

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über theoretische Physik

Vorlesungen über die Dynamik discreter Massenpunkte

Helmholtz, Hermann von

Leipzig, 1898

Erster Theil. Kinematik eines materiellen Punktes

Dynamik.

Erster Theil.

Kinematik eines materiellen Punktes.

§ 1. Begriff der Kinematik.

Die Dynamik umfaßt die Lehre von denjenigen Naturerscheinungen, welche zurückzuführen sind lediglich auf die Bewegung ponderabler Massen. Um die in diesem Gebiete beobachteten Gesetze in einer übersichtlichen und exacten Weise aussprechen zu können, müssen wir eine Erörterung voranschicken, in welcher wir diejenigen Begriffe aufstellen, die zu einer mathematischen Darstellung der Bewegungserscheinungen geeignet sind. Die Lehre von der Aufstellung und dem Zusammenhange dieser Begriffe nennt man Kinematik. Wir haben es in derselben also noch nicht zu thun mit den nur durch äußere Erfahrung festzustellenden Naturgesetzen, sondern vielmehr mit logischen Begriffsentwickelungen, deren Richtschnur allerdings dadurch gegeben ist, daß die später zu behandelnden thatsächlichen Gesetze ihren einfachsten Ausdruck erhalten.

Bewegung nennen wir die Ortsveränderung einer Masse in der Zeit. Wir werden daher in der Kinematik außer den rein geometrischen Begriffen, welche zur Angabe der Orte, Ortsveränderungen und Wege erforderlich sind, auch die fortschreitende Zeit als eine meßbar veränderliche mathematische Größe mit in die Betrachtung ziehen müssen.¹⁾

¹⁾ Wenn in der allgemeinen Einleitung in die theoretische Physik, welche diesen Auseinandersetzungen vorangehend zu denken ist, auch bereits von Bewegungen die Rede war, und zum Theil auch schon Fälle in die Betrachtung mit eingeschlossen wurden, wo zwei Bewegungen gleichzeitig ablaufend vorgestellt wurden, so waren dies alles, bis auf das Wort Bewegung, doch nur rein geometrische Betrachtungen über die Addition gerichteter Wegstrecken oder kleiner Drehungswinkel.

Die Massen, deren Bewegungen wir in Wirklichkeit verfolgen können, haben stets räumliche Ausdehnung und eine bestimmte geometrische Gestalt, welche sich ihrerseits auch in der Zeit verändern kann. Zur vollständigen Auffassung des Bewegungsvorganges ist erforderlich, daß wir jedes individuelle Theilchen der Masse zu jeder Zeit als das gleiche wiedererkennen können und die besondere Bewegung desselben verfolgen können. Es wird dadurch die Beschreibung einer Bewegung ausgedehnter Massen bereits zu einer complicirten Aufgabe, und es ist wünschenswerth, dieselbe auf möglichst einfache Verhältnisse zurückzuführen, durch deren Erforschung die Analyse der verwickelteren Erscheinungen erleichtert wird.

§ 2. Materielle Punkte.

Dies geschieht durch die Einführung des Begriffs „materieller Punkt“ oder „Massenpunkt“. Unter einem solchen verstehen wir eine Masse, deren räumliche Ausdehnung und Gestalt in jeder Beziehung vernachlässigt werden kann, deren Lage also durch Angabe eines einzigen geometrischen Punktes vollständig bestimmt wird. In Fällen, wo die Vