betrag.

Ein Beispiel für dieses Gesetz finden wir in den Differentialgleichungen der Kreiselbewegung. Diese Gleichungen (183 α, φ, β) (S. 337) sind aufgestellt für den Fall, daſs keine äuſseren Kräfte angreifen, wir können aber sehr leicht solche Kräfte hinzufügen, wenn wir die rechten Seiten, statt Null, gleichsetzen $-P_\alpha$, $-P_\varphi$, $-P_\beta$. Führt man auſserdem die links vorgeschriebenen Differentiationen aus und bezeichnet die Winkelbeschleunigungen mit α'', φ'', β', so lauten jene beiden ersten Gleichungen (183 α und φ):

$$\mathfrak{A}\,.\,\alpha'' + \mathfrak{A}\,.\,\varphi''.\cos\beta - \mathfrak{A}\varphi'.\beta'\sin\beta = -P_\alpha$$

$$\mathfrak{A}\,.\,\alpha''.\cos\beta - \mathfrak{A}\,.\,\alpha'.\beta'\sin\beta + \frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}\varphi'\cos^2\beta + \mathfrak{B}\varphi'\sin^2\beta\right\} = -P_\varphi.$$

Man sieht, dafs in der ersten Gleichung φ'' und in der zweiten α'' mit dem gleichen Coefficienten behaftet auftreten, es ist daher:

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial \varphi''} = \frac{\partial P_\varphi}{\partial \alpha''} = -\mathfrak{A}\cos\beta,$$

wie das Reciprocitätsgesetz verlangte.

Auch zwischen den Veränderungen der Geschwindigkeiten und der Kräfte bestehen reciproke Beziehungen. Differenziren wir die Gleichung (206) nach einer bestimmten Geschwindigkeit $q_{\mathfrak{c}}$. Das eine Glied der ersten Summe, für welches $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ist, liefert dann zwei Glieder zu den Differentialquotienten, denn es ist:

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial p_{\mathfrak{c}}}\,q_{\mathfrak{c}}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial p_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial^3 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial p_{\mathfrak{c}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}\,q_{\mathfrak{c}}.$$

Alle übrigen Glieder des Ausdruckes $P_{\mathfrak{a}}$ liefern nur ein Glied, welches sich auf die Differentialquotienten von H bezieht. Mit diesen kann man den zweiten Summanden der rechten Seite der vorstehenden Gleichung vereinigen; und man findet dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{c}}} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial p_{\mathfrak{c}}}\\ &\quad + \sum_{\mathfrak{b}}\frac{\partial}{\partial p_{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}\right)\cdot\frac{dp_{\mathfrak{b}}}{dt} + \sum_{\mathfrak{b}}\frac{\partial}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}\right)\cdot\frac{dq_{\mathfrak{b}}}{dt}.\end{aligned}$$

Die beiden Summen dieser Gleichung bilden zusammen den vollständigen zeitlichen Differentialquotient von $\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}$, es ist also:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{c}}} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{c}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{a}}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}\right). \qquad (208)$$

Durch Vertauschung der Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, welche willkürlich ausgewählt waren, findet man entsprechend:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{c}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\,.\,\partial q_{\mathfrak{c}}}\right). \qquad (208\text{a})$$

Die Addition beider Gleichungen liefert:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial P_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = 2 \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{c}}}\right), \tag{208b}$$

die Subtraction der zweiten von der ersten liefert:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{c}}} - \frac{\partial P_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial p_{\mathfrak{c}}} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{c}} . \partial p_{\mathfrak{a}}}\right). \tag{208c}$$

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Gleichung (208b). In sehr zahlreichen Fällen sind die Gröfsen $\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{c}}}$ Constanten oder sogar gleich Null. Dies gilt immer, wenn H die Geschwindigkeiten nur in algebraischen Functionen ersten und zweiten Grades enthält, also vor allem in der ursprünglichen Form $H = \Phi - L$ und auch noch nach Elimination der cyklischen Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{b}}$. In diesen Fällen verschwindet die rechte Seite von (208b) und man erhält die reciproke Beziehung:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{c}}} = - \frac{\partial P_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}}, \tag{208d}$$

welche man in folgendem Satz aussprechen kann: Wenn Steigerung der Geschwindigkeit $q_{\mathfrak{c}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{a}}$ vergröfsert, so wird die gleiche Steigerung von $q_{\mathfrak{a}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{c}}$ um ebenso viel verkleinern. Man mufs indessen vor Anwendung dieses, eine ausgedehnte Bedeutung besitzenden Satzes immer erst die Erfüllung der erwähnten Vorbedingung controliren, ehe man an Stelle der allgemein richtigen Gleichung (208 b) die einfachere (208 d) anwendet.

Auch für dieses Reciprocitätsgesetz können wir den Kreisel in cardanischer Aufhängung als Beispiel benutzen. Nach Einsetzung der äufseren Kräfte $-P_\varphi$ und $-P_\beta$ und nach Ausführung der Differentiationen nach der Zeit auf der linken Seite der Gleichungen (183 φ und β) erhält man die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} . \alpha' . \varphi' . \sin\beta + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) . \varphi'^2 . \sin 2\beta + \mathfrak{B} . \beta'' = - P_\beta,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} . \alpha'' . \cos\beta - \mathfrak{A} . \alpha' . \beta' . \sin\beta - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) . \beta' . \varphi' . \sin 2\beta \\ + (\mathfrak{A}\cos^2\beta + \mathfrak{B}\sin^2\beta) . \varphi'' = - P_\varphi . \end{aligned}$$

Das kinetische Potential H enthält in diesem Problem die Geschwindigkeiten nur in der ursprünglichen durch die lebendige Kraft bedingten Form einer homogenen quadratischen Function, die Vorbedingung $\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial q_c}$ = constans ist erfüllt, wir dürfen daher die einfache Form des Gesetzes (208 d) erwarten. In der That findet man aus den beiden vorstehenden Gleichungen, dafs für den Kreisel die Bedingung gilt:

$$\frac{\partial(-P_\beta)}{\partial\varphi'} = -\frac{\partial(-P_\varphi)}{\partial\beta'} = \mathfrak{A}\,\alpha' \sin\beta + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}).\varphi'.\sin 2\beta,$$

welche man in folgende Worte kleiden kann: Wenn die Steigerung einer Kraft $(-P_\beta)$, die den Kreisel aus der verticalen Stellung weiter abzulenken strebt, den Erfolg hat, dafs die Geschwindigkeit der Präcessionsbewegung φ' dadurch vergröfsert wird, so wird eine Kraft $(-P_\varphi)$, durch welche man versucht die Präcessionsbewegung direct zu beschleunigen, statt dessen die Kreiselaxe der Verticalen zutreiben. Diese Verhältnisse werden durch unsere früheren Betrachtungen bestätigt. Wir hatten § 73 eine Kraft, welche den Ablenkungswinkel β zu vergröfsern strebte, und es ergab sich eine mit α' gleichgerichtete Präcessionsgeschwindigkeit, Gleichung (191 d), S. 346, in deren Zähler C der Mafsstab der äufseren Kraft auftrat, welche also schneller werden mufste, wenn die Kraft zunahm. Die Kraft $(-P_\varphi)$, durch welche man direct versuchen würde, die Präcession zu beschleunigen, würde den Ring II der cardanischen Aufhängung gegen den festen Ring III um die Axe FF zu drehen streben, das paradoxe Resultat dieser Bemühung ist dann, wie schon in § 67 aus einander gesetzt wurde, eine Verschiebung der Kreiselaxe quer gegen die beabsichtigte Richtung, und zwar erkennt man aus der Weisung, welche Fig. 18b giebt, dafs die Axe sich der Verticalen nähern mufs. Bei der Präcessionsbewegung der Erde hat man im Wesentlichen dieselben Verhältnisse, nur sucht dort die äufsere Kraft den Winkel β zu verkleinern, und die Präcessionsgeschwindigkeit, Gleichung (193), ist negativ.

Bei der Herleitung des dritten Reciprocitätsgesetzes zwischen Kräften und Coordinaten brauchen wir nicht die aufgeschlossene Form (206) anzuwenden, wir können vielmehr die sonst benutzte Lagrange'sche Gleichung, welche die Ordnungszahl $\mathfrak{a}$ trägt, nach der Coordinate p_c differenziren; dies giebt:

$$\frac{\partial P_a}{\partial p_c} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_a . \partial p_c} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial p_c}\right).$$

Entsprechend ist:

$$\frac{\partial P_c}{\partial p_a} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_a . \partial p_c} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_c . \partial p}\right)$$

folglich
$$\frac{\partial P_a}{\partial p_c} - \frac{\partial P_c}{\partial p_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial p_c} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_c . \partial p_a}\right).$$

Auf der rechten Seite wird der zeitliche Differentialquotient einer Gröfse gebildet, welche uns bereits in Gleichung (208 c) begegnet ist, man kann unter Benutzung jener Gleichung dafür schreiben:
$$\frac{\partial P_a}{\partial p_c} - \frac{\partial P_c}{\partial p_a} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_a}{\partial q_c} - \frac{\partial P_c}{\partial q_a}\right). \tag{209}$$

