Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1898

Zweiter Theil. Dynamik eines materiellen Punktes

urn:nbn:at:at-ubi:2-6859

Zweiter Theil.

Dynamik eines materiellen Punktes.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Principien.

§ 8. Bewegungskraft.

Die Erkenntnifs, dafs der im vorangehenden Theile aufgestellte Begriff der Beschleunigung der Bewegung eines materiellen Punktes eine gerichtete Gröfse ist, welche mit ihres gleichen zu einer geometrischen Summe zusammengefafst werden kann und welche auch aus verschiedenen Componenten als Resultante zusammengesetzt gedacht werden kann, bildet das wichtigste Resultat aller kinematischen Betrachtungen und liefert die eigentliche Grundlage der Dynamik, der Lehre von den Gesetzen der thatsächlich in der Natur vorkommenden Bewegungserscheinungen der Massen.

Die Gesetzmäfsigkeit der Naturerscheinungen ist die oberste Voraussetzung, welche wir aufstellen müssen, wenn wir an die Erforschung derselben herantreten wollen. Das Gesetz existirt für uns nur, wenn wir dasselbe erkannt haben, aber wir finden, dafs Etwas vorhanden ist unabhängig von unserem Erkennen und Wollen, was sich uns, sobald wir in den Ablauf einer Naturerscheinung verändernd eingreifen wollen, als eine objective Macht entgegengestellt, und welches die Ursache ist, dafs die Vorgänge gerade so ablaufen, wie wir es beobachten. Diese objectivirte Gesetzmäfsigkeit nennen wir Kraft, und die Erforschung der Gesetze der thatsächlichen Bewegungen ist identisch mit der Beantwortung der durch unser Causalitätsbedürfnifs geforderten Frage nach den Ursachen oder Kräften. Dieser Auffassung entstammt auch der Name Dynamik, d. i. Lehre von den Bewegungskräften.

Nun war es der grofse Fortschritt, welchen Galilei gegenüber allen früheren Naturforschern seit Aristoteles machte, dafs er als die eine directe Ursache fordernde Bewegungserscheinung die Beschleunigung erkannte. Dafs eine Masse, welche eine Zeit lang in Ruhe existirt hat und dann plötzlich anfängt, sich zu bewegen, durch irgend eine vorher fehlende Ursache dazu angetrieben werden mufs, das liegt schon in der Allgemeingültigkeit des Causalitätsgesetzes, welches wir als Anschauungsform mitbringen. Dafs aber etwas entsprechendes auch für eine bereits in Bewegung befindliche Masse gilt, dafs nämlich jede Veränderung ihres Bewegungszustandes, aber auch nur eine solche Veränderung eine Ursache erfordert, dies war allerdings eine Anschauung, welche die früheren Physiker nicht klar zu Stande gebracht hatten, dies war ein wesentlich neuer Standpunkt; jene Alten hielten im Allgemeinen an der von Aristoteles geäufserten Ansicht fest, dafs jeder von der Ruhe verschiedene Bewegungszustand zu seiner Erhaltung einer dauernd wirkenden Ursache (Kraft) bedürfe.

Ein Massenpunkt kann nun thatsächlich in jedem Augenblick nur eine Bewegung, daher auch nur eine bestimmte Beschleunigung besitzen; in diesem Sinne ist jede Zerlegung der letzteren in irgend welche, der vorliegenden Berechnung angepafste Componenten nur eine mathematische Fiction, deren Zweckmäfsigkeit sich in gleicher Weise auch bei den Geschwindigkeiten und bei den gerichteten Strecken in den vorhergehenden kinematischen Betrachtungen erwiesen hat. Dieselbe gewinnt indessen eine realere Bedeutung, wenn wir bedenken, dafs die Beschleunigung, die wir in Gröfse und Richtung bestimmt haben, zunächst für ein und denselben Massenpunkt, das Erkennungsmittel und das Maafs für die bewegende Ursache oder Kraft liefert. Denn es kann sehr wohl vorgestellt werden, dafs mehrere Ursachen, die wir bereits in ihren Einzelwirkungen studirt haben, indem wir die durch jede einzelne hervorgebrachten Beschleunigungen festgestellt haben, dafs diese Ursachen alle zusammen auf den Massenpunkt einwirken. Die Beschleunigung, welche dessen Bewegung nun zeigt, läfst sich ebenfalls durch Beobachtung feststellen, und es zeigt sich, dafs dieselbe gleich der geometrischen Summe aller derjenigen Beschleunigungen ist, welche durch die vorhandenen Ursachen, einzeln genommen, erzeugt werden. Dies ist ein Erfahrungssatz, dessen Richtigkeit geprüft werden kann und der bereits durch die gesammte Arbeit der Physiker seit mehr als zwei Jahrhunderten als richtig bestätigt worden ist. In demselben hat die geometrische Addition der Beschleunigungen einen realen Sinn, und das Fortbestehen jedes einzelnen Summanden in der Summe deutet die Erfahrungsthatsache an, dafs die Wirkung einer Kraft durch die gleichzeitige Anwesenheit anderer Kräfte nicht verändert wird.

Es liegt nun die Gefahr nahe, sich bei der Aufstellung des Begriffes der Kraft in eine leere Tautologie zu verwickeln. Die Bewegungen und die Beschleunigungen sind Thatsachen, welche beobachtet werden können und deren Gröfse man durch Raumabmessungen und Zeitbestimmungen zahlenmäfsig feststellen kann. Wenn man dagegen von Kräften spricht als den Ursachen dieser Bewegungserscheinungen, so weifs man von deren Wesen nichts weiter, als was man eben aus der Beobachtung des Bewegungsvorganges herauslesen kann, und was seinen Ausdruck schon in der Angabe der Beschleunigung gefunden hat. Man kann daher von der Kraft nichts aussagen, was man nicht bereits von der Beschleunigung weiss, und es wäre die Einführung dieses unerklärten Abstractums ohne jeden Inhalt.

Der wahre Sinn, der die Einführung des Kraftbegriffes rechtfertigt, besteht nun darin, dafs die Kräfte als immer bestehende, nach unveränderlichen Gesetzen wirkende Ursachen angesehen werden, deren Wirkung zu allen Zeiten unter denselben Verhältnissen die gleiche sein mufs. Diese Eigenschaft kann von den Beschleunigungen nicht behauptet werden. An dieser Bedingung hat man stets festzuhalten, wenn man von Kräften spricht. So kommt häufig der Fall vor, dafs wir die Anwesenheit einer Kraft anzunehmen Grund haben, ohne dafs wir ihre Wirkung als Beschleunigung auftreten sehen. In solchem Falle dürfen wir nicht annehmen, dafs die Kraft vorübergehend aufgehört hat zu wirken, es wird uns vielmehr stets gelingen, dann noch andere Kräfte aufzuspüren, deren Beschleunigungen mit der vermifsten Beschleunigung zusammen die geometrische Summe Null geben. Es kann sich alsdann ein materieller Punkt in diesem Zustande des Gleichgewichtes der Kräfte unter denselben Bedingungen befinden, wie wenn keine Kräfte auf ihn wirkten; wir haben aber durch die ungestörte Additionsfähigkeit der Wirkungen die Möglichkeit, auch in solchen Zuständen die einzelnen Ursachen als fortbestehend und unverändert wirksam anzusehen, und wir können an dem Grundsatz festhalten, dafs das Gesetz der Kraft ein dauerndes ist. Unter dieser Voraussetzung läfst sich mit Hülfe des Kraftbegriffes die ganze theoretische Physik ausbilden.

Wir wollen das Gesagte durch ein anschauliches Beispiel illustriren und wählen zu dem Zwecke diejenige Kraft, welche uns aus dem täglichen Leben am geläufigsten ist, die irdische Schwerkraft. Die Wirksamkeit derselben erkennen wir an der Beschleunigung der Bewegung eines fallenden Körpers. Nun brauchen aber schwere Massen nicht immer zu fallen, dieselben können bekanntlich auch auf einem Tisch, auf jeder horizontalen Fläche eines festen Körpers ruhig liegen, und die Beschleunigung der Schwerkraft tritt alsdann nicht in die Erscheinung. Trotzdem haben wir die Schwerkraft als dauernd wirksam und in gleicher Weise beschleunigend anzusehen, wie bei der Fallbewegung; wir müssen nur nach anderen gleichzeitig wirkenden Kräften suchen, deren Beschleunigungen mit derjenigen der Schwerkraft zusammen die Summe Null geben. Wir finden diese auch stets in den sogenannten elastischen Kräften, die durch die Verbiegungen des Tisches und der weiteren Unterstützungen entstehen, wenn eine schwere Masse auf ihnen ruht. Daſs eine solche Verbiegung oder anderweitige Formveränderung der Unterstützungen stets eintritt, läſst sich durch geeignete Mittel nachweisen, und ebenso läſst sich zeigen, daſs bei solchen Deformationen stets Kräfte auftreten, welche ebenfalls unveränderlichen Gesetzen folgen. Man kann mitunter sogar die Gröſse der Deformation zur Messung der Gröſse derjenigen Kraft, welcher dadurch das Gleichgewicht gehalten wird, ebenso gut oder besser benutzen, als die Feststellung der thatsächlichen Beschleunigung, welche die letztere erzeugt. (Federwage, Torsionswage.)

§ 9. Newtons erstes Axiom. Beharrungsvermögen.

Wir wollen nach den einleitenden Betrachtungen über das Wesen der Bewegungskraft zur Besprechung der Grundsätze der Dynamik übergehen, wie dieselben von Newton endgültig aufgestellt und allgemein acceptirt worden sind. Newton hat diese Sätze als Axiome bezeichnet, das soll heiſsen, als allgemein gültige Gesetze, welche aber nach ihrem wahren Inhalt genommen, durch Erfahrung gewonnen sind und nicht anders als durch Erfahrung geprüft und bestätigt werden können.[1] Dieselben stehen dadurch im Gegensatz zu den früher in der Kinematik von uns aufgestellten Sätzen. Wenn

[1]) Das Wort Axiom ist also hier in einem anderen Sinne gebraucht als bei Kant. Dieser versteht unter Axiomen der Anschauung synthetische Sätze a priori, d. h. Urtheile, welche ohne jede äuſsere Erfahrung aufgestellt werden. Vergl. Kant, Kritik d. r. V. Elementarlehre II. Th. I. Abth. II. Buch II. Hauptst. 3. Absch.

wir beispielsweise von der Möglichkeit der geometrischen Addition der Geschwindigkeiten und ihrer Zerlegung in Componenten gesprochen haben, so waren das nur nominalistische Auseinandersetzungen oder Definitionen, in denen Erklärungen für gewisse termini technici gegeben wurden, welche in dem bestimmten angegebenen Sinne gebraucht werden sollten, und von denen wir weiter nichts zu beweisen hatten, als dafs sie bei jeder erlaubten Art des Gebrauchs auf die gleichen, eindeutig bestimmten Resultate führen. Der leitende Gesichtspunkt bei der Aufstellung dieser Begriffe, welche bis zu einem gewissen Grade willkürlich gewählt werden könnten, war allerdings bereits, dieselben so zu formuliren, dafs wir mit Hülfe derselben die nun folgenden realen Sätze, die wir zu behandeln haben, möglichst klar und einfach aussprechen können. Dabei kam aber die Frage nach der Wahrheit noch gar nicht in Betracht, wir hatten vielmehr nur für die Consequenz in unserem Begriffssystem zu sorgen.

Newtons erstes Axiom, welches wesentlich den Inhalt der schon im vorigen Paragraphen von uns besprochenen Galilei'schen Entdeckung enthält, hat folgenden Wortlaut:

> „Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“

Unter „corpus“ haben wir hier einen materiellen Punkt oder, wie später ausführlich zu zeigen ist, bei ausgedehnter Masse deren mittleren Ort, den sogenannten Schwerpunkt zu verstehen. „Status movendi uniformiter in directum“ bedeutet die in § 5 behandelte gleichförmige Bewegung, die einzige Bewegungsart, bei welcher keine Beschleunigung auftritt. „Vires impressae“ sind nun die besprochenen Bewegungskräfte, der Ausdruck „impressae“ ist dem Sprachgebrauch der älteren Physiker angepafst, welche sich noch vorstellten, dafs die Kräfte in Gestalt unzählig vieler kleiner Eindrücke oder Anstöfse die Bewegung der Körper aufrecht erhielten. Man kann also den Inhalt des ersten Axioms folgendermafsen wiedergeben: Jeder materielle Punkt, auf den keine Kräfte wirken, bleibt in Ruhe oder beharrt in derjenigen gleichförmigen Bewegung in welcher er sich einmal befindet.

Die hierdurch ausgesprochene eigenthümliche Eigenschaft der Masse nennt man das Beharrungsvermögen; die lateinisch schreibenden Autoren nannten dieselbe inertia — Trägheit, eine nicht ganz glückliche Bezeichnung, welche sich indessen in einigen Wortbildungen noch bis jetzt erhalten hat.

In der Anerkennung dieses ersten Axiomes liegt auch bereits als directe Schluſsfolgerung enthalten, daſs die Wirkung einer Kraft sich nur in einer Bewegungsänderung, also in einer Beschleunigung zeigt.

§ 10. Newtons zweites Axiom.

Das zweite Axiom hat den Wortlaut:

„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur."

Bei der Interpretation dieses Satzes ist zu beachten, daſs unter motus nicht einfach Geschwindigkeit zu verstehen ist, sondern daſs man dadurch im alten Sprachgebrauche denjenigen Begriff bezeichnete, den man jetzt Bewegungsgröſse oder ~~Quantität~~ der Bewegung nennt, nämlich das Product aus der bewegten Masse und der Geschwindigkeit, welche dieselbe besitzt. Es begegnet uns an dieser Stelle zum ersten Male der Begriff Masse als Quantität, als Gröſse, welche freilich, so lange wir nur einen einzelnen Massenpunkt betrachten, die Rolle eines constanten Factors spielt, mit welchem die Geschwindigkeit multiplicirt werden muſs, um die Bewegungsgröſse zu ergeben. Letztere ist daher eine gerichtete Gröſse von der Richtung der Geschwindigkeit; man erhält ihre Componenten, wenn man die Geschwindigkeitscomponenten mit diesem Factor erweitert. Bezeichnen wir die Gröſse des Massenpunktes durch m, die Geschwindigkeit durch q, deren Componenten durch $u, v, w,$ so ist die Bewegungsgröſse $m \cdot q$ und ihre Componenten sind $m \cdot u$, $m \cdot v$, $m \cdot w$. Für verschiedene Massenpunkte wird m verschiedene Gröſse haben. Zu einer Vergleichung verschiedener Massen oder zur Messung derselben durch ein festgesetztes Einheitsmaaſs der Masse können wir nur dadurch gelangen, daſs wir dieselbe Kraft auf verschiedene Massen wirken lassen und die in diesen Fällen beobachteten mutationes motus, dies sind die Aenderungsgeschwindigkeiten der Bewegungsgröſse, einander gleichsetzen. Die eintretenden Beschleunigungen stellen sich dadurch als umgekehrt proportional den bewegten Massen heraus, und dadurch ist ein Mittel des Vergleichs gegeben. Wir werden auf diesen Gedanken noch später zurückkommen, einstweilen sei noch bemerkt, daſs die hier als Gröſse eingeführte Masse bei allen wägbaren Körpern durchaus proportional dem Gewichte ist. Das Gewicht ist aber die Kraft, mit welcher die Schwere den betreffenden Körper angreift. Nun ist die Schwere die Wirkung einer ganz speciellen Naturkraft, welche wir in der Massenanziehung kennen lernen werden, und es konnte diese ausnahmelose Proportionalität zwischen der Gröſse des Beharrungsvermögens einer Masse und ihrem Gewicht an einer bestimmten Stelle der Erde nur durch zahllose Erfahrungen bestätigt werden. Von vorn herein wäre bei der groſsen Verschiedenheit der physikalischen und chemischen Eigenschaften der stofflich unterschiedenen Arten von Massen hierüber nichts Gewisses auszusagen.

Nachdem wir erkannt haben, daſs die Masse eine physikalische Gröſse ist, welche wir nach einer festgesetzten Masseneinheit messen können, während für die Kräfte noch kein Maaſs besteht, ist es deutlicher, wenn man in diesem zweiten Axiom das Wort „proportionalem" durch „aequalem" ersetzt, denn es wird durch diesen Grundsatz direct das Maaſs festgestellt, nach welchem seit NEWTON die Gröſse jeder Bewegungskraft gemessen wird, nämlich die mutatio motus, das ist der nach der Zeit genommene Differentialquotient der Bewegungsgröſse.

Die zweite Hälfte des Axioms sagt aus, daſs die Richtung des eben genannten zeitlichen Differentialquotienten der Bewegungsgröſse auch zugleich die Richtung der Kraft ist, so daſs nun die Bewegungskraft nach Gröſse und Richtung bestimmt ist.

§ 11. Mathematische Formulirung beider Axiome.

Da die Masse eines materiellen Punktes unveränderlich ist, so kann die Veränderung der Bewegungsgröſse nur durch Geschwindigkeitsänderung irgend welcher Art zu Stande kommen, bei der Bildung des im vorstehenden Paragraphen als Maaſs der Kraft aufgestellten Differentialquotienten $\frac{d}{dt}(m \,.\, q)$ tritt daher m als constanter Factor heraus und wir behalten den Differentialquotienten von q. Dieser ist aber nach den kinematischen Betrachtungen der §§ 6 und 7 die Beschleunigung $\varkappa$. Wenn wir also die Bewegungskraft nach Gröſse und Richtung durch K bezeichnen, so ist

$$K = m \,.\, \varkappa \tag{14}$$

Falls man nicht mit gerichteten Gröſsen rechnen will, ist die Zerlegung in Componenten parallel den Coordinataxen nützlich. Dabei ist zu beachten, daſs die Componenten des Differentialquotienten der Geschwindigkeit gleich den Differentialquotienten der Componenten der Geschwindigkeit sind. Die Componenten der Kraft sollen mit

X, Y, Z bezeichnet werden. Alsdann findet das zweite Axiom seinen mathematischen Ausdruck in den folgenden Gleichungen:

$$X = \frac{d}{dt}(m\,.\,u) = m \cdot \frac{du}{dt}$$

$$Y = \frac{d}{dt}(m\,.\,v) = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$Z = \frac{d}{dt}(m\,.\,w) = m \cdot \frac{dw}{dt}$$

Statt der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w kann man auch die Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z einsetzen, wie dies in § 6 zwischen Gleichung (4) und (5) ausgeführt ist und man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y &= m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z &= m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In dieser Form pflegt die NEWTON'sche Definition der Bewegungskraft am häufigsten dargestellt zu werden. Sie läſst sich in Worten folgendermaſsen ausdrücken: Die Kraft, welche auf den Massenpunkt m wirkt, wird gemessen durch das Product der angegriffenen Masse m und der Beschleunigung, welche dieselbe dadurch erhält. Da die Kraft in der Richtung der Beschleunigung wirkt, kann dieselbe in Componenten zerlegt werden, dadurch, daſs man die Beschleunigung in denselben Axenrichtungen in Componenten auflöst und die Producte aus m und diesen Componenten der Beschleunigung bildet.

Es liegt in diesen Gleichungen auch die Anerkennung des ersten Axiomes, denn wenn keine Kraft auf die Masse m wirkt, haben wir $X = Y = Z = 0$ zu setzen, folglich auch $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$. Daraus folgt, daſs die ersten Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ constante Werthe besitzen. Für diesen Fall lieferten aber die Betrachtungen des § 5 als einzig mögliche Bewegungsart die gleichförmige Bewegung in geradliniger Bahn mit constanter Geschwindigkeit, also diejenige Bewegung, welche eine Masse nach der Aussage des ersten Axioms bei Abwesenheit von Kräften besitzen kann.

Zugleich wird eine Auffassung klargestellt, die in den NEWTON'schen Axiomen nicht ausführlich betont, aber stillschweigend mit einbegriffen ist und die wir bereits im § 8 berührt haben, nämlich der Grundsatz, dafs die Wirkung einer Bewegungskraft durch die Anwesenheit einer anderen nicht verändert wird, sondern ungestört fortbesteht. Wir können nämlich die Componenten X, Y, Z als drei zugleich wirkende Kräfte auffassen, deren gemeinsame Wirkung diejenige ihrer Resultante vollständig ersetzt. Die geometrische Addition der Beschleunigungscomponenten, deren Summe die resultirende Beschleunigung ist, ergiebt dann die ungestörte Wirkung jeder einzelnen Kraftcomponente trotz der Anwesenheit der anderen. Auch in dem Falle, dafs mehrere Kräfte denselben Massenpunkt angreifen, können wir die gleichgerichteten Componenten derselben einfach algebraisch addiren, und finden die Componenten der resultirenden Beschleunigung durch algebraische Addition.

§ 12. Bewegungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit.

Eine zweite Frage, welche von NEWTON in der Abfassung seiner Axiome unberührt gelassen, dadurch freilich stillschweigend entschieden worden ist, betrifft den Einflufs der vorhandenen Geschwindigkeit. Die Gröfse der Kraft wurde gemessen allein durch die Masse und ihre Beschleunigung, und wenn auch die Beschleunigung definirt wurde durch den Grenzwerth des Zuwachses an Geschwindigkeit dividirt durch das verschwindende Zeittheilchen, in welchem derselbe zu Stande kommt, so ist doch dieser Begriff nicht abhängig von der Gröfse der bereits bestehenden Geschwindigkeit. Das NEWTON'sche Kraftmaafs verneint also den Einflufs der Geschwindigkeit. Indessen ist doch hier zu bemerken, dafs erfahrungsmäfsig Fälle vorkommen, in denen wir es zu thun haben mit Kräften, deren Intensität abhängig erscheint von der Geschwindigkeit, mit welcher die Körper im Raume fortschreiten; namentlich kommen viele Fälle vor, in denen die Bewegung einen Widerstand erleidet, welcher auf Kräfte hindeutet, deren Beschleunigungen der Bewegungsrichtung gerade entgegengesetzt gerichtet sind und zu wachsen pflegen, sowohl mit zunehmender absoluter Geschwindigkeit im Luftraume oder einem anderen Medium, als auch mit wachsender relativer Geschwindigkeit, d. h. Geschwindigkeitsdifferenz gegenüber einem anderen bewegten Körper. Wir brauchen nur an die Bewegungserscheinungen bei Anwesenheit irgend einer Art von Reibung zu denken. Wir wissen ja aus täglicher Erfahrung, dafs Massen, denen eine bestimmte Geschwindigkeit ertheilt worden ist, und welche man allen beschleunigenden Kräften zu entziehen strebt, durchaus nicht in alle Ewigkeit mit derselben Geschwindigkeit fortzulaufen pflegen, wie es eigentlich das erste NEWTON'sche Axiom vom Beharrungsvermögen fordert; es ist vielmehr nur bei ganz besonderen Vorsichtsmaafsregeln möglich, für kurze Zeiten eine befriedigende Annäherung an diesen idealen Verlauf herzustellen. Sonst finden wir, wenigstens in irdischen Verhältnissen, bei Massen, die sich im Luftraum und in Berührung mit anderen Körpern bewegen müssen, z. B. eine Unterstützung gegen die Schwerkraft haben müssen, um gegen die beschleunigende Wirkung derselben geschützt zu sein, regelmäfsig, dafs die ihnen mitgetheilte Geschwindigkeit allmählich verringert wird, dafs also eine negative Beschleunigung vorhanden ist, welche um so gröfser ist, je gröfser die herrschende Geschwindigkeit selbst ist. Deshalb haben nun die Physiker schon im vorigen Jahrhundert vielfach mit Kräften gerechnet, welche Functionen der Geschwindigkeit sein sollten; für Aufgaben, wo es sich nur um die Gewinnung eines einseitigen Resultates von beschränkter Bedeutung handelt, sind solche Annahmen auch sehr zweckmäfsig, und wir werden dieselben später auch benutzen.

Es hat sich aber durch die späteren Fortschritte der Physik gezeigt, dafs in allen Fällen, wo die Geschwindigkeiten auf die Gröfse der bewegenden Kräfte Einflufs zu haben scheinen, der Vorgang niemals eine reine Bewegungserscheinung ist, sondern dafs dann neben den Ortsveränderungen noch andere Veränderungen einhergehen, deren Auffindung zum Theil sorgfältige Beobachtungen erfordert, dafs beispielsweise in solchen Fällen, wo sogenannte Reibungskräfte zu wirken scheinen, welche die vorhandene Bewegungsgröfse allmählich verzehren, immer eine Wärmeentwickelung vor sich geht. Auch kommen Fälle vor, in denen gleichzeitig noch elektrische und magnetische Inductionswirkungen und chemische Veränderungen hervorgerufen werden, die sich dann einmischen und scheinbar Bewegungskräfte hervorrufen, die von der Geschwindigkeit abhängig sind. Wenn wir nun alle Arten von Kraftwirkungen, bei denen irgend welche der vorher erwähnten Nebenerscheinungen auftreten, aus der gegenwärtigen Betrachtung ausschliefsen, so bleiben allein übrig die reinen Bewegungskräfte, welche nur beschleunigte Bewegung ohne Nebenwirkungen erzeugen. Von diesen können wir als empirisch nachgewiesen feststellen, dafs sie unabhängig von den bestehenden Geschwindigkeiten sind, gleichwie auch von der gleichzeitigen Existenz anderer Kräfte. Diese reinen Bewegungskräfte werden namentlich von den englischen Physikern häufig auch conservative Kräfte genannt, weil dieselben, wie später gezeigt werden wird, dem Gesetz von der Conservation der Energie gehorchen.

§ 13. Dimensionen und Maafse.

Es dürfte hier der geeignete Ort sein, einen Ueberblick über die verschiedenen Arten der bisher eingeführten physikalischen Gröfsen und der zum Messen derselben nothwendigen Maafse einzuschieben. In der Kinematik hatten wir als ursprüngliche mefsbare Gröfsen nur die Längen von Strecken und von Zeiträumen gebraucht, welche nach Festsetzung einer Längeneinheit und einer Zeiteinheit zahlenmäfsig angegeben werden können. Die zur Bestimmung von Richtungsunterschieden dienenden Winkelgröfsen sind in der Rechnung stets als unbenannte Verhältnifszahlen (Kreisbogen, gemessen durch Radius) zu betrachten und daher unabhängig von der Wahl irgend welcher Einheiten. Bei der Besprechung des zweiten Newton'schen Axioms begegneten wir noch einer dritten Klasse ursprünglicher Gröfsen, den Massen, für deren Messung ebenfalls die Festsetzung einer besonderen Einheit nothwendig ist.

Alle übrigen Gröfsen aber wurden durch Gleichungen definirt, in denen aufser diesen nur die drei angeführten Grundformen von physikalischen Begriffen in verschiedenen Combinationen vorkamen. Wir werden auch im weiteren Verlauf der Dynamik sehen, dafs für alle neu aufzustellenden Begriffe dasselbe gilt. Da nun auf diese Weise im Fortschritt der Untersuchungen verhältnifsmäfsig complicirte Zusammensetzungen der ursprünglichen Gröfsenarten auftreten und man sehr häufig das Bedürfnifs hat, für eine Gröfse, die auf einem verwickelten Wege durch Heranziehung von Sätzen aus verschiedenen Kapiteln der Physik gefunden ist, die Art der charakteristischen Gruppirung zu bezeichnen, so bildet man Gleichungen, welche nicht den Zahlenwerth der zu messenden Gröfse geben sollen, sondern die Art der Zusammensetzung aus den grundlegenden Gröfsen Masse, Länge, Zeit anzeigen. Man schliefst, um an diesen besonderen Sinn solcher Gleichungen zu erinnern, nach Maxwells Vorgang zweckmäfsig die Ausdrücke in eckige Klammern ein, und bezeichnet, ohne sich an bestimmte Maafseinheiten zu binden, eine Masse durch M, eine Länge durch L und eine Zeit durch T; oft findet man in solchen Angaben das Auftreten von Bruchstrichen dadurch vermieden, dafs man negative Exponenten anwendet und dann stets ein Product irgend welcher Potenzen von M, L, T erhält. Diesen für den in Frage stehenden neuen physikalischen Begriff zu Stande kommenden Complex dieser Gröſsen nennt man die Dimension desselben.

So sehen wir aus den Gleichungen des § 5, daſs der Begriff der Geschwindigkeit eingeführt wurde als der Proportionalitätsfactor in der Aussage, daſs der zurückgelegte Weg proportional dem verstrichenen Zeitelement ist. Die Geschwindigkeit ist daher ihrer Dimension nach selbst eine Länge dividirt durch eine Zeit:

$$\text{Geschwindigkeit} = \left[\frac{L}{T}\right] = [L\,.\,T^{-1}] \tag{16}$$

Wie die Geschwindigkeit aus dem Weg, so wurde dann der Begriff Beschleunigung aus der Geschwindigkeit hergeleitet. Wir haben daher die Dimension der letzteren nochmals durch T zu dividiren und erhalten:

$$\text{Beschleunigung} = \left[\frac{L}{T^2}\right] = [L\,.\,T^{-2}] \tag{17}$$

Mit dieser Angabe stimmt es auch überein, daſs die Componenten der Beschleunigung durch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten gemessen werden, denn die Dimension von d^2x ist gleichwie diejenige von dx und von x eine Länge, während der Nenner dt^2 das Quadrat einer Zeit ist.

In Gleichung (9a) wurde ferner die Winkelgeschwindigkeit ω definirt als Proportionalitätsfactor einer mit der Zeit wachsenden Richtungsänderung, ω ist also der Dimension nach ein Winkel dividirt durch eine Zeit, oder da der Winkel eine reine Zahl ist:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} = \left[\frac{1}{T}\right] = [T^{-1}] \tag{18}$$

Die Dynamik hat uns auſser dem fundamentalen Begriff der Masse bis jetzt noch geliefert die Bewegungsgröſse als Product aus Masse und Geschwindigkeit:

$$\text{Bewegungsgröſse} = \left[M\cdot\frac{L}{T}\right] = [M\,L\,T^{-1}] \tag{19}$$

und schlieſslich den wichtigsten Begriff, die Bewegungskraft, welche gemessen werden sollte durch den Differentialquotienten der Bewegungsgröſse oder mit anderen Worten durch das Product der bewegten Masse und der Beschleunigung. Die Dimension ist also:

$$\text{Kraft} = \left[M\cdot\frac{L}{T^2}\right] = [M\,.\,L\,.\,T^{-2}] \tag{20}$$

Der Nutzen, welchen die Beachtung der Dimensionen gewährt, ist ein mehrfacher. Einmal ist es eine nothwendige Forderung, daſs nur gleichartige Gröſsen einander gleichgesetzt oder zu einer Summe vereinigt werden können; die Dimensionen der beiden Seiten einer Gleichung wie auch die der einzelnen Glieder einer Summe müssen also stets die gleichen sein. Aus der Prüfung dieses Umstandes kann man zwar nicht die zahlenmäſsige Richtigkeit irgend einer gefundenen Relation zwischen verschiedenen physikalischen Gröſsen herleiten, oft aber ohne Mühe einen etwa begangenen Irrthum dadurch nachweisen, daſs die Dimensionen dann nicht übereinstimmen. Als Beispiel für diese geforderte Gleichheit der Dimensionen wollen wir die drei Ausdrücke betrachten, welche in den Gleichungen (13), (13a), (13b) für die Gröſse der Centralbeschleunigung einer krummlinigen Bewegung angegeben sind. In der ersten Form erscheint dieselbe als Product der Weg- und der Winkelgeschwindigkeit, ist also gleich $\left[\frac{L}{T}\cdot\frac{1}{T}\right]$, in der zweiten und dritten Form erscheint der Krümmungsradius als Länge und wir erhalten $\left[L\cdot\left(\frac{1}{T}\right)^2\right]$ und $\left[\frac{1}{L}\cdot\left(\frac{L}{T}\right)^2\right]$. Man sieht, daſs alle drei Dimensionen gleich $[L\,.\,T^{-2}]$, also gleich der Dimension der Beschleunigung sind.

Der Hauptvortheil besteht aber darin, daſs wir für jede nach ihrer Dimension bekannte Gröſsenart sofort eine nicht mehr willkürliche Maaſseinheit finden, so daſs sich nach alleiniger Festsetzung der drei Grundmaaſse ein zusammenhängendes System von Maaſsen über alle Zweige der Physik verbreitet, in welchen wir die Dimensionsbestimmungen angeben können. Auch kann man aus der Betrachtung der Dimension sofort ablesen, in welcher Weise sich ein abgeleitetes Maaſs verändert, wenn in der Festsetzung der drei Grundmaaſse etwas verändert wird.

Als Urnormalen der Längen- und der Massen-Einheit werden zwei aus unveränderlichem Material hergestellte Etalons, das Meter und das Kilogramm in Paris aufbewahrt, alle in Gebrauch befindlichen Maaſsstäbe und Gewichtsstücke sind Copieen von diesen. Für die Urnormale der Zeitmessung dient die als unveränderlich anzusehende Dauer der Umdrehung der Erde um ihre Axe, eine Zeitdauer, welche durch Beobachtungen der aufeinander folgenden Durchgänge irgend eines sehr fernen Fixsterns durch das Fadenkreuz eines feststehenden Fernrohres sehr genau festgestellt werden kann. Man nennt dieses Urmaaſs den Sterntag, auf welches man zuletzt immer zurückgehen muſs, wenn man Zeitinstrumente (Uhren), deren

Princip die Unveränderlichkeit der Schwingungsdauer des Pendels ist, auf ihren richtigen Gang controliren will.

Diese Urmaaſse können nun in aliquote Theile getheilt, auch vervielfacht werden je nach der Gröſse der zu messenden Objecte. Bei Längen und Massen ist allgemein die dem dekadischen Zahlensystem entsprechende Multiplikation oder Division mit Potenzen von 10 durchgeführt, welche dann zu den bekannten Maaſsen: Centimeter, Millimeter etc. und Gramm, Milligramm etc. führt. Das praktisch verwendete Zeitmaaſs, die Secunde, steht nicht in so einfacher Beziehung zur Urnormale; die Secunde ist definirt als der $60 \times 60 \times 24$-ste Theil des bürgerlichen oder mittleren Sonnentages, letzterer steht zu dem Sternentage in einem hinreichend genau bekannten, aber irrationalen Verhältniſs, welches in der Prüfung des Sekundenpendels stets seine Rolle spielt.[1] Auſser den vom Meter und vom Kilogramm abgeleiteten Maaſsen werden in einzelnen Betrachtungen auch andere Maaſseinheiten angewendet, deren Reductionszahlen auf die bisher genannten Maaſse von der Genauigkeit der neuesten und sorgfältigsten Messungen abhängen, daher nicht absolut feststehen. Die Länge des vierten Theiles des Erdmeridians, d. h. der geodätische Abstand eines Poles vom Aequator, ferner die in der Astronomie nützlichen Maaſse, nämlich die groſse Axe der elliptischen Erdbahn und die Masse der Erde gehören zu diesen Maaſsen.

Dasjenige Maaſssystem, in welchem Centimeter, Gramm und Secunde als fundamentale Einheiten festgesetzt sind, hat neuerdings eine allgemeine Verbreitung gefunden und man pflegt in dem Falle, daſs die Dimension der gemessenen Gröſsenart als geläufig und bekannt gelten kann, einfach durch die zur Maaſszahl hinzugesetzte Bezeichnung (*C. G. S.*), d. h. Centimeter, Gramm, Secunde, anzudeuten, daſs die Angabe sich auf das von diesen Einheiten hergeleitete Maaſssystem bezieht, welchem man den Namen **absolutes Maaſssystem** gegeben hat.

---

[1] Während der bürgerliche oder mittlere Sonnentag in Folge der Definition der Secunde genau 86 400 Secunden enthält, umfaſst der Sternentag 86 164,09 . . . Secunden, eine Angabe, die für jede Reduction eine hinreichende Genauigkeit liefert.

Zweiter Abschnitt.

Besondere Formen von Bewegungskräften.

Die allgemeinen Grundsätze über die Existenz und die Messung von Kräften, welche durch die besprochenen NEWTON'schen Axiome gegeben sind, sollen jetzt zum Studium von Bewegungserscheinungen verwendet werden, welche ein materieller Punkt unter der Wirkung einiger besonderer, wegen ihres häufigen Vorkommens wichtiger Naturkräfte zeigt.

Erstes Kapitel.

§ 14. Die sogenannte Centrifugalkraft.

Zuerst wollen wir die Kraftwirkung betrachten, welche bei jeder krummlinigen Bewegung eines materiellen Punktes auftritt. Die kinematischen Betrachtungen des § 7 hatten uns darüber belehrt, dafs eine gekrümmte Bahn, unabhängig von der etwa vorhandenen Wegbeschleunigung, eine nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtete Beschleunigung erfordert, deren Gröfse durch die Gleichungen (13), (13a), (13b) angegeben ist als bestimmt durch je zwei der drei Bestimmungsstücke: Weggeschwindigkeit q, Winkelgeschwindigkeit ω und Krümmungsradius ϱ. Da wir nun aus dem Auftreten jeder Beschleunigung auf das Wirken einer Kraft schliefsen müssen, so erkennen wir, dafs zur Aufrechterhaltung einer krummlinigen Bewegung eine nach dem Krümmungscentrum gerichtete Kraft nöthig ist, welche wir messen durch das Product der bewegten Masse m mal der durch jene Gleichungen (13) angegebenen Centralbeschleunigung. Diese Kraft nennt man Centralkraft, auch wohl Centripetalkraft, ihr Betrag C ist:

$$C = m \,.\, q \,.\, \omega = m \,.\, \varrho \,.\, \omega^2 = m \,.\, \frac{1}{\varrho} \,.\, q^2 \tag{21}$$

Den einfachsten Fall, in welchem jene Kraft ihre Intensität nicht ändert, während ihre Richtung stets nach demselben Punkt hinweist, haben wir vor uns, wenn der Massenpunkt m in einer Kreisbahn mit constanter Geschwindigkeit umläuft; dann bleiben nämlich q, ω und ϱ feste Gröfsen. Aus den einzelnen Ausdrücken der vorstehenden Gleichung können wir dann folgende Gesetze herauslesen:

1. Die Centralkraft ist proportional der kreisenden Masse.

2. Bei gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ist die Centralkraft dem Radius proportional.

3. Bei gleichbleibender Weggeschwindigkeit ist die Centralkraft der Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ proportional.

Am häufigsten werden derartige Bewegungen dadurch erzeugt, daſs eine Masse durch sogenannt feste Verbindungen gezwungen wird, sich in einer Kreisbahn zu bewegen. Dies kann dadurch geschehen, daſs wir dieselbe an einem Faden befestigen, dessen anderes Ende sich nicht verrücken kann, so daſs die Fadenlänge den Radius der Kreisbahn bestimmt; oder man kann durch eine gekrümmte Wandfläche oder durch eine Schiene das Austreten aus der Kreisbahn verhindern. In allen diesen Fällen wird die zur Erzeugung der Kreisbewegung nöthige Centralkraft durch die elastische Deformation der Verbindungen hergestellt: Der Faden wird dabei gespannt und so weit verlängert, daſs die auf Verkürzung hinwirkende elastische Kraft desselben gerade die erforderliche Centralkraft liefert, ebenso wird die Schiene nach auſsen verbogen und die sogenannt feste Wand wird eingedrückt, damit diese Wirkung zu Stande kommt. Die Verbiegung eines festen Lagers hatten wir bereits zur Erklärung der Ruhe eines von der Schwerkraft angegriffenen Körpers herangezogen; die Erscheinung ist also dieselbe, als ob der im Kreise bewegte Körper auf die festen Verbindungen eine Kraft äuſserte, deren Intensität der nöthigen Centralkraft gleich ist, aber die entgegengesetzte Richtung vom Centrum weg besitzt. Dieser Erscheinung Rechnung tragend spricht man von der Centrifugalkraft des in krummer Bahn bewegten Körpers. Sobald jene festen Verbindungen aufhören zu wirken, wenn beispielsweise der Faden reiſst, so bewegt sich der Körper lediglich in Folge seines Beharrungsvermögens geradlinig weiter in Richtung der Tangente und in gleichförmiger Bewegung; er entfernt sich dabei mehr und mehr vom Mittelpunkt der vorhergehenden Kreisbahn. Dies ist also nicht die Wirkung einer vom Centrum wegtreibenden Bewegungskraft; sondern eine reine Folge des Fehlens jeder Bewegungskraft.

Die sogenannte Centrifugalkraft ist mithin nur ein Ausdruck für diejenigen Erscheinungen, welche bei festen Verbindungen die zur Erhaltung der krummen Bahn nöthige Centralkraft erzeugen, nicht aber eine eigenthümliche, Bewegung verursachende Naturkraft.

Zweites Kapitel.

Schwerkraft und Fallbewegung.

§ 15. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Wir gehen jetzt über zur Besprechung derjenigen Bewegungserscheinungen, welche ihre Erklärung durch das Wirken der Schwerkraft finden, und die man ganz allgemein Fallbewegungen nennt. Die Schwerkraft ist in der ganzen praktischen Physik, wie auch im täglichen Leben von der gröſsten Wichtigkeit, weil dieselbe an allen uns erreichbaren Orten jederzeit zur Verfügung steht und auf alle Massen in der Nähe der Erdoberfläche nach demselben auſserordentlich einfachen Gesetze wirkt. Es steht nämlich erfahrungsmäſsig fest, daſs dieselbe allen Massen unabhängig von deren Gröſse und Beschaffenheit eine Beschleunigung ertheilt, welche innerhalb solcher räumlicher Grenzen, die wir in einem Laboratorium vor uns zu haben pflegen und welche wir bei einer einzelnen Versuchsanordnung bequem beherrschen können, so gut wie constant in Intensität und Richtung ist. Wenigstens sind die Veränderungen derselben in diesen Fällen so auſserordentlich klein, daſs besonders feine, eigens zu diesem Zwecke angestellte Messungen nöthig sind, um Differenzen nachzuweisen. An verschiedenen Orten zeigt diese Beschleunigung bemerkbare, wenn auch immerhin verhältniſsmäſsig geringe Verschiedenheiten ihrer Intensität; man kann dieselbe als Function der geographischen Breite und der Höhe über dem Meeresspiegel darstellen. Die Richtung derselben stimmt überall nahezu mit der aus astronomischen Messungen abzuleitenden Richtung gegen den Erdmittelpunkt überein; die Abweichungen rühren von der durch die Rotation der Erde bewirkten Centrifugalkraft, wie auch von der ellipsoidischen Gestalt der Erde und von abnormen lokalen Massenvertheilungen (Gebirgen etc.) her.

Wir wollen jetzt alle diese Complicationen auſser Acht lassen, und uns auf einen begrenzten Spielraum beschränken, innerhalb dessen die Beschleunigung der Schwere als eine Constante in Intensität und Richtung angesehen werden soll. Wir bezeichnen dieselbe durch den Buchstaben g. Die Kraft, welche der Masse m diese Beschleunigung ertheilt, ist nach dem Newton'schen Maaſse $m . g$, man nennt sie das Gewicht der Masse m; die früher erwähnte Proportionalität zwischen der Masse und ihrem Gewicht findet also seine Begründung in der erfahrungsmäſsigen Constanz von g für alle Körper an demselben Beobachtungsort.

Die Richtung der Schwerkraft nennt man die verticale oder die Richtung von oben nach unten. Wir wollen für die folgenden Betrachtungen das rechtwinkelige Coordinatensystem so richten, daſs die positive x-Axe vertical nach oben zeigt, die y- und die z-Axe bestimmen dann zwei auf einander senkrechte, horizontale Richtungen. Die Componenten der Schwerkraft X, Y, Z erhalten nach den gemachten Festsetzungen folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} X &= -m \,.\, g \\ Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Es kann nun der Fall eintreten, daſs die Masse m nicht anders fallen kann, als indem sie zugleich noch andere träge Massen, welche der Wirkung der Schwere durch irgend welche Mittel entzogen sind, mit sich zugleich in Bewegung setzt, und zwar in dieselbe Bewegung, in die sie selbst geräth. Die für instructive Zwecke vollkommendste Einrichtung dieser Art zeigt die Atwood'sche Fallmaschine, welche zum experimentellen Nachweise der Fallgesetze gebraucht wird. Dieselbe besteht aus einem mit möglichst geringer Reibung drehbaren Rade, über welches eine biegsame Schnur läuft, an deren Enden auf beiden Seiten gleiche Massen hängen. Diese Massen werden zwar von der Schwerkraft angegriffen, sind aber deren beschleunigendem Einfluſs entzogen, denn, wenn die eine Masse diesem Zuge folgen würde, so würde die andere durch die Fadenübertragung in entgegengesetzter Richtung aufwärts gegen die Richtung der Beschleunigung bewegt werden. Die beiden Kräfte, welche die Schwerkraft auf diese Massen äuſsert, halten sich also in jeder Lage das Gleichgewicht. Damit nicht etwa die verschiedene Länge des Fadens auf beiden Seiten des Rades ein Uebergewicht erzeugt, pflegt man die beiden Massen auch noch unterhalb durch einen Faden zu verbinden, welcher in mäſsiger Spannung über ein ebensolches Rad läuft; man ist dann sicher, daſs sich auf beiden Seiten stets gleiche Fadenlängen befinden. Wenn diese Massen einmal durch einen äuſseren Eingriff in Bewegung gesetzt sind, so laufen sie in Folge des Beharrungsvermögens mit constanter Geschwindigkeit weiter, so weit der Spielraum reicht. Legt man aber zu einer der Massen noch ein Uebergewicht hinzu, so ist die Schwerkraft desselben nicht compensirt, das Gleichgewicht ist gestört, und in Folge dessen beginnt diese zugelegte Masse zu fallen und mufs dabei die beiden vorher nicht beschleunigten Massen mitnehmen. Wir wollen die mathematische Behandlung der Fallbewegung unter dieser umfassenderen Annahme durchführen, dafs die in Bewegung gesetzte Masse gröfser ist, als diejenige, auf welche die Schwerkraft wirkt und deren Gewicht das ganze System treibt. Dabei wollen wir uns aber nicht an die Beschränkungen fesseln, welche aus der Construction der Atwood'schen Fallmaschine folgen, dafs z. B. keine horizontalen Bewegungen möglich sind, wir wollen vielmehr aus den Gleichungen, welche wir mit Hülfe des Newton'schen Kraftmaafses aufstellen können, die allgemeinsten Folgerungen ziehen.

Nennen wir die von der Schwerkraft angegriffene Masse m, während die übrigen mitgerissenen, lediglich trägen Massen zusammen durch M bezeichnet werden, so wird die Masse $(M + m)$ in Bewegung gesetzt, und die Componenten der Kraft werden nach den Gleichungen (15) gleichzusetzen sein dieser Masse $(M + m)$ multiplicirt mit den zweiten Differentialquotienten ihrer Coordinaten. Streng genommen handelt es sich beim Problem der Bewegung der Fallmaschine in seiner einfachsten Form um drei Massenpunkte, wir können aber wegen der festen Fadenverbindung allein die Coordinaten von m verfolgen und M an demselben Orte mit m vereinigt denken.

Die Gleichungen (22) liefern uns dann in Gemeinschaft mit den Gleichungen (15) folgende Differentialgleichungen als Grundlage für die folgende Betrachtung:

$$\left.\begin{aligned} (M + m)\cdot\frac{d^2 x}{d t^2} &= -\, m\,.\,g \\ (M + m)\cdot\frac{d^2 y}{d t^2} &= 0 \\ (M + m)\cdot\frac{d^2 z}{d t^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Diese Differentialgleichungen haben wir nun zu integriren, um x, y, z als Functionen der Zeit zu finden; erst dann ist die Art der Bewegung, welche unter diesen Voraussetzungen eintritt, explicite angegeben. Wir denken uns zu diesem Zweck in der ersten Gleichung $m\,.\,g$ mit positivem Vorzeichen auf die linke Seite gebracht, so dafs die rechten Seiten aller drei Gleichungen gleich Null sind. Es ist leicht, die linken Seiten dann als Differentialquotienten nach t darzustellen. Diese Umformung liefert dann folgende nur formell von (23) verschiedenen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)\frac{dx}{dt}+m.g.t\right\}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)\frac{dy}{dt}\right\}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)\frac{dz}{dt}\right\}=0$$

Diese Gleichungen sagen aus, dafs die Ausdrücke, deren Differentialquotienten hier gleich Null erkannt sind, sich in der Zeit nicht ändern, also irgend welche, zwar unbestimmte aber constante Werthe haben müssen, die wir der Reihe nach durch a, b, c bezeichnen wollen. Das erste Resultat ist also:

$$\left.\begin{aligned}(M+m)\frac{dx}{dt}+m.g.t&=a\\(M+m)\frac{dy}{dt}&=b\\(M+m)\frac{dz}{dt}&=c\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Schon aus dieser ersten Integration können wir einige Eigenschaften der Fallbewegung herauslesen: So sehen wir, dafs die horizontalen Geschwindigkeitscomponenten, dy/dt und dz/dt, wenn sie überhaupt vorhanden sind, constante Werthe haben müssen, während die verticale Geschwindigkeitscomponente dx/dt vermehrt um ein proportional mit der Zeit wachsendes Glied eine unveränderliche Summe liefert, selbst also mit der Zeit abnehmen mufs. Ist dieselbe anfangs positiv, also nach oben gerichtet, so wird dieselbe abnehmen, bis sie gleich Null geworden ist, dann tritt kein Steigen mehr ein, vielmehr wird dieselbe negativ, also abwärts gerichtet und wächst dann mehr und mehr.

Wir fahren nun in der Integration fort, indem wir die Constanten a, b, c auf die linken Seiten der Gleichungen (24) bringen und dann die linken Seiten wieder als Differentialquotienten nach t darstellen. Es ist durch Ausführung der Differentiationen leicht nachzuweisen, dafs die folgenden Gleichungen nur eine Umformung von (24) sind:

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)x-at+\tfrac{1}{2}mgt^2\right\}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)y-bt\right\}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(M+m)z-ct\right\}=0.$$

Diese Gleichungen sagen wiederum aus, dafs die in geschweifte Klammern eingeschlossenen Ausdrücke irgend welche in der Zeit unveränderlichen Beträge besitzen müssen, die wir der Reihe nach durch A, B, C bezeichnen wollen.

$$\left.\begin{aligned}(M+m)x - at + \tfrac{1}{2}mgt^2 &= A\\ (M+m)y - bt &= B\\ (M+m)z - ct &= C\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Diese Gleichungen enthalten keine Differentialquotienten mehr, sondern stellen x, y, z direct als Functionen der Zeit dar; die Integration ist also vollendet, und zwar haben wir keinerlei Specialisirungen bei der Rechnung zugelassen, wir haben mithin die allgemeinsten Integrale gefunden, welche in ihrer Form sämmtliche Bewegungserscheinungen umfassen müssen, die bei dem Bestehen des in den Differentialgleichungen (23) aufgestellten Gesetzes der Kraftwirkung möglich sind.

§ 16. Ueber die Bedeutung der Differentialgleichungen in der Physik.

In die Integralgleichungen (25) sind sechs unbestimmte Constanten eingetreten, welche den ursprünglichen Differentialgleichungen (23) fremd sind; diese eben befähigen die Integralgleichungen sich den Besonderheiten jedes einzelnen Falls anzupassen. Da aber der Verlauf der Bewegung durch das Gesetz, nach welchem die Schwerkraft wirkt, und welches bereits in den Differentialgleichungen seinen Ausdruck findet, vollständig bestimmt ist, so können jene in den einzelnen Fällen von einander abweichenden Besonderheiten nur in den verschiedenen Zuständen bestehen, in denen sich der Massenpunkt zu Anfang der Betrachtung befindet. Der Zustand eines Massenpunktes ist aber vollkommen angegeben, wenn wir wissen, an welchem Orte er sich befindet und welche Geschwindigkeit er besitzt. Zur Angabe des Ortes sind drei Gröfsen nöthig, und zur Angabe der Geschwindigkeit in ihrer Gröfse und Richtung ebenfalls drei Gröfsen. Diese sechs Angaben reichen gerade aus, um die sechs Integrationsconstanten den Anfangsbedingungen entsprechend zu bestimmen.

Die Aufstellung der Differentialgleichungen (23) und ihre ausgeführte Integration ist das erste Beispiel für einen Gedankengang, der uns in der gesammten theoretischen Physik überall wieder begegnen wird; wir wollen deshalb hier einige allgemeine Betrachtungen über denselben anstellen. Die Bedeutung der Differentialgleichungen für die Physik besteht darin, dafs sie in ihrem Inhalt frei vom zufälligen des Einzelfalles sind und nur das wesentliche und gesetzmäfsige ausdrücken, was allen Fällen einer gewissen Klasse von Erscheinungen gemeinsam ist. Die experimentelle Beobachtung erstreckt sich immer nur auf Einzelfälle, deren Ergebnifs oder deren Deutung behaftet ist mit besonderen Gröfsenangaben, die sich auf die Verhältnisse der gerade gewählten Versuchsanordnung beziehen. In der mathematischen Formulirung einer experimentellen Beobachtung, also beispielsweise in der gelungenen Darstellung der Bewegung einen Massenpunkt durch Angabe von bestimmten Zeitfunctionen für x, y, z, ist das Gesetzmäfsige des Vorganges getrübt durch die Einmischung von Gröfsen, die nur für den herausgegriffenen Fall charakteristisch sind. Da aber die Gleichungen für den ganzen betrachteten Verlauf richtige Angaben liefern sollen, so werden wir dieselben auch nach der Zeit differenziren können, einmal oder auch mehrmals, und werden dadurch neue Gleichungen erhalten, welche ebenfalls richtige Aussagen über die vorliegende Bewegung liefern. Diese neu gewonnenen Gleichungen können wir aber benutzen, um aus der Vereinigung mit den ursprünglichen Gleichungen so viele von den charakteristischen Gröfsen des Einzelfalles zu eliminiren, als wir neue Gleichungen gewonnen haben. Häufig ist die Combination der differenzirten mit den ursprünglichen Gleichungen unnöthig, wenn nämlich die zu eliminirenden Constanten in additiver Stellung vorkommen und deshalb bei der Differenziation von selbst verschwinden. Jedenfalls können wir auf diese Weise für den in Rede stehenden Bewegungsvorgang zutreffende Gleichungen bilden, in welchen die Coordinaten und deren Differentialquotienten, nicht aber jene Constanten von specieller Bedeutung mehr vorkommen. Diese Resultate sind nun die Differentialgleichungen für die beobachtete Art von Bewegungen, und die beschriebene Methode zu denselben zu gelangen, kennzeichnet den Weg, auf dem wir überhaupt in der Physik die Einzelbeobachtungen zur Auffindung allgemeiner Gesetze verwerthen. Jene ursprünglichen, die beobachteten Thatsachen wiedergebenden endlichen Gleichungen zwischen den Coordinaten und der Zeit sind übrigens nicht etwa die vollständigen Integralgleichungen, welche wir durch sorgfältige mathematische Schritte unter Aufrechterhaltung gröfster Allgemeinheit aus den Differentialgleichungen herleiten, sondern vielmehr möglichst einfache particuläre Integrale, deren Beobachtung das mindeste Maafs von Umständlichkeit, die wenigsten Fehlerquellen und die gröfste

Genauigkeit mit einander vereinigen. Im entgegengesetzten Falle würde die ganze analytische Arbeit ja unnöthig sein, die Aufsuchung der Differentialgleichungen und deren vollständige Integration würde uns dann schliefslich nur wieder auf denselben Standpunkt der Erkenntnifs zurückführen, von welchem wir ausgegangen sind.

Es kommen allerdings aufserdem Fälle vor, in denen die Thatsachen nicht direct durch Gleichungen zu beschreiben sind, oder in denen man jedenfalls diese Gleichungen nicht auffinden kann. Alsdann versucht man aus plausiblen Annahmen oder Analogieschlüssen direct Differentialgleichungen aufzustellen, welche nicht aus Beobachtungen abgeleitet sind. Solche Gedankengänge sind aber Schritte ins Finstere und tragen einen durchaus hypothetischen Charakter; eine Berechtigung finden dieselben erst dadurch, dafs es gelingt, Integrale derselben zu bilden, deren Richtigkeit in allen Fällen durch Erfahrung — Experiment und Messung — bestätigt wird.

§ 17. Fortsetzung der Lehre von den Fallbewegungen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen kehren wir zurück zu unserer gegenwärtigen Aufgabe, die allgemeinste Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung der Schwerkraft zu untersuchen. Zunächst wollen wir die sechs Integrationsconstanten, welche durch die erste und die zweite Integration, Gleichungen (24) und (25), eingeführt worden sind, durch die den Anfangszustand definirenden Gröfsen feststellen und dadurch zugleich nachweisen, dafs die gefundenen Integralgleichungen in der That die allgemeinsten Lösungen sind. Den willkürlich vorzuschreibenden Anfangszustand bestimmen wir dadurch, dafs wir für die Zeit $t = 0$ folgende Festsetzungen aufstellen: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $dx/dt = u_0$, $dy/dt = v_0$, $dz/dt = w_0$, wo die Gröfsen x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0 vorgeschrieben sind.

Die Gleichungen (24) gehen dann für $t = 0$ über in:

$$\left.\begin{aligned} (M+m).u_0 &= a \\ (M+m).v_0 &= b \\ (M+m).w_0 &= c \\ \text{während die Gleichungen (25) für } t = 0 \text{ ergeben:}& \\ (M+m).x_0 &= A \\ (M+m).y_0 &= B \\ (M+m).z_0 &= C \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Integrationsconstanten sind also in jedem Falle auf sehr einfache Weise dem gegebenen Anfangszustande anzupassen. Benutzen wir die gefundenen Werthe und schreiben der Kürze halber $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, $dz/dt = w$, so erhalten die Gleichungen (24) die Form:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 - \frac{m}{M+m} g\,t \\ v &= v_0 \\ w &= w_0 \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

und die Gleichungen (25) die Form:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u_0\,t - \tfrac{1}{2}\frac{m}{M+m} g\,t^2 \\ y &= y_0 + v_0\,t \\ z &= z_0 + w_0\,t \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

Man kann diese beiden Gleichungssysteme, namentlich die auf die verticale Axe bezüglichen, ersten Zeilen derselben auch durch Einführung anderer durch den Anfangszustand bedingter Constanten darstellen. Es ist nämlich stets ein gewisser Zeitpunkt $t = \tau$ zu finden, in welchem $u = 0$ wird. Sollte die Verticalcomponente der Anfangsgeschwindigkeit, also u_0, bereits negativ, nach unten gerichtet sein, so liegt dieser Zeitpunkt bereits bei Beginn der Betrachtung in der Vergangenheit, man hat alsdann die angenommenen Gesetze der Bewegung nur als bereits früher bestehend anzusehen, wodurch die Betrachtung selbst nicht verändert wird. Ist aber u_0 positiv, so begegnen wir dem Zeitpunkt τ noch im Laufe der zu erwartenden Ereignisse. Jedenfalls wird zu dieser Zeit die erste der Gleichungen (24a) folgende Form annehmen:

$$0 = u_0 - \frac{m}{M+m} g \,.\, \tau \tag{27}$$

Diese können wir von der allgemein gültigen Gleichung (24a, Nr. 1) abziehen, und finden:

$$u = -\frac{m}{M+m} \,.\, g \,.\, (t - \tau) \tag{28}$$

In dieser Gleichung ist u_0 verschwunden, dafür aber τ eingetreten, welches durch Gleichung (27) in seiner Abhängigkeit von u_0 gefunden ist. Man erkennt aus dieser Gleichung (28) die Proportionalität von u mit der Zeitdifferenz $(t - \tau)$; so lange letztere noch negativ ist, ist u nach oben gerichtet, später nach Ueberschreitung des Augenblickes $t = \tau$ aber abwärts gerichtet und wachsend.

Ferner ist leicht zu sehen, dafs die x-Coordinate ihren positiv gröfsten Werth, der Massenpunkt also seine höchste Erhebung erreicht zu eben dieser Zeit τ. Es folgt dies zwar mathematisch direct aus den beiden erfüllten Bedingungen $dx/dt = 0$ und $d^2x/dt^2 < 0$, doch wollen wir, um die Abmessung dieser gröfsten Höhe mit in die Rechnung aufnehmen zu können, die erste der Gleichungen (25a) heranziehen. Zunächst ersetzen wir in derselben u_0 durch τ nach Gleichung (27) und erhalten:

$$x = x_0 + \frac{m}{M+m} g \,.\, t \,.\, \tau - \tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g t^2$$

wofür man auch schreiben kann:

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g \tau^2 - \tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g (t - \tau)^2$$

Wir bilden jetzt diese Gleichung für den Zeitpunkt $t = \tau$, und bezeichnen die Höhe x, welche dann gilt, durch h. Es ist dann:

$$h = x_0 + \tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g \tau^2 \tag{29}$$

Die Vereinigung dieser Gleichung mit der vorhergehenden liefert:

$$h - x = \tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g (t - \tau)^2 \tag{30}$$

Dieses Resultat ersetzt vollständig die erste Gleichung des Systems (25a), doch ist in derselben aufser der durch τ ersetzten Constante u_0 auch noch x_0 verschwunden, statt welcher wir die aus Gleichung (29) bekannte Höhe h aufgenommen haben. Man sieht aus dieser Form (30) sofort, dafs die Höhe h die höchste während der Bewegung erreichte Erhebung des Punktes bezeichnet, denn die rechte Seite enthält aufser den absoluten Factoren $\tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} . g$ das Quadrat der Zeitdifferenz $(t - \tau)$. Dieses Quadrat ist aber stets positiv, auch wenn $(t - \tau)$ selbst noch negativ ist. Das gleiche mufs auch für die linke Seite dieser Gleichung gelten, es mufs also zu allen Zeiten $x \leqq h$ bleiben. Der Grenzwerth $x = h$ wird erreicht zur Zeit $t = \tau$. Die Differenz $(h - x)$ stellt die Fallhöhe dar, welche in der Fallzeit $(t - \tau)$ zurückgelegt wird; die Gleichung (30) spricht also das Gesetz aus, dafs die Fallhöhe proportional dem Quadrate der Fallzeit wächst.

Wenn über den Anfangspunkt der Zeitrechnung und über die Lage des Coordinatensystems noch keine anderweitigen Festsetzungen getroffen sind, erhalten die Gleichungen (28) und (30) die einfachste Gestalt, wenn wir die Zeit von dem vorher durch τ bezeichneten Augenblicke an zählen, also $\tau = 0$ setzen. Ferner können wir dann den Ursprung der Coordinaten in den höchsten Punkt der Bahn verlegen; es ist dann auch $h = 0$ und jene Gleichungen erhalten die einfachere Form:

$$u = -\frac{m}{M+m} g \, . \, t \tag{28a}$$

$$x = -\tfrac{1}{2} \frac{m}{M+m} g \, t^2 \tag{30a}$$

Beschränken wir uns auch noch auf den Fall, daſs keine lediglich träge Masse M mitgeschleppt werden soll, sondern die ganze bewegte Masse von der Schwerkraft angegriffen wird, wie dies beim freien Fall und Wurf zutrifft, so ist $M = 0$ zu setzen, der in den vorangehenden Gleichungen vorkommende Quotient der Massen wird $= 1$, und es gelten dann die folgenden Gleichungen:

$$u = -g \, . \, t \tag{28b}$$

$$x = -\tfrac{1}{2} g \, t^2 \tag{30b}$$

welche die verticale Bewegung des freien Falles in der einfachsten Form beschreiben, ohne daſs das gleichzeitige Bestehen horizontaler Bewegungscomponenten dadurch ausgeschlossen wäre. Die letzteren finden vielmehr durch die zweite und dritte Gleichung der Systeme (24a) und (25a) ungestört ihren Ausdruck.

§ 18. Ausblick auf das Gesetz von der Erhaltung der Energie.

Man kann aus den vollständigen Lösungen (28) und (30), in denen Verticalgeschwindigkeit und Höhe des Massenpunktes als Functionen der Zeit gegeben sind, eine Relation zwischen beiden herleiten, indem man die Zeit eliminirt. Wenn wir etwa aus (28) den Ausdruck für $(t - \tau)$ entnehmen und in (30) einsetzen, so erhalten wir nach einer leichten Umformung:

$$m \, . \, g \, . \, (h - x) = \tfrac{1}{2} (M + m) \, . \, u^2$$

Diese Formel ist mitunter nützlich zu verwenden, wenn keine horizontalen Geschwindigkeitscomponenten vorhanden sind. Dieselbe wird hier aber hauptsächlich deshalb angeführt, weil sie einen besonderen Fall eines allgemein gültigen Gesetzes ausspricht. Beide

Seiten der vorstehenden Gleichung stellen nämlich in der Dynamik hochwichtige Begriffe dar. Links steht das Product der treibenden Kraft $m.g$ mal der Weglänge $(h-x)$, längs deren dieselbe beschleunigend gewirkt hat. Man nennt dieses Product die von der Kraft längs des Weges geleistete Arbeit. Auf der rechten Seite steht das halbe Product aus der in Bewegung gesetzten Masse $(M+m)$ mal dem Quadrat der erlangten Verticalgeschwindigkeit, also eine Gröfse, welche nur vom augenblicklichen Bewegungszustand, nicht von der Art, wie die Masse in denselben gelangte, abhängt. Man nennt das halbe Product der Masse mal dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit, einem alten, von Leibniz herrührenden Sprachgebrauch folgend, meistens die lebendige Kraft (vis viva), obwohl wir es dabei nicht mit einer Kraftgröfse zu thun haben, sondern, wie man sofort sieht, mit einer Gröfse von der Dimension $[M L^2 T^{-2}]$, welche man als Arbeitsgröfse oder Energie bezeichnet.

Sobald auch horizontale Geschwindigkeitscomponenten vorhanden sind, welche sich mit der verticalen zu einer Resultate q nach Gleichung (3a) zusammensetzen, mifst die rechte Seite der vorstehenden Gleichung nicht die gesammte lebendige Kraft der bewegten Masse. Diese ist vielmehr gleich $\frac{1}{2}(M+m).q^2$, also gleich $\frac{1}{2}(M+m).(u^2+v^2+w^2)$. Wir wollen deshalb zu beiden Seiten der Gleichung $\frac{1}{2}(M+m)(v^2+w^2)$ hinzu addiren. Aus den Gleichungen (24a) sehen wir, dafs bei der Fallbewegung v und w nur constante Werthe besitzen können, dafs also

$$\tfrac{1}{2}(M+m)(v^2+w^2)=H$$

eine während der Bewegung festbleibende positive Gröfse ist. So kommen wir zu der Relation

$$m.g.(h-x)+H=\tfrac{1}{2}(M+m)(u^2+v^2+w^2)=\tfrac{1}{2}(M+m)\,q^2.$$

Die linke Seite weist in diesem Falle aufser der Arbeit der Schwerkraft im Fallraume $(h-x)$ noch eine additive Constante H auf, welche nach ihrer Definition die lebendige Kraft mifst in dem Zustande, wo die Masse ihre höchste Erhebung erreicht hat, keine verticale, sondern nur horizontale Bewegungscomponenten besitzt.

Wir können uns aber auch in diesem allgemeinen Falle von der Constante H befreien, indem wir die letzte Gleichung für zwei verschiedene Augenblicke der Bewegung bilden. Im ersten Zustand sei die Masse in der Höhe x_1, ihre resultirende Geschwindigkeit sei mit q_1 bezeichnet, für den zweiten Zustand sollen x_2 und q_2 gelten. Subtrahiren wir dann die für die beiden Stadien ausgefertigten

Gleichungen, so hebt sich H, wie auch die Maximalhöhe h und es bleibt:

$$m \cdot g \cdot (x_1 - x_2) = \tfrac{1}{2}(M + m)\, q_2{}^2 - \tfrac{1}{2}(M + m)\, q_1{}^2 \tag{31}$$

Die Gleichung gilt für alle Fallbewegungen, auch solche in schrägen Richtungen und in gekrümmten Bahnen, und sagt aus, daſs der Zuwachs an lebendiger Kraft zwischen zwei Stadien der Bewegung nur abhängt von der Höhendifferenz der beiden Lagen.

Man kann die Gleichung (31) auch so schreiben:

$$m \cdot g \cdot x_1 + \tfrac{1}{2}(M + m)\, q_1{}^2 = m \cdot g \cdot x_2 + \tfrac{1}{2}(M + m)\, q_2{}^2 \tag{31a}$$

Die beiden Seiten der Gleichung sind jetzt ganz gleich gebaut, die linke bezieht sich auf den ersten Zustand, die rechte auf den zweiten, und da beide Zustände willkürlich herausgegriffen sind, so erkennt man, daſs während der ganzen Bewegung der Complex

$$E = m \cdot g \cdot x + \tfrac{1}{2}(M + m)\, q^2 \tag{32}$$

seinen Werth nicht ändert, daſs also das durch Gleichung (32) eingeführte E eine Constante ist, welche man die Energie der schweren und trägen Masse nennt. Wir haben also hier das erste Beispiel des Gesetzes von der Erhaltung der Energie bei der Bewegung von Massen unter der Wirkung conservativer Kräfte.

Die Energie erscheint in Gleichung (32) zusammengesetzt aus zwei Theilen; der erste Theil ist das Product der Höhenlage der Masse m, multiplicirt mit der treibenden Kraft $m \cdot g$. Dieser Theil ist also um so gröſser, je höher m gehoben ist, während er sich bei Bewegungen in horizontaler Richtung, wegen des dabei constanten x, nicht ändert. Die Gröſse dieses Ausdruckes hängt aber von der Lage des Coordinatensystems ab, da es aber ganz willkürlich ist, in welcher Höhe wir die Abmessung $x = 0$ setzen, so ist auch der Werth dieses Ausdruckes $m \cdot g \cdot x$ unbestimmt; bestimmt ist nur die Differenz des Ausdrucks für zwei verschiedene Höhen, das ist nämlich die Arbeit, welche die Kraft beim Sinken durch diese Höhendifferenz leistet. Es ist also dieser Theil der Energie mit einer unbestimmten additiven Constante behaftet, welche indessen die Betrachtungen niemals stört. Man nennt diesen Theil die potentielle Energie, den zweiten Theil, den wir bereits unter dem Namen lebendige Kraft kennen lernten, nennt man in moderner Ausdrucksweise actuelle oder kinetische Energie; man kann dann das bis jetzt nur für die Fallbewegung erkannte Gesetz auch aussprechen: Die Summe der potentiellen und kinetischen Energie bleibt während der Bewegung constant. Wenn also die eine abnimmt, mufs die andere wachsen.

Beide Formen der Energie sind Arbeitsäquivalente; die kinetische Energie für diejenige Arbeit, welche die Masse vermöge ihres Bewegungszustandes zu leisten vermag, die potentielle für den Arbeitsvorrath, den das Gewicht dadurch in sich birgt, dafs es sich auf der Höhe x befindet, von der es herabfallen kann. Wenn nämlich eine Masse durch ihr Gewicht, also durch die Schwerkraft, Arbeit leisten soll, so kann dies nur dadurch geschehen, dafs dieselbe dabei von ihrer ursprünglichen Höhe herabsinkt, wie wir das z. B. am Gewichte eines Uhrwerks beobachten, dessen Arbeitsleistung darin besteht, die Pendelschwingungen und Drehungen der Zahnräder, welche beide sehr bald durch Reibung vernichtet werden würden, aufrecht zu erhalten. Wenn das Gewicht am tiefsten Punkte angelangt ist, welchen es vermöge seiner Befestigung an einer Schnur von bestimmter Länge oder wegen einer der Weiterbewegung sich widersetzenden Unterlage (Erdboden) erreichen kann, dann bleibt die Uhr stehen, und wir müssen, um sie wieder in Gang zu setzen, durch die Kraft unseres Armes Arbeit leisten, indem wir das Gewicht wieder in die Höhe heben — die Uhr aufziehen. Die vorher erwähnte unbestimmte additive Constante der potentiellen Energie findet an diesem Beispiel eine anschauliche Illustration, denn der Arbeitsvorrath, welcher in einem auf bestimmte Höhe gehobenen Gewicht aufgespeichert ist, ist kein festes Quantum, derselbe ist vielmehr um so gröfser, je länger der Weg ist, durch welchen das Gewicht ungehindert sinken kann.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich auf alle diejenigen Maschinen anwenden, welche durch ein fallendes Gewicht getrieben werden oder getrieben werden können. Die eigene Muskelkraft brauchen wir zur Hebung der Gewichte meistens zwar nur, wo es sich um geringe und langsam verbrauchte Arbeit handelt, wie bei den Uhrwerken. Wir können aber viel gröfsere fallende Gewichte benutzen, wenn die Natur sie für uns gehoben hat. Die von den Gebirgen herabfliefsenden Wassermassen leisten in den Mühlen durch ihren Fall Arbeit; sie sind thatsächlich durch meteorologische Processe auf die Höhe der Gebirge gehoben worden, weil hauptsächlich dort oben die Condensation des aus den Meeren und Ebenen aufsteigenden Wasserdampfes stattfindet, und wenn wir dieselben zum Treiben einer Wassermühle brauchen wollen, so müssen wir sie von der Höhe bergab fliefsen lassen, und zwar kann man, je nachdem man grofse Wassermassen von beträchtlicher Strömung aber schwachem

Gefälle, oder geringere Mengen mit starkem Gefälle hat, auf zwei verschiedene Weisen die Arbeit gewinnen. Im ersten Falle benutzt man die lebendige Kraft des durch die bereits zurückgelegte abwärts geneigte Bahn in beträchtliche Geschwindigkeit versetzten Wassers, welches dann das eintauchende, unterschlächtige Schaufelrad mit fortreifst und dadurch selbst einen Theil seiner lebendigen Kraft verliert, welcher eben zur Arbeitsleistung in der Mühle verwendet wird. Im zweiten Falle benutzt man direkt die Schwere des gehobenen Wassers, welches in die Kästen des oberschlächtigen Mühlrades oben einströmt, in denselben bei der Drehung herabsinkt und unter dem Rade wieder in den Bach entleert wird, freilich ohne die der Höhe des Rades als Fallraum entsprechende lebendige Kraft erlangt zu haben. Diese vorläufigen Hindeutungen auf das später allgemein zu behandelnde Naturgesetz von der Erhaltung der Energie mögen hier genügen.

§ 19. Die Gestalt der Wurfbahn.

Wir haben nun zur Vervollständigung der Lehre von den Fallbewegungen schliefslich noch die Gestalt der Bahn zu untersuchen, auf welcher ein geworfener Körper sich in Folge der Schwerkraft bewegt. Da unter solchen Umständen eine mitgeschleppte Masse M, auf welche die Schwerkraft nicht wirkt, undenkbar ist, wollen wir dieselbe in den vorangehenden Bewegungsgleichungen fortlassen, und deshalb das Verhältnifs $m/(M+m) = 1$ setzen. Dadurch verschwindet zugleich auch die Masse m aus jenen Gleichungen; die Bewegung beim freien Fall ist also nicht abhängig von der Gröfse der schweren Masse.

Wählen wir die in (25a) gegebene Gestalt der Bewegungsgleichungen; dieselben lauten für $M = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \\ y &= y_0 + v_0 t \\ z &= z_0 + w_0 t \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Wir wollen ferner festsetzen, dafs v_0 und w_0 nicht beide gleich Null sind, dafs der Massenpunkt also eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, welche horizontale Componenten aufweist, wie dies bei einem geworfenen Körper der Fall ist. Ist eine der beiden in Rede stehenden Componenten, etwa w_0 gleich 0, während v_0 einen bestimmten endlichen Werth hat, so wird die dritte der vorstehenden Gleichungen:

$$z = z_0;$$

also die z-Coordinate bewahrt während der Bewegung einen festen Betrag, und nur x und y verändern sich mit der Zeit, die Bewegung findet daher in einer der (x, y)-Ebene parallelen Verticalebene statt. Ganz analog ist es, wenn $v_0 = 0$ ist und w_0 vorhanden ist. Wenn beide Componenten von Null verschieden sind, können wir die beiden letzten der Gleichungen (33) zur Elimination von t benutzen, und erhalten:

$$\frac{y - y_0}{v_0} = \frac{z - z_0}{w_0}.$$

Diese lineare Beziehung zwischen y und z bedeutet in der analytischen Geometrie eine Ebene parallel der x-Axe, also eine verticale Ebene, und wir haben damit ausnahmelos erkannt, daſs die Bahn eines geworfenen Massenpunktes in einer festen Verticalebene verläuft.

Wir können deshalb die analytische Betrachtung dadurch vereinfachen, daſs wir das Coordinatensystem so verschieben und drehen, daſs die x-Axe vertical bleibt, und die (x, y)-Ebene mit der soeben aufgefundenen Ebene der Wurfbahn zusammenfällt. Die Bewegung ist dann bestimmt durch die beiden ersten Gleichungen des Systems (33), während die dritte $(z = 0)$ fortfällt. Nur ist dabei zu beachten, daſs die Zeichen jetzt nicht mehr dieselben Werthe repräsentiren, wie vorher, das jetzige v_0 hat beispielsweise den Betrag, der in der früheren Bedeutung der Zeichen durch $\sqrt{v_0^2 + w_0^2}$ gegeben sein würde.

Um nun aus den beiden Gleichungen:

$$x = x_0 + u_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$y = y_0 + v_0 t$$

die Gleichung der Wurfbahn abzuleiten, haben wir die Zeit zu eliminiren, was am einfachsten geschieht, wenn man t aus der zweiten Gleichung berechnet und den Ausdruck in die erste einsetzt. Man erhält so:

$$x = x_0 + \frac{u_0}{v_0} \cdot (y - y_0) - \tfrac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} \cdot (y - y_0)^2.$$

In dieser Gleichung kommt die verticale Abmessung x nur in erster Potenz vor, die horizontale y dagegen auch in zweiter Potenz, wodurch von vornherein die Wurflinie als eine bestimmte Art von Kegelschnitt, nämlich als eine Parabel mit verticaler Axe gekennzeichnet ist. Man kann die Gleichung noch übersichtlicher machen, indem man die beiden, y enthaltenden Glieder zu einem vollständigen

Quadrate ergänzt. Dies geschieht durch Hinzufügung des Summanden $-\frac{u_0^2}{2g}$ zu beiden Seiten der Gleichung. Man erhält dann, nach etwas anderer Anordnung der einzelnen Terme:

$$\left(x_0 + \frac{u_0^2}{2g}\right) - x = \tfrac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\cdot\left\{y - \left(y_0 + \frac{u_0 v_0}{g}\right)\right\}^2 \tag{34}$$

als Gleichung der Wurfbahn.

Die rechte Seite ist als Quadrat stets positiv; dasselbe mufs für die linke Seite gelten, daher mufs x immer kleiner bleiben als $\left(x_0 + \frac{u_0^2}{2g}\right)$, oder erreicht diesen Maximalbetrag, den wir bei den früheren Betrachtungen h genannt hatten, nur dann, wenn die rechte Seite ihren kleinsten Werth Null annimmt. Nennen wir den Werth von y, für den dies eintritt, y_h, so sind $x = h$ und $y = y_h$ die Coordinaten des Gipfels der Bahn. Aus der Gleichung (34) erkennt man die dafür geltenden Ausdrücke:

$$h = x_0 + \frac{u_0^2}{2g}$$

$$y_h = y_0 + \frac{u_0 v_0}{g}.$$

Ferner sieht man, dafs Werthe von y, die gleich weit vor und hinter der Stelle y_h liegen, denselben Betrag der quadratischen rechten Seite ergeben, daher zu demselben Werth von x führen, dafs daher die Curve symmetrisch gestaltet ist zu beiden Seiten der durch den Gipfel gezogenen Verticallinie. Man nennt diese Symmetrielinie die Axe der Parabel. Das Gesagte wird veranschaulicht durch Fig. 2. In derselben bedeutet OX die x-Axe, OY die y-Axe; B ist der Anfangsort des Massenpunktes, also $OA = y_0$, $AB = x_0$, BT ist die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, also $\sphericalangle\, TBJ = \operatorname{arctg}\frac{u_0}{v_0}$, BT ist Tangente an die Bahn im Punkte B, H ist der Gipfel der Bahn, also $OK = y_h$, $KH = h$, endlich ist $AK = BJ = y_h - y_0 = \frac{u_0 v_0}{g}$ und $JH = h - x_0 = \frac{u_0^2}{2g}$. Durch diese Angaben ist die Lage und Gröfse der Parabel, welche nach (34) die Wurfbahn bildet, festgelegt, und wir können jetzt alle Fragen, welche man in Bezug auf die Fallbewegung überhaupt stellen kann, aus dem angegebenen Material beantworten.

Die Gestalt der parabolischen Wurfbahn kann man bequem beobachten an Wasserstrahlen, die aus einem schräg aufwärts gerichteten Rohre austreten, denn die Wassermasse zerfällt bald in einzelne Tropfen, welche unabhängig von einander ihre Bahnen als kleine geworfene Körper beschreiben, und zwar wegen der nahezu gleichen Anfangsbedingungen alle ungefähr dieselbe Bahn, welche deshalb dem Auge des Beobachters als feststehendes Bild erscheint.

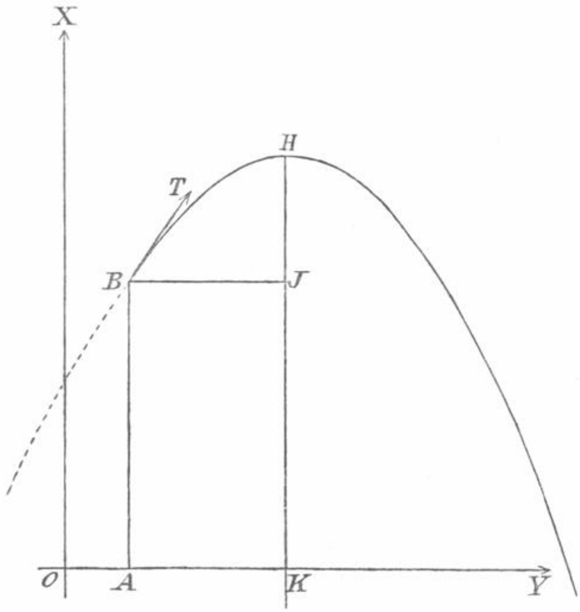

Fig. 2.

Kleine Unregelmäſsigkeiten treten dadurch ein, daſs an der Stelle, wo der Strahl in Tropfen zerreiſst, die Kapillarkräfte, welche vorher den Zusammenhang der Wassertheile verstärkten, im Zustand des Abreiſsens Bewegungen erzeugen, durch welche die beiden Theile noch von einander fortgetrieben werden. Dies macht sich dadurch bemerklich, daſs in der weiteren Fortsetzung des Strahles die getrennten Tropfen etwas verschiedene Bahnen beschreiben: Der Strahl zeigt daher das Bild eines Bündels von vielen eng zusammenliegenden Parabeln.

§ 20. Ueber Messungen der Beschleunigung der Schwerkraft.

Die Schwerkraft ist wegen ihrer an allen Orten verwendbaren Gegenwart eines der willkommensten Mittel, um andere Arten von

Kräften durch Vergleich mit derselben zu messen; daher ist die für die Intensität der Schwerkraft charakteristische Beschleunigung g der frei fallenden Körper eine der allerwichtigsten Gröfsen in der ganzen Physik, bei deren Bestimmung für jeden Beobachtungsort gröfstmögliche Genauigkeit erwünscht ist. Die Messung von g liefse sich im Anschlufs an Gleichung (30b) (Seite 47) dadurch ausführen, dafs man einen Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit durch eine gemessene Höhe herabfallen läfst, und die während des Falles verstrichene Zeit mifst. Doch stellen sich einer genügend präcisen Messung der Fallzeit, welche, wegen ihres quadratischen Auftretens in der citirten Gleichung, mit noch gröfserer procentischer Genauigkeit bestimmt werden mufs als die Fallhöhe, immer Schwierigkeiten entgegen. Auch übt bei den verhältnifsmäfsig bedeutenden Geschwindigkeiten, welche der freie Fall bereits nach einer Secunde Fallzeit mit sich führt, die Luftreibung, die wir bei den vorstehenden Betrachtungen aufser Acht gelassen haben, einen das Resultat störenden Einflufs, so dafs für exacte Messungen die directeste Methode ungeeignet erscheint.

Schon vortheilhafter ist die Verwendung der Atwood'schen Maschine, weil bei derselben die Bewegung durch Anwendung grofser träger Massen M und kleinerer treibender Massen m beliebig verlangsamt werden kann. Dies bietet den doppelten Vorzug, dafs erstens bei geringen Fallräumen längere Zeiträume zur Messung kommen, welche immer genauer zu bestimmen sind als sehr kurze Zeiten, und dafs zweitens die Luftreibung und die bei sorgfältiger Construction sehr geringe Axenreibung der Räder nur einen unbedeutenden Einflufs auf den Vorgang haben. Man hat in diesem Falle der Bestimmung von g die Gleichung (30a) (Seite 47) zu Grund zu legen, aus welcher man zunächst die Beschleunigung der Fallmaschine $\gamma = \frac{m}{M + m} g$ findet. Diese bildet nur einen kleinen Bruchtheil von g, ist aber aus den angegebenen Gründen mit gröfserer procentischer Genauigkeit zu messen, als g beim freien Fall. Die Verhältnifszahl $m/(M + m)$ aber kann durch Bestimmung der Massen M und m mittelst der Wage sehr genau angegeben werden. Dies wäre das Princip der Messung von g mit Hülfe der Fallmaschine. Es ist indessen dabei zu bedenken, dafs nicht nur M und m in beschleunigte Bewegung gerathen, sondern dafs zu M auch noch die Masse der verbindenden Fäden zu rechnen ist, und dafs auch die beiden Räder, über welche die letzteren laufen, in eine beschleunigte Drehung versetzt werden. Dabei erhalten nicht alle Theile der

Räder dieselbe Wegbeschleunigung γ, sondern die den Drehungsaxen näherliegenden eine geringere. Der Effect ist also der, als wenn zu M noch ein bestimmter, nur aus der Gestalt der Räder zu berechnender Bruchtheil ihrer Masse hinzukäme. Da diese Berechnung nur schwierig auszuführen ist, verfährt man in der Weise, daſs man M mit dem unbekannten Anhange der bewegten Theile des Apparates eliminirt. Dies geschieht durch Anwendung von zwei verschiedenen treibenden Massen m_1 und m_2. Man erhält dadurch zunächst zwei verschiedene Beschleunigungen γ_1 und γ_2, welche mit g zusammenhängen durch die Gleichungen:

$$\gamma_1 = \frac{m_1}{M + m_1} g \qquad \text{und} \qquad \gamma_2 = \frac{m_2}{M + m_2} g.$$

Die Elimination der unbekannten Constante M führt dann zu dem Resultate:

$$g = \frac{m_1 - m_2}{\frac{m_1}{\gamma_1} - \frac{m_2}{\gamma_2}},$$

welches bei Häufung der Beobachtungen, eventuell mit noch mehr als zwei treibenden Massen zu einer schon beträchtlicheren Genauigkeit führt. Ist die Fallmaschine so eingerichtet, daſs man verschiedene träge Massen M an derselben aufhängen kann, so kann man den unbekannten, von den bewegten Apparattheilen herrührenden, Antheil auch dadurch entfernen, daſs man bei Anwendung derselben treibenden Masse m, einmal die Masse M_1, dann M_2 mit in Bewegung setzen läſst. Man findet dann durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorher, durch Elimination der unbekannten Masse, welche diesmal die Apparattheile allein repräsentirt, aus den beiden beobachteten Beschleunigungen γ_1 und γ_2

$$g = \frac{M_1 - M_2}{m \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)}.$$

Diese Methode bietet, wo sie anwendbar ist, noch Vorzüge vor der anderen, weil Zähler und Nenner der letzten Gleichung gröſsere Beträge darstellen können.

Man findet so, daſs in unseren mitteleuropäischen Breitegraden und in geringen Erhebungen über dem Meeresspiegel die Beschleunigung der Schwere etwa folgenden Betrag hat:

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Die genauesten Resultate für die Intensität der Schwerkraft liefert eine indirecte Methode, bei welcher die Fallbewegung auf einer vorgeschriebenen Kreisbahn erfolgt und einen periodisch hin- und hergehenden Verlauf zeigt, nämlich die Beobachtung der Pendelbewegung. Beim Pendel sind die vorzunehmenden Zeitmessungen mit der gröfsten erwünschten Schärfe auszuführen. So weisen uns die Betrachtungen über die Schwere auf die Untersuchung der pendelartigen (oscillatorischen) Bewegungen hin, deren Besprechung wir im nächsten Kapitel vornehmen wollen.

Drittes Kapitel.

Von den oscillatorischen Bewegungen.

§ 21. Elastische Kräfte.

Wir betrachten wiederum einen einzelnen materiellen Punkt, welcher sich unter der Wirkung einer äufseren Kraft bewegt; wir werden daher wieder Anwendung von den in den Gleichungen (15) (S. 29) formulirten Newton'schen Axiomen zu machen haben. Die Kraft wirke jetzt in der Weise, dafs der Punkt geradlinig nach einer bestimmten Ruhelage, die wir zweckmäfsig zum Anfangspunkt der Coordinaten wählen, hingezogen wird und zwar um so stärker, je weiter er sich von diesem Centrum entfernt, während in diesem Orte selbst keine Kraft auf ihn wirkt, so dafs derselbe, wenn er nicht durch eine vom Beharrungsvermögen aufrecht gehaltene Geschwindigkeit bewegt wird, in diesem Orte eine natürliche Ruhelage findet.

Kräfte dieser Art pflegt man mit dem allgemeinen Namen elastische Kräfte zu bezeichnen; das Wort ist allerdings hergenommen von einer Eigenschaft, welche nur ausgedehnte Körper durch gegenseitige Kraftwirkungen ihrer Theilchen auf einander bei Formveränderungen irgend welcher Art zeigen. Das Gemeinsame des uns jetzt vorliegenden Falles mit den Erscheinungen der elastischen Körper besteht aber darin, dafs auch bei letzteren die Bewegungen unter der Wirkung von Kräften vor sich gehen, welche die verschobenen Theilchen nach einer bestimmten Ruhelage zurücktreiben; darauf kommt es hier besonders an, und deshalb bewegen sich die einzelnen Theilchen deformirter und sich dann selbst überlassener elastischer Körper in ganz derselben Weise, wie wir das jetzt an einem einzelnen Massenpunkte auseinander setzen werden. Die über die Wirkung der Kraft gemachten Annahmen widersprechen durchaus nicht unserer früher besprochenen Anschauung von den Naturkräften als dauernden unveränderlichen Ursachen. Es ist zwar die Vertheilung der Intensität und Richtung dieser jetzt zu betrachtenden Kräfte nicht gleichmäſsig, wie dies bei der vorher betrachteten Schwerkraft für den ganzen in Betracht kommenden Raum angenommen wurde. Aber diese räumliche Constanz der Kraft war nicht etwa die Folge unserer Forderung, daſs das Gesetz der Kraft ein dauerndes sei. Es muſs vielmehr nur gefordert werden, daſs die Kraft stets in derselben Weise zu wirken bereit ist, sobald sich der Massenpunkt wieder unter denselben Bedingungen ihrer Wirksamkeit — d. i. bei unseren vorliegenden Betrachtungen — an demselben Orte befindet. Die Kraftwirkung darf nach unseren Grundsätzen nicht in willkürlicher Weise in der Zeit wechseln. Der Massenpunkt wird bei seiner Bewegung Orte von wechselnder Kraft-Intensität und -Richtung besuchen, daher wird die thatsächlich auf ihn wirkende Kraft allerdings in der Zeit veränderlich sein, an jedem bestimmten Orte ist sie aber unveränderlich; dieselbe ist also wohl eine Function der Raumcoordinaten, nicht aber der Zeit; und die in der Zeit veränderliche Wirkung derselben auf den Massenpunkt rührt nur daher, daſs bei der Bewegung die Coordinaten ihrerseits Functionen der Zeit sind.

Wir haben nun die Charakteristik der elastischen Kraft, daſs sie geradlinig nach einem festen Punkt (Anfangspunkt der Coordinaten) hinweist und daſs ihr Betrag um so gröſser ist, je weiter der Massenpunkt von dieser Ruhelage entfernt ist, mathematisch zu formuliren und wählen dazu die bequemste Annahme, daſs die Kraft einfach proportional dem Abstand ist. Die Berechtigung dieser Festsetzung ergiebt sich nachträglich daraus, daſs die unter dieser Voraussetzung entwickelten Bewegungsformen genau oder mit sehr groſser Annäherung mit thatsächlich beobachteten Bewegungen übereinstimmen. Wir nennen die gerichtete Strecke, welche vom Anfangspunkt nach dem Orte des Massenpunktes hingeht, den Radius vector r des Massenpunktes; die Kraft K ist dann gleichzusetzen einem constanten Factor multiplicirt mit r, und den Umstand, daſs die Richtung von K derjenigen von r stets gerade entgegengesetzt ist, werden wir dadurch ausdrücken, daſs dieser constante Factor einen unzweifelhaft negativen Werth darstellt. Dies erreichen wir dadurch, daſs wir diesen Factor in der Form $-a^2$ ansetzen, welche bei reell vorausgesetztem a stets negativ ist. Die Kraft ist alsdann in Gröſse und Richtung definirt durch die Gleichung

$$K = -a^2 r. \tag{35}$$

Wenn wir das Rechnen mit gerichteten Gröſsen vermeiden wollen, zerlegen wir dieselben in Componenten parallel den Coordinataxen, die Componenten von r sind die Coordinaten des Massenpunktes, x, y, z, die Kraftcomponenten nennen wir X, Y, Z. Dann wird vorstehende Gleichung ersetzt durch die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} X &= -a^2 x \\ Y &= -a^2 y \\ Z &= -a^2 z \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Das NEWTON'sche Kraftmaaſs, Gleichungen (15), liefert dann direct folgende Differentialgleichungen für die Bewegung des Massenpunktes m:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} &= -a^2 x \\ m \cdot \frac{d^2 y}{d t^2} &= -a^2 y \\ m \cdot \frac{d^2 z}{d t^2} &= -a^2 z \end{aligned}\right\} \tag{35b}$$

Ihrer physikalischen Bedeutung nach miſst die Constante a^2 die specifische Stärke der elastischen Kraft, sie ist eine nicht gerichtete Gröſse, deren Dimension sich aus Gleichung (20) (Seite 33) ergiebt. Da nämlich a^2, multiplicirt mit einer Länge, eine Kraft darstellen soll, ist:

$$[a^2] = [M T^{-2}] \tag{35c}$$

§ 22. Bewegung in einer geraden Linie.

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, daſs der Massenpunkt sich nur in einer geraden Linie, beispielsweise in der x-Axe bewegt. Wir haben es dann nur mit der ersten der Differentialgleichungen (35b) zu thun:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -a^2 x. \tag{35b, 1}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung muſs uns nun über die Natur der Bewegung belehren, welche der Massenpunkt unter

Wirkung der elastischen Kraft $X = -a^2 x$ ausführt. Diese Differentialgleichung ist nicht, wie die bisher dagewesenen, direct zu integriren; wir können zwar die linke Seite leicht als den zeitlichen Differentialquotienten von $m \,.\, dx/dt$ darstellen, aber die rechte Seite können wir nicht als Differentialquotienten ausdrücken, da wir ja x in seiner Abhängigkeit von t gar nicht kennen, vielmehr erst suchen. Man strebt nun solche Differentialgleichungen dadurch integrirbar zu machen, dafs man sie erweitert mit einem aus x und dessen Differentialquotienten gebildeten Ausdruck, einem sogenannten integrirenden Factor, welchen man für jeden Fall passend aussuchen mufs, der sich aber nicht immer finden läfst. Im vorliegenden Falle leistet die Geschwindigkeit dx/dt den erwünschten Dienst. Man schafft das Glied $-a^2 x$ auf die linke Seite der Gleichung und multiplicirt dieselbe mit dx/dt:

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 0.$$

Jetzt ist der Ausdruck auf der linken Seite ein vollständiger Differentialquotient, die folgende Gleichung ist nach Ausführung der Differentiation identisch mit der vorstehenden:

$$\frac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x^2\right\} = 0$$

und sagt aus, dafs der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck eine in der Zeit unveränderliche Gröfse darstellt, welche wir durch E bezeichnen wollen. Das Resultat der ersten Integration ist also:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2} a^2 x^2 = E \tag{36}$$

Die Constante E mifst die Energie der Bewegung. (Vergl. Gleichung (32) Seite 49). Der erste Summand mifst die kinetische Energie des Massenpunktes, der zweite die potentielle Energie, nämlich die Arbeit, welche geleistet werden mufs, um den Massenpunkt gegen die Richtung der Kraft $-a^2 x$ aus der Ruhelage an den Ort x zu schaffen:

$$\int_0^x (a^2 x) \,.\, dx = \tfrac{1}{2} a^2 x^2.$$

Da nun beide Theile der Energie in Gleichung (36) als quadratische Ausdrücke positiv sein müssen, ihre Summe aber den festen Werth E bewahren soll, so ist ersichtlich, dafs keiner von beiden im Fortschreiten der Zeit jemals über eine gewisse Grenze hinaus wachsen kann, denn der andere kann niemals durch einen dazu erforderlichen negativen Betrag dieses Uebermaafs ausgleichen, vielmehr ist Null der kleinste Werth, den beide Theile erreichen, daher auch E der gröfste, den sie annehmen können. Schon aus der ersten Integration erkennt man also, dafs sich die Bewegung in festen Schranken abspielen mufs, welche durch die Constante E gezogen sind. Wird die Entfernung x, mithin auch die potentielle Energie gröfser und gröfser, so mufs die kinetische Energie, mithin auch die Geschwindigkeit abnehmen und endlich gleich Null werden. Der Massenpunkt mufs dann also stillstehen und in seiner Bahn umkehren. Diese gröfste Entfernung aus der Ruhelage wollen wir nach ihrem absoluten Betrage mit h bezeichnen, wir können dann in Gleichung (36) h statt E als Integrationsconstante einführen. Denn h ist dasjenige x, welches der Umkehr, also dem Zustand $dx/dt = 0$ entspricht, und wir erhalten direct:

$$\tfrac{1}{2} a^2 h^2 = E. \tag{36a}$$

Durch Elimination von E aus (36) und (36a) findet man:

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2} a^2 . (h^2 - x^2).$$

Um zur zweiten Integration zu schreiten, müssen wir den Differentialquotienten isoliren:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{a^2}{m}} \cdot \sqrt{h^2 - x^2}.$$

Die bei diesem Schritte nothwendige Bildung von Quadratwurzeln bringt eine Doppeldeutigkeit in die Betrachtung. Die Geschwindigkeit dx/dt selbst wird ja im Verlaufe der hin- und hergehenden Bewegung ihr Vorzeichen bei jeder Umkehr verändern; solches können wir aber von dem constanten Factor $\sqrt{a^2/m}$ nicht annehmen, dieser mufs vielmehr ein für allemal entweder positiv oder negativ festgehalten werden. Die freie Wahl werden wir dadurch ausdrücken, dafs wir denselben $\pm a/\sqrt{m}$ schreiben, und darin a und $\sqrt{m}$ absolut annehmen. Zur Aufrechterhaltung des gleichen Vorzeichens beider Seiten der letzten Gleichung ist es dann aber nothwendig, anzunehmen, dafs $\sqrt{h^2 - x^2}$ sein Vorzeichen stets gleichzeitig mit dx/dt ändert. Der Zeichenwechsel der Geschwindigkeit findet in der Grenzlage $x = h$ statt, wo die Wurzel $\sqrt{h^2 - x^2}$ Null wird; dieselbe kann dann also ohne Unstetigkeit aus positiven in negative Werthe, oder umgekehrt übergehen. Der Quotient

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{h^2 - x^2}}$$

darf jedenfalls keinen Zeichenwechsel mehr erfahren und wir schreiben deshalb die Gleichung der ersten Integration am klarsten in der Form:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{h^2 - x^2}} = \pm \frac{a}{\sqrt{m}}.$$

Die Hebung von h auf der linken Seite und Vereinung aller Glieder nach links führt zu der Form:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2}} \mp \frac{a}{\sqrt{m}} = 0.$$

Der hier gleich Null gesetzte Ausdruck ist gleich fertig gemacht zur weiteren Verwendung, denn das erste Glied hat die Form eines Differentialquotienten der Function Arcussinus oder Arcuscosinus, während das zweite als Constante der Differentialquotient einer mit der Zeit proportional wachsenden oder sinkenden Gröſse ist. Es ist also gleichbedeutend mit der vorstehenden Gleichung die folgende:

$$\frac{d}{dt}\left\{\arcsin\frac{x}{h} \mp \frac{a}{\sqrt{m}}\,t\right\} = 0.$$

Die geschweifte Klammer muſs also wieder einen unveränderlichen Werth enthalten, den wir φ nennen wollen. Dieses φ ist die zweite Integrationsconstante, durch deren Unbestimmtheit es gerechtfertigt ist, daſs wir die Function Arcussinus gewählt haben; denn wir erhalten sofort den Arcuscosinus, wenn wir von φ die Gröſse $\frac{\pi}{2}$ abspalten. Das Endresultat lautet also:

$$\arcsin\frac{x}{h} \mp \frac{a}{\sqrt{m}}\,t = \varphi$$

oder nach Isolirung von x:

$$x = h\sin\left(\varphi \pm \frac{a}{\sqrt{m}}\,t\right). \tag{37}$$

Diese Gleichung ist das vollständige Integral der Differentialgleichung (35b, Nr. 1), welche wir an die Spitze dieses Paragraphen gestellt haben; sie stellt in expliciter Form x als Function von t dar. Man nennt die dadurch bestimmte Bewegungsart eine oscillirende oder schwingende Bewegung, wohl auch zum Unterschied von complicirteren ähnlichen Bewegungen eine einfache Sinus-Schwingung oder endlich aus später einzusehenden Gründen eine pendelartige Bewegung.

Der Sinus verändert sich mit der Zeit zwischen den Grenzen $+1$ und -1, daher schwankt x zwischen $+h$ und $-h$. Man nennt h die Amplitude der Schwingung, die Gröfse φ nennt man die Phasen-Constante. Der Sinus erhält seinen Werth immer wieder, wenn sein Argument um eine oder mehrere Kreisperipherieen, also um 2π oder allgemeiner um $2\mathfrak{a}\pi$ gewachsen oder gefallen ist, wo $\mathfrak{a}$ jede natürliche Zahl bedeutet. Nach einer solchen Wiederkehr wiederholt sich immer derselbe Bewegungsvorgang. (Es kommt zwar schon vor Umkreisung einer ganzen Peripherie eine Stelle, in welcher der Sinus seinen früheren Werth wieder annimmt, dann ist aber der Verlauf der Bewegung nicht derselbe, vielmehr die Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet.)

Wir wollen jetzt von einer bestimmten Zeit t ausgehend, eine solche Zeitdauer T verstreichen lassen, dafs der Massenpunkt gerade wieder denselben Ort mit derselben Geschwindigkeit in gleicher Richtung durcheilt. Der Zuwachs des Argumentes des Sinus mufs dann einem beliebigen Vielfachen von 2π gleich sein, die kürzeste Zeitspanne wird aber einem Zuwachs um 2π entsprechen, so dafs wir erhalten:

$$\frac{a}{\sqrt{m}}\,T = 2\pi$$

oder

$$T = 2\pi\,\frac{\sqrt{m}}{a}. \tag{38}$$

Von der Phasenconstante ist diese Zeitdauer unabhängig. Man nennt dieses kürzeste Zeitintervall T, welches die Wiederkehr desselben Zustandes bringt, die Schwingungsdauer oder Periode der Bewegung. Die Abhängigkeit derselben von der Masse des Punktes und von der Stärke der elastischen Kraft ist aus Gleichung (38) ersichtlich, auch kann man sich leicht von der Richtigkeit der Dimensionen überzeugen, wenn man auf die Gleichung (35c) (Seite 59) blickt:

$$T = \left[\frac{M^{1/2}}{M^{1/2}\,.\,T^{-1}}\right] = [T].$$

Die Schwingungsdauer ist also nach Gleichung (38) direkt in Secunden gegeben, wenn man m und a nach den Einheiten des C.-G.-S-Systems gemessen hat. Die angegebene Zählung der Schwingungsdauern ist von den deutschen und englischen Physikern allgemein angenommen, während die französischen Autoren meist die Hälfte der Periode als Schwingungsdauer bezeichnen, wodurch Verwechslungen entstehen können und auch bei zusammengesetzten, nicht einfach pendelartigen Schwingungen Weitläufigkeiten in der Bezeichnung entstehen.

Die Frage, wieviel Perioden in einer Secunde erfolgen, wird beantwortet durch die Maaſszahl der reciproken Gröſse $\nu = 1/T$; man nennt ν die Schwingungszahl.

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{m}} \cdot \tag{38a}$$

Oft findet man auch in theoretischen Rechnungen diejenige Schwingungszahl, welche die Anzahl der in 2π Secunden vollendeten Perioden miſst. Diese ist gleich $2\pi\nu$ und soll durch n bezeichnet werden. Nach der vorstehenden Gleichung hat man also:

$$n = \frac{a}{\sqrt{m}} \cdot \tag{38b}$$

Dadurch erhält der in den bisherigen und auch noch in den folgenden Gleichungen häufig auftretende Complex $a/\sqrt{m}$ eine anschauliche Bedeutung; wir können mit Hülfe dieser Gröſse bereits die zu Grunde gelegte Differentialgleichung einfacher schreiben:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -n^2 . x.$$

Die Schwingungsdauer ist vollkommen durch die bereits in der angesetzten Differentialgleichung enthaltenen Constanten bestimmt, dagegen unabhängig von den beiden Integrationsconstanten, nämlich von der Amplitude h und von der Phasenconstante φ. Die letztere bildet, wie man aus der Integralgleichung (37) sieht, nur einen bestimmten Bogen oder Winkel, der zu dem proportional der Zeit wachsenden Argument des Sinus hinzugefügt ist. Es wird also durch φ nur festgestellt, zu welchen Zeitpunkten nach Beginn der Zeitzählung die Durchgänge durch die Ruhelage und die gröſsten Elongationen eintreten, und in welchem Zustande, in welcher **Phase** der beschriebenen Bewegung sich der Punkt zu einer bestimmten Zeit, z. B. zur Zeit $t = 0$ befindet. Daher der Name Phasenconstante. Die unbestimmten Constanten h und φ dienen dazu, die Integralgleichung jedem vorgeschriebenen Anfangszustande des Massenpunktes anzupassen. Dies übersieht man am leichtesten, wenn man in Gleichung (37) den Sinus nach den beiden Theilen seines Argumentes zerlegt:

$$x = h \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \cdot t\right) \pm h \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} \cdot t\right).$$

Gleichwie h und φ stellen auch die hier auftretenden Complexe:

$$F = h \,.\, \sin\varphi$$

$$G = h \,.\, \cos\varphi$$

zwei unbestimmte Constanten dar, welche jeden beliebigen Werth annehmen können, was man daraus erkennt, dafs nach willkürlicher Festsetzung der letzteren stets mögliche Werthe von h und φ gefunden werden, welche diese Relationen befriedigen. Diese Werthe sind:

$$h = \sqrt{F^2 + G^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{F}{G} \cdot$$

Auch das doppeldeutige Vorzeichen können wir in das unbestimmte G mit aufnehmen, und wir erhalten als eine andere Form für das vollständige Integral:

$$x = F \,.\, \cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t\right) + G \,.\, \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t\right). \tag{37a}$$

Die Geschwindigkeit finden wir hieraus durch Differentiation nach der Zeit:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{\sqrt{m}} F \sin\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t\right) + \frac{a}{\sqrt{m}} G \,.\, \cos\left(\frac{a}{\sqrt{m}} t\right).$$

Die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen seien nun dadurch ausgedrückt, dafs die Masse m sich zur Zeit $t = 0$ am Orte x_0 befindet und die Geschwindigkeit u_0 besitzt. Die Sinus in den beiden vorstehenden Gleichungen verschwinden im Anfangszustand, während die Cosinus gleich 1 werden. Man erhält also:

$$x_0 = F, \qquad u_0 = \frac{a}{\sqrt{m}} G$$

oder

$$F = x_0, \qquad G = \frac{\sqrt{m}}{a} u_0.$$

Auf diese Weise können also F und G jedem vorgeschriebenen Anfangszustand angepafst werden; dasselbe gilt auch von den früheren beiden Integrationsconstanten. Diese werden bestimmt durch:

$$h = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{a^2} u_0^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctang} \frac{a}{\sqrt{m}} \cdot \frac{x_0}{u_0} .$$

Mit dieser Bestimmung der Integrationsconstanten durch den Anfangszustand ist das an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Problem vollständig gelöst.

§ 23. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen und eine andere Lösung des vorliegenden Problems.

Wir hatten die an die Spitze des vorigen Paragraphen gestellte Differentialgleichung durch einen Kunstgriff integrirt, indem wir dieselbe mit dem integrirenden Factor dx/dt erweiterten. Es ist indessen nicht überflüssig, hier gleich noch eine andere Methode der Lösung anzugeben, welche bei einer häufig in der Physik vorkommenden Klasse von Differentialgleichungen, zu denen auch die vorliegende gehört, zum Ziele führt. Wir schicken einige allgemeine Erläuterungen voraus.

Wenn in einer Differentialgleichung die gesuchte Function und ihre Differentialquotienten nur in erster Potenz vorkommen und auch Producte mehrerer derselben nicht auftreten, so nennt man sie eine lineare Differentialgleichung. Sobald aber auch nur eine höhere Potenz auftritt, ist die Differentialgleichung nicht linear und ihre Integration dann meistens viel schwieriger. Die Coefficienten der einzelnen Glieder können bekannte Functionen der unabhängigen Variabeln (also der Zeit) sein, oder im einfachsten Falle constante Gröfsen.

Enthält ferner die lineare Differentialgleichung kein Glied, welches von der gesuchten Function frei ist, sondern sind durch die Differentialgleichung nur Glieder, welche die gesuchte Function und ihre Differentialquotienten linear enthalten, in Verbindung zu einander gebracht, so hat man eine lineare homogene Differentialgleichung. Schafft man alle mit der unbekannten Function behafteten Glieder auf die linke Seite, so ist bei der homogenen Differentialgleichung die rechte Seite gleich Null. Später werden uns auch Differentialgleichungen begegnen, bei denen in diesem Fall auf der rechten Seite eine vorgeschriebene Function der Zeit übrig bleibt. Wir wollen indessen auf diese nicht homogenen Differentialgleichungen hier noch nicht eingehen.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen haben wichtige Eigenschaften, welche das Auffinden der vollständigen Integrale sehr erleichtern. Haben wir nämlich irgend zwei verschiedene particuläre Integrale gefunden, so können wir jedes mit einer beliebigen Constanten multipliciren und dann beide zu einer Summe vereinigen, also mit anderen Worten, wir können eine beliebige lineare homogene Function der particulären Integrale zusammensetzen, welche ihrerseits stets auch wieder ein Integral derselben Differentialgleichung ist. Wir wollen diesen Satz an der uns vorliegenden Differentialgleichung (35b, 1), welche linear und homogen ist, beweisen. Seien x_1 und x_2 zwei verschiedene particuläre Integrale derselben, d. h. zwei Zeitfunctionen, welche in die Differentialgleichung eingesetzt, dieselbe zu einer Identität machen, so hat man die Gleichungen:

$$m \frac{d^2 x_1}{d t^2} = -a^2 x_1$$

$$m \frac{d^2 x_2}{d t^2} = -a^2 x_2.$$

Erweitern wir dieselben mit den beliebigen Constanten F und G und addiren sie, so kommt:

$$m \cdot \frac{d^2}{d t^2}(F x_1 + G x_2) = -a^2 . (F x_1 + G x_2),$$

woraus man sieht, dafs auch $(F x_1 + G x_2)$ ein Integral dieser Differentialgleichung ist, und zwar ein umfassenderes, welches zwei willkürliche Constanten besitzt. Man kann also jedenfalls aus einigen verschiedenen particulären Integralen eine grofse Mannigfaltigkeit von Lösungen zusammensetzen. Ob man auf diese Weise die vollständige Lösung gefunden hat, hängt davon ab, ob in derselben ebenso viel unbestimmte Constanten disponibel sind, als zur Bestimmung des Anfangszustandes Angaben nöthig sind. Jedenfalls braucht man also zur Zusammensetzung des vollständigen Integrals so viel unabhängige particuläre Lösungen (die selbst keine disponiblen Constanten enthalten), als Bestimmungsstücke durch den Anfangszustand eingeführt werden. Diese Anzahl beträgt nun für einen im Raume beweglichen Massenpunkt sechs, wie wir schon am Anfang von § 16 auseinander setzten. Bewegt sich der Massenpunkt nur in einer festen Ebene, so genügen vier Angaben, und bei einem nur in gerader Linie beweglichen Punkte, also in dem hier vorliegenden Falle, ist der Zustand durch zwei Angaben bestimmt. Es wird daher möglich sein, aus nur zwei particulären Lösungen x_1 und x_2, das vollständige Integral $F x_1 + G x_2$ zusammenzusetzen.

Die soeben angegebene Art der Zusammensetzung neuer Integrale aus bekannten, indem man letztere zu linearen homogenen Functionen vereinigt, in denen sie als Summanden weiter bestehen, nennt man die ungestörte Superposition der Lösungen oder auch der Bewegungen, welche durch die Lösungen beschrieben werden. Wenn wir vom Begriff der geometrischen Addition verschieden gerichteter Coordinaten Gebrauch machen, so können wir auch bei räumlichen Bewegungen, welche nach gewöhnlicher Rechnungsweise drei gleichgestaltete Differentialgleichungen für x, y, z besitzen, die drei vollständigen Integrale x, y, z nach den drei Richtungen zur geometrischen Summe $A x + B y + C z$ vereinigen, welche die vollständige Angabe der räumlichen Bewegung als ungestörte Superposition der verschieden gerichteten Componenten darstellt. Die ungestörte Superposition der durch eine lineare homogene Differentialgleichung charakterisirten Bewegungen bildet eine sehr werthvolle und in allen Zweigen der Physik nützliche Eigenschaft, denn die überwiegende Zahl der gut zu behandelnden Differentialgleichungen gehört zu dieser Klasse; auch wenn wir später zu den partiellen Differentialgleichungen kommen werden, welche die Bewegungen ausgedehnter continuirlicher Massen beherrschen, wird diese Eigenschaft der Lösungen besondere Bedeutung haben.

Häufig kann man bei der Lösung solcher Differentialgleichungen mit Vortheil Gebrauch von den complexen Gröſsen machen. Zunächst ist vom rein mathematischen Standpunkt aus klar, daſs die Coefficienten, mit denen wir die particulären Integrale multipliciren, auch imaginär sein können. Hätten wir also von den beiden Identitäten, welche aus der Einsetzung der beiden Integrale x_1 und x_2 in die hier vorliegende Differentialgleichung entspringen, die erste mit F, die zweite aber mit der imaginären Constante $i\,G$ erweitert, so hätten wir durch Addition erhalten:

$$m \cdot \frac{d^2}{d t^2} (F x_1 + i\, G x_2) = - a^2 (F x_1 + i\, G x_2),$$

also ist auch der complexe Ausdruck $(F x_1 + i\, G x_2)$ ein Integral derselben Differentialgleichung. Sobald nun die in der Differentialgleichung enthaltenen Constanten, hier also m und a^2, reell sind, was bei physikalischen Problemen stets der Fall ist, so kann die Gleichung zwischen den complexen Gröſsen nur bestehen, wenn die reellen und die imaginären Antheile auf beiden Seiten der Gleichung einzeln einander gleich sind. Das Resultat zerfällt also von selbst wieder in die beiden Identitäten, von welchen wir ausgingen, wir sind dadurch in der Erkenntnifs nicht weiter gekommen. Der Vortheil dieser Betrachtung liegt vielmehr in der Umkehrung des Gedankenganges; es kommt nämlich oft vor, dafs ein complexer Ausdruck, welcher der Differentialgleichung genügt, leichter zu finden ist, als reelle Ausdrücke. Haben wir also z. B. ein Integral $x_1 + i x_2$ gefunden, so lehrt diese Betrachtung, dafs der reelle Theil x_1 für sich und auch der imaginäre Theil x_2 für sich ein Integral derselben Differentialgleichung ist, so dafs wir auf diese Weise zwei unabhängige reelle Integrale zugleich gefunden haben.

Bisher haben wir keinen Gebrauch davon gemacht, dafs die Coefficienten der Differentialgleichung constant sind, dieselben konnten vielmehr ebenso gut bekannte Zeitfunctionen bedeuten. Jetzt wollen wir uns aber auf den Fall constanter Coefficienten beschränken, welcher in der vorliegenden und vielen anderen Differentialgleichungen zutrifft. Bei solchen Problemen läfst sich stets ein Integral finden als Exponentialfunction der Zeit, und zwar ist der Exponent der Basis e proportional der Zeit, also ist diese Lösung mit Hülfe einer einstweilen noch unbekannten Constante p folgendermafsen zu schreiben:

$$x = e^{pt}. \tag{39}$$

Wir wollen diese Behauptung an unserer besonderen Differentialgleichung erproben. Die Differentiation der Exponentialfunction bietet keine Schwierigkeit. Es ist

$$\frac{dx}{dt} = p \,.\, e^{pt} = p \,.\, x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p^2 e^{pt} = p^2 x\,.$$

Durch Einsetzung des hierdurch für $d^2 x/d t^2$ aufgestellten Ausdrucks in die Differentialgleichung ergiebt sich:

$$m \,.\, p^2 x = - a^2 x.$$

Das noch unbekannte x hebt sich, und wir behalten eine einfache quadratische Gleichung für die Unbekannte p:

$$m \,.\, p^2 = - a^2,$$

aus welcher folgt, dafs p eine doppeldeutige imaginäre Gröfse ist:

$$p = \pm i \frac{a}{\sqrt{m}}, \tag{39a}$$

welche die Exponentialfunction (39) zu einem Integral der behandelten Differentialgleichung macht. Dasselbe lautet:

$$x = e^{\pm i \frac{a}{\sqrt{m}} t} \tag{39b}$$

Wir haben also hier einen Fall der vorerwähnten Art, daſs man zunächst ein complexes Integral findet. Die Exponentialfunction mit imaginärem Argument läſst sich durch trigonometrische Functionen ersetzen:

$$x = \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t \pm i \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t.$$

Da nach den vorangegangenen Auseinandersetzungen der reelle und der imaginäre Theil einzeln als Lösungen zu brauchen sind, erhalten wir folgende zwei Lösungen:

$$x_1 = \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t$$

$$x_2 = \pm \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t.$$

Aus diesen können wir vermittelst zweier willkürlicher Integrationsconstanten F und G eine allgemeinere Lösung zusammensetzen:

$$x = F \cos \frac{a}{\sqrt{m}} t + G \sin \frac{a}{\sqrt{m}} t.$$

Das doppelte Vorzeichen von x_2 ist fortgelassen, da G selbst jeden positiven oder negativen Werth besitzen kann. Wegen der zwei disponiblen Constanten haben wir zu erwarten, daſs das gefundene Integral die vollständige Lösung darstellt. Thatsächlich stimmt dieselbe überein mit der im vorigen Paragraphen auf einem anderen Wege gefundenen Gleichung (37a) (Seite 65) von der wir nachgewiesen haben, daſs sie jeden beliebigen Anfangszustand in sich aufnehmen kann.

Im Anschluſs an diese zweite Art der Lösung ist noch zu bemerken, daſs wir in dem vorliegenden Falle eines einzelnen Massenpunktes auf eine quadratische Gleichung für die Unbekannte p geführt wurden, daſs aber in complicirteren Fällen, wo viele Punkte sich bewegen und dabei Kräfte auf einander ausüben, Gleichungen höheren Grades für p auftreten, welche aber gerade deswegen so viele verschiedene Wurzeln p liefern, daſs man eine hinreichende Zahl unabhängiger particulärer Integrale aufstellen kann, um durch die ihnen anzuhängenden unbestimmten Coefficienten die umfangreicheren Anfangsbedingungen zu befriedigen und auch dann die vollständige Lösung zusammensetzen zu können.

Seiner physikalischen Bedeutung nach stimmt der gefundene Werth von p, abgesehen von dem Factor i, welcher die Exponentialfunction in Sinusfunctionen verwandelt, überein mit der im vorigen Paragraphen in Gleichung (38b) (Seite 64) aufgestellten Schwingungszahl für 2π Secunden. Es ist $p = i \,.\, n$.

§ 24. Bewegung im Raume.

Nachdem wir die Bewegung eines Massenpunktes unter Wirkung einer elastischen Kraft für den Fall behandelt haben, dafs diese Bewegung nur in einer geraden Linie, nämlich der x-Axe erfolgen könne, gehen wir nun zu dem allgemeineren Problem über, welches durch die drei Gleichungen (35b) aufgestellt ist. Wir suchen also die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher bei freier Beweglichkeit im Raume mit einem beliebigen Anfangszustand unter Wirkung einer nach dem Anfangspunkt der Coordinaten gerichteten elastischen Kraft steht. In den drei für diesen Fall geltenden Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m \,.\, \frac{d^2 x}{d t^2} &= -\, a^2 x \\ m \,.\, \frac{d^2 y}{d t^2} &= -\, a^2 y \\ m \,.\, \frac{d^2 z}{d t^2} &= -\, a^2 z \end{aligned}\right\} \tag{35b}$$

erscheinen die drei gesuchten Zeitfunctionen x, y, z von vorn herein getrennt, also unabhängig von einander, jede wird bestimmt durch eine Differentialgleichung von der Form, die wir soeben behandelt haben. Wir können daher sofort die vollständige Lösung hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= F_x \cos n t + G_x \sin n t \\ y &= F_y \cos n t + G_y \sin n t \\ z &= F_z \cos n t + G_z \sin n t \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die Coefficienten F_x, G_x, F_y, G_y, F_z, G_z sind die zur vollständigen Lösung gehörigen sechs unbestimmten Integrationsconstanten, $n = a/\sqrt{m}$ hat die vorher durch Gleichung (38b) angegebene Bedeutung. Durch diese drei Gleichungen ist die Bewegung bestimmt als ungestörte Superposition dreier auf einander senkrechter oscillatorischer Bewegungen von gleicher Periode.

Wenn wir nun die Gestalt und die Lage der Bahn, welche der Massenpunkt im Raume beschreibt, auffinden wollen, so müssen wir die Zeit aus den Gleichungen (40) eliminiren. Den ersten Schritt dazu können wir ausführen, wenn wir $\cos n t$ und $\sin n t$ zunächst als zwei selbstständige Gröſsen auffassen und die bekannte Relation zwischen beiden für später vorbehalten. Die drei Gleichungen sind lineare Gleichungen für $\cos n t$ und $\sin n t$, und bereits zwei von denselben würden hinreichen, dieselben auszudrücken. Da aber diese Ausdrücke, in die dritte Gleichung eingesetzt, diese ebenfalls befriedigen sollen, so muſs zwischen den vorkommenden Coefficienten eine Beziehung bestehen, welche bekanntlich ihren Ausdruck in dem Verschwinden der folgenden Determinante findet:

$$\begin{vmatrix} x & F_x & G_x \\ y & F_y & G_y \\ z & F_z & G_z \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgeführt:

$$x(F_y G_z - F_z G_y) + y(F_z G_x - F_x G_z) + z(F_x G_y - F_y G_x) = 0. \quad (41)$$

Die nothwendige Beziehung tritt also in Gestalt einer linearen, homogenen Gleichung zwischen x, y, z auf, welche in der analytischen Geometrie irgend eine durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgehende Ebene bezeichnet. Die Bewegung des Punktes muſs daher in einer festen Ebene verlaufen, deren Lage durch die Integrationsconstanten, d. h. durch den Anfangszustand, bestimmt ist. Thatsächlich ist auch durch den Nullpunkt der Coordinaten, den Anfangsort und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes eine solche Ebene festgelegt. Nachdem wir dies erkannt, können wir die weiteren Betrachtungen dadurch vereinfachen, daſs wir das Coordinatensystem so drehen, daſs eine seiner Ebenen, beispielsweise die (x, y)-Ebene mit der gefundenen Ebene zusammenfällt. Dann bleibt während der ganzen Bewegung $z = 0$ und wir haben nur noch die zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= F_x \cos n t + G_x \sin n t \\ y &= F_y \cos n t + G_y \sin n t. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Daſs bei dieser Drehung die Coefficienten ihre Werthe verändern, ist selbstverständlich.

Um nun die Bahn in dieser Ebene zu bestimmen, d. h. die Zeit zu eliminiren, drücken wir $\cos n t$ und $\sin n t$ aus, wozu die zwei Gleichungen gerade hinreichen:

$$\cos n t = \frac{x \,.\, G_y - y \,.\, G_x}{F_x G_y - F_y G_x} \quad \text{und} \quad \sin n t = \frac{y \,.\, F_x - x \,.\, F_y}{F_x G_y - F_y G_x};$$

dann liefert die Relation:

$$\cos^2 n t + \sin^2 n t = 1$$

das Resultat der Elimination der Zeit aus den beiden Integralgleichungen in folgender Form:

$$(x G_y - y G_x)^2 + (y F_x - x F_y)^2 = (F_x G_y - F_y G_x)^2.$$

Als Gleichung zweiten Grades zwischen x und y bezeichnet dieselbe einen Kegelschnitt. Die Ausführung der Quadrate führt zu der folgenden Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} x^2 \,.\, (F_y^2 + G_y^2) + y^2 \,.\, (F_x^2 + G_x^2) - 2\, x y \,.\, (F_x F_y - G_x G_y) \\ = (F_x G_y - F_y G_x)^2. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Da die Coefficienten von x^2 und y^2 beide nothwendig positiv sind, haben wir es nur mit Ellipsen zu thun, was übrigens schon daraus hervorgeht, daſs die durch Gleichungen (40) bestimmten Coordinaten niemals ins Unendliche wachsen. Es fehlen dieser Ellipsengleichung Glieder, welche x und y allein in erster Potenz enthielten, daher ist der Nullpunkt der Coordinaten Mittelpunkt der Ellipse. Es kommt aber ein Glied mit dem Produkt $x \,.\, y$ vor, das deutet an, daſs die x- und y-Axe im Allgemeinen nicht die Hauptaxen der Ellipse sind, letzteres ist vielmehr nur dann der Fall, wenn der Coefficient des betreffenden Gliedes verschwindet, wenn also

$$F_x F_y - G_x G_y = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet, daſs die beiden oscillatorischen Bewegungen x und y einen Phasenunterschied von $^1/_4$ Periode besitzen. Dies folgt direct aus der kurz vor Gleichung (37 a) (Seite 65) stehenden Beziehung $\varphi = \operatorname{arctg} F/G$. Wir können jedenfalls das Axenkreuz so drehen, daſs dasselbe mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfällt; die alsdann geforderte Bedingung, die in der letzten Gleichung liegt, können wir ohne Schaden der Allgemeinheit dadurch erfüllen, daſs wir zwei von den vier Coefficienten der Gleichungen (42), welche diagonal stehen, gleich Null setzen, etwa: $G_x = F_y = 0$. Die einzige Beschränkung bei dieser Annahme ist, daſs der Anfangspunkt der Zeitzählung dadurch in bestimmter Weise festgesetzt ist. Jetzt lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= F_x \cos n\,t \\ y &= G_y \sin n\,t \end{aligned}\right\} \tag{42a}$$

und die Eliminationsgleichung der Zeit:

$$\frac{x^2}{F_x^{\,2}} + \frac{y^2}{G_y^{\,2}} = 1 \tag{43a}$$

hat die Normalform der auf die Hauptaxen bezogenen Gleichung einer Ellipse, welche wegen der Unbestimmtheit von F_x und G_y noch jede beliebige Gestalt haben kann.

Die Schwingungsdauer der oscillatorischen Componenten (40): $T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{a}$ bestimmt in allen Fällen die Umlaufsdauer des Massenpunktes in seiner elliptischen Bahn, diese ist also, unabhängig von Gröfse und Gestalt der Bahn, stets dieselbe.

In dem Grenzfall, dafs die eine Axe der Ellipse verschwindet, degenerirt die Ellipse in eine doppelte gerade Strecke; wir haben dann den zuerst behandelten Specialfall der Bewegung in gerader Linie vor uns. In dem besonderen Falle, dafs beide Axen einander gleich werden, $G_y = F_x$, erhalten wir eine Kreisbahn, deren Radius wir kurz F nennen wollen. Das besondere dieses Specialfalles besteht darin, dafs dabei der Massenpunkt auf seiner Bahn stets an Orten bleibt, an denen die elastische Kraft dieselbe Intensität $-a^2 F$ besitzt, dafs ferner diese Kraft stets senkrecht auf der Bahn steht, daher keine Wegbeschleunigung erzeugen kann; die Masse kreist vielmehr mit unveränderter Geschwindigkeit, und jene elastische Kraft liefert in diesem Falle lediglich die zur Aufrechterhaltung der Kreisbahn nöthige Centralkraft. Wir können dies leicht bestätigen, wenn wir einen der in Gleichung (21) (Seite 36) aufgestellten Ausdrücke der Centralkraft heranziehen. Dort ist die Centralkraft gemessen durch das Product aus Masse, Radius und Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Die letztere, bezeichnet mit ω, können wir in unserem Falle leicht aus der Umlaufszeit T ableiten. Da nämlich in der Zeit T der ganze Kreis, also der Winkel 2π durchlaufen wird, ist $2\pi = \omega\,T$, oder wegen $T = 2\pi\,.\sqrt{m}/a$ ist die Winkelgeschwindigkeit selbst:

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{m}},$$

also derselbe Betrag, den wir bei oscillirenden Bewegungen die Schwingungszahl für 2π Secunden nannten. Setzen wir nun die Centralkraft auf die angegebene Weise zusammen, so finden wir:

$$m \,.\, F \,.\left(\frac{a}{\sqrt{m}}\right)^2 = a^2 \,.\, F,$$

also thatsächlich den Betrag der vorhandenen elastischen Kraft.

§ 25. Mathematisches Pendel.

Wir wenden uns nun zu einer Bewegungsart des Massenpunktes, welche unter Wirkung der Schwerkraft zu Stande kommt, deren Verlauf indessen in den einfachsten und wichtigsten Fällen eine direkte Anwendung der soeben gewonnenen Kenntnisse über die Wirkung der elastischen Kräfte erlaubt. Unter einem mathematischen oder idealen Pendel versteht man einen unter Wirkung der Schwerkraft stehenden Massenpunkt, welcher gezwungen ist, bei seinen Bewegungen auf einer festen Kugelfläche zu bleiben. Diese beschränkte Bewegungsfreiheit können wir uns in diesem und in allen ähnlichen Fällen dadurch hervorgebracht denken, daſs der Massenpunkt bei einer Entfernung aus der Kugelfläche in dieselbe zurückgezogen wird durch Kräfte von elastischer Natur, welche bei jeder Lage des Punktes in der Kugelfläche unwirksam sind, welche aber bereits bei verschwindend kleinen Abständen von dieser Fläche so hohe Beträge erreichen, daſs sie jeder äuſseren Kraft, welche den Punkt herauszuziehen strebt, das Gleichgewicht zu halten vermögen, also deren Wirkung aufheben, ohne daſs die Entfernung des Punktes aus der vorgeschriebenen Fläche merklich wird. Auf diese Weise können wir uns die Kugelfläche z. B. dadurch festgelegt denken, daſs der Massenpunkt an einen Faden geknüpft ist, dessen anderes Ende unverrückbar festgehalten wird. Die Bewegung kann dann nur auf derjenigen Kugelschale erfolgen, deren Centrum der Aufhängungspunkt des Fadens ist und deren Radius durch die Fadenlänge bestimmt wird. An diesen Faden stellen wir die Anforderungen, daſs er selbst gewichtlos sei, in seinem Aufhängungspunkt keinerlei Steifigkeit äuſsere, vielmehr vollkommen biegsam sei, und endlich, daſs er sogenannt undehnbar sei, d. h. daſs er bereits bei verschwindend kleinen Streckungen jeden nöthigen Betrag von elastischer Kraft in der Richtung gegen das feste Centrum hin erzeuge, so daſs alle äuſseren Kräfte oder Kraftcomponenten, welche auf Verlängerung des Fadens hinwirken, also in Richtung der Verlängerung des Fadens fallen, aufgehoben und unwirksam werden. Diese Eigenschaften des Fadens genügen, so lange der Massenpunkt in der unteren Hälfte der Kugelschale bleibt. Gelangt derselbe aber in die obere Hälfte, welche höher liegt als das Centrum, so zieht die Schwerkraft ihn in das Innere des Kugelraumes; gegen eine solche Verschiebung würde ein biegsamer Faden keinen Widerstand leisten, wir müssen dann den Faden auch noch als starre und unverkürzbare gerade Strecke voraussetzen. Alle die gemachten Anforderungen kann man in Wirklichkeit niemals in voller Strenge erfüllen, daher bezeichnet man auch die gedachte Einrichtung als ideales Pendel; doch kann man, so lange die Bewegungen auf die untere Halbkugel beschränkt bleiben, Fäden herstellen, welche bei einer gegen die Pendelkugel (die den Massenpunkt vertreten mufs) verschwindend kleinen Masse hinreichend undehnbar und im Aufhängungspunkt biegsam genug sind, um eine für viele Zwecke genügende Annäherung an die idealen Eigenschaften des mathematischen Pendels zu gewinnen. Vom physischen Pendel, welches einen ausgedehnten, um eine feste horizontale Drehungsaxe schwingenden Körper darstellt, werden wir später zu reden haben.

Zunächst ist die Wirkung der Schwerkraft auf den an einem Faden von der Länge l hängenden Massenpunkt m in irgend einer Lage des letzteren zu untersuchen. In Fig. 3 stellt die durch den Aufhängungspunkt A abwärts gezogene Verticale AO die Ruhelage

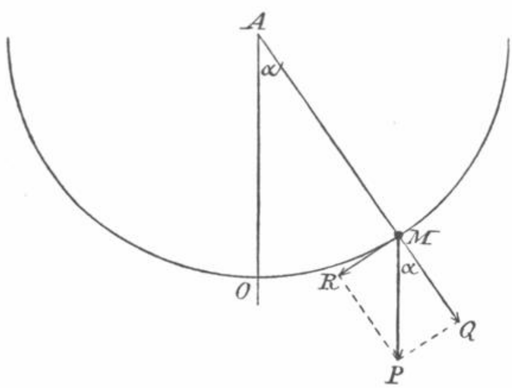

Fig. 3.

des Pendels dar, AO ist die Fadenlänge l und der in der Figur mit diesem Radius geschlagene Kreis ist der Durchschnitt der Kugelschale mit derjenigen durch AO gelegten Verticalebene, welche den Massenpunkt M enthält. Der Punkt O ist die Ruhelage der Masse, weil in diesem Punkt die verticale Schwerkraft $m.g$ in Richtung des verlängerten Fadens wirkt, also durch die Spannung desselben vollständig aufgehoben wird, so dafs keine beschleunigende Wirkung auf die Masse zu Stande kommt. Jede andere Lage M des Massenpunktes kann angegeben werden durch eine bestimmte Verticalebene, welche A und M enthält und durch den Winkel $OAM = \alpha$, um welchen die Fadenrichtung von der Verticalen abweicht. Die unveränderlich wirkende verticale Schwerkraft $m.g$ versinnlichen wir in Gröfse und Richtung durch die Strecke MP, dieselbe bildet mit der Verlängerung des Fadens MQ ebenfalls den Winkel α. Wir zerlegen die Kraft in eine radiale Componente MQ und eine tangentiale MR; der Betrag der ersteren ist $m.g.\cos\alpha$ und wird durch die Spannung des Fadens unwirksam gemacht, die andere, wirksame Componente hat die Gröfse $m.g.\sin\alpha$ und treibt den Massenpunkt beschleunigend nach der Ruhelage O hin. Wir wollen die Frage nach der Bewegung des Punktes nicht in ihrer allgemeinsten Fassung unter Zulassung eines ganz beliebigen Anfangszustandes behandeln, sondern uns mit der Erörterung folgender drei wichtiger Specialfälle begnügen: 1. Das Pendel bleibt während seiner Bewegung stets in nächster Nähe der Ruhelage O (Problem der kleinen Pendelbewegungen). 2. Das Pendel bewegt sich auf einem horizontalen Parallelkreise der Kugelschale (Problem des Kegelpendels). 3. Die Bewegung findet in einer festen Verticalebene, also in einer Kreisbahn statt, der Winkel α nimmt aber gröfsere Werthe an (Problem grofser ebener Pendelschwingungen).

§ 26. Kleine Pendelbewegungen.

Das Pendel soll während der Bewegung stets in nächster Nähe der Ruhelage bleiben. Als Grenze für diesen Fall wollen wir festsetzen, dafs der Winkel α, welcher die Abweichung mifst, in Bogenmafs eine so kleine Zahl ist, dafs wir bei der geforderten Genauigkeit unserer Angaben höhere Potenzen von α vernachlässigen dürfen, also auch den in der wirksamen Kraftcomponente vorkommenden $\sin\alpha$ durch α selbst ersetzen dürfen. In diesem Falle wird auch das kleine Stück der Kugelfläche, welches den Ruhepunkt O umgiebt und den Schauplatz des ganzen Vorganges umschliefst, nahezu als ein ebenes und horizontales Schwingungsfeld angesehen werden können. Die Gröfse der wirksamen Kraftcomponente, welche dann geradlinig nach O hinweist, ist $mg.\alpha$. Wenn wir den kleinen Abstand des Massenpunktes von seiner Ruhelage mit s bezeichnen, so ist $\alpha = \frac{s}{l}$, die wirksame Kraft kann also auch geschrieben werden $\frac{mg}{l}.s$, und stellt sich als proportional der Abweichung s heraus, denn $m.g/l$ ist ein constanter Factor.

Wir haben also hier dasselbe Gesetz der Kraft, welches wir bei den elastischen Kräften vorausgesetzt hatten, und wir können deshalb für den vorliegenden Fall ohne weitere analytische Betrachtungen die früher gewonnenen Resultate auf dieses Problem übertragen. Das negative Vorzeichen, welches wir den elastischen Kräften geben mufsten, ist zwar hier nicht explicite angegeben worden, wohl aber erkennen wir, dafs die wirksame Kraftcomponente auch hier nach dem Ruhepunkte hinweist. Das Maafs für die Stärke der elastischen Kraft, welches wir früher mit a^2 bezeichneten, wird in unserem vorliegenden Falle durch den Factor $m.g/l$, mit welchem die Elongation s in dem Ausdruck der Kraft behaftet ist, zu ersetzen sein. Die Bewegungen des Pendels werden entweder in geradliniger Bahn um die Ruhelage oscilliren, der zeitliche Verlauf wird dann ganz wie in Gleichung (37) (Seite 62) durch eine Sinusfunction dargestellt werden, oder das Pendel wird in elliptischer oder speciell auch in kreisförmiger Bahn die Ruhelage umkreisen. In allen Fällen ist die Schwingungsdauer oder Umlaufszeit dieselbe. Man erhält den Werth derselben aus der Formel $T = 2\pi.\sqrt{m}/a$ (vergl. Gleichung 38), indem man $a = \sqrt{\frac{mg}{l}}$ einführt, also:

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{44}$$

In dieser Formel für die Schwingungsdauer kleiner Pendelbewegungen liegen folgende Gesetze: T ist unabhängig von der Amplitude oder von den Dimensionen der elliptischen Bahn (so lange dieselbe nur hinreichend klein bleiben), T ist auch unabhängig von der Gröfse der bewegten Masse m (gleich wie das auch bei den Erscheinungen des freien Falles galt), T ist der Wurzel der Pendellänge direct und der Wurzel aus der Intensität der Schwerkraft umgekehrt proportional. Durch diese Formel ist das Pendel das geeignetste Instrument zu einer genauen Messung der Beschleunigung g, denn die Schwingungsdauer kann wegen ihrer unveränderlichen Gröfse aus der Dauer einer sehr grofsen Zahl von Schwingungen mit aller erwünschten Genauigkeit festgestellt werden. Auch die Länge l läfst sich recht genau messen, doch wendet man zu exacten Bestimmungen von g nicht solche annähernd mathematische Pendel, sondern physische Pendel von besonderer Construction, sogenannte Reversionspendel an, an denen diese Gröfse l mit gröfster Schärfe bestimmt werden kann.

§ 27. Kegelpendel.

Wir wenden uns nun zu der zweiten Annahme, dafs der Massenpunkt auf einer horizontalen Kreisbahn umlaufe, welche durch einen unveränderlichen endlichen Winkel α fest bestimmt werden kann. Der Faden des Pendels beschreibt bei dieser Bewegung den Mantel eines Kreiskegels, daher der Name Kegelpendel. In Fig. 4 sind alle Bezeichnungen in Uebereinstimmung mit der früheren Fig. 3 gewählt. Denken wir uns O als Pol der Kugelfläche, dann bildet die Bahn in diesem Falle einen Parallelkreis, welcher senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht und daher nur durch zwei diametral

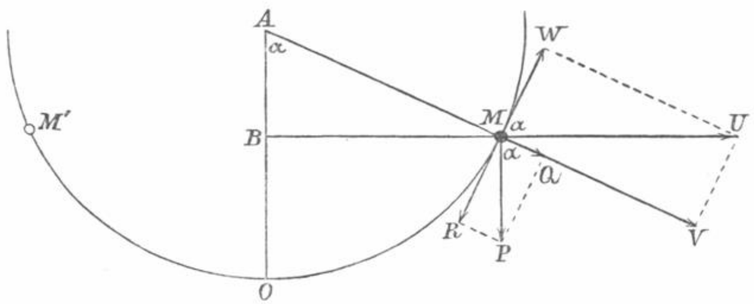

Fig. 4.

gegenüberliegende Punkte desselben, M und M' angedeutet werden kann. Die wirksame Componente der Schwerkraft $MR = mg \,.\, \sin\alpha$ weist jederzeit in Richtung der Tangente des Meridians nach dem Pol hin, und zwar wegen des constanten α mit unveränderter Intensität. Da die wirkende Kraft immer senkrecht auf der Bahn steht, werden wir nach den früheren Auseinandersetzungen (§ 7) keine Wegbeschleunigung zu erwarten haben, vielmehr eine Kreisbewegung von constanter Weggeschwindigkeit, deren Centrifugalwirkung durch die Schwerkraft und die Fadenspannung im Gleichgewicht gehalten werden mufs. Wir werden daher auch in diesem Falle ohne analytische Berechnungen aus unseren früheren Kenntnissen über die

Gröſse der Centralkraft einen Schluſs ziehen können, wie groſs für jeden Winkel α die Umlaufszeit T sein muſs.

Die zu überwindende Centrifugalkraft ist nach der schon mehrfach benutzten Gleichung (21) gleich dem Product aus Masse, Radius und Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Der Radius der Bahn ist in unserem Falle $BM = l . \sin \alpha$, die Winkelgeschwindigkeit läſst sich durch die noch unbekannte Umlaufszeit T ausdrücken in der Form $\frac{2\pi}{T}$. Also ist die Centrifugalkraft gleich:

$$m . l \sin \alpha \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} .$$

Die Richtung derselben liegt in der horizontalen Ebene der Bahn in Verlängerung des Radius BM und sei durch die Streck MU versinnlicht. Um zu erkennen, in welcher Weise sich die Fadenspannung und die wirksame Componente der Schwerkraft sich an der Vernichtung der Centrifugalkraft betheiligen, zerlegen wir die letztere in eine Componente in Verlängerung des Fadens MV und eine darauf senkrechte MW, welche ebenfalls in die Meridiantangente fällt, aber vom Pole O wegzeigt. Der Winkel UMW ist, wie leicht einzusehen, ebenfalls gleich α, also findet man:

$$MV = m . l . \sin^2 \alpha \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$MW = m . l . \sin \alpha . \cos \alpha \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} .$$

Die erste Componente MV wird durch die Fadenspannung ausgeglichen, während die zweite MW durch die entgegengesetzt gerichtete Schwerkraftscomponente MR vernichtet werden muſs. Es muſs also zur Erhaltung des angegebenen Bewegungszustandes nothwendig $MW = MR$ sein. Setzen wir die Kraftbeträge für diese beiden Strecken der Figur ein, und heben den gemeinsamen Factor $m . \sin \alpha$, so finden wir die folgende Bedingung:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l . \cos \alpha = g,$$

aus welcher folgt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cos \alpha} . \tag{45}$$

Durch diese Formel ist die Beziehung zwischen der Umlaufszeit und dem Winkel α gegeben. Je gröſser α ist, um so kürzer ist T.

Die Centrifugal-Regulatoren sind Kegelpendel, welche durch eine laufende Maschine selbst mit in Rotation versetzt werden, die Umlaufszeit wird um so kürzer je schneller die Maschine läuft. Die Arme dieser Apparate, welche dem Faden des mathematischen Pendels entsprechen, können sich heben und senken, und dadurch ein Dampfventil öffnen und schliefsen, der Winkel α wird sich bei denselben jederzeit nach dem Gesetze der Gleichung (45) der Umlaufszeit anpassen. Wie man sieht, ist auch diese Beziehung zwischen T und α unabhängig von der Gröfse der bewegten Masse m.

Es ist nicht uninteressant, auch den Betrag der durch die Spannung S des Fadens vernichteten Kräfte kennen zu lernen. Erstens spannt den Faden die Componente MQ der Schwerkraft und zweitens die Componente MV der Centrifugalkraft. Beide zusammen betragen nach Einführung der dafür gefundenen Kraftgröfsen:

$$S = mg\cos\alpha + m \, . \, l \, . \sin^2\alpha \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot$$

Setzen wir in diesem Ausdruck entsprechend (45)

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \overset{1}{\cos\alpha},$$

so findet man leicht:

$$S = \frac{m \, . \, g}{\cos\alpha} \cdot$$

Die Spannung des Fadens wächst also mit zunehmender Erhebung α und kann bei Winkeln α, welche nahe an $\frac{\pi}{2}$ kommen, leicht so grofs werden, dafs der Faden reifst. Endlich sei kurz darauf hingewiesen, dafs für sehr kleine Winkel α, für welche man $\cos\alpha = 1$ setzen kann, die Umlaufszeit T in Gleichung (45) übereinstimmt mit dem Resultat des vorigen Paragraphen in Gleichung (44).

§ 28. Ebene Pendelschwingungen von endlicher Amplitude.

Wir greifen jetzt das dritte in unserem Programm ausgewählte Problem an. Die Bewegung des Pendels soll dabei in einer festen Verticalebene verlaufen, oder der Massenpunkt soll in seiner Bewegung auf eine vertical stehende Kreisbahn beschränkt sein. Alle in radialer Richtung wirkenden Kräfte werden durch den Faden unwirksam gemacht; zu diesen gehört aufser der Componente MQ

(Fig. 3) der Schwerkraft in diesem Falle der ganze Betrag der Centrifugalkraft, oder anders ausgedrückt, der Faden stellt durch seine vermehrte Spannung allein die zur Erhaltung der Kreisbahn nöthige Centripetalkraft her; um dieselbe brauchen wir uns also im folgenden nicht zu kümmern. Nun hatten wir bei der allgemeinen Betrachtung krummliniger Bewegungen gesehen, daſs man die gesammte Beschleunigung zerlegen kann in die Centripetalbeschleunigung und die Wegbeschleunigung, welch' letztere sich darstellt als der nach der Zeit gebildete Differentialquotient der Weggeschwindigkeit. Dieser letztere Theil ist hier die Wirkung der in Richtung der Kreisbahn fallenden Componente der Schwerkraft MR, und die Gleichsetzung beider liefert uns die Differentialgleichung der Bewegung. Zur Bezeichnung der Lage des Massenpunktes benutzen wir wieder den Winkel α, welcher die Abweichung des Fadens von der Ruhelage miſst, und zwar können wir bei dieser ebenen Bahn die Abweichungen nach rechts und links durch positives und negatives Vorzeichen von α unterscheiden. Die Winkelgeschwindigkeit ist dann durch $\frac{d\alpha}{dt}$ gegeben und die Weggeschwindigkeit ist $q = l\frac{d\alpha}{dt}$. Der zeitliche Differentialquotient der letzteren ist $l\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ und stellt die Wegbeschleunigung dar, welche, mit der Masse m multiplicirt, das Maaſs für die wirksame Componente der Schwerkraft $MR = mg . \sin\alpha$ bildet. Da nun aber diese Kraft den absoluten Betrag des Winkels α zu verkleinern strebt, so müssen wir dieselbe mit dem negativen Vorzeichen versehen und erhalten als Differentialgleichung, welche die endlichen Pendelschwingungen beherrscht:

$$m . l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - mg\sin\alpha$$

oder einfacher:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = - \frac{g}{l}\sin\alpha. \tag{46}$$

Man sieht sogleich, daſs für kleine Werthe α die Differentialgleichung mit derjenigen der elastischen Kräfte übereinstimmt. In ihrer allgemeinen Form aber ist sie nicht linear, da $\sin\alpha$ eine transcendente Function von α darstellt. Zur Integration hilft uns indessen dasselbe Mittel, welches wir in § 22 bei der ersten Art der Lösung der elastischen Differentialgleichung benutzten, nämlich der integrirende Factor $\frac{d\alpha}{dt}$, mit welchem wir jetzt auch diese complicirtere Gleichung erweitern wollen. Nachdem wir alle Glieder auf die linke Seite geschafft haben, erhalten wir:

$$\frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Die linke Seite ist jetzt ein vollständiger Differentialquotient, man kann dafür schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\alpha\right\} = 0.$$

Daraus folgt aber, dafs

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\alpha = C \tag{47}$$

sein mufs, wo C eine unbestimmte Constante ist.

Bevor wir in der Integration weitergehen, müssen wir hier zwei Fälle unterscheiden, weil in beiden verschiedene Umformungen dieser Gleichung zum Ziele führen. Die Bewegung kann so geschehen, dafs die Geschwindigkeit $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ zu gewissen Zeiten gleich Null wird. Der schwere Punkt wird dann also bis zu einem gewissen Werthe des Winkels α steigen, und wenn die Geschwindigkeit Null geworden ist, wieder umkehren, bis er auf der anderen Seite dieselbe Höhe erreicht hat. Wir werden also in diesem Falle ein Hin- und Herschwingen des Punktes erhalten. Es ist aber nicht nöthig, dafs solche Grenzlagen vorhanden sind, vielmehr kann der Punkt auch durch die höchstgelegene Stelle der Kreisbahn noch mit Geschwinkeit hindurchfahren, und so fortdauernd in derselben Richtung im Kreise herumlaufen. Die Geschwindigkeit wird dabei freilich keine unveränderliche sein; der Fall ist analytisch nur dadurch charakterisirt, dafs dabei $\frac{d\alpha}{dt}$ stets dasselbe Vorzeichen behält und niemals Null wird.

Wir befassen uns zunächst mit dem ersten Falle, welcher die gewöhnliche hin- und hergehende Pendelbewegung darstellt. Bezeichnen wir den Grenzwinkel von α, welchen das Pendel im Moment seiner Umkehr, also für $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ bildet und welcher nie überschritten wird, mit h, so können wir durch diese ebenfalls unbestimmte Gröfse die Integrationsconstante C in der letzten Gleichung ersetzen, denn für diesen Grenzfall erhält man aus Gleichung (47):

$$0 - \frac{g}{l}\cos h = C.$$

Wir können also das bisherige Resultat für unseren Fall auch schreiben:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(\cos\alpha - \cos h) \tag{47a}$$

Setzen wir noch $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ und analog $\cos h$, so ist:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 4\,\frac{g}{l}\cdot\left(\sin^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Da stets $\alpha < h$ bleibt, so bleibt die rechte Seite dieser Gleichung stets positiv, was wegen des links stehenden Quadrates auch erforderlich ist.

Wenn wir nun in der Integration fortschreiten wollen, so müssen wir die Variabeln α und t trennen. Wir nehmen also die Quadratwurzel, um $d\alpha$ und dt frei zu machen, und vereinigen alle von α abhängigen Factoren auf der linken Seite, während wir dt nach rechts schaffen. So entsteht folgende Umformung:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt. \tag{47b}$$

Wenn wir jetzt integriren wollen, so bietet sich rechts keine Schwierigkeit. Wir können auch die bei dieser zweiten Integration auftretende Integrationsconstante sofort als eine unbestimmte Zeitgröfse τ einführen, deren Werth lediglich von dem Zeitpunkt abhängt, von welchem an wir die Zeit t zählen. Die Integration der rechten Seite ist dann:

$$\int 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot(t-\tau).$$

Die linke Seite müssen wir indessen noch umformen, um sie auf die Form des Differentiales derjenigen transcendenten Function zu bringen, welche darin steckt. Wir führen statt α eine neue Variabele σ ein durch die Gleichung:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{h}{2}\cdot\sigma. \tag{48}$$

Es ist sofort ersichtlich, dafs σ stets ein echter Bruch bleiben mufs. Die Differentiation liefert:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot d\alpha = \sin\frac{h}{2}\cdot d\sigma$$

und da

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{h}{2}\cdot\sigma^2}$$

ist, erhält man:

$$d\alpha = 2\,\frac{\sin\frac{h}{2}\,d\sigma}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{h}{2}\cdot\sigma^2}}.$$

Also finden wir folgende Umformung der linken Seite der Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 2\,\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}\cdot\sqrt{1 - \sin^2\frac{h}{2}\,\sigma^2}}.$$

Dieselbe führt auf die Normalform des Differentials des elliptischen Integrals erster Ordnung nach der LEGENDRE'schen Bezeichnung. Die Constante $\sin\frac{h}{2}$ nennt man den Modul desselben und pflegt denselben durch k zu bezeichnen. Wir setzen also $\sin\frac{h}{2} = k$, und können nun die zweite Integration schreiben:

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-\tau). \tag{49}$$

Da wir die Integrationsconstante τ bereits rechts angebracht haben, brauchen wir auf der linken Seite die untere Grenze nicht unbestimmt zu lassen, sondern können dieselbe, entsprechend der Normalform des elliptischen Integrals, gleich Null setzen, die linke Seite ist dann eine bestimmte Function der oberen Grenze σ. Es ist also durch diese Gleichung die von irgend einem Zeitpunkt an gezählte Zeit $(t-\tau)$, als Function von σ dargestellt. Wollen wir nun umgekehrt σ als Function der Zeit darstellen, so werden wir auf eine elliptische Function geführt, und zwar auf den Amplituden-Sinus:

$$\sigma = \operatorname{sinam}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-\tau)\right\} \text{modulo } k = \sin\frac{h}{2} \tag{50}$$

(Die elliptischen Functionen hängen mit den elliptischen Integralen in derselben Weise zusammen, wie die trigonometrischen Functionen mit den Arcusintegralen

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

zusammenhängen. Man vergl. die zu Gleichung (37) führenden Entwickelungen, Seite 62.)

Nun können wir nach Gleichung (48) statt σ wieder den Winkel α einführen, und erhalten endlich:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{h}{2}\cdot\operatorname{sinam}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}(t-\tau)\right\}\text{modulo } k = \sin\frac{h}{2} \tag{51}$$

als vollständiges Integral der Differentialgleichung (46) mit den beiden Integrationsconstanten h und τ.

Das bei der zweiten Integration auftretende elliptische Integral kann man auch auf eine andere Normalform bringen, wenn man statt der Variabelen σ, die doch stets einen echten Bruch darstellt, den Sinus einer neuen Variabelen ϑ einführt. Dann erhalten wir an Stelle der Substitution (48) folgende:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{h}{2}\cdot\sin\vartheta \tag{48a}$$

aus welcher, ähnlich wie vorher, folgt:

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = \sin\frac{h}{2}\cdot\cos\vartheta\,.\,d\vartheta$$

$$d\alpha = 2\frac{\sin\frac{h}{2}\cos\vartheta\,.\,d\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{h}{2}\sin^2\vartheta}}.$$

Die Umformung der linken Seite von Gleichung (47b) mit Hülfe dieser Substitution liefert dann:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{h}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = 2\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\frac{h}{2}\cdot\sin^2\vartheta}} = 2\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

und die zweite Integration ergiebt:

$$\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot(t-\tau). \tag{49a}$$

Ueber die Grenzen links, und über die Constante τ gilt das Gleiche, wie vorher. Das links stehende Integral ist die einfachste Form des elliptischen Integrales erster Gattung. Es erscheint hier als Function der oberen Grenze ϑ, welche man Amplitude des Integrales nennt. Es ist ϑ also auch Amplitude des dem Integrale gleichgesetzten Ausdruckes auf der rechten Seite, und in diesem Sinne constituirt der Begriff Amplitude die inverse Function des Integrals. Wir drücken dies in unserem Falle durch die Gleichung aus:

$$\vartheta = \operatorname{am}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}(t-\tau)\right\} \bmod. k = \sin\frac{h}{2} \tag{50a}$$

Bilden wir nun $\sin\vartheta$, und beachten die Substitution (48a), durch welche wir nun wieder $\sin\frac{\alpha}{2}$ einführen können, so finden wir dieselbe Schlufsgleichung, welche schon in (51) angegeben ist.

Die elliptischen Functionen, von denen wir hier den Amplitudensinus gebraucht haben, zeigen wichtige Analogieen mit den gewöhnlichen trigonometrischen Functionen, welche ja auch als ein Specialfall der ersteren aufgefafst werden können, nämlich als elliptische Functionen vom Modul $k = 0$. So besitzen die elliptischen Functionen eine uns hier besonders interessirende reelle Periode, d. h. einen Betrag, den man beliebig oft zum Argumente der Function hinzufügen kann, ohne deren Werth zu verändern. Diese Periode, welche bei den trigonometrischen Functionen den festen Werth 2π hat, hängt aber bei den elliptischen Functionen von der Gröfse des Modul k ab. Wenn wir also jetzt nach der Schwingungsdauer des Pendels fragen, so haben wir die Periode als Function des Moduls zu suchen. Die Substitutionsgleichung (48a): $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{h}{2}\cdot\sin\vartheta$ läfst erkennen, in welcher Weise $\frac{\alpha}{2}$ sich verändert, wenn ϑ gleichmäfsig von 0 bis 2π wächst. Am kürzesten können wir diesen Verlauf durch folgende Tabelle anschaulich machen:

ϑ	0	wächst bis	$\frac{\pi}{2}$	wächst bis	π	wächst bis	$\frac{3\pi}{2}$	wächst bis	2π
$\frac{\alpha}{2}$	0	wächst bis	$+\frac{h}{2}$	sinkt bis	0	sinkt bis	$-\frac{h}{2}$	wächst bis	0

Während also ϑ dauernd wächst, schwankt $\frac{\alpha}{2}$ zwischen zwei Grenzen hin und her, wenigstens müssen wir an diesem Verlaufe festhalten, wenn die Veränderungen von α stetig sein sollen, wie es die physikalische Bedeutung dieses Winkels verlangt.

Wenn wir nun in der Integralgleichung (49a) die Amplitude $\vartheta = 2\pi$ setzen, so integriren wir über eine ganze Schwingungsdauer, und die rechts stehende, dabei verstrichene Zeit $(t - \tau)$ ist die gesuchte Periode T.

Es läfst sich nun sehr leicht einsehen, dafs die vier Quadranten von ϑ gleiche Beiträge zu dem Integrale liefern, dafs also:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

ist. Die Gröfse

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}},$$

welche in der anderen Schreibweise

$$K = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}$$

ist, nennt man in der Theorie der elliptischen Functionen, nach Jacobi's Bezeichnung, das vollständige Integral erster Gattung. Die Periode des Amplitudensinus ist dann $= 4K$, und die Schwingungsdauer des Pendels kann aus Gleichung (51) dadurch gefunden werden, dafs

$$4K = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot T$$

sein mufs, also

$$T = 4K \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{52}$$

Wir wollen $4K$ als Function von k hier durch eine Reihenentwickelung auffinden. Nach dem binomischen Satze ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = (1-k^2\sin^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k^4\sin^4\vartheta + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}k^6\sin^6\vartheta + \ldots$$

Da diese Reihe, wegen $k^2\sin^2\vartheta < 1$, absolut convergirt, können wir dieselbe gliedweise integriren und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = 2\pi + \frac{1}{2}k^2\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k^4\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\, d\vartheta + \ldots$$

Es handelt sich nun um die Werthe der Ausdrücke:

$$\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}} = \int_0^{2\pi} \sin^{2\mathfrak{a}} \vartheta \,.\, d\,\vartheta, \text{ für } \mathfrak{a} = 1, 2, 3 \ldots$$

Wenn wir $\sin^{2\mathfrak{a}} \vartheta \,.\, d\,\vartheta = -\sin^{(2\mathfrak{a}-1)} \vartheta \,.\, d\cos\vartheta$ setzen, so können wir durch partielle Integration finden:

$$\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}} = -\Big[\cos\vartheta \sin^{2\mathfrak{a}-1}\vartheta\Big]_0^{2\pi} + (2\mathfrak{a}-1)\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \,.\, \sin^{2\mathfrak{a}-2}\vartheta \,.\, d\,\vartheta.$$

Der aus dem Integral herausgetretene Theil fällt zwischen den Grenzen 0 und 2π fort, und das noch übrig bleibende Integral können wir wegen:

$$\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$$

in zwei Theile spalten, welche wieder von der Form $\mathfrak{S}$ sind, so daſs wir erhalten:

$$\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}} = (2\mathfrak{a}-1)\,\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}-2} - (2\mathfrak{a}-1)\,\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}}$$

oder endlich:

$$\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}} = \frac{2\mathfrak{a}-1}{2\mathfrak{a}}\,\mathfrak{S}_{2\mathfrak{a}-2}.$$

Dies ist eine sogenannte recurrirende Formel, aus welcher wir nach Auffindung eines einzigen $\mathfrak{S}$ alle übrigen finden können. Nun ist aber:

$$\mathfrak{S}_0 = \int_0^{2\pi} \sin^0\vartheta \,.\, d\,\vartheta = \int_0^{2\pi} d\,\vartheta = 2\pi,$$

also können wir stufenweise bilden:

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_0 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$\mathfrak{S}_4 = \frac{3}{4}\,\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi$$

$$\mathfrak{S}_6 = \frac{5}{6}\,\mathfrak{S}_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2\pi \text{ u. s. w.}$$

Nachdem wir nun die in unserer Reihenentwickelung vorkommenden Integrale gefunden haben, erhalten wir:

$$4K = 2\pi\,.\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot k^6 + \ldots\right\}$$

Auch diese Reihe ist absolut convergent für $k < 1$, und wir erhalten aus Gleichung (52), unter Beachtung, dafs $k^2 = \sin^2 \frac{h}{2}$ ist, folgenden Ausdruck für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{h}{2} + \frac{9}{81} \sin^4 \frac{h}{2} + \ldots \right\} \tag{53}$$

Man sieht, dafs bei Schwingungsbögen von solcher Kleinheit, dafs bereits das Quadrat des $\sin h/2$ unmerklich wird, diese Gleichung übereinstimmt mit der für diesen Fall früher abgeleiteten Gleichung (44) (Seite 78), dafs aber bei gröfserem h die Schwingungsdauer zunimmt.

Bei Amplituden, die nicht über spitze Winkel hinausgehen, bei denen also $\sin^2 \frac{h}{2} < \frac{1}{2}$ ist, convergirt diese Reihe sehr schnell und es genügt in den meisten praktisch wichtigen Fällen endlicher Pendelschwingungen, das erste oder höchstens die ersten zwei Glieder der Reihe zu berücksichtigen, denn man zieht es auch aus anderen Gründen vor; bei den zu Messungen der Schwerkraft verwendeten physischen Pendeln, welche genau den hier entwickelten Gesetzen folgen, die Schwingungsbögen nicht allzu grofs zu machen, wodurch die Reibungen unnütz vergröfsert würden, und auch die Erschütterungen der sogenannt festen Aufhängungen Störungen veranlassen würden. Das wichtigste Correctionsglied ist also das erste Glied der Reihe, und wir können für mäfsige Amplituden mit genügender Genauigkeit die geschlossene Formel ansetzen:

$$T = 2\pi \,.\, \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{h}{2}\right\} \tag{53a}$$

§ 29. Pendelbewegungen in verticaler Kreisbahn ohne Umkehrpunkte.

Wir wenden uns nun zur Behandlung des zweiten möglichen Falles, den wir nach Ausführung der ersten Integration in Gleichung (47) unterschieden haben. Die Winkelgeschwindigkeit $d\alpha/dt$ wird dabei niemals gleich Null, es existirt kein maximaler Winkel h, wir können daher auch die Constante C nicht, wie beim vorhergehenden Falle, durch diesen Winkel ausdrücken. Wir müssen vielmehr, um eine reelle Lösung zu erhalten, eine andere Umformung vornehmen. Aus der ersten Integration:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l} \cos \alpha = C \tag{47}$$

folgt direct:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2C + \frac{2g}{l}\cos\alpha$$

oder wenn wir $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ setzen:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 2C + \frac{2g}{l} - \frac{4g}{l}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \left(2C + \frac{2g}{l}\right)\cdot\left(1 - \frac{\frac{4g}{l}}{2C + \frac{2g}{l}}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{54}$$

Der Massenpunkt hat bei dieser Art der Bewegung auch im oberen Gipfel seiner verticalen Kreisbahn noch eine Geschwindigkeit, und durchläuft daher seine Bahn dauernd in derselben Richtung, wenn auch die Geschwindigkeit in den oberen Theilen der Bahn eine geringere sein wird, als in den unteren, wie man aus den letzten Gleichungen für das Geschwindigkeitsquadrat sieht. Der kleinste Werth desselben tritt ein für $\alpha = \pi$ oder $= 3\pi$, $= 5\pi$ etc., also für den oberen Gipfel, und es ergiebt sich der Betrag desselben:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\pi^2 = 2C - 2\frac{g}{l} \tag{54a}$$

Der gröfste Werth tritt ein für $\alpha = 0$, $= 2\pi$, $= 4\pi$ etc., also für den Durchgang durch die Ruhelage. Dieser Betrag ist:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 = 2C + 2\frac{g}{l} \tag{54b}$$

Durch Subtraction der Gleichung (54a) von (54b) kann man C eliminiren und erhält:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\pi^2 = +4\frac{g}{l} \tag{54c}$$

Um von den Winkelgeschwindigkeiten auf die Weggeschwindigkeiten zu kommen, müssen wir diese Gleichung mit l^2 erweitern, und wenn wir noch den Factor $m/2$ hinzufügen, so haben wir links die Differenz der lebendigen Kraft zwischen der tiefsten und der höchsten Lage:

$$\frac{m}{2}\cdot\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0\right]^2 - \frac{m}{2}\left[l\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\pi\right]^2 = mg.(2l) \tag{54d}$$

Diese Gleichung ist ein neues Beispiel für das früher bei Gelegenheit der Fallbewegung in § 18 bereits beleuchtete Gesetz von der Erhaltung der Energie. Die rechte Seite stellt nämlich als Product der Schwerkraft $m . g$ und der Höhendifferenz $2\,l$ des höchsten und tiefsten Punktes der Bahn die Arbeit dar, welche diese Kraft bei der Abwärtsbewegung leistet, und welche sich in dem Zuwachs der lebendigen Kraft wiederfindet; bei der Aufwärtsbewegung, welche dem Durchgang durch die Ruhelage folgt, bewegt sich die Masse gegen die Richtung der Schwerkraft, und dabei wird dieser Zuwachs wieder verzehrt, während der Arbeitsvorrath bei der Erhebung um ebensoviel zunimmt.

Da auch $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\pi$ noch reell existiren soll, so mufs die rechte Seite der Gleichung (54a) positiv sein, d. h. die Constante C mufs gröfser sein, als $\frac{g}{l}$.

Betrachten wir nach dieser Erkenntnifs den in der Gleichung (54) als Factor von $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ auftretenden Complex, so erkennen wir denselben als einen nothwendig echten positiven Bruch, den wir durch k^2 bezeichnen wollen:

$$\frac{\frac{4\,g}{l}}{2\,C + \frac{2\,g}{l}} = k^2. \tag{55}$$

Wir können alsdann die Constante C durch k^2 ausdrücken, wie folgt:

$$C = \frac{g}{l}\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) \tag{55a}$$

Der Zahlenfactor $\frac{2}{k^2} - 1$ ist, wie vorher verlangt, stets > 1. Die begriffliche Bedeutung von k^2 wird klar, wenn wir Zähler und Nenner der Gleichung (55) durch die in Gleichungen (54c und b) dafür gefundenen Ausdrücke ersetzen und den Bruch dann mit $\frac{m}{2}\,l^2$ erweitern. Man erhält dann:

$$k^2 = \frac{\frac{m}{2}\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0\right]^2 - \frac{m}{2}\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_\pi\right]^2}{\frac{m}{2}\left[l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0\right]^2}, \tag{55b}$$

k^2 ist also das Verhältnifs des Spielraumes, in welchem die lebendige Kraft während der Bewegung schwankt, zu dem Betrage, welchen die lebendige Kraft beim Durchgang durch die Ruhelage besitzt. Da nun der Zähler nach Gleichung (54d) nur von der Masse m und dem Radius der Bahn l abhängt, so ist für dasselbe Pendel k^2 umgekehrt proportional dem Maximalwerth der lebendigen Kraft, oder k selbst ist umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, mit welcher das Pendel durch seine Ruhelage eilt. Nach Einführung von k^2 an Stelle von C nimmt Gleichung (54) folgende Gestalt an:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 4 \cdot \frac{g}{l k^2} \cdot \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right). \tag{56}$$

Um zur weiteren Integration die Variabeln α und t zu trennen, nehmen wir die Quadratwurzel und vereinigen die α enthaltenden Glieder auf der linken Seite. Es entsteht dann die Gleichung:

$$\frac{d\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\, dt. \tag{56a}$$

Wir sind damit wieder auf die Normalform des elliptischen Differentiales erster Gattung gekommen, und wenn wir die beim Integriren auftretende, unbestimmte Constante, wie vorher, auf der rechten Seite durch einen unbestimmten Zeitpunkt τ in Rechnung stellen, so können wir die untere Grenze des Integrales auf der linken Seite gleich Null setzen und erhalten:

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - \tau) \tag{57}$$

oder in anderer Ausdrucksweise:

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{am} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - \tau)$$

oder

$$\alpha = 2 \,.\, \operatorname{am} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - \tau) \tag{57a}$$

Die Function Amplitudo wächst fortwährend mit ihrem Argument, also hier mit der fortschreitenden Zeit, aber nicht gleichmäfsig, sondern in periodischem Wechsel schneller und langsamer; das interessante an unserem Resultate besteht darin, dafs wir in dem mechanischen Bilde eines die ganze Peripherie der verticalen

Kreisbahn durchlaufenden Pendels eine vollkommene Anschauung des Verlaufes dieser transcendenten Function erhalten.

Fragen wir nach der Umlaufszeit T', so haben wir die Grenzen für α über eine ganze Peripherie zu erstrecken; also etwa von 0 bis 2π. Die Grenzen des Integrales in Gleichung (57), welches $\frac{\alpha}{2}$ enthält, werden dann 0 und π.

Nach der Jacobi'schen Bezeichnung, welche wir oben bereits einführten, ist dieses Integral dann $2K$, und wir erhalten:

$$2K = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{g}{l}}\,T'.$$

K als Function des Modulus k kann man als bekannt annehmen, wir haben z. B. vor Gleichung (53) eine Potenzreihe für $4K$ entwickelt, deren Anwendung liefert:

$$T' = k\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot k^6+\ldots\right\} \tag{58}$$

Je gröfser die lebendige Kraft des herumlaufenden Massenpunktes ist, um so kleiner wird, wie wir vorher auseinandersetzten, der Modul k, um so näher rückt der Werth der geschweiften Klammer in dieser Gleichung an 1, und T' wird bei grofsen Geschwindigkeiten proportional k, d. h. umgekehrt proportional der Geschwindigkeit, wie dies auch bei gleichförmigen Rotationen der Fall ist.

Um die Continuität der beiden betrachteten Bewegungsarten des Pendels herzustellen, müssen wir in beiden Fällen zur äufsersten Grenze gehen. Wir müssen also annehmen, das hin- und herschwingende Pendel steige nahezu bis zum Gipfel und kehre dort um, also h nähere sich von unten der Grenze π. Alsdann wird $k = \sin\frac{h}{2}$ sich der 1 nähern. Das herumlaufende Pendel aber durchstreiche den Gipfel mit einem verschwindend kleinen Betrage von Geschwindigkeit; auch der für diesen Fall geltende Modulus k nähert sich der Grenze 1. Der gemeinsame Grenzfall ist nun der, dafs der Massenpunkt im Gipfel der Bahn mit der Geschwindigkeit Null verharrt. Der geringste Anstofs wird dann den Punkt in der einen oder anderen Richtung in Bewegung setzen und dadurch die Entscheidung herbeiführen, ob die Bewegung zur ersten oder zweiten Art gehört. Diese Ruhelage des Punktes im Scheitel der Bahn, aus welcher derselbe durch den geringsten Anstofs sich mit beschleunigter Bewegung entfernt, nennt man einen Zustand labilen Gleich-gewichts. Betrachten wir die Schwingungsdauer T und die Umlaufszeit T' für diesen Grenzfall, so ist zu bemerken, dafs T einem zweimaligen Durchlaufen des ganzen Kreises hin und zurück entspricht, also mit der Zeitdauer $2T'$ verglichen werden mufs. Die beiden gegebenen Reihenentwickelungen Gleichung (53) und Gleichung (58) (mit 2 multiplicirt) scheinen sich in der That für $k = 1$ der gemeinsamen Grenze:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots\right\}$$

zu nähern. Diese Reihe steht aber an der Grenze der Divergenz, ihre Summe ist logarithmisch unendlich.

§ 30. Die Dämpfungskraft.

Bei den Annahmen, welche wir in den vorstehenden Betrachtungen dieses Kapitels über die wirkenden Kräfte gemacht haben, ergaben sich Oscillationen und Pendelbewegungen von rein periodischem Verlauf. Dieselben werden also, einmal erregt durch irgend welche Anfangsbedingungen, ohne Grenze in der Zeit fortdauernd in gleicher Weise sich wiederholen, ohne dafs dabei etwa die Amplitude der Schwingungen abnimmt. Nun wissen wir aus der gewöhnlichen, täglichen Erfahrung, dafs schwingende Bewegungen von ewigem Bestande in irdischen Verhältnissen niemals herzustellen sind, dafs vielmehr bei allen wirklichen Pendeln, deren Bewegungen wir beobachten können, allmählich die Gröfse der Schwingungsbögen abnimmt und sich asymptotisch der Null, der Zustand also der Ruhe des Pendels, nähert. Man nennt diesen Vorgang die Dämpfung der Schwingungen. Unsere Voraussetzungen über die hier wirkenden Kräfte müssen also bisher unvollständig gewesen sein, und es ist nöthig, dafs wir uns darüber unterrichten, was für Arten von Kräften wir eine solche dämpfende Wirkung zuschreiben dürfen, und in welcher Weise die Bewegung des Pendels und namentlich auch die Schwingungsdauer durch dieselben beeinflufst wird. Diese Fragen sind von Wichtigkeit, weil die gedämpften Schwingungen den realen Fall bilden, mit dem wir es bei allen wirklichen Versuchen zu thun haben. Von vornherein ist klar, dafs diese Dämpfungskraft der jeweiligen Richtung der Bewegung stets entgegengesetzt gerichtet sein mufs, denn wäre sie gleichgerichtet, so würde sie die Geschwindigkeiten und damit auch die Amplituden mit der Zeit vergröfsern müssen. Ferner ist es eine geläufige Beobachtung, dafs die Abnahme der Schwingungsbögen um so beträchtlicher ist, je gröfser diese Bögen selbst noch sind, je gröfser also auch die vorkommenden Geschwindigkeiten beim Durchgang durch die tieferen Theile der Bahn sind. Diese Dämpfungskräfte werden also Functionen der Geschwindigkeiten sein, und zwar solche, welche erstens stets das der Geschwindigkeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, und welche zweitens mit wachsender Geschwindigkeit in ihrem absoluten Betrage zunehmen. Wenn wir nun im Folgenden die mathematisch einfachste Annahme machen, dafs die Dämpfungskräfte den herrschenden Geschwindigkeiten direct proportional sind, so ist das eine zunächst unbegründete Festsetzung, deren Berechtigung nur aus der Uebereinstimmung der analytischen Folgerungen mit der Erfahrung erwiesen werden kann, welche sich aber thatsächlich überall da bewährt hat, wo Körper mit glatten, abgerundeten Oberflächen sich in mäfsigen Geschwindigkeiten bewegen. Die Ursache solcher Dämpfung, der alle irdischen Körper bei ihrer Bewegung ausgesetzt sind, liegt in der relativen Verschiebung derselben gegen ihre Nachbarn und besteht beim Pendel, welches wir jetzt betrachten, erstens in der Reibung der kleinsten Theilchen des biegsamen Fadens an der Stelle seiner Aufhängung, oder in der Reibung der Schneide eines physischen Pendels auf ihrer Unterlage, zweitens aber in den durch die Schwingungen des Pendels erzeugten Luftbewegungen, welche hinaus in den Raum gehen und somit dem Pendel selbst dauernd Energie entziehen. Bei ungedämpften Schwingungen ist die Energie eine unveränderliche Gröfse, wie sich schon aus der dann constant bleibenden Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und aus der constanten Amplitude ergiebt. Diese Ableitung von Energie in die umgebende Luft, in welcher ein Körper sich bewegt, erfordert mitunter ein von dem oben aufgestellten abweichendes Gesetz für die Abhängigkeit der Dämpfungskraft von der Geschwindigkeit. Besitzt nämlich der bewegte Körper scharfe Kanten oder Ecken, welche nicht, wie bei den linsenförmigen Pendelmassen, zum leichteren Durchschneiden der Luft dienen, sondern welche quer zur Bewegungsrichtung stehen, oder ist bei einem abgerundeten Körper die Geschwindigkeit eine sehr bedeutende, so bilden sich hinter dem Körper Wirbelbewegungen in der Luft, deren Entstehung dem bewegten Körper mehr lebendige Kraft raubt, als die vorher erwähnte gewöhnliche Luftreibung. Die Dämpfungskraft darf alsdann nicht einfach proportional der Geschwindigkeit angesetzt werden, sondern man kommt den Thatsachen näher dadurch, dafs man im Grofsen und Ganzen, d. h. wenn man den Erfolg des Luftwiderstandes durch einen ganzen Schwingungsbogen zusammennimmt, die Dämpfungskraft proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit setzt. Dabei ist indessen zu beachten, daſs das Quadrat beim Wechsel der Richtung stets sein positives Vorzeichen behält, während diese Kraft im Gegentheil ihr Zeichen dabei immer wechselt. Diese Betrachtung wollen wir indessen hier nicht weiter verfolgen, sondern wir wollen uns auf die gewöhnlichen Fälle beschränken, in denen abgerundete Körper mit mäſsigen Geschwindigkeiten sich bewegen. Auch wollen wir die Betrachtung nur für kleine, geradlinige Pendelschwingungen durchführen, welche uns in § 26 auf dasselbe Resultat geführt hatten, wie die geradlinigen Bewegungen eines Massenpunktes unter Wirkung einer elastischen Kraft. Die Differentialgleichung war für diesen Fall gegeben durch Gleichung (35b, 1) S. 59:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -a^2 x.$$

Wir wollen nun zu der elastischen Kraft noch die eben besprochene Dämpfungskraft hinzufügen, welche wir ausdrücken durch $-k \cdot \frac{dx}{dt}$; k ist eine positive Constante, welche die specifische Stärke der Reibung bestimmt. Die Differentialgleichung für das Problem der gedämpften Schwingungen wird also:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -a^2 x - k \frac{dx}{dt} \tag{59}$$

Dieselbe ist homogen und linear und hat constante Coefficienten. Wir werden daher particuläre Integrale finden können, wenn wir, wie früher, x als Exponentialfunction der Zeit ansetzen:

$$x = e^{pt} \tag{60}$$

Dann ist $\frac{dx}{dt} = p \,.\, x$ und $\frac{d^2 x}{d t^2} = p^2 x$. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die Differentialgleichung verwandelt sich diese in eine quadratische Gleichung für das noch unbekannte p. Den allen drei Gliedern gemeinsamen Factor x können wir fortheben, da wir die selbstverständliche Lösung: $x = 0$ (für alle Zeiten) hier nicht suchen, sondern Bewegungen des Massenpunktes betrachten wollen. Wir können diese quadratische Gleichung in der Form schreiben:

$$p^2 + \frac{k}{m} p + \frac{a^2}{m} = 0 \tag{60a}$$

Die beiden Wurzeln derselben sind:

$$p = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}} \tag{60b}$$

Wir erhalten also zwei im Allgemeinen verschiedene Werthe von p, welche die Form (60) zu einer Lösung der Differentialgleichung machen, wir haben somit gleichzeitig zwei particuläre Integrale gefunden, aus denen wir das vollständige Integral mit zwei willkürlichen Constanten zusammensetzen können.

Bei der weiteren Behandlnng des angegriffenen Problems sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die in Gleichung (60b) vorkommende Quadratwurzel reell oder imaginär ausfällt. Beide Fälle haben einen physikalischen Sinn, es werden dadurch zwei wesentlich verschiedene Bewegungsarten charakterisirt; über die Verwendbarkeit von Integralen, welche in der Form imaginärer Exponentialfunctionen auftreten, haben wir schon in § 23 gesprochen.

§ 31. Aperiodischer Verlauf der Bewegung.

Zunächst behandeln wir den Fall, in welchem die beiden Wurzeln p reell sind. Derselbe tritt ein, wenn die Dämpfung so stark ist, dafs die Ungleichung:

$$\frac{k}{2m} \geqq \frac{a}{\sqrt{m}} \tag{61}$$

erfüllt ist. Eine obere Grenze für die Gröfse der Dämpfung ist durch die mathematischen Betrachtungen nicht gegeben, wenn sie sich nur durch physikalische Verhältnisse herstellen läfst.

