universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1898

Dritter Theil. Dynamik eines Massensystems

urn:nbn:at:at-ubi:2-6859

Dritter Theil.

Dynamik eines Massensystems.

Erster Abschnitt.

Das Reactionsprincip.

§ 39. Newtons drittes Axiom.

In den vorangehenden Betrachtungen beschäftigte uns die theoretische Ableitung der Bewegungsgesetze eines einzelnen Massenpunktes, auf welchen gewisse von aufsen gegebene Kräfte einwirken. Wenn dabei bisweilen auf die Bewegungen ausgedehnter Körper Bezug genommen wurde, so geschah dies nur, um anschauliche, der Beobachtung zugängliche Beispiele anzuführen, in denen indessen die Erscheinungen in derselben Weise verlaufen, wie dies für den einzelnen Massenpunkt abgeleitet wurde. Als allgemeine Principien für die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung genügten dabei die beiden Newton'schen Axiome vom Beharrungsvermögen und von der beschleunigenden Wirkung der Bewegungskraft. Wir gehen nun dazu über, gleichzeitig mehrere Massenpunkte zu betrachten. Wenn die wirkenden Kräfte, wie bisher, gänzlich von aufsen vorgeschrieben sind, so werden wir nur eine vielfache Anwendung der bereits gewonnenen Kenntnisse zu machen haben, jeder Massenpunkt bewegt sich dann ebenso, als wenn er allein vorhanden wäre. In den nun folgenden Betrachtungen wollen wir jedoch annehmen, dafs durch die Anwesenheit mehrerer Massenpunkte Kräfte zwischen denselben auftreten, welche zu den eventuell vorhandenen, von aufsen vorgeschriebenen Kräften hinzukommen und dadurch die Bewegungserscheinungen der einzelnen Massenpunkte verändern, oder auch bei Abwesenheit fremder Kräfte beschleunigte Bewegungen der einzelnen Massenpunkte erzeugen.

Newton hat auch der Behandlung dieser Probleme eine Grundlage geschaffen, indem er zunächst die Hypothese aufstellte, dafs alle Naturkräfte zurückzuführen seien auf Wirkungen, welche zwischen

jedem Paar von Massenpunkten beständen und zwar in Gestalt von Kräften, welche in Richtung der geradlinigen Verbindung des Paares wirken, also als Abstofsungs- oder Anziehungskräfte zu bezeichnen sind, je nachdem sie den Abstand der beiden Massen zu vergröfsern oder zu verkleinern streben. Greift man ein Paar von Punkten heraus, so erfährt jeder eine Kraftwirkung durch den anderen, diese beiden Kräfte pflegt man durch die Bezeichnung „Wirkung“ und „Rückwirkung“, „actio“ und „reactio“, in gegensätzliche Verbindung zu bringen und über diese beiden Kräfte stellte NEWTON folgendes dritte Axiom auf:

„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“

Aufser der entgegengesetzten Gleichheit der actio und reactio liegt in diesem Satze stillschweigend die Anschauung ausgedrückt, dafs die Anwesenheit eines dritten oder noch mehrerer anderer Massenpunkte die gegenseitige Wirkung der beiden ersteren nicht stört, dafs vielmehr die Kräfte zwischen allen möglichen Paaren sich ungestört superponiren oder geometrisch addiren, so dafs die Wirkung, welche auf einen Punkt von vielen anderen Punkten zusammen ausgeübt wird, gefunden wird als die Resultante aller einzelnen Kräfte. Es ist diese Anschauung keine logische Nothwendigkeit. Man könnte sich auch denken, dafs ein Massenpunkt, welcher bereits auf einen zweiten eine Kraft ausübt, deshalb auf einen dritten nicht mehr ebenso wirken kann, wie bei Abwesenheit des zweiten. Es sind aber derartige Erscheinungen bisher noch niemals beobachtet worden, wenigstens gelingt es in Fällen, welche dafür zu sprechen scheinen (z. B. Kraftwirkung zweier weicher Eisenstücke auf einander bei Annäherung eines Magneten) stets, noch anderweitig veränderte Zustände nachzuweisen, deren Wirkungen dann auch noch superponirt werden müssen.

Man nennt jede räumliche Gruppirung von Massenpunkten, welche mit Kräften der eben besprochenen Art auf einander wirken, ein Massensystem, und zwar heifst dasselbe ein freies Massensystem, wenn aufser diesen gegenseitigen Actionen und Reactionen oder, wie man sagt, inneren Kräften keine von aufserhalb herstammenden Einflüsse (äufsere Kräfte) vorhanden sind.

Ebenso verschiedenartig wie nun die Richtungen der Verbindungslinien aller Punkte eines freien Massensystems sind, so verschieden sind auch die Richtungen aller inneren Kräfte, doch lassen sich dieselben auf drei beliebig festgelegte, senkrechte Axenrichtungen

zurückführen, wenn wir alle Kräfte in die entsprechenden drei Componenten zerlegen. Wir denken uns alle Punkte des Massensystems in irgend einer Reihenfolge numerirt, greifen zwei derselben, $m_\mathfrak{a}$ und $m_\mathfrak{b}$, heraus und nennen den absoluten Betrag der von $m_\mathfrak{b}$ auf $m_\mathfrak{a}$ ausgeübten Kraft $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, so sagt der erste Theil des Axioms aus, dafs

$$K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

sein mufs. Bildet nun die Richtung der Kraft $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ mit den positiven Axenrichtungen die Winkel α, β, γ, so werden die drei Componenten dieser Kraft:

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \cos\alpha \\ Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \cos\beta \\ Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$

Da die Kraft $K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ entgegengesetzt gerichtet sein soll, so werden die Richtungswinkel derselben durch $\alpha \pm \pi$, $\beta \pm \pi$, $\gamma \pm \pi$ bestimmt sein und die Componenten der Kraft $K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ werden:

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cos(\alpha \pm \pi) = -K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cdot \cos\alpha \\ Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cos(\beta \pm \pi) = -K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cdot \cos\beta \\ Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cos(\gamma \pm \pi) = -K_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cdot \cos\gamma. \end{aligned}$$

Die entgegengesetzte Gleichheit beider Kräfte führt also sofort zu der Beziehung:

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= 0 \\ Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= 0 \\ Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= 0. \end{aligned}$$

Dieselbe Betrachtung denken wir für jedes mögliche Punktepaar des Massensystems, also für jedes Paar von zwei verschiedenen Ordnungszahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, durchgeführt. Die ganze Schaar von Gleichungssystemen der vorstehenden Art können wir durch Addition vereinigen, und finden so:

$$\left.\begin{aligned} \sum'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}) &= 0 \\ \sum'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}) &= 0 \\ \sum'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} (Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{b} \text{ nicht} = \mathfrak{a}.$$

Diese Summen, über alle Punktpaare des Systems erstreckt, enthalten aber als Summanden schliefslich sämmtliche gleichgerichtete Componenten der überhaupt in dem System vorhandenen inneren Kräfte, so dafs wir dieselben Summen kürzer und übersichtlicher darstellen können. Bezeichnen wir nämlich durch $X_\mathfrak{a}$ die Summe aller derjenigen x-Componenten, welche einen Massenpunkt $m_\mathfrak{a}$ an-

greifen, also die x-Componente der gesammten Kraft, welche m_a von den übrigen Massen des Systems aus erfährt, so werden sämmtliche im System vorkommenden x-Componenten offenbar durch $\sum_a X_a$ dargestellt. Wenn Y_a und Z_a entsprechende Bedeutung haben, so erhalten wir als Resultat:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum_a X_a &= 0 \\ \textstyle\sum_a Y_a &= 0 \\ \textstyle\sum_a Z_a &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

die Summen erstreckt über sämmtliche Punkte des freien Massensystems.

Diese drei Gleichungen sind eine directe Folge des Axioms von der Gleichheit der actio und reactio, sie sind aber allgemeiner als die der NEWTON'schen Lehre zu Grunde liegenden Anschauung, denn es wird hier nicht mehr gefordert, daſs die inneren Kräfte nothwendig Anziehungen und Abstoſsungen zwischen Punktpaaren in Richtung ihrer Verbindungslinie, d. h. sogenannte Centralkräfte sein müssen. Die Gleichungen sagen nur aus, daſs in jedem freien Massensystem die gleichgerichteten Componenten aller vorhandenen Kräfte sich vernichten, wie auch die Richtung gewählt werde. Es folgt daraus auch sofort, daſs im freien System die geometrische Summe aller vorhandenen Kräfte gleich Null sein muſs. Die weiteren Folgerungen aus diesem durch die Gleichungen (87) dargestellten Gesetze haben sich in der gesammten Physik ausnahmelos bestätigt, das darin liegende Princip hat also erfahrungsmäſsig eine ganz umfassende Bedeutung, was man von den Voraussetzungen NEWTONS über die Natur der Kräfte nicht beweisen kann. Wir wollen daher die Gleichungen (87) als den eigentlichen Inhalt des dritten NEWTON'schen Axioms ansehen und für jedes freie Massensystem als erfüllt voraussetzen.

§ 40. Vom Schwerpunkt.

Aus dem eben besprochenen Princip lassen sich einige allgemeine Gesetze über die möglichen Bewegungen eines freien Massensystems unter dem Spiel seiner inneren Kräfte herleiten. Um aber diese Gesetze in übersichtlicher Form darzustellen, müssen wir zunächst einen für jedes Massensystem wichtigen Begriff aufstellen. Derselbe hat nicht, wie sein Name „Schwerpunkt“ erwarten läſst, etwas zu thun mit der Schwerkraft noch mit irgend welchen anderen Kräften, sondern er ist in rein geometrischer Art zu definiren als

der mittlere Ort aller Massen des Systems. Denken wir uns die Lagen aller Massenpunkte m_α angegeben durch ihre auf ein festes Axensystem bezogenen Coordinaten x_α, y_α, z_α, so können wir uns zunächst für die x-Richtung die Aufgabe stellen, eine Abmessung $\mathfrak{x}$ zu suchen, welche der Bedingung genügt:

$$\mathfrak{x} \cdot \sum m_\alpha = \sum m_\alpha x_\alpha ,$$

die Summen über sämmtliche Massenpunkte des Systems erstreckt. Die x_α können dabei selbstverständlich, je nach der Lage der Punkte, positiv oder negativ sein, und auch $\mathfrak{x}$ ist als algebraische Gröfse aufzufassen. Die einzelnen x_α geben alsdann die Abstände der einzelnen Massenpunkte von der auf der x-Axe senkrechten Coordinatebene (der y-z-Ebene) an, und $\mathfrak{x}$ ist nach der aufgestellten Gleichung der mittlere Abstand aller Massen von dieser festen Ebene. Wären alle Punkte m_α von der gleichen Masse, so würde $\sum m_\alpha$ nur die Anzahl der vorhandenen Punkte angeben, und wir würden $\mathfrak{x}$ als das arithmetische Mittel aller x_α finden. Wenn die m_α aber von ungleicher Gröfse sind, so werden die verschiedenen x_α ungleiches Gewicht in der Summe bekommen; wir können uns aber wohl vorstellen, dafs beispielsweise in einem doppelt so grofsen Massenpunkt zwei solche von einfacher Gröfse an demselben Orte vereinigt sind, so dafs deshalb diese Coordinate zweimal in die Summe aufzunehmen ist. In derselben Weise können wir für die y- und z-Abmessungen zwei Coordinaten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ aufstellen, welche den Bedingungen genügen:

$$\mathfrak{y} \cdot \sum m_\alpha = \sum m_\alpha y_\alpha$$
$$\mathfrak{z} \cdot \sum m_\alpha = \sum m_\alpha z_\alpha$$

und welche als mittlerer Abstand aller Massen des Systems von den beiden anderen Coordinatebenen zu bezeichnen sind. Die drei Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ definiren einen durch die Lage aller einzelnen Massenpunkte bestimmten Punkt des Raumes, den man den mittleren Ort der Massen oder kürzer den Schwerpunkt des Systems nennt.

Die Coordinaten desselben sind nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \frac{\sum m_\alpha x_\alpha}{\sum m_\alpha} \\ \mathfrak{y} &= \frac{\sum m_\alpha y_\alpha}{\sum m_\alpha} \\ \mathfrak{z} &= \frac{\sum m_\alpha z_\alpha}{\sum m_\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Bei der Auffindung dieses Punktes haben wir uns auf ein bestimmtes Coordinatensystem gestützt, durch welches sowohl die Oerter der einzelnen Massenpunkte wie auch der Ort des Schwerpunktes angeben wurden. Wir haben nun zunächst zu zeigen, dafs die durch Gleichung (88) definierte Lage des Schwerpunktes im Massensystem nicht etwa von der besonderen Wahl der Coordinaten-Ebenen abhängt, sondern dass dadurch vielmehr ein nur durch die Gruppirung der Massen bedingter Punkt bezeichnet wird. Wir werden diesen Nachweis dadurch führen, dafs wir das Coordinatensystem in irgend eine andere Lage bringen. Bekanntlich ist jede Lage aus der ursprünglichen abzuleiten durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung.

Bezeichnen wir die Abmessungen, welche sich auf das parallelverschobene Axensystem beziehen, durch x', y', z', so gelten die Relationen:

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$
$$z = z' + c$$

in denen a, b, c Constanten sind.

Der Schwerpunktscoordinate $\mathfrak{x}$ wird danach:

$$\mathfrak{x} = \frac{\sum m_a (x' + a)}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a x'}{\sum m_a} + a,$$

während die auf das neue Axensystem bezügliche, nach der Vorschrift der Gleichung (88) gebildete Coordinate $\mathfrak{x}'$ ist:

$$\mathfrak{x}' = \frac{\sum m_a x'}{\sum m_a},$$

sodafs man schliefslich erhält:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + a.$$

Durch die gleiche Ueberlegung findet man:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}' + b$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' + c.$$

Die Coordinaten des auf das neue Axensystem bezogenen Schwerpunktes $(\mathfrak{x}'\ \mathfrak{y}'\ \mathfrak{z}')$ stehen also zu denjenigen des ursprünglichen Schwerpunktes $(\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z})$ in derselben Beziehung, wie die Coordinaten jedes festen Punktes in beiden Coordinatsystemen, mithin bezeichnet die Gleichung (88) in allen parallel gerichteten Axensystemen denselben Ort des Massensystems.

Nun werde das Coordinatensystem gedreht und die neuen Abmessungen durch x'' y'' z'' bezeichnet. Man hat alsdann die Beziehung:

$$x = x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma,$$

in welcher α, β, γ die Winkel sind, welche die x-Axe vor der Drehung mit den neuen, gedrehten drei Axenrichtungen bildet. Zwei analoge Gleichungen stellen die Verbindung zwischen y, z und den neuen Coordinaten her.

Die Schwerpunktsabmessung $\mathfrak{x}$ wird danach:

$$\mathfrak{x} = \frac{\sum m_a (x_a'' \cos\alpha + y_a'' \cos\beta + z_a'' \cos\gamma)}{\sum m_a}$$

$$= \frac{\sum m_a x_a''}{\sum m_a} \cos\alpha + \frac{\sum m_a y_a''}{\sum m_a} \cos\beta + \frac{\sum m_a z_a''}{\sum m_a} \cos\gamma.$$

Anderseits sind die auf Grundlage des neuen Axensystems bestimmten Coordinaten des Schwerpunktes:

$$\mathfrak{x}'' = \frac{\sum m_a x_a''}{\sum m_a}, \qquad \mathfrak{y}'' = \frac{\sum m_a y_a''}{\sum m_a}, \qquad \mathfrak{z}'' = \frac{\sum m_a z_a''}{\sum m_a},$$

so dafs wir erhalten:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'' \cos\alpha + \mathfrak{y}'' \cos\beta + \mathfrak{z}'' \cos\gamma.$$

Also auch bei der Drehung der Coordinaten verändern sich die Abmessungen des Schwerpunktes in derselben Weise wie diejenigen eines festen Punktes. Es ist hiermit bewiesen, dafs in jedem Coordinatensystem der nach Vorschrift aufgesuchte Schwerpunkt eines Massensystems dieselbe Lage zu diesem Massensystem besitzt, also thatsächlich unabhängig von den Coordinaten ist.

Zu derselben Erkenntnifs kann man auch durch folgende Betrachtung kommen. Die gesammte Masse des Systems, $\sum m_a$, welche auf der rechten Seite der Gleichungen (88) als Nenner auftritt, kann man jedem Summanden des Zählers jener Gleichungen zuerteilen und schreiben:

$$\mathfrak{x} = \sum \frac{m_a}{\sum m_a} \cdot x_a$$

$$\mathfrak{y} = \sum \frac{m_a}{\sum m_a} \cdot y_a$$

$$\mathfrak{z} = \sum \frac{m_a}{\sum m_a} \cdot z_a$$

Durch diese Umformung ist die Auffindung des Schwerpunktes auf eine einfache geometrische Addition zurückgeführt, denn man hat die Coordinaten der einzelnen Massenpunkte nur mit der zugehörigen echt gebrochenen Verhältnifszahl $\frac{m_\alpha}{\sum m_\alpha}$ zu multipliciren, und alle zu addiren. Nennen wir den Radius vector des α-ten Massenpunktes r_α und verjüngen denselben im Verhältnifs $m_\alpha : \sum m_\alpha$, so erhalten wir eine gerichtete Strecke, deren Componenten die Bestandtheile der vorstehenden Summen bilden, der Radius vector des Schwerpunktes ist also die geometrische Summe der in den angegebenen Verhältnissen verjüngten Radii vectores der einzelnen Massenpunkte. Die geometrische Addition von Vectoren ist aber ein Process, der von jeder Coordinatenrichtung unabhängig ist.

Die gelieferten Nachweise für die eindeutig bestimmte Lage des Schwerpunktes gegen die Punkte des Massensystems bleiben dieselben, wenn man anstatt des Coordinatensystems das Massensystem ohne Veränderung der relativen Lage seiner Theile verschiebt und dreht: Die Lage des Schwerpunktes im System bleibt dabei unverändert.

§ 41. Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Die Componenten der Kraft, welche auf einen Massenpunkt m_α wirkt, werden nach der NEWTON'schen Definition zu setzen sein:

$$\left.\begin{aligned} X_\alpha &= m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha x_\alpha) \\ Y_\alpha &= m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha y_\alpha) \\ Z_\alpha &= m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\alpha z_\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Für jedes Element des Systems erhalten wir drei solche Componenten. Addiren wir die gleichgerichteten, so bekommen wir für das Massensystem folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_\alpha X_\alpha &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha (m_\alpha x_\alpha) \\ \sum_\alpha Y_\alpha &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha (m_\alpha y_\alpha) \\ \sum_\alpha Z_\alpha &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_\alpha (m_\alpha z_\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (89\,a)$$

Es ist dabei auf den rechten Seiten erlaubtermafsen statt der Summe von Differentialquotienten sogleich der Differentialquotient von der Summe der in den einzelnen Gliedern zu differenzirenden Gröfsen gesetzt worden. Diese letzteren Summen in den drei vorstehenden Gleichungen bezeichnen die entsprechenden Coordinaten des Schwerpunktes multiplicirt mit der Gesammtmasse des Systems, welche wir als unveränderliche Gröfse vor das Zeichen der Differentiation setzen können. So findet man das Resultat:

$$\left.\begin{aligned} \sum_a X_a &= \left(\sum_a m_a\right) \cdot \frac{d^2 \xi}{d t^2} \\ \sum_a Y_a &= \left(\sum_a m_a\right) \cdot \frac{d^2 \eta}{d t^2} \\ \sum_a Z_a &= \left(\sum_a m_a\right) \cdot \frac{d^2 \zeta}{d t^2} \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Vergleichen wir dasselbe mit dem in Gleichungen (15) (Seite 29) aufgestellten Ausdruck der auf einen einzelnen Massenpunkt wirkenden Kraftcomponenten, so finden wir eine vollkommene formelle Uebereinstimmung, die sich in Worten folgendermafsen aussprechen läfst: Wenn auf die Punkte eines Massensystems beliebige innere und äufsere Kräfte einwirken, so wird sich der Schwerpunkt des Systems ebenso bewegen, wie ein einzelner Massenpunkt von der Gröfse $\sum m_a$, welcher angegriffen wird von einer Kraft, deren Componenten $\sum X_a$, $\sum Y_a$, $\sum Z_a$ sind. Wir können daher sämmtliche Erkenntnisse, die wir bisher über die Bewegungen eines einzelnen Massenpunktes gewonnen haben, direct übertragen auf die Bewegung des Schwerpunktes von irgend welchen Massensystemen, zu denen auch alle ausgedehnten starren Körper gehören. Dadurch gewinnen jene Betrachtungen überhaupt erst reale Bedeutung, denn wir haben es bei unseren Beobachtungen immer mit ausgedehnten Massen zu thun, während ein materieller Punkt nur eine Abstraction ist.

Die Schwerkraft und die dadurch verursachten Bewegungserscheinungen waren eines der am frühesten behandelten Themata der Dynamik, und da auch bei diesen Erscheinungen der mittlere Ort der Massen zur übersichtlichen Darstellung der Vorgänge vornehmlich betrachtet werden mufste, so nannte man denselben, als den Angriffspunkt der Resultante aller Zugkräfte der Schwere, den Schwerpunkt — centrum gravitatis; erst später erkannte man die allgemeinere Bedeutung dieses Begriffs. Die Schwere ist ja erfahrungsmäfsig eine allgemeine Eigenschaft aller Massen; wenigstens geht bei aller ponderablen, wägbaren Substanz das Gewicht proportional der

Gröfse des Beharrungsvermögens oder der Trägheit, welche das eigentlich Wesentliche an dem Begriff der Masse ist. Beharrungsvermögen ist indessen ein Begriff für sich, welcher auch getrennt von der Eigenschaft der Schwere vorgestellt werden kann; deshalb müfste man diesen ausgezeichneten Punkt richtiger mit „centrum inertiae" bezeichnen. Der Name Schwerpunkt ist nun einmal im Sprachgebrauch fest eingewurzelt, aufserdem kürzer als alle anderen Bezeichnungen, er wird daher beibehalten.

Wir wollen nun annehmen, dafs das betrachtete Massensystem ein freies ist. Alsdann haben wir nach dem Reactionsprincip, Gleichung (87) die Summen der Kraftcomponenten gleich Null zu setzen, und erhalten als Differentialgleichungen der Bewegung des Schwerpunktes, nach Unterdrückung des jedenfalls von Null verschiedenen Factors $\sum m_a$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (90\,a)$$

Der Schwerpunkt eines freien Massensystems besitzt also niemals eine Beschleunigung, die erste Integration liefert in Folge dessen constante Geschwindigkeitscomponenten, welche aussagen, dafs der Schwerpunkt sich nur in geradliniger Bahn mit unveränderter Geschwindigkeit fortbewegen kann, gleichwie ein einzelner Massenpunkt bei Abwesenheit von Kräften seinem Beharrungsvermögen folgt. In diesem Sinne können wir den eben gefundenen Satz, soweit er sich auf starre Systeme bezieht, als eine Praecisirung des ersten NEWTON'schen Axioms (Seite 26) ansehen, wenn wir nämlich corpus mit Schwerpunkt des Körpers und vires impressae mit äufsere Kräfte übersetzen. Das jetzt mit Hülfe des Reactionsprincips erkannte Gesetz ist aber umfassender, da es sich auch auf solche Fälle bezieht, in denen die einzelnen Theile des Systems ihre relative Lage verändern können und unter der Wirkung der inneren Kräfte beschleunigte oder verzögerte oder krummlinige Bewegungen ausführen. Man nennt das gewonnene Resultat das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes freier Massensysteme. Dasselbe besitzt, soweit bis jetzt die Beobachtungen reichen, gleich dem eng damit verbundenen Reactionsprincip, ganz universelle Gültigkeit.

Wenn man die vollständige Reihe von Bewegungsgleichungen, welche die Kraftwirkungen zwischen den einzelnen Punkten eines freien Massensystems zum Ausdruck bringen, aufgestellt hat, so liefert das eben erkannte Gesetz sofort eine Integration mit sechs disponiblen Constanten, welche die Anfangslage und die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes bezeichnen. In vielen Fällen interessiren bei einem freien System nur die gegenseitigen Lagenänderungen der einzelnen Punkte, während die translatorische Bewegung des mittleren Ortes der Massen im Raume gleichgültig bleibt; alsdann setzt man willkürlicher Weise diese sechs Constanten gleich Null, nimmt also den Schwerpunkt als ruhend im Nullpunkt der Coordinaten an.

§ 42. Von den Rotationsmomenten.

Wir haben nun zu fragen, von welcher Art die Bewegungen in einem Massensystem, dessen Schwerpunkt ruht, überhaupt noch sein können. Für starre Systeme bleiben, wie man ohne Weiteres sieht, nur noch Drehungen übrig, um irgend welche durch den Schwerpunkt gehende Axen, in beweglichen Systemen können auch Bewegungen in radialer Richtung zu jenen hinzukommen und dadurch gröfsere Mannigfaltigkeit der Bahnen erzeugen. Um die Gesetzmäfsigkeiten dieser Bewegungen übersichtlich darzustellen, müssen wir zunächst wieder einige Begriffe einführen.

Wir denken uns zu dem Zwecke die Punkte des Massensystems, dem allgemeineren Falle entsprechend, frei beweglich und greifen zurück auf die zu Anfang des vorigen Paragraphen aufgestellten Differentialgleichungen (89). Wir weisen der x-Axe dadurch eine Sonderstellung in der folgenden Betrachtung an, dafs wir die dritte jener Gleichungen fortlassen, und mit den beiden anderen allein eine Umformung vornehmen. Für den Massenpunkt m_a benutzen wir also die beiden Gleichungen:

$$X_a = m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2}$$

$$Y_a = m_a \frac{d^2 y_a}{dt^2}$$

Wir erweitern die erste mit y_a, die zweite mit x_a und bilden die Differenz der linken und der rechten Seiten. Es wird durch diese Operation aufser der Sonderstellung der x-Axe auch noch eine zunächst willkürliche Reihenfolge der x- und y-Axe festgesetzt,

je nachdem man die zweite Gleichung von der ersten oder die erste von der zweiten abzieht. Wir wollen die letztere Anordnung wählen, weil sich bei derselben die Drehung, welche die $+x$-Richtung auf kürzestem Wege in die $+y$-Richtung überführt, positiv ausfällt, also mit dem üblichen Sinne einer positiven Drehung übereinstimmt. Das Resultat dieser Umformung ist die Gleichung:

$$Y_a x_a - X_a y_a = m_a \cdot \left(\frac{d^2 y_a}{dt^2} x_a - \frac{d^2 x_a}{dt^2} y_a \right)$$

Das Bedeutsame dieser Combination der beiden Gleichungen liegt darin, dafs die rechte Seite sich als ein vollständiger Differentialquotient herausstellt, also in allen Fällen, wo die linke Seite integrabel erscheint, eine Integration erlaubt. Es ist nämlich:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} x + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{d^2 x}{dt} y.$$

Die beiden mittleren Glieder der Entwickelung heben sich fort und es bleibt derselbe Ausdruck übrig, der in der gewonnenen Gleichung die rechte Seite bildet; wir erhalten also:

$$Y_a x_a - X_a y_a = \frac{d}{dt}\left\{ m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a \right) \right\}.$$

Entsprechende Gleichungen denken wir uns nun für sämmtliche Massenpunkte des Systems gebildet, und alle addirt:

$$\sum_a (Y_a x_a - X_a y_a) = \frac{d}{dt} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a \right) \right\}.$$

Ebenso, wie wir im Vorhergehenden der z-Richtung eine Ausnahmestellung ertheilten, können wir auch die x- und die y-Richtung absondern, und erhalten im Ganzen folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_a (Z_a y_a - Y_a z_a) &= \frac{d}{dt} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dz_a}{dt} y_a - \frac{dy_a}{dt} z_a \right) \right\} \\ \sum_a (X_a z_a - Z_a x_a) &= \frac{d}{dt} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dx_a}{dt} z_a - \frac{dz_a}{dt} x_a \right) \right\} \\ \sum_a (Y_a x_a - X_a y_a) &= \frac{d}{dt} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a \right) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Die auf der linken Seite dieses Gleichungssystems auftretenden Summen nennt man die Rotationsmomente der Kräfte bezogen auf die x-Axe (erste Gleichung), y-Axe (zweite Gleichung) und z-Axe

(dritte Gleichung). Die anderen Summen, deren zeitliche Differentialquotienten die rechten Seiten der Gleichungen bilden, heifsen die Rotationsmomente der Geschwindigkeiten oder auch der Bewegungen, bezogen auf die drei Coordinataxen. Das Wort Moment (eigentlich movimentum) findet sich in mehrfacher Anwendung zur Bezeichnung verschiedenartiger Begriffe, die sich an die Bewegung von Massen knüpfen. So wird bisweilen die Bewegungsgröfse, das Product einer Masse multiplicirt mit ihrer Geschwindigkeit, als das Moment der Bewegung bezeichnet, hier haben wir zwei Arten von Rotationsmomenten kennen gelernt, später werden wir noch von dem sogenannten Trägheitsmoment einer Masse in Bezug anf eine Axe zu reden haben. Man mufs sich also vor dem Irrthum hüten, dergleichen als Momente bezeichnete Gröfsen für Begriffe derselben Art oder Dimension zu halten.

Das Charakteristische an der Bildungsweise der Rotationsmomente besteht darin, dafs sie zusammengesetzt sind aus Producten zweier senkrecht auf einander stehender Vectoren, von denen die einen Coordinaten von Punkten, also gerichtete Strecken sind, während die anderen Componenten von Kräften oder Geschwindigkeiten sind. Wenn man sich diese letzteren ebenfalls als Strecken versinnlicht, wie wir das auch schon früher gethan haben, so sieht man sogleich, dass die Rotationsmomente sich durch Flächengröfsen in den drei Coordinatebenen werden veranschaulichen lassen. Im Einzelnen erhellt dies aus folgender geometrischen Betrachtung. Wir denken uns in der (x, y)-Ebene vom Anfangspunkt aus zwei gerichtete Strecken gezogen, die eine sei bezeichnet durch r, ihre Componenten durch x und y, die andere Strecke sei R mit den Componenten X und Y. Es läfst sich leicht zeigen, dafs die doppelte Fläche des von r und R begrenzten Dreiecks für jede Lage der beiden Vectoren gegeben ist durch:

$$2\Delta = Yx - Xy.$$

Unter einer Dreiecksfläche verstehen wir gewöhnlich einen absoluten Werth; der hier gegebene Ausdruck kann indessen positiv oder negativ ausfallen, und zwar wird er in dieser Anordnung positiv, wenn die Richtung r in die Richtung R auf kürzestem Wege durch eine positive Drehung übergeführt wird. Positive Drehung ist dabei, wie allgemein acceptirt, diejenige, welche die $+x$-Richtung auf kürzestem Wege in die $+y$-Richtung überführt. Denken wir uns die beiden Vectoren r und R nicht in die (x, y)-Ebene fallend, sondern im Raume liegend, so werden dieselben auch noch je eine Compo-

nente in der Richtung der z-Achse haben, die wir entsprechend durch z und Z bezeichnen wollen. Das durch r und R bestimmte Dreieck liegt dann in irgend einer gewissen Ebene im Raum, deren Richtung man am besten durch die Winkel bestimmt, welche die Normale auf der Ebene mit den Coordinataxen einschliefst. Um bei der Angabe dieser Winkel Zweideutigkeiten zu vermeiden, ist es indessen nöthig, festzusetzen, nach welcher Seite der Dreiecksebene die Normale errichtet werden soll. Da zunächst die beiden Vectoren ganz gleichartig sind, ist diese Festsetzung beliebig, wir wollen jedoch in Uebereinstimmung mit der vorangehenden Betrachtung des Dreiecks in der (x, y)-Ebene, welches positiv war, wenn r in R durch eine positive Drehung übergeführt wurde, festsetzen, dafs die positive Richtung der Normalen nach derjenigen Seite zeige, welche die $+ z$-Axe auf der (x, y)-Ebene bestimmt. Diese Lage wird nun allgemein durch folgende Regel angegeben: Man denke sich in der $+ x$-Axe liegend, die Füfse im Anfangspunkt, und sehe die $+ y$-Axe an, dann ist die $+ z$-Axe nach links gerichtet. Dementsprechend bestimmen wir die positive Normale auf der Dreiecksebene folgendermafsen: Man denke sich in den Vector r versetzt, die Füfse im Anfangspunkt, und blicke nach dem Vector R. Die positive Normale wird dann durch die Richtung des linken Armes bestimmt. Dieses Dreieck kann auf die drei Coordinatebenen projicirt werden, und man sieht ohne Weiteres, dafs die doppelten Flächen der drei Projectionsdreiecke gegeben sind durch:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Delta_x &= Zy - Yz \\ 2\,\Delta_y &= Xz - Zx \\ 2\,\Delta_z &= Yx - Xy \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Anderseits kann man aber die Projectionsflächen ausdrücken durch die im Raume liegende Dreiecksfläche Δ und die Cosinus der Neigungswinkel der betreffenden Ebenen. Diese letzteren sind gleich den Winkeln zwischen der positiven Normalen auf Δ und den drei Axen; diese Winkel bezeichnen wir durch (n, x), (n, y), (n, z), sie sind kleiner als zwei Rechte. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Delta_x &= 2\,\Delta \cdot \cos(n, x) \\ 2\,\Delta_y &= 2\,\Delta \cdot \cos(n, y) \\ 2\,\Delta_z &= 2\,\Delta \cdot \cos(n, z) \end{aligned}\right\} \qquad (92\,\mathrm{a})$$

Auch bei dieser Darstellung sieht man, dafs nach Annahme eines positiven Werthes Δ die Projectionsflächen positiv oder negativ

werden können, nämlich je nachdem die Neigungswinkel spitz oder stumpf sind.

Die Summe der drei Cosinusquadrate ist bekanntlich gleich 1, man findet daher:

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta &= +\sqrt{(2\Delta_x)^2 + (2\Delta_y)^2 + (2\Delta_z)^2} \\ &= +\sqrt{(Zy - Yz)^2 + (Xz - Zx)^2 + (Yx - Xy)^2} \end{aligned}\right\} \quad (92\,\mathrm{b})$$

und die drei Richtungswinkel der positiven Normalen auf Δ werden dann:

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ \cos(n, y) &= \frac{\Delta_y}{\Delta} \\ \cos(n, z) &= \frac{\Delta_z}{\Delta} \end{aligned}\right\} \quad (92\,\mathrm{c})$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (92) stimmen formell mit den einzelnen Gliedern der eingeführten Rotationsmomente überein, doch sind die hier betrachteten Dreiecksflächen rein geometrische Gröfsen, während in jenen Rotationsmomenten der eine der beiden combinirten Vectoren physikalischer Natur ist, eine Geschwindigkeit oder eine Kraft. Man kann indessen jede Art von gerichteter Gröfse, sei deren Dimension, welche sie wolle, darstellen als Product eines ungerichteten (skalaren) constanten Factors und einer gerichteten Strecke. Die Gröfse jenes constanten Factors ist willkürlich einfür allemal festzusetzen und spielt nur die Rolle eines Mafsstabes, die Dimension desselben wird aber durch die Natur des Vectors bestimmt, und ist für Geschwindigkeiten $[T^{-1}]$, für Kräfte $(M\,T^{-2}]$. Führen wir nun in den Rotationsmomenten solche Darstellungen der physikalischen Vectoren ein, so tritt der ungerichtete Maafsfactor als gemeinsamer Bestandtheil vor den ganzen Ausdruck, und die zurückbleibende Summe enthält dann in der That nur solche aus geometrischen Streckencomponenten gebildete Ausdrücke, deren Sinn als doppelte Dreiecksflächen mit algebraischem Vorzeichen wir soeben abgeleitet haben. Wir können daher diese Betrachtungen direct auf die einzelnen Glieder der Rotationsmomente übertragen und auch von den über alle Punkte des Systems summirten vollständigen Ausdrücken, welche als algebraische Summen von gleichgerichteten Dreiecksflächen erscheinen, erhält man einen anschaulichen Begriff.

Die Rotationsmomente sind somit gerichtete Gröfsen, ihre Richtung ist die Normale auf der Ebene, in welcher die Drei-

ecksflächen liegen, also die in den Ausdrücken ausgesparte Axe, und zwar je nachdem die algebraische Summe gröfser ader kleiner als Null ausfällt, die positive oder negative Axenrichtung. Man kann deshalb die Gesetze der geometrischen Addition auf die Rotationsmomente anwenden, man kann dieselben in verschieden gerichtete Componenten zerlegen, und man kann dieselben zu einer Resultante von bestimmter Gröfse und Richtung zusammenfassen, welche man das Hauptrotationsmoment nennt. Ferner wird es möglich, nach Auffindung des letzteren, die drei Rotationsmomente für jedes andere beliebig gerichtete Axensystem zu finden, indem man das Hauptmoment multiplicirt mit den Cosinus der Winkel, welche die Hauptrotationsaxe mit den Coordinatenaxen bildet.

Für einen einzelnen Massenpunkt haben wir das resultirende Hauptrotationsmoment und die Richtung der positiven Axe desselben veranschaulicht durch ein im Raume liegendes Dreieck, dessen Gröfse und Richtung durch die Gleichungen (92b und c) angegeben wurde; die auf das ganze Massensystem erstreckten Rotationsmomente entsprechen algebraischen Summen von Dreiecken, welche keine bestimmte Gestalt mehr besitzen, sondern nur bestimmte Flächengröfse und Richtung haben. Dies genügt aber, um mit Hülfe der Gleichung (92b) den Flächenwerth Δ zu berechnen, welcher nach Erweiterung mit demselben konstanten und ungerichteten Factor, der in den Componenten vorkommt, das Hauptrotationsmoment des ganzen Systems ergiebt. Auch die Richtung der Axe dieses Hauptmomentes ist durch (92c) gegeben. Eine selbstverständliche Folge ergiebt sich für den Fall, dafs man das Axensystem so gedreht hat, dafs eine Axe, etwa die z-Axe mit der Axe des Hauptmomentes zusammenfällt. Dann ist das Rotationsmoment um die z-Axe das Hauptmoment, die Momente um die x- und y-Axe sind alsdann aber Null.

Die bisherigen Betrachtungen gelten in gleicher Weise sowohl für die Rotationsmomente der Kräfte wie die der Bewegungen. Wenn wir nun fragen, welchen Einflufs eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems, also die Substitution:

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$
$$z = z' + c$$

auf die Werthe der Rotationsmomente übt, so haben wir zwischen Kräften und Geschwindigkeiten zu unterscheiden, obwohl beide Arten

von Gröfsen bei solchen Verschiebungen die Werthe ihrer Componenten nicht ändern. Für die Kräfte erhält man:

$$\sum_a (Z_a y_a - Y_a z_a) = \sum_a (Z_a y'_a - Y_a z'_a) + (b \sum_a Z_a - c \sum_a Y_a)$$
$$\sum_a (X_a z_a - Z_a x_a) = \sum_a (X_a z'_a - Z_a x'_a) + (c \sum_a X_a - a \sum_a Z_a)$$
$$\sum_a (Y_a x_a - X_a y_a) = \sum_a (Y_a x'_a - X_a y'_a) + (a \sum_a Y_a - b \sum_a X_a)$$

Die ersten Summen der rechten Seiten geben die Rotationsmomente für die neuen Coordinaten. Dieselben stimmen mit denen für die alten Coordinaten überein, wenn die übrigen rechts auftretenden Beträge verschwinden. Die Rotationsmomente der Kräfte bleiben also bei Parallelverschiebung der Coordinaten unverändert, erstens wenn:

$$\sum X_a = \sum Y_a = \sum Z_a = 0$$

ist, wenn wir es also lediglich mit den inneren Kräften eines freien Massensystems zu thun haben, und zweitens in dem singulären Falle, dafs die Verschiebung des Coordinatenanfangspunktes in derselben Richtung erfolgt, in welcher die Resultante aller äufseren Kräfte den Schwerpunkt des Systems angreift; alsdann ist nämlich:

$$\sum X_a : \sum Y_a : \sum Z_a = a : b : c$$

und die zweite Hälfte der rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen verschwinden ebenfalls.

Betrachten wir nun die Rotationsmomente der Bewegung bei dieser Coordinatenverschiebung:

$$\sum_a m_a \left(\frac{dz_a}{dt} y_a - \frac{dy_a}{dt} z_a\right) = \sum_a m_a \left(\frac{dz_a}{dt} y'_a - \frac{dy_a}{dt} z'_a\right) + \left(b \sum m_a \frac{dz_a}{dt} - c \sum m_a \frac{dy_a}{dt}\right)$$
$$\sum_a m_a \left(\frac{dx_a}{dt} z_a - \frac{dz_a}{dt} x_a\right) = \sum_a m_a \left(\frac{dx_a}{dt} z'_a - \frac{dz_a}{dt} x'_a\right) + \left(c \sum m_a \frac{dx_a}{dt} - a \sum m_a \frac{dz_a}{dt}\right)$$
$$\sum_a m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a\right) = \sum_a m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x'_a - \frac{dx_a}{dt} y'_a\right) + \left(a \sum m_a \frac{dy_a}{dt} - b \sum m_a \frac{dx_a}{dt}\right)$$

Die zweiten Glieder der rechten Seiten, welche die formale Uebereinstimmung der Ausdrücke in beiden Coordinatensystemen stören, lassen sich durch die Componenten des Schwerpunktes (Gleichung (88), Seite 144) in eine andere Form bringen. Denn es ist:

$$\sum m_a \frac{dx_a}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_a x_a = \left(\sum m_a\right) \frac{d\mathfrak{x}}{dt}$$
$$\sum m_a \frac{dy_a}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_a y_a = \left(\sum m_a\right) \frac{d\mathfrak{y}}{dt}$$
$$\sum m_a \frac{dz_a}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_a z_a = \left(\sum m_a\right) \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Jene auf der rechten Seite der transformirten Rotationsmomente der Bewegung auftretenden Glieder verschwinden und die Rotationsmomente der Bewegung bleiben bei Coordinatenverschiebungen unverändert, erstens, wenn:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0,$$

d. h. wenn wir es mit einem System zu thun haben, dessen Schwerpunkt sich nicht bewegt, und zweitens, wenn:

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} : \frac{d\mathfrak{y}}{dt} : \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = a : b : c$$

ist, also in dem singulären Fall, dafs die Verschiebung des Coordinatenanfangspunktes parallel der Bewegung des Schwerpunktes erfolgt.

§ 43. Erhaltung der Rotationsmomente der Bewegung.

Nachdem wir im vorangehenden Paragraphen die Bedeutung und die Eigenschaften der auf die drei Coordinataxen bezogenen Rotationsmomente der Kräfte und der Bewegungen auseinandergesetzt haben, kehren wir zurück zu den Differentialgleichungen (91), welche die Verbindung beider Arten dieser Gröfsen herstellen und suchen zunächst diejenigen Fälle auf, in denen sich die Integration am einfachsten gestaltet, in denen nämlich die linken Seiten, die Rotationsmomente der Kräfte, gleich Null sind. Dieser Fall tritt erstens ein, wenn gar keine Kräfte wirken, wenn sich also ein oder mehrere Massenpunkte nur ihrem Beharrungsvermögen entsprechend ungestört im Raume bewegen. Zweitens tritt dieser Fall ein, wenn alle Kräfte, welche die einzelnen Massenpunkte angreifen, nach dem Anfangspunkt der Coordinaten gerichtet sind oder geradlinig in Richtung der Radii vectores vom Anfangspunkt wegweisen. In diesem Fall ist nämlich für jeden Massenpunkt m_α

$$X_\alpha : Y_\alpha : Z_\alpha = x_\alpha : y_\alpha : z_\alpha,$$

eine Proportionsfolge, aus welcher sofort hervorgeht, dafs die einzelnen Glieder der Rotationsmomente der Kräfte, jedes für sich, gleich Null werden. Denn wenn beispielsweise $X_\alpha : Y_\alpha = x_\alpha : y_\alpha$ ist, so ist $Y_\alpha x_\alpha - X_\alpha y_\alpha = 0$.

Drittens aber tritt der genannte Fall ein, wenn sämmtliche vorhandene Kräfte innere Kräfte sind, welche dem Reactionsprincip folgen unter Aufrechterhaltung der Newton'schen Hypothese, dafs

die Richtung der Kraftwirkung, welche zwischen je zwei Punkten stattfindet, die gerade Verbindungslinie der beiden Orte ist. Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir zunächst ein einzelnes Paar von Massenpunkten herausgreifen. Es seien dies $m_\mathfrak{a}$ und $m_\mathfrak{b}$. Die Componenten der auf $m_\mathfrak{a}$ ausgeübten Kraft, soweit dieselbe von der Anwesenheit der Masse $m_\mathfrak{b}$ herrührt, seien, wie früher, bezeichnet durch $X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, die entsprechenden Componenten, welche $m_\mathfrak{b}$ angreifen, seien $X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$, $Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$, $Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$. Dann ist nach dem Reactionspricip:

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= -X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \\ Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= -Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \\ Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= -Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}. \end{aligned}$$

Die Hypothese, dafs die wirkenden Kräfte Anziehungen oder Abstofsungen in Richtung der Verbindungslinie sind, findet ihren Ausdruck in der Proportionsfolge:

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : Z_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} : Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} : Z_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} &= (x_\mathfrak{b} - x_\mathfrak{a}) : (y_\mathfrak{b} - y_\mathfrak{a}) : (z_\mathfrak{b} - z_\mathfrak{a}) \\ &= (x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b}) : (y_\mathfrak{a} - y_\mathfrak{b}) : (z_\mathfrak{a} - z_\mathfrak{b}). \end{aligned}$$

Denn $(x_\mathfrak{b} - x_\mathfrak{a})$, $(y_\mathfrak{b} - y_\mathfrak{a})$, $(z_\mathfrak{b} - z_\mathfrak{a})$ sind die Componenten der Strecke, welche $m_\mathfrak{a}$ mit $m_\mathfrak{b}$ verbindet. Sondern wir aus den vorstehenden Angaben die Proportion ab:

$$\frac{Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} = \frac{y_\mathfrak{a} - y_\mathfrak{b}}{x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b}},$$

so finden wir:

$$Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x_\mathfrak{a} - Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x_\mathfrak{b} - X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot y_\mathfrak{a} + X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot y_\mathfrak{b} = 0$$

oder schliefslich:

$$(Y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x_\mathfrak{a} + Y_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cdot x_\mathfrak{b}) - (X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot y_\mathfrak{a} + X_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \cdot y_\mathfrak{b}) = 0.$$

Wenn die beiden Punkte $m_\mathfrak{a}$ und $m_\mathfrak{b}$ die einzigen vorhandenen sind, so ist der hier entstandene Ausdruck bereits das vollständige Rotationsmoment der Kräfte bezogen auf die z-Axe. Zwei analoge Gleichungen, welche sich auf die x-Axe und die y-Axe beziehen, lassen sich in gleicher Weise herstellen, und man erkennt, dafs aus der Annahme der Newton'schen Hypothese der Centralkräfte die Rotationsmomente der Kräfte für jedes Punktepaar gleich Null werden. Besteht das Massensystem aus einer gröfseren Anzahl von Punkten, so kann man für jedes mögliche Paar die verschwindenden Kraftmomente aufstellen und alle zusammenfassen zu Summen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{a,b}{}' \left\{(Z_{a,b}y_b + Z_{b,a}y_b) - (Y_{a,b}z_a + Y_{b,a}z_b)\right\} &= 0 \\
\sum_{a,b}{}' \left\{(X_{a,b}z_a + X_{b,a}z_b) - (Z_{a,b}x_a + Z_{b,a}x_b)\right\} &= 0 \\
\sum_{a,b}{}' \left\{(Y_{a,b}x_a + Y_{b,a}x_b) - (X_{a,b}y_a + X_{b,a}y_b)\right\} &= 0
\end{aligned}\right\} \; a \text{ nicht} = b$$

In diesen Summen kommen aber schliefslich alle in dem freien Massensystem wirkenden Kraftcomponenten in der für die Rotationsmomente charakteristischen Verbindung mit den Coordinaten der angegriffenen Massenpunkte vor, und wenn wir, ebenfalls wie früher in § 39, setzen,

$$\sum_b X_{a,b} = X_a \text{ etc.},$$

so können wir die vorstehenden Summen einfacher schreiben in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_a (Z_a y_a - Y_a z_a) &= 0 \\
\sum_a (X_a z_a - Z_a x_a) &= 0 \\
\sum_a (Y_a x_a - X_a y_a) &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

d. h. die Rotationsmomente der Kräfte werden unter den Bedingungen der NEWTON'schen Hypothese nothwendig gleich Null.

Da die Folgerungen, die sich aus dem Verschwinden der Kraftmomente ergeben, soweit bis jetzt Erfahrungen reichen, ganz allgemein bestätigt werden auch in Fällen, wo die NEWTON'sche Anschauung von den Centralkräften zwischen Punktpaaren unzutreffend oder wenigstens nicht geboten erscheint, so wollen wir diese Gleichungen (93), welche direct aus dem dritten Axiom folgen, aber allgemeiner sind, als die Voraussetzungen, unter denen dieselben abgeleitet wurden, als eine zweite wichtige principielle Eigenschaft der inneren Kräfte eines freien Massensystems den früher aufgestellten Gleichungen (87) an die Seite setzen. Es ist ausdrücklich darauf hinzuweisen, dafs der logische Process, durch den wir von den NEWTON'schen Centralkräften ausgehend, die Gleichungen (93) folgerten, sich nicht umkehren läfst, dafs also diese Gleichungen nicht als Zeugnifs für die Richtigkeit jener Hypothese angesehen werden können. Wenn man von einer geraden Anzahl von einzelnen Gröfsen voraussetzt, dafs sie sich paarweise vernichten, so folgt zwar daraus nothwendig, dafs ihre Total-Summe ebenfalls Null ist; wenn man aber erkannt hat, dafs eine Summe von algebraischen Gröfsen gleich Null ist, so ist es zwar hinreichend, aber nicht nothwendig, dafs ihre Glieder sich paarweise vernichten.

Wir wollen nun die Gleichungen (93) als erfüllt ansehen. Aus den Gleichungen (91) erkennt man, dass alsdann die zeitlichen Differentialquotienten der Rotationsmomente der Bewegungen gleich Null sind, daſs also diese Momente selbst während der Bewegung irgend welche constanten Beträge beibehalten müssen, welche die Rolle von Integrationsconstanten spielen. Wir bezeichnen dieselben durch A, B, C, und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dz_a}{dt} y_a = \frac{dy_a}{dt} z_a \right) \right\} &= A \\ \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dx_a}{dt} z_a - \frac{dz_a}{dt} x_a \right) \right\} &= B \\ \sum_a \left\{ m_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a \right) \right\} &= C. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Dieses Resultat nennt man das Gesetz von der Erhaltung der Rotationsmomente. Dasselbe gilt in allen Fällen, in welchen die Gleichungen (93) erfüllt sind, d. h. erstens, wenn gar keine Kräfte wirken, zweitens wenn äuſsere Kräfte da sind, deren Richtungen überall radial zu der Drehungsaxe stehen und endlich drittens in jedem freien Massensystem. Nun hatten wir im vorigen Paragraphen die Rotationsmomente als gerichtete Gröſsen kennen gelernt, welche sich als Componenten zu einer bestimmten Resultante, dem Hauptrotationsmoment, zusammenfassen lassen. Die Intensität des letzteren ist durch eine gewisse Flächengröſse charakterisirt, die Richtung derselben durch die Normale auf der Ebene, in welcher jene Fläche liegt. Wenn nun unter den hier angeführten Verhältnissen die drei auf die Coordinataxen bezogenen Rotationsmomente der Bewegungen die constanten Werthe A, B, C bewahren, so wird auch die Resultante, das Hauptrotationsmoment den absoluten Betrag $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ beibehalten und die Ebene, in welcher die charakteristische Flächengröſse dieses Hauptmomentes liegt, hat ebenfalls eine feste Richtung, welche durch die Cosinus der Winkel gegeben wird, welche die positive Normale n der Ebene mit den Axenrichtungen bildet, nämlich:

$$\cos(n, x) = \frac{A}{R}$$

$$\cos(n, y) = \frac{B}{R}$$

$$\cos(n, z) = \frac{C}{R}.$$

Betrachtet man also ein freies Massensystem, dessen Schwerpunkt entweder ruht oder sich in einer gleichförmigen Fortbewegung befindet, welche man aufser Acht läfst, so kann man stets ein Coordinatensystem so legen, dafs der Schwerpunkt den Anfangspunkt bildet und dafs die eine Axe, z. B. die z-Axe, mit der positiven Normale der genannten Ebene, also mit der Axe des Hauptrotationsmomentes R zusammenfällt. Die (x, y)-Ebene bildet dann die Hauptrotationsebene und bleibt dies während der ganzen folgenden Bewegung. Man nennt diese Ebene die invariabele Ebene des freien Massensystems. So besitzt jedes Doppelsternsystem und jedes Planetensystem seine invariabele Ebene, welche bei Verrückung des Schwerpunktes sich zwar mitbewegt, aber stets sich selbst parallel bleibt.

Wegen der Beziehung der Rotationsmomente zu gewissen gerichteten Flächengröfsen kann man dem Gesetz von der Erhaltung der Rotationsmomente noch einen anderen anschaulichen Ausdruck geben. Betrachten wir ein einzelnes Element des z-Momentes

$$\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a$$

und führen wir in der (x, y)-Ebene Polarcoordinaten ein:

$$\begin{aligned} x_a &= \varrho_a \cdot \cos \vartheta_a \\ y_a &= \varrho_a \cdot \sin \vartheta_a \\ \frac{dx_a}{dt} &= \frac{d\varrho_a}{dt} \cos \vartheta_a - \varrho_a \sin \vartheta_a \cdot \frac{d\vartheta_a}{dt} \\ \frac{dy_a}{dt} &= \frac{d\varrho_a}{dt} \sin \vartheta_a + \varrho_a \cos \vartheta_a \cdot \frac{d\vartheta_a}{dt} . \end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a = \varrho_a \cdot \frac{d\varrho_a}{dt} \cos \vartheta_a \sin \vartheta_a + \varrho_a^2 \cos^2 \vartheta_a \cdot \frac{d\vartheta_a}{dt} \\ - \varrho_a \cdot \frac{d\varrho_a}{dt} \cos \vartheta_a \sin \vartheta_a + \varrho_a^2 \sin^2 \vartheta_a \cdot \frac{d\vartheta_a}{dt} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a = \varrho_a^2 \cdot \frac{d\vartheta_a}{dt} = \frac{\varrho_a^2 \cdot d\vartheta_a}{dt} . \tag{95}$$

Der Zähler $\varrho_a^2 d\vartheta_a$ mifst die doppelte Fläche des schmalen Dreiecks, welches ϱ_a, d. h. die Projection des Radius vector von m_a auf der (x, y)-Ebene in dem Zeittheilchen dt durchstreicht, d. h. also der Zähler bezeichnet den doppelten Betrag des Zuwachses, welchen die überhaupt seit Beginn der Bewegung von der Projection des Radius

vector bestrichene Fläche in der (x, y)-Ebene während des Zeitelementes erfährt. Dieser Zuwachs ist positiv, wenn die Drehung von ϱ_a positiv ist, wenn ϑ_a also wächst. Da nun dieses Flächendifferential durch dt dividirt ist, stellt der Ausdruck den zeitlichen Differentialquotienten der doppelten bestrichenen Fläche in der (x, y)-Ebene dar. Gleiche Betrachtungen gelten für die Projectionen des Radius vector auf die beiden anderen Grundebenen und beziehen sich gleichmässig auf sämmtliche Massenpunkte des Systems.

Bezeichnet man also die drei Flächengröfsen, welche seit der Zeit $t = 0$ von den Projectionen des Radius vector von m_a in den drei Coordinatebenen durchstrichen worden sind, durch $\frac{1}{2} F_a(y, z)$, $\frac{1}{2} F_a(z, x)$, $\frac{1}{2} F_a(x, y)$, so kann man die Gleichungen (94) in folgender Form schreiben:

$$\sum_a \left\{ m_a \cdot \frac{d F_a(y, z)}{dt} \right\} = A$$

$$\sum_a \left\{ m_a \cdot \frac{d F_a(z, x)}{dt} \right\} = B$$

$$\sum_a \left\{ m_a \cdot \frac{d F_a(x, y)}{dt} \right\} = C.$$

Die links stehenden Summen von Differentialquotienten kann man in die Differentialquotienten von Summen verwandeln und man findet durch eine einfache Integration:

$$\left.\begin{aligned} \sum_a m_a \cdot F_a(y, z) &= A \cdot t \\ \sum_a m_a \cdot F_a(z, x) &= B \cdot t \\ \sum_a m_a \cdot F_a(x, y) &= C \cdot t. \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

Auf der rechten Seite additive Constanten hinzuzufügen ist deshalb unnöthig, weil die Flächen F als Functionen der Zeit so definirt wurden, dafs sie zur Zeit $t = 0$ selbst auch gleich Null sind. Diese Gleichungen sagen aus, dafs die links stehenden Summen proportional der Zeit wachsen. Diese Summen kann man sich als algebraische Summen von Flächen vorstellen, welchletztere aber nicht alle mit gleichem Gewicht in die Summe eingehen, sondern proportional der Gröfse des zugehörigen Massenpunktes m_a eingefügt werden müssen. Dann kann man den Sinn der letzten Gleichungen auch folgendermafsen in Worte kleiden: Jede der drei Flächensummen wächst in gleichen Zeiten um gleiche Beträge, es werden in gleichen Zeiten gleichwerthige Flächenräume durchstrichen. Wegen dieser

Betrachtungsweise wird die gefundene Consequenz des Reactionsprincips oft bezeichnet als das Princip der Erhaltung der Flächen. Auch läfst sich nach den vorangehenden Betrachtungen ohne weiteres einsehen, dafs die invariabele Ebene, wenn man sie zu einer Coordinatebene macht, das Maximum der durchstrichenen Flächengröfse liefert, während in beiden darauf senkrechten Ebenen die Flächensumme gleich Null bleibt.

Für den allgemeinen Fall ist diese Ausdrucksweise wegen der verschiedenen Gröfse der einzelnen Factoren m_a nicht gerade präcis und kann zu Irrthümern führen. Haben wir indessen lauter gleich grofse Massenpunkte, so kann man deren Masse vor das Summenzeichen setzen und hat dann allerdings thatsächlich nur mit gleichwerthigen Flächensummen zu thun. Entstanden ist dieser Ausdruck für das Gesetz ursprünglich aus der Betrachtung eines einzelnen Massenpunktes, dessen Zustand sich mit den Voraussetzungen der Gleichungen (93) verträgt, auf den also entweder gar keine Kraft wirkt, oder eine solche, welche auf den Anfangspunkt hinweist oder von diesem wegweist. Denken wir uns einen Massenpunkt, welcher sich in Folge seines Beharrungsvermögens in irgend einer geraden Linie mit constanter Geschwindigkeit fortbewegt, so wird dieser Punkt in gleichen Zeiten gleiche Strecken auf dieser Geraden zurücklegen. Die vom Radius vector während dieser Zeiten durchstrichenen Flächen sind alsdann Dreicke, deren Grundlinien gleiche Länge haben und deren Höhe die unveränderliche Länge des Lotes ist, welches vom Anfangspunkt auf die gerade Linie der Bahn gefällt werden kann; diese Flächen haben also thatsächlich für gleiche Zeiträume stets gleichen Inhalt. Auch ist die Ebene, welche durch die geradlinige Bahn und den aufserhalb derselben gelegenen Anfangspunkt bestimmt wird, eine unveränderliche, nämlich die invariabele Ebene. Als Beispiel eines Massenpunktes, welcher durch eine Centralkraft vom Anfangspunkt aus regiert wird, können wir auf § 24 verweisen, wo wir eine elastische Kraft proportional dem Abstand vom Centrum annahmen. Dort wurde nachgewiesen, dafs die Bewegung ebenfalls in irgend einer durch den Anfangspunkt gehenden festen Ebene, der invariabelen Ebene, verlaufen mufs. Dafs bei der im allgemeinen elliptischen Bahn, deren Mittelpunkt das Centrum der Kraft ist, thatsächlich in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstrichen werden, würde man unschwer nachweisen können, doch sei diese Ausführung dem Leser überlassen. Das klassische Beispiel für diesen Fall ist die elementare Theorie der Planetenbewegung, d. h. die Bewegung eines Massenpunktes, welcher

mit einer Kraft umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes nach dem Anfangspunkte hingezogen wird, ein Problem, welches wir später ausführlich behandeln werden. Für diese Art der Bewegung hat KEPLER das Princip der Flächen aus den ihm vorliegenden Beobachtungsthatsachen empirisch hergeleitet.

§ 44. Starre Massensysteme.

Die vorangehenden Betrachtungen führen zu einer Reihe von Gesetzen über die möglichen Bewegungen fester Körper. Unter einem festen Körper stellt man sich ursprünglich, der oberflächlichen täglichen Erfahrung entsprechend, ein Massensystem vor, dessen sämmtliche Theile ihre gegenseitige Lage unter allen Verhältnissen unverändert beibehalten, so dafs also die Entfernungen aller möglichen Punktepaare dieselben bleiben. Damit hängt auch zusammen, dafs alle übrigen Raumgröfsen, welche durch die Abmessungen des Massensystems bedingt sind, wie Gestalt der Oberfläche, Volumen, Massenvertheilung, relative Lage des Schwerpunktes stets dieselben bleiben. Derartige Bedingungen, welche schliefslich auf die Unveränderlichkeit der Abstände der einzelnen Massenpunkte zurückzuführen sind, würden sich den vorgetragenen Grundsätzen der Dynamik nicht einreihen lassen, da diese Vorstellungen sich immer beziehen auf bestimmte Wirkungen von Kräften, die durch Gröfse und Richtung gewisse Einflüsse auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte ausüben. Sobald man nun genau beobachtet, kommt man zu der Erkenntnifs, dafs der Begriff eines absolut festen Körpers nirgends realisirt ist. Die Starrheit der Verbindungen der einzelnen Theile kann nur als eine Annäherung betrachtet werden, die zwar unter gewissen Umständen praktisch völlig berechtigt ist, aber doch eigentlich nur eine Abkürzung oder künstliche Vereinfachung der thatsächlichen Verhältnisse bedeutet, bei denen ein Theil der eigentlichen dynamischen Wirkungen vernachlässigt, also die theoretischen Grundlagen theilweis aufgegeben werden. Es zeigt sich nämlich, dafs alle Körper, welche uns unter gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen als starr erscheinen, doch Formveränderungen erleiden, dafs sie nur den Kräften, welche die Entfernungen ihrer einzelnen Punkte von einander zu verändern streben, mit grofser Gewalt widerstehen, d. h. so starke innere Kräfte erzeugen, dafs dieselben jedem üblichen äufseren Einflufs, den wir in unseren Experimenten anzuwenden pflegen, das Gleichgewicht halten, dessen formverändernde Wirkung

also vernichten. Die für gewöhnlich als starr angesehenen festen Körper sind thatsächlich Massensysteme mit sehr starken elastischen inneren Kräften, welche jeden erforderlichen Betrag erreichen bei so kleinen Verschiebungen der Teilchen, dafs dieselben gegenüber den eigentlich zu beobachtenden Bewegungen des ganzen Systems völlig zu vernachlässigen sind, wenigstens so lange es sich nicht um sehr empfindliche Mefsapparate handelt. Bei manchen Theilen wissenschaftlicher Apparate wäre eine vollkommene Starrheit sehr erwünscht, z. B. bei den möglichst fest gemauerten Fundamenten, auf denen die Meridiankreise und die Stative der grofsen Fernrohre befestigt werden. Doch kann man sogar bei diesen massiven steinernen Bauten wegen des empfindlichen Beobachtungsmittels, welches ein stark vergröfserndes Fernrohr für Richtungsänderungen darbietet, merken, dafs Verbiegungen eintreten, wenn man sich auch nur mit der Hand auf den Rand des Pfeilers stützt. Die Kunst des Erbauers und des Beobachters solcher empfindlicher Apparate beruht darin, dafs sie die Fehlerquellen kennen, welche aus der mangelhaften Starrheit entstehen, und dieselben entweder unschädlich oder wenigstens einer quantitativen Schätzung zugänglich machen.

Wenn es also den Anschein hat, als ob gewisse äufsere Kräfte, die man auf feste Körper wirken läfst, unwirksam gemacht werden, weil der angegriffene Theil des Körpers wegen seines starren Zusammenhanges mit den übrigen Theilen die der Kraft entsprechende Beschleunigung nicht annehmen kann, so hat man sich diesen Vorgang thatsächlich so vorzustellen, dafs der Körper in der Richtung der von aufsen angreifenden Kraft eine unmerklich kleine Deformation erleidet, durch welche, in dem Falle, dafs Ruhe eintritt, elastische Kräfte erregt werden, welche jenen äufseren gerade das Gleichgewicht halten. Man vergleiche hiermit auch die am Schlufs von § 8 gegebene Anschauung über die Ruhe eines schweren Körpers auf einer Unterlage.

Diese elastischen Kräfte, welche bei unmerkbaren Deformationen des Körpers bereits in jeder erforderlichen Stärke auftreten, sind innere Kräfte, welche dem Reactionsprincip unterliegen. Wenn wir also einen festen Körper zu betrachten haben, welcher in seiner ganzen Masse oder in einzelnen Punkten von äufseren Kräften angegriffen wird, so haben wir an dessen Stelle die Vorstellung eines Massensystems zu setzen von derselben Configuration wie der feste Körper, jedoch mit freier Beweglichkeit aller seiner Theile, und als wirkende Kräfte aufser den äufseren noch alle jene inneren elastischen Kräfte, welche auftreten, sobald kleine Verschiebungen der einzelnen

Massenpunkte gegeneinander vorkommen. Die Berücksichtigung dieser Kräfte kann mitunter zu Schwierigkeiten führen, in zwei Fällen jedoch bieten unsere Consequenzen aus dem Reactionsprincip ein Mittel dieselben zu beseitigen. Erstens, wenn wir die Bewegung des Schwerpunktes des festen Körpers suchen; wir müssen dann auf die Differentialgleichungen (90) (Seite 148) zurückgreifen und die Summen aller Kraftcomponenten $\sum X_a$, $\sum Y_a$, $\sum Z_a$ bilden. Diese setzen sich zusammen aus äufseren und inneren Kräften. Die Summen der letzteren sind aber nach Gleichungen (87) gleich Null, also brauchen wir zur Bildung der Kraftsummen jene elastischen Widerstandskräfte gar nicht, können vielmehr ohne Verstofs gegen die Grundlagen der Dynamik die Unveränderlichkeit der geometrischen Gestalt des festen Körpers verwenden. Zweitens, wenn wir nach den Rotationsmomenten der Bewegung des festen Körpers fragen, müssen wir von den Differentialgleichungen (91) (Seite 151) ausgehen, also zunächst die Rotationsmomente der Kräfte

$$\sum_a (Z_a y_a - Y_a z_a), \quad \sum_a (X_a z_a - Z_a x_a), \quad \sum_a (Y_a x_a - X_a y_a)$$

aufstellen. Diese Summen setzen sich ebenfalls zusammen aus Gliedern, welche sich auf Componenten der äufseren Kräfte beziehen und solchen, welche die inneren Kräfte enthalten. Die letzteren sind aber nach Gleichungen (93) gleich Null, fallen also von selbst aus der Summe fort. Wir können daher auch in diesem Falle die äufseren Kräfte allein betrachten und die geometrischen Consequenzen der Starrheit in der Berechnung verwenden. Wir kommen durch diese Vereinfachung in beiden Problemen dem thatsächlichen Vorgang so nahe, dafs man sich bei den allermeisten Fragen damit begnügen kann. Erst in einem späteren Kapitel der Physik, wo uns die Auffindung der Gesetze der elastischen Deformationen und Kräfte beschäftigen wird, haben wir diesen kleinen Formänderungen besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Aehnliche Vereinfachungen, wie wir sie uns bei der Betrachtung von sogenannten starren Körpern erlauben, läfst man auch gelten bei den sogenannten festen Verbindungen, durch welche Massenpunkte gezwungen werden, bei ihrer Bewegung in gewissen Bahnen oder Flächen zu bleiben. Dahin gehören bereits die zu Anfang des § 25 gemachten Bemerkungen über den sogenannt undehnbaren Faden des mathematischen Pendels. In vielen physikalischen Apparaten sind feste Körper unterstützt oder befestigt in der Weise, dafs eine gewisse gerade Linie in denselben, also sämmtliche in der Geraden

liegenden Massenpunkte ihren Ort nicht verlassen können. Alsdann sind die einzig möglichen Bewegungen des Körpers Drehungen um diese feste Axe, denn von den geringen Verschiebungen, welche bei Drehbewegungen alle Punkte von der Axe entfernen, um durch die elastischen Kräfte die zur Erhaltung der Kreisbahnen nöthigen Centripetalkräfte zu liefern, können wir bei festen Körpern absehen. Auch bei solchen Apparaten ist zu bedenken, dafs eine absolut starre Festlegung einer Axe unausführbar ist. Die äufseren Kräfte, welche den Körper angreifen, werden im Allgemeinen die Axe zu verschieben streben, und dieselbe wird wegen der Elasticität ihrer Lager diesen Kräften nachgeben, bis dadurch auf die Axe eine ebenso grofse Gegenkraft zu Stande kommt, als von jenen äufseren Kräften ausgeübt wird. Sind nun diese Verschiebungen unmerklich klein, so sind wir zu der Annahme berechtigt, dafs die sogenannt feste Axe alle Kräfte aufhebt, welche ihre Lage zu verändern streben; wir brauchen uns dann um dieselben nicht weiter zu bekümmern. Wenn man die Axenlager nicht mehr zu dem Massensystem hinzurechnet, sondern nur ein starres System betrachtet, in welchem eine bestimmte Axe unbeweglich fest ist, so ist dieses System selbst bei Abwesenheit äufserer Kräfte im allgemeinen kein freies Massensystem mehr, denn sobald diese Axe nicht durch den Schwerpunkt hindurchgeht, wird dieselbe bei Drehbewegungen fortwährend Kraftwirkungen durch die Elasticität ihrer Lager zu vernichten haben. Letztere sind aber alsdann äufsere Kräfte. Daher ist es auch keine Widerlegung des Gesetzes von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, wenn wir den Fall beobachten, dafs ein an einer Axe excentrisch befestigter Körper, wenn er einmal in Rotation versetzt ist, ohne Wirkung äufserer Kräfte (abgesehen von den Reactionen der Lager) weiter rotirt, wobei der Schwerpunkt im Widerspruch zu jenem Gesetze sich dauernd auf einer Kreisbahn bewegt, statt in einer geraden Linie.

§ 45. Gleichgewicht bei einer festen Axe.

Den soeben erwähnten Zustand eines starren Körpers, in welchem die auf einer bestimmten geraden Linie gelegenen Massenpunkte ihren Ort nicht verlassen können, wollen wir näher betrachten. Um diesen Zustand herzustellen genügt es, dafs zwei Punkte des Körpers festgehalten werden, diese bestimmen dann die Lage der festen Linie oder Axe. Wir wollen dieselbe zur z-Axe des Coordi-

natensystems wählen. Auf die einzelnen Massenpunkte m_a mögen beliebige Kräfte K_a wirken. Da aber die einzig möglichen Bewegungen der Punkte in Kreisbahnen verlaufen, deren Ebenen senkrecht auf der z-Axe stehen, so bleiben die Abmessungen z_a aller Punkte unverändert, d. h. durch die Befestigung der Axe werden alle Kraftcomponenten Z_a vernichtet. Die Kräfte K_a wirken also nicht anders, als ihre Projectionen auf die (x, y)-Ebene auch wirken würden. Bilden wir nun das auf die z-Axe bezogene Rotationsmoment der Kräfte:

$$\sum_a (Y_a x_a - X_a y_a) = \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{dy_a}{dt} x_a - \frac{dx_a}{dt} y_a \right).$$

Wir hatten schon früher gesehen, dafs man sich jeden Summanden $(Y_a x_a - X_a y_a)$ vorstellen kann als doppelte Dreiecksfläche, wenn man die Resultante von X_a und Y_a, also die Projection von K_a auf die (x, y)-Ebene als Strecke versinnlicht, und zur einen Dreiecksseite nimmt, die Hypotenuse von x_a und y_a, also den Abstand des Punktes m_a von der z-Axe zur anderen Dreiecksseite nimmt. Da nun die doppelte Fläche durch das Product aus Grundlinie und Höhe gemessen wird, so ist dieselbe gleichzusetzen der in die (x, y)-Ebene hineinfallende Kraftcomponente multiplicirt mit der Länge des Abstandes der festen z-Axe von der durch m_a gezogenen Geraden, welche die Richtung der Kraft K_a anzeigt. Man nennt diesen Abstand der Kraftlinie von der festen Axe in Erinnerung an ein bekanntes Instrument den Hebelarm, an welchem die Kraft angreift, und das Product aus dem Hebelarm und der wirksamen Kraftcomponente nennt man das statische Moment der Kraft. Man sieht, dafs dieser Begriff im Wesen gleich ist mit dem Begriff eines Rotationsmomentes der Kraft. Die Bezeichnung statisch rührt daher, dafs die Betrachtung dieser Momente nothwendig ist zur Entscheidung der Frage, wann ein solcher um eine feste Axe drehbarer Körper unter der Wirkung äufserer Kräfte in ruhendem Gleichgewicht sein kann; die Lehre von den Bedingungen des Gleichgewichtes bezeichnet man aber als Statik.

Diese Frage nach dem Gleichgewicht wollen wir zuerst behandeln. Damit der betrachtete Körper in Ruhe bleiben könne, ist es nothwendig, dafs das Rotationsmoment der Kräfte um die Drehaxe gleich Null sei. Denn wäre es von Null verschieden, so würden die Rotationsmomente der Bewegungen in der Zeit veränderlich sein, also jedenfalls nicht dauernd gleich Null bleiben können, was doch zur Erhaltung der Ruhe gehört. Das Rotationsmoment der Kräfte ist

nun in dem vorliegenden Falle die Summe aller statischen Momente, diese kann nur Null werden, wenn entweder der uninteressante Fall vorliegt, dafs gar keine Kräfte wirken, oder wenn positive Beträge durch gleich grofse negative aufgehoben werden, denn die statischen Momente sind algebraische Gröfsen, welche den Körper positiv oder negativ herumzudrehen streben. Man sieht aus der Definition, dafs zwei an verschiedenen Punkten des drehbaren Körpers angreifende verschiedene Kräfte das gleiche statische Moment ergeben werden, wenn die Hebelarme den Intensitäten jener Kräfte (d. h. den in die (x, y)-Ebene fallenden Componenten derselben) umgekehrt proportional sind.

Die äufseren Kräfte, welche auf die Massentheile eines festen Körpers wirken, werden im Allgemeinen sowohl eine Resultante liefern, welche den Schwerpunkt zu beschleunigen strebt, als auch ein Haupt-Rotationsmoment der Kräfte für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe liefern. Indessen giebt es eine bestimmte Anordnung zweier Kräfte, welche nur Rotationsmoment erzeugt, aber zu den eventuell vorhandenen Beschleunigungen des Schwerpunktes $\sum X_a$, $\sum Y_a$, $\sum Z_a$, nichts beiträgt. Greifen nämlich zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte an zwei Punkten eines festen Körpers an, so ist die Summe beider allerdings gleich Null, der Schwerpunkt kann also durch dieselben nicht beschleunigt werden, die Summe der beiden statischen Momente für irgend eine Axe wird aber nur dann Null, wenn beide Kraftlinien gleichen Abstand von der Axe haben, also zusammenfallen, d. h. wenn die beiden Kräfte der Richtung der Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte folgen. Sobald aber die beiden durch die Angriffspunkte gezogenen Kraftlinien nicht zusammenfallen, sondern einen Abstand von einander haben, so erhalten wir ein Rotationsmoment, dessen Axe senkrecht auf der durch die beiden Kraftlinien bestimmten Ebene steht. Nehmen wir irgend eine Lage dieser Axe an, so sei der Abstand der negativ drehenden Kraft $-K$ bezeichnet durch h, derjenige der positiv drehenden $+K$ ist dann $h + l$ und die Summe der beiden statischen Momente ist:

$$+K.(h + l) - K.h = +K.l,$$

hat also einen Betrag, welcher nur von der Intensität K beider Kräfte und von dem Abstand l der durch die beiden Angriffspunkte in Richtung der Kraft gezogenen Geraden abhängt, aber ganz unabhängig von der Lage der gewählten Axe ist, denn der Abstand h hebt sich fort. Man nennt diese Anordnung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte ein Kräftepaar und das Product $K.l$ das (statische)

Moment des Kräftepaares. Die Wirkung eines Kräftepaares kann niemals ersetzt werden durch eine einzelne Kraft; auch in den Fällen, wo ein um eine feste Axe drehbarer Körper durch eine einzige seitlich angreifende Kraft in Rotation versetzt wird, haben wir es thatsächlich mit Kräftepaaren zu thun, denn die feste Axe äufsert auf den Körper stets die entgegengesetzt gleiche Kraft, wie wir bei Einführung des Begriffes der festen Verbindungen näher ausführten. Ist also der Abstand einer Kraft $+ K$ von der festen Axe gleich l, so haben wir in dem elastischen Lager der Axe die Kraft $- K$ wirksam zu denken, und dieses Paar giebt das Moment $K \cdot l$, welches wir vorher als statisches Moment der Kraft K für die feste Axe kennen gelernt haben. Auf diese Weise kann man schliefslich jedes Rotationsmoment von Kräften hervorbringen oder auch im Gleichgewicht halten durch ein geeignet gewähltes Kräftepaar.

§ 46. Trägheitsmomente.

Im vorigen Paragraph hatten wir als eine nothwendige Bedingung für die Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Körpers erkannt, dafs das Rotationsmoment der Kräfte um diese Axe gleich Null sein mufs. Es ist aber ferner dazu nöthig, dafs die Theile des Körpers keine Geschwindigkeit besitzen, sonst wird derselbe in Lagen übergehen, in denen jene Hauptbedingung nicht mehr erfüllt ist, oder wenn dieselbe auch für alle Lagen gilt, wird eine unveränderte Rotation stattfinden. Denn die Differentialgleichungen (91) sagen nur aus, dafs beim Verschwinden der Kraftmomente die Differentialquotienten der Bewegungsmomente gleich Null sind, letztere selbst können noch jeden beliebigen constanten Werth bewahren. Wir wollen nun den Fall annehmen, dafs Rotation um die feste Axe stattfinde, einerlei ob gleichförmig oder ungleichförmig. Wir werden dann das Rotationsmoment der Bewegung um die z-Axe, das einzige, welches bei fester z-Axe wirksam ist, zu betrachten haben, und wollen sehen, welche Vereinfachungen sich in der Form desselben aus der Starrheit des Massensystems ergeben. Wir greifen zurück auf Gleichung (95) (Seite 161), welche die Umformung eines einzelnen Gliedes des z-Momentes der Bewegung durch Polarcoordinaten darstellt. Durch Summation über das ganze Massensystem findet man daraus:

$$\sum_a m_a \left(\frac{d y_a}{d t} x_a - \frac{d x_a}{d t} y_a \right) = \sum_a \left(m_a \varrho_a^2 \cdot \frac{d \vartheta_a}{d t} \right), \quad \varrho_a^2 = x_a^2 + y_a^2.$$

Bei einem starren Körper mit fester Drehungsaxe müssen nun die Winkelgeschwindigkeiten $d\vartheta_\alpha/dt$ sämmtlicher Massenpunkte dieselben sein, sonst wären relative Verschiebungen im Inneren des Systems unvermeidlich. Wir können dabei also den Index α fortlassen und $d\vartheta/dt$ als gemeinsamen Factor vor das Summenzeichen setzen; das Rotationsmoment der Bewegung ist dann $\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \sum m_\alpha \varrho_\alpha^2$, also gleich dem Product der Winkelgeschwindigkeit und eines Summenwerthes, welcher über alle Theile des festen Körpers erstreckt ist, und nur von der Gruppirung der Massen um die Drehungsaxe abhängt, aber mit der Bewegung selbst nichts zu thun hat. Derselbe enthält als Summanden die Producte aller Massenpunkte mit den Quadraten ihrer Abstände von der Drehungsaxe. Man nennt dieses Gebilde das Trägheitsmoment des Körpers für die betreffende Drehungsaxe. Da das Trägheitsmoment bei einem festen Körper und einer festen Axe eine unveränderliche Gröfse ist, so ist der zeitliche Differentialquotient des Rotationsmomentes der Bewegung einfach gleich $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \sum m_\alpha \varrho_\alpha^2$, und wir erhalten für einen um die z-Axe drehbaren Körper nach Gleichung (91) folgende Differentialgleichung:

$$\sum_\alpha (Y_\alpha x_\alpha - X_\alpha y_\alpha) = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2) \tag{97}$$

welche in Worten lautet:

Das Rotationsmoment der Kräfte ist gleich dem Product aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung. Vergleicht man hiermit die Newton'sche Kraftdefinition: die Kraft wird gemessen durch das Product aus träger Masse und Beschleunigung, so erkennt man, dafs der neu eingeführte Begriff des Trägheitsmomentes eine ebenso wichtige Rolle bei der Rotation eines festen Körpers spielen wird, wie die Masse bei der translatorischen Bewegung. Beide geben das Mafs für die Gröfse des Beharrungsvermögen, mit welcher ein Körper den Bewegungsänderungen widersteht, welche die angreifenden Kräfte erzeugen. Daher ist die gewählte Bezeichnung für diesen Begriff ganz zutreffend.

Je gröfser das Trägheitsmoment eines Körpers für eine bestimmte Drehungsaxe ist, um so geringer ist die Winkelbeschleunigung, welche ein gegebenes Rotationsmoment der Kräfte an demselben hervorbringt. Ein drehbarer, anfänglich ruhender Körper von sehr grofsem Trägsheitsmoment wird also bei Einwirkung von drehenden Kräften

von solcher Gröfse, wie man sie für gewöhnlich zur Verfügung hat, nur sehr langsam anlaufen und es bedarf verhältnifsmäfsig langer Einwirkung, um denselben in schnelle Rotation zu versetzen; ist diese aber einmal erreicht, so werden neu hinzutretende Kräfte, welche etwa entgegengesetzte Rotationsmomente bilden, auch nur sehr kleine Verzögerungen in der Winkelgeschwindigkeit hervorbringen, also den erreichten Bewegungszustand nur wenig zu alteriren vermögen. Namentlich werden kurz andauernde Widerstände, wie sie z. B. in Maschinen vorkommen, welche irgend welche unstetige Arbeitsleistungen zu verrichten haben, durch Anbringung von rotirenden Massen von grofsem Trägheitsmoment ohne bemerkbare Störung des Ganges überwunden. Ein rotirender Körper enthält nämlich bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit einen Vorrath von Arbeit in Form von lebendiger Kraft aufgespeichert, welcher dem Trägheitsmoment proportional ist. Die lebendige Kraft des bewegten Massensystems ist, entsprechend den früheren Auseinandersetzungen des § 18 gegeben durch den Ausdruck:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum m_a \cdot q_a^2,$$

die Geschwindigkeiten q_a sind aber bei der Winkelgeschwindigkeit $d\vartheta/dt$

$$q_a = \varrho_a \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

also ist

$$L = \tfrac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \cdot \sum m_a \varrho_a^2, \tag{98}$$

d. h. die lebendige Kraft der Rotationsbewegung ist das halbe Product aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit mal dem Trägheitsmoment. Je gröfser nun dieser Vorrath ist, um so weniger ist es zu spüren, wenn ein gewisses Arbeitsquantum nach aufsen abgegeben wird.

Das Trägheitsmoment einer Masse ist um so gröfser, je weiter man die Theile derselben von der Drehungsaxe wegrückt. Man giebt derselben deshalb behufs Erreichung möglichst grofsen Trägheitsmomentes die Gestalt eines Ringes, welcher zur Herstellung eines festen Zusammenhanges durch einige Speichen mit der Axe verbunden ist. Diese Gestalt besitzen die Schwungräder, welche zur Aufspeicherung von Energie bei den Maschinen verwendet werden. Bei Vergröfserung der Dimensionen unter Bewahrung der geometrischen Aehnlichkeit der Körper wachsen die Trägheitsmomente in sehr starkem Maafse. Vergröfsert man sämmtliche Linearabmessungen eines Schwungrades auf das n-fache, so wächst der

von der Eisenmasse ausgefüllte Inhalt des Ringes auf das n^3-fache, das Quadrat des Radius, mit welchem die Masse zu multipliciren ist, wächst auf das n^2-fache, also wird das Trägheitsmoment des gröfseren Schwungrades n^5-mal so grofs, als dasjenige des kleineren. Man sieht aus diesem starken Wachsthum, dafs man, ohne zu übermäfsig grofsen Ausdehnungen zu greifen, Schwungräder herstellen kann, welche bei gehöriger Geschwindigkeit kolossale Mengen von Energie enthalten.

Wir müssen uns zunächst mit den mathematischen Eigenschaften der Trägheitsmomente beschäftigen. Die erste Frage betrifft den Einfluſs der Lage der festen Drehaxe im Körper. Wir wollen diese Axe zunächst parallel mit sich selbst lassen, aber an eine andere Stelle des Körpers verlegen. Wenn wir die z-Axe zur Drehungsaxe nehmen, so wird diese Verlegung dargestellt sein durch die Angaben:

$$x_a = x'_a + a$$
$$y_a = y'_a + b,$$

dabei sind a und b die allen Punkten gemeinsamen Componenten der Verschiebung und x' und y' die neuen Abmessungen der Massenpunkte. Es ist dann:

$$\sum m_a(x_a^2+y_a^2)=\sum m_a(x'^2_a+y'^2_a)+2a\sum m_a x'+2b\sum m_a y'+(a^2+b^2)\sum m_a.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist das auf die neue Axe bezogene Trägheitsmoment. Im zweiten und dritten Gliede treten die bekannten Summen auf, welche die Coordinaten $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ des Schwerpunktes für die neue Lage der Axe definiren. Das letzte Glied endlich ist das Product aus der gesammten Masse des Körpers, multiplicirt mit dem Quadrat des Abstandes der beiden parallelen Axen.

Wir wollen nun annehmen, dafs die Axe durch die vorgenommene Parallelverschiebung in diejenige Lage übergeführt ist, in welcher sie den Schwerpunkt des Körpers durchsetzt; alsdann werden die Coordinaten $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ gleich Null, die beiden mittleren Glieder verschwinden, und wenn wir den Abstand der ursprünglichen Axe vom Schwerpunkt mit h bezeichnen, also $a^2 + b^2 = h^2$ setzen, so erhalten wir:

$$\sum m_a (x_a^2 + y_a^2) = \sum m_a (x'^2_a + y'^2_a) + h^2 \cdot \sum m_a \qquad (99)$$

oder in Worten: Das Trägheitsmoment für eine vorgeschriebene Axe ist gleich demjenigen für die parallele, durch den Schwerpunkt ge-

legte Axe, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkt concentrirt gedachten Gesammtmasse des Körpers, bezogen auf die vorgeschriebene Axe. Die Trägheitsmomente als Producte von Massen und Streckenquadraten sind stets positive Gröfsen, also ist unter allen auf parallele Axen bezogenen Trägheitsmomenten dasjenige das kleinste, dessen Axe durch den Schwerpunkt geht. Ausserdem ist dieses letztere deshalb wichtig, weil alle anderen auf die leichteste Weise nach der so eben angegebenen Regel aus demselben abgeleitet werden können.

Wir wollen uns im folgenden den Schwerpunkt des Körpers als Anfangspunkt der Coordinaten denken, so dafs also die auf die drei Coordinataxen bezogenen Trägheitsmomente:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x &= \sum m_a (y_a^2 + z_a^2) \\ \Theta_y &= \sum m_a (z_a^2 + x_a^2) \\ \Theta_z &= \sum m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

die Minimalwerthe für jede der drei Hauptrichtungen darstellen. Die Summe aller drei Werthe:

$$\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z = 2 \sum m_a (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) = 2 R \quad (100\,a)$$

ist unabhängig von der Richtung des Axensystems, denn die Trinome $(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)$ sind die Quadrate der vom Schwerpunkt aus gezogenen Radii vectores der Massenpunkte m_a, welche unverändert bleiben bei jeder Lage der Axen.

Mit Hülfe dieser Gröfse R kann man den Trägheitsmomenten eine für die folgende Betrachtung übersichtlichere Form geben. Wenn man nämlich der Kürze halber setzt:

$$\mathfrak{T}_x = \sum m_a x_a^2, \qquad \mathfrak{T}_y = \sum m_a y_a^2, \qquad \mathfrak{T}_z = \sum m_a z_a^2 \quad (101)$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x &= R - \mathfrak{T}_x \\ \Theta_y &= R - \mathfrak{T}_y \\ \Theta_z &= R - \mathfrak{T}_z \end{aligned}\right\} \quad (101\,a)$$

und wir können auch für jede beliebige Richtung s einer durch den Schwerpunkt gelegten Drehaxe setzen:

$$\Theta_s = R - \mathfrak{T}_s. \quad (101\,b)$$

In dem Ausdruck:

$$\mathfrak{T}_s = \sum m_a s_a^2 \quad (101\,c)$$

sind die Strecken s_a die Projectionen der Radii vectores auf die s-Axe.

Für die verschieden gerichteten, durch den Schwerpunkt gelegten Axen werden die Trägheitsmomente verschiedene Gröfse haben, und

wir können die Frage aufwerfen, für welche Richtung der Axe ein Grenzwerth, Maximum oder Minimum eintritt, und wir können diese Untersuchung nach dem Vorangehenden für die einfacheren Gröfsen $\mathfrak{T}$, anstatt für die Trägheitsmomente Θ durchführen können.

Die s-Coordinate eines Massenpunktes m_a am Orte x_a, y_a, z_a ist:

$$s_a = x_a \cos(s, x) + y_a \cdot \cos(s, y) + z_a \cdot \cos(s, z).$$

Dabei bedeuten (s, x), (s, y), (s, z) die Winkel, welche die positive Richtung der s-Axe mit den drei Coordinataxen bildet. Folglich erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_s = \sum m_a s_a^2 = \cos^2(s,x)\sum m_a x_a^2 + \cos^2(s,y)\sum m_a y_a^2 + \cos^2(s,z)\sum m_a z_a^2 \\ + 2\cos(s, y)\cdot\cos(s, z)\cdot\sum m_a y_a z_a \\ + 2\cos(s, z)\cdot\cos(s, z)\cdot\sum m_a z_a x_a \\ + 2\cos(s, x)\cdot\cos(s, y)\cdot\sum m_a x_a y_a.\end{aligned}$$

Nennen wir der Kürze wegen:

$$\sum m_a y_a z_a = \mathfrak{U}_x, \quad \sum m_a z_a x_a = \mathfrak{U}_y, \quad \sum m_a x_a y_a \mathfrak{U}_z \qquad (102)$$

und führen für die drei Richtungscosinus die kurzen Bezeichnungen:

$$\cos(s, x) = a, \quad \cos(s, y) = b, \quad \cos(s, z) = c$$

ein, so ist also:

$$\mathfrak{T}_s = a^2 \cdot \mathfrak{T}_x + b^2 \cdot \mathfrak{T}_y + c^2 \cdot \mathfrak{T}_z + 2bc \cdot \mathfrak{U}_x + 2ca \cdot \mathfrak{U}_y + 2ab \cdot \mathfrak{U}_z. \qquad (103)$$

Die Aufgabe ist nun, a, b, c so zu bestimmen, dafs $\mathfrak{T}_s$ ein Grenzwerth wird, d. h. seinen Werth nicht ändert, wenn man den Richtungscosinus eine beliebige kleine Veränderung ertheilt. Die drei Variabelen sind aber nicht unabhängig; wenn man zweien eine beliebige Veränderung gegeben hat, ist vielmehr die dritte dadurch vorgeschrieben. Es wäre aber nicht übersichtlich, die eine Variabele, etwa c, dadurch zu eliminiren, dafs man dieselbe durch a und b ausdrückt, und dann nur mit zwei Variabelen zu rechnen. Wir wollen vielmehr zu der Gleichung (103) als zweite Gleichung die bekannte Bedingung für die drei Richtungscosinus

$$1 = a^2 + b^2 + c^2$$

hinzunehmen und in beiden Gleichungen a, b, c variiren. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_s = 2a\mathfrak{T}_x \cdot \delta a + 2b\mathfrak{T}_y \cdot \delta b + 2c\mathfrak{T}_z \cdot \delta c + 2b\mathfrak{U}_x \cdot \delta c + 2c\mathfrak{U}_x \cdot \delta b \\ + 2c\mathfrak{U}_y \cdot \delta a + 2a\mathfrak{U}_y \cdot \delta c \\ + 2a\mathfrak{U}_z \cdot \delta b + 2b\mathfrak{U}_z \cdot \delta a\end{aligned}$$

und:

$$0 = 2a \cdot \delta a + 2b \cdot \delta b + 2c \cdot \delta c.$$

Beide Gleichungen wollen wir dadurch vereinigen, dafs wir die zweite mit einem unbestimmen Coefficienten L erweitern und von der ersten abziehen. Ordnen wir die rechte Seite nach δa, δb, δc, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \delta\mathfrak{T}_s = 2.\{a.(\mathfrak{T}_x - L) &+ b.\mathfrak{U}_z &&+ c.\mathfrak{U}_y &&\}.\delta a \\ + 2.\{a.\mathfrak{U}_z &+ b.(\mathfrak{T}_y - L) &&+ c.\mathfrak{U}_x &&\}.\delta a \\ + 2.\{a.\mathfrak{U}_y &+ b.\mathfrak{U}_x &&+ c.(\mathfrak{T}_z - L) &&\}.\delta c \end{aligned}\right\} \quad (104)$$

Im Falle eines Grenzwerthes von $\mathfrak{T}_s$ mus nun $\delta\mathfrak{T}_s = 0$ sein für jede Variation der Richtung s. Wir werden diese Bedingung erfüllen können, wenn es gelingt, a, b und c so zu bestimmen, dafs die drei geschweiften Klammern einzeln verschwinden, dafs also folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned} a.(\mathfrak{T}_x - L) &+ b.\mathfrak{U}_z &&+ c.\mathfrak{U}_y &&= 0 \\ a.\mathfrak{U}_z &+ b.(\mathfrak{T}_y - L) &&+ c.\mathfrak{U}_x &&= 0 \\ a.\mathfrak{U}_y &+ b.\mathfrak{U}_x &&+ c.(\mathfrak{T}_z - L) &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad (104\,a)$$

Dies sind drei lineare homogene Gleichungen für drei Unbekannte, also ein System, welches bekanntlich nur dann von Null verschiedene Wurzeln liefern kann, wenn die Determinante verschwindet. Wir müssen also fordern:

$$\left.\begin{vmatrix} (\mathfrak{T}_x - L) & \mathfrak{U}_z & \mathfrak{U}_y \\ \mathfrak{U}_z & (\mathfrak{T}_y - L) & \mathfrak{U}_x \\ \mathfrak{U}_y & \mathfrak{U}_x & (\mathfrak{T}_z - L) \end{vmatrix} = 0 \right\} \quad (104\,b)$$

Die mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ bezeichneten Gröfsen sind vorgeschriebene Constanten, dagegen ist über das unbestimmte L noch frei zu verfügen, das Verschwinden der Determinante giebt eine Bestimmungsgleichung für diese Gröfse und zwar eine cubische Gleichung, da in der Entwickelung der Determinante das Diagonalglied:

$$(\mathfrak{T}_x - L) \cdot (\mathfrak{T}_y - L) \cdot (\mathfrak{T}_z - L)$$

vorkommt. Man findet also drei Wurzelwerthe L_1 L_2 L_3, welche die Determinante zum Verschwinden bringen und dadurch die drei homogenen Gleichungen lösbar machen. Die für jeden dieser Fälle gefundenen Lösungen bezeichnen wir durch:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

Die Bedeutung der drei Wurzeln L wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wählen wir die Lösung L_1, a_1, b_1, c_1 und schreiben die dadurch erfüllten Gleichungen (104a) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} a_1 L_1 &= a_1 \mathfrak{T}_x + b_1 \mathfrak{U}_z + c_1 \mathfrak{U}_y \\ b_1 L_1 &= a_1 \mathfrak{U}_z + b_1 \mathfrak{T}_y + c_1 \mathfrak{U}_x \\ c_1 L_1 &= a_1 \mathfrak{U}_y + b_1 \mathfrak{U}_x + c_1 \mathfrak{T}_z. \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Wir erweitern die erste mit a_1, die zweite mit b_1, die dritte mit c_1, und addiren diese drei, so erhält man wegen $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$ folgendes Resultat:

$$L_1 = a_1^2 \mathfrak{T}_x + b_1^2 \mathfrak{T}_y + c_1^2 . \mathfrak{T}_z + 2 b_1 c_1 \mathfrak{U}_x + 2 c_1 a_1 \mathfrak{U}_y + 2 a_1 b_1 \mathfrak{U}_z.$$

Die rechte Seite ist aber nach Gleichung (103) nichts anderes, als der für die Richtung s_1 gebildete Ausdruck $\sum m_a s_1^2$. Gleiches läfst sich von den beiden anderen L zeigen, so dafs wir zu folgender Erkenntnifs gelangen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \mathfrak{T}_{s,1} \\ L_2 &= \mathfrak{T}_{s,2} \\ L_3 &= \mathfrak{T}_{s,3}. \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Aus dieser Bedeutung geht hervor, dafs alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung nothwendig reell und positiv sind. Wir wollen zunächst auch den allgemeinen Fall veraussetzen, dafs die drei L verschieden von einander sind. Dann läfst sich zeigen, dafs die zugehörigen Werthe von a, b, c drei bestimmte, auf einander senkrechte Richtungen von s angeben.

Gehen wir zu diesem Zwecke wieder von den für den Index 1 erfüllten Gleichungen (105) aus, erweitern dieselben aber diesmal mit den Cosinus einer anderen Lösung, etwa mit a_2, b_2, c_2 und addiren wieder, so kommt:

$$\begin{aligned}(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) L_1 = a_1 a_2 . \mathfrak{T}_x &+ b_1 b_2 . \mathfrak{T}_y + c_1 c_2 . \mathfrak{T}_z \\ &+ (b_1 c_2 + b_2 c_1) \mathfrak{U}_x + (c_1 a_2 + c_2 a_1) \mathfrak{U}_y + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \mathfrak{U}_z.\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist vollkommen symmetrisch für die Indices 1 und 2, man würde daher denselben Ausdruck gefunden haben, wenn man die Gruppe L_2, a_2, b_2, c_2 in die homogenen Gleichungen eingesetzt, dann mit a_1, b_1, c_1 erweitert und addirt hätte; die linke Seite würde alsdann aber gelautet haben:

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) . L_2.$$

Wegen der Symmetrie der rechten Seite erhält man durch Subtraction der beiden Resultate:

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) . (L_1 - L_2) = 0.$$

Wenn nun L_1 und L_2 verschieden sind, kann diese Bedingung nur dadurch erfüllt werden, daſs $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ ist. Dies ist aber die bekannte Beziehung, welche zwischen den Cosinus zweier auf einander senkrechter Richtungen besteht. Hätten wir, statt mit a_2, b_2, c_2, mit a_3, b_3, c_3 erweitert, so würden wir gefunden haben, daſs auch die dritte Richtung senkrecht auf der ersten und zweiten steht. Es giebt also im Allgemeinen in jedem Körper drei bestimmte, auf einander senkrechte Axen s_1, s_2, s_3 für welche das Trägheitsmoment Θ einen Grenzwerth besitzt. Der gröſste ist ein Maximum, der mittlere ein Sattelwerth, der kleinste ein Minimum. Man nennt dieselben die drei Haupt-Trägheitsmomente des Körpers. Wenn wir das Coordinatensystem mit diesen drei ausgezeichneten Richtungen im Körper zur Deckung bringen, also etwa s_1 zur x-Axe, s_2 zur y-Axe und s_3 zur z-Axe wählen, so erhalten die Richtungscosinus folgende Werthe:

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1$$
$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$$

und die nach dem Schema der Gleichungen (105) für alle drei Indices gebildeten 9 Gleichungen sagen aus:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_x = L_1, \quad \mathfrak{T}_y = L_2, \quad \mathfrak{T}_z = L_3 \\ \mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}_y = \mathfrak{U}_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Wegen des Verschwindens der Gröſsen $\mathfrak{U}$ erhält man bei dieser besonderen Lage des Coordinatensystems den einfachsten Ausdruck für die auf irgend eine in beliebiger Richtung durch den Schwerpunkt gelegte Axe s. Denn zunächst wird:

$$\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T}_x . \cos^2(s, x) + \mathfrak{T}_y \cos^2(s, y) + \mathfrak{T}_z \cos^2(s, z) \qquad (107\,\mathbf{a})$$

und in Folge dessen:

$$\begin{aligned} \Theta_s &= R - \mathfrak{T}_s \\ &= R\left(\cos^2(s, x) + \cos^2(s, y) + \cos^2(s, z)\right) \\ &\quad - \mathfrak{T}_x \cos^2(s, x) - \mathfrak{T}_y \cos^2(s, y) - \mathfrak{T}_z \cos^2(s, z), \end{aligned}$$

das heiſst:

$$\Theta_s = \Theta_x \cos^2(s, x) + \Theta_y \cos^2(s, y) + \Theta_z \cos^2(s, z). \qquad (107\,\mathbf{b})$$

Nach dieser einfachen Formel kann das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe hergeleitet werden aus den drei Haupt-Trägheitsmomenten.

Man kann sich auch geometrische Vorstellungen bilden über die Gröſsenverhältnisse der verschiedenen Trägheitsmomente, wenn man auf den vom Schwerpunkt ausgehenden Strahlen Strecken

abträgt, deren Länge zu den entsprechenden Trägheitsmomenten in irgend einer bestimmten Beziehung stehen; alsdann bildet nämlich der Inbegriff aller dieser Endpunkte eine geschlossene Oberfläche um den Schwerpunkt herum, aus deren Gestalt man eine Anschauung über die Gröfsenverhältnisse der verschiedenen Trägheitsmomente erhalten kann. Die einfachste analytische Form erhält diese Fläche, wenn man die auf den Strahlen abgetragenen Strecken umgekehrt proportional den Quadratwurzeln der zugehörigen Trägheitsmomente macht, also den Radius vector r setzt:

$$r = \frac{C}{\sqrt{\Theta_s}},$$

wo C irgend ein fester Mafsstab ist. Nennen wir nämlich, um die Gleichung dieser Oberfläche zu finden, die Coordinaten ihrer Punkte x, y, z, so wird:

$$\cos(s,x) = \frac{x}{r} = \frac{x\sqrt{\Theta_s}}{C}$$

$$\cos(s,y) = \frac{y}{r} = \frac{y\sqrt{\Theta_s}}{C}$$

$$\cos(s,z) = \frac{z}{r} = \frac{x\sqrt{\Theta_s}}{C}$$

und die Gleichung (107b), welche Θ_s durch die Haupt-Trägheitsmomente ausdrückt, ergiebt:

$$\Theta_s = \Theta_x \cdot \frac{x^2 \cdot \Theta_s}{C^2} + \Theta_y \cdot \frac{y^2 \cdot \Theta_s}{C^2} + \Theta_z \cdot \frac{x^2 \cdot \Theta_s}{C^2}$$

oder nach Multiplication mit $\frac{C^2}{\Theta_s}$:

$$\Theta_x \cdot x^2 + \Theta_y \cdot y^2 + \Theta_z \cdot x^2 = C^2 \qquad (108)$$

In dieser Gleichung kommt das Moment Θ_s nicht mehr vor. Da die Coefficienten alle wesentlich positiv sind, so bestimmt diese Gleichung ein Ellipsoid, das sogenannte Trägheitsellipsoid des Körpers mit den Hauptaxen $\frac{C}{\sqrt{\Theta_x}}$, $\frac{C}{\sqrt{\Theta_y}}$, $\frac{C}{\sqrt{\Theta_z}}$. Man kann dassselbe construirt denken, sobald man die drei Hauptträgheitsmomente gefunden hat. Alsdann ist es leicht, die Gröfse des Trägheitsmomentes für jede beliebige Richtung aus der Gröfse des im Inneren des Ellipsoides verlaufenden Stückes der Axe herzuleiten.

Bei besonderer Gestaltung des Körpers kann dieses Ellipsoid ein Rotationskörper oder gar eine Kugel werden, wenn nämlich zwei oder alle drei Hauptaxen einander gleich werden. Diese besonderen Fälle treten ein, wenn zwei oder alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich werden, wenn also in der vorangehenden Rechnung Gleichheit der Wurzeln L der cubischen Gleichung eintritt. Alsdann bleibt auch die Richtung der betreffenden Axen unbestimmt und willkürlich.

Die Gröſsen $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{U}_y$, $\mathfrak{U}_z$, welche durch die Gleichungen (102) definirt sind, und welche in dem Trägheitsmomente Θ_s auftreten, sobald die Coordinatenaxen nicht mit den Hauptträgheitsaxen des Körpers zusammenfallen, haben auch eine besondere physikalische Bedeutung. Denken wir uns einen festen Körper um die durch seinen Schwerpunkt gelegte z-Axe als feste Drehungsaxe rotirend, so wird derselbe bei Abwesenheit oder Unwirksamkeit aller äuſseren Kräfte eine ihm ertheilte Winkelgeschwindigkeit ω unverändert bewahren. Die einzelnen Massenpunkte werden aber bei ihren kreisförmigen Bahnen den Centrifugalkräften ausgesetzt sein, welche wir nach Gleichung (21) (Seite 36) schreiben können:

$$K_a = m_a \varrho_a \omega^2.$$

Dabei ist $\varrho_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ zu setzen.
Die Richtung von K_a ist radial und senkrecht auf der z-Axe, wir finden daher die Componenten

$$X_a = \frac{x_a}{\varrho_a} K_a = m_a x_a \omega^2$$

$$Y_a = \frac{y_a}{\varrho_a} K_a = m_a y_a \omega^2$$

$$Z_a = 0.$$

Bilden wir nun für die Kräfte die Rotationsmomente, so wird dasjenige für die z-Axe allerdings gliedweise gleich Null, die Centrifugalkräfte können wegen ihrer radialen Richtung die Rotation um die bestehende Axe nicht alteriren und wegen der Starrheit des Körpers auch nicht die Massen desselben von der Axe wegtreiben. Dagegen erhalten die Rotationsmomente für die x- und y-Axe folgende Werthe, bei deren Bildung zu bedenken ist, dass die Winkelgeschwindigkeit ω im ganzen Körper die gleiche ist:

$$\left.\begin{aligned} \sum(Z_a y_a - Y_a z_a) &= -\omega^2 \sum m_a y_a z_a \\ \sum(X_a z_a - Z_a x_a) &= +\omega^2 \sum m_a z_a x_a \end{aligned}\right\} \qquad (109)$$

Wir erhalten also das interessante Resultat, dass bei einem ohne Wirkung äufserer Kräfte rein in Folge des Beharrungsvermögens um eine feste durch den Schwerpunkt gelegte Axe rotirenden Körper in den senkrecht zur Drehungsaxe stehenden Richtungen im allgemeinen Rotationsmomente von Kräften auftreten, welche zwar durch die Befestigung der Drehaxe unwirksam gemacht werden, welche aber streben, diese Axe aus ihrer Richtung herauszudrehen. Sobald man also die vorher festgehaltene Drehaxe freiläfst, wird die Bewegung nicht mehr in derselben Weise weitergehen können; die Massenpunkte, welche vorher in der Axe lagen, werden vielmehr in beschleunigter Drehbewegung ihre Ruhelage verlassen und man wird einen complicirteren Bewegungsvorgang vor sich haben. Die rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen enthalten nun aufser dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit noch diejenigen Summenbildungen, welche wir in der vorhergehenden Rechnung durch $\mathfrak{U}_x$ und $\mathfrak{U}_y$ bezeichnet hatten. Das Auftreten dieser Ausdrücke zeigt also an, dass der Körper nicht dauernd und gleichförmig um die x-Axe rotiren kann, aufser, wenn diese von aufsen festgehalten wird. Ebenso wenig kann die x- oder y-Axe eine dauernde freie Rotationsaxe sein, wenn im ersten Falle $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$, im zweiten $\mathfrak{U}_z$ und $\mathfrak{U}_x$ von Null verschieden sind. Die vorstehende Rechnung hat nun in Gleichungen (107) ergeben, dass $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{U}_y$ und $\mathfrak{U}_z$ gleich Null werden, wenn die Coordinataxen zur Deckung gebracht werden mit den Axen des gröfsten, kleinsten und sattelwerthigen Trägheitsmomentes, d. h. mit den Hauptaxen des Trägheitsellipsoides des Körpers. Es folgt also daraus, dass ein freier Körper sich in gleichförmiger Rotation befinden kann nur um eine der drei bevorzugten Axen. Eine solche gleichförmige Rotation bedeutet einen Gleichgewichtszustand der Drehungsaxe. Dieser kann noch labil oder stabil sein. Es kann nämlich eintreten, dafs bei einer erzwungenen kleinen Verdrehung der Axe aus einer ihrer Hauptlagen die dadurch auftretenden Gröfsen $\mathfrak{U}$ diese Axe noch weiter wegdrehen, oder aber auch dieselbe zurückdrehen in die Hauptlage. Nur, wenn letzteres zutrifft für jede beliebige kleine Störung, ist das Gleichgewicht stabil, und es lässt sich zeigen, dass dies nur der Fall ist, wenn der Körper sich um die Axe des grössten Trägheitsmomentes dreht.

§ 47. Physisches Pendel.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, unter denen ein um eine feste Axe drehbarer Körper steht, wenn die äufseren Kräfte überall die gleiche Richtung im Raume haben und proportional den angegriffenen Massenpunkten sind, wie dies besonders für die Schwerkraft gilt. Da nur die senkrecht zur Drehungsaxe stehenden Kraftcomponenten zur Wirksamkeit gelangen, so wird bei nicht horizontaler Lage der Axe nur ein bestimmter Bruchtheil der Schwerkraft in die Rechnung einzuführen sein, den wir erhalten, wenn wir die Intensität g der Schwerebeschleunigung multipliciren mit dem Cosinus des Winkels, um welchen die Drehungsaxe von der horizontalen Richtung abweicht. Da dieser Winkel aber bei fester Axe unverändert bleibt, so wird die Betrachtung dadurch nicht wesentlich verändert, und wir können uns auf den wichtigsten Fall beschränken, dafs die feste Axe horizontal liegt. Da übrigens der Cosinus eines sehr kleinen Winkels nur um eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung von 1 verschieden ist, so braucht man nur bei sehr feinen Messungen die vollkommene Horizontalität der Drehungsaxe sorgfältig zu prüfen. Wir nehmen jetzt also die horizontale Drehungsaxe zur x-Axe, dieselbe zeige in der Richtung des Blicks nach vorn, die positive x-Axe zeige vertical nach oben, dann müssen wir die horizontale y-Axe nach links senden. Die auf die Massenpunkte m_a wirkenden Kraftcomponenten sind dann:

$$\left.\begin{aligned} X_a &= -m_a \cdot g \\ Y_a &= 0 \\ Z_a &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Folglich ist das Rotationsmoment der Kräfte um die x-Axe oder die Summe aller statischen Momente der Schwere:

$$\sum (Y_a x_a - X_a y_a) = g \cdot \sum m_a y_a.$$

Wir begegnen in diesem Ausdruck der aus Gleichungen (88) bekannten Form, durch welche die Coordinate η des Schwerpunktes definirt wird, und wir können den vorstehenden Ausdruck auch schreiben:

$$= g \cdot \eta \sum m_a.$$

Das Rotationsmoment der Schwerkraft ist also eben so grofs, wie es sein würde, wenn die ganze Masse $\sum m_a$ des Körpers im

Schwerpunkt desselben vereinigt wäre. Dann wäre nämlich nur die Resultante $g . \sum m_a$ als wirkende Kraft vorhanden, der Hebelarm derselben wäre die Coordinate η des Schwerpunktes, also würde das statische Moment derselben die gleiche Wirkung $g . \eta . \sum m_a$ haben, welche wir für das Rotationsmoment der über den ganzen Körper vertheilten Schwerkraft gefunden haben.

Die nächstliegende Frage betrifft die Lage, in welcher der Körper ruhen kann. Es ist dazu nöthig, dafs die Summe der statischen Momente, also der vorstehende Ausdruck gleich Null wird. Dies kann aber nur dadurch geschehen, dass

$$\eta = 0$$

ist, d. h. dass der Schwerpunkt in der durch die Drehungsaxe gelegten Verticalebene liegt. Geht die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt, so ist die Bedingung der Ruhe in jeder möglichen Lage erfüllt, die Schwerkraft ist dann durch die Unterstützung des Schwerpunktes ganz unwirksam gemacht; man nennt diesen Zustand indifferentes Gleichgewicht. Sobald aber die Axe nicht durch den Schwerpunkt geht, giebt es nur zwei bestimmte Lagen des Gleichgewichtes, in denen nämlich der Schwerpunkt vertical unter oder über der Axe liegt. Beide Ruhelagen sind von wesentlich verschiedenem Charakter. Dreht man nämlich den Körper um ein geringes aus einer dieser Lagen, so treten die vorher verschwundenen Rotationsmomente der Schwerkraft wieder auf und streben den Körper zu drehen, und zwar läfst sich leicht einsehen, dafs die Drehung in die Ruhelage zurückführt, sobald der Schwerpunkt unter der Axe liegt, dafs sie aber die Abweichung vergröfsert, und dadurch den Körper überhaupt nicht wieder in diese Ruhelage zurückführt, wenn der Schwerpunkt über der Axe liegt. Das erste Gleichgewicht ist stabil und stellt sich schliefslich immer wieder von selbst her, wenn die mitgetheilten Bewegungen durch reibende Kräfte oder ähnliche Ursachen vernichtet sind, das zweite dagegen ist labil, der geringste Anstofs treibt den Körper in beschleunigter Bewegung aus dieser Lage fort, welche er auch nicht wieder erreicht.

Um die Lage des stabilen Gleichgewichtes können pendelnde Bewegungen des Körpers bestehen, und man nennt deshalb solche um horizontale Axen bewegliche Körper Pendel, und zwar physische Pendel zum Unterschied gegen das früher betrachtete ideale oder mathemathische Pendel. Um die Bewegungsgesetze der physischen Pendel aufzufinden, müssen wir auf die grundlegenden Differentialgleichungen (91) zurückgehen, deren Aussage für einen um die x-Axe

drehbaren festen Körper wir bereits in Gleichung (97) in folgender Form hingestellt haben:

$$\sum(Y_\mathfrak{a}\, x_\mathfrak{a} - X_\mathfrak{a}\, y_\mathfrak{a}) = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \cdot \sum m_\mathfrak{a}\,(x_\mathfrak{a}^2 + y_\mathfrak{a}^2).$$

Die linke Seite wird bei alleiniger Wirkung der Schwerkraft, wie wir eben hergeleitet haben, gleich $g \cdot \mathfrak{y} \cdot \sum m_\mathfrak{a}$, das rechts stehende Trägheitsmoment ist eine Constante für jeden unveränderlichen Körper mit fester Axe, wir wollen dasselbe kurz mit Θ bezeichnen. Der variable Winkel ϑ hat selbst keine bestimmte Bedeutung, denn jeder Massenpunkt hat sein besonderes $\vartheta_\mathfrak{a}$, und nur eine Consequenz der Starrheit verlangte, dafs alle $d\vartheta_\mathfrak{a}/dt$ einander gleich, also mit Vernachlässigung des Index $\mathfrak{a}$ vor das Summenzeichen gesetzt werden konnten. Wir wollen nun einen bestimmten Winkel einführen: Der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe heifse $\mathfrak{r}$, und der Winkel, um welchen $\mathfrak{r}$ von der nach unten gehenden Verticalen abweicht, heifse α. Wir wollen die positive Richtung von α in Uebereinstimmung mit der positiven Drehung wählen; da also $\alpha = 0$ ist für die Richtung der negativen x-Axe, so wird α positiv in dem Quadranten, wo x und y negativ sind, also beim Ausschlage nach rechts vom Beschauer, negativ dagegen in dem Quadranten, wo y positiv ist. Da nun der Schwerpunkt eine feste Stelle in dem Körper hat, so werden die zeitlichen Veränderungen von α, also $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ebenfalls mit sämmtlichen $\frac{d\vartheta_\mathfrak{a}}{dt}$ resp. $\frac{d^2\vartheta_\mathfrak{a}}{dt^2}$ übereinstimmen, und wir können den bestimmten Winkel α an Stelle von ϑ setzen. Auch die Variabele der linken Seite, $\mathfrak{y}$, lässt sich durch α ausdrücken, denn es ist nach unseren Festsetzungen:

$$\mathfrak{x} = -\,\mathfrak{r}\cos\alpha$$
$$\mathfrak{y} = -\,\mathfrak{r}\sin\alpha.$$

Die Differentialgleichung des physischen Pendels wird hiernach:

$$-\,g\,\mathfrak{r}\sin\alpha \cdot \sum m_\mathfrak{a} = \Theta \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

oder:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\,\frac{g \cdot \mathfrak{r} \cdot \sum m_\mathfrak{a}}{\Theta} \cdot \sin\alpha. \qquad (111)$$

Diese Gleichung zeigt vollkommene formale Uebereinstimmung mit der früher behandelten Differentialgleichung für das mathe-

matische Pendel, Gleichung (46) (Seite 82), nur ist der dort auftretende Coefficient g/l hier durch einen anderen Ausdruck ersetzt; es ist indessen leicht, jenen als Specialfall des jetzt vorliegenden zu erkennen. Erweitern wir nämlich jenen Bruch g/l mit dem Ausdruck $m.l$, so lautet er $\frac{g.l.m}{m.l^2}$, da aber l der Abstand des einzigen beim mathematischen Pendel vorhandenen Massenpunktes m von der Axe bedeutete, so ist l im Zähler als Schwerpunktsabstand $\mathfrak{r}$ zu betrachten, der Nenner $m\,l^2$ aber ist das Trägheitsmoment. Diese formale Uebereinstimmung überhebt uns der Mühe einer besonders durchzuführenden Integration; wir können vielmehr alle bei der Behandlung des mathematischen Pendels gefundenen Resultate direkt auf den vorliegenden Fall übertragen. Bei kleinen Ausschlägen, so lange es erlaubt ist $\sin\alpha = \alpha$ zu setzen, erhalten wir einfache Sinusschwingungen, deren Periode nicht von der Weite dieser Ausschläge abhängt, bei grösseren Ausschlägen wird der zeitliche Verlauf der Elongationen durch die elliptische Function Sinus-amplitudinis dargestellt, die Periode wächst dabei mit zunehmender Schwingungsweite in der durch Gleichung (53) angegebenen Weise. Endlich können auch ungleichförmige Rotationen ohne Umkehr vorkommen, bei denen der Winkel α direct durch die Function Amplitudo einer mit der Zeit proportional wachsenden Gröfse dargestellt wird, ganz wie dies in § 29 ausführlich dargestellt ist.

Wenn wir die Coefficienten in den Differentialgleichungen des mathematischen und des physischen Pendels einander gleichsetzen, also die Gleichung aufstellen:

$$\frac{g}{l} = \frac{g.\mathfrak{r}.\sum m_a}{\Theta},$$

so folgt daraus eine gewisse Pendellänge:

$$l = \frac{\Theta}{\mathfrak{r}.\sum m_a}, \tag{112}$$

welche demjenigen mathematischen Pendel angehört, welches in jedem Falle die gleiche Periode hat, wie das physische Pendel. Man nennt daher diese Länge l die reducirte Pendellänge. Die Schwingungsdauer T für kleine Amplituden, welche beim mathematischen Pendel gleich $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ war, wird für das physische Pendel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{g.\mathfrak{r}.\sum m_a}}. \tag{112 a}$$

Den Nenner des Radicandus, $g \cdot \mathfrak{r} \cdot \sum m_a$, welcher nach Multiplication mit dem Sinus des Elongationswinkels α, oder bei kleinen Schwingungen nach Multiplication mit dem Elongationswinkel α selbst, das Rotationsmoment der Kräfte ergiebt, nennt man gewöhnlich die Directionskraft, obwohl die Bezeichnung Kraft für diese Gröfse von der Dimension Kraft mal Hebelarm nicht angebracht ist. Man kann dann aus der vorstehenden Formel für T folgende für das physische Pendel und alle damit verwandten Körper, wie schwingende Magnetstäbe und Torsionswagen gültige Regel ableiten: Die Schwingungsdauer ist proportional der Wurzel des Trägheitsmomentes und umgekehrt proportional der Wurzel der Directionskraft.

Diese Formel für die Schwingungsdauer bietet nun das Mittel dar, um mit Hülfe eines wirklich ausführbaren physischen Pendels die Intensität der Schwerkraft g experimentell zu bestimmen. Die Dauer der Perioden T kann man sehr genau messen, weil dieselben durch das allmähliche Abnehmen der Amplituden nicht verändert werden, man also die Dauer von vielen Hunderten von Schwingungen mit einer Normaluhr vergleichen kann. Es ist nicht einmal nöthig, während der ganzen Zeit die Schläge zu zählen, man kann vielmehr nach Beobachtung einer kleineren Reihe von Durchgangszeiten durch die Ruhelage davon gehen und nach geraumer Zeit wiederum einige Beobachtungen machen. Die verstrichene Zeit mufs jedenfalls ein ganzzahliges Multiplum des gesuchten T sein, welches? — ergiebt sich zweifellos aus der ersten Annäherung für T, welche man aus wenigen Schlägen ableiten kann. Auch die Methode der Vergleichung der Zeiten der Durchgänge durch die Ruhelage mit den Schlägen einer Normaluhr sind sehr vollkommen ausgebildet durch die Methode der Coincidenzen.

Der Bestimmung der gesammten Masse $\sum m_a$ durch die Wage steht gleichfalls nichts im Wege; nicht so einfach ist indessen die Auffindung des Schwerpunktsabstandes $\mathfrak{r}$ und namentlich des Trägheitsmomentes Θ. Man kann zwar für regelmäfsige Gestalten des als Pendel benützten Körpers, also beispielsweise für eine Kugel oder einen Kreiscylinder, welche etwa an einem Draht aufgehängt sind, $\mathfrak{r}$ und Θ mathematisch berechnen, wobei die Summationen über alle Massenpunkte zu Integrationen über den ganzen mit Masse erfüllten Raum werden. Diese Berechnungen setzen aber voraus, dafs das Material, aus welchem der Körper gearbeitet ist, vollkommen homogen ist, d. h. dafs in gleich grofsen Volumelementen an allen Stellen des Körpers dieselbe Menge von träger Masse enthalten ist,

eine Bedingung, deren Erfüllung man in der Praxis schwer prüfen kann, deren Nichterfüllung sich aber bei allen üblichen Materialien, selbst bei gegossenen und gehämmerten Metallen, oft genug herausstellt. Daher werden diese aus den Dimensionen berechneten Trägheitsmomente sich nicht vollkommen mit den physikalischen Werthen decken, und die Sicherheit der gewonnenen Resultate wird unter diesen unvermeidlichen Mängeln leiden, ganz abgesehen davon, daſs die einfachen, der Berechnung zugänglichen Gestalten nicht die für den Versuch zweckmäſsigsten Formen besitzen. Man hat daher versucht, die directe Bestimmung der Trägheitsmomente zu umgehen oder auf empirischem Wege durch physikalische Mittel zu bewirken, wobei die erkannten Gesetze über die Veränderungen der Trägheitsmomente bei Parallelverschiebung der Axe ein wichtiges Hülfsmittel bilden.

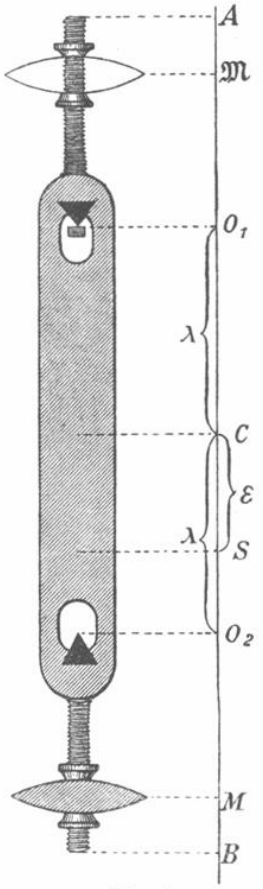

Fig. 9.

Für das Pendel wird die Schwierigkeit am vollkommensten gehoben durch die Benutzung des Reversionspendels, welches um zwei verschiedene parallele Axen schwingen kann. Die wichtigsten Theile dieses Apparates zeigt Figur 9 in schematischer Darstellung. Ein nach beiden Enden hin symmetrisch gearbeiteter länglicher Metallkörper AB besitzt in gleichem Abstand von beiden Enden zwei gegen einander gekehrte Stahlschneiden O_1 und O_2, welche man auf ein festes, eben oder hohlcylindrisch geschliffenes, hartes Lager aufsetzen kann, so daſs beide Schneiden abwechselnd als Drehungsaxen benutzt werden können, um welche der Körper Pendelschwingungen ausführen soll. Beide Enden des Pendels tragen Schraubengewinde, an welchen zwei linsenförmige Körper M und $\mathfrak{M}$ in beliebiger Stellung durch Muttern festgehalten werden. Beide Linsen haben dieselbe äuſsere Gestalt, die eine, von der Masse M, ist aber massiv oder mit Blei gefüllt, während die andere dünnwandig und hohl ist und eine viel geringere Masse $\mathfrak{M}$ besitzt. Dies hat zur Folge, daſs selbst bei ganz symmetrischer

äufserer Erscheinung der Schwerpunkt nicht im Mittelpunkt C zwischen beiden Schneiden liegt, sondern bedeutend näher an der Masse M, etwa in S. Die hohle Linse $\mathfrak{M}$ ist überhaupt nur angebracht, damit das Pendel in beiden Aufhängungen den unvermeidlichen kleinen Einflüssen der Luftreibung die gleiche Oberflächenvertheilung darbiete. Die Massenvertheilung des ganzen Apparates ist nun derart gewählt, dafs die Schwingungsdauer um beide Axen nahezu die gleiche ist, die Aufgabe des Beobachters, die beiden Perioden in die vollkommenste Uebereinstimmung zu bringen, läfst sich dann durch geringe Verschiebungen der Linsen stets ausführen. Nehmen wir nun an, man hätte für einen bestimmten Beobachtungsort, an welchem die Intensität g der Schwerkraft gemessen werden soll, diese Stellung der Linsen herausgefunden, so werden die reducirten Pendellängen des Reversionspendels für beide Axen die gleiche Länge haben. Bezeichnen wir den Abstand der beiden Schneiden $O_1 O_2$ mit 2λ, also $CO_1 = CO_2 = \lambda$ und die Excentricität des Schwerpunktes, d. h. den Abstand des Schwerpunktes vom geometrischen Mittelpunkt, also die Strecke CS mit ε. Das unbekannte Trägheitsmoment des Pendels für eine parallel den beiden Schneiden durch den Schwerpunkt gelegte Axe sei Θ_0, die Gesammtmasse inclusive M und $\mathfrak{M}$ behalte die Bezeichnung $\sum m$. Wir können dann mit den hier eingeführten Gröfsen nach der Regel der Gleichung (99) die Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 für die beiden Axen O_1 und O_2 ausdrücken. Es ist $SO_1 = \lambda + \varepsilon$, $SO_2 = \lambda - \varepsilon$, folglich:

$$\Theta_1 = \Theta_0 + (\lambda + \varepsilon)^2 \sum m$$

$$\Theta_2 = \Theta_0 + (\lambda - \varepsilon)^2 \sum m$$

und daraus folgen nach Gleichung (112) die zugehörigen reducirten Pendellängen:

$$l_1 = \frac{\Theta_0 + (\lambda + \varepsilon)^2 \sum m}{(\lambda + \varepsilon) \sum m}$$

$$l_2 = \frac{\Theta_0 + (\lambda - \varepsilon)^2 \sum m}{(\lambda - \varepsilon) \sum m}.$$

Da diese beiden Gröfsen einander gleich gemacht worden sind, hat man also die Gleichung:

$$\frac{\Theta_0 + (\lambda + \varepsilon)^2 \sum m}{(\lambda + \varepsilon) \sum m} = \frac{\Theta_0 + (\lambda - \varepsilon)^2 \sum m}{(\lambda - \varepsilon) \sum m}.$$

Wir wollen die Quadrate der Binome im Zähler ausführen und die Nenner beider Seiten mit 2λ multipliciren, wodurch ja die Uebereinstimmung der Ausdrücke nicht gestört wird. Die Gleichung erhält dadurch die Form:

$$\frac{\{\Theta_0 + (\lambda^2 + \varepsilon^2)\sum m\} + 2\lambda\varepsilon.\sum m}{2\lambda^2.\sum m + 2\lambda\varepsilon.\sum m} = \frac{\{\Theta_0 + (\lambda^2 + \varepsilon^2)\sum m\} - 2\lambda\varepsilon.\sum m}{2\lambda^2.\sum m - 2\lambda\varepsilon.\sum m}$$

welche aussagt, dafs der Ausdruck:

$$\frac{\{\Theta_0 + (\lambda^2 + \varepsilon^2)\sum m\} \pm 2\lambda\varepsilon.\sum m}{2\lambda^2.\sum m \pm 2\lambda\varepsilon.\sum m}$$

denselben Werth behält, wenn man das + Zeichen und das − Zeichen gelten läfst. Da nun ε bei der Einrichtung des Reversionspendels sicher von Null verschieden ist und deshalb die zweiten Glieder in Zähler und Nenner nicht verschwinden, so ist diese Eigenschaft des obigen Ausdruckes nur möglich, wenn die ersten Glieder in Zähler und Nenner einander gleich sind, wenn also der ganze Ausdruck den Werth 1 hat. Es mufs also sein:

$$\Theta_0 + (\lambda^2 + \varepsilon^2)\sum m = 2\lambda^2\sum m$$

oder:

$$\Theta_0 = (\lambda^2 - \varepsilon^2)\sum m = (\lambda + \varepsilon)(\lambda - \varepsilon)\sum m.$$

Durch die hergestellte Gleichheit der Schwingungsdauern des Pendels um beide Axen erhält man also ein Mittel, die eine Unbekannte Θ_0 durch die andere ε auszudrücken. Die beiden einander gleichen reducirten Pendellängen l erhalten nach Einsetzung des vorstehenden Betrages von Θ_0 den Werth:

$$l = \frac{(\lambda + \varepsilon)(\lambda - \varepsilon)\sum m + (\lambda \pm \varepsilon)^2\sum m}{(\lambda \pm \varepsilon)\sum m} = 2\lambda.$$

Die Unbekannte ε fällt also ebenfalls fort und wir erhalten das einfache Resultat, dafs die reducirte Pendellänge für die gemeinsame Schwingungsdauer um beide Axen gleich 2λ, also gleich dem Abstand der beiden Schneiden ist. Dieser Abstand ist mit Hülfe eines Kathetometers oder eines Längencomparators sehr genau zu messen. Man hat also beim Reversionspendel alle Mittel zur Hand, um die Intensität der Schwerkraft nach der einfachen Gleichung:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

mit gröfster Genauigkeit zu bestimmen. Ueber die Auffassung des Begriffs Schwingungsdauer ist noch zu bemerken, dafs wir denselben hier als Dauer einer ganzen Periode, d. h. eines Hin- und Rückganges eingeführt haben, dafs man aber in der Praxis die Pendelschwingungen nach den Schlägen zählt, welche bei jedem Durchgange durch die Ruhelage erfolgen; die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen ist aber nur eine halbe Periode. Man mufs daher bei Angaben über Schwingungsdauern stets darauf achten, ob ganze oder halbe Perioden gemeint sind. Unter einem Secundenpendel, beispielsweise, versteht man für gewöhnlich ein Pendel, welches in jeder Secunde einen Schlag giebt, dessen Periode also $T = 2$ Secunden zu setzen ist, dessen reducirte Länge also:

$$l = \frac{g}{\pi^2}$$

ist, ein Werth, der, wie die Intensität der Schwere, an verschiedenen Orten kleine Unterschiede zeigt, jedoch überall sehr nahe gleich 1 Meter ist.

Aufser dem physischen Pendel giebt es noch eine Anzahl von Apparaten, welche zur Messung anderer Kräfte dienen, in denen aber ebenfalls Körper pendelartige Schwingungen nach denselben Gesetzen ausführen, welche wir eben gefunden haben. Befestigt man z. B. an einem vertical herabhängenden Drahte, dessen oberes Ende festgeklemmt ist, einen in horizontaler Richtung ausgedehnten Körper, so dafs dessen Schwerpunkt gerade unter die Axe des Drahtes fällt, so hat dieses System eine bestimmte Ruhelage. Dreht man aber den Körper um die verticale Axe des Drahtes aus dieser Lage heraus, so entsteht durch die Torsion des Drahtes ein Rotationsmoment von Kräften, welches den Körper in die Ruhelage zurückzudrehen strebt, und zwar ist hier dieses Moment proportional dem Elongationswinkel α selbst, nicht wie beim Pendel dem Sinus desselben. Den Proportionalitätsfactor D, welcher also das Rotationsmoment der Kräfte für den Winkel $\alpha = 1$, also für die Verdrehung um $57^0\,17{,}75'$ mifst, nennt man auch hier die Directionskraft und die Schwingungsdauer des so aufgehangenen Körpers wird, wie beim Pendel in Gleichung (112 a):

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\Theta}{D}}. \qquad (112\,\text{b})$$

Ist der Körper ein horizontal schwebender Magnetstab, so wird derselbe streben, sich in die Richtung des magnetischen Meridians

zu stellen, und wenn die Befestigung der verticalen Axe torsionslos ist oder nur eine sehr geringe Kraft äufsert, wird er die Nord-Südlage auch erreichen. Dreht man den Magneten ein wenig und läfst ihn dann frei, so führt er ebenfalls Pendelschwingungen um die Ruhelage aus, deren Periode bei kleinen Ausschlägen durch dieselbe Gleichung gegeben wird, wie oben, nur mit dem Unterschied, dafs die Directionskraft D jetzt von der erdmagnetischen Kraft herrührt. Das durch die letztere erzeugte Rotationsmoment ist wie bei der Schwere proportional dem Sinus des Ablenkungswinkels, also wird die Gültigkeit der einfachen Formel für die Schwingungsdauer auf kleine Ausschläge beschränkt sein.

Der Zweck solcher Schwingungsbeobachtungen ist stets die Bestimmung der wirksamen Directionskraft D, aus welcher man dann einen Schlufs ziehen kann im einen Falle auf die elastische Beschaffenheit des zum Drahte ausgezogenen Metalls, im anderen Falle auf die Intensität des erdmagnetischen Feldes. Man mufs also aufser der Periode T auch hier wieder das auf die verticale Drehungsaxe bezogene Trägheitsmoment Θ kennen, dessen mathematische Berechnung aus der Gestalt und der Dichtigkeit wir oben schon als mifslich bezeichnet haben. Man hilft sich in diesen Fällen meistens in der Weise, dafs man zwei kleinere cylindrische Massen von gleicher Gröfse m, an den beiden Enden des schwingenden Stabes, im Abstand h von der Drehaxe in kleinen Einschnitten an Coconfäden aufhängt. Die Trägheitsmomente, welche dadurch hinzukommen, setzt man gleich $2\,m\,h^2$, und man findet für den so belasteten Körper eine längere Periode:

$$T' = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\Theta + 2\,m\,h^2}{D}}.$$

Aus beiden Gleichungen kann man das unbekannte Θ eliminiren und findet schliefslich:

$$D = \frac{8\,\pi^2 . m\,h^2}{T'^2 - T^2}.$$

Dieses Verfahren leidet an dem Uebelstande, dafs man nicht sicher ist, ob nicht die kleinen angehängten Gewichte Eigenschwingungen machen, oder man darf sagen, man ist sicher, dafs sie Eigenbewegungen haben werden, welche noch eine weitere, schwer controlirbare Reaction auf die Schwingung des ganzen Körpers üben. Besser wäre es, die Magnetstäbe in cylindrische oder prismatische Hülsen einzuschliefsen, auf denen beiderseits gleiche

Massen verschiebbar sind. Diese sind dann fest mit dem Körper verbunden, nehmen also sicher an der Drehung theil, es müssen daher auch deren Trägheitsmomente, bezogen auf die durch ihre Schwerpunkte gelegten Axen berücksichtigt werden. Diese bleiben aber bei allen Verschiebungen der Massen die gleichen, geändert wird nur der Abstand ihrer Schwerpunkte von der Drehungsaxe und zwar sind diese Veränderungen sehr leicht genau zu messen. Man kann dann ebenfalls durch Bestimmung der Schwingungsdauern bei mehreren verschiedenen Stellungen der Schieber das unbekannte Trägheitsmoment des ganzen Körpers eliminiren, ohne jenen Fehlerquellen ausgesetzt zu sein, die durch das Anhängen von Massen an dünnen Fäden auftreten können.

Zweiter Abschnitt.

Das Energieprincip.

§ 48. Beweis des Gesetzes für conservative Kräfte.

Bereits im zweiten Theile dieses Buches, als wir die Bewegungen eines einzelnen Massenpunktes unter der Wirkung verschiedener äufserer Kräfte betrachteten, hatten wir mehrfach Gelegenheit, auf die Erfüllung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie hinzuweisen. Für die Wirkung der Schwerkraft wurde in § 18 eine ausführliche Darstellung desselben gegeben, welche als eine vorläufige Einführung in den Sinn des Gesetzes und die dabei zu betrachtenden Begriffe dienen mag. Auch bei der ersten Integration der Differentialgleichung der elastischen Kraft in § 22 fanden wir die Energie als Integrationsconstante (S. 60); der dort gebrauchte Kunstgriff, die Differentialgleichung durch Erweiterung mit der Geschwindigkeit dx/dt integrabel zu machen, ist nur eine specielle Benutzung desselben Gedankens, den wir sogleich auf die allgemeinen NEWTON'schen Bewegungsgleichungen anwenden werden. Ferner waren in § 29 bei der Theorie des mathematischen Pendels, welches in verticaler Kreisbahn ohne Umkehrpunkte rotirt, die

Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft in ihrer durch das in Rede stehende Gesetz gegebenen Verbindung zur Veranschaulichung der ersten Integrationsconstante C (Seite 91—92) von Nutzen. Man könnte noch hinzufügen, dafs auch das oscillirende Pendel dadurch ein instructives Beispiel abgiebt, dafs bei der Bewegung desselben die beiden Formen der Energie abwechselnd in die Erscheinung treten. Zu den Zeiten, wo das Pendel umkehrt, ist der schwere Punkt zur höchsten Höhe gehoben, welche er überhaupt während der Bewegung erreicht, die Energie erscheint hier ausschliefslich durch die Höhenlage des Punktes bedingt, denn lebendige Kraft ist beim Stillstand der Umkehr nicht vorhanden. Wenn das Pendel dagegen durch seine Gleichgewichtslage eilt, befindet sich der schwere Punkt in der niedrigsten Lage, welche er bei seiner Befestigungsart überhaupt erreichen kann; ein Vorrath von Energie kann deshalb nicht aus dieser Lage gewonnen werden, dagegen besitzt die Masse jetzt ihre maximale Geschwindigkeit, die gesammte Energie besteht dann nur in der lebendigen Kraft der bewegten Masse. Die Gleichheit beider Energiequanta läfst sich sehr leicht aus der Gleichung (47) (Seite 83) ablesen.

Das in Rede stehende Gesetz wurde nach dem Bekanntwerden der wichtigsten einfachen Bewegungserscheinungen, welche durch die Untersuchungen von Galilei, Newton, Huygens u. a. festgestellt waren, nicht gleich in seiner Vollständigkeit erkannt. Die Betrachtung der lebendigen Kraft bewegter Massen wird gewöhnlich auf Leibniz zurückgeführt; er war es auch, welcher den eigenthümlichen Namen für diese Gröfse einführte, indem er darauf hinwies, dafs eine bewegte Masse allerlei Wirkungen hervorbringen könne, welche man sonst nur durch directes Eingreifen von Kräften erzielen kann, wie z. B. die Fähigkeit selbst gegen die Richtung der Schwere aufzusteigen, statt zu fallen, oder auch als Geschofs zerstörende Wirkungen beim Zusammenstofs mit widerstehenden Körpern zu äufsern. Das Epitheton „lebendig“ sollte darauf hinweisen, dafs die beobachtete Wirkungsfähigkeit der Masse nur in ihrer Lebendigkeit, d. h. Bewegung liegt, der ruhenden Masse aber abgeht. Leibniz stellte nun folgenden Satz auf, der sich bei der Betrachtung verschiedener Bewegungsvorgänge unter der Wirkung einer gewissen dadurch ausgezeichneten Klasse von Kräften bestätigt hatte, dafs nämlich die Summe der lebendigen Kräfte in einem Massensystem allemal wieder dieselbe wird, wenn die sämmtlichen Theile des Systems im Laufe ihrer Bewegung in die gleiche Lage zu einander zurückkehren.

Diese Gesetzmäfsigkeit bezeichnete er als conservatio virium vivarum, er ging also nicht auf den Begriff der potentiellen Energie ein, deshalb war es auch für seine Betrachtungen nicht störend, dafs er die lebendige Kraft durch das ganze Product aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat definirte, während wir jetzt in Rücksicht auf die Gröfse des in der bewegten Masse enthaltenen Arbeitsquantums das halbe Product jener beiden Gröfsen einführen müssen. Es ist nun möglich aus dieser LEIBNIZ'schen Form des Gesetzes eine Bedingung herzuleiten, welcher diejenigen Kräfte genügen müssen, für welche dasselbe zutrifft und welchen man deshalb den Namen „conservative Kräfte“ [1] gegeben hat. Wenn nämlich die Summe der lebendigen Kräfte für jede während der Bewegung wiederkehrende gleiche Constellation der Massen auch wieder den gleichen Werth erlangt, so mufs dieselbe, obwohl sie nur aus den Massen und den Geschwindigkeitsquadraten zusammengesetzt ist, doch eine reine Function der Coordinaten der Massenpunkte sein. Das Hülfsmittel, durch welches wir zur Aufstellung dieser Bedingung für die Kräfte gelangen, ist nun eine neue, von den in diesem Theile dagewesenen, verschiedene Integration der NEWTON'schen Bewegungsgleichungen, welche gestattet, die Summe der lebendigen Kräfte zu bilden. Wir brauchen dabei die drei verschiedenen Coordinatenrichtungen nicht zu unterscheiden und können die ganze Schaar der für die einzelnen Massenpunkte geltenden Differentialgleichungen zusammenfassen in der Form:

$$m_\alpha \cdot \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = X_\alpha \tag{113}$$

Zu jedem Punkte gehören drei Gleichungen, also drei Indices α, welche die sonst unterschiedenen drei Coordinaten vertreten, selbstverständlich müssen die drei dazugehörigen m_α identisch sein, denn sie bezeichnen denselben Punkt. Solcher Gleichungen haben wir dreimal so viel als das System Massenpunkte enthält. Wir erweitern jede der Differentialgleichungen mit der zugehörigen Coordinate der Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes, also in unserer symbolischen Bezeichnung mit $\frac{dx_\alpha}{dt}$, und addiren die ganze Schaar von Gleichungen; das Resultat ist:

$$\sum m_\alpha \cdot \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \cdot \frac{dx_\alpha}{dt} = \sum X_\alpha \cdot \frac{dx_\alpha}{dt}.$$

[1] Zunächst sollen also conservative Kräfte dadurch definirt sein, dafs sie dem LEIBNIZ'schen Gesetze folgen.

Die linke Seite ist ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit, wir können die Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\sum \tfrac{1}{2} m_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 = \sum X_a \frac{dx_a}{dt} \tag{114}$$

In der links stehenden Summe lassen sich die je drei auf denselben Massenpunkt bezüglichen Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten zusammenfassen zum Quadrat der resultirenden Geschwindigkeit dieses Punktes, also liefern je drei zusammengehörige Summanden das halbe Product aus dem bewegten Massenpunkte mal dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, d. h. die lebendige Kraft dieses Punktes und die Summe, deren Differentialquotient die linke Seite der Gleichung bildet, ist die gesammte lebendige Kraft des Massensystems. Bezeichnen wir diese durch L, setzen also:

$$\sum \tfrac{1}{2} m_a \left(\frac{dx_a}{dt}\right)^2 = L \tag{114a}$$

so finden wir:

$$\frac{dL}{dt} = \sum X_a \frac{dx_a}{dt} \tag{114b}$$

Da wir nun aus dem LEIBNIZ'schen Satze folgerten, dafs L eine reine Function der Coordinaten sein müsse, so mufs, wenn eine Integration möglich sein soll, auch die rechte Seite dieser Gleichung der vollständige zeitliche Differentialquotient einer reinen Coordinatenfunction sein, welche also nur insofern von der Zeit abhängt, als die x_a sich während der Bewegung verändern, nicht aber noch in anderer Weise direct die Zeit als Variabele enthält.

Diese Coordinatenfunction, deren Existenz wir fordern müssen, wollen wir bezeichnen durch $-\Phi$; das Minuszeichen, welches zunächst willkürlich, aber für die analytischen Betrachtungen in keiner Weise anstöfsig erscheint, findet später seine Begründung in der physikalischen Bedeutung von Φ. Da $-\Phi$ nur die variabelen Zeitfunctionen x_a enthält, so ist nach den Grundlehren der Differentialrechnung

$$\frac{d}{dt}\left(-\Phi\right) = \sum\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_a}\right)\cdot\frac{dx_a}{dt}.$$

Dieser Ausdruck mufs nun verträglich sein mit der rechten Seite der Gleichung 114b; das ist aber nur möglich, wenn die Kraft-

componenten X_a, welche die Bewegungen in dem Massensystem regiren, den Bedingungen genügen:

$$X_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \tag{115}$$

Wir haben angenommen, dafs Φ im Allgemeinen sämmtliche Coordinaten enthalte; sollten auf gewisse Punkte in gewissen Richtungen keine Kräfte wirken, so würden die betreffenden Coordinaten in der Function fehlen und die partiellen Differentialquotienten nach denselben würden gleich Null werden. Im Uebrigen ist Φ bisher keinen weiteren Bedingungen unterworfen als der der eindeutigen Differenzirbarkeit.

Sobald die im System wirkenden Kräfte sich in der durch Gleichung (115) angegebenen Weise darstellen lassen, ist die Differentialgleichung (114b) integrirbar, wir können dieselbe dann in folgender Form schreiben:

$$\frac{dL}{dt} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \cdot \frac{dx_a}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt}(L + \Phi) = 0,$$

daraus folgt, dafs während der Bewegung $(L + \Phi)$ eine unveränderliche Gröfse bleibt, eine Integrationsconstante, welche man die Energie des Systems nennt. Bezeichnen wir dieselbe durch E, so erhalten wir das Gesetz von der Constanz der Energie ausgedrückt durch die Gleichung:

$$L + \Phi = E \tag{116}$$

Die beiden Theile L und Φ nennt man, wie früher schon angeführt, die kinetische und die potentielle Energie;[1] erstere ist durch den Bewegungszustand des Systems, letztere durch die Configuration des Systems bedingt.

Es sei zum Schlusse nochmals darauf hingewiesen, dafs der Beweis dieses Gesetzes nur möglich geworden ist durch eine bestimmte Annahme über die Natur der in dem System wirkenden Kräfte (Gleichung 115), dafs daher die Gültigkeit desselben zunächst

---

[1] In seiner Schrift „Ueber die Erhaltung der Kraft" (Berlin 1847) nannte Helmholtz die Gröfse Φ die Summe der Spannkräfte, analog der Bezeichnung Summe der lebendigen Kräfte für L, doch ist er selbst später zu den obigen Bezeichnungen übergegangen.

auch beschränkt ist auf solche Kräfte, welche der gestellten Bedingung genügen. Diese letztere wurde hergeleitet aus dem LEIBNIZ'schen Gesetze von der Erhaltung der lebendigen Kraft. In diesem Sinne sagt auch unser Resultat nichts mehr oder weniger aus als jener LEIBNIZ'sche Satz; dieser verlangt ja, daſs die lebendige Kraft durch eine reine Function der Coordinaten der Massenpunkte darstellbar sei, wir haben nun Φ als eine solche Function eingeführt und erhalten: $L = E - \Phi$, ein Ausdruck, welcher wegen der Constanz von E diese Forderung erfüllt, ohne daſs durch die besondere Form $E - \Phi$, d. h. durch die Heranziehung der potentiellen Energie eine darüber hinausgehende Erkenntniſs erzielt wäre. Eine solche kommt erst hinzu, wenn man auf die physikalische Bedeutung der Function Φ eingeht und untersucht, welche Gesetze über die Anordnung und Wirkung der Kräfte aus deren Bestehen flieſsen.

§ 49. Centralkräfte sind conservativ.

Ehe wir zu den am Schlusse des vorigen Paragraphen bezeichneten Betrachtungen übergehen, wollen wir das Reich derjenigen Kräfte, welche den Bedingungsgleichungen (115) gehorchen, ein wenig durchmustern, d. h. ohne dasselbe erschöpfen zu wollen, eine bestimmte wichtige Klasse von Kräften als zugehörig nachweisen. Wir schlagen der Kürze wegen einen deductiven Weg ein und zeigen, daſs alle Kräfte, welche zwischen Massenpunkten in Richtung der geraden Verbindungslinie wirken und deren Intensität nur vom Abstand der Punkte abhängt, also alle sogenannten Centralkräfte, welche bereits durch die ursprüngliche NEWTON'sche Fassung des Reactionsprincips umgrenzt waren, auch unter dieses Gesetz fallen.

Zunächst betrachten wir ein System von nur zwei Massenpunkten m_a und m_b, und nennen den Betrag der zwischen diesen wirkenden Abstoſsungs- oder Anziehungskraft $K_{a,b}$ ($\equiv K_{b,a}$). Derselbe sei positiv, wenn es sich um Abstoſsung handelt, negativ, wenn um Anziehung.

Die Richtung derselben ist die der Verbindungslinie, deren absolute Länge $r_{a,b}$ ($\equiv r_{b,a}$) heiſsen mag. Es soll also vorausgesetzt werden, daſs $K_{a,b}$ irgend eine eindeutige Function von $r_{a,b}$ ist, welche nicht anders von der Zeit abhängt, als dadurch, daſs $r_{a,b}$ sich bei der Bewegung der beiden Punkte mit der Zeit verändert. (Vergl. § 8 und § 34.) Die Componenten dieser Kraft in Richtung der Coordinataxen werden dann gefunden, indem man die Intensität

$K_{a,b}$ multiplicirt mit den Cosinus, welche $r_{a,b}$ mit den Axen bildet. Diese lassen sich rein geometrisch in der Form $\frac{x_a - x_b}{r_{a,b}}$ etc. darstellen, man kann dieselben aber auch gewinnen, wenn man den Ausdruck:

$$r_{a,b} = + \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \tag{117}$$

nach allen darin steckenden sechs Variabelen differenzirt. Man findet so:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_a} &= \frac{x_a - x_b}{r_{a,b}}, & \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_b} &= \frac{x_b - x_a}{r_{a,b}} \\ \frac{\partial r_{a,b}}{\partial y_a} &= \frac{y_a - y_b}{r_{a,b}}, & \frac{\partial r_{a,b}}{\partial y_b} &= \frac{y_b - y_a}{r_{a,b}} \\ \frac{\partial r_{a,b}}{\partial z_a} &= \frac{z_a - z_b}{r_{a,b}}, & \frac{\partial r_{a,b}}{\partial z_b} &= \frac{z_b - z_a}{r_{a,b}} \end{aligned}\right\} \tag{117a}$$

Die Componenten der auf m_a durch die Gegenwart von m_b ausgeübten Kraft sind danach:

$$\left.\begin{aligned} X_{a,(b)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_a} \\ Y_{a,(b)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial y_a} \\ Z_{a,(b)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial z_a} \end{aligned}\right\}$$

und die auf m_b durch die Anwesenheit von m_a geäufserten Kraftcomponenten sind:

$$\left.\begin{aligned} X_{b,(a)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_b} \\ Y_{b,(a)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial y_b} \\ Z_{b,(a)} &= K_{a,b} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial z_b} \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Die Erfüllung des Reactionsprincips in diesen Gleichungen zeigt ein Blick auf die vorstehenden Gleichungen (117). Es ist nämlich:

$$\frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_a} = - \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_b} \text{ etc.,}$$

folglich auch:

$$X_{a,(b)} = - X_{b,(a)} \text{ etc.}$$

Da nun $K_{a,b}$ eine reine Function von $r_{a,b}$ sein soll, kann man stets durch eine einfache Quadratur folgendes Integral finden:

$$-\Phi_{a,b} = \int K_{a,b}\, dr_{a,b} \tag{119}$$

Ob sich immer ein bequemer analytischer Ausdruck für $\Phi_{a,b}$ findet, ist hierbei gleichgültig, der Begriff dieses Integrales, welches im Allgemeinen ebenfalls eine Function von $r_{a,b}$ sein wird, ist dadurch festgestellt. Das Gesetz, nach welchem die Kraft von der Entfernung abhängt, stellt sich dann in folgender Form dar:

$$K_{a,b} = -\frac{d\,\Phi_{a,b}}{dr_{a,b}} \tag{119a}$$

Die unbestimmte additive Constante, mit welcher $\Phi_{a,b}$ von der Bildung des unbestimmten Integrales her behaftet ist, bringt keine Unsicherheit in die Betrachtung, da erstere in den Differentialquotienten wieder fortfällt. Die Gleichungen (118) gehen aber unter Benutzung von Gleichung (119a) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} X_a &= -\frac{d\,\Phi_{a,b}}{dr_{a,b}} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_a} \\ Y_a &= -\frac{d\,\Phi_{a,b}}{dr_{a,b}} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial y_a} \quad \text{etc.} \\ X_b &= -\frac{d\,\Phi_{a,b}}{dr_{a,b}} \cdot \frac{\partial r_{a,b}}{\partial x_b} \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{119b}$$

Die rechten Seiten dieser sechs Gleichungen sind nun nichts anderes als die partiellen Differentialquotienten, von $-\Phi_{a,b}$, genommen nach den sechs Coordinaten, welche in $r_{a,b}$ stecken. Wir erhalten also:

$$\left.\begin{aligned} X_a &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial x_a}, & X_b &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial x_b} \\ Y_a &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial y_a}, & Y_b &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial y_b} \\ Z_a &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial z_a}, & Z_b &= -\frac{\partial\,\Phi_{a,b}}{\partial z_b}. \end{aligned}\right\} \tag{119c}$$

Es ist hier der Kürze halber X_a statt $X_{a,(b)}$ etc. und X_b statt $X_{b,(a)}$ etc. geschrieben worden, also wie früher, nur die Ordnungszahl des von der Kraft angegriffenen Massenpunktes gesetzt.

Diese Gleichungen stimmen überein mit der im vorigen Paragraphen aufgestellten Bedingung der conservativen Kräfte, es gelten deshalb auch dieselben Folgerungen, mithin auch das Gesetz von der Constanz der Energie. Die Beschränkung, welche in der Annahme von Centralkräften liegt, äufsert sich darin, dafs $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, die potentielle Energie, von welcher wir im Allgemeinen nur annahmen, dafs sie irgend eine eindeutig differenzirbare Function der sämmtlichen vorkommenden Coordinaten sein müsse, bei den Centralkräften diese Coordinaten nur in einer ganz bestimmten Gruppirung enthält, welche durch den Ausdruck $r_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ in Gleichung (117) gegeben ist. Die Sache liegt also so: Centralkräfte sind conservativ, aber conservative Kräfte brauchen deshalb nicht Centralkräfte zu sein.

Wir haben uns bisher auf zwei Massenpunkte beschränkt, jetzt wollen wir ein System von beliebig vielen Massenpunkten betrachten, welche sämmtlich auf einander mit solchen Centralkräften wirken. Man kann dann für jedes mögliche Punktepaar $m_{\mathfrak{a}}$ und $m_{\mathfrak{b}}$ die vorher benutzte Function $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ aufstellen, und die Summe dieser Functionen für alle möglichen Combinationen zu je zwei bilden. Nennen wir diese Summe Φ ohne Index, so ist:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\nu} \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \tag{120}$$

In dieser Summe sind für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ alle Indices der vorhandenen Massenpunkte einzusetzen, nur darf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht dieselbe Ordnungszahl bedeuten, da wir keinen Begriff verbinden mit der Wirkung eines ausdehnungslosen Massenpunktes auf sich selbst. Diese Lücke der Doppelsumme soll durch das Häkchen bezeichnet werden. Im übrigen liefert diese Summe jede Combination zweimal, z. B. den Summanden $\Phi_{2,5} (\equiv \Phi_{5,2})$ erstens wenn $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{b} = 5$ ist und zweitens, wenn $\mathfrak{a} = 5$, $\mathfrak{b} = 2$ ist. Um dieses doppelte Auftreten in ein einfaches zu verwandeln, ist der Factor $\frac{1}{2}$ vor die Summe gesetzt.

Dieser Ausdruck Φ spielt nun in dem allgemeinen Massensystem dieselbe Rolle, welche wir vorher bei einem einzelnen Paare von Punkten die Function $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ erfüllen sahen. Um dies nachzuweisen, wollen wir $-\Phi$ nach irgend einer ausgewählten Coordinate $x_{\mathfrak{p}}$ des Punktes $m_{\mathfrak{p}}$ differenziren. Dabei fallen aus der Summe alle diejenigen Glieder heraus, welche $x_{\mathfrak{p}}$ nicht enthalten, in welchen also weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ die gewählte Ordnungszahl $\mathfrak{p}$ bedeutet; die übrig bleibenden Glieder bilden zunächst eine Summe von folgender Form:

$$\tfrac{1}{2} \Big(\sum_{\mathfrak{b}}^{\nu} \Phi_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{a}}^{\nu} \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} \Big).$$

Die Häkchen der beiden $\sum$ sollen andeuten, dafs in der ersten das Glied $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}$, in der zweiten das Glied $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ fehlt. Die beiden Summen sind übrigens identisch, man kann statt des vorstehenden Ausdruckes einfacher schreiben:

$$\sum_{\mathfrak{b}}{}^{\nu} \Phi_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}.$$

Es wird also:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{p}}} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{}^{\nu} \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}} = -\sum_{\mathfrak{b}}{}^{\nu} \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{p}}}.$$

Da aber jedes $\Phi_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}$ nur Function von $r_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}$ ist, erhält man:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{p}}} = \sum_{\mathfrak{b}}{}^{\nu}\left(-\frac{d\,\Phi_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{d\,r_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial\, r_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{\partial\, x_{\mathfrak{p}}}\right).$$

Jeder einzelne Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung hat die in Gleichungen (119b) vorkommende Gestalt, bezeichnet daher die x-Componente einer auf $m_{\mathfrak{p}}$ wirkenden Kraft und zwar je derjenigen, welche von der Anwesenheit eines bestimmten Punktes $m_{\mathfrak{b}}$ herrührt. Durch die Summirung über $\mathfrak{b}$ werden die Wirkungen aller aufser $m_{\mathfrak{p}}$ noch vorhandenen Punkte addirt, wir erhalten also die x-Componente der gesammten auf $m_{\mathfrak{p}}$ ausgeübten Kraft, welche wir $X_{\mathfrak{p}}$ nennen wollen. Wir erkennen also, dafs

$$X_{\mathfrak{p}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\mathfrak{p}}}$$

ist und ein gleiches Resultat für jede andere Coordinate statt $x_{\mathfrak{p}}$. Damit ist nachgewiesen, dafs in einem Massensystem mit Centralkräften die in Gleichung (120) aufgestellte Function Φ die potentielle Energie darstellt. Zugleich sieht man, während die Kräfte sich bei ungestörter Superposition geometrisch addiren, dafs die $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ zu einer gewöhnlichen algebraischen Summe zusammentreten. Deshalb wird in vielen Problemen die Betrachtung einfacher, wenn man auf die Functionen $\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ eingeht und nicht bei den gerichteten Kräften $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ stehen bleibt.

§ 50. Räumliche Anordnung conservativer Kräfte.

Dafs die räumliche Anordnung der conservativen Kräfte, welche in einem System von Massenpunkten herrschen, nicht mehr ganz regellos sein kann, geht ganz im Allgemeinen schon aus der Ueberlegung hervor, dafs zur vollständigen Angabe der sämmtlichen

Kräfte, so lange dieselben ganz regellos vertheilt sind, dreimal so viel Gleichungen nothwendig, als Punkte vorhanden sind, während in einem conservativen System die Aufstellung einer einzigen Function Φ genügt, um die Werthe sämmtlicher Kraftcomponenten herzuleiten, also auch um alle Fragen über die aus einem gegebenen Anfangszustand des Systems hervorgehenden Bewegungen zu beantworten.

Um ins Einzelne einzugehen, wollen wir zunächst eine ganz bestimmte charakteristische Beziehung ableiten, welche zwischen je zwei Kraftcomponenten bestehen mufs, sobald die Bedingungsgleichungen (115) der conservativen Kräfte erfüllt sind. Greifen wir zwei ganz beliebige Kraftcomponenten X_a und X_b heraus, welche nicht gleichgerichtet zu sein brauchen und auf zwei verschiedene Massenpunkte wirken können. Die ihnen gleichgerichteten Coordinaten der angegriffenen Punkte sind x_a und x_b, und es ist:

$$X_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_a}, \qquad X_b = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_b}.$$

Geben wir nun einmal dem Punkt m_b eine kleine Verschiebung derart, dafs x_b um δx zunimmt, so erfährt dadurch X_a eine Veränderung, welche dargestellt wird durch:

$$\frac{\partial X_a}{\partial x_b} \cdot \delta x = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a \cdot \partial x_b} \cdot \delta x.$$

Verschieben wir andererseits m_a so, dafs x_a um dieselbe Strecke δx wächst, so ist die dadurch bewirkte Aenderung von X_b gegeben durch:

$$\frac{\partial X_b}{\partial x_a} \cdot \delta x = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_b \cdot \partial x_a} \cdot \delta x.$$

Da aber die zweifache Differentiation an Φ zu demselben Resultat führt, gleichviel ob man zuerst nach x_a und dann nach x_b differenzirt, oder umgekehrt, so folgt, dafs die beiden Variationen der betrachteten Kräfte einander gleich sind, dafs also für jedes Paar von Componenten folgender reciproker Zusammenhang besteht:

$$\frac{\partial X_a}{\partial x_b} = \frac{\partial X_b}{\partial x_a}. \tag{121}$$

Als Ursache der auf einen Massenpunkt wirkenden Kraft haben wir in diesem Theil des Buches immer die Anwesenheit anderer Massen angesehen. Das Vorhandensein des angegriffenen Punktes ist zufolge der allgemeinen Definition der Kraft, welche gemessen

werden sollte durch das Product der Masse des betroffenen Punktes und der Beschleunigung, welche derselbe erfährt, unerläfslich. Es ist nun aber die Frage von besonderem Interesse, die räumliche Anordnung einer Kraftwirkung kennen zu lernen, welche von einer bestimmten festen Configuration oder Gruppirung von Massen ausgeht, nämlich in welcher Weise diese sich ändert, wenn ein einzelner beweglicher Massenpunkt an verschiedene Orte des Raumes gebracht wird. Ist nun diese feste Gruppirung das Resultat eines Gleichgewichtszustandes der inneren Kräfte zwischen den Elementen des ruhenden Systems, so ist zu bedenken, dafs die Anwesenheit des zur Prüfung des Feldes dienenden Massenpunktes wegen der Reaction auch seinerseits Kräfte auf das übrige System ausüben, mithin dadurch dessen Ruhelage verändern mufs, und zwar je nach der Stelle des Raumes, an welche man diese Prüfungsmasse bringt, um dort die Wirkung zu studiren, in stets anderer Weise verändern mufs. Man würde also niemals die Kraftwirkung der ursprünglich vorhandenen Configuration, sondern diejenige der gestörten Anordnung finden. Es giebt indessen zwei Vorstellungen, welche über diese Schwierigkeit hinweg helfen. Entweder mufs die Prüfungsmasse so aufserordentlich klein angenommen werden, dafs deren Anwesenheit die im Gleichgewicht befindlichen inneren Kräfte des Systems in keiner der zu prüfenden Lagen merklich stört, oder aber man mufs sich vorstellen, dafs die Theile des Systems starr festgehalten werden, dafs also zu einer merklichen Verschiebung derselben Kräfte erforderlich wären, welche unendlich grofs sind gegen die von dem Prüfungstheilchen ausgehenden. Wir brauchen hier keine Entscheidung zwischen den beiden Vorstellungen zu treffen; in einigen Problemen, z. B. bei den elektrostatischen Wirkungen eines geladenen Conductors wird man die erste Betrachtung wählen müssen, da von einer starren Befestigung der Ladung an gewissen Stellen eines Conductors nicht die Rede sein kann, bei Gravitationsproblemen dagegen kann man sich wohl die Anordnung der anziehenden Massen starr und unbeweglich denken, also die zweite Vorstellung zu Grunde legen.

Wir wollen jedenfalls jetzt ein Massensystem betrachten, dessen Punkte fest liegen bis auf einen einzigen Punkt m_0; diesen wollen wir an verschiedene Orte führen, und Gröfse und Richtung der Kraft untersuchen, welche dort m_0 von den übrigen Massen erfährt. Die Function Φ, welche für das gesammte System einschliefslich m_0 gilt, soll nach früheren Auseinandersetzungen die Coordinaten sämmtlicher Punkte enthalten, da aber alle Punkte aufser m_0 festliegen,

sind deren Abmessungen nur Constanten in der Function Φ, die einzigen Variabelen bleiben die drei Coordinaten x_0, y_0, z_0 des beweglichen Punktes, d. h. die Abmessungen des Ortes, an welchem die Kraft bestimmt werden soll. Da dies aber alle möglichen Orte sein sollen, so ist Φ einfach eine Function der drei Raumcoordinaten, und wir können die Indices 0 weglassen.

Wir wollen zuerst nach dem Ort der Raumpunkte fragen, in denen Φ einen bestimmten constanten Werth C besitzt. Dieser Ort ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\Phi(x, y, z) = C \tag{122}$$

welche nach den Lehren der analytischen Geometrie eine bestimmte Oberfläche im Raume bezeichnet. Auf dieser Oberfläche kann man also m_0 verschieben, ohne dafs dadurch die potentielle Energie eine Aenderung erleidet. Man nennt deshalb solche Flächen Aequipotentialflächen oder in Uebertragung einer speciellen, der Wirkung der Schwerkraft entsprechenden Bezeichnung Niveauflächen, welche Ausdrücke wir in gleicher Weise benutzen werden. Je nach der Wahl der Constante C erhält man verschiedene Oberflächen, und wenn man dieser Gröfse nach einander eine ganze Reihe auf einander folgender Werthe beilegt, so erhält man eine ganze Schaar solcher Niveauflächen, deren besondere Gestalt von der Natur der Function Φ abhängt, welche aber doch stets einige gemeinsame Eigenschaften aufweisen. Zum Beispiel können sich zwei Flächen derselben Schaar niemals durchschneiden, weil dann Φ in der Schnittlinie die Werthe der beiden verschiedenen Constanten besitzen müfste, welche die beiden Flächen bestimmen. Ferner können diese Flächen in einem Raume, in welchem Φ überall definirt ist, nicht irgendwo aufhören, sie müssen vielmehr entweder geschlossen sein, oder bis an die Grenzen des betrachteten Raumes reichen, und falls solche durch das Problem nicht geboten sind, sich bis ins Unendliche erstrecken. Der Raum wird also durch diese Flächen in eine Schaar getrennter schalenförmiger Räume zerschnitten.

Da nun bei Verrückungen des Punktes m_0 in Richtung dieser Flächen die Function Φ kein Gefälle besitzt, so liegt auch in tangentialer Richtung zu diesen Niveauflächen niemals eine Kraftcomponente. Um dies deutlich einzusehen, müssen wir zunächst nachweisen, dafs nicht nur die Kraftcomponenten X, Y, Z, welche den Richtungen der Coordinataxen folgen, durch die Gleichungen:

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

angegeben werden, sondern dafs überhaupt für jede beliebige Richtung s die gleichgerichtete Kraftcomponente, die wir S nennen wollen, durch eine ebensolche Bildung

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \tag{123}$$

bestimmt wird. Der Nachweis kann in verschiedener Weise erbracht werden. Zunächst folgt er ganz anschaulich aus der einfachen Ueberlegung, dafs die Wahl der Coordinatenrichtungen etwas rein Aeufserliches und für die Betrachtung Gleichgültiges ist, dafs man also die x-Axe ebenso gut in die Richtung s verlegen kann, wie in eine andere; alsdann wird aber $S = X$ und $\partial \Phi/\partial s = \partial \Phi/\partial x$, mithin die Gültigkeit der Gleichung (123) auf die der vorstehenden Wiederholung von Gleichung (115) zurückgeführt.

Man kann aber auch ohne Drehung des Axensystems, für welches die Function $\Phi(x, y, z)$ nun einmal gebildet worden ist, die Richtigkeit der Gleichung (123) auf analytischem Wege nachweisen. Man drückt zu diesem Zwecke die Componente S durch die Componenten X, Y, Z und die Winkel (x, s), (y, s), (z, s) aus, welche die Richtung s mit den Axen bildet. S ist die Projection der resultirenden Kraft K auf die Richtung s, da aber K die geometrische Summe von X, Y und Z ist, kommt man zu dem gleichen Werth für S, wenn man diese drei Componenten nach einander auf die Linie s projicirt und die algebraische Summe der Projectionen bildet. Man findet also:

$$S = X.\cos(x, s) + Y.\cos(y, s) + Z.\cos(z, s) \tag{123a}$$

In Fig. 10 ist diese Zusammensetzung von S für nur zwei Componenten X und Y in der (x, y)-Ebene veranschaulicht. OA repräsentirt die Componente X, AB die Componente Y, also stellt OB die Resultante K dar. Die Projection von K auf die Richtung s ist OC, stellt also die Componente S dar. Ebenso ist aber OD die Projection von $OA = X$

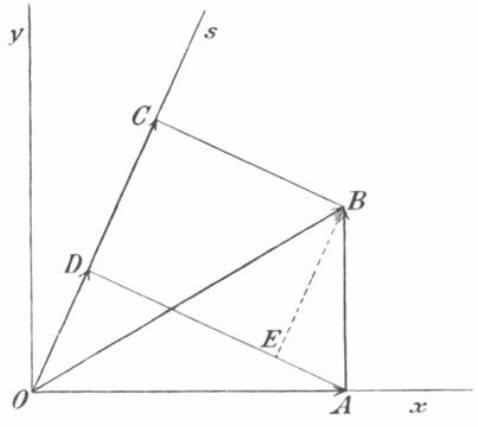

Fig. 10.

und DC die Projection von $AB = Y$ auf die Linie s. Diese beiden letzteren sind

$$OD = OA \cdot \cos(AOD) = X\cos(x, s)$$
$$DC = EB = AB \cdot \cos(ABE) = Y\cos(y, s),$$

und da $OD + DC = OC = S$, findet man

$$S = X\cos(x, s) + Y\cos(y, s)$$

eine Formel, welche in ganz gleicher Weise auf alle drei Axenrichtungen ausgedehnt, zu der vorstehenden Gleichung (123a) führt. Die Richtungscosinus können in anderer Weise dargestellt werden: Schreitet man nämlich auf der Linie s um das Differential ds vorwärts, und bezeichnet die Projectionen von ds durch dx, dy, dz, so ist:

$$\cos(x, s) = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos(y, s) = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos(z, s) = \frac{dz}{ds}.$$

Drückt man ferner X, Y, Z in bekannter Weise durch $\Phi(x, y, z)$ aus, so findet man:

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}\right) \qquad (123b)$$

Die drei Raumcoordinaten erscheinen bei dieser Betrachtung nicht als unabhängige Variabele, ihre Differentiale stehen vielmehr in einem bestimmt vorgeschriebenen Verhältnisse, welches durch die Richtung von ds gegeben ist, also sind x, y, z als Functionen einer Urvariabelen s anzusehen, und der Differentialquotient von Φ nach s ist zu bilden nach der bekannten Regel, welche die Differentialrechnung für die Differentiation einer Function von Functionen angiebt. Bildet man auf diese Weise $\partial \Phi / \partial s$, so erhält man den Ausdruck, welcher in der Klammer der rechten Seite der vorstehenden Gleichung steht. Man findet also schliefslich:

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

was zu beweisen war. Man kann den Schlufs dieser Betrachtung auch auf folgende Weise machen: Wenn man von einem bestimmten Punkte aus, in welchem die potentielle Energie den bestimmten Werth Φ_1 besitzt, um das in Gröfse und Richtung vorgeschriebene Wegelement ds fortschreitet, so kommt man zu einem Punkt, in welchem die potentielle Energie Φ_2 ist, die Abnahme von Φ, also

die Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$, welche wir durch $- d\Phi$ bezeichnen wollen, ist vollkommen bestimmt durch die Werthe Φ_1 im Anfangspunkt und Φ_2 im Endpunkt des Weges. Das Gefälle $-\partial\Phi/\partial s$ ist definirt durch die Gleichung:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = - d\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds.$$

Es ist daher bei diesem Proceſs gleichgültig, auf welchem Wege wir vom Ausgangspunkt zum Ziele gehen, ob wir beispielsweise die geradlinige Straſse ds wählen, oder die zweimal rechtwinkelig gebrochene Straſse, welche nach einander die drei Projectionen von ds, nämlich dx, dann dy und endlich dz durchläuft. Wir wollen jetzt diesen zuletzt beschriebenen, besonderen Weg einschlagen. Der Anfangswerth von Φ ist Φ_1. Während der Punkt dx durchläuft, findet die Abnahme:

$$(- d\Phi)_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

statt, während des darauf folgenden Weges dy kommt dazu die Abnahme:

$$(- d\Phi)_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

und auf der letzten Wegstrecke dz endlich die Abnahme:

$$(- d\Phi)_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz.$$

Nun sind wir am Endpunkt von ds angelangt, wo der Werth Φ_2 herrscht. Also muſs sein

$$(- d\Phi)_x + (- d\Phi)_y + (- d\Phi)_z = \Phi_1 - \Phi_2 = - d\Phi$$

oder:

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = - \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch ds, so finden wir:

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} \right) = - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot$$

Dies liefert zusammen mit Gleichung (123b) ebenfalls den Beweis für die Richtigkeit der Gleichung (123).

Kehren wir nach dieser Auseinandersetzung zurück zur Betrachtung der Schaar von Aequipotentialflächen $\Phi = \text{const.}$, und

stellen uns zwei Nachbarflächen vor, deren Constanten nur sehr wenig von einander verschieden sind, der Werth der potentiellen Energie auf der zweiten Fläche sei um den festen Betrag $\delta \Phi$ kleiner als auf der ersten Fläche. Die beiden Flächen werden aufserordentlich nahe bei einander liegen und werden in einem engen, aber für die folgende Betrachtung doch hinreichend weiten Gebiete als zwei parallele Ebenen anzusehen sein. Auf welchem Wege man nun von einem bestimmten Punkte der ersten Fläche aus nach der zweiten Fläche hinübergehen mag, stets wird man dabei denselben Abfall von Φ finden, nämlich die feste Gröfse $\delta \Phi$. Der kürzeste Weg ist normal gegen die Richtung der beiden Flächen, seine Länge δn mifst den kleinen Abstand der beiden Nachbarflächen an der betrachteten Stelle. Jeder von diesem verschiedene schräg gerichtete Weg ist nothwendig länger als δn; die Länge δs desselben, wenn er geradlinig gewählt wird, ist aus einfachsten geometrischen Gründen gegeben durch:

$$\delta s = \frac{\delta n}{\cos(s, n)}$$

Nun mufs:

$$-\delta \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot \delta s = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \delta n$$

sein; setzt man also den Ausdruck für δs ein, so erhält man:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial s} \cdot \frac{\delta n}{\cos(s, n)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \delta n$$

oder:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \cdot \cos(s, n) \qquad (124)$$

eine Gleichung, welche das Gefälle von Φ in verschiedenen Richtungen s angiebt. Am gröfsten wird dasselbe, wenn $\cos(s, n) = 1$ ist, wenn also der Weg in Richtung der Normale der Niveaufläche verläuft; der Maximalwerth ist $-\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ selbst. Dieses Gefälle bestimmt aber direct die Gröfse der in dieser Richtung wirkenden Kraftcomponente, und die maximale Kraftcomponente ist die Resultante K, wir sehen also, dafs die resultirende Kraft senkrecht gerichtet ist gegen die Niveauflächen in Richtung der abnehmenden Φ, die Componente S in einer davon verschiedenen Richtung s ist:

$$S = K \cdot \cos(s, n) = K \cdot \cos(S, K)$$

d. h. die anders gerichteten Componenten werden aus der Kraft K abgeleitet durch Multiplication mit dem Cosinus des Richtungsunterschiedes. In tangentieller Richtung zu den Niveauflächen ist $(s, n) = \pi/2$, der Cosinus ist Null und wir erhalten, wie von vornherein ersichtlich, keine Kraftcomponente.

Durch diese Erkenntnifs ist ein sehr anschauliches Bild für die räumliche Vertheilung der Kraftrichtungen gewonnen. Denken wir uns den ganzen Raum durchsetzt von einer Schaar von Aequipotentialflächen, so haben wir überall eine Angabe über die Richtung der Kraft in der abwärts gerichteten Normale auf einer solchen Fläche. Aber auch die Intensität der Kraft läfst sich aus dem Bilde dieser Flächenschaar erkennen. Wir brauchen die Flächen nur so auszuwählen, dafs der vorerwähnte Abfall von Φ, also $-\delta\Phi$, zwischen allen Nachbarflächen im ganzen Raume der gleiche ist; die Constanten, welche die einzelnen Flächen bestimmen, bilden dann eine arithmetische Reihe mit der sehr kleinen Differenz $-\delta\Phi$. Machen wir nun an zwei verschiedenen Stellen des Raumes, (1) und (2), den Weg von einer dort zunächst befindlichen Fläche zu ihrer Nachbarfläche, so ist:

$$\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_1 . \delta n_1 = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_2 . \delta n_2 = -\delta\Phi$$

oder:

$$K_1 . \delta n_1 = K_2 . \delta n_2$$

oder:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\delta n_2}{\delta n_1} \tag{125}$$

Die Intensitäten der Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes verhalten sich mithin umgekehrt wie die Abstände der benachbarten Aequipotentialflächen. An Orten grofser Kraftintensität liegen diese Flächen also dicht gedrängt, während sie an Stellen schwächerer Wirkung weiter auseinander treten. Das Anschauungsmittel solcher Flächenschaaren läfst sich bei gewissen regelmäfsigen Gruppirungen des Massensystems auch graphisch in einer Ebene als Meridianschnitt zeichnen, und ist in vielen Fällen, namentlich auch in der Lehre von den elektrischen und magnetischen Kräften, nützlich.

§ 51. Die Arbeit längs eines Weges.

Wir bleiben zunächst bei der Vorstellung eines unbeweglich festgelegten Massensystems, welches auf einen beweglichen Massenpunkt m_0 mit conservativen Kräften wirkt. Diese Kräfte werden nach den vorhergehenden Betrachtungen den Punkt m_0, wenn er frei beweglich ist, in Richtung des stärksten Gefälles der Function Φ in beschleunigter Bewegung forttreiben. Der Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Bewegungszustand von m_0 erfährt, ist in Folge des erkannten Gesetzes von der Constanz der Energie gleich der Abnahme der potentiellen Energie Φ auf dem zurückgelegten Wege; diese Abnahme kann man nach Entwerfung der beschriebenen Niveauflächenschaar an den auf dem Wege durchsetzten Flächen abzählen und mit Benutzung des gewählten Werthes für den Sprung $\delta\Phi$ beliebig genau schätzen.

Nun können wir aber durch Eingriff von aufsen, also durch fremde Kräfte, etwa durch die Kraft unseres Armes den Massenpunkt m_0 auch auf bestimmten Wegen durch dieses Kraftfeld führen, welche er unter alleiniger Wirkung der inneren Kräfte nicht einschlagen würde. Wir können diese Bewegungen so langsam ausgeführt denken, dafs die kinetische Energie dabei stets unmerklich klein bleibt. Die äufsere Kraft unseres Armes dient dann nicht zu einer effectiven Beschleunigung von m_0, sondern allein dazu, der von dem festen System ausgehenden Kraft das Gleichgewicht zu halten, dieselbe also aufzuheben; die äufsere Kraft mufs daher überall der inneren entgegengesetzt gleich gemacht werden. Dann befindet sich der Massenpunkt in einem Zustande, als wenn gar keine Kräfte auf ihn wirkten, er kann dann durch den geringsten Anstofs in jeder Richtung sehr langsam fortbewegt werden, ohne dafs mit diesem verschwindend kleinen Bewegungszustand selbst irgend eine merkliche Leistung verbunden wäre; eine solche kann nur in der Veränderung seines Ortes beruhen, denn er kann an Stellen gebracht werden, an denen die potentielle Energie einen höheren oder geringeren Betrag hat, als im Ausgangspunkt. Die gesammte Energie des Systems, inclusive m_0, kann also vermehrt oder vermindert werden; darin liegt eine Wirkung, welche ohne das Eingreifen der Beschleunigung-aufhebenden Kraft unseres Armes nicht zu Stande zu bringen gewesen wäre. Diese äufsere Kraft, welche den Punkt m_0 überall in Ruhe zu halten vermag, bewirkt

durch ihre Anwesenheit allein niemals eine solche Veränderung der Energie des Systems, sondern es ist dazu nöthig, dafs diese Kraft ausgeübt werde, während m_0 einen Weg beschreibt, auf welchem Φ seinen Werth ändert, der also nicht in einer bestimmten Niveaufläche verläuft, sondern mindestens eine Componente aufweist, welche gegen die innere Kraft oder mit derselben gerichtet ist. Diese Leistung der Veränderung von Φ nennt man die Arbeit der äufseren Kraft längs des Weges und zwar, um das Vorzeichen dieser Gröfse festzusetzen, eine von aufsen geleistete (positive) Arbeit, wenn Φ dabei vergröfsert wird, eine nach aufsen abgegebene (negativ geleistete oder gewonnene) Arbeit, wenn Φ dabei vermindert wird. Der Betrag der geleisteten Arbeit wird direct gemessen durch den Zuwachs von Φ, d. h. es ist:

$$A = \Phi_2 - \Phi_1 \tag{126}$$

wobei Φ_1 und Φ_2 die Werthe der potentiellen Energie im Ausgangspunkt (1) und im Endpunkt (2) des Weges darstellen und A die Arbeit bezeichnet. Da nun A nur von den beiden Grenzwerthen von Φ abhängt, mufs man auf allen möglichen Wegen, welche von (1) nach (2) führen, die gleiche Arbeit leisten, gleichwie man auch daraus sofort sieht, dafs bei einem geschlossenen Wege, welcher wieder zum Ausgangspunkt zurückführt, die gesammte Arbeit gleich Null sein mufs.[1]

Den Begriff der Arbeit, welchen wir soeben mit Hülfe der Function Φ eingeführt haben, kann man in der Weise umbilden,

---

[1] Diese Folgerungen gelten nur für solche Räume, in denen Φ selbst überall einen eindeutigen Werth besitzt. Man kann sich auch Anordnungen vorstellen, bei denen zwar das Gefälle von Φ überall eindeutig bestimmt ist, während Φ selbst vieldeutig ist; solche Räume müssen dann aber nothwendigerweise mehrfach zusammenhängend sein, d. h. es müssen Gebiete aus dem Raume herausgeschnitten sein, in welchen Φ nicht existirt, und welche nirgends allseitig umschlossen sind, sondern entweder in sich selbst ringförmig zurücklaufen oder sich ins Unendliche erstrecken, resp. beiderseits an den Grenzen des betrachteten Raumes endigen. Die Vertheilung der magnetischen Kraft um einen elektrischen Stromleiter herum ist ein Beispiel für eine solche Anordnung. Die Arbeit zwischen zwei Lagen ist dann die gleiche nur, wenn die Wege continuirlich in einander übergeführt werden können, nicht aber, wenn das herausgeschnittene Gebiet sich einer solchen Ueberführung hindernd in den Weg stellt. Zunächst haben wir es aber nur mit einfach zusammenhängenden Räumen zu thun.

dafs derselbe als ein Integral, genommen über den Weg, auftritt, denn es ist:

$$A = \Phi_2 - \Phi_1 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial \Phi}{\partial s} d s,$$

wo $d s$ die Elemente des Weges bezeichnet. Nach Gleichung (124) ist nun:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos(s, n) = - K . \cos(s, n),$$

also ist auch:

$$A = - \int_{(1)}^{(2)} K . \cos(s, n) . d s.$$

Hier bedeutet K die vom festen System herrührende innere Kraft, die zur Compensation dienende äufsere Kraft ist also gleich $- K$; die positive Richtung der Normale n geht nach den steigenden Werthen von Φ, also entgegen der inneren und gleichgerichtet der äufseren Kraft. Wir können daher, wenn wir die äufsere Kraft K' nennen, die vorstehende Gleichung für die von aufsen geleistete Arbeit auch schreiben:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} K' . \cos(s, K') . d s \qquad (126\,\text{a})$$

Der Integrand $K' . \cos(s, K') = S'$ mifst die in Richtung des Weges $d s$ fallende Componente der aufgewendeten äufseren Kraft, nur diese Componente kann zur Arbeitsleistung dienen.[1]

Wendet man die bekannte Zerlegung an:

$$\cos(s, K') = \cos(K', x) . \cos(s, x) + \cos(K', y) . \cos(s, y) + \cos(K', z) . \cos(s, z)$$

und vereinigt die vorderen Cosinus mit dem Factor K' zu den Componenten X', Y', Z', die hinteren ebenso mit $d s$, so erhält man:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} (X' d x + Y' d y + Z' d z) = - \int_{(1)}^{(2)} (X d x + Y d y + Z d z) \qquad (126\,\text{b})$$

---

[1] Die in populären Darstellungen meistens verwendete Bildung des Arbeitsbegriffes findet man aus Gleichung (126 a), wenn man den Weg in Richtung der Kraft K' wählt, also $\cos(s, K') = 1$ setzt, und ferner annimmt, dafs die aufzuwendende Kraft K' auf dem ganzen Wege denselben Betrag behält. Dann wird einfach $A = K' . s$, d. h. die geleistete Arbeit ist gleich dem Product aus der wirkenden Kraft und der Länge des Weges, auf dem dieselbe angestrengt wurde.

In dieser Form ist jede Beziehung auf einen bestimmten Weg aufgegeben; nur die Integralgrenzen bezeichnen den Anfangs- und Endpunkt, zwischen denen der Weg laufen muſs. Einen bestimmten Sinn hat aber ein Integral dieser Art nur, wenn der Integrand ein totales Differential bildet, so daſs man das Integral unbestimmt ausführen kann und in die gefundene Function von x, y, z nachher die Grenzwerthe einsetzen kann. Diese Bedingung ist aber durch Gleichung (115) gegeben und beschränkt die Anwendbarkeit des Arbeitsbegriffes ebenfalls auf die Existenz der Function Φ, welche wir auch in Gleichung (126) zur Aufstellung von A brauchten. Die Form, welche in Gleichung (126a) gegeben ist, gestattet dagegen eine Erweiterung des Begriffes, denn diese läſst sich auch anwenden und behält einen bestimmten Sinn in solchen Fällen, wo zwar äuſsere Kräfte nöthig sind, um eine vorgeschriebene Bewegung auszuführen, wo aber keine Function Φ aufzufinden ist, also bei nicht conservativen Kräften. Die Arbeit wird dann definirt durch Gleichung (126a) und hat einen bestimmten Betrag, den man angeben kann, wenn man den Integrationsweg vorgeschrieben hat und die Gröſse und Richtung von K' an jeder Stelle kennt, denn die Gröſse der Arbeit ist in diesen Fällen nicht allein bestimmt durch Ausgangspunkt und Endpunkt, sondern hängt auch von der Wahl des Weges ab. Daſs in diesen Fällen anstatt der Vermehrung der potentiellen Energie immer etwas anderes gleichwerthiges durch die Arbeitsleistung hervorgebracht wird, soll im nächsten Paragraphen besprochen werden.

Wie man sieht, kommt es bei der Bildung des Arbeitsbegriffes gar nicht auf die Zeit an, während welcher der Weg zurückgelegt wird, nur hatten wir bei der Einführung des Begriffes der Einfachheit wegen angenommen, daſs die Bewegungen mit minimaler Geschwindigkeit erfolgen sollten, bei endlichen Wegen ist dann immer eine unendliche Zeit erforderlich. Diese Annahme war aber nur gemacht, um das Auftreten einer bemerkbaren kinetischen Energie zu vermeiden. Wir werden nun diese Beschränkung fallen lassen. In der Praxis werden Arbeitsleistungen von endlichem Betrage immer in endlicher, oft sehr kurzer Zeit verlangt. Um solche auszuführen, muſs eine gehörige Geschwindigkeit der bewegten Masse erzeugt werden, die dazu erforderliche kinetische Energie kann nur dadurch gewonnen werden, daſs die äuſsere Kraft unseres Armes die zur Compensation der inneren Kräfte erforderliche Gröſse mehr oder weniger übersteigt, so daſs eine effective Beschleunigung in Richtung des gewählten Weges zu Stande kommt. Die geleistete

Arbeit ist dann gröfser als die Differenz $\Phi_2 - \Phi_1$, ist aber bei conservativen Kräften nicht verloren oder versteckt, sondern findet sich wieder in der lebendigen Kraft, mit welcher die Masse am Ziel anlangt, und welche dieselbe befähigt ohne Hülfe von aufsen noch weiter gegen die Richtung der inneren Kräfte vorzudringen bis zu einem Orte (3), welcher dadurch bestimmt ist, dafs Φ_3 um soviel gröfser als Φ_2 ist, wie der in der Lage (2) vorhandenen kinetischen Energie entspricht. An dem Platze (3) kommt dann die Masse nach einer verzögerten (negativ-beschleunigten) Bewegung zur Ruhe und kann dort ohne Arbeitsaufwand festgehalten werden. Wenn wir nun diesen Ort (3) als das von Anfang an beabsichtigte Ziel des Weges betrachten, so sehen wir, dafs man die Bewegung auch mit beliebiger Geschwindigkeit in endlicher Zeit ausführen kann, nur mufs dann die äufsere Arbeit früher geleistet werden, als sie zur Steigerung von Φ verbraucht wird. Man kann also durch Aufwendung äufserer Arbeit die potentielle Energie des Systems inclusive m_0 vermehren. Wenn man m_0 in der Endlage festhält, hat man diese Arbeit in dem System aufgespeichert, und kann dieselbe später wieder gewinnen, indem man m_0 zurückführt entweder auf demselben oder auf einem anderen Wege, längs dessen Φ ebenfalls vermindert wird. Wenn man die bei der Verminderung von Φ freiwerdende Arbeit sofort benutzt, so wird der Massenpunkt bei diesem Rückgang nicht die Beschleunigung erfahren, welche er bei freier Bahn annehmen würde, denn die Arbeit besteht darin, dafs er einer äufseren Kraft, welche der inneren das Gleichgewicht hält, entgegen arbeitet. Findet diese Rückbewegung unendlich langsam statt, so mifst die Abnahme von Φ jederzeit direct die gewonnene Arbeit. Bei diesem Processe kann man den Verlauf dadurch abkürzen, dafs man zunächst die äufsere Kraft geringer macht, als zur Compensation der inneren nöthig ist, eventuell dieselbe anfangs ganz wegläfst. Dann erhält die fortgetriebene Masse eine merkliche kinetische Energie und ist nachher im Stande eine äufsere Kraft zu überwinden, welche gröfser ist als die entgegengesetzte innere Kraft. Dieser zweite Theil der Bewegung findet dann in verzögerter Bewegung statt und der Massenpunkt kommt schliefslich zur Ruhe. Hält man denselben dann fest, so hat man in endlicher Zeit die ganze Arbeit gewonnen, welche durch die Abnahme von Φ längs des Weges gemessen wird, nur gewinnt man die Arbeit später, als dieselbe durch die Abnahme der potentiellen Energie frei geworden ist, denn dieselbe hat inzwischen in der Form von kinetischer Energie der bewegten Masse existirt.

Wir können nun auch die Annahme fallen lassen, dafs wir es mit einem solchen Massensysteme zu thun haben, welches bis auf ein einziges Element m_0 starr ist; wir können mehrere bewegliche Punkte annehmen, durch deren zwangsweise Bewegung die potentielle Energie der Configuration verändert wird; ja wir können schliefslich sämmtliche Bestandtheile des Systems bewegen, und so die mannigfachsten Gestaltänderungen desselben hervorbringen. Bei allen diesen Vorgängen verändert sich die Function Φ, deren Werth nun nicht mehr durch den Ort eines einzigen Punktes bestimmt wird, sondern, wie ursprünglich, von den Coordinaten sämmtlicher Punkte abhängt, in der Weise, dafs wir in jedem Zustand eingetretener Ruhe eine von aufsen geleistete Arbeit wiederfinden in einer entsprechenden Vermehrung von Φ, oder eine dem System abgewonnene Arbeit in einer ebensolchen Verminderung von Φ.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dafs die potentielle Energie als ein disponibler Arbeitsvorrath anzusehen ist, welchen man für äufsere Zwecke nutzbar machen kann, wenn man eine derartige Deformation des Massensystems zuläfst, dafs Φ dadurch vermindert wird. In Rücksicht auf diese Bedeutung der Function wurde bei deren Einführung (Seite 195) das negative Vorzeichen gewählt, welches damals nicht gerechtfertigt werden konnte und sich in den die Kraftcomponenten darstellenden Differentialquotienten von $-\Phi$ in allen folgenden Rechnungen wiederfindet. Bei älteren Autoren, welche bereits die conservativen Kräfte als partielle Differentialquotienten einer Coordinatenfunction darstellten, findet man auch vielfach die entgegengesetzte Wahl des Vorzeichens. So stimmt z. B. die von Jacobi benutzte „Kräftefunction“ nicht mit unserem Φ überein, sondern deckt sich mit dem Ausdruck $(-\Phi)$, die Kräfte werden dort[1] dargestellt als die positiven Differentialquotienten der Kräftefunction. Auch das von Gauss für die Darstellung der im Verhältniss des verkehrten Quadrates des Abstandes wirkenden Anziehungs- und Abstofsungskräfte benutzte „Potential“ besitzt das entgegengesetzte Vorzeichen wie Φ, und wird öfters in dieser Weise eingeführt. Dies Potential ist übrigens nicht direct wesensgleich mit einer Energie, da bei der Aufstellung desselben für ein starres System dem zur Prüfung dienenden Massenpunkt m_0 die Einheit des von der Kraft angegriffenen Agens beigelegt wird. Man mufs daher die Differentialquotienten des Potentials noch mit dem Quantum des angegriffenen Agens (Masse, Magnetismus, Elektricität) multipliciren, um die Gröfse

[1] Jacobi, Vorl. über Dynamik, Berlin 1866.

der Kraft in der durch die Differentiation gegebenen Richtung zu erhalten. Das GAUSS'sche Potential kann also definirt werden als die in irgend einem Maafse gemessene Arbeit, welche nöthig ist, um die Einheit des Agens von der zu prüfenden Stelle fortzuführen bis an einen Ort, wo das Potential 0 herrscht; solche Orte findet man bei lauter anziehenden oder lauter abstofsenden Kräften nur in unendlicher Entfernung von dem festen System, bei Mischung beider Arten von Kräften, wie solche ausgehen von Aggregaten positiver und negativer elektrischer Ladungen oder nördlicher und südlicher Magnetismen, liegen solche aber auch im Endlichen. Beispielsweise ist das Potential der Massenanziehung eines Systems von festen Punkten m_1, m_2, . . . m_a, . . .:

$$P = \sum_a \frac{m_a}{r_a},$$

wo r_a den Abstand der Masse m_a von dem zu prüfenden Ort mifst, während wir für diesen Fall setzen müssen:

$$\Phi = \text{Const.} - G \cdot \sum_a \frac{m_0 \cdot m_a}{r_{0,a}},$$

wo Const. beliebig, aber G ein bestimmte Constante ist, wie später ausführlich zu zeigen sein wird.

Für die Rechnung selbst ist die Wahl des Vorzeichens gleichgültig, aber wegen möglicher Verwirrungen und Verwechselungen ist es vortheilhafter an dem von uns gewählten Vorzeichen festzuhalten, welches der Function Φ in allen Fällen, wo dieselbe existirt, die anschauliche physikalische Bedeutung eines aufgespeicherten Energievorrathes sichert.

Die Dimension (vergl. § 13) der in diesem Abschnitt betrachteten Energiegröfsen E, L, Φ und A ist übereinstimmend gleich $[ML^2T^{-2}]$, denn L ist Masse mal Geschwindigkeitsquadrat, die Abnahme von Φ, dividirt durch die Strecke, längs welche dieselbe eintritt, liefert eine Kraft, und Arbeit ist das Product Kraft mal Weg. Die Einheit dieser Dimension im C. G. S.-System (siehe S. 35), 1 gr $cm^2.sec^{-2}$ nennt man 1 Erg. Das GAUSS'sche Potential mufs erst durch gewisse Factoren vervollständigt werden, um einem Energiequantum gleichartig zu werden.

§ 52. Andere Energieformen. Universelle Gültigkeit des Princips von der Erhaltung der Energie.

Die Gleichung (116) (Seite 196), welche das Gesetz von der Constanz der Energie ausspricht, wurde hergeleitet aus dem zu Eingang dieses Abschnittes hingestellten LEIBNIZ'schen Satze über die sogenannte Erhaltung der lebendigen Kräfte. Dieser Satz ist anzusehen als ein Inductionsschluſs, welcher gezogen wurde aus einer ganzen Reihe damals schon geglückter mathematischer Darstellungen von Bewegungsvorgängen in der Natur, zu denen die Fallbewegungen, die elastischen Schwingungen und namentlich die nachher von uns zu behandelnden Bewegungen der Himmelskörper gehören. Die Gültigkeit desselben ist daher zunächst eine beschränkte und alle daraus gezogenen Folgerungen stehen und fallen zugleich mit ihrer Voraussetzung. Es gelang uns den begrenzten Bereich der Geltung in allgemeiner Form zu charakterisiren in den Bedingungsgleichungen (115) der conservativen Kräfte. Durch diese Gleichungen wurde die Coordinatenfunction Φ erst eingeführt, welche später eine anschauliche physikalische Bedeutung als Arbeitsvorrath fand, während die kinetische Energie L stets einen absoluten Sinn hat, sobald die Bewegung einer trägen Masse betrachtet wird. Die begriffliche Gleichartigkeit dieser beiden Gröſsen zeigte sich in ihrer Zusammenfügung zu der constanten Summe $L + \Phi$. Wenn von einem System Arbeit nach auſsen abgegeben wird, so sinkt der Energieinhalt desselben; als Resultat der Arbeitsleistung konnten wir einstweilen nur anderweitig auftretende gleiche Quanta von L oder Φ ansehen; wenigstens nur wenn die Frucht der Arbeit sich in einer dieser uns als Energie jetzt bekannten Formen, als lebendige Kraft von bewegten Massen oder als Configuration mit gesteigerter potentieller Energie (etwa als gehobenes Gewicht) zeigt, hatten wir die Sicherheit, daſs die Energie in Summa erhalten blieb.

Es giebt nun aber eine sehr groſse Anzahl von Fällen, in welchen wir bei einer offenbaren Arbeitsleistung keine von diesen Energieformen wieder auftreten sehen, ja es giebt — wenigstens in irdischen Verhältnissen — keinen einzigen Vorgang, in welchem wir den einem Massensystem bei der Arbeitsleistung desselben verloren gegangenen Energievorrath in seinem vollen Werthe in Form der beiden genannten mechanischen Energien wiederfinden.

Die erschöpfende Behandlung aller dieser Erscheinungen gehört nicht unter die Gegenstände dieses Bandes. Wir wollen nur voraus-

greifend durch eine Reihe von Beispielen klar machen, um was es sich dabei handelt. Es soll nämlich gezeigt werden, daſs diese Ausnahmen oder ungenauen Erfüllungen des Gesetzes immer mit irgend welchen anderweitigen Veränderungen Hand in Hand gehen, deren Gröſse den scheinbaren Energieverlust oder Gewinn stets ausgleicht. Nur bei der Wirkung der conservativen Kräfte, welche wir betrachtet haben, handelt es sich um reine sichtbare Bewegungsvorgänge, es kommen dabei keine Erscheinungen vor, welche uns zwängen, noch anderweitige physikalische Processe zur Erklärung heranzuziehen. In diesem Sinne bezeichnet man die conservativen Kräfte auch als reine Bewegungskräfte und setzt sie dadurch in Gegensatz zu den vielen anderen Naturkräften, welche wir durch die im Folgenden angeführten Beispiele illustriren wollen.

Beispiel 1. Ein schwerer Körper ruht auf einer ebenen, horizontalen, rauhen Unterlage und soll auf derselben um eine gewisse Strecke verschoben werden. Wir wissen aus täglicher Erfahrung, daſs man eine mitunter recht bedeutende Kraftanstrengung braucht, um diese Bewegung zu ermöglichen. Vom Beharrungsvermögen der bewegten Masse ist in diesem Falle wenig oder gar nichts zu spüren, der schwere Körper bleibt vielmehr, sobald wir denselben nicht mehr treiben, in Ruhe: lebendige Kraft wird also nicht gewonnen; auch ist der Körper durch seine neue Lage nicht fähig, irgend welche Arbeit zu leisten, indem er etwa auf seinen ursprünglichen Platz zurückkehrt, denn beide Orte haben dieselbe Höhenlage und die einzige Kraft, welche den ruhenden angreift, ist die verticale Schwerkraft, also ist auch keine potentielle Energie gewonnen; und trotzdem ist bei der Verschiebung eine meſsbare Kraft längs des ganzen Weges ausgeübt worden, also eine ganz bestimmte Arbeit für diesen Vorgang aufgewendet worden.

Beispiel 2. Einem isolirt aufgestellten Körper A ist eine bestimmte Ladung positiver Elektricität mitgetheilt, welche er bewahrt. Nähern wir demselben einen isolirten Conductor B, d. h. einen metallischen Körper, welchen wir mittelst einer Handhabe aus Glas oder Hartgummi bewegen können, so sammelt sich auf der A zugekehrten Seite desselben negative Elektricität, auf der abgewandten Seite eben so viel positive Elektricität. Entfernen wir B wieder von A, so flieſsen in ihm beide Elektricitäten wieder zusammen und geben denselben unelektrischen Zustand wie zu Anfang; eine Arbeitsleistung bei dem ganzen Vorgang in Summa ist dabei kaum zu spüren. Berühren wir aber während der Annäherung an A die abgewandte Seite von B mit einem Draht, welcher zu

einem ferner stehenden unbeweglichen, gröfseren, isolirten Conductor C führt, so fliefst die abgestofsene positive Elektricität aus B nach C hinüber, und nach Entfernung des Contactes ist B nur mit negativer Elektricität geladen; die Wegführung des Conductors B aus der Nähe von A geschieht jetzt aber nicht ohne Arbeit, denn die Anziehungskraft der entgegengesetzten Ladungen mufs längs des Weges überwunden werden. Entleeren wir die negative Ladung von B in einen feststehenden grofsen, isolirten Conductor D, so ist B wieder in dem Zustande wie zu Anfang und wir können den Procefs wiederholen: B an A nähern, wiederum die abgestofsene positive Elektricität nach C fliefsen lassen, die Arbeit bei der Wegführung von B leisten und dessen negative Ladung in D aufspeichern, u. s. w. Es geht also auch bei diesem Procefs jedesmal eine gewisse Menge von Arbeit darauf, ohne dafs wir eine der mechanischen Energieformen finden.

In diesen zwei Beispielen sahen wir Arbeitsleistungen scheinbar verschwinden. Nun wollen wir einige Fälle anführen, in denen durch gewisse Processe, die sich nicht ohne weiteres den in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Vorgängen einordnen lassen, die beiden uns bis jetzt bekannten Energieformen gewonnen, scheinbar erzeugt werden.