Für den Fall der Ruhe wird die rechte Seite Null, es ergiebt sich dann hieraus das allgemeine Gesetz aller conservativen Kräfte:
$$\frac{\partial P_a}{\partial p_c} = \frac{\partial P_c}{\partial p_a}, \tag{209 a}$$

welches wir bereits früher, Gleichung (121), S. 202, gefunden haben. Dieselbe einfache Bedingung (209 a) ist aber auch erfüllt bei bewegten Systemen, sobald nur die auf der rechten Seite der Gleichungen (209) stehenden zeitlichen Differentialquotienten verschwinden. Dies ist immer der Fall, wenn schnelle cyklische Bewegungen oder überhaupt verborgene Bewegungen in dem System stattfinden, gegen deren lebendige Kräfte diejenigen der sichtbaren Veränderungen der Parameter p_a vernachlässigt werden können. Dies sind die Bedingungen, welche zur Gleichung (201 a) führten. Das kinetische Potential ist dann nur abhängig von den langsam veränderlichen Parametern p_a und von den grofsen cyklischen Geschwindigkeiten q_b, deren zugehörige Coordinaten p_b aber nicht vorkommen, gleichwie die q_a fortfallen (vergl. S. 367 vor Gleichungen (201)). Man kann dann dieses dritte Reciprocitätsgesetz nur anwenden auf die p_a, zu denen auch die in Gleichung (209) mit p_c bezeichneten Coordinaten gehören müssen. Die in Gleichung (208 c) einander gleichgesetzten Ausdrücke sind in diesem Falle stets Null, und die Anwendung der statischen Bedingung (209 a) ist trotz der möglicher Weise sehr lebhaften verborgenen Bewegungen gerechtfertigt. Diese Schlufsfolgerung ist deshalb von Wichtigkeit, weil wir auf Grund derselben die hypothetischen Wärmebewegungen und die elektrischen und magnetischen Zustände der Körper nicht zu berücksichtigen brauchen, wenn es sich z. B. um die Theorie langsamer Bewegungen oder äufserlicher Ruhe unter Wirkung elastischer Kräfte handelt, dafs wir vielmehr die richtigen Resultate erhalten, wenn wir die

Gleichgewichtszustände als Zustände absoluter Ruhe der Massentheilchen des Systems ansehen.

Wir haben uns bisher bei der Illustration der Reciprocitätsgesetze auf reine Bewegungsvorgänge beschränkt, welche sich mit Hülfe der in diesem Bande gegebenen Lehren durchschauen lassen. Dafs indessen das zusammenfassende Prinzip diese Grenzen weit überschreitet, ja, bis jetzt, da wir keine Ausnahme kennen, als allgemein gültig anzusehen ist, wurde bereits betont. Es mögen deshalb hier zum Schlufs noch diejenigen Gesetze zu einer vorläufigen Uebersicht zusammengestellt werden, in welchen die reciproken Beziehungen sich für andere Gebiete von Naturerscheinungen darstellen.

Elektrodynamische Reciprocitätsgesetze, welche aus (207) folgen:

1) Da die ponderomotorischen Kräfte zwischen zwei Stromleitern, deren einer beweglich ist, zwar von den beiden Stromstärken, nicht aber von deren Anwachsen abhängen, so wird der durch Bewegung eines geschlossenen Leiters gegen einen festen Stromkreis in ersterem inducirte Strom zwar von der Geschwindigkeit der Bewegung, nicht aber von deren Beschleunigung abhängen.

2) Zwei in Gestalt und Lage unveränderliche Stromleiter A und B seien von elektrischen Strömen durchflossen. Bewirkt ein Ansteigen des Stromes in A einen Inductionsstrom in B, welcher den dort laufenden Strom verstärkt, so wird auch ein Ansteigen des Stromes in B einen Inductionsstrom in A erzeugen, welcher den dort laufenden Strom verstärkt.

Mehrere interessante Gesetze liefert das zweite Reciprocitätsgesetz.

3) Elektrodynamisches Inductionsgesetz nach Lenz. Jede Bewegung zweier Stromkreise gegen einander, welche durch die ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte unterstützt wird, inducirt elektromotorische Kräfte, welche die primären Ströme schwächen.

4) Thermodynamisches Gesetz. Wenn Steigerung der Temperatur bei constantem Volumen den Druck eines Körpers vermehrt, so wird Compression desselben die Temperatur steigern.

5) Thermoelektrisches Gesetz. Peltier's Phänomen. Wenn Erwärmung einer Löthstelle einer geschlossenen Leitung einen elektrischen Strom hervorbringt, so wird ein elektrischer Strom, in derselben Richtung hindurchgeschickt, diese Stelle kühlen (abgesehen von der Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand).

6) Elektrochemisches Gesetz. Wenn Temperatursteigerung eines constanten galvanischen Elementes dessen elektromotorische Kraft erhöht, so wird der Strom in demselben Wärme latent machen.

Alle diese Reciprocitätssätze werden übrigens nicht nur als qualitative Aussagen gewonnen, welche den Sinn der beiden correspondirenden Veränderungen angeben, sondern man erhält aus den betreffenden Gleichungen auch Aufschlufs über die Quantitäten, um die es sich dabei handelt.

Berichtigungen.

Seite 20 Zeile 21 lies: (x, y)-Ebene.

„ 27 „ 12 lies: Moment statt Quantität.

„ 89 „ 1 v. u. lies: $(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6})^2$.

„ 123 „ 6 u. 5 v. u. lies: Exponential-functionen statt -curven.

„ 146 bis 176 Ueberschrift, lies: Erster statt Zweiter Abschnitt.

„ 181 letzte Zeile lies: gröfsten oder kleinsten statt gröfsten.