Der absolute Betrag der Quadratwurzel bleibt stets kleiner als $\frac{k}{2m}$, die beiden reellen Wurzeln p sind daher immer negativ und im Allgemeinen von verschiedener Gröfse. Bezeichnen wir dieselben kurz durch

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1 &= -\frac{k}{2m} + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}} \\ \text{und} \qquad -\beta_2 &= -\frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{a^2}{m}}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

also

$$|\beta_1| < |\beta_2|,$$

so können wir mit Hülfe zweier unbestimmter positiver oder negativer Constanten A_1 und A_2 folgendes Integral bilden:

$$x = A_1 \,.\, e^{-\beta_1 t} + A_2 \,.\, e^{-\beta_2 t}. \tag{63}$$

Die Vollständigkeit desselben ergiebt sich daraus, dafs man jeden Anfangszustand, also den Ort x_0 und die Geschwindigkeit u_0 zur Zeit $t = 0$ durch dasselbe befriedigen kann. Es wird nämlich:

$$x_0 = A_1 + A_2$$

$$u_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = -\beta_1 A_1 - \beta_2 A_2,$$

woraus folgt:

$$A_1 = \frac{\beta_2 x_0 + u_0}{\beta_2 - \beta_1}$$

und

$$A_2 = -\frac{\beta_1 x_0 + u_0}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Jede der beiden Exponentialfunctionen in Gleichung (63) stellt eine Bewegung dar, welche sich mit der Zeit asymptotisch der Ruhelage

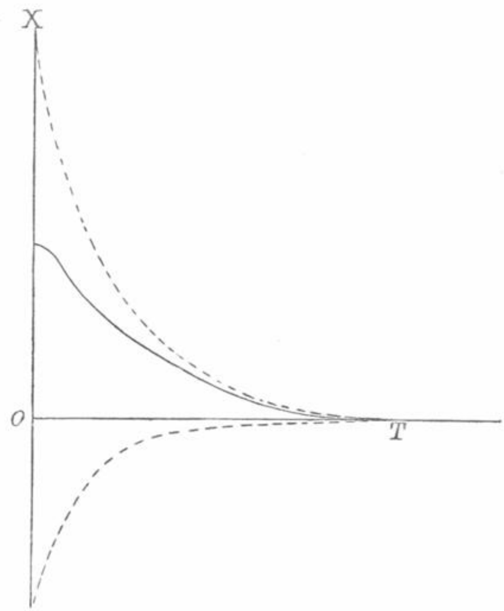

Fig. 5a.

nähert, und zwar erfolgt die Annäherung um so schneller, je gröfser der Coefficient β ist, mit welchem die Zeit im Exponenten multiplicirt ist. Von den beiden in (63) vorkommenden Functionen nimmt also diejenige, welche β_2 enthält, schneller ab, als die andere, weil nach Gleichung (62) $|\beta_2| > |\beta_1|$ ist. Der zeitliche Verlauf dieser Functionen ist in Fig. 5a und 5b in graphischer Weise durch die punktirten Curven anschaulich gemacht, die Abscissen, Richtung OT, stellen die fortschreitende Zeit dar, die Ordinaten, Richtung OX, die Abweichungen aus der Ruhelage. Die Superposition beider, die ausgezogenen Curven der Figuren, stellt einen Linienzug dar, welcher sich entweder sofort der Abscissenaxe asymptotisch anschmiegt (Fig. 5a), oder nur einmal dieselbe durchsetzt und sich dann von der anderen Seite nähert (Fig. 5b). Zu einem mehrfachen Oscilliren um die Ruhelage kommt es also in diesem Falle überhaupt nicht.

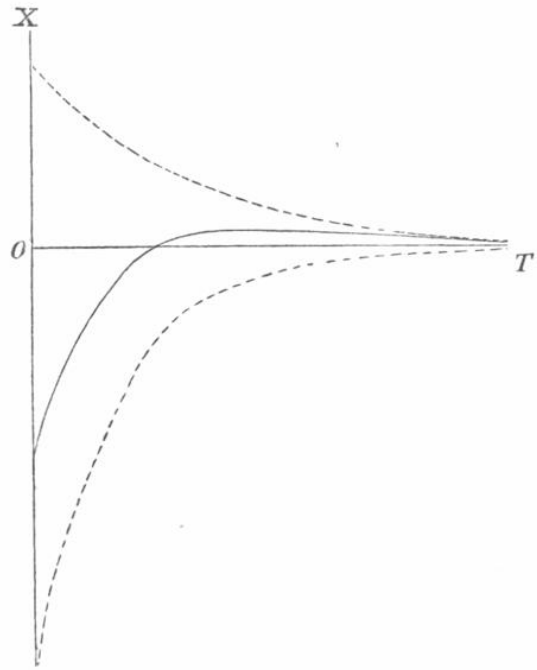

Fig. 5b.

Beispiele solcher stark gedämpfter Schwingungen bieten die Magnetnadeln in den ballistischen Galvanometern, deren Bewegungen aperiodisch sind und nach dem ersten Ausschlag sofort ersterben. Die Galvanometernadeln können zwar nicht als Massenpunkte aufgefafst werden, auf welche sich unsere jetzige Betrachtung bezieht, das einfachste mechanische System, welches man für dieselben einsetzen kann, besteht vielmehr aus mindestens zwei durch einen festen Abstand getrennten, gleichen Massenpunkten, welche sich um eine gemeinsame, im Mittelpunkte der Verbindungslinie senkrechte Drehungsaxe bewegen können. Wir werden aber später einsehen, daſs auch ausgedehnte starre Massensysteme, welche sich um eine feste Axe drehen können und dabei entweder durch die Torsion eines Aufhängungsdrahtes oder durch äuſsere Kräfte in eine bestimmte Ruhelage hingezogen werden, schwingende Bewegungen um diese Lage ausführen nach denselben Gesetzen, welche wir hier für einen einzelnen Massenpunkt finden.

Von praktischer Bedeutung für diesen Fall der aperiodischen Bewegung ist noch die Frage, unter welchen Gröſsenverhältnissen zwischen den vorgeschriebenen Constanten m, a^2 und k die Annäherung an die Ruhelage am schnellsten erfolgt. Der spätere Verlauf der Bewegung wird hauptsächlich bestimmt durch die langsamer abnehmende der beiden Exponentialfunctionen, in unserer Bezeichnung also durch diejenige, welche die Wurzel β_1 enthält. Je gröſser dieser Factor also ist, desto schneller erfolgt die Beruhigung. Nun sieht man aus den Gleichungen (62), daſs der absolute Betrag von β_1 am gröſsten wird, wenn die Quadratwurzel verschwindet, wenn also:

$$\frac{k}{2m} = \frac{a}{\sqrt{m}} \tag{64}$$

ist. Dies ist mithin die gesuchte Bedingung für das schnellste Erlöschen der Bewegung. Diese Relation bildet den Grenzfall zwischen reellen und complexen Wurzeln; daſs auch im letzteren Falle die Dämpfung langsamer wirkt, werden wir nachher erkennen.

Dieser Fall der verschwindenden Quadratwurzel bietet auch noch ein besonderes mathematisches Interesse, da die beiden particulären Integrale, aus welchen wir die allgemeine Lösung, Gleichung (63), zusammengesetzt haben, dadurch in eines zusammenflieſsen, also zunächst auch nur einer disponiblen Integrationsconstante Raum geben. Man kann aber durch einen vorsichtigen Grenzübergang zur Gleichheit von β_1 und β_2 die Vollständigkeit der Lösung mit zwei Constanten auch in diesem Falle wahren. Zunächst kann man die vollständige Lösung in folgender Form schreiben:

$$x = \{A_1 + A_2 \,.\, e^{-(\beta_2 - \beta_1)t}\} \,.\, e^{-\beta_1 t}.$$

Läſst man nun β_2 und β_1 gegen den gemeinsamen Grenzwerth $\frac{k}{2m}$ streben, so wird wegen der verschwindenden Differenz $(\beta_2 - \beta_1)$ für jede endliche Zeit:

$$e^{-(\beta_2 - \beta_1)t} = 1 - (\beta_2 - \beta_1)\,t$$

und die vorstehende Lösung wird dann:

$$x = (A_1 + A_2) . e^{-\beta_1 t} - A_2 (\beta_2 - \beta_1) . t . e^{-\beta_1 t}$$

oder wenn man folgende Constanten benutzt:

$$B_1 = A_1 + A_2$$

$$B_2 = - A_2 (\beta_2 - \beta_1):$$

$$x = B_1 . e^{-\beta_1 t} + B_2 . t e^{-\beta_1 t} \text{ für } \beta_1 = \frac{k}{2m}. \tag{65}$$

Es tritt also für diesen Specialfall aufser dem Integral $e^{-\frac{k}{2m}t}$, welches den gemeinsamen Werth der beiden früheren particulären Integrale darstellt, noch ein neues particuläres Integral von der Form: $t . e^{-\frac{k}{2m}t}$ auf. Dafs dieses die Differentialgleichung (59) für den Fall der Erfüllung der Relation (64) in der That befriedigt, kann man durch Bildung seiner Differentialquotienten und Einsetzung derselben in (59) leicht bestätigen. Wir behalten also auch für diesen Fall zwei Integrationsconstanten, mithin eine vollständige Lösung, durch welche wir jedem beliebigen Anfangszustande gerecht werden können. In den meisten praktischen Fällen, wo dieser Verlauf der Bewegung erwünscht ist, kann man entweder die bewegte Masse m, oder die elastische Kraft a^2, oder endlich die Dämpfung k so reguliren, dafs die Relation (64), von welcher das Eintreten desselben abhängt, erfüllt wird. Bei den Galvanometern zur Messung von sogenannten Stromstöfsen hat diesen Zustand zuerst E. du Bois-Reymond hergestellt.

Das Resultat dieser letzten Betrachtung, dafs nämlich die Beruhigung am schnellsten eintritt, wenn die Dämpfung k den kleinsten Betrag besitzt, der überhaupt bei aperiodischer Bewegung möglich ist, kann auf den ersten Blick paradox erscheinen; man könnte bei oberflächlicher Betrachtung vielmehr vermuthen, die Ruhe müfste um so schneller eintreten, je gröfser die Dämpfung ist. Dagegen ist aber geltend zu machen, dafs bei starker Dämpfung die Bewegung überhaupt nur mit geringerer Geschwindigkeit erfolgen kann und deshalb mehr Zeit bis zur Erreichung der Ruhelage erfordert, als in diesem günstigsten Falle.

§ 32. Gedämpfte Schwingungen.

Der zweite Fall, in welchem die Quadratwurzel der Gleichung (60b) (Seite 98) imaginär wird, liefert die eigentlichen gedämpften

Schwingungen mit oscillatorischem Verlauf. Die Bedingung für das Eintreten dieser Bewegungen ist die Ungleichung:

$$\frac{k}{2m} < \frac{a}{\sqrt{m}}, \tag{66}$$

welche alle Fälle umfafst, in denen die Dämpfungsconstante k, welche stets positiv sein mufs, einen geringeren Betrag hat, als in dem vorher betrachteten Grenzfall. Wir erhalten alsdann für die beiden Wurzeln p folgende Gleichung:

$$p = -\frac{k}{2m} \pm i\sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \tag{67}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{2m} &= b \\ \left|\sqrt{\frac{a^2}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}\right| &= n \end{aligned}\right\} \tag{67a}$$

$$p = -b \pm i n. \tag{67b}$$

Das vollständige Integral wird nun

$$x = A_1 e^{-bt+int} + A_2 e^{-bt-int}$$

oder:

$$x = e^{-bt}\{A_1 e^{+int} + A_2 . e^{-int}\}.$$

Die imaginären Exponentialfunctionen können wir durch trigonometrische Functionen ausdrücken:

$$x = e^{-bt}\{(A_1 + A_2)\cos n t + i(A_1 - A_2)\sin n t\}.$$

Das Integral tritt in complexer Form auf; wir hatten aber schon früher auseinandergesetzt, dafs man in solchem Falle den reellen und den imaginären Theil gesondert als particuläres Integral benützen kann; die aus A_1 und A_2 zusammengesetzten unbestimmten Constanten bleiben ebenfalls wegen einer Eigenschaft der linearen homogenen Differentialgleichungen frei verfügbar, so dafs wir aus den beiden Theilen der letzten Gleichung folgendes Integral zusammenstellen können:

$$x = F . e^{-bt}\cos n t + G . e^{-bt}\sin n t. \tag{68}$$

F und G sind die unbestimmten Integrationsconstanten, statt welcher man, gleichwie bei der Betrachtung der ungedämpften Schwingungen, eine Amplitude h und eine Phasenconstante φ einführen kann. Man erhält dann folgende, mit der vorstehenden gleichwerthige Lösung:

$$x = h \,.\, e^{-bt} \,.\, \sin(\varphi + n\,t). \tag{68a}$$

Die Vollständigkeit dieser Lösungen läfst sich, wie früher, dadurch nachweisen, dafs man F und G, oder h und φ durch die Anfangsbedingungen x_0 und u_0 ausdrückt. Das Resultat unterscheidet sich also von demjenigen, welches für ungedämpfte Schwingungen gilt, rein analytisch betrachtet, nur durch den hinzugekommenen Factor e^{-bt}. Dieser bringt aber in den durch jene Gleichungen beschriebenen Bewegungen characteristische Veränderungen hervor, welche wir betrachten wollen. Rechnen wir in Gleichung (68a) diesen Exponentialfactor mit zur Amplitude h, so erkennen wir, dafs die Bewegung wegen der Darstellung durch den Sinus eines mit der Zeit wachsenden Argumentes eine oscillatorische sein mufs von bestimmter unveränderlicher Periode, welche man leicht finden kann aus dem Werth von n in Gleichung (67a, 2), der die Bedeutung der Schwingungszahl für 2π Secunden erhält. Jedenfalls folgen also die Zeitpunkte, in denen der Sinus verschwindet, in denen also der Punkt durch seine Gleichgewichtslage geht, einander in gleichen Zeitintervallen. Der Hauptunterschied gegen den früheren Fall liegt darin, dafs die Amplitude, welche damals constant blieb, jetzt wegen des Factors e^{-bt} in einer bestimmten Weise mit der Zeit abnimmt und gegen die Grenze Null strebt, und zwar um so schneller, je gröfser b ist, während bei hinreichend kleinen Werthen von b die Abnahme der Amplituden im Vergleich zu der Schwingungsdauer der Oscillationen sehr langsam erfolgt. Die Gröfse b hängt durch Gleichung (67a) in einfachster Weise mit der Dämpfungsconstante k zusammen, auf welche man daher leicht übertragen kann, was hier von dem Einflufs von b gesagt ist. Der zeitliche Verlauf erlöschender Exponentialfunctionen ist bereits in den vorstehenden Figuren 5a und b durch die punktirten Curven anschaulich gemacht.

Bei genauerer Betrachtung kann man auch nachweisen, dafs durch den Exponentialfactor der zeitliche Verlauf der Bewegung im Inneren einer einzigen Oscillation in bestimmter Weise abgeändert wird im Vergleich zu dem Verlaufe einer normalen Sinusschwingung. Am deutlichsten zeigt sich dies, wenn wir die Zeiten aufsuchen, in welchen der Massenpunkt in seiner gröfsten Entfernung aus der Ruhelage umkehrt. Diese Zeiten sind charakterisirt durch die Bedingung: $\dfrac{dx}{dt} = 0$, wir müssen also zuerst durch Differentiation der

Gleichung (68a) nach der Zeit den Ausdruck für die Geschwindigkeit finden. Es ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dt} = .\, h\, .\, e^{-bt} . \{n\, .\, \cos(\varphi + nt) - b\, .\, \sin(\varphi + nt)\}.$$

An Stelle der beiden Coefficienten in der geschweiften Klammer, n und b, wollen wir zwei anschaulichere Gröfsen, n_0 und γ, einführen durch die Festsetzung:

$$\left.\begin{aligned} n &= n_0 \cos\gamma \\ b &= n_0 \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Dafs man unter allen Verhältnissen passende Werthe von n_0 und γ finden kann, ergiebt sich aus den Auflösungen dieser beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n_0{}^2 &= n^2 + b^2 \\ \gamma &= \operatorname{arctang} \frac{b}{n}. \end{aligned}\right\} \qquad (69\,\text{a})$$

Ein Blick auf die Ausdrücke in Gleichung (67a), für welche n und b als Abkürzungen eingeführt sind, zeigt, dafs:

$$n_0{}^2 = \frac{a^2}{m}$$

ist, dafs also nach Gleichung (38b), Seite 64, n_0 die Schwingungszahl darstellt, welche herrschen würde, wenn keine Dämpfung vorhanden wäre. Der Bogen γ kann, da b und n beide absolute Gröfsen sind, der Tangens also einen positiven Betrag hat, immer im ersten Quadranten gewählt werden: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Der Ausdruck für die Geschwindigkeit erhält durch Einführung von n_0 und γ folgende Form:

$$\frac{dx}{dt} = n_0\, .\, h\, .\, e^{-bt} . \cos(\gamma + \varphi + nt). \qquad (70)$$

Dieser Ausdruck wird Null, sobald der Cosinus verschwindet; wir sehen daraus, dafs die Zeitpunkte, in welchen der Massenpunkt in seiner äufsersten Entfernung umkehrt, ebenfalls in unveränderlichen Abständen von einander liegen, welche überdies gleich sind denjenigen, in welchen die Durchgänge durch die Ruhelage einander folgen. Der Unterschied vom Verlaufe der ungedämpften Sinusschwingungen besteht aber darin, dafs die Zeitpunkte der Umkehr, die wir mit $t_{\max}$ bezeichnen wollen, eine Verschiebung gegenüber den Zeitpunkten des Durchgangs durch die Ruhelage, die wir t_0

nennen wollen, erfahren haben. Die Zeiten t_0 sind gegeben durch: $\sin(\varphi + n t_0) = 0$. Daraus folgt $\varphi + n t_0 = \mathfrak{a}\,\pi$, mithin

$$t_0 = \mathfrak{a} \cdot \frac{\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3 \ldots\ldots) \tag{71}$$

Die Zeiten $t_{\max}$ aber werden bestimmt durch: $\cos(\gamma + \varphi + n \,.\, t_{\max}) = 0$, oder $\gamma + \varphi + n t_{\max} = \mathfrak{a}\,\pi + \frac{\pi}{2}$, mithin:

$$t_{\max} = \mathfrak{a}\,\frac{\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{2n} - \frac{\gamma}{n}. \tag{71a}$$

Der Zeitraum zwischen irgend einem t_0 und dem nächsten darauffolgenden $t_{\max}$ ergiebt sich hiernach:

$$(t_{\max} - t_0) = \frac{\pi}{2\,n} - \frac{\gamma}{n},$$

oder wenn wir statt n die Schwingungsdauer $T = 2\,\pi/n$ einführen:

$$(t_{\max} - t_0) = \frac{T}{4} - \frac{\gamma}{2\,\pi}\,T. \tag{71b}$$

Die Zeit zwischen einer Umkehr und dem nächsten darauf folgenden Durchgang durch die Ruhelage ist dementsprechend $\frac{T}{4} + \frac{\gamma}{2\,\pi}\,T$. Erstere ist also kürzer, als eine viertel Periode, letztere um ebenso viel länger, während bei den normalen Sinusschwingungen beide Zeiträume den gleichen Betrag einer viertel Periode besitzen. Diese Verschiebung der Umkehrzeiten bei gedämpften Schwingungen kann man sich auch durch eine graphische Darstellung veranschaulichen. In Fig. 6 stelle die horizontale, bei O beginnende Abscissenaxe die fortschreitende Zeit dar, während die verticale Ordinatenaxe OX in positiver und negativer Richtung die Entfernungen x des Massenpunktes aus seiner Ruhelage messen soll. Wir betrachten zuerst eine normale Sinuscurve von der Amplitude h und der Periode T. Dieselbe beginnt, entsprechend dem Anfangszustande, im Punkte X_0, ihre Gipfel sind durch H bezeichnet, die Fufspunkte derselben auf der Abscissenaxe, also die Zeitpunkte der Umkehr für diesen Fall, durch A, die Durchgänge durch die Ruhelage sind Ω genannt; der Abstand zweier benachbarter A oder Ω mifst also auf der Zeitaxe die halbe Periode, die kürzesten Strecken $A\Omega$ eine viertel Periode; durch die Strecke $O\,\Omega$ findet auch die Phasenconstante φ Berücksichtigung. Aufser dieser Sinuscurve enthält die Zeichnung auch noch die graphische Darstellung der Exponentialfunction $h \,.\, e^{-bt}$.

Diese ist durch die punktirte Curve angegeben, welche im Punkte E ansetzt; OE ist gleich h. Wenn man nun die Ordinaten der Sinuscurve nach dem Mafsstab der Ordinaten der Exponentialcurve verjüngt, so entsteht die dritte Curve der Figur, welche den Verlauf der gedämpften Schwingung darstellt. Die Amplituden AH werden dadurch verkürzt bis zur Höhe AJ, welche von Halbperiode zu Halbperiode mehr und mehr abnimmt. Da nun in der allernächsten Umgebung der Gipfelpunkte H die Sinuscurve parallel der Abscissenaxe verläuft, so mufs die Curve der gedämpften Schwingung in den Punkten J die Exponentialcurve tangiren, also in diesen Punkten

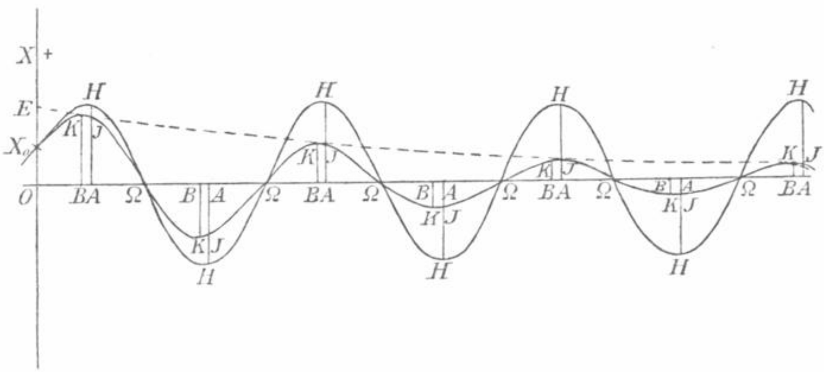

Fig. 6.

bereits abwärts geneigt sein, die Gipfelpunkte K der letzten Curve müssen also der Zeit nach früher erfolgen, also links von J liegen; die Fufspunkte B dieser Gipfelpunkte K, welche die Zeiten anzeigen, zu welchen die Geschwindigkeit des gedämpft schwingenden Massenpunktes gleich Null wird, liegen daher links von den entsprechenden Zeitpunkten A der ungedämpften Schwingung. Die kurzen Strecken BA sind nach der vorangehenden analytischen Betrachtung in allen Perioden dieselben und repräsentiren den durch $\frac{\gamma}{2\pi}T$ bezeichneten Zeitraum:

$$\overrightarrow{\Omega B} \text{ ist } \doteq \frac{T}{4} - \frac{\gamma}{2\pi} T \text{ und } \overrightarrow{B\Omega} = \frac{T}{4} + \frac{\gamma}{2\pi} T.$$

Aus den Gleichungen (67a) und (69a) erkennt man auch den Einflufs der Dämpfung auf die Schwingungszahl n; es ist nämlich:

$$n^2 = n_0{}^2 - \frac{k^2}{4m^2}, \tag{71c}$$

wo n_0 sich auf ungedämpfte Schwingungen bezieht. Die Schwingungszahl wird also durch die Dämpfung verkleinert, der gedämpfte Punkt schwingt langsamer. Doch enthält die Gleichung nur das Quadrat der Dämpfungsconstante k, welches in den Fällen, wo k selbst als kleine Gröſse betrachtet werden kann, völlig unmerklich wird, so daſs man den Satz aufstellen kann: Schwache Dämpfung verändert die Schwingungszahl nicht merkbar. Bei stärkerer Dämpfung wächst aber der Einfluſs in gesteigertem Maaſse, und man muſs denselben namentlich bei denjenigen Meſsmethoden berücksichtigen, in denen man die Gröſse einer elastischen Kraft (Constante a^2) aus der Beobachtung der Schwingungszahl ableiten will. Hierbei kommt es nämlich auf die Ermittelung von n_0 an, während man direct nur n beobachten kann. Die Correction, welche man an n^2 anbringen muſs, ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung, erfordert aber die zahlenmäſsige Kenntniſs der Dämpfungsconstante k, mit deren experimenteller Bestimmung wir uns jetzt beschäftigen müssen.

§ 33. Logarithmisches Decrement, Schwingungsbeobachtungen, Methode der kleinsten Quadrate.

Am leichtesten zu beobachten ist die Lage eines schwingenden Punktes zur Zeit seiner Umkehr, weil dann seine Geschwindigkeit Null ist, also ein Stillstand eintritt und man an einer festen Scala in Ruhe eine Ablesung machen kann, ohne durch die Erwartung eines von auſsen gegebenen Zeitsignals für die Ablesung beunruhigt zu werden. Man kann durch solche Beobachtungen die Amplituden der auf einander folgenden Schwingungen (die Höhen BK in Fig. 6) feststellen und dieselben mit den Resultaten der vorangehenden Theorie vergleichen. Die Umkehr findet nach Gleichung (71a) zu bestimmten Zeiten $t_{\max}$ statt. Wenn wir diese Zeiten in die Integralgleichung für x (Gleichung 68a) einführen, so erhalten wir die Beträge der aufeinanderfolgenden Amplituden $x_{\mathfrak{a}}$ zunächst in der Form:

$$x_{\mathfrak{a}} = h \,.\, e^{-\frac{b}{n}\left(\mathfrak{a}\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi - \gamma\right)} \,.\, \sin\left(\mathfrak{a}\,\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

und nach einigen elementaren Umformungen in folgender Gestalt:

$$x_{\mathfrak{a}} = \pm\, h \,.\, e^{-\mathfrak{a}\, b\frac{T}{2}} \,.\, \left\{e^{-\frac{b}{n}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \gamma\right)} \,.\, \cos\gamma\right\}.$$

Die geschweifte Klammer stellt einen constanten Factor dar, welcher die Ordnungszahl $\mathfrak{a}$ nicht enthält, also für alle auf einander folgenden Amplituden denselben Werth besitzt, folglich stellt sich die Amplitude $x_{\mathfrak{a}}$ proportional $e^{-\mathfrak{a}.b\frac{T}{2}}$ heraus, wenn man das abwechselnd positive und negative Vorzeichen unberücksichtigt läſst, die Amplituden also als absolute Strecken betrachtet. Bildet man die Verhältniſszahl zweier auf einander folgender Amplituden:

$$\frac{x_{\mathfrak{a}+1}}{x_{\mathfrak{a}}} = \frac{e^{-(\mathfrak{a}+1)b.\frac{T}{2}}}{e^{-\mathfrak{a}b\frac{T}{2}}} = e^{-b.\frac{T}{2}}, \tag{72}$$

so stellt sich dieselbe als unabhängig von $\mathfrak{a}$ heraus, ist also für alle Paare benachbarter Ausschläge dieselbe. Der Werth dieser Zahl ist stets ein echter Bruch, welcher bei kleiner Dämpfung b nahezu 1 wird, bei gröſserer Dämpfung aber kleinere Werthe besitzt.

Die Ausschläge nehmen also ab als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $e^{-b\frac{T}{2}}$. Dieses Resultat der Theorie bildet durch seine Uebereinstimmung mit den Messungen, welche an gedämpften Schwingungen ausgeführt werden können, die wichtigste Stütze für die Richtigkeit der zu Anfang beim Aufstellen der Differentialgleichung (59) gemachten Annahme, daſs die Dämpfungskraft einfach proportional der Geschwindigkeit zu setzen sei.

Bildet man die Logarithmen von den Gliedern einer geometrischen Reihe, so erhält man eine arithmetische Reihe; wenn der Quotient der ersteren, wie in unserem Falle, echt gebrochen ist, so ist jedes folgende Glied der arithmetischen Logarithmenreihe um eine constante Differenz kleiner als das vorhergehende. Diese Differenz finden wir durch Logarithmirung der Gleichung (72):

$$\log{}^{1)} x_{\mathfrak{a}+1} - \log x_{\mathfrak{a}} = -b \cdot \frac{T}{2} = -\sigma. \tag{72a}$$

Man nennt dieselbe das l o g a r i t h m i s c h e D e c r e m e n t der Schwingungen und besitzt in demselben eine genauen Messungen gut zugängliche Gröſse, aus welcher man nach Bestimmung der Schwingungsdauer T auch die Constante b und endlich das Maaſs der Dämpfungskraft, k, in absolutem Maaſse finden kann. Die Gröſse der Amplituden $x_{\mathfrak{a}}$ kann aus den Umkehrpunkten einer festen Scala nur abgeleitet werden, wenn man auch die Gleichgewichtslage auf

---

[1] Das Zeichen log bedeutet hier und später die natürlichen Logarithmen.

dieser Scala kennt; diese läfst sich indessen an dem schwingenden Punkte nicht direct beobachten. Es läfst sich aber leicht zeigen, dafs auch die ganzen Schwingungsbogen, von einem Umkehrpunkt bis zum nächsten gemessen, nach demselben Gesetz abnehmen. Nennen wir s_α den absoluten Betrag desjenigen Bogens, welchen der Punkt beschreibt, um von der durch die Amplitude vom absoluten Betrage $x_{\alpha-1}$ gegebenen Umkehrstellung bis zur nächsten Grenzlage x_α zu gelangen, so ist

$$s_\alpha = x_{\alpha-1} + x_\alpha$$

und wir finden folgende Verhältnifszahl zwischen zwei auf einander folgenden Bogen:

$$\frac{s_{\alpha-1}}{s_\alpha} = \frac{x_\alpha + x_{\alpha+1}}{x_{\alpha-1} + x_\alpha} = \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha} \cdot \frac{\dfrac{x_\alpha}{x_{\alpha+1}} + 1}{\dfrac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha} + 1} = \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha} = e^{-b\frac{T}{2}}$$

mithin:

$$\log s_{\alpha+1} - \log s_\alpha = -b\frac{T}{2} = -\sigma. \tag{72b}$$

Zur Bestimmung des logarithmischen Decrements ist also die Kenntnifs der Ruhelage entbehrlich.

Die Beobachtungen an pendelnden oder auch rotatorisch oscillirenden Körpern spielen in der ganzen messenden Physik eine wichtige Rolle, weil dieselben mit grofser Schärfe auszuführen sind und einen Schlufs auf die Gröfsen der in der Differentialgleichung angesetzten Kräfte ziehen lassen. So führt z. B., wie wir schon vorher erwähnten, die Bestimmung der Schwingungszahl n_0 zur Kenntnifs der durch die Constante a^2 characterisirten Kraft, mag dieselbe nun von der Torsion eines Aufhängungsdrahtes oder von einer äufseren Richtkraft, wie die Schwere beim Pendel oder die sogenannte Feldstärke bei den Magnetnadeln, herrühren. In anderen Fällen, bei ballistischen Messungen, wo ein schwingungsfähig aufgehängter Körper durch einen Stofs eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit erhält, kommt es auf die Gröfse des ersten Ausschlages an, welche alsdann erlaubt, diese Anfangsgeschwindigkeit zu ermitteln. Die früher schon erwähnten aperiodischen Galvanometer zur Messung von Stromstöfsen gehören hierher. Man kann auch die Geschwindigkeit von Geschossen dadurch bestimmen, dafs man dieselben gegen ein hinreichend schweres ballistisches Pendel abfeuert und den Ausschlagswinkel des letzteren mifst. In noch anderen Fällen ist es die Aufgabe, die Gröfse der Dämpfung zu bestimmen, z. B. um die

Gröfse der Inductionsströme zu vergleichen, welche durch die Bewegung von Magneten erzeugt werden. Endlich kann auch durch eine Veränderung der Gleichgewichtsbedingungen, also durch das experimentell bewirkte Hinzutreten einer vorher nicht wirksamen, nachher aber unveränderlichen äufseren Kraft, die Ruhelage des Körpers dauernd verändert werden, und es handelt sich um die Auffindung der neuen Ruhelage des schwingenden Körpers, um aus der eingetretenen Verschiebung einen Schlufs auf die Gröfse der neu hinzugetretenen Kraft zu ziehen. Dabei ist es unzweckmäfsig, das endliche Eintreten der Ruhe in der neuen Lage abzuwarten, weil dazu meist so lange Zeit nöthig ist, dafs die äufseren Verhältnisse inzwischen sich wieder irgendwie verändert haben können; auch ist aus demselben Grunde die zu einer genauen Ablesung erforderliche Bewegungslosigkeit selten vollkommen erreicht, gewöhnlich ist die Einstellung in einer, wenn auch geringfügigen, so doch bemerkbaren Wanderung begriffen, auf welche man Rücksicht nehmen mufs, wenn die Beobachtungen über längere Zeiten ausgedehnt sind. Deshalb entsteht die Aufgabe, die Ruhelage aus der Beobachtung einiger weniger auf einander folgender Umkehrstellungen abzuleiten.

Ehe wir zur Behandlung dieser Frage übergehen, sei hier noch Einiges über die Beobachtung der Umkehrpunkte gesagt. Bei einem materiellen Punkte, welcher in geradliniger oder kreisförmiger Bahn schwingt, ist der Begriff der Scalenablesung, durch welche dessen jeweiliger Ort bestimmt wird, ohne Weiteres klar. In der Praxis haben wir es aber stets mit ausgedehnten Massen zu thun, deren Lagenveränderungen wir durch irgend ein einfaches Merkmal zu verfolgen versuchen müssen. Um nun die Lage eines um eine feste Axe schwingenden Körpers feststellen zu können und um die Winkel zu messen, um welche derselbe sich gedreht hat, befestigte man früher einen Zeiger an demselben, welcher über eine festliegende Kreistheilung hinwegstrich. Auf diese Weise war bei der beschränkten Bewegungsfreiheit die Lage aus der Stellung des Zeigers auf der Scala sicher zu erkennen. Viel vollkommener erfüllt denselben Zweck die von Gauss und von Poggendorf eingeführte Methode der Spiegelablesung. An dem schwingenden Körper ist ein kleiner Spiegel derart befestigt, dafs dessen Ebene die Drehungsaxe enthält. Man beobachtet dann durch ein feststehendes Fernrohr das Spiegelbild eines in beliebiger Entfernung an geeigneter Stelle angebrachten Maafsstabes. Die Theilstriche desselben müssen parallel der Drehungsaxe gestellt sein und das Fernrohr mufs in der Bildebene eine Fadenmarke von der gleichen Richtung besitzen. Wenn dann der Körper nebst dem Spiegel um jene Axe schwingt, so werden immer andere Theilstriche des gespiegelten Bildes der Scala zur Deckung mit der Fadenmarke kommen; die letztere scheint also auf der Scala hin- und herzuwandern, und es ist bei einigermafsen langsamen Schwingungen leicht, den Zahlenwerth derjenigen Scalenstelle abzulesen, bei welcher der Faden stillsteht und umkehrt. Die Reduction der auf dem Maafsstab abgemessenen Strecken auf das Winkelmaafs der Drehung kann durch Ausmessung des Abstandes der Scala vom Spiegel gefunden werden; häufig genügt übrigens die Annahme, dafs bei kleinen Schwingungen die auf der Scala abgelesenen Strecken von einem Umkehrpunkt zum nächsten den wahren Schwingungsbogen proportional sind. Bei gröfseren Winkeln ist die Verschiedenheit des Bogenmaafses selbst von seiner trigonometrischen Tangente dabei zu berücksichtigen.

Wir wollen uns nun vorstellen, dafs wir nach dieser Methode die gedämpften Schwingungen eines Körpers beobachten. Der Gleichgewichtslage entspricht irgend ein bestimmter, aber zunächst aus den Schwingungen nicht deutlich erkennbarer Punkt der Scala, dessen Abmessung wir durch ξ bezeichnen wollen. Die Gröfse eines bestimmten Ausschlages, d. h. der Abstand eines bestimmten Umkehrpunktes von der Ruhelage ξ, sei in Einheiten der Scalentheile gemessen gleich X; auch diese Gröfse wollen wir ermitteln. Drittens fragen wir nach dem logarithmischen Decrement σ. Um diese drei Unbekannten zu bestimmen, liest man aufser demjenigen Umkehrpunkte, welcher zu dem gesuchten Ausschlag X gehört, bereits einige vorhergehende und dann ebenso viele darauf folgende Umkehrpunkte auf der Scala ab, so dafs man eine ungerade Anzahl von auf einander folgenden Ablesungen zur Verfügung hat. Wir wollen uns der Kürze wegen auf fünf beschränken und dieselben der Reihe nach durch die Scalenwerthe: λ_{-2}, λ_{-1}, λ_0, λ_{+1}, λ_{+2} bezeichnen. Der mittelste Umkehrpunkt λ_0 entspricht dann dem gesuchten Ausschlag X; wir wollen annehmen, dafs die Scala in solcher Richtung zählt, dafs λ_0 nach den grofsen Zahlen hinüberneigt, oder, wie man sich ausdrückt, dafs λ_0 ein oberer Umkehrpunkt ist. Fig. 7 veranschaulicht in graphischer Weise den beobachteten Theil der Bewegung der Fadenmarke auf der Scala. Letztere ist als Ordinatenaxe benützt, während die Abscissen, wie früher, die Zeit versinnlichen. Die Buchstaben der Figur stimmen mit denen des Textes überein. Folgende Beziehung: $\lambda_0 = \xi + X$, ist sofort aufzustellen. Die vorhergehenden und die nachfolgenden Ausschläge lassen sich durch die Unbekannte X und das logarithmische Decrement σ nach dem Gesetze der geometrischen Progression mit dem Quotienten $e^{-\sigma}$ folgendermafsen in ihrem absoluten Betrage ausdrücken:

$$X.e^{+2\sigma},\ X.e^{+\sigma},\ X,\ X.e^{-\sigma},\ X.e^{-2\sigma}.$$

Da dieselben abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{-2} = \xi + X.e^{+2\sigma} \\ \lambda_{-1} = \xi - X.e^{+\sigma} \\ \lambda_0 \ \ = \xi + X \\ \lambda_{+1} = \xi - X.e^{-\sigma} \\ \lambda_{+2} = \xi + X.e^{-2\sigma} \\ \text{oder kurz:} \\ \lambda_\mathfrak{a} = \xi + (-1)^\mathfrak{a}.X.e^{-\mathfrak{a}\sigma},\ \mathfrak{a} \text{ von } -2 \text{ bis } +2. \end{array}\right\} \quad (73)$$

Dies sind ebenso viele Gleichungen, als wir Ablesungen angenommen hatten, während die Zahl der Unbekannten nur drei ist, also auch drei Gleichungen zu ihrer Bestimmung ausreichen würden. Nun sind aber Beobachtungen niemals ohne Unvollkommenheit: Die Schärfe unserer sinnlichen Wahrnehmungen hat gewisse Grenzen,

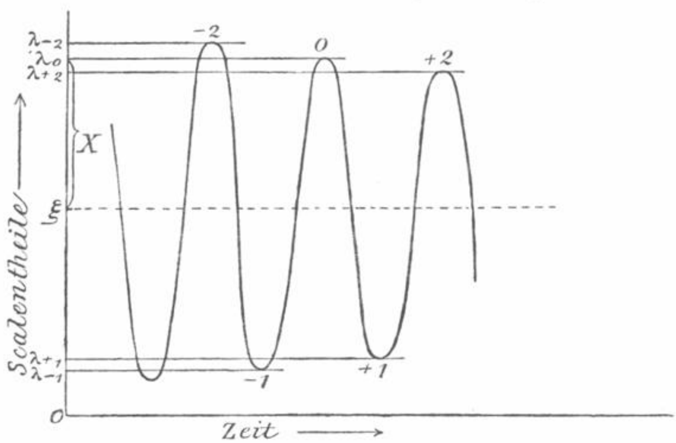

Fig. 7.

über welche man trotz gespannter Aufmerksamkeit nicht hinauskommt; ferner spielen in dem thatsächlichen Naturvorgang fast immer noch schwer bestimmbare äufsere Einflüsse mit, die in der theoretischen Behandlung des Vorgangs, also in der Aufstellung der zu Grunde gelegten Differentialgleichung, unberücksichtigt geblieben sind. Das Streben, welches man bei der Construction und Aufstellung eines Beobachtungsapparates verfolgt, kann nur dahin gerichtet sein, diese störenden Einflüsse auf ein möglichst geringes Maafs zurückzuführen, namentlich solche Störungen auszuschliefsen, welche eine einseitige, systematische Abweichung der beobachteten Gröfsen von dem theoretisch abgeleiteten Resultate herbeiführen können. In dem hier vorliegenden Falle werden also die Ablesungen λ dem theoretisch gefundenen Verlauf der gedämpften Schwingungen nicht in voller Schärfe entsprechen, dieselben werden vielmehr mit kleinen Fehlern behaftet sein. Wir würden daher aus jeder verschiedenen Zusammenfassung von je drei der vorliegenden Gleichungen (73) etwas verschiedene Werthe der gesuchten unbekannten Gröfsen herausrechnen, und wir stehen somit vor der Aufgabe, durch eine gleichmäfsige Berücksichtigung aller Beobachtungen diejenigen Werthe von ξ, X und σ ausfindig zu machen, welche, im Ganzen genommen, sich den sämmtlichen beobachteten λ am genauesten anschliefsen. Diese Aufgabe wird am elegantesten gelöst durch das von Gauss aufgestellte Princip der Methode der kleinsten Quadrate.

Man hat nach dieser Methode die Differenzen aller beobachteten λ und der theoretisch dafür aufgestellten Ausdrücke in Gleichungen (73) zu bilden, die Quadrate aller dieser Differenzen zu addiren, also folgenden Ausdruck zu bilden:

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2}(\lambda_{\mathfrak{a}} - \xi - (-1)^{\mathfrak{a}} X . e^{-\mathfrak{a}\sigma})^2 \tag{74}$$

und dann die drei Unbekannten so zu bestimmen, dafs die Quadratsumme so klein wie möglich wird. Wenn die Ablesungen fehlerfrei wären, so würden die Gleichungen (73) vollkommen mit einander übereinstimmen und alle erfüllt werden durch genau dieselben Werthe der gesuchten Constanten. Dann würde jede einzelne der gebildeten Differenzen, mithin auch die Summe ihrer Quadrate gleich Null sein, d. h. den kleinsten Werth besitzen, den eine Summe von Quadraten überhaupt annehmen kann. Bei fehlerhaften Beobachtungen aber werden wenigstens einige Differenzen, meist alle von Null verschieden sein, die Quadratsumme wird daher stets einen positiven Betrag haben, und wir können nur solche Werthe suchen, welche den Ausdruck (74) zu einem Minimum machen.

Die mathematische Bedingung für das Eintreten dieses Minimums ist dadurch gegeben, dafs kleine Variationen der ξ, X und σ den Werth der Quadratsumme nicht ändern. Drücken wir die Variation eines analytischen Ausdrucks durch ein vorgesetztes δ aus, so können wir die Forderung der Methode der kleinsten Quadrate in folgender Gleichung ausdrücken:

$$\delta \sum_{\mathfrak{a}} \left(\lambda_{\mathfrak{a}} - \xi - (-1)^{\mathfrak{a}} X . e^{-\mathfrak{a}\sigma}\right)^2 = 0. \tag{74a}$$

Nehmen wir nun nacheinander drei besonders einfache Variationen vor, indem wir erstens nur ξ verändern, dann nur X und endlich nur σ, so erhalten wir unter Benutzung der Grundlehren der Differentialrechnung folgende drei Gleichungen, in welchen die vorstehende Quadratsumme durch das Zeichen $\sum$ abgekürzt ist:

$$\delta \xi \cdot \frac{\partial \sum}{\partial \xi} = 0$$

$$\delta X \cdot \frac{\partial \sum}{\partial X} = 0$$

$$\delta \sigma \cdot \frac{\partial \sum}{\partial \sigma} = 0.$$

Führen wir die Differentiationen von $\sum$ aus und unterdrücken wegen des Nullwerthes der rechten Seiten alle sicher von Null verschiedenen Factoren, zu denen namentlich die Variationen $\delta \xi$, δX, $\delta \sigma$ selbst gehören, so erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{a}} \left\{\lambda_{\mathfrak{a}} - \xi - (-1)^{\mathfrak{a}} X . e^{-\mathfrak{a}\sigma}\right\} = 0 \\
&\sum_{\mathfrak{a}} (-1)^{\mathfrak{a}} . e^{-\mathfrak{a}\sigma} \left\{\lambda_{\mathfrak{a}} - \xi - (-1)^{\mathfrak{a}} X . e^{-\mathfrak{a}\sigma}\right\} = 0 \\
&\sum_{\mathfrak{a}} (-1)^{\mathfrak{a}} . \mathfrak{a} . e^{-(\mathfrak{a}-1)\sigma} \left\{\lambda_{\mathfrak{a}} - \xi - (-1)^{\mathfrak{a}} . X . e^{-\mathfrak{a}\sigma}\right\} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{74b}$$

aus denen die drei Unbekannten unter gleichmäſsiger Verwendung der Ablesungen eindeutig bestimmt werden können. Für ξ und X sind die Gleichungen linear, für $e^{-\sigma}$ aber von einem höheren Grade, dessen Höhe von der Zahl der beobachteten Umkehrpunkte abhängt. Solche Gleichungen sind unbequem zu behandeln; wenn sie den vierten Grad übersteigen, überhaupt nicht mehr in geschlossener Form aufzulösen. Doch können wir in unserem Falle die Rechnung dadurch vereinfachen, daſs wir die bei gut gearbeiteten Apparaten (Pendeln, Waagen etc.) stets zutreffende Annahme einführen, das Decrement σ sei eine so kleine Zahl, daſs wir für mäſsige Ordnungszahlen $\mathfrak{a}$ mit hinreichender Genauigkeit setzen können:

$$e^{-\mathfrak{a}\sigma} = 1 - \mathfrak{a}\sigma. \tag{75}$$

In der graphischen Darstellung Fig. 6 bedeutet diese Annahme, daſs man in dem Bereich der gemachten Beobachtungen die punktirte Exponentialcurve für eine schwach geneigte gerade Linie ansehen kann, dafs also die geometrische Reihe der Amplituden von einer arithmetischen Reihe nicht zu unterscheiden ist, dafs folglich auch in Fig. 7 die oberen Umkehrpunkte λ_{-2}, λ_0, λ_{+2} und die unteren λ_{-1}, λ_{+1} in gleichen Abständen von einander liegen.

Die Gleichungen (74b) erhalten dadurch die Form:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\left\{\lambda_\mathfrak{a} - \xi - (-1)^\mathfrak{a} X + (-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a}.\sigma.X\right\} = 0\\
&\sum\left\{(-1)^\mathfrak{a}\lambda_\mathfrak{a} - (-1)^\mathfrak{a}\xi - X - (-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a}.\sigma\lambda_\mathfrak{a} + (-1)^\mathfrak{a}\mathfrak{a}\sigma\xi + 2\mathfrak{a}\sigma X\right\} = 0\\
&\sum\left\{(-1)^\mathfrak{a}\mathfrak{a}\lambda_\mathfrak{a} - (-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a}\xi - \mathfrak{a}X + \mathfrak{a}^2.\sigma X\right\} = 0.
\end{aligned}\right\}(75\text{a})$$

Die Summen der auftretenden Polynome kann man nun nach deren einzelnen Gliedern zerspalten und die in den Theilsummen auftretenden, unbekannten Factoren ξ, X, σ, $\sigma\xi$, σX, welche frei von $\mathfrak{a}$ sind, vor die Summenzeichen setzen. Die dann noch übrig bleibenden Summen erhalten durch die angegebene Vorschrift, ebenso viel Umkehrpunkt vor wie nach dem festzustellenden Zustand abzulesen, die einfachste Gestalt. Für den hier angenommenen Fall von je zwei vorhergehenden und nachfolgenden Ablesungen wird nämlich:

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2} 1 = 5 \text{ (Zahl der Beobachtungen)}$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2} (-1)^\mathfrak{a} = +1$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2} \mathfrak{a} = 0$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2} (-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a} = 0$$

$$\sum_{\mathfrak{a}=-2}^{\mathfrak{a}=+2} \mathfrak{a}^2 = 10$$

Das Verschwinden zweier dieser Summen vereinfacht die Rechnung wesentlich, die Gleichungen (75a) nehmen folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\sum\lambda_\mathfrak{a}\right) - 5\xi - X = 0\\
&\left(\sum(-1)^\mathfrak{a}\lambda_\mathfrak{a}\right) - \xi - 5X - \sigma\sum(-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a}.\lambda_\mathfrak{a} = 0\\
&\left(\sum(-1)^\mathfrak{a}.\mathfrak{a}.\lambda_\mathfrak{a}\right) + 10\sigma X = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (75\text{b})$$

Die in der zweiten Gleichung an letzter Stelle stehende Summe kann man aus der dritten Gleichung, in welcher dieselbe an erster Stelle wieder auftritt, entnehmen; das letzte Glied der zweiten

Gleichung erhält dadurch den Werth $10\sigma^2 X$. Da wir aber σ als eine so kleine Gröfse behandeln wollen, dafs deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so fällt dieses Glied ganz aus der Rechnung fort; die beiden ersten Gleichungen werden dadurch frei von σ und dienen allein zur Bestimmung von ξ und X, wie man aus folgenden Rechnungen ohne weitere Erläuterungen einsieht:

$$5\,\xi + X = \sum_{-2}^{+2} \lambda_a$$

$$\xi + 5X = \sum_{-2}^{+2} (-1)^a . \lambda_a .$$

Daraus folgt:

$$\xi + X = \tfrac{1}{6} . \left\{ \sum \lambda_a + \sum (-1)^a \lambda_a \right\} = \tfrac{1}{3} (\lambda_{-2} + \lambda_0 + \lambda_{+2})$$

$$\xi - X = \tfrac{1}{4} . \left\{ \sum \lambda_a - \sum (-1)^a \lambda_a \right\} = \tfrac{1}{2} (\lambda_{-1} + \lambda_{+1})$$

und schliefslich:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \tfrac{1}{2} . \left\{ \tfrac{1}{3} (\lambda_{-2} + \lambda_0 + \lambda_{+2}) + \tfrac{1}{2} (\lambda_{-1} + \lambda_{+1}) \right\} \\ X &= \tfrac{1}{2} . \left\{ \tfrac{1}{3} (\lambda_{-2} + \lambda_0 + \lambda_{+2}) - \tfrac{1}{2} (\lambda_{-1} + \lambda_{+1}) \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Man hat also zuerst den Mittelwerth der oberen und denjenigen der unteren Umkehrpunkte zu bilden; das Mittel aus den beiden so gefundenen Werthen liefert dann die gesuchte Ruhelage ξ, während die halbe Differenz derselben den gesuchten Ausschlag X angiebt. Von der Gröfse der Dämpfung, so lange dieselbe nur klein genug ist, sind diese Ausdrücke unabhängig, und erlauben also durch sehr einfache Rechenoperationen aus den beobachteten Umkehrpunkten diejenigen Werthe ξ und X abzuleiten, welche die Methode der kleinsten Quadrate fordert.

In Fällen, wo die Bestimmung des Decrementes von Wichtigkeit ist, pflegt die Dämpfung meist stärker zu sein, als wir in Gleichung (75) annahmen; es empfiehlt sich dann mehr, dieselbe in einer besonderen Betrachtung auf Grund der genauen Gleichung (72b) zu bestimmen, als die angenäherte dritte der Gleichungen (75b) zu verwenden. Man bildet dann aus einer Reihe beobachteter Umkehrpunkte die Gröfsen der auf einander folgenden ganzen Schwingungsbogen s_a, deren Logarithmen sich nach jener Gleichung alle um die Gröfse σ unterscheiden sollen. Auch in diesem Falle werden die Beobachtungen das gefundene Gesetz nicht fehlerlos darstellen, sondern die aus je zwei Schwingungsbogen abgeleiteten Decremente werden ein wenig von einander abweichen, wir müssen also auch hier nach der Methode der kleinsten Quadrate den wahrscheinlichsten Werth σ aus allen zur Verfügung stehenden Schwingungsbogen ableiten. Wir wollen annehmen, es seien μ auf einanderfolgende Bogen $s_1, s_2 \dots s_\mu$ durch Beobachtung von $(\mu + 1)$ Umkehrpunkten gemessen. Würde man für σ einfach den Mittelwerth aller einzelnen Bestimmungen wählen, die sich aus den benachbarten Paaren von s ergeben, so sieht man, dafs im Resultate alle Bogen aufser dem ersten und dem letzten sich wegheben würden, und als Resultat nur übrig bliebe:

$$\sigma = \frac{1}{\mu} \cdot (\log s_1 - \log s_\mu).$$

Doch kann man auf eine andere Weise ein Resultat für σ unter Verwendung des gesammten Beobachtungsmaterials finden. Wir drücken zu diesem Zwecke sämmtliche Bogen s_1 bis s_μ analytisch nach dem Gesetz der Gleichung (72b) aus durch die Bogenlänge s_0, welche der ersten beobachteten unmittelbar vorangeht:

$$\begin{aligned}
\log s_1 &= \log s_0 - \sigma \\
\log s_2 &= \log s_0 - 2\sigma \\
&\vdots \\
\log s_\mathfrak{a} &= \log s_0 - \mathfrak{a}\,\sigma \\
&\vdots \\
\log s_\mu &= \log s_0 - \mu\,\sigma.
\end{aligned}$$

Aus diesem Satz von Gleichungen, welche links die mit Fehlern behafteten Beobachtungen enthalten, sind die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten $\log s_0$ und σ zu ermitteln. Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt:

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mu} \left\{\log s_\mathfrak{a} - \log s_0 + \mathfrak{a}\,\sigma\right\}^2 = \text{Minimum}.$$

Die Bedingungen des Minimums finden wir, wie vorher, im Verschwinden der Variationen von $\sum$, wenn $\log s_0$ und σ einzeln variirt werden. Die beiden Gleichungen, welche daraus entspringen, sind $\frac{\partial \sum}{\partial \log s_0} = \frac{\partial \sum}{d\,\sigma} = 0$, oder ausgeführt:

$$\sum \left\{\log s_\mathfrak{a} - \log s_0 + \mathfrak{a}\,\sigma\right\} = 0$$

$$\sum \mathfrak{a} \cdot \left\{\log s_\mathfrak{a} - \log s_0 + \mathfrak{a}\,\sigma\right\} = 0.$$

Da nun:

$$\sum_1^\mu 1 = \mu, \quad \sum_1^\mu \mathfrak{a} = \frac{\mu(\mu+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_1^\mu \mathfrak{a}^2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}$$

ist, kann man dafür auch schreiben:

$$\left(\sum \log s_\mathfrak{a}\right) - \mu . \log s_0 + \frac{\mu(\mu+1)}{2}\sigma = 0$$

$$\left(\sum \mathfrak{a} \log s_\mathfrak{a}\right) - \frac{\mu(\mu+1)}{2}\log s_0 + \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}\sigma = 0.$$

Die Auffindung der Constanten $\log s_0$ interessirt uns nicht weiter, für σ aber finden wir nach elementaren Zwischenrechnungen:

$$\sigma = \frac{(\mu+1)\sum \log s_\mathfrak{a} - 2\sum \mathfrak{a} . \log s_\mathfrak{a}}{\frac{\mu . (\mu^2-1)}{6}} = 6\,\frac{\sum_1^\mu (\mu + 1 - 2\mathfrak{a}) \log s_\mathfrak{a}}{\mu(\mu^2-1)}$$

Man sieht leicht, dafs die Zahlencoefficienten des ersten und letzten Summengliedes und aller gleich weit von diesen beiden abstehenden Glieder entgegengesetzt gleich werden. Deshalb kann man auch schreiben:

$$\sigma = 6\,\frac{(\mu-1)(\lg s_1 - \lg s_\mu) + (\mu-3)(\lg s_2 - \lg s_{\mu-1}) + (\mu-5)(\lg s_3 - \lg s_{\mu-2}) + \cdots}{\mu . (\mu^2-1)} \tag{77}$$

Diese Gleichung stellt σ dar unter Benutzung aller Schwingungsbogen; das Gewicht derselben im Resultat nimmt von den äufsersten, welche das gröfste Gewicht erhalten, nach der Mitte zu ab. Ist μ eine ungerade Zahl, so existirt ein mittelster Schwingungsbogen, welcher gar nicht zur Bestimmung von σ verwendet wird; es ist daher vortheilhaft, eine gerade Anzahl von Bogen zu messen.

Die Methode der kleinsten Quadrate, welche wir hier an zwei Beispielen auseinandergesetzt haben, läfst sich in derselben Weise in sehr zahlreichen Fällen anwenden und bildet deshalb ein wichtiges Hülfsmittel der messenden Physik bei der Verwerthung der Beobachtungen.

§ 34. Erzwungene Schwingungen.

Wir haben nun zur Vervollständigung der Lehre von den oscillatorischen Bewegungen eines Massenpunktes noch eine Erscheinung zu betrachten, welche sehr vielfältige Anwendung zur Erklärung verschiedener Vorgänge in mehreren wichtigen Kapiteln der Physik findet, nämlich das Phänomen des Mitschwingens oder der erzwungenen Schwingungen. Dasselbe tritt ein, wenn aufser der bisher betrachteten elastischen Kraft und der Dämpfungskraft noch eine fremde, von aufsen her wirkende Kraft auf den beweglichen Massenpunkt einwirkt, deren Intensität selbst in vorgeschriebener Periode oscillatorisch wechselt. Es entstehen dadurch Erscheinungen von theils sehr überraschender Eigenthümlichkeit; namentlich tritt unter besonderen Umständen der Fall ein, dafs die erzeugten Bewegungen der mitschwingenden Masse im Vergleich zur Gröfse dieser äufseren periodischen Kraft aufserordentlich ausgiebig werden. Wegen dieser zahlreichen merkwürdigen Erscheinungen mechanischer, akustischer, optischer und elektrischer Natur, welche durch das Mitschwingen zu erklären sind, beansprucht dieser Vorgang ein besonderes Interesse.

Wir wollen hier also eine Kraft benutzen, welche sich in vorgeschriebener Weise in der Zeit verändert. Nun hatten wir aber bei Gelegenheit der Feststellung des Begriffes der Kraft gesagt, dafs wir Naturkräfte als etwas unverändert Bleibendes, Dauerndes ansehen müfsten, was immer die gleiche Wirkung äufsert, wenn die Bedingungen der Wirksamkeit die gleichen sind. Wir können also in diesem Sinne eine Naturkraft nicht als eine willkürlich vorgeschriebene Function der Zeit in die Rechnung einführen. Für den vorliegenden Fall ist aber dazu zu bemerken, dafs wir hier nur eine unvollständige Betrachtung machen wollen, indem wir allein die Bewegung des mitschwingenden Massenpunktes verfolgen, ohne auf die Herkunft dieser äufseren Kraft einzugehen. Würden wir das vollständige Massensystem betrachten, von welchem unser Massenpunkt nur ein Element ausmacht, so würden wir diese wechselnden Kräfte als eine Folge der Bewegung anderer Massen dieses Systems, zu denen schliefslich auch die umgebende Luft gehört, einführen müssen; dann würde auch die Bedingung erfüllt sein, dafs bei gleichem Zustand des ganzen Systems, d. h. also unter gleichen Bedingungen, die Intensität der Kraft stets denselben Betrag bewahrt, also nicht mehr willkürlich von der Zeit abhängt, sondern nach festen, dauernden Gesetzen durch die relative Lage aller Theile des Systems gegeben ist. Wenn nun die Bewegung dieser übrigen Theile von bekannter oscillatorischer Art ist und auch durch die Anwesenheit und Bewegung des betrachteten Massenpunktes nicht merkbar alterirt wird, so wird auch die Kraftwirkung auf diesen in derselben Weise oscillatorisch sein, und wir haben das Recht für unsere besondere Betrachtung eine Kraft einzuführen, welche in vorgeschriebener Weise von der Zeit abhängt.

Wir lassen im übrigen die Bedingungen, welche wir vorher bei den gedämpften Schwingungen machten, unverändert, betrachten also einen Punkt m, der sich in der x-Axe bewegen kann und in deren Nullpunkt seine natürliche Ruhelage hat. Wir haben dann in der Differentialgleichung (59) (Seite 97) zu den auf der rechten Seite stehenden Kräften noch die soeben besprochene äufsere Kraft hinzuzufügen, welche wir als bekannte Function der Zeit durch das Symbol $K(t)$ bezeichnen wollen, und erhalten:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - a^2 x - k \frac{d x}{d t} + K(t) \tag{78}$$

Diese Differentialgleichung ist, wie die früheren linear, aber wegen des von x unabhängigen Gliedes $K(t)$ nicht mehr homogen.

§ 35. Ueber lineare, nicht homogene Differentialgleichungen.

In Ergänzung der früheren allgemeinen Betrachtungen über die Integrale der linearen, homogenen Differentialgleichungen (§ 23) mögen hier an der Hand der Differentialgleichung (78) die wichtigsten Eigenschaften der Integrale entwickelt werden, welche die linearen, aber nicht mehr homogenen Differentialgleichungen befriedigen. Nehmen wir an, wir hätten zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 gefunden, dann können wir durch Einsetzung derselben in die Differentialgleichung zwei identisch richtige, für alle Zeiten geltende Gleichungen herstellen. Subtrahiren wir die zweite von der ersten, so fällt in der Differenz $K(t)$ heraus und es bleibt übrig:

$$m \cdot \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{d t^2} = - a^2 (x_1 - x_2) - k \cdot \frac{d (x_1 - x_2)}{d t} .$$

Die Differenz zweier Integrale der neu aufgestellten Differentialgleichung ist also ein Integral der entsprechenden **homogenen** Differentialgleichung, welche durch Weglassung des nicht homogenen Gliedes $K(t)$ entsteht. Mit anderen Worten können wir dieses Resultat auch in folgender Weise aussprechen: Wenn wir ein einziges particuläres Integral der **nicht** homogenen Differentialgleichung kennen, so können wir durch Addition von Integralen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung neue Lösungen der ersteren finden. Dafs durch Hinzufügung des vollständigen Integrals der homogenen Differentialgleichung auch für diesen Fall die vollständige Lösung gefunden wird, ergiebt sich daraus, dafs durch die zwei verfügbaren Integrationsconstanten jeder beliebige Anfangszustand des Massenpunktes befriedigt werden kann, wie weiter unten ausführlich gezeigt werden wird.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ergiebt sich aus der gleichzeitigen Betrachtung zweier solcher Differentialgleichungen (78), welche sich nur dadurch unterscheiden, dafs $K(t)$ in beiden verschiedene vorgeschriebene Zeitfunctionen darstellt. Wir betrachten also die Bewegung desselben Massenpunktes unter der Wirkung zweier verschiedener äufserer Kräfte, welche wir durch die Zeichen $K_1(t)$ und $K_2(t)$ unterscheiden wollen. Zwei particuläre Integrale x_1 und x_2, welche aber diesmal verschiedenen Differentialgleichungen angehören, führen dann zu den Identitäten:

$$m \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2} = -a^2 x_1 - k \frac{d x_1}{d t} + K_1(t)$$

$$m \cdot \frac{d^2 x_2}{d t^2} = -a^2 x_2 - k \frac{d x_2}{d t} + K_2(t)$$

Erweitern wir die Gleichungen mit den willkürlichen Constanten A_1 und A_2 und addiren dieselben, so erhalten wir:

$$m \frac{d^2}{d t^2}(A_1 x_1 + A_2 x_2) = -a^2 (A_1 x_1 + A_2 x_2) - k \frac{d}{d t}(A_1 x_1 + A_2 x_2) + \big(A_1 K_1(t) + A_2 K_2(t)\big) \quad (79)$$

Dies ist eine Differentialgleichung von derselben Form; nur ist die äufsere Kraft jetzt die Superposition der beiden vorher einzeln wirksam gedachten Kräfte, jede in beliebiger Stärke wirkend. Das Integral, welches dieselbe erfüllt, stellt sich dar als die ebenso gebildete Superposition der einzelnen Lösungen x_1 und x_2. Wir erkennen daraus das Gesetz, dafs die Wirkungen mehrerer äufserer Kräfte, also die durch die einzelnen erzeugten Bewegungen, sich ungestört zu einer Summe superponiren. Diese Betrachtung ist nicht auf zwei äufsere Kräfte beschränkt, gilt vielmehr für jede Anzahl. Wenn daher zu den Kräften $K_\mathfrak{a}(t)$ die Bewegungen $x_\mathfrak{a}$ gehören, und $A_\mathfrak{a}$ eine Reihe willkürlicher Constanten bezeichnet, so gilt auch die Gleichung:

$$m \cdot \frac{d^2}{d t^2}\left(\sum A_\mathfrak{a} x_\mathfrak{a}\right) = -a^2 . \sum A_\mathfrak{a} x_\mathfrak{a} - k \cdot \frac{d}{d t}\left(\sum A_\mathfrak{a} x_\mathfrak{a}\right) + \sum A_\mathfrak{a} . K_\mathfrak{a}(t). \quad (79\,\mathrm{a})$$

Diese Eigenschaft ist besonders deshalb wichtig, weil man dadurch die Lösung für complicirte Ausdrücke der äufseren Kraft zusammensetzen kann aus einfacheren Fällen. Ist nämlich die äufsere Kraft von einem ganz willkürlichen, aber periodischen Verlauf, so gelingt es nach einem von Fourier gefundenen Lehrsatz immer, dieselbe darzustellen als Superposition einer Reihe von ungestört zusammenwirkenden Kräften, deren Verlauf durch je eine einfache Sinus- oder Cosinusfunction der Zeit angegeben ist. Wenn wir also die Integrale für diese einfachen sinusförmigen Kräfte kennen, so sind wir im Stande, die Wirkungen aller periodischen Kräfte daraus zusammenzusetzen.

§ 36. Particuläre Lösung für den Fall eines sinusförmigen Verlaufs der äufseren Kraft.

In Folge der letzten Bemerkung des vorigen Paragraphen können wir die weitere Betrachtung unter der Annahme fortführen, dafs der zeitliche Verlauf von $K(t)$ durch eine einfache trigonometrische Function, etwa $\cos Nt$ oder $\sin Nt$ angegeben wird, wo N die vorgeschriebene Zahl der in 2π Secunden ausgeführten Perioden der Kraft bedeutet. Wenn der Anfangspunkt der Zeit nicht mehr frei verfügbar ist, mufs man eventuell zum Argumente Nt noch eine additive Constante hinzusetzen. Die in Gleichung (79) ausgedrückte Eigenschaft der Lösungen unserer Differentialgleichung erleichtert die Ausführung der Rechnung noch in einer anderen Weise: Es steht in mathematischer Hinsicht nichts im Wege, den willkürlichen Factor $A_2 = i . A_1$ zu setzen. Wir erhalten dann einen complexen Ausdruck der Kraft und auch ein complexes Integral. Die Gleichung zerfällt aber sofort wieder in die beiden vorhergehenden, aus denen sie entstanden ist, wenn man den reellen Theil der Bewegung durch den reellen Theil der Kraft erklärt, und den imaginären durch den imaginären, man ist also dadurch in nichts vorwärts gekommen. Der Nutzen des imaginären Coefficienten liegt aber darin, dafs bei sinusförmigen Kräften:

$$K_1(t) = \cos Nt \qquad \text{und} \qquad K_2(t) = \sin Nt$$

die zusammengesetzte complexe Kraft:

$$\cos Nt + i \sin Nt = e^{iNt}$$

gesetzt werden kann; das Rechnen mit imaginären Exponentialcurven ist nämlich einfacher als die Anwendung der trigonometrischen Functionen. Nach Ausführung der Rechnung kann man dann die complexe Kraft und das complexe Integral in reell und imaginär spalten, und so zu trigonometrischen Functionen zurückkehren, welche den Verlauf der Kraft darstellen.

Wir führen jetzt als äufsere Kraft ein:

$$K(t) = A \, . \, e^{iNt} \tag{80}$$

wo A den reellen Maafsstab für die Stärke der Kraft bezeichnet, während N dieselbe Bedeutung hat, wie vorher. Die Differentialgleichung (78) erhält nun die bestimmte Form:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = - a^2 x - k \frac{d x}{d t} + A \, . \, e^{iNt} \tag{80a}$$

Ein particuläres Integral derselben ist:

$$x = B \, . \, e^{iNt}. \tag{81}$$

Der Factor B, welcher die Rolle einer Amplitude spielt, ist dabei aber keine willkürliche Integrationsconstante, sondern eine zunächst noch unbekannte Gröfse, deren Werth man durch Einsetzung des Ausdrucks (81) in die Differentialgleichung aufsuchen mufs. Wir bilden zu diesem Zwecke:

$$\frac{d x}{d t} = i N . B . e^{iNt}$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - N^2 . B . e^{iNt}$$

In der Differentialgleichung hebt sich nach Einführung dieser Ausdrücke der gemeinsame Factor e^{iNt} fort, und es bleibt:

$$- m . N^2 . B = - a^2 B - i k . N . B + A.$$

Aus dieser Gleichung folgt direct:

$$B = \frac{A}{a^2 - m N^2 + i . k N}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch m, und führt an Stelle von a^2/m das Quadrat der früher schon mehrfach benutzten Schwingungszahl n_0 der freien ungedämpften Schwingungen ein, so erhält man:

$$B = \frac{\frac{A}{m}}{(n_0{}^2 - N^2) + i . N . \frac{k}{m}}$$

Die Gröfse B besitzt also einen bestimmten complexen Werth, den wir dadurch umformen wollen, dafs wir den Nenner in bekannter Weise durch den Modul ϱ und das Azimuth ψ darstellen. Wir setzen also:

$$\left.\begin{aligned} n_0{}^2 - N^2 &= \varrho . \cos \psi \\ N . \frac{k}{m} &= \varrho . \sin \psi \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= +\sqrt{(n_0{}^2 - N^2)^2 + N^2 \frac{k^2}{m^2}} \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{N \,.\, k}{m\,(n_0{}^2 - N^2)} \end{aligned}\right\} \tag{82a}$$

und finden:

$$B = \frac{A}{m \,.\, \varrho} \cdot e^{-i\psi}$$

Das in Gleichung (81) aufgestellte particuläre Integral erhält also die bestimmte Form:

$$x = \frac{A}{m\,\varrho} \cdot e^{i(Nt - \psi)}. \tag{83}$$

Nehmen wir jetzt die Trennung der reellen und imaginären Theile der äufseren Kraft, Gleichung (80), und der dadurch erzeugten Bewegung, Gleichung (83), vor, so erkennen wir aus den reellen Bestandtheilen, dafs die Kraft:

$$K = A \cos Nt \tag{84}$$

eine mitschwingende Bewegung:

$$x = \frac{A}{m\,\varrho} \cdot \cos(Nt - \psi) \tag{85}$$

erzeugt. Die imaginären Antheile liefern kein wesentlich hiervon verschiedenes Resultat, es tritt nur das Zeichen sin an Stelle von cos, die Angaben beziehen sich also nur auf einen anderen Anfangspunkt der Zeit, welcher um ein Viertel der Periode früher angesetzt ist. Wir können uns daher auf die Berücksichtigung der reellen Theile beschränken. Man sieht aus der letzten Gleichung (85), dafs die mitschwingende Bewegung eine einfache Sinusschwingung von unveränderlicher Amplitude darstellt. Die Schwingungszahl ist diejenige der äufseren Kraft, also im Allgemeinen verschieden von derjenigen der freien und der gedämpften Schwingungen, der Massenpunkt wird also gezwungen in einem anderen Zeitmaafs zu schwingen, als seinen eigenen Verhältnissen entspricht, deshalb nennt man diese Bewegungen auch erzwungene Schwingungen. Ferner erkennt man, dafs die Bewegung x sich nicht in derselben Phase befindet, wie die Kraft K, sondern in einem durch die bestimmte Phasenconstante ψ angegebenen Rückstande gegenüber der Kraft ist. Es sei bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam gemacht, in wie einfacher Weise sich durch die Anwendung der imaginären Exponentialfunctionen dieser Phasenunterschied zwischen Kraft und

Verschiebung darin geoffenbart hat, daſs die in der ursprünglich für das particuläre Integral aufgestellten Gleichung (81) als Amplitude eingeführte Gröſse B sich als complex herausgestellt hat. Aus den Gleichungen (82) erkennt man, daſs der Phasenunterschied ψ stets in den beiden ersten Quadranten zwischen 0 und $+\pi$ liegt, denn der Modul ϱ ist eine absolute Gröſse, desgleichen die linke Seite der zweiten Gleichung, also ist $\sin\psi$ immer positiv zu setzen. Dagegen kann die Differenz $(n_0{}^2 - N^2)$, welche in der ersten jener Gleichungen vorkommt, mithin auch $\cos\psi$, positiv oder negativ sein. Darnach wird es sich also richten, ob ψ im ersten oder zweiten Quadranten liegt:

$$\text{Wenn } n_0 > N \text{ ist, so ist } 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{,,}\quad n_0 = N \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{,,}\quad n_0 < N \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad \frac{\pi}{2} < \psi < \pi.$$

Bei sehr langsamen Schwankungen der äuſseren Kraft (kleinem N) wird der Massenpunkt nur wenig hinter der Phase derselben zurückbleiben, wenn also die Kraft ihren gröſsten, nach der positiven Seite ziehenden Betrag erreicht, so wird auch der mitschwingende Punkt schon nahe seiner äuſsersten positiven Elongation angelangt sein. Sind dagegen die erzwungenen Schwingungen von derselben Schnelligkeit, wie die freien Eigenschwingungen des Punktes, so wird derselbe zur Zeit des gröſsten positiven Betrages der Kraft gerade erst nach der positiven Seite hin durch seine Ruhelage eilen. Bei verhältniſsmäſsig sehr schnellen Oscillationen der Kraft (groſsem N) endlich wird der Punkt eben erst auf der negativen Seite umgekehrt sein, wenn die Kraft ihr positives Maximum erreicht. Die Betrachtung des in Gleichung (82a) gegebenen Ausdrucks für $\operatorname{tg}\psi$ belehrt uns über den Einfluſs der Dämpfung auf die Gröſse des Phasenunterschiedes ψ; der Ausdruck enthält die Dämpfungsconstante k als Factor im Zähler, wird also in den Fällen einer sehr geringen Dämpfung, bei welcher die freien Schwingungen nur sehr langsam erlöschen, selbst auch einen kleinen Zahlenwerth besitzen; ψ ist dann nur wenig von 0 oder von π verschieden, wenigstens gehört dann schon eine sehr nahe Uebereinstimmung zwischen den Schwingungszahlen n_0 und N dazu, um durch die alsdann klein werdende Differenz $(n_0{}^2 - N^2)$ im Nenner die Kleinheit des Zählers aufzuheben und gröſsere Werthe für $\operatorname{tg}\psi$ zu ergeben. Wenn wir also bei sehr geringer Dämpfung die Schwingungszahl der äufseren Kraft N von kleinen Werthen aus wachsen lassen, so wird ψ lange nur wenig von Null verschieden sein, und erst kurz vor $N = n_0$ schnell zunehmen bis $\frac{\pi}{2}$, welcher Werth für die vollkommene Gleichheit beider Zahlen erreicht wird, nach der Ueberschreitung von n_0 wird ψ ebenso schnell weiter wachsen und sehr bald in nächste Nähe von π gelangen und für alle gröfseren N auch dort verharren. In Fällen stärkerer Dämpfung ist das Auftreten von Phasendifferenzen nahe $\frac{\pi}{2}$ nicht auf einen so engen Bezirk von N beschränkt.

Die zweite für das Mitschwingen charakteristische Gröfse ist die Amplitude desselben, die wir durch H bezeichnen wollen. Dieselbe ist nach Gleichung (85) gleich $A/(m\,.\,\varrho)$, oder nach Einsetzung des Betrages von ϱ aus Gleichung (82a):

$$H = \frac{A}{m\,.\,\sqrt{(n_0{}^2 - N^2)^2 + N^2 \frac{k^2}{m^2}}} \tag{85a}$$

Dieselbe ist proportional der Stärke der äufseren Kraft, welche durch A gegeben ist, und umgekehrt proportional der bewegten Masse m. Diese Abhängigkeiten liefsen sich von vornherein erwarten; interessanter ist der Einflufs der Wurzelgröfse. Nehmen wir eine so geringe Dämpfung an, dafs wir das mit dem Quadrat der Constante k behaftete Glied des Radicandus vernachlässigen können, so wird die Amplitude umgekehrt proportional dem absoluten Betrage der Differenz $(n_0{}^2 - N^2)$, also um so gröfser, je näher N mit n_0 übereinstimmt. Für vollkommene Gleichheit beider Schwingungszahlen würde der Ausdruck sogar eine unendlich grofse Amplitude ergeben; es ist indessen in diesem Falle keineswegs zulässig, die Dämpfung zu vernachlässigen; dieselbe kann bei sehr heftigen Bewegungen von grofser Amplitude und entsprechend grofsen Geschwindigkeiten sogar einen gröfseren Einflufs üben, als wir durch die Proportionalität derselben mit der Geschwindigkeit in der zu Grunde gelegten Differentialgleichung angenommen haben. Aber auch auf Grund des von uns benutzten einfachen Dämpfungsgesetzes bleibt die Amplitude H für $N = n_0$ endlich, der Betrag derselben, den wir $H_{\max}$ bezeichnen, ergiebt sich aus der vollständigen Gleichung (85a):

$$H_{\max} = \frac{A}{N\,.\,k}\,.$$

Derselbe kann selbst bei kleiner Intensität A der äufseren Kraft einen beträchtlichen Werth erreichen, wenn die Dämpfung k gering genug ist. Die Gröfse des maximalen Mitschwingens ist also wesentlich bedingt durch den Grad der Dämpfung.

Da es schwierig ist, die bei manchen Fragen wichtige Phasendifferenz ψ direct durch Beobachtung festzustellen, so sei darauf hingewiesen, dafs man dieselbe bestimmen kann aus dem Vergleich der Amplitude H mit der maximalen Amplitude $H_{\max}$. Dies gelingt wenigstens in den Fällen, wo man die Schwingungszahl der äufseren Kraft verändern kann ohne ihre Intensität wesentlich zu alteriren, namentlich also in den Fällen schwacher Dämpfung, wo schon geringe Abweichungen zwischen N und n_0 beträchtliche Phasenveränderungen mit sich führen.

Es ist nämlich nach den soeben entwickelten Gleichungen:

$$\frac{H}{H_{\max}} = \frac{\dfrac{A}{m\varrho}}{\dfrac{A}{N.k}} = \frac{Nk}{m\varrho}.$$

Dieser Ausdruck ist aber nach Gleichung (82) gleich $\sin\psi$, man kann daher aus einer relativen Messung von H und $H_{\max}$ zunächst $\sin\psi$ finden. Den Bogen ψ selbst sucht man dann im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem $N <$ oder $> n_0$ ist.

Bei stärker gedämpften mitschwingenden Massen tritt übrigens die maximale Erregung nicht genau für $N = n_0$ ein, sondern für eine etwas geringere Schwingungszahl, welche sich aus Betrachtung des vollständigen Radicaudus ergiebt. Eine leichte Umformung der Quadratwurzel ϱ liefert den Ausdruck:

$$\varrho = \sqrt{(n_0^{\,2} - N^2)^2 + N^2\frac{k^2}{m^2}} = \sqrt{n_0^{\,4} - \left(n_0^{\,2} - \frac{k^2}{2m^2}\right)^2 + \left[\left(n_0^{\,2} - \frac{k^2}{2m^2}\right) - N^2\right]^2}$$

Betrachtet man N als Veränderliche, so sieht man, dafs die Wurzel ihren Minimalwerth, also die Amplitude ihr Maximum erreicht, wenn die eckige Klammer gleich Null ist, wenn also: $N^2_{\max} = n_0^{\,2} - \dfrac{k^2}{2m^2}$, also kleiner als $n_0^{\,2}$ ist. Vergleichen wir diesen Werth von $N^2_{\max}$ mit dem bei gedämpften Schwingungen geltenden Ausdruck für das Quadrat der freien Schwingungszahl n, welchen wir in Gleichung (71 c), Seite 107 aufgestellt haben, so sehen wir, dafs $N^2_{\max}$ noch um ebensoviel kleiner als n^2 ist, wie n^2 bereits kleiner als $n_0^{\,2}$ ist; dies giebt bei beträchtlicher Dämpfung einen ganz gut bemerkbaren Unterschied zwischen der Schwingungszahl des maximalen Mitschwingens und derjenigen der freien Eigenschwingungen.

Wenn wir N allmählich verändern und durch den Werth n_0 hindurchgehen lassen, so hängt nicht nur die Gröſse des maximalen Mitschwingens, sondern auch die Plötzlichkeit des Eintretens dieser Erscheinung wesentlich von den Gröſsen m und k ab. Ist die zu bewegende Masse m sehr groſs, so wird dieselbe die Amplitude H dadurch so lange unmerklich klein halten, als nicht die Wurzel dem Verschwinden nahe kommt; das heiſst: nur für sehr kleine Dämpfung und für sehr nahe Uebereinstimmung von n_0 und N wird ein ergiebiges Mitschwingen möglich. Groſse und dabei schwachgedämpfte Massen gerathen also nur für einen sehr engen Bereich von N in starke Mitschwingung, es zeigt sich ein sehr plötzliches Maximum. Als Beispiel für diesen Fall können stark gebaute stählerne Stimmgabeln dienen, deren elastische Deformationen im Wesentlichen denselben Gesetzen folgen, die wir hier für die Verschiebungen eines einzelnen Massenpunktes entwickelt haben. Diese besitzen eine groſse Masse und haben, wenn sie gut gearbeitet sind, eine so geringe Dämpfung, daſs die einmal erregten Bewegungen nach vielen Tausenden von Perioden noch nicht erloschen sind. Hat man nun zwei auf genau die gleiche Schwingungszahl, das heiſst, akustisch gesprochen, auf denselben Ton abgestimmte Gabeln, so kann man durch Erregung der einen die andere noch in einer Entfernung von mehreren Metern in Mitschwingungen versetzen. Die wirkende periodische Kraft entsteht alsdann nur aus den äuſserst geringen Luftbewegungen, welche von der ersten Gabel ausgehen und die zweite treffen. Die geringste, für das Ohr kaum wahrnehmbare Verstimmung der einen Gabel genügt aber bereits, um dieses Phänomen zu vernichten. Haben wir im Gegensatz dazu einen Körper, der unter starker Dämpfung schwingt, so wird die Wurzel selbst im Minimalfalle nicht dem Verschwinden nahe kommen; deshalb wird auch der reciproke Werth nicht an dieser Stelle plötzlich stark ansteigen und schnell wieder sinken, vielmehr wird das Maximum ein breites und flaches sein, welches nur dadurch beträchtliche Höhe erreichen kann, daſs die Intensität der äuſseren Kraft A hinreichend groſs und die zu bewegende Masse m unbedeutend genug ist. Bei derartigen Fällen wird das Mitschwingen für ein groſses Gebiet von Schwingungszahlen N in ziemlich gleicher Stärke erfolgen. Ein passendes Beispiel aus der Akustik liefern hierfür die stark gedämpften Membranen, beispielsweise das Paukenfell im Ohre und die schallempfangenden Platten der Telephone und Mikrophone.

Wirkungen des starken Mitschwingens kann man übrigens im täglichen Leben bisweilen beobachten. Eiserne Brücken, welche wegen ihrer Elasticität bestimmte Eigenschwingungen besitzen, können dadurch, daſs viele Menschen gerade in diesem Zeitmaaſse darüber hinwegmarschiren und periodische Anstöſse geben, so stark in Mitschwingungen versetzt werden, daſs dieselben die dadurch erregten ausgiebigen Bewegungen nicht mehr ertragen können und einstürzen, während die Tragfähigkeit derselben viel gröſsere Lasten aushalten kann. Auch Fahrzeuge, welchen, im Wasser schwimmend, bestimmte Schwingungen um ihre Längsaxe eigen sind, können durch Wellen, welche zufällig in dem gleichen Zeitmaaſse ihre Seitenwand treffen, in so starke Schwankungen gerathen, daſs dieselben schlieſslich umschlagen, wenn sie nicht rechtzeitig quer gegen die Wellen gestellt werden.

Man kann sich das Spiel der äuſseren Kraft und deren Eingreifen in die inneren Kräfte durch folgende Betrachtung anschaulich machen. Die äuſsere Kraft befindet sich, wie wir sahen, in einer anderen Phase, als die Bewegung. Man kann die Kraft K aber in zwei Summanden zerlegen, deren erster mit der Phase der Verschiebung x übereinstimmt, während der zweite die Phase der Geschwindigkeit dx/dt besitzt. Dies geschieht durch folgende einfache Umformung:

$$K = A . \cos Nt = A . \cos\{(Nt - \psi) + \psi\},$$

also nach Entwickelung des Cosinus:

$$K = A . \cos\psi . \cos(Nt - \psi) - A \sin\psi . \sin(Nt - \psi).$$

Wenn wir die Ausdrücke für die Verschiebung:

$$x = \frac{A}{m\varrho}\cos(Nt - \psi)$$

und für die Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{AN}{m\varrho}\sin(Nt - \psi)$$

hinzunehmen, so können wir dieselben in den umgeformten Ausdruck der äuſseren Kraft einsetzen und finden:

$$K = m\varrho\cos\psi . x + \frac{m\varrho}{N}\sin\psi \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Setzen wir endlich aus Gleichung (82) die Bedeutungen von $\varrho \cos \psi$ und $\varrho \sin \psi$ ein, so erhalten wir:

$$K = m(n_0{}^2 - N^2) . x + k \frac{dx}{dt} \cdot$$

Aus dieser Form kann man deutlich die Wirkungsweise der beiden einzelnen Summanden erkennen, in welche wir die Kraft K zerlegt haben. Der erste Summand, welcher den Factor x enthält, also proportional der Abweichung des Punktes m aus der Ruhelage ist, wird sich mit der inneren elastischen Kraft $-a^2 . x$ vermischen und diese dadurch in der Weise verändern, dafs die Schwingungszahl, welche vorher n_0 war, auf N gebracht wird. Wenn man nämlich in dem Ausdruck der elastischen Kraft die Constante a^2 durch die ihr gleiche Gröfse $m . n_0{}^2$ ersetzt, so hat dieselbe die Form $- m . n_0{}^2 . x$. Fügen wir hinzu den ersten Summanden der äufseren Kraft, $+ m(n_0{}^2 - N^2) x$, so ist der Betrag beider zusammen:

$$- a^2 . x + m(n_0{}^2 - N^2) x = - m N^2 x,$$

also gleich einer elastischen Kraft, welche dem Punkte m die Schwingungszahl N giebt. Wenn $N < n_0$ ist, so ist dieser erste Summand der äufseren Kraft positiv, er wird daher die negative innere elastische Kraft schwächen, um die Schwingungszahl auf den Werth N zu erniedrigen. Wenn dagegen $N > n_0$ ist, so ist der betreffende Summand von K negativ, liefert also einen stärkenden Beitrag zu der elastischen Kraft, durch dessen Hülfe die Schwingungszahl auf N gesteigert wird.

Der zweite Summand der äufseren Kraft, $+ k \cdot \frac{dx}{dt}$ ist in jedem Falle gleich und entgegengesetzt der dämpfenden Kraft $- k \cdot \frac{dx}{dt}$; derselbe erfüllt also die Aufgabe, die Dämpfung zu vernichten, so dafs die Schwingungen ohne Abnahme ihrer Amplitude gleichmäfsig fortdauern können. Der gemeinsame Effect beider Theile der äufseren Kraft ist also derselbe, als ob der Massenpunkt ohne jede Dämpfung einer in bestimmter Weise veränderten, gesteigerten oder geschwächten elastischen Kraft folgte, aber — wohl zu beachten — nur bei einer vorgeschriebenen Amplitude. Wenn die innere elastische Kraft schon von vorn herein den durch die Schwingungszahl N geforderten Betrag besitzt, so braucht kein Theil der äufseren Kraft auf Veränderung derselben verwendet zu werden, dieselbe steht vielmehr in ihrer ganzen Gröfse zur Ueberwindung der Dämpfungskraft zur Verfügung, und die Geschwindigkeiten, folglich auch die Amplituden, werden so grofs werden, dafs beide Kräfte sich gerade aufheben. Dies ist der Fall des stärksten Mitschwingens. In allen anderen Fällen wird ein grofser Theil der äufseren Kraft zur Veränderung der Elasticität verwendet, zur Ueberwindung der Dämpfung bleibt nur ein kleiner Rest übrig, deshalb können dann auch nur schwache Bewegungen aufrecht erhalten werden.

§ 37. Vollständige Lösung.

Das bisher gefundene Integral, Gleichung (85), der Differentialgleichung (80a) ist eine particuläre Lösung, welche keinen beliebigen Anfangszustand zuläfst, weil sie keine verfügbaren Integrationsconstanten besitzt. Wir haben aber in § 35 bemerkt, dafs man durch Hinzufügung des vollständigen Integrales der freien gedämpften Schwingungen des Massenpunktes eine umfassendere Lösung finden kann. Wir stellen daher aus Gleichung (85) und Gleichung (68) (Seite 103) folgendes Integral zusammen:

$$x = \frac{A}{m.\varrho} \cdot \cos(Nt - \psi) + e^{-bt}.\{F \cos nt + G \sin nt\}, \tag{86}$$

in welchem F und G beliebige Werthe haben. Durch Differentiation folgt daraus die Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{AN}{m\varrho} \cdot \sin(Nt - \psi) + e^{-bt}\{(nG - bF)\cos nt - (nF + bG)\sin nt\} \tag{86a}$$

Sobald nun ein bestimmter Anfangszustand des Massenpunktes vorgeschrieben ist durch den Ort x_0 und die Geschwindigkeit u_0, so können wir aus den beiden vorstehenden Gleichungen F und G bestimmen, indem wir $t = 0$ setzen. Also:

$$x_0 = \frac{A}{m\varrho} \cos\psi + F$$

$$u_0 = \frac{AN}{m\varrho} \sin\psi + nG - bF$$

oder:

$$F = x_0 - \frac{A}{m\varrho} \cos\psi$$

$$G = \frac{u_0 + bx_0}{n} - \frac{A}{m\varrho}\left\{\frac{N}{n} \sin\psi + \frac{b}{n} \cos\psi\right\}.$$

Man kann also jeden Anfangszustand darstellen, mithin ist Gleichung (86) das vollständige Integral.

Wir wollen als einfachstes Beispiel jetzt annehmen, der Massenpunkt befinde sich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe, und zur Zeit $t = 0$ beginne plötzlich die äufsere Kraft ihre Wirksamkeit. Wir haben dann $x_0 = 0$ und $u_0 = 0$ zu setzen und erhalten:

$$F = -\frac{A}{m\varrho}\cos\psi$$

$$G = -\frac{A}{m\varrho}\left\{\frac{N}{n}\sin\psi + \frac{b}{n}\cos\psi\right\}.$$

Die Amplituden der durch den Beginn des Ergreifens der äufseren Kraft, wie durch einen Stofs, miterzeugten freien Schwingungen werden also zu Anfang von derselben Gröfsenordnung sein, wie die dauernden erzwungenen Schwingungen, und da beide Bewegungen sich superponiren, wird im Beginn der Verlauf des Phänomens ein complicirter sein, und erst nach dem Absterben der gedämpften Eigenschwingungen wird die Erscheinung des Mitschwingens in der Einfachheit hervortreten, welche wir im vorigen Paragraphen besprochen und durch Gleichung (85) ausgedrückt haben. Besonders deutlich kann man diese anfänglichen Nebenerscheinungen im Falle des stärksten Mitschwingens erkennen, wenn also N nahezu gleich n ist und auch die Dämpfung b eine kleine Gröfse ist. Man kann dann für eine ganze Reihe von Schwingungen, vom Beginn der Bewegung an gezählt, den erlöschenden Factor e^{-bt} noch annähernd gleich 1 setzen, ferner ist b/n nahezu gleich Null und N/n nahezu gleich 1, während ψ nach den Erfahrungen im vorigen Paragraphen für diesen Fall nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$ wird. Setzen wir alle diese angenäherten Beträge in die Ausdrücke für F und G ein, so wird $F = 0$ und $G = -A/m\varrho$, und die Bewegung wird während der ersten Zeit nach Beginn, also jedenfalls während einer gröfseren Anzahl von Perioden, angenähert dargestellt durch:

$$x = \frac{A}{m\varrho}\cdot(\sin Nt - \sin nt).$$

Dieser Ausdruck stellt x dar als Differenz zweier Sinusfunctionen der Zeit von gleicher Amplitude und nahezu gleicher Schwingungszahl. Die Superposition zweier solcher Schwingungen führt zu einer characteristischen Erscheinung. Beide vernichten sich nämlich zu Anfang, weil die Ausschläge dann entgegengesetzt gleich sind; wenn aber nach Verlauf einer hinreichenden Reihe von Perioden der Unterschied zwischen N und n sich bemerkbar macht, so treffen verschiedene Phasen der beiden Schwingungen zusammen; diese können sich nicht vernichten, sondern liefern eine schwingende Bewegung mit allmählich zunehmender Amplitude. Diese schwillt an bis zu einem Maximum, in welchem beide Bewegungen sich vollkommen verstärken, um dann später wieder abzunehmen, und so fort. Dieser ganze Verlauf geht um so langsamer vor sich, je näher die beiden Zahlen N und n übereinstimmen. Man nennt diese Erscheinung die Interferenz zweier Schwingungen; in der Akustik verursacht dieselbe die sogenannten Schwebungen, welche als regelmäfsige, langsame oder auch schnellere Schwankungen der Tonstärke zu hören sind, wo zwei Töne von nahezu gleicher Höhe dieselbe Luft oder dieselben festen Körper erschüttern.

Dafs nun dergleichen Schwebungen beim Mitschwingen thatsächlich zu Beginn auftreten, kann man an zwei Stimmgabeln nachweisen, deren Tonhöhe zwar um ein Geringes verschieden, aber doch noch so nahe gleich ist, dafs die eine die andere zu erregen im Stande ist; man hört dann nach dem Anschlagen der einen Gabel in der Nähe der zweiten mehrmals hintereinander das langsame Anschwellen und Abnehmen des Tones, bis endlich nach dem Erlöschen der gedämpften Eigenschwingungen nur der Ton der ersten Gabel übrig bleibt.

§ 38. Vom Uhrpendel.

Verwandt mit den besprochenen Erscheinungen des Mitschwingens sind gewisse stationäre Schwingungsbewegungen, welche ebenfalls durch die Wirkung einer äufseren Kraft aufrecht erhalten werden, aber mit dem Unterschiede, dafs letztere nicht eine von aufsen vorgeschriebene Periode besitzt, sondern durch die Schwingungen selbst zu gewissen Zeiten ausgelöst und dadurch in eine periodisch wechselnde Wirkung verwandelt wird. Dafs diese periodischen Antriebe zur Bewegung in den meisten Fällen nicht durch eine einfache Sinusfunction der Zeit darzustellen sind, sondern vielmehr den Character von discontinuirlichen Anstöfsen besitzen, ändert an dem Wesen ihrer Wirkung nichts. Hatten wir doch bereits früher schon vorläufig erwähnt, dafs nach dem Fourier'schen Lehrsatz jede beliebige periodische Wirkung zerlegt werden kann in eine Reihe von sinusförmigen Kräften, unter denen dann diejenige, welche in ihrer Periode mit der schwingenden Bewegung übereinstimmt, allein befähigt ist, starkes Mitschwingen zu erregen. Zu Einrichtungen dieser Art gehören verschiedene

Apparate, in denen elastische Federn oder Stimmgabeln durch mechanische oder elektromagnetische Kräfte in dauernde Schwingungen versetzt werden. Das wichtigste Beispiel für diesen Fall bildet das Uhrpendel, dessen Mechanismus wir jetzt betrachten wollen. Das Pendel würde, frei schwingend, nach einiger Zeit durch Dämpfung zur Ruhe kommen, die Bewegung wird auch hier durch eine äufsere Kraft dauernd erhalten, indem das Uhrwerk, welches nach Hebung eines Gewichts oder nach Spannung einer Spiralfeder einen bestimmten Arbeitsvorrath aufgespeichert enthält, bei jedem Hin- und Hergang dem Pendel durch einen unbedeutenden Anstofs so viel lebendige Kraft zuführt, als während der halben Schwingung durch allerhand Reibung verzehrt ist. Die Periode, in der diese Stöfse erfolgen, wird durch die Pendelschwingungen selbst bestimmt, indem die stets zur Wirkung bereite Kraft des Uhrwerkes durch eine sinnreiche mechanische Einrichtung nur an einer bestimmten Stelle der Schwingungsbahn und in der erwünschten Richtung ausgelöst wird.

Diesem Zwecke dient das sogenannte Echappement, dessen Einrichtung in einfachster Form aus Fig. 8 (a. folg. S.) ersichtlich ist. Mit der Pendelstange AP ist ein stählerner Anker LAR starr verbunden, welcher deshalb die Schwingungen um die Pendelaxe A mitmacht. Der wesentlichste Theil des treibenden Uhrwerkes ist das Steigrad S, um dessen Welle wir uns eine durch das Gewicht M gespannte Schnur im Sinne der Uhrzeigerdrehung gewickelt denken. Die Schwerkraft wird daher dieses Rad in demselben Sinne herumzudrehen streben[1]) und würde dasselbe, wenn kein Hindernifs vorhanden wäre, in beschleunigte Rotation versetzen, wobei das herabfallende Gewicht keine andere äufsere Arbeit leistet, als etwa einige von der geringen Axenreibung des Rades herrührende Wärme. Das Steigrad ist aber rings besetzt mit langen Schneidezähnen, in deren Zwischenräumen der vorerwähnte Anker mit seinen hakenförmig umgebogenen Enden L und R bei den Schwingungen bald rechts, bald links eingreift und dadurch die Bewegung des Rades hemmt. In der Figur sind nur vier von diesen Zähnen angedeutet. Denken wir uns das Pendel in seiner linken Ausweichung, entsprechend (Fig. 8a), so hindert der Haken R die Bewegung des Rades, welches den Zahn r gegen die Seitenfläche jenes Hakens drückt. Dadurch kann auf das Pendel keine Wirkung geübt werden, abgesehen von

[1]) Dafs bei den gebräuchlichen Uhrwerken diese Kraft durch Vermittelung mehrerer Zahnräder auf die Welle des Steigrades übertragen wird, ist für unsere Betrachtungen unwesentlich.

der unbedeutenden Reibung zwischen den kleinen Flächen. Eine Wirkung kommt indessen zu Stande, wenn das Pendel nach rechts zurückschwingend seiner Gleichgewichtslage nahe ist (Fig. 8b), und zwar dadurch, dafs die Endfläche des nun zurückweichenden und den Zahn r freigebenden Hakens in dem Sinne schräg geschliffen

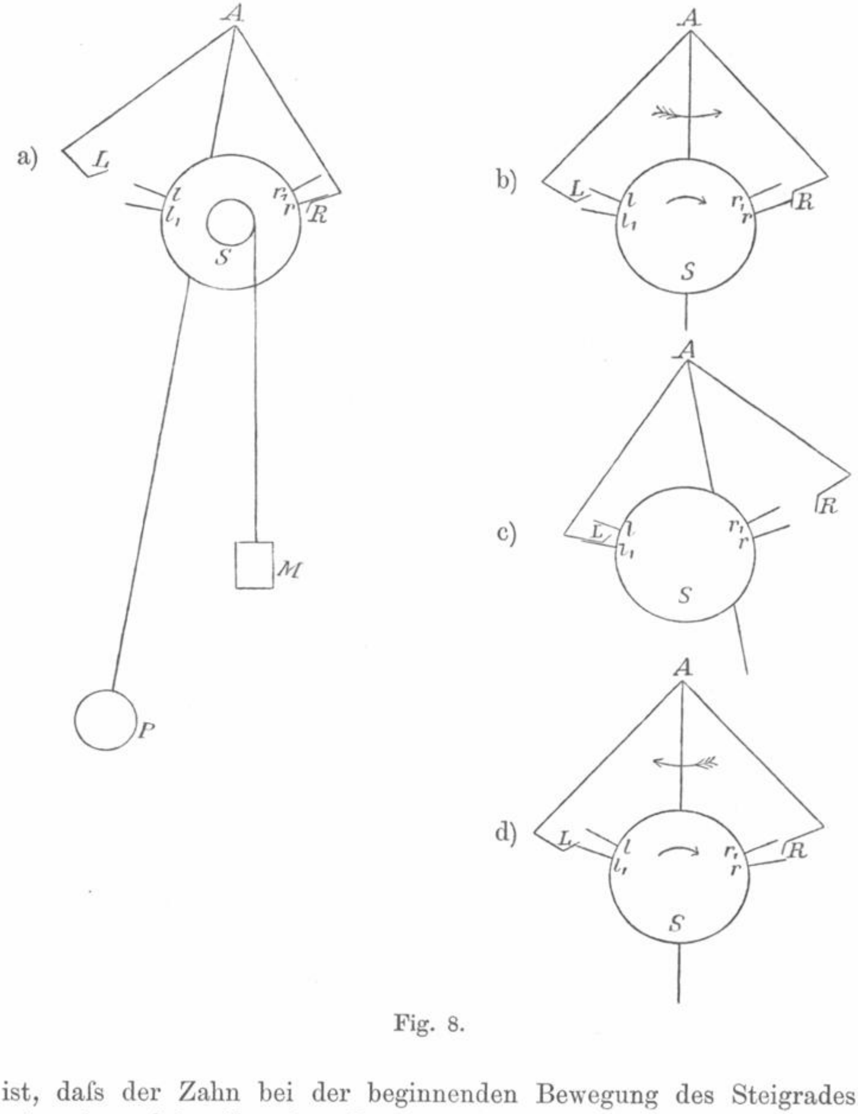

Fig. 8.

ist, dafs der Zahn bei der beginnenden Bewegung des Steigrades mit seiner Schneide über diese schiefe Ebene hinweggleiten mufs. Während dieses kurzen Stadiums der Bewegung weicht diese schräge Fläche nicht allein in Folge der Pendelbewegung zurück, sondern sie wird auch durch die Kraft des andringenden Zahnes zurückgeschoben, und das Pendel erfährt während der Zeit des Abgleitens eine Beschleunigung durch das Uhrwerk. Sobald aber der Zahn r frei ist und das Rad ohne Hemmung und ohne Arbeitsleistung seinen Weg fortsetzen kann, ist der linke Haken L zwischen zwei Zähne l und l_1 auf der linken Seite eingedrungen und diese Bewegung endigt mit dem Anschlag des Zahnes l_1 gegen die Seitenfläche des Hakens L (Fig. 8c). Diese Berührung dauert so lange, bis das Pendel auf der rechten Seite umgekehrt ist und wieder seiner Gleichgewichtslage nahegekommen ist (Fig. 8d). Dann gleitet der Zahn l_1 an der ebenfalls schrägen Endfläche des Hakens L ab und ertheilt dadurch dem nach links hinüber eilenden Pendel eine Beschleunigung in dieser Richtung. Das Rad wird frei, eilt weiter, bis der Zahn r_1 gegen R stöfst, und nach der Umkehr links wiederholt sich dasselbe Spiel von vorn. Das Steigrad dreht sich also während eines Hin- und Herganges um einen Zahn vorwärts. Wenn wir es mit einem Secundenpendel zu thun haben, dessen halbe Periode eine Secunde dauert, und wenn das Steigrad 30 Zähne besitzt, so wird sich dasselbe während einer Minute in 60 stofsweifsen Bewegungen ein Mal vollständig herumdrehen, und ein an diesem Rade befestigter Zeiger liefert direct einen Secundenzähler. Sind die Anstöfse des Uhrwerkes auf das Pendel kräftiger, die Beschleunigungen also gröfser, so werden weitere Amplituden erfolgen. Diese bringen auch wieder wegen der gröfseren Geschwindigkeiten stärkere Reibungskräfte mit sich, so dafs sich innerhalb gewisser Grenzen der treibenden Kraft stets ein stationärer Schwingungszustand herstellen wird. Ueber eine gewisse Grenze darf indessen die Kraft des Uhrgewichtes nicht gesteigert werden, weil einmal die Construction des Echappements gröfsere Amplituden nicht zuläfst und andererseits auch das Gesetz der Unabhängigkeit der Periode von der Amplitude bei gröfseren Schwingungsbogen aufhört.

Noch ein Umstand fordert besondere Beachtung. Es ist niemals zu vermeiden, dafs die treibende Kraft mit der Zeit abnimmt, oder dafs die zu überwindenden Dämpfungskräfte allmählich zunehmen: Das Oel auf den reibenden Flächen wird steifer, es sammelt sich Staub darauf an, folglich werden die Amplituden bei einer frisch gereinigten Uhr gröfser sein, als bei einer bereits längere Zeit dienenden; es können eben bei gröfserer Dämpfung nur kleinere Bewegungen aufrecht erhalten werden. Bei manchen Uhren, in denen das Uhrgewicht durch eine gespannte Spiralfeder ersetzt ist, nimmt die Kraft sogar beim jedesmaligen Ablaufen der Uhr beträchtlich ab. Wenn wir nun verlangen, dafs trotz dieser unvermeidlichen Umstände der Gang einer guten Uhr unverändert bleibe, dafs also das Pendel stets in seiner natürlichen Periode schwinge, so ist die Erfüllung an eine ganz bestimmte Bedingung geknüpft, die sich dahin aussprechen läfst, dafs durch die Anstöfse die Phase der Schwingungen nicht verändert werden darf. Die Wirkung des Anstofses besteht in einer kleinen Vermehrung der Geschwindigkeit, während derselbe dem Pendel in der kurzen Zeit seiner Dauer keine merkliche Verschiebung ertheilen kann. Wir sehen das am leichtesten ein, wenn wir uns an die Wirkungen der Beschleunigung erinnern, welche bei den Fallbewegungen vorkommen. Man vergleiche Gleichungen (28b) und (30b), Seite 47. Nennen wir die Beschleunigung, welche das Pendel während des Abgleitens der Zähne an den schiefen Flächen erfährt, γ und die kurze Zeit dieser Wirkung τ, so wird die erzeugte Geschwindigkeit durch $\gamma\tau$ gemessen, während der dabei durcheilte Weg gleich $\frac{1}{2}\gamma\tau^2$ ist. Wenn nun τ sehr klein ist, so wird τ^2 völlig unmerklich, der Weg, welcher diesem Quadrat proportional ist, kann vernachlässigt werden, so dafs wir zu der Annahme berechtigt sind, dafs das Pendel seinen Weg nach dem Stofs von derselben Stelle aus fortsetzt, die es vor dem Stofse erreicht hat. Die Wirkung des Stofses besteht dann nur darin, dafs die Amplitude nach dem Stofse um ein wenig gröfser wird, als sie ohne Stofs sein würde. Nennen wir die unmittelbar vor dem Stofs geltende Amplitude h_0, so können wir die Bewegung vor dem Stofse darstellen durch:

$$x_0 = h_0 \cos (n t - \varphi_0),$$

wo die Phasenconstante φ_0 nur von der Wahl des Zeitanfanges abhängt. Die gröfsere Amplitude nach dem Stofse sei h_1. Wir können nicht annehmen, dafs die neue Bewegung dieselbe Phase habe, müssen die Bewegung nach dem Stofse vielmehr schreiben:

$$x_1 = h_1 \cos (n t - \varphi_1).$$

Die Bedingung, dafs der Stofs keine Verschiebung erzeuge, findet dann ihren Ausdruck in der Gleichung $x_1 = x_0$ für die Zeit des Stofses, die wir $\bar{t}$ nennen wollen. Wir finden somit:

$$h_1 \cos (n \bar{t} - \varphi_1) = h_0 \cos (n \bar{t} - \varphi_0)$$

und sehen, dafs thatsächlich φ_1 im Allgemeinen von φ_0 verschieden sein wird. Die Folge eines solchen Phasensprunges ist aber die, dafs ein gewisser Theil der Schwingung übersprungen wird oder doppelt durchgemacht wird. In beiden Fällen wird dadurch die Wiederkehr desselben Bewegungszustandes verschoben, verfrüht oder verspätet, die Dauer der Periode also verfälscht, und zwar werden diese Phasensprünge $(\varphi_1 - \varphi_0)$ um so gröfser werden, je gröfser h_1 gegen h_0, je stärker also die Stöfse des Uhrwerkes sind. Der Gang der Uhr ist dann unnormal und auch mit der Kraft des Werkes veränderlich. Finden die Stöfse vor einem Durchgang durch die mittlere Lage statt, so wird die Periode verkürzt, indem die Phase vorwärts springt, finden die Stöfse nach dem Durchgang statt, so springt die Phase rückwärts und die Umkehr wird verspätet, die Periode also verlängert. Nur in einem einzigen Falle ist die letzte Gleichung verträglich mit der Forderung, dafs $\varphi_1 = \varphi_0$ bleiben soll, wenn nämlich die Zeit $\bar{t}$ so gewählt ist, dafs beide Seiten gleich Null werden, das heifst, wenn der Stofs in dem Augenblicke erfolgt, wo das Pendel durch seine Gleichgewichtslage geht. Es ist diese Erkenntnifs auch leicht daraus einzusehen, dafs die Zeit zwischen einem Durchgang und dem nächsten stets eine halbe normale Schwingungsdauer beträgt, unabhängig davon, mit welcher Geschwindigkeit der Weg in Folge des Stofses angetreten wird. Wenn die Zeit des Stofses nicht verschwindend klein gemacht werden kann, so mufs jedenfalls die Mitte derselben mit dem Durchgange zusammenfallen, wodurch die Veränderlichkeit des Ganges bei wechselnder Intensität der treibenden Kraft wenigstens auf ein Minimum reducirt wird.

Die Erfüllung der angeführten Bedingungen zu prüfen, ist wichtig für Jeden, der mit Uhren zu thun hat, von denen eine grofse Präcision des Ganges verlangt wird. Der Erste, welcher den Einflufs dieser Umstände erkannt hat und dadurch die Constanz der Pendelschwingungen für Zeitmessungen verwenden gelehrt hat, war Galilei.