Beispiel 3. In ein etwa 2 m hohes cylindrisches Gefäfs bringt man bei Zimmertemperatur eine geringe Menge Wasser, so viel, dafs dasselbe auf dem Boden eine Schicht von 1 mm Höhe bildet. Dieses geringe Volumen sei oberhalb abgesperrt durch einen leichten, luftdicht schliefsenden, aber verschiebbaren Stempel. Umgiebt man dieses hohe Gefäfs mit einem heifsen Bade, etwa mit geschmolzenem Paraffin, welches man durch regulirbare Gasflämmchen und Rührvorrichtungen auf einer Temperatur von 150° erhalten kann, so verwandelt sich sämmtliches Wasser in Dampf von der angegebenen Temperatur; dabei wird der Stempel um fast 2 m in die Höhe getrieben, um dem Dampf den erforderlichen Raum zu geben, welcher etwa 1927 mal so grofs ist, als das Volumen derselben Wassermenge im flüssigen Zustande. Wiederholen wir denselben Versuch ein zweites Mal mit dem Unterschied, dafs wir auf eine an dem herausragenden Ende des Stempelstieles befindliche Schale eine schwere Masse auflegen, so wird auch jetzt während der Verwandlung des Wassers in Dampf der Stempel in die Höhe getrieben und dadurch zugleich das belastende Gewicht gegen die Richtung der Schwerkraft gehoben. Die Stellung, in welcher der Stempel diesmal aufhört zu steigen, ist zwar nicht so hoch, wie beim ersten

Versuch, weil der überhitzte Dampf unter dem stärkeren Drucke, welchen die schwere Masse verursacht, in einem geringeren Raume Platz findet; auf jeden Fall aber gewinnen wir durch die Hebung des aufgelegten Gewichtes einen bestimmten Betrag potentieller Energie, welchen wir aufbewahren können, wenn wir das gehobene Gewicht abnehmen und in der erreichten Höhenlage aufhängen. Nach der Entlastung steigt der Stempel noch ein Stück weiter bis zu derselben Höhe, welche er im ersten Versuche erreichte. Der Endzustand ist also nun scheinbar derselbe wie beim ersten Versuch, nur haben wir einen gewissen Arbeitsvorrath gewonnen, welcher nicht durch Aufwand der uns bisher vorgekommenen Energieformen erzeugt worden ist.

Beispiel 4 (Fig. 11). Ein Gefäfs T aus porösem gebrannten Thon wird mit stark verdünnter Schwefelsäure angefüllt und in ein weiteres Glasgefäfs G gestellt, welches man mit einer concentrirten Lösung von Kupfersulfat beschickt. In die verdünnte Säure taucht man einen dicken Zinkstab Z, in die Kupfersulfatlösung ein Kupferblech K, welches cylindrisch gekrümmt ist, so dafs es die Thonzelle umschliefst. Eine solche Einrichtung nennt man ein galvanisches Element, die hier beschriebene Form desselben führt den Namen ihres Erfinders Daniell. Beide Metalle ragen aus den sie benetzenden Flüssigkeiten heraus und werden durch die im Folgenden beschriebene Anordnung metallischer Körper aufserhalb der Flüssigkeiten in Verbindung mit einander gebracht: Zwei ringförmige mit Quecksilber gefüllte offene Rinnen Q und Q' sind in einem gewissen verticalen Abstande von einander befestigt; das Quecksilber der unteren Rinne Q ist mit dem Kupferblech durch einen Kupferdraht D verbunden, ebenso Q' mit dem Zinkstabe durch den Draht D'. Eine verticale Drehungsaxe AA' geht durch beide Ringcentra hindurch und besteht zwischen den Ebenen der beiden Ringe aus einem Metallstab BB', von welchem aus in die untere und die obere Quecksilberrinne Metallarme CC und $C'C'$ eintauchen. Diese etwas complicirte Verbindung soll nur bewirken, dafs bei einer Drehung der Axe doch das Kupfer und das Zink aufserhalb der Flüssigkeit immer durch eine Reihe metallischer Körper verbunden bleiben, ohne dafs durch das Schleifen von festen Metallen auf einander eine merkliche Reibung erzeugt wird. Diese Verbindung in der Richtung vom Kupfer zum Zink ist in der Figur durch ungefiederte Pfeile angezeigt. Für sich allein zeigt eine solche Einrichtung keinerlei Bewegungserscheinungen. Befestigt man aber zu beiden Seiten nahe an der Drehungsaxe symmetrisch zwei verticale Magnet-

stäbe NS derart, daſs deren Nordpole N in den Raum zwischen den beiden Quecksilberringen hineinragen, während die Südpole S in

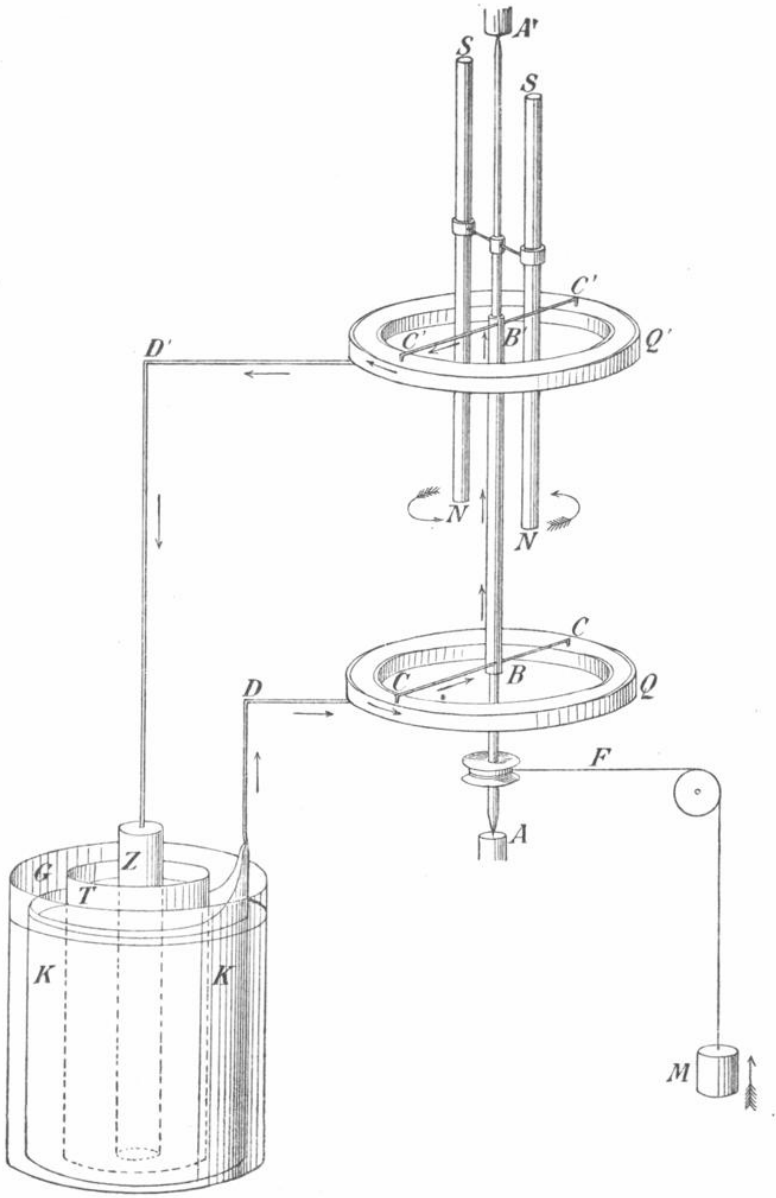

Fig. 11.

einiger Entfernung über dem oberen Ringe bleiben, so setzt sich die Axe mit den beiden Magneten in schneller und schneller

werdende Rotation, deren Richtung durch die gefiederten Pfeile bei N bezeichnet ist; die trägen Stahlmassen der Magnete erhalten also wachsende Beträge an kinetischer Energie, ohne dafs wir dabei eine der uns bekannten Formen von Arbeitsvorrath dazu aufwenden oder dabei verschwinden sehen. Man kann dieses einfache (elektromagnetische) Maschinchen auch zu anderen Arbeitsleistungen verwenden; man kann z. B. die Drehungsaxe einen Faden F aufwickeln lassen, an welchem ein Gewicht M hängt. Die Bewegung wird dann in mäfsiger Geschwindigkeit ohne Beschleunigung erfolgen, aber die schwere Masse wird gehoben und repräsentirt nach der Hebung einen Gewinn an potentieller Energie.

Man sieht aus allen diesen Beispielen, die sich noch beliebig vermehren liefsen, dafs das Gesetz von der Erhaltung der Energie in der Form, wie wir es abgeleitet haben, nur eine beschränkte Gültigkeit besitzt. Wenn wir aber alle diese Vorgänge, welche zunächst als Ausnahmen erscheinen, genauer untersuchen, so finden wir, dafs es sich dabei niemals um reine Bewegungserscheinungen handelt, sondern dafs immer noch anderweitige Veränderungen vor sich gehen, welche aufzuspüren mitunter eine schwierige Aufgabe der experimentellen Forschung ist, welche sich indessen noch stets haben entdecken lassen. Wir wollen jetzt diese Begleiterscheinungen in den angeführten Beispielen aufdecken und betrachten.

In dem Vorgang Beispiel 1 bemerkt man, dafs die reibende Fläche des bewegten Körpers sowohl wie die geriebenen Theile der Unterlage erwärmt werden. In Fällen, wo dauernd dieselben Flächen auf einander reiben, wie dies z. B. bei ungenügend oder gar nicht geschmierten Radaxen von Eisenbahnwagen oder Maschinen vorkommt, können die benachbarten Theile bis zum Glühen erhitzt werden. Schnelle Reibung geeigneter Holzstücke auf einander ist wohl das älteste Mittel zum Feuerzünden. Nimmt man nun solche Reibungsversuche unter geeigneten Vorsichtsmafsregeln in geschlossenen Gefäfsen vor, in denen man die erzeugte Wärmemenge durch irgend welche genau beobachtbaren Veränderungen messen kann (Calorimeter), so findet man, dafs ein bestimmtes Quantum geleisteter Arbeit in allen Fällen genau dieselbe Wärmemenge hervorbringt, unabhängig von der besonderen Form des Experimentes und von der Natur der geriebenen Körper. Wir wollen gleich hinzusetzen, dafs es durchaus nicht nöthig ist, dafs die Arbeit gerade durch Reibungsvorgänge in Wärme übergeht, es giebt noch manche andere Processe, welche dieselbe Umwandelung entweder direct oder durch Vermittelung anderer Zustände hervorbringen,

immer aber ist die durch eine bestimmte Arbeit gewonnene Wärme dieselbe, vorausgesetzt, dafs diese Arbeit sich nicht als L oder Φ wiederfindet, oder als irgend eine andere Art von verändertem Zustand. Der erste, der eine quantitative Schätzung der zur Erzeugung einer Wärmeeinheit (Calorie) erforderlichen Arbeit, also eine Bestimmung des sogenannten mechanischen Wärmeäquivalentes unternahm, war J. R. Mayer im Jahre 1842. Er stützte sich dabei auf einige damals bereits bekannte Daten anderer Physiker über die bei der Compression der Luft auftretenden Wärmemengen. J. P. Joule führte um dieselbe Zeit eine ganze Reihe eigener directer Messungen dieses Zusammenhanges mit grofser Sorgfalt aus, welche zum Theil von Rowland mit den vollkommeneren Hülfsmitteln der modernen Thermometrie wiederholt wurden. Es steht nach diesen Versuchen fest, dafs die Wärmemenge, welche erforderlich ist um ein Gramm reines flüssiges Wasser vom Gefrierpunkt bis zum Siedepunkt zu erhitzen, durch eine Arbeit erzeugt wird, welche in Form von potentieller Energie aufgespeichert wird, indem man ein Gewicht von 100 gr gegen die Richtung der Schwerkraft auf eine Höhe von fast 430 m hebt oder durch eine Arbeit, welche in Form von kinetischer Energie auftritt an einer Masse von 100 gr, welche ohne Luftwiderstand durch einen Fallraum von fast 430 m frei herabgefallen ist. Dabei ist die nicht ganz zutreffende Annahme gemacht, dafs die Beschleunigung der Schwerkraft in so bedeutender Höhe denselben Werth habe, wie an der Oberfläche der Erde; thatsächlich ist sie oben etwas kleiner. Man kann aber bei dieser Veranschaulichung der Arbeitsgröfse die verticale Distanz vermindern und die schwere Masse in demselben Verhältnifs vergröfsern: Dieselbe wird auch dargestellt durch die potentielle Energie, welche ein Gewicht von 100 kg bei einer Erhebung von 43 cm aufnimmt, oder durch die lebendige Kraft, welche 100 kg beim freien Fall von einer Höhe von 43 cm herab erlangen. Will man diese Arbeit unabhängig von der Schwerkraft im absoluten Mafse darstellen, so mufs man die Zugkraft des schweren Gewichtes gleich seiner Masse mal der Beschleunigung $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$ einführen und diesen Betrag multipliciren mit dem Wege längs dessen dieselbe bei der Hebung überwunden wird. Man erhält so:

$$100 \times 1000 \text{ gr} \times 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \times 43 \text{ cm} = 100 \times 42\,000\,000 \text{ Erg.}$$

Diese zur Erwärmung von 1 gr Wasser vom Gefrierpunkt bis zum Siedepunkt erforderliche Wärmemenge spielt in der messenden Physik eine wichtige Rolle: der hundertste Theil derselben bildet

die neuerdings allgemein angenommene praktische Wärmeeinheit, welche man als mittlere Grammcalorie bezeichnet, es ist

$$1 \text{ mittlere Grammcalorie} = 4{,}2 \cdot 10^7 \text{ Erg.}, \qquad (127)$$

wenigstens können wir jetzt sagen, dafs die auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung angegebene Arbeitsgröfse im Stande ist gerade eine Wärmeeinheit zu produciren, d. h. sich in eine solche zu verwandeln.

Greifen wir nun das Beispiel 3 heraus: Dort finden wir den umgekehrten Vorgang illustrirt. Es ist nämlich bei dem zweiten Experiment, als wir den entstehenden Dampf nöthigten, für uns ein schweres Gewicht zu heben, dem heifsen Bade mehr Wärme entzogen worden, als dies im ersten Experiment ohne äufsere Arbeitsleistung der Fall war. Die regulirbaren Heizflammen mufsten zur Erhaltung der Temperatur beim zweiten Versuche höher brennen als beim ersten, um den Mehrverbrauch von Wärme zu ersetzen. Ohne künstliche Nachheizung würde sich die Wärmeabgabe in dem ausgedehnten Bade in beiden Fällen durch ein Sinken der Temperatur anzeigen; diese Abkühlung würde aber im zweiten Falle gröfser sein, als im ersten. Wir haben also hier eine Verwandelung von Wärme in mechanische Energie vor uns durch Vermittelung des Bestrebens des Wasserdampfes sich auszudehnen. Es wirken hier dieselben Naturerscheinungen, durch welche wir auch in den Dampfmaschinen diese Umsetzung im grofsen Mafsstabe erreichen. Die Resultate eingehender Messungen bei ganz verschiedener Anordnung der Versuche haben nun gelehrt, dafs die Wärmemengen, welche verschwinden, wenn Arbeitsquanta an ihrer Stelle auftreten, diesen letzteren ebenfalls stets äquivalent sind nach derselben quantitativen Beziehung, welche in der vorstehenden Gleichung (127) ausgesprochen ist, dass dieselben dagegen unabhängig von der Natur des sich ausdehnenden Körpers sind, so dafs wir diese Gleichung als allgemeingültig für alle wechselweisen Umwandelungen zwischen den mechanischen Energieformen und der Wärme anzusehen haben. Das Erfahrungsresultat, dafs eine Wärmemenge ein ganz bestimmtes Energiequantum repräsentirt, welches zwar verwandelbar aber unzerstörbar ist, auch durch Leitung und Strahlung nur seinen Sitz, aber nicht sein Quantum ändert, dehnt den Gültigkeitsbereich des Gesetzes von der Erhaltung der Energie über alle Vorgänge aus, in denen Bewegungserscheinungen und Wärmeveränderungen Hand in Hand gehen; das Energieprincip bildet den ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Betrachten wir jetzt das Beispiel 2. Die bei der wiederholten Entfernung des negativ geladenen Conductors B von dem positiv elektrischen Körper A aufgewendete Arbeit hat eine Veränderung erzeugt, welche wir in der positiven Ladung von C und der ebensogroſsen negativen Ladung von D wiederfinden. Diese Ladungen sind um so gröſser, je öfter wir den beschriebenen Proceſs ausgeführt haben. Es giebt Maschinen, in welchen durch eine cyklische Bewegung, einer drehbaren Scheibe, welche den Conductor B oder mehrere solche Conductoren trägt, das Abnehmen der abgestoſsenen positiven und dann das Wegführen der angezogenen negativen immerfort besorgt wird, so lange man dreht; es sind das die von Holz und Töpler construirten Influenzmaschinen. Die Drehung derselben erfordert weit mehr Arbeit, als durch die Reibung der Drehungsaxe und den Luftwiderstand erklärt werden kann. Diese beiden entgegengesetzt geladenen Conductoren C und D repräsentiren nun ein bestimmtes Quantum von einer besonderen Energieform, der elektrostatischen Energie, welche in die uns bereits bekannten Formen zurückverwandelt werden kann. In einer Beziehung ist dieselbe ganz analog der potentiellen Energie, denn die beiden Conductoren ziehen sich an mit einer starken Kraft, welche die allgemeine Massenanziehung völlig in den Schatten stellt. Diese Kraft kann man arbeiten lassen, wenn man den Conductoren gestattet, sich einander zu nähern, ganz wie man ein der Erde sich näherndes, d. h. fallendes Gewicht arbeiten lassen kann. Diese Arbeit erschöpft aber den Vorrath elektrischer Energie noch nicht, den Rest derselben verliert man in einer ganz eigenartigen Weise, sobald die Annäherung hinreichend eng geworden ist. Es springt dann ein elektrischer Funke über, durch welchen die beiden entgegengesetzten Ladungen sich ausgleichen und verschwinden. Bei dieser Erscheinung wird die Luftstrecke und abgerissene Metalltheilchen bis zur Weiſsgluth erhitzt, es entsteht also eine gewisse Wärmemenge, welche zum Theil als sichtbare Lichtstrahlung in den Raum hinausgeht, ferner entstehen dabei langsamere elektrische Schwingungen, welche, wie das Licht, in dem durchstrahlten Raume einen Energievorrath repräsentiren, der seinerseits wieder in Wärme verwandelt wird, sobald die Strahlen auf absorbirende Körper treffen, endlich hört man einen Knall, welcher als Lufterschütterung eine gewisse kinetische Energie repräsentirt. In der Summe aller dieser auftretenden bekannten Energieformen finden wir das volle Aequivalent der bei der Trennung der entgegengesetzten Elektricitäten durch Influenz aufgewendeten Arbeit wieder.

Wir sehen also, daſs die entgegengesetzte Ladung der Conductoren C und D einen der verbrauchten mechanischen Arbeit gleichwerthigen Energievorrath darstellt, den man in andere Formen zurückverwandeln kann, ohne etwas zu gewinnen oder zu verlieren. Die Constanz der Energie zeigt sich also auch im Gebiete der elektrostatischen Erscheinungen als gewahrt. Die Maſseinheiten der elektrostatischen Ladungen sind so festgesetzt worden, daſs die positive Einheit die negative Einheit im Abstand von 1 cm mit der Kraft einer Dyne anzieht. Man erhält dann bei der gewaltsamen Entfernung beider Quanta aus der angegebenen Lage in so groſse Entfernung, daſs die proportional dem reciproken Quadrate des Abstandes abnehmende Anziehungskraft unmerklich geworden ist, die Arbeit von 1 Erg. in Form elektrostatischer Energie aufgespeichert. Durch diese Wahl der elektrischen Einheiten, wird die Einheit der elektrostatischen Energie (e^2/r) direct 1 Erg.

Schlieſslich wollen wir in Beispiel 4 diejenigen Vorgänge aufsuchen, welche als die Energiequelle für die beschriebene Arbeitsleistung anzusehen sind. Wir haben dabei unsere Aufmerksamkeit auf die Veränderungen zu lenken, welche in dem DANIELL'schen Element vor sich gehen. Man bemerkt, daſs der Zinkstab angefressen wird und dadurch an Masse abnimmt. Dies ist nicht die gewöhnliche chemische Wirkung verdünnter Schwefelsäure auf Zink, bei welcher letzteres auch verzehrt wird, denn es entsteht hierbei keine Ausscheidung von Wasserstoffgas, welche sonst mit diesem Proceſs verbunden ist. Das verlorene Zink (Zn) findet sich in der von der Thonzelle umschlossenen Flüssigkeit in Verbindung mit einem Bestandtheile der Schwefelsäure (dem Anion SO_4) chemisch verbunden als Zinksulfat ($ZnSO_4$) wieder; man kann letzteres durch Abdampfen der Flüssigkeit als weiſses Salz wiedergewinnen. In der die Thonzelle von auſsen umgebenden Lösung von Kupfersulfat ($CuSO_4$) ist die entgegengesetzte Veränderung zu bemerken: Die Lösung wird verdünnter, es verschwindet dort eine entsprechende Menge des blauen Salzes, während das Kupferblech durch niedergeschlagenes metallisches Kupfer (Cu) an Masse zunimmt. Die durch diesen Niederschlag frei gewordenen Mengen des Anions SO_4 sind es, welche sich mit dem Zink verbunden haben, sie haben dazu durch die poröse Thonwand ins Innere hineindringen müssen. Die Mengen der freien Schwefelsäure im inneren Gefäſs bleiben dabei unverändert, die fortschreitenden Veränderungen in dem galvanischen Elemente finden in der Ausdrucksweise der chemischen Zeichensprache ihre Darstellung durch die Gleichung:

$$Zn + CuSO_4 = Cu + ZnSO_4,$$

welche aussagt, daſs die Menge von SO_4 unverändert geblieben ist, aber von der Verbindung mit Cu gelöst, Zn ergriffen hat. Die an dem Proceſs betheiligten Massen stehen in ganz festen Verhältnissen; während nämlich 65,5 gr Zink gelöst werden, scheiden sich 63,3 gr Kupfer als Metall wieder aus, die Menge des Anions SO_4, welche dabei ihren Platz wechselt, beträgt 96 gr. Daſs nun diese chemische Umsetzung eine ganz bestimmte Energiemenge freimacht, kann man durch ein einfaches, rein chemisches Experiment nachweisen: Man löse in Wasser soviel Kupfersulfat auf, daſs 63,3 gr Kupfer, also auch 96 gr SO_4 darin enthalten sind. (Die blauen Kupfervitriolkrystalle enthalten viel unwirksames Krystallwasser gebunden, man muſs 249,3 gr des Salzes nehmen, um die geforderte Menge 159,3 gr der Verbindung $CuSO_4$ in der Lösung zu haben.) Wirft man in diese Lösung 65,5 gr feinvertheiltes Zink — etwa Zinkfeilspähne — und schüttelt kräftig, so tritt bereits während weniger Secunden eine vollständige Umsetzung der Stoffe ein, die vorher blaue Lösung hat sich entfärbt und enthält nun Zinksulfat, an Stelle des grauen Zinkpulvers erscheint ein brauner Bodensatz von metallischem Kupfer. Es ist derselbe Proceſs plötzlich eingetreten, welcher in dem Daniell-Element allmählich vor sich geht, zugleich bemerkt man aber eine ganz bedeutende Erwärmung, welche bei Verwendung von 1 l Wasser die Temperatur der Lösung um etwa 50° steigert. Nach genauen Messungen entstehen bei diesem chemischen Proceſs 50 100 Grammkalorien Wärme, welche ein ganz bestimmtes Energiequantum repräsentiren. Wenn das Gesetz von der Constanz der Energie gelten soll, so muſs diese als Wärme auftretende Energiemenge vorher in irgend einer anderen Form bestanden haben. Aehnliche Wärmeproductionen oder auch Wärmeabsorptionen findet man mit den allermeisten chemischen Processen Hand in Hand gehend; sie führen uns zu der Conception des Begriffes einer besonderen Energieform — der chemischen Energie. Wir müssen (um bei unserem Beispiel zu bleiben) annehmen, daſs die Zusammenstellung $Zn + CuSO_4$, also 65,5 gr Zink in Berührung mit 159,3 gr gelöstem Kupfersulfat einen Gehalt an chemischer Energie besitzt, welcher um 50100 Grammkalorien gröſser ist, als die chemische Energie der Zusammenstellung $Cu + ZnSO_4$, d. h. 63,3 gr Kupfer in Berührung mit 161,5 gr Zinksulfat in Lösung.

Diese Einführung der chemischen Energie drückt aber zunächst nur den Wunsch aus, das Energieprincip auf das Gebiet der chemischen Reactionen auszudehnen; einen realen Inhalt erhält der neue Begriff erst dadurch, daſs man denselben als ein unveränder-

liches Quantum einer jeden chemischen Verbindung für sich erkennt. Die freiwerdenden oder verschwindenden Wärmemengen bei chemischen Reactionen hängen nun thatsächlich nur von der anfänglichen und der schliefslichen Zusammenstellung der Stoffe ab, sind aber stets unabhängig gefunden worden von dem Weg und den Mitteln oder Zwischenstufen, durch welche man den Procefs leitet. Dieses Gesetz ist durch zahlreiche calorimetrische Messungen bestätigt worden, die ersten rühren von G. H. Hess (um 1840) her, den man als den Begründer der systematischen Thermochemie ansehen mufs.

Dieselbe Energiemenge, welche in dem rein chemischen Procefs als Wärme auftrat, müssen wir auch erhalten, wenn in dem Daniell-Elemente die gleiche Menge von Kupfer ausgeschieden worden ist. Wenn wir den Kupfer- und Zinkpol durch einen einfachen Metalldraht aufserhalb des Elementes verbinden, so erhalten wir auch in diesem Falle die gesammte freiwerdende Energie als Wärme, freilich nicht allein in dem Elemente, sondern wir bemerken auch eine Erwärmung des verbindenden Drahtes, die Wärme entsteht also in dieser Anordnung an einer räumlich von dem chemischen Procefs verschiedenen Stelle. Wie sich die Wärmeproduktion dabei in dem ganzen Apparate vertheilt und wie schnell dieselbe vor sich geht, hängt ganz von der speciellen Einrichtung desselben ab; die mefsbaren Eigenschaften, welche darauf Einfluſs haben, nennt man die galvanischen Widerstände des Elementes und der Drahtleitung. Nimmt man zur Verbindung einen kurzen und dicken Kupferdraht, so wird der allergröfste Theil der Wärme in den Flüssigkeiten des Elementes selbst in Freiheit gesetzt. Wählt man aber einen langen, dünnen Platin- oder Neusilberdraht, so wird der gröfste Theil der Wärme in diesem Drahte selbst erzeugt. Sehr dünne, kurze Platindrähte können bis zum Glühen erhitzt werden, und auch Kohlenfäden, welche ebenfalls wie Metalldrähte wirken, strahlen dabei dauernd helles Licht aus, wenn man dieselben nur durch Abschluſs der Luft vor Verbrennung schützt (Elektrische Glühlampen). Solche Metalldrähte müssen sich also, nach dieser merkwürdigen Wärmeerzeugung zu schliefsen, in einem besonderen Zustande befinden; man sagt, es fliefst ein elektrischer Strom in ihnen, und erklärt sich diesen Zustand dadurch, daſs man annimmt, es gingen dauernd sehr bedeutende Mengen positiver Elektricität in der Richtung vom Kupfer zum Zink durch denselben hindurch, eventuell auch gleichgroſse Mengen negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung. Mit allen diesen Auslegungen haben wir hier nichts weiter zu thun,

wir führen dieselben nur an, um den Namen elektrokinetische Energie zu erklären, d. h. Energie der in Bewegung befindlichen Elektricität. Die im DANIELL'schen Elemente verschwindende chemische Energie setzt sich in elektrokinetische Energie um, und diese setzt sich in dem Leitungsdraht in Wärme um. Die Erwärmung ist aber nicht die einzige Wirkung des elektrischen Stromes. Die von demselben durchflossenen Drähte vermögen andere stromleitende Drähte, wenn sie beweglich sind, nach bestimmten Gesetzen zu bewegen, die Ströme lenken Magnetnadeln ab, so dafs diese sich quer gegen den Draht stellen, ja sie sind im Stande Magnete in dauernde Bewegung zu setzen, wie wir das an der kleinen in Fig. 11 skizzirten Maschine bemerkten. Es gehen also von den Stromleitern Kräfte aus, welche auf gewisse dafür empfängliche Gebilde, wie Magnetpole, beschleunigend wirken, und dadurch im Stande sind Arbeit zu leisten, in der Darstellung von Beispiel 4 liefsen wir z. B. ein Gewicht dadurch in die Höhe winden.

Das Gesetz von der Erhaltung der Energie bewahrheitet sich dabei in der Weise, dafs die Summe der geleisteten Arbeit, der kinetischen Energie der rotirenden Stahlmassen der Magnete (und der anderen bewegten Theile des Apparates) und der in dem Stromkreise erzeugten Wärme gleich ist der im Elemente freiwerdenden chemischen Energie. Die Stromwärme allein mufs dabei also kleiner sein, als dies ohne äufsere Arbeitsleistung der Fall sein würde; dies findet auch seine volle Erklärung in dem Umstand, dafs die um den Stromleiter rotirenden Magnetpole den elektrischen Strom schwächen durch Erzeugung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Gegenstroms. Ganz vermeiden läfst sich indessen diese Erwärmung niemals, man gewinnt im günstigsten Falle die Hälfte der chemischen Energie in der Form mechanischer Arbeit, der andere Theil wird auch in diesem Falle in Wärme umgesetzt. Man kann diesen eben erwähnten Gegenstrom auch für sich allein erhalten. Wir entfernen zu diesem Zwecke in der durch Fig. 11 gegebenen Anordnung das DANIELL-Element und den Faden F nebst dem Gewichte M. Setzt man dann durch einen äufseren Eingriff die Magnetstäbe in eine schnell rotirende Bewegung von derselben Richtung, so werden diese bei der verschwindend kleinen Axenreibung sehr lange mit unverminderter Geschwindigkeit umlaufen, es findet dann keine Verwandelung der ihnen ertheilten kinetischen Energie in andere Energieformen statt. Bringt man aber gleichzeitig die freien Enden der beiden Drähte D und D' in Berührung mit einander, so kommen die rotirenden Magnete sehr bald zur

Ruhe; ihre kinetische Energie wird in elektrokinetische Energie verwandelt, der geschlossene metallische Kreis weist einen elektrischen Strom auf, welcher ganz dieselben charakteristischen Eigenschaften aufweist, wie der durch das galvanische Element erzeugte; die Leitung wird erwärmt, auch wird eine Magnetnadel in der Nähe des Drahtes quer gestellt, die Ablenkung erfolgt aber jetzt in entgegengesetzter Richtung; wir schliefsen daraus, dafs dieser Strom die entgegengesetzte Richtung besitzt, als der durch die ungefiederten Pfeile in Fig. 11 angedeutete. Die Bewegung der Magnete hört dabei, wie schon gesagt, bald auf, zugleich auch diese Stromerzeugung. Will man die Rotation ungeschwächt aufrecht erhalten, so mufs man von aufsen dauernd Arbeit zuführen; man mufs die Magnete drehen, entweder durch eine Kurbel mit der Kraft unseres Armes, oder durch eine Kraftmaschine, etwa eine Mühle, in welcher ein fallendes Gewicht — Wassermassen — Arbeit leisten. Dann erhält man auch einen dauernden elektrischen Strom in der Leitung. Die mechanische Arbeit wird dabei durch Vermittelung der um den Stromleiter rotirenden Magnetpole in elektrokinetische Energie umgesetzt. Das beschriebene Maschinchen ist zwar nicht geeignet, grofse Arbeitsquanta zu verbrauchen und starke Ströme zu liefern, dasselbe wurde aber auch nur seiner Durchsichtigkeit wegen in dieser einfachen Form beschrieben. Das Princip ist ganz dasselbe, nach welchem in der modernen Technik durch die sogenannten Dynamo-Maschinen kolossale Quanta von mechanischer Arbeit in elektrokinetische Energie umgesetzt werden. Man sieht bei letzteren von der Verwendung permanenter Stahlmagnete ganz ab, verwendet vielmehr weiches Eisen, welches durch Drahtumwickelungen, die von den erzeugten Strömen selbst durchflossen werden, sehr stark magnetisch wird.

Kurz erwähnt möge zum Schlufs noch werden, dafs elektrokinetische Energie auch direct in chemische Energie verwandelt werden kann. Schaltet man in einen Stromkreis eine Strecke Wasser ein, welches um besser leitend zu werden, ein wenig angesäuert ist, so wird dasselbe in Wasserstoff und Sauerstoff gespalten. Diese Gasmischung verbrennt unter starker Wärmeproduction zu Wasser, ein Beweis, dafs erstere einen gröfseren Inhalt an chemischer Energie besitzt, als das Wasser, aus welchem sie entstand. Es ist auch gelungen, diese chemische Energie in einer Art von Verbindungen zu gewinnen, die nicht durch Verbrennung ihre Energie wieder abgeben, sondern rückwärts Ströme erzeugen können in derselben Art, wie dies im DANIELL-Element geschieht. Es sind

dies die Accumulatoren; diese speichern einen Theil der in sie hineingesteckten elektrokinetischen Energie in Form von chemischer Energie auf, um ihn später, wenn sie als galvanische Elemente benutzt werden, wieder in elektrokinetische Energie zurückzuverwandeln.

Man könnte diese Beispiele von Verwandelungen der verschiedenen Energieformen in einander noch beliebig häufen, doch können wir nach dem Angeführten bereits übersehen, daſs das Gesetz von der Unzerstörbarkeit und Unerschaffbarkeit der Energie alle Erscheinungen der Natur als ein allgemeines Princip beherrscht. Wir haben uns auf Phänomene der unbelebten Natur beschränkt, aber auch die Lebenserscheinungen in Pflanze und Thier, welche über das Gebiet rein physikalischer Forschung hinausgehen, sind nicht aus dem Rahmen dieses Gesetzes auszuschlieſsen. Wo wir dabei auch auf Energiegröſsen stoſsen, folgen dieselben demselben Gesetze. Im Pflanzenreiche haben wir es hauptsächlich mit der Umwandelung von Wärme und Strahlungsenergie (Sonnenlicht) in chemische Energie zu thun, es werden verbrennbare kohlen- und wasserstoffreiche Producte erzeugt, welche den Thieren zur Nahrung dienen, im Thierreiche haben wir Umsetzung dieser chemischen Energie in Wärme und mechanische Arbeit vor uns.

Man hat es unternommen, die nicht mechanischen Energieformen durch hypothetische Vorstellungen auf die rein mechanischen als Urformen zurückzuführen. So erklärt man die Wärme als kinetische Energie der kleinsten Theilchen der Materie, namentlich in der Gastheorie ist diese Vorstellung mit ihren Consequenzen zu einer hohen Ausbildung gekommen. Auch die chemische Energie wird als potentielle Energie specifischer Anziehungskräfte — der Verwandtschaftskräfte der verschiedenen Stoffe zu einander — erklärt, welche zwar erst bei minimalen Entfernungen in Wirkung treten, dann aber Arbeit leisten, die angezogenen Atome beschleunigen und dadurch bei der Vereinigung heftige Bewegung der kleinsten Theilchen, d. h. Wärme erzeugen. Derartige Vorstellungen sind wegen ihrer Anschaulichkeit sehr nützlich, dürfen aber wegen ihres hypothetischen Charakters nicht mit dem Inhalte des Energieprincips vermengt werden. Dieses Princip steht als ein bis jetzt überall bestätigter Erfahrungssatz über diesen Hypothesen und kann diese Veranschaulichungen entbehren.

Die in diesem Paragraphen gegebenen Auseinandersetzungen sollten in vorbereitender Weise einen Ueberblick geben über die umfassende Bedeutung des Energieprincips; wir muſsten dabei über

den besonderen Stoff dieses Bandes hinausgehen; im folgenden wollen wir uns nun wieder auf dynamische Verhältnisse unter der Wirkung conservativer, reiner Bewegungskräfte beschränken, für welche die Energie vollständig als die Summe von kinetischer und potentieller Energie definirt ist.

Dritter Abschnitt.

Anwendung. Die Bewegungen der Himmelskörper.

§ 53. Newton's Gravitationsgesetz.

In diesem Abschnitte soll an einem Beispiele gezeigt werden, wie sich die in den beiden vorhergehenden Abschnitten entwickelten allgemeinen Principien zur Auflösung besonderer Aufgaben verwenden lassen. Wir fanden bei der Betrachtung der in einem freien Massensysteme unter der Wirkung innerer conservativer Kräfte stattfindenden Bewegungen drei fundamentale Gesetze: Die Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, die Erhaltung des Hauptrotationsmomentes der Bewegungen und seiner invariabelen Ebene und die Erhaltung der Energie. Diese Gesetze wurden aus den NEWTON'schen Bewegungsgleichungen [Gleichung (89) S. 147] abgeleitet durch drei verschiedene Arten von Integration, welche in allen Fällen ausgeführt werden können, ohne auf die specielle Natur der wirkenden Kräfte dabei einzugehen, wenn letztere nur dem Reactionsprincip folgen und conservativ sind. Diese Integralgleichungen, welche die drei genannten Gesetze aussprechen, bringen gewisse Integrationsconstanten mit sich: Die gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes liefert deren sechs, nämlich die drei Coordinaten des Ortes, an welchem der Schwerpunkt im Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ liegt und die drei unveränderlichen Componenten seiner Geschwindigkeit im Raume. Die Erhaltung des Hauptrotationsmomentes liefert drei Constanten, als welche man entweder die Momente um die drei Coordinataxen ansehen kann, wie dies in Gleichung (94) S. 160 geschehen ist, oder aber die Gröfse des Hauptrotationsmomentes und die beiden Winkelbestimmungen, welche nöthig sind, um die Richtung der invariabelen Ebene im Raume

festzulegen. Das Energieprincip endlich liefert eine Constante — die Energie des Systems. Zusammengenommen sind dies 10 Integrationsconstanten, welche durch den Anfangszustand des Massensystems bestimmt sind. Die Integration der Differentialgleichungen, in welchen die Beschleunigungen der einzelnen Massenpunkte, also die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten vorkommen, ist aber durch die Benutzung dieser drei Gesetze nicht vollendet, denn sowohl in den Rotationsmomenten, wie auch in dem kinetischen Theile der Energie kommen noch die Geschwindigkeiten, d. h. die ersten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit vor. Diese noch übrig bleibenden Integrationen mufs man bei jedem einzelnen Problem unter Benutzung der besonderen Natur der wirkenden Kräfte auszuführen suchen, eine Aufgabe, deren Lösung bis jetzt nur bei wenigen, besonders einfachen Problemen gelungen ist.

Ein solches lösbares Problem wollen wir im folgenden behandeln — das sogenannte Zwei-Körper-Problem. Dieses fragt nach der Bewegung eines freien Systems von nur zwei Massenpunkten, zwischen denen eine centrale Anziehungskraft wirkt, deren Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat des jeweiligen Abstandes der beiden Massenpunkte variirt. Diese Anziehungskraft zwischen zwei Massen ist nicht eine mathematische Fiction, sondern ein überall, wo Massen in der Natur vorkommen, in gleicher Weise beobachtetes Phänomen. Das will sagen, Phänomen sind die Bewegungen, welche die Massen zeigen: die Fallbewegung oder für willkürlichen Anfangszustand die Wurfbewegung der irdischen Massen in der Nähe der Erde, die Bewegung der Monde, der Planeten und der Doppelsternsysteme. Alle diese Bewegungen lassen sich erklären und aufs genaueste vorher berechnen durch die Annahme einer allgemeinen Anziehungskraft von dem angeführten Typus; zwischen Massenpunkten von verschiedener Gröfse hat sich diese Kraft als durchaus proportional herausgestellt dem Quantum an träger Masse sowohl des einen wie des anderen Punktes, zwischen denen die Wirkung betrachtet wird. Die vollkommene Proportionalität zwischen Masse und Gewicht ist eine einzelne Aeufserung dieses Gesetzes, denn die Schwerkraft erklärt sich als die Anziehung der Erdmasse auf die Massen in ihrer Nähe. Danach kann man die Anziehungskraft K, welche zwischen den Massenpunkten m_1 und m_2 wirkt, wenn diese sich im Abstand r von einander befinden, darstellen durch folgenden Ausdruck:

$$K = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{128}$$

Diese Gleichung spricht das von NEWTON gefundene Gesetz der allgemeinen Massenanziehung oder Gravitation aus. Das Minuszeichen soll nur symbolisch andeuten, dafs es sich um eine Kraft handelt, welche r zu verkleinern strebt, ihre Intensität ist durch den absoluten Betrag gegeben, ihre Richtung ist für m_1 und m_2 die entgegengesetzte und fällt in die Verbindungslinie r hinein. Der Proportionalitätsfactor G, welcher zur Herstellung der Gleichheit beider Seiten der vorstehenden Gleichung hinzugefügt werden mufste, stellt eine für das gesammte Weltall unveränderliche Gröfse dar, deren Werth durch die schwierige experimentelle Messung der Kraft zwischen bekannten Massen gefunden werden mufs und, seit der Aufstellung dieses Gesetzes, vielfach nach verschiedenen Methoden mit immer gröfserer Genauigkeit bestimmt worden ist. Nach den zuverlässigsten modernen Messungen hat man den Zahlenwerth dieser Gravitationsconstante G im (C.-G.-S.)-System, in welchem die Kraft in Dynen (gr-cm-sec^{-2}), die Massen in Gramm, die Entfernung in Centimetern gemessen wird, zu setzen sehr nahe an:

$$G = \tfrac{2}{3} \times 10^{-7} (\mathrm{cm}^3 . \mathrm{gr}^{-1} . \mathrm{sec}^{-2}) \qquad (129)$$

NEWTON bewies die Richtigkeit des von ihm aufgefundenen Elementargesetzes dadurch, dafs es ihm gelang, die Planetenbewegungen, für welche KEPLER drei empirische Gesetze aufgefunden hatte, denen wir nachher begegnen werden, aus seinem Gesetze zu entwickeln. Die Identität der irdischen Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation konnte er nachweisen durch den Vergleich der Beschleunigung der fallenden Körper an der Erdoberfläche mit der Beschleunigung, welche unser Mond bei seiner nahezu kreisförmigen Bewegung von seinem Centralkörper, der Erde, her erfährt.

Es ist dabei aber zu berücksichtigen, dafs das Gravitationsgesetz, wie es in Gleichung (128) dargestellt ist, sich auf zwei ausdehnungslose Massenpunkte bezieht. Die Himmelskörper sind aber ausgedehnte Massen; zwar ist deren Abstand von einander fast immer so bedeutend, dafs gegen diese Entfernungen ihre Dimensionen völlig verschwinden, also die Betrachtung derselben als Massenpunkte in den allermeisten Fällen völlig gerechtfertigt erscheint; aber schon bei der Wirkung zwischen Erde und Mond ist diese Annahme streng nicht mehr zulässig, da der Abstand der beiden nur etwa 60 Erdradien beträgt; für die Bewegung geworfener oder fallender irdischer Körper gar können wir diese vereinfachte Vorstellung von der Erde überhaupt direct gar nicht anwenden.

Die anziehende Kraft einer ausgedehnten Masse auf einen einzelnen Massenpunkt ist, wegen der ungestörten Superposition der Wirkungen, die (geometrische) Summe aller Elementarkräfte, welche von den kleinsten Theilchen der Masse ausgehen; man kann die resultirende Kraft also durch eine Integration über den ausgedehnten Körper in der Idee stets finden. Bei gewissen einfachen Körperformen und Massenverteilungen in ihrem Inneren kann man diese Integration analytisch ausführen; zu diesen Fällen gehört auch die Gestalt der Weltkörper, deren Wechselwirkung uns hier gerade beschäftigt. Man hat allen Grund die Weltkörper (mit sehr grofser Annäherung an die wirkliche Form) zu betrachten als Kugeln, deren Massenfüllung in concentrischen Schichten um den Mittelpunkt herum gleichmäfsig vertheilt ist; die weiteren Complicationen, welche aus der an Sonne und Planeten beobachteten Abplattung entspringen, wollen wir wenigstens hier bei Seite lassen.

Um die Anziehung einer Kugel von der beschriebenen Massenverteilung zu finden, müssen wir uns dieselbe zusammengesetzt denken aus lauter dünnen Schalen, im Inneren jeder einzelnen von diesen kann man dann die Masse gleichmäfsig (homogen) vertheilt annehmen. Zuerst wollen wir die Anziehung einer einzelnen Schale berechnen; ihr Radius sei ϱ, ihre sehr geringe Dicke δ; der angezogene Massenpunkt m habe den Abstand l vom Kugelcentrum. In Fig. 12 ist ein Meridianschnitt dieses Massensystems gezeichnet,

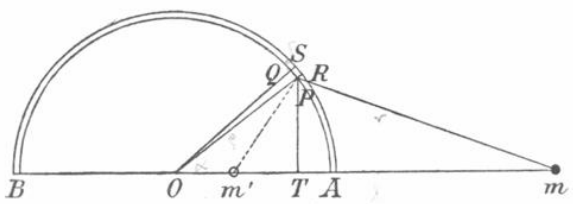

Fig. 12.

dessen räumliche Gestalt man durch eine volle Umdrehung der Figur um die Axe Om erhält. Wir führen Polarcoordinaten ein, der Anfangspunkt sei das Kugelcentrum O, die Axe sei Om, die beiden Pole der Kugel sind A und B, ein Punkt P der Schale wird bestimmt durch die Poldistanz $\sphericalangle AOP = \alpha$. Ob man die Punkte A, B, P auf der inneren oder äufseren Oberfläche der Schale annimmt, ist wegen der verschwindenden Dicke $PR = \delta$ gleichgültig. Der zweite Coordinatenwinkel, der Längenwinkel λ kann im Meridianschnitt nicht gezeichnet werden, derselbe giebt die Drehung um die Axe Om

an, geht also aus der Ebene der Figur heraus. Mit Hülfe dieser Abmessungen wollen wir die Kugelschale in kleinste Volumelemente zerschneiden. Wählen wir einen bestimmten Punkt P, dessen Lage durch die Winkel α und λ angegeben ist, ertheilen α einen kleinen Zuwachs $d\alpha$, und λ einen Zuwachs $d\lambda$. Dadurch wird aus der Schale ein kleines, durchaus rechtwinkeliges Volumen herausgeschnitten, als dessen Grundfläche das Rechteck $PQSR$ erscheint. Die Fläche desselben ist $PR \times PQ = \delta . \varrho\, d\alpha$. Die Höhe des Körperelementes, welche senkrecht auf dem Papier steht, wird gebildet durch den Weg, welchen der Punkt P beschreibt, bei einer Drehung um $d\lambda$. Der Abstand desselben von der Drehaxe ist $PT = \varrho . \sin\alpha$, also ist dieser Weg $\varrho . \sin\alpha . d\lambda$, und das Volumelement ist gegeben durch:

$$dV = \delta . \varrho^2 . \sin\alpha . d\alpha . d\lambda.$$

Das Volumen der ganzen Schale ist:

$$V = \delta . 4\pi\varrho^2.$$

Da wir nun annehmen, dafs die gesammte Masse M, welche in der Schale steckt, homogen vertheilt ist, so mufs die in dem Element dV herausgeschnittene Masse dM sich zu M verhalten wie dV sich zu V verhält:

$$dM : M = dV : V.$$

Daraus folgt unter Benutzung der vorstehenden Ausdrücke:

$$dM = \frac{M}{4\pi} \sin\alpha . d\alpha . d\lambda.$$

Dieses Massenelement kann nun in seinen Wirkungen auf m als Massenpunkt betrachtet werden, welcher in P liegt. Bezeichnet man also die Entfernung Pm mit r, so ist die Anziehungskraft desselben

$$dK = -G\frac{m . dM}{r^2}$$

in der Richtung von r. Dieses r hat aber für die verschiedenen Volumelemente der Kugelschale verschiedene Richtung, die Addition der Kräfte aller Theile der Kugelschale ist eine geometrische, die rechnerische Ausführung würde die Zerlegung von dK in Componenten von fester Richtung verlangen. Kürzer kommt man zum Ziel, wenn man an die Bemerkung denkt, welche wir am Schlusse des § 49 (S. 201) machten, und deshalb die potentielle Energie $d\Phi$

bildet, welche, zwischen dM und m besteht. Diese ist nach Gleichung 119 (S. 199):

$$d\Phi = -\int_{(r)}(dK).dr = -G\frac{m.dM}{r} + \text{const.}$$

Auf den Werth der additiven Constante kommt es in der folgenden Rechnung nicht an, wir wollen dieselbe der Einfachheit wegen gleich Null setzen; dann ist $d\Phi$ als eine wesentlich negative Form charakterisirt, weil r stets als absolute Gröfse angesehen werden soll. Die gesammte potentielle Energie zwischen der Kugelschale und dem Punkt m findet man durch eine einfache algebraische Summirung sämmtlicher $d\Phi$, also durch Integration des Ausdrucks:

$$d\Phi = -G\frac{m.dM}{r} = -G\frac{mM}{4\pi}\cdot\frac{\sin\alpha.d\alpha.d\lambda}{r} \qquad (130)$$

über die ganze Kugelschale. Die Grenzen von λ werden dabei 0 und 2π, die Grenzen von α aber 0 und π. Die Entfernung r läfst sich ausdrücken durch den Winkel α; aus der Betrachtung des Dreiecks mOP folgt:

$$r = +\sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho\cos\alpha}. \qquad (130a)$$

Umgekehrt läfst sich auch der in dem Ausdruck für $d\Phi$ auftretende Complex $\sin\alpha.d\alpha$ durch r darstellen. Wir brauchen zu diesem Zwecke von dem vorstehenden Ausdruck r nur das Differential zu bilden. Es ist

$$dr = \frac{-2l\varrho.d(\cos\alpha)}{2.\sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho\cos\alpha}} = l\cdot\varrho\cdot\frac{\sin\alpha.d\alpha}{r}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha.d\alpha}{r} = \frac{1}{l.\varrho}dr. \qquad (130b)$$

Führen wir nun dr an Stelle von $d\alpha$ in Gleichung (130) ein, so finden wir;

$$d\Phi = -G\frac{mM}{l.\varrho}\cdot\frac{d\lambda}{4\pi}\cdot dr \qquad (130c)$$

Der unteren Grenze $\alpha = 0$ entspricht $r_0 = mA$, der oberen Grenze $\alpha = \pi$ entspricht $r_\pi = mB$; beide Grenzwerthe im absoluten Werthe genommen. Von actuellem Interesse für die hier behandelte Frage ist nur der Fall, dafs der Punkt m aufserhalb der Kugelschale liegt,

daſs also $l > \varrho$ ist. Dann stellen sich die beiden Grenzen von r folgendermaſsen dar:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= m\,A = l - \varrho \\ r_\pi &= m\,B = l + \varrho \end{aligned}\right\} \qquad (131\,\mathrm{a})$$

Wir können aber gleichzeitig bei dieser Gelegenheit den in anderen Problemen interessirenden Fall mitbehandeln, daſs der Punkt m im Inneren der Kugelschale liegt, etwa an der Stelle m' (Fig. 12). Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= m'\,A = \varrho - l \\ r_\pi &= m'\,B = \varrho + l \end{aligned}\right\} \qquad (131\,\mathrm{i})$$

Das Integral Φ ist nun aus dem Differential $d\,\Phi$ in Gleichung (130 c) ohne jede Rechnung abzuleiten, da λ und r nur als Differentiale in diesem Ausdruck vorkommen:

$$\Phi = -\,G\frac{m\,.\,M}{l\,.\,\varrho}\cdot\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda\,.\int_{r_0}^{r_\pi} dr$$

$$= -\,G\frac{m\,.\,M}{l\,.\,\varrho}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot(r_\pi - r_0).$$

Für einen äuſseren angezogenen Punkt wird nach (131 a) $r_\pi - r_0 = 2\varrho$, für einen inneren nach (131 i) $r_\pi - r_0 = 2l$. Bezeichnen wir die potentielle Energie für diese beiden Möglichkeiten durch Φ_a (aufsen) und Φ_i (innen), so finden wir:

$$\Phi_a = -\,G\cdot\frac{m\,.\,M}{l} \qquad (132\,\mathrm{a})$$

$$\Phi_i = -\,G\cdot\frac{m\,.\,M}{\varrho} \qquad (132\,\mathrm{i})$$

Man sieht hieraus, daſs Φ_i unabhängig von l, α und λ ist, d. h. denselben Werth giebt für alle Lagen des Punktes im Hohlraum der Schale. Φ hat daher in dem inneren Raume nirgends ein Gefälle, sondern ist constant, folglich muſs die auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft gleich Null sein: die von den verschiedenen Theilen der Schale ausgeübten Anziehungskräfte vernichten sich gegenseitig.

Für eine äuſsere Lage von m dagegen finden wir in Φ_a einen Ausdruck, welcher (abgesehen von der gleichgültigen additiven Constante, die wir fortgelassen haben) identisch ist mit der potentiellen Energie zwischen einem in O liegend gedachten Massenpunkt M und

dem Punkte m. Daraus folgt der wichtige Satz, dafs die Anziehung einer homogenen Kugelschale auf einen äufseren Massenpunkt ebenso grofs ist, als sie sein würde, wenn die gesammte Masse der Schale im Mittelpunkt concentrirt wäre. Gehen wir nun einen Schritt weiter und denken uns eine Vollkugel, welche aus lauter solchen homogenen Schichten zusammengesetzt ist. Dann werden sich die von den einzelnen Schalen ausgehenden Kräfte superponiren, die gesammte Attraction ist dann dieselbe, als wäre die Masse der ganzen Kugel in ihrem Mittelpunkt concentrirt.

Durch diese Betrachtung ist die Anziehung einer homogenschichtigen Kugel zurückgeführt auf die eines Massenpunktes im Centrum der Kugel und die directe Anwendung des NEWTON'schen Attractionsgesetzes in seiner elementaren Gestalt auch in diesen Fällen gerechtfertigt. Denken wir uns an Stelle des Punktes m ebenfalls eine Kugel, so können wir für diese dieselbe Betrachtung durchführen. Die Anziehung zwischen zwei Kugeln ist dieselbe wie zwischen zwei Massenpunkten, die in den Kugelcentren liegend gedacht werden.

§ 54. Differentialgleichungen des Zwei-Körper-Problems. Anwendung der 10 Integrationen.

Nachdem wir das Gesetz der allgemeinen Massenanziehung kennen gelernt haben, wollen wir zur Behandlung des Zwei-Körper-Problems schreiten. Die beiden punktförmigen oder kugelförmigen Weltkörper seien bezeichnet durch die Werthe ihrer Massen m_1 und m_2; ihre Orte, auf ein festes Coordinatensystem bezogen, seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2; der absolute Werth ihres Abstandes ist dann:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (133)$$

Die Anziehungskraft K ist gegeben durch Gleichung (128). Die Differentialgleichungen des Problems findet man, indem man in die allgemeinen Bewegungsgleichungen die Componenten der Gravitationskraft K einsetzt. Letztere findet man durch Multiplication von K mit den Cosinus der Winkel, welche r mit den Coordinataxen bildet. Denken wir uns einmal, um eine feste Vorstellung zu fassen, die Coordinaten von m_1 alle kleiner, als die von m_2, so werden die Cosinus der Richtung, welche von m_1 nach m_2 zeigt, nämlich:

$$\frac{x_2 - x_1}{r}, \qquad \frac{y_2 - y_1}{r}, \qquad \frac{z_2 - z_1}{r}$$

alle positiv sein, während die Cosinus der von m_2 nach m_1 gehenden Richtung ihnen entgegengesetzt gleich also negativ werden. Die Componenten der auf m_1 wirkenden Kraft streben dann auch alle Coordinaten x_1, y_1, z_1 zu vergrößern, d. h. X_1, Y_1, Z_1 sind dann positiv, während X_2, Y_2, Z_2 negativ werden, weil sie die Coordinaten von m_2 zu verkleinern streben. Da wir nun einmal K in Gleichung (128) als Anziehungskraft durch ein negatives Vorzeichen symbolisch bezeichnet haben, so müssen wir nun setzen:

$$X_1 = -K \cdot \frac{x_2 - x_1}{r} \text{ etc.} \quad \text{und} \quad X_2 = -K \cdot \frac{x_1 - x_2}{r}$$

oder nach Einsetzung des Betrages von K

$$X_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r} \quad \text{und} \quad X_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r}.$$

Da nun nach der Newton'schen Kraftdefinition

$$X_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \text{ etc.} \quad \text{und} \quad X_2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \text{ etc.}$$

ist, erhalten wir nach Wegheben gemeinsamer Factoren m folgende 6 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für unser Problem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= G m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3} & \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= G m_1 \frac{x_1 - x_2}{r^3} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= G m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3} & \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= G m_1 \frac{y_1 - y_2}{r^3} \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= G m_2 \frac{z_2 - z_1}{r^3} & \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= G m_1 \frac{z_1 - z_2}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

in denen für r der Werth aus Gleichung (133) zu setzen ist.

Der Anfangszustand dieses Systems ist bestimmt durch die Anfangsorte von m_1 und m_2, d. h. durch zweimal drei Coordinaten und durch die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden, d. h. durch zweimal drei Geschwindigkeitscomponenten. Im Ganzen bringt also der Anfangszustand 12 vorgeschriebene Größen in die Rechnung hinein, welche den Differentialgleichungen fremd sind. Ebenso viele disponible Integrationsconstanten liefert auch die Integration der sechs zweiten Differentialquotienten. Nun wissen wir, daſs man zehn von diesen letzteren aus den drei Erhaltungsgesetzen herleiten kann, und man übersieht sofort, daſs schlieſslich noch zwei Constanten zu suchen übrig bleiben, deren Bedeutung diesem besonderen Problem

eigenthümlich ist. Dafs man dieselben finden kann durch zwei besondere Integrationen, werden wir nachher sehen, aber bereits bei dem ganz analogen Problem dreier Körper ist es mit unseren jetzigen analytischen Hülfsmitteln nicht gelungen eine vollständige Integration auszuführen. Das Drei-Körper-Problem kann nur unter bestimmten vereinfachenden Annahmen näherungsweise gelöst werden, so z. B. bei der Berechnung der Störungen, welche der Lauf eines Planeten um die Sonne erfährt durch die Anwesenheit eines anderen Planeten, weil dabei die Anziehung des störenden Planeten als sehr klein gegen die Anziehung der Sonne zu betrachten ist.

Wir wollen jetzt die 10 Integrationsconstanten, welche uns sicher sind, aus den Anfangsdaten ableiten. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich m_1 an einem Ort, dessen Coordinaten sind:

$$a_1,\ b_1,\ c_1,$$

die Geschwindigkeit desselben habe die Componenten:

$$u_1,\ v_1,\ w_1.$$

In gleicher Weise gelten für den Punkt m_2 die vorgeschriebenen Werthe:

$$a_2,\ b_2,\ c_2,$$

$$u_2,\ v_2,\ w_2.$$

Der Anfangsort des Schwerpunktes $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0)$ ist nach Gleichungen (88) (S. 144):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_0 &= \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \\ \mathfrak{y}_0 &= \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} \\ \mathfrak{z}_0 &= \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

Die während der folgenden Bewegung unverändert bleibenden Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \\ \mathfrak{v} &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ \mathfrak{w} &= \frac{m_1 w_1 + m_2 w_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (135a)$$

Die auf die Coordinataxen bezogenen Rotationsmomente (A, B, C), welche ebenfalls während des ganzen Verlaufes bewahrt bleiben, sind nach Gleichung (94) (S. 160):

$$\left.\begin{aligned} A &= m_1 (w_1 b_1 - v_1 c_1) + m_2 (w_2 b_2 - v_2 c_2) \\ B &= m_1 (u_1 c_1 - w_1 a_1) + m_2 (u_2 c_2 - w_2 a_2) \\ C &= m_1 (v_1 a_1 - u_1 b_1) + m_2 (v_2 a_2 - u_2 b_2) \end{aligned}\right\} \quad (135\,\mathrm{b})$$

Das Hauptrotationsmoment wird daraus gefunden

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (135\,\mathrm{c})$$

und die Axe desselben oder die Normale auf der invariabelen Ebene bildet mit den Coordinaten die Cosinus

$$\frac{A}{R}, \quad \frac{B}{R}, \quad \frac{C}{R}.$$

Die constant bleibende Energie E endlich setzt sich aus der im Anfangszustand vorhandenen kinetischen und potentiellen folgendermafsen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} E = {} & \tfrac{1}{2} m_1 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \tfrac{1}{2} m_2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \\ & - \frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}} + \text{const.} \end{aligned}\right\} \quad (135\,\mathrm{d})$$

Es ist also nach diesen Formeln (135) bis (135 d) stets leicht, die 10 Constanten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, A, B, C, E den Anfangsbedingungen anzupassen.

Man macht nun die weiteren Rechnungen kürzer und übersichtlicher, wenn man die Bewegungen der beiden Punkte nicht, wie wir bisher thaten, durch irgend ein festes Coordinatensystem ausdrückt, sondern indem man die erkannten Gesetze über den Schwerpunkt und die invariabele Ebene direct zur Aufstellung eines speciellen Axensystems benutzt; dieses soll nämlich seinen Anfangspunkt im Schwerpunkt haben und eine der Grundebenen (wir wählen die (x, y)-Ebene) soll mit der invariabelen Ebene zusammenfallen. Bei einem aus vielen Punkten zusammengesetzten Massensystem ist es nicht nöthig, dafs die einzelnen Punkte bei ihrer Bewegung alle in der durch den Schwerpunkt gelegten invariabelen Ebene bleiben; bei nur zwei Massenpunkten ist dies aber eine nothwendige Folge

der Erhaltung des Hauptrotationsmomentes, die Bewegung, die wir jetzt betrachten, wird also in der (x, y)-Ebene verlaufen, z bleibt zu allen Zeiten gleich Null. Dieses besondere Coordinatensystem wird wegen der Festheftung seines Anfangspunktes an den Schwerpunkt im Allgemeinen kein ruhendes, sondern ein gleichförmig im Raume fortrückendes sein, die Richtung der z-Axe ist als Axe des Hauptrotationsmomentes von unveränderlicher Richtung, dagegen ist die Richtung des (x, y)-Kreuzes noch unbestimmt. Wir wollen auch nur festsetzen, dafs diese beiden Richtungen unverändert bleiben, dafs also das Axensystem keinerlei Drehung um die z-Axe ausführt, sich vielmehr in einer einfachen Parallelverschiebung befindet. Durch diese specielle Wahl der Coordinaten werden von selbst 8 von den 12 Constanten des Problems beseitigt, nämlich die 6, welche sich auf den Schwerpunkt bezogen und die 2, welche sonst die Richtung der invariabelen Ebene angaben; es bleiben nur noch R (Gröfse des Rotationsmomentes) und E (Energie) übrig und die zwei besonderen Constanten dieses Problems.

§ 55. Das Flächengesetz.

Wir gehen nun zur weiteren Behandlung des vereinfachten Problems über. Nennen wir die in der invariabelen Ebene liegenden Radii vectores, welche die Abstände der Massen m_1 und m_2 vom Anfangs- und Schwerpunkt messen, r_1 und r_2, beide nach ihrem absoluten Betrage. Der Schwerpunkt zweier Massenpunkte liegt zwischen diesen auf der geraden Verbindungslinie, also müssen r_1 und r_2 stets nach diametral entgegengesetzten Richtungen zeigen, ihre Summe mifst den jeweiligen Abstand r zwischen m_1 und m_2, es ist also:

$$r = r_1 + r_2 \tag{136}$$

Dieses r ist eine Strecke, welche immer durch den Anfangspunkt hindurchgehen mufs, sie kann sich also nur um diesen Punkt drehen, wenn ihre Richtung sich während der Bewegung verändert. Auch das Gröfsenverhältnifs zwischen r_1 und r_2 mufs stets dasselbe bleiben, denn aus der Definition des Schwerpunktes folgt:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{136a}$$

Aus Gleichungen (136) und (136a) folgt dann:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned}\right\} \qquad (136\,\mathrm{b})$$

Die Bahnen der beiden Massenpunkte müssen hiernach, wenn man sie auf das von uns festgesetzte Coordinatensystem bezieht, geometrisch ähnliche und entgegengesetzt liegende Curven sein. In Fig. 13 sind zwei gleichzeitig durchlaufene Stücke der beiden Bahnen veranschaulicht, S ist der im Anfangspunkt liegende Schwerpunkt,

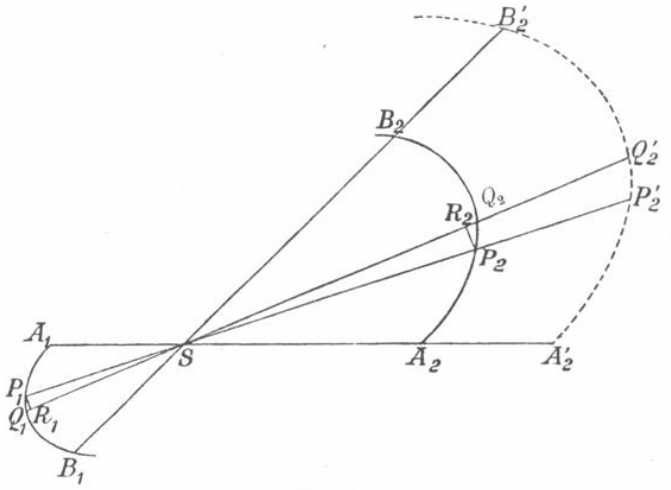

Fig. 13.

SA_2 soll die positive x-Axe darstellen. Wenn m_1 sich in A_1 befindet, so befindet sich m_2 in A_2, es werden dann gleichzeitig erreicht die Orte P_1 und P_2, Q_1 und Q_2, B_1 und B_2, lauter Punktpaare, welche den Bedingungen genügen, dafs ihre Verbindungslinie durch S geht, und dafs:

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SP_1}{SP_2} = \frac{SQ_1}{SQ_2} = \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ist. (In der Figur ist das Massenverhältnifs m_2/m_1 gleich $1/2$ angenommen worden.) Die Strecken A_1A_2, P_1P_2 etc. stellen einige Lagen und Gröfsen von r dar. Der veränderliche Winkel, welchen r, in der Richtung von m_1 nach m_2 hin, mit der positiven x-Axe bildet, soll mit ϑ bezeichnet werden, wenn also P_1P_2 eine beliebige Lage von r bedeutet, so ist:

$$\vartheta = \sphericalangle P_1 SA_1 = \sphericalangle P_2 SA_2.$$

Nach Verlauf einer verschwindend kleinen Zeit dt möge r übergegangen sein in die Lage $Q_1 Q_2$, dann ist der Zuwachs von ϑ, also $d\vartheta$, gegeben durch:

$$d\vartheta = \sphericalangle Q_1 S P_1 = \sphericalangle Q_2 S P_2,$$

während der Zuwachs von r_1

$$dr_1 = R_1 Q_1$$

und derjenige von r_2

$$dr_2 = R_2 Q_2$$

zu setzen ist. Die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher r sich dreht, ist $d\vartheta/dt$. Die Weggeschwindigkeiten der beiden Körper kann man zerlegen in je eine radiale Componente und je eine darauf senkrechte rotatorische Componente; erstere sind proportional den Strecken $R_1 Q_1$ und $R_2 Q_2$, letztere proportional $P_1 R_1$ und $P_2 R_2$. Die radialen Componenten haben die Werthe dr_1/dt und dr_2/dt, die rotatorischen sind $r_1 . d\vartheta/dt$ und $r_2 . d\vartheta/dt$. Der Richtung nach sind diejenigen für m_1 vom entgegengesetzten Vorzeichen wie die für m_2.

Will man nun das Rotationsmoment R des Systems bilden, so haben die radialen Componenten keinen Einfluſs, es sind nur die rotatorischen zu berücksichtigen [vergl. Gleichung (95) auf S. 161] und man erhält:

$$R = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \cdot \frac{d\vartheta}{dt},$$

oder wenn man nach Gleichungen (136b) r statt r_1 und r_2 einführt:

$$R = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \tag{137}$$

Führen wir an Stelle von R eine andere Constante R' ein durch die Gleichung:

$$R = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} R' \tag{137a}$$

so erhält die Gleichung, welche die Erhaltung des Rotationsmomentes ausspricht, die einfache Gestalt:

(I)
$$r^2 \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = R'. \tag{137b}$$

Die Dimensionen der Constanten sind:

$$\left.\begin{aligned} R &= [M L^2 T^{-1}] \\ R' &= [L^2 T^{-1}] \end{aligned}\right\} \tag{137c}$$

Denken wir uns unter m_1 und m_2 zwei benachbarte Weltkörper (ein Doppelsternsystem) im übrigens weit umher leeren Raume, nur umgeben von einem unendlich fernen Fixsternhimmel, dessen Anziehungen nicht mehr merkbar sind, der uns auch nur dazu helfen soll, feste Anhaltspunkte für Richtungen im Raume zu gewinnen. Dann werden weder die Bewohner von m_1 noch die von m_2 die absolute Bewegung ihres Wohnortes im Raume spüren, ja nicht einmal die Drehung um den gemeinsamen ruhend gedachten Schwerpunkt werden sie auffassen, es wird vielmehr beiden so erscheinen, als ruhten sie selbst, während der Nachbarkörper allein sich bewegt. Es werden also nur die relativen Lagenveränderungen wahrgenommen, welche ihren mathematischen Ausdruck in der Veränderung der Länge und Richtung von r finden. Denken wir uns auf den Körper m_1 versetzt, so können wir die Richtungsänderung von r, d. h. den Winkel ϑ, aus der Wanderung von m_2 am Fixsternhimmel ablesen, die Länge von r kann gemessen werden durch die Parallaxe von m_2, d. h. durch die perspectivische Verschiebung, welche die Ränder von m_2 am Sternhimmel erfahren, wenn man von zwei möglichst weit entfernten Beobachtungsorten auf der Kugel m_1 aus nach m_2 blickt. Wenn auch m_2 eine hinreichend ausgedehnte Kugel ist, kann man die verhältnifsmäfsigen Veränderungen von r auch aus dem Gesichtswinkel ableiten, unter welchem der Durchmesser von m_2 jeweilig erscheint. Jedenfalls sind r und ϑ die einzigen der Beobachtung zugänglichen Abmessungen; die invariabele Ebene tritt dadurch in die Erscheinung, dafs, von m_1 aus gesehen, die Orte von m_2 am Fixsternhimmel stets auf demselben gröfsten Kreise liegen. Die scheinbare Bahn von m_2, welche wir als Bewohner des in Ruhe gewähnten Körpers m_1 aus den soeben angeführten astronomischen Messungen von r und ϑ entwerfen würden, kann aus den beiden in Fig. 13 gezeichneten wahren Bahnen um den fest gedachten Schwerpunkt leicht gewonnen werden. Wir brauchen die Strecken, welche r darstellen, also beispielsweise $A_1 A_2$, nur in ihrer eigenen Richtung so weit zu verschieben, dafs der Punkt A_1 in S zu liegen kommt, dann rückt der Endpunkt A_2 bis nach A'_2. In gleicher Weise sind die Punkte P'_2, Q'_2, B'_2 gefunden, und können überhaupt alle Punkte der scheinbaren Bahn gefunden werden, welche in Fig. 13 durch die durchbrochene Curve angegeben ist. Dabei ist m_1 ruhend in S anzunehmen. Aus der Proportion:

$$r : r_1 : r_2 = (m_1 + m_2) : m_2 : m_1,$$

welche identisch ist mit den Gleichungen (136b) und welche aus-

sagt, daſs r stets in demselben Gröſsenverhältniſs zu r_1 und r_2 steht, folgt, daſs auch diese Curve $A'_2 B'_2$ geometrisch ähnlich den beiden anderen ist und zwar die gleiche Lage hat, wie $A_2 B_2$, da die Winkel ϑ entsprechender Punkte übereinstimmen.

Die vorstehende Hauptgleichung (I), welche die Erhaltung des Rotationsmomentes ausspricht, läſst eine sehr anschauliche Deutung zu, welche man das Flächengesetz nennt. Wir könnten uns auf die bereits in den §§ 42 und 43 aufgefundenen Beziehungen der Rotationsmomente zu gewissen Flächengröſsen berufen (Gleichungen (96), S. 162), doch ist der vorliegende Fall so durchsichtig, daſs wir ihn unabhängig von früherem leicht behandeln können. Zuerst betrachten wir die scheinbare Bahn, welche in Fig. 13 durchbrochen gezeichnet ist. Die schmale Dreiecksfläche $P'_2 S Q'_2 = dF'$, welche r während der Zeit dt durchstreicht, ist gegeben durch

$$\tfrac{1}{2} r . (r + dr) . \sin(d\vartheta),$$

wofür man nach Unterdrückung von Gliedern, welche unendlich klein von höherer Ordnung sind, kürzer schreiben kann:

$$dF' = \tfrac{1}{2} r^2 \, d\vartheta. \tag{137d}$$

Dividiren wir diese Gleichung durch dt, bilden also gewissermaſsen die Flächengeschwindigkeit, so erhalten wir rechts bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ denselben Ausdruck, welcher in der Gleichung (I) der Constante R' gleichgesetzt wird:

$$\frac{dF'}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \tfrac{1}{2} R'. \tag{137e}$$

Die während eines endlichen Zeitraumes t von r durchstrichene sectorförmige Fläche F' ist hiernach:

$$F' = \tfrac{1}{2} R' . t, \tag{137f}$$

also proportional der Zeit. Die Constante R' erhält dadurch eine anschauliche Bedeutung, sie miſst die doppelte Fläche, welche von r in der Zeiteinheit durchstrichen wird. Dieses Flächengesetz wurde zuerst von Kepler aus der Bewegung der Planeten um die Sonne abgeleitet, er formulirte dasselbe in dem Satze:

„Der von der Sonne nach einem Planeten hingezogene Radius vector durchstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume“.

Dabei nahm er die Sonne als ruhenden Centralkörper an, um welchen die Planeten ihre Bahnen ausführen. Diese Annahme

kommt auch der Wirklichkeit sehr nahe, denn der gemeinsame Schwerpunkt der Sonne und eines einzelnen Planeten liegt immer sehr nahe am Mittelpunkt der Sonne, da die Masse der Sonne (m_1) sehr grofs ist gegen die Masse eines Planeten (m_2). Der gröfste Planet, Jupiter, besitzt knapp $^1/_{1000}$, die Erde nur $^1/_{355\,500}$ der Sonnenmasse. Deshalb mufs die Bahn des Sonnencentrums, also die Curve $A_1 B_1$ sehr nahe an S heranrücken und fast verschwindende Ausdehnung gegen die Bahn $A_2 B_2$ des Planeten besitzen. Alsdann rückt aber auch die scheinbare (heliocentrische) Bahn $A'_2 B'_2$ des Planeten in nächste Nähe der wahren Bahn $A_2 B_2$ um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Wir können aber die KEPLER'sche Annahme des ruhenden Sonnencentrums auch fallen lassen. Die geometrische Aehnlichkeit und die winkelgleiche Lage der drei Curven in Fig. 13 erlaubt eine directe Uebertragung des Flächengesetzes auf die beiden wahren Bahnen; auch die vom Schwerpunkt nach den beiden Körpern gezogenen Radii vectores r_1 und r_2 müssen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreichen. Diese haben für das Zeitelement dt die Werthe:

$$P_1 S Q_1 = dF_1 = \tfrac{1}{2} r_1^2 \, d\vartheta$$

$$P_2 S Q_2 = dF_2 = \tfrac{1}{2} r_2^2 \, d\vartheta.$$

Die Verbindungslinie r durchstreicht, während sie aus der Lage $P_1 P_2$ in die Lage $Q_1 Q_2$ übergeht, die Fläche

$$dF_1 + dF_2 = dF = \tfrac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) \, d\vartheta.$$

Dividiren wir wieder durch dt, und wenden (136b) an, so finden wir:

$$\frac{dF}{dt} = \tfrac{1}{2} \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$$

und nach Benutzung der Hauptgleichung (I):

$$\frac{dF}{dt} = \tfrac{1}{2} \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot R'.$$

Daraus folgt die wahre, von r während der Zeit t bei der Drehung um S durchstrichene Flächensumme:

$$F = \tfrac{1}{2} \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} R' . t. \qquad (137\,g)$$

Diese ist also ebenfalls der verstrichenen Zeit t proportional, nur ist dieselbe kleiner als die scheinbare Fläche F', da

$$\frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

immer ein echter Bruch ist.

Man würde das Flächengesetz auch gewahrt finden, wenn man irgend einen anderen Punkt der Strecke r als Drehpunkt festgelegt denken wollte, die thatsächliche Drehung um den Schwerpunkt hat nur die Besonderheit, dafs ihr das Minimum des Rotationsmomentes entspricht.

§ 56. Die Gestalt der Bahnen.

Die bis jetzt gewonnenen Resultate über die Bewegung zweier benachbarter Himmelskörper wurden allein aus dem Reactionsprincip hergeleitet, wir brauchten dabei auch nicht das Gesetz der Massenanziehung. Um nun aber die Gestalt der Bahnen der beiden Körper kennen zu lernen, müssen wir das Energieprincip zu Hülfe nehmen, also zunächst den Werth der Gesammtenergie E unseres Systems für das gewählte Coordinatensystem aufstellen. Die kinetische Energie der translatorischen Bewegung des ganzen Systems, welche sich aus einem geradlinigen gleichförmigen Fortrücken des Schwerpunktes im Raume ergiebt, brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen. Dieselbe ist eine gleichgültige additive Constante, welche wir gleich Null setzen; wir nehmen also den Schwerpunkt in Ruhe an. Die radialen und rotatorischen Geschwindigkeitscomponenten von m_1 und m_2 haben wir im vorigen Paragraphen aufgestellt. Das Geschwindigkeitsquadrat q_1^2 von m_1 ist danach:

$$q_1^2 = \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(r_1 \cdot \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Ebenso das auf m_2 bezügliche:

$$q_2^2 = \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + \left(r_2 \cdot \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

Die kinetische Energie L des Systems ist also:

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} m_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 q_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Führen wir statt r_1 und r_2 wieder die in Gleichungen (136b) gegebenen Ausdrücke ein, welche r enthalten, so kommt:

$$L = \tfrac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} \tag{138}$$

Die potentielle Energie der Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten im Abstand r haben wir schon mehrfach angeführt (siehe S. 216 und S. 237). Dieselbe wird aus dem Kraftgesetz (Gleichung 128) durch die in Gleichung (119) (S. 199) vorgeschriebene Integration gefunden:

$$\Phi = -\,G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{138a}$$

Dabei bedeutet G die Gravitationsconstante. Die willkürliche additive Constante ist gleich Null gesetzt, dadurch ist Φ als eine wesentlich negative Gröfse charakterisirt, welche sich für unendlich grofse Entfernung der Massen dem Maximalwerth Null nähert, während sie bei gröfserer Annäherung, also bei kleiner werdenden r, dem absoluten Werthe nach gröfser wird, also wegen des Minuszeichens immer tiefer sinkt. Dieses negative Vorzeichen des mit $1/r$ proportionalen Gliedes der potentiellen Energie ist nicht etwa, wie dasjenige der Anziehungskraft K, conventionell so angenommen, es ist vielmehr geboten, denn Φ mufs bei der Annäherung der sich anziehenden Massen, also bei Vergröfserung von $1/r$, notwendigerweise sinken. Sollte Jemand sich scheuen, die potentielle Energie, welche doch einen Arbeitsvorrath repräsentirt, als negative Gröfse einzuführen, so steht nichts im Wege, ihr eine hinreichend grofse positive Constante hinzuzuaddiren, so dafs Φ auch beim geringsten während der Bewegung vorkommenden Abstand r noch positiv bleibt. Wir werden uns indessen nicht daran stofsen auch mit negativen Energiequantis zu rechnen.

Die Gesammtenergie $L + \Phi = E$, welche während der Bewegung erhalten bleiben mufs, ist nun:

$$\tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} - G \cdot \frac{m_1 m_2}{r} = E \tag{138b}$$

Der erste Bestandtheil, L, ist immer positiv, der zweite, Φ, ist negativ. Das Vorzeichen der Constanten E ist daher noch ungewifs; doch kann man dasselbe aus dem Anfangszustande leicht ermitteln. Die Unterscheidung positiver und negativer Werthe von E wird nachher von Wichtigkeit.

Wir führen jetzt an Stelle von E eine andere Constante E' ein durch die Gleichung:

$$E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot E' \tag{138c}$$

Dann erhält die Energiegleichung die Gestalt:

$$\text{(II)} \qquad \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} - G \cdot \frac{m_1 + m_2}{r} = E' \tag{138d}$$

Die Dimensionen der Constanten sind:

$$\left.\begin{aligned} E &= [M L^2 T^{-2}] \\ E' &= [L^2 T^{-2}] \\ G &= [M^{-1} L^3 T^{-2}] \text{ vergl. Gl. (129)} \end{aligned}\right\} \tag{138e}$$

Man kann der Constanten E' eine anschauliche Bedeutung geben. Denken wir nämlich im Anfangspunkt S (Fig. 13) die Masse beider Körper $(m_1 + m_2)$ vereinigt und festgehalten und einen Massenpunkt, welcher die Masse 1 enthält, auf der scheinbaren Bahn $A'_2 B'_2$ laufend, so ist die gesammte Energie dieses Systems E', wie man sofort einsieht, wenn man die Hauptgleichung (II) mit der Masseneinheit erweitert denkt.

Wir haben jetzt in den Hauptgleichungen (I) und (II) alle Aussagen beisammen, welche die allgemeinen Principien liefern; in beiden Gleichungen sind r, ϑ und die Urvariabele t in Verbindung mit einander gebracht. Wenn wir nun die geometrische Gestalt der Bahnen, d. h. zunächst die Gestalt der in Fig. 13 durchbrochen gezeichneten scheinbaren Bahn von m_2 bei ruhend gedachtem m_1 (aus welcher sich ja die beiden wahren Bahnen nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen sofort ergeben) ableiten wollen, so müssen wir die Variabele t aus (I) und (II) eliminiren, um zu einer Beziehung zwischen r und ϑ allein zu kommen. Aus (I) folgt:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{R'}{r^2};$$

dies eingesetzt in (II) giebt:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{R'^2}{r^2}\right\} - G\frac{m_1 + m_2}{r} = E'.$$

Berechnen wir hieraus $\frac{dr}{dt}$, so finden wir:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2\left(E' + G\cdot\frac{m_1+m_2}{r}\right) - \frac{R'^2}{r^2}}\,.$$

Das Vorzeichen dieser Quadratwurzel erfordert für jede Zeit eine besondere Betrachtung, es ist positiv zu Zeiten, wo die beiden Massen sich weiter von einander entfernen, negativ, wenn sie sich nähern. Benutzen wir nochmals (I) in der ursprünglichen Form:

$$r^2\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = R',$$

um damit die vorstehende Gleichung zu dividiren. Dann hebt sich das Differential dt fort und man erhält als Beziehung zwischen r und ϑ die Gleichung:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\vartheta} = \sqrt{2\frac{E'}{R'^2} + 2\frac{G(m_1+m_2)}{R'^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}} \qquad (139)$$

Die linke Seite ist der negative Differentialquotient von $1/r$. Im Radicandus wollen wir die quadratische Ergänzung $-\frac{G^2(m_1+m_2)^2}{R'^4}$ addiren und subtrahiren. Es kommt dann:

$$-\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = \sqrt{2\frac{E'}{R'^2} + \frac{G^2(m_1+m_2)^2}{R'^4} - \left\{\frac{1}{r} - \frac{G(m_1+m_2)}{R'^2}\right\}^2}\,.$$

Wir führen die geschweifte Klammer im vorstehenden Radicandus als neue Variabele ϱ ein:

$$\varrho = \frac{1}{r} - \frac{G(m_1+m_2)}{R'^2} \qquad (140)$$

Dann wird:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung für den constanten Theil, welcher wegen der Reellität der ganzen vorhergehenden Umformung von (II) nicht nur wesentlich positiv, sondern auch gröfser als der maximale Werth von ϱ^2 sein mufs, das Zeichen p^2,

$$p^2 = 2\frac{E'}{R'^2} + \frac{G^2(m_1+m_2)^2}{R'^4} \qquad (140\,a)$$

Dann erhält die Gleichung die Form:

$$-\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \sqrt{p^2 - \varrho^2} \qquad \text{oder} \qquad -\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\varrho}{p}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{p}\right)^2}$$

oder endlich:

$$d\vartheta = -\frac{d\left(\frac{\varrho}{p}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{p}\right)^2}}.$$

Die rechte Seite hat die bekannte Form des Differentials von $\arccos\left(\frac{\varrho}{p}\right)$. Wir erhalten somit durch Integration:

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\varrho}{p}\right) + \overline{\vartheta}, \tag{141}$$

wo $\overline{\vartheta}$ eine neue Integrationsconstante ist, die erste von den beiden früher als eigenthümlich diesem speciellen Problem charakterisirte.

In anderer Schreibweise lautet diese Gleichung:

$$\varrho = p \,.\, \cos\left(\vartheta - \overline{\vartheta}\right)$$

oder nach Einsetzung des Werthes von ϱ aus Gleichung (140):

$$\frac{1}{r} - \frac{G(m_1 + m_2)}{R'^2} = p \,.\, \cos\left(\vartheta - \overline{\vartheta}\right).$$

Berechnet man hieraus r als Function von ϑ, so erhält man:

$$r = \frac{1}{\frac{G(m_1 + m_2)}{R'^2} + p \,.\, \cos\left(\vartheta - \overline{\vartheta}\right)}$$

oder auch

$$r = \frac{R'^2}{G(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p \,.\, R'^2}{G(m_1 + m_2)} \cos\left(\vartheta - \overline{\vartheta}\right)}. \tag{141 a}$$

Dies ist nun in jedem Falle die Gleichung eines Kegelschnittes, bezogen auf Polarcoordinaten, deren Pol in einem Brennpunkt liegt. Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir nicht die vorstehende Gleichung weiter umformen, so dafs wir schliefslich an ihr die bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte ablesen können, wir wollen vielmehr von letzteren ausgehend, die Gleichung ableiten, welche sich dann mit (141 a) deckt.

1. Die Ellipse ist der Ort der Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (Brennpunkten) die gleiche Länge hat. In Fig. 14 ist eine Ellipse gegeben, die Brennpunkte sind F und F', ihr Abstand von einander sei mit $2e$ bezeichnet. Die Ellipse besitzt einen Mittelpunkt M, welcher die Strecke FF' halbirt, die Curve ist symmetrisch sowohl um die durch F und F' gehende Axe, als auch um die auf dieser senkrecht in M errichtete Axe. Die Strecke AA', welche die Curve aus der ersteren Geraden herausschneidet, nennt man die grofse Axe, wir bezeichnen ihre

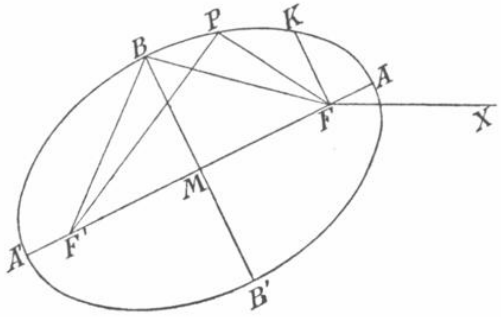

Fig. 14.

Länge mit $2a$; BB' heifst die kleine Axe, ihre Länge sei $2b$. Beide Axen werden in M halbirt. Bezeichnet P einen beliebigen Punkt der Curve, so mufs $(PF + PF')$ für alle Lagen von P dieselbe Gröfse haben, beispielsweise auch, wenn P im Scheitel A liegt. In der Summe $(AF + AF')$ kann man aber wegen der Symmetrie der Ellipse AF durch $A'F'$ ersetzen, daraus folgt, dafs die constante Summe der zwei Strecken gleich der grofsen Axe AA' ist:

$$PF + PF' = 2a.$$

Wenn der Punkt P die besondere Lage im Endpunkte B der kleinen Axe einnimmt, ist aus Symmetriegründen $BF = BF'$, jede der beiden Strecken hat dann die Länge a. Man kann daraus eine Beziehung zwischen a, b und e herleiten, welche aus der Betrachtung des Dreiecks BMF folgt:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + e^2 \\ \text{oder} \qquad b &= \sqrt{a^2 - e^2} = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e}{a}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Die Verhältnifszahl $e/a = \varepsilon$ nennt man die numerische Excentricität der Ellipse. Dieselbe mufs nothwendig ein echter Bruch sein; ihr

Werth bestimmt die Gestalt der Ellipse, verschiedene Ellipsen von derselben numerischen Excentricität sind einander geometrisch ähnlich.

Wir wollen nun die Ellipse analytisch darstellen durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten. Der Pol sei F, die Axe, gegen welche die Neigungswinkel ϑ der Radii vectores r gemessen werden, sei FX. Der Scheitelstrahl FA habe die Neigung $\overline{\vartheta}$, es ist also $\sphericalangle AFX = \overline{\vartheta}$. Für den willkürlichen Punkt P der Ellipse gelten die Coordinaten:

$$FP = r,$$
$$\sphericalangle PFX = \vartheta.$$

Zuerst müssen wir die Strecke $F'P = r'$ finden. Dazu dient die Betrachtung des Dreiecks $F'FP$. Der Aufsenwinkel, welcher der Seite r' gegenüber liegt, ist $\sphericalangle PFA = \vartheta - \overline{\vartheta}$, die Seite FF' hatten wir durch $2e$ bezeichnet, also ist:

$$r' = +\sqrt{r^2 + 4e^2 + 4e.r.\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})}.$$

Die Definition der Ellipse verlangt:

$$r + r' = 2a,$$

also finden wir:

$$r + \sqrt{r^2 + 4e^2 + 4er\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})} = 2a.$$

Wir bringen den Summanden r nach rechts, quadriren die Gleichung, streichen auf beiden Seiten r^2 und heben den gemeinsamen Factor 4 weg. Es bleibt dann:

$$e^2 + er\cos(\vartheta - \overline{\vartheta}) = a^2 - ar.$$

Daraus kann man r berechnen:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})} = \frac{b^2}{a + e\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})} \\ \text{oder} \qquad r &= \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})} \end{aligned}\right\} \quad (143)$$

Dies ist die Gleichung der Ellipse in dem angegebenen Polarcoordinatensystem. Der voranstehende Factor b^2/a stellt denjenigen Werth von r dar, welcher zu dem Winkel $(\vartheta - \overline{\vartheta}) = \pi/2$ gehört, giebt also die Länge des auf der grofsen Axe senkrecht stehenden Brennstrahles FK an, die wir k nennen wollen. (Durch k und ε ist also die Gestalt einer Ellipse ebenfalls festgestellt.)

2. Die Hyperbel wird definirt als der Ort derjenigen Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Brennpunkten die gleiche Gröfse hat. Nennen wir diese Differenz $2a$ und den Abstand der beiden Brennpunkte $2e$, so mufs nun $2e$ nothwendig gröfser als $2a$ sein. In Fig. 15 ist ein Stück einer Hyperbel dargestellt. F und F' sind die Brennpunkte, M ist der Mittelpunkt. Die Bedingung, dafs ein Punkt P auf dieser Curve liegt, ist $PF' - PF = 2a$. Nehmen wir wieder ein Polarcoordinatensystem

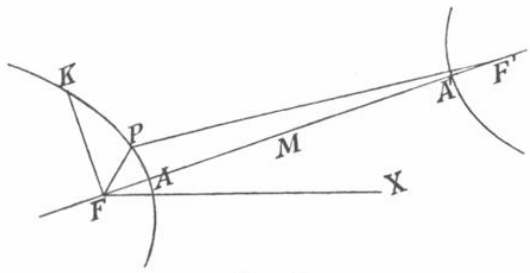

Fig. 15.

mit dem Pole F und der Axe FX an, setzen also $FP = r$ und $\sphericalangle PFX = \vartheta$. Zum Scheitel der Hyperbel A, welcher auf der geraden Linie FF' liegt, gehöre der Winkel $\sphericalangle AFX = \overline{\vartheta}$, also ist $\sphericalangle PFA = \vartheta - \overline{\vartheta}$. Die Strecke $F'P$, welche wir r' nennen wollen, findet man aus der Betrachtung des Dreiecks $F'FP$ folgendermafsen:

$$r' = \sqrt{r^2 + 4e^2 - 4er\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})}.$$

Die Definition der Hyperbel liefert nun die Gleichung:

$$\sqrt{r^2 + 4e^2 - 4er\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})} - r = 2a,$$

aus welcher in ganz gleicher Weise, wie vorher bei der Ellipse, r berechnet werden kann. Man erhält:

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos(\vartheta - \overline{\vartheta})}.$$

Setzen wir $e^2 - a^2 = b^2$; b mufs immer reell sein, da $e > a$ ist. Man nennt b die Nebenaxe oder die imaginäre Axe der Hyperbel; von kleiner Axe (in Analogie der Ellipse) zu reden, hat keinen Sinn, da b nicht kleiner als a zu sein braucht. Setzen wir endlich noch die Verhältnifszahl

$$\frac{e}{a} = \varepsilon,$$

welche aber jetzt stets gröfser als 1 sein mufs, so erhalten wir:

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon . \cos(\vartheta - \bar{\vartheta})} \tag{143a}$$

Das ist formell genau dieselbe Gleichung, welche wir für die Ellipse fanden, nur ist hier $\varepsilon > 1$, dort $\varepsilon < 1$, hier $b^2 = e^2 - a^2$, dort $b^2 = a^2 - e^2$. Der Factor b^2/a giebt auch hier die Länge des zur Hauptaxe senkrechten Strahles $FK = k$. Durch k und ε ist die Hyperbel bestimmt. Zwischen Ellipse und Hyperbel besteht als Uebergangsform die Parabel; man kann diese aus beiden ersteren in gleicher Weise ableiten, wenn man den einen Brennpunkt F festhält, den anderen aber auf der Hauptaxe in unendliche Ferne rücken läfst. Dabei werden die Abmessungen a, b und e, welche sonst die Form des Kegelschnittes bestimmen, sämmtlich unendlich, die numerische Excentricität ε dagegen nähert sich sowohl bei der Ellipse wie bei der Hyperbel dem gemeinsamen Grenzwerth $\varepsilon = 1$, und der Factor $b^2/a = k$ kann dabei einen beliebig vorgeschriebenen endlichen Werth bewahren, welchen man den Parameter der Parabel nennt. Die Polargleichung der Parabel folgt daraus sofort:

$$r = \frac{k}{1 + \cos(\vartheta - \bar{\vartheta})} \tag{143b}$$

k ist der auf der Hauptaxe senkrechte Brennstrahl, der Abstand zwischen Brennpunkt und Scheitel ist $FA = k/2$. Alle Parabeln sind einander geometrisch ähnlich, da ihre Gestalt lediglich durch die Strecke k bestimmt wird.

Wenn man nun, wie wir in Gleichung (141a), durch eine vorgelegte Aufgabe auf eine Gleichung von einer der hier gefundenen Formen geführt wird, in der die Constanten, namentlich ε, durch die gegebenen Anfangsbedingungen bestimmt werden, so begreift man, dafs der Specialfall, in dem sich ε genau $= 1$ herausstellt, gegenüber allen anderen Möglichkeiten, in denen $\varepsilon < 1$ oder $\varepsilon > 1$ wird, unendlich selten vorkommen wird. Genau parabolische Bahnen werden also niemals zu erwarten sein.

Die formale Uebereinstimmung unserer Schlufsgleichung mit den auf den Brennpunkt als Pol bezogenen Kegelschnittgleichungen (143 und 143a) zeigt uns also an, dafs die scheinbare Bahn, welche m_2 um den ruhend gedachten Körper m_1 beschreibt (also in Fig. 13 die Bahn $A'_2 B'_2$), auf alle Fälle ein Kegelschnitt sein mufs, dessen

einer Brennpunkt in S liegt. Dieses Resultat umfafst das zweite KEPLER'sche Gesetz:

„Die Planeten laufen in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht."

Aus der geometrischen Aehnlichkeit der beiden wahren Bahnen ($A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ in Fig. 13) mit der scheinbaren Bahn folgt, dafs auch diese Bahnen Kegelschnitte von der gleichen numerischen Excentricität ε sind, deren einer Brennpunkt in dem Schwerpunkt des Systems liegt, und deren grofse Axen in derselben durch S gehenden Geraden liegen. Die Integrationsconstante $\overline{\vartheta}$ giebt den Winkel an, welchen diese Axenrichtung mit der willkürlich festgesetzten Richtung der x-Axe bildet. Dabei ist diese Richtung der Hauptaxe vom Brennpunkt nach dem nächstgelegenen Scheitel des Kegelschnittes (Perihelium) gerechnet.

Aufser diesen qualitativen Resultaten kann man aus dem Vergleich von Gleichung (141a) mit (143) resp. (143a) auch die Gröfsen ableiten, welche die Gestalt der Kegelschnitte bestimmen. Zunächst betrachten wir wieder die scheinbare Bahn von m_2 um m_1. Man findet für die numerische Excentricität:

$$\varepsilon = \frac{p \,.\, R'^2}{G(m_1 + m_2)}$$

oder nach Einsetzung des Werthes von p aus Gleichung (140a):

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2\,\frac{E'\,R'^2}{G^2(m_1 + m_2)^2}} \tag{144}$$

Wir sahen, dafs die Energie E, mithin auch E', je nach den Anfangsbedingungen, positiv oder negativ sein kann. Dasselbe Vorzeichen erhält auch der zweite Summand, welcher hier in dem Radicandus zu 1 hinzukommt. Man erkennt daraus sofort, dafs bei positivem Betrag der Energie die numerische Excentricität > 1, die Bahn also hyperbolisch wird; in dem Specialfall $E' = 0$ wird $\varepsilon = 1$, die Bahn parabolisch, und bei negativem Betrage der Energie wird $\varepsilon < 1$, die Bahn also elliptisch. Da aber ε stets reell bleiben mufs, darf der Radicandus nicht unter Null sinken. Wir erhalten daher für die Integrationsconstanten E' und R' folgende Beschränkung, welche bei allen möglichen Anfangszuständen erfüllt sein mufs:

$$2\,\frac{E'\,R'^2}{G^2(m_1 + m_2)^2} \geqq -1$$

oder

$$E' \geqq -\frac{G^2(m_1 + m_2)^2}{2\,R'^2} \tag{144a}$$

Wenn E' diesen Minimalwerth besitzt, welcher bei einem bestimmten Werthe von R' möglich ist, dann wird $\varepsilon = 0$, die Ellipse ist dann ein Kreis.

Ferner folgt aus der Vergleichung der Bahngleichung mit der Kegelschnittgleichung:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{R'^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{145}$$

Bei der Ellipse ist:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - e^2}{a} = a.(1 - \varepsilon^2).$$

Aber nach Gleichung (144) ist:

$$1 - \varepsilon^2 = -2\frac{E' R'^2}{G^2(m_1 + m_2)^2}.$$

Da E' für elliptische Bahnen negativ ist, ist $(-E')$ positiv und wir schreiben anschaulicher:

$$1 - \varepsilon^2 = +2\frac{(-E').R'^2}{G^2(m_1 + m_2)^2}.$$

Die Gleichung (145) ergiebt dann:

$$a.2\frac{(-E')R'^2}{G^2(m_1 + m_2)^2} = \frac{R'^2}{G(m_1 + m_2)}$$

oder

$$2a = \frac{G.(m_1 + m_2)}{(-E')} \tag{145a}$$

Die grofse Axe der Ellipse $2a$ hängt also nur von der Energie des Systems, nicht aber von der Gröfse des Rotationsmomentes ab. Es ist dies ein wichtiges Resultat, welches in der Entwickelung der Astronomie eine grofse Rolle gespielt hat. Führen wir an Stelle von E' die wahre Energie E des Zwei-Körper-Systems ein (Gleichung 138c), so wird:

$$2a = \frac{G.m_1.m_2}{(-E)}$$

oder

$$E = -\frac{G.m_1.m_2}{2a} \tag{145b}$$

Die Gesammtenergie ist also so grofs wie die potentielle Energie zwischen m_1 und m_2 sein würde, wenn diese beiden Körper in einen Abstand gleich der grofsen Axe von einander gebracht würden. Eine so grofse Entfernung erreichen sie bei ihrem Laufe um einander

niemals, da der Brennstrahl r für alle Punkte einer Ellipse kleiner bleibt als die grofse Axe.

Die kleine Axe $2b$ kann man auch leicht berechnen. Nach Gleichung (145) ist:

$$b^2 = \frac{R'^2}{G(m_1 + m_2)} \cdot a = \frac{R'^2}{G(m_1 + m_2)} \cdot \frac{G(m_1 + m_2)}{2(-E')} = \frac{R'^2}{2(-E')}$$

mithin

$$2b = \frac{R' \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{(-E')}} \tag{145c}$$

Die kleine Axe hängt also, ebenso wie die Excentricität sowohl von der Energie als auch von dem Rotationsmoment ab.

Für hyperbolische Bahnen finden wir durchaus entsprechende Ausdrücke. Wir knüpfen wieder an Gleichung (145) an, welche in allen Fällen gilt. Jetzt ist:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{e^2 - a^2}{a} = a \cdot (\varepsilon^2 - 1),$$

nach (144) ist aber:

$$\varepsilon^2 - 1 = + \frac{2E' R'^2}{G^2 (m_1 + m_2)^2}, \quad (E' > 0),$$

folglich, analog wie oben:

$$2a = \frac{G(m_1 + m_2)}{E'} \tag{145d}$$

$$2b = \frac{R' \sqrt{2}}{\sqrt{E'}} \tag{145e}$$

Nachdem wir jetzt die bestimmenden Bahnelemente a und ε oder a und b, durch die Constanten E' und R' ausgedrückt haben, können wir auch die Integrationsconstante $\overline{\vartheta}$, welche die Lage der grofsen Axe in der Richtung vom Brennpunkt nach dem benachbarten Scheitel (dem Perihelium) hin angiebt, auf den Anfangszustand beziehen.

Der Abstand r_0 zwischen m_1 und m_2 zu Anfang der Bewegung und der Winkel ϑ_0, welcher die Richtung dieser Strecke angiebt, sind direct durch den Anfangszustand vorgeschrieben. Aus der Kegelschnittgleichung (143) folgt dann, dafs diese beiden Stücke mit $\overline{\vartheta}$ durch folgende Gleichung zusammenhängen:

$$r_0 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\vartheta_0 - \overline{\vartheta})} \tag{146}$$

Dadurch ist $\overline{\vartheta}$ auf lauter Gröfsen zurückgeführt, welche bereits durch die Daten des Anfangszustandes bestimmt sind. Da aber der Cosinus für positive und negative Argumente vom gleichen absoluten Betrage denselben Werth giebt, so erhalten wir noch keinen Aufschlufs, welches Vorzeichen für $\vartheta_0 - \overline{\vartheta}$ zu wählen ist. Diese Entscheidung hängt davon ab, ob der Anfangswerth $(dr/dt)_0$ positiv oder negativ ist; im ersten Falle verkürzt sich der Strahl r, er rückt also auf das Perihelium zu, dann liegt $\vartheta_0 - \overline{\vartheta}$ zwischen $-\pi$ und 0, im zweiten Falle ist r in der Vergröfserung begriffen, das Perihelium ist bereits passirt und $\vartheta_0 - \overline{\vartheta}$ liegt zwischen 0 und $+\pi$.

Von diesen Angaben über die Lage und die Dimensionen der scheinbaren Bahn auf die wahren Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt überzugehen, ist nach den früheren Auseinandersetzungen leicht.

§ 57. Umlaufszeit. Zeitlicher Verlauf der Bewegung.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Zeit aus den beiden Hauptgleichungen (I) und (II) eliminirt und sind dadurch zu einer endlichen Gleichung zwischen r und ϑ — der Bahngleichung (141 a) geführt worden. Jetzt müssen wir die Zeit wieder in die Betrachtung hineinbringen, um zu untersuchen, zu welchen Zeiten und mit welchen Geschwindigkeiten die verschiedenen Theile der Bahn durchlaufen werden. Dazu verhilft uns am einfachsten das Flächengesetz, welches jetzt in Verbindung mit unserer Kenntnifs von der Gestalt der Bahn weitere Aufschlüsse giebt. Bei elliptischen Bahnen geschieht der volle Umlauf in endlicher Zeit, nach Vollendung desselben mufs sich der Bewegungszustand genau wiederholen, denn die gleichen Stellen der Bahn müssen mit gleichen Geschwindigkeiten durcheilt werden, sonst wäre das Flächengesetz nicht erfüllt. Auch die Zeiten eines ganzen Umlaufs, d. h. die Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichen Stellungen mufs immer dieselbe bleiben, da während ihrer Dauer gleiche Flächen, nämlich die ganzen Ellipsenflächen durchstrichen werden. Wir wollen zuerst diese Umlaufszeit T berechnen. Nach Gleichung (137 f) ist die während der Zeit T von dem Vector r durchstrichene Fläche der scheinbaren Bahn gegeben durch $\frac{1}{2} R' . T$. Diese Fläche ist aber der Inhalt der ganzen Ellipse, d. h. gleich $\pi . a . b$. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\pi . a . b = \tfrac{1}{2} R' . T.$$

Setzen wir aus Gleichungen (145a und c) die Werthe von a und b ein, so kommt:

$$\pi \cdot \frac{G.(m_1 + m_2)}{2(-E')} \cdot \frac{R'}{\sqrt{2(-E')}} = \tfrac{1}{2} R' T.$$

Daraus folgt:

$$T = 2\pi \cdot \frac{G.(m_1 + m_2)}{\sqrt{2(-E')^3}} \tag{147}$$

Die Umlaufszeit ist also (ebenso wie die grofse Axe der Bahn) unabhängig vom Rotationsmoment und allein bestimmt durch die Energie.

Man kann dem vorstehenden Ausdruck eine etwas andere Gestalt geben, wenn man an Stelle der Energie die grofse Axe einführt. Nach der eben benutzten Gleichung (145a) ist:

$$2(-E') = \frac{G(m_1 + m_2)}{a}.$$

Quadrirt man noch, um die Wurzel fortzuschaffen, so findet man:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \cdot a^3 \tag{147a}$$

Diese Gleichung ist der exacte Ausdruck der Beziehung, welche Kepler als drittes Gesetz der Planetenbewegungen herausgefunden und folgendermafsen formulirt hatte:

„Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Cuben der grofsen Bahnaxen."

Streng genommen gilt dieses Gesetz, wie man aus der Gleichung sieht, nur, wenn es sich entweder um dieselben beiden Massen handelt, welche sich in zwei Fällen zu Folge verschiedener Anfangsbedingungen in verschiedenen elliptischen Bahnen bewegen, oder es gilt auch für zwei Doppelsternsysteme, welche dieselbe Gesammtmasse $(m_1 + m_2)$ besitzen. Sonst wird im Allgemeinen die Proportionalität zwischen T^2 und a^3 durch den Factor $(m_1 + m_2)$ alterirt. In unserem Planetensystem haben wir aber wegen der im Vergleich zur Sonne sehr geringen Massen der Planeten einen Fall vor uns, in welchem diese Abweichungen unmerklich werden. Wenn wir von den Störungen der Planeten unter einander absehen, können wir jeden derselben mit der Sonne zusammen als ein besonderes Zwei-Körper-System ansehen, dessen Gesammtmasse ohne merklichen Fehler der Sonnenmasse gleichgesetzt werden darf. Deshalb ist der Factor $(m_1 + m_2)$ für alle Planeten so gut wie gleich, und die dritte Kepler'sche Regel

bildet thatsächlich eine richtige Beziehung zwischen den grofsen Axen der Bahnen und den Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten, d. h. diese Regel, welche von KEPLER aus den Beobachtungsresultaten empirisch herausgefunden wurde, bestätigt die Richtigkeit des NEWTON'schen Gravitationsgesetzes, aus welchem wir die Gesetze der Bewegungen deducirt haben.

Es ist schliefslich zur vollständigen Beschreibung der Bewegung noch nöthig, entweder r oder ϑ als Function der Zeit t darzustellen. Man könnte aus den beiden Hauptgleichungen (I) und (II) sehr leicht $d\vartheta/dt$ eliminiren und würde dadurch auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für r als Function von t geführt werden, mit deren Integration dann unsere Aufgabe gelöst sein würde; auch ist ersichtlich, dafs wir dabei die letzte uns noch fehlende Integrationsconstante finden würden, welche wir beispielsweise definiren können als den Zeitpunkt $\overline{t}$, zu welchem r ein Minimum wird (Zeit des Periheliums).

Wir ziehen es aber vor einen anderen Weg einzuschlagen, welcher uns zur Kenntnifs des Zusammenhanges zwischen dem Winkel ϑ und der Zeit t führen wird. Der Flächensatz lehrt, dafs das Wachsthum der focalen Sectorfläche ein gleichförmiges, der Zeit proportionales ist. Wenn wir also die Fläche des Focalsectors durch den Winkel zwischen den ihn begrenzenden Brennstrahlen darstellen können, so ist die Brücke zwischen dem variabelen Winkel ϑ und der Zeit t geschlagen. Diese Flächenbestimmung ist ihrem Sinne nach auch eine Integration ($\int r^2/2 . d\vartheta$, wo für r die in Gleichung (143) gegebene Function von ϑ einzusetzen ist). Wir können indessen die Rechnung durch eine geometrische Betrachtung umgehen, welche wenigstens bei den Ellipsen, auf die wir jetzt die Betrachtung beschränken wollen, sehr schnell zum Ziele führt. Die analytische Geometrie lehrt nämlich, dafs man die Ellipse mit den Halbaxen a und b ansehen kann als die senkrechte Parallelprojection eines Kreises vom Radius a auf eine Ebene, gegen welche die Kreisebene einen Neigungswinkel besitzt, dessen Cosinus gleich b/a ist. Die Schnittlinie beider Ebenen verläuft parallel der grofsen Axe der Ellipse, alle Strecken, welche parallel zu ihr liegen, bleiben bei der Projection unverändert; diejenigen Strecken dagegen, welche (in der Kreisebene) senkrecht auf der Schnittlinie stehen, werden in der Projection in dem festen Verhältnifs b/a verkürzt. In gleicher Weise werden auch alle abgegrenzten Flächenstücke der Kreisebene in der Projectionsfigur im Verhältnifs b/a reducirt. Man kann hiernach die gewünschte Ellipse

erzeugen, indem man einen Kreis mit dem Radius a schlägt, einen Durchmesser desselben als grofse Axe der Ellipse festsetzt und die Höhen aller Kreispunkte über dieser Axe im Verhältnifs b/a verjüngt. In Figur 16 ist ein Stück des Kreises und der Ellipse dargestellt, M ist der Mittelpunkt, R ein beliebiger Punkt des Kreises, MA ist die halbe grofse Axe $= a$, RQ ist senkrecht auf MA gefällt, der Punkt P der Ellipse ist gefunden durch die Proportion $QP : QR = b : a$,

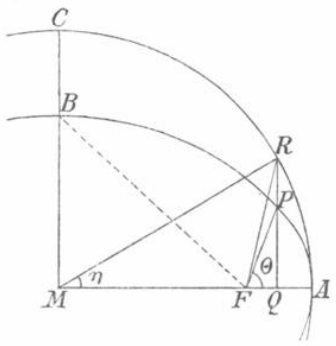

Fig. 16.

MB repräsentirt die vorgeschriebene kleine Halbaxe b, den Brennpunkt der Ellipse, welcher dem Scheitel A zunächst liegt, haben wir in F, der Abstand BF ist gleich der grofsen Halbaxe a, die Strecke

$$MF = \sqrt{a^2 - b^2} = e = a \cdot \varepsilon$$

ist die lineare Excentricität.

Wir suchen nun die Fläche eines Focalsectors, welcher von zwei Brennstrahlen und dem Ellipsenbogen umgrenzt wird, und zwar wollen wir den einen Strahl fest in die grofse Axe legen und nach dem nächsten Scheitel A schicken. Jeden anderen Sector, bei dem diese Annahme nicht zutrifft, kann man als Summe oder Differenz zweier Sectoren dieser besonderen Art ansehen. In der Figur sei AFP die gesuchte Fläche, die wir mit S bezeichnen wollen, der Winkel AFP, welcher die Richtung des begrenzenden Strahles FP gegen die Hauptaxe FA mifst, heifse Θ. Nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen ist $S = \frac{b}{a} \times$ Fläche AFR, aber diese letztere Fläche ist die Differenz des Kreissectors AMR minus dem Dreieck FMR, läfst sich also leicht durch den Centriwinkel $AMR = \eta$ ausdrücken. Des Dreiecks Grundlinie ist $MF = e = a\,\varepsilon$, die Höhe ist $QR = a \cdot \sin\eta$, also ist

$$\text{Dreieck } FMR = \frac{a^2\varepsilon}{2}\sin\eta, \qquad \text{Kreissector } AMR = \frac{a^2}{2}\eta,$$

mithin Kreisausschnitt $AFR = \frac{a^2}{2}(\eta - \varepsilon \sin\eta)$ und der gesuchte Focalsector der Ellipse

$$S = \frac{ab}{2}(\eta - \varepsilon \sin\eta) \tag{148}$$

Nun wollen wir aber S nicht durch η, sondern durch Θ ausdrücken, wir müssen also η mit Θ in Verbindung bringen. Dazu hilft das rechtwinkelige Dreieck FQP, in welchem $PQ = \frac{b}{a} RQ = b \sin \eta$ und $FQ = MQ - MF = a \cos \eta - e$ ist. Man findet dann:

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{b \sin \eta}{a \cos \eta - e} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \eta}{\cos \eta - \varepsilon} \tag{149}$$

Man kann diese Relation zwischen Θ und η durch Anwendung geläufiger trigonometrischer Umformungen in folgende symmetrische Gestalt bringen:

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \,.\, \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2} = \sqrt{1 + \varepsilon} \,.\, \operatorname{tang} \frac{\eta}{2} \tag{149a}$$

Diese Form gestattet in gleicher Weise die Berechnung von Θ aus η wie umgekehrt die Bestimmung von η bei gegebenem Θ. Da ferner diese Gleichung unverändert bleibt, wenn man gleichzeitig η mit Θ und $+\varepsilon$ mit $-\varepsilon$ vertauscht, so sieht man ohne weitere Rechnung, dafs entsprechend der Relation (149) auch die folgende bestehen mufs:

$$\operatorname{tang} \eta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \varepsilon} \tag{149b}$$

Aus dieser Gleichung folgt endlich durch eine leichte trigonometrische Umrechnung noch:

$$\sin \eta = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin \Theta}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \tag{149c}$$

und der Arcus des Winkels η ist nach dem Vorhergehenden bestimmt durch jeden der folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= 2 \,.\, \operatorname{arctang} \left\{ \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right\} \\ &= \operatorname{arctang} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \varepsilon} \right\} \\ &= \arcsin \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin \Theta}{1 + \varepsilon \cos \Theta} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{149d}$$

Die Eindeutigkeit der aus den vorstehenden Gleichungen (149) bis (149d) folgenden Winkelbestimmungen kann in keinem Falle zweifelhaft werden, wenn auch die Werthe der trigonometrischen Functionen noch vielfache Werthe der Argumente zulassen; denn

die Betrachtung von Fig. 16 zeigt, dafs Θ und η stets in demselben Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von π liegen müssen, also z. B. beide zwischen 0 und π, oder beide zwischen π und 2π oder zwischen $-\pi$ und 0. Der gesuchte Focalsector S ist also durch den Winkel Θ ausgedrückt, wenn man in Gleichung (148) für η und $\sin\eta$ die in (149d) und (149c) aufgestellten Ausdrücke einsetzt. Man kann somit für jeden vorgeschriebenen Winkel Θ die Fläche S berechnen. Die umgekehrte Aufgabe, zu einer gegebenen Fläche S den zugehörigen Winkel Θ zu suchen, erfordert zuerst die Aufsuchung des Winkels η aus Gleichung (148). Diese ist aber eine transcendente Gleichung für η, weil der Arcus neben dem Sinus darin vorkommt; man kann solche Gleichungen nicht in geschlossener Form lösen, sondern nur durch Annäherungsmethoden; diese werden dadurch sehr erleichtert, dafs bei allen Planeten die numerische Excentricität ε, mit welcher $\sin\eta$ multiplicirt auftritt, thatsächlich eine sehr kleine Zahl ist. Bei den Kometenbahnen trifft dies indessen nicht zu, die Berechnungen werden dadurch weitläufiger und müssen bei hyperbolischen Bahnen, die sich nicht als Projectionen eines Kreises auffassen lassen, auch auf andere Weise geführt werden, die Lösung läfst sich aber stets mit jeder geforderten Genauigkeit finden.

Wir können also jetzt S als Function von bekanntem Typus mit dem Argument Θ auffassen, und wollen dies dadurch andeuten, dafs wir S als Functionszeichen brauchen und das Argument in Klammer beifügen, also schreiben $S(\Theta)$; zu beachten ist dabei, dafs der Winkel Θ immer vom Scheitelstrahl ab gemessen sein mufs. Die inverse Function $\Theta(S)$ läfst sich zwar nicht in geschlossener Form durch die uns geläufigen Rechnungszeichen angeben, kann aber doch ebenfalls als bekannt gelten, da ihr numerischer Werth für jedes vorgeschriebene S beliebig genau ermittelt werden kann. Die Function $\Theta(S)$ ist ihrer Natur nach eindeutig, denn zu jeder geforderten Gröfse der Fläche S gehört ein ganz bestimmter Winkel Θ, um den der Radiusvector sich aus der Scheitellage FA drehen mufs, um diese Fläche zu durchstreifen; für die Function $S(\Theta)$ können wir die Eindeutigkeit dadurch wahren, dafs wir festsetzen, es soll für $\Theta = 0$ auch $S = 0$ sein. Wenn wir ferner die Flächen, welche bei einer negativen Drehung aus der Scheitellage durchstrichen werden, negativ rechnen, so werden beide Functionen $S(\Theta)$ und $\Theta(S)$ ungerade Functionen ihres Argumentes.

Kehren wir nach diesen vorbereitenden Betrachtungen zu unserem Problem zurück, d. h. zu der scheinbaren Bahn der Masse

m_2 um die ruhend gedachte Masse m_1. In dem eingeführten Polarcoordinatensystem gehört zur Anfangslage der Winkel ϑ_0. Der Winkel, welcher zur Scheitellage gehört, ist mit $\overline{\vartheta}$ bezeichnet worden; derselbe trat in Gleichungen (141) und (141a) als Integrationsconstante auf, und wurde durch die Gleichung (146) und die darauf folgende Bemerkung auf bekannte Gröfsen zurückgeführt. Der Focalsector, welchen der Strahl r vom Anfang der Bewegung bis zur Scheitellage (Perihelium) durchstreicht, kann nach den vorstehenden Angaben berechnet werden aus dem Winkel $\Theta = \overline{\vartheta} - \vartheta_0$, welcher der Bedingung für Θ genügt, dafs sein einer Schenkel durch den Scheitelstrahl gebildet wird. Nach der eingeführten Bezeichnung ist die Gröfse dieser Fläche $S(\overline{\vartheta} - \vartheta_0)$.

Wenn das Perihelium vor einer halben Umdrehung erreicht wird, so ist $\overline{\vartheta} - \vartheta_0$ positiv und $< \pi$. Die Zeit $\overline{t}$, welche seit Anfang der betrachteten Bewegung verstreicht, bis zur Ankunft im Perihelium, wird durch den Flächensatz, Gleichung (137f), gefunden:

$$S(\overline{\vartheta} - \vartheta_0) = \tfrac{1}{2} R' . \overline{t} \qquad (150)$$

Durch diese Gleichung ist auch die letzte Integrationsconstante $\overline{t}$ auf die Anfangsbedingungen zurückgeführt und ihrem Werthe nach bestimmt. Eindeutig ist diese Bestimmung noch nicht, denn das Perihelium wird bei jedem Umlauf einmal erreicht, man kann also jedes gefundene $\overline{t}$ um ein beliebiges Multiplum der Umlaufszeit T vermehren oder vermindern, ohne dessen Bedeutung als Zeit des Periheliums dadurch aufzuheben. Wir wollen nun verlangen, dafs der absolute Betrag des Zeitraumes $\overline{t}$ der kürzeste sein soll, welcher zu finden ist, dafs also $-\frac{T}{2} < \overline{t} < \frac{T}{2}$ ist. Dann erhält man einen eindeutigen Werth für $\overline{t}$; derselbe ist positiv, wenn das Perihelium zur Zeit 0 innerhalb eines halben Umlaufs erwartet wird, wenn also $(dr/dt)_0 < 0$ ist, und $0 < (\overline{\vartheta} - \vartheta_0) < \pi$ ist, er ist aber negativ, wenn das Perihelium zu Anfang bereits passirt ist, wenn also $(dr/dt)_0 > 0$ und $-\pi < (\overline{\vartheta} - \vartheta_0) < 0$ ist.

Die nach Verlauf einer beliebigen Zeit t vom Radiusvector r durchstrichene Fläche können wir zusammensetzen aus dem bis zum Perihelium reichenden Sector $S(\overline{\vartheta} - \vartheta_0)$ und dem von dort an weitergehenden Sector, welcher bis zu dem im Zeitpunkt t gerade erreichten Winkel ϑ reicht, dessen Fläche ist $S(\vartheta - \overline{\vartheta})$. Das Argument $\vartheta - \overline{\vartheta}$ erfüllt ebenfalls die Bedingung für Θ. Die Summe

beider Flächen ist nach dem Flächensatze gleich $\frac{1}{2}.R'.t$. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}R'.t = S(\overline{\vartheta} - \vartheta_0) + S(\vartheta - \overline{\vartheta}) \tag{151}$$

Diese gilt auch für den Fall, dafs das Perihelium bereits zur Zeit 0 passirt ist, denn wir hatten $S(\Theta)$ für negative Argumente als ungerade Function erkannt. Setzen wir die Angabe der Gleichung (150) hier ein, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}R'.(t - \overline{t}) = S(\vartheta - \overline{\vartheta}) \tag{151a}$$

Dadurch ist die Zeit t als Function des Winkels ϑ angegeben. Wir suchen aber ϑ als Function der Zeit und müssen deshalb die inverse Function bilden:

$$\vartheta - \overline{\vartheta} = \Theta\left(\tfrac{1}{2}R'(t - \overline{t})\right) \tag{151b}$$

wo Θ das oben eingeführte Operationszeichen bedeutet.

Hiermit ist nun die Aufgabe der Beschreibung des Bewegungsvorganges vollendet. Von der scheinbaren Bahn auf die beiden wahren Bahnen um den ruhenden Schwerpunkt zurückzugehen, ist deshalb unnöthig, weil der variable Winkel ϑ in beiden Fällen dieselbe Bedeutung und dieselben zeitlichen Veränderungen zeigt, und auch die Umlaufszeit T der scheinbaren und der wahren Bahnen identisch ist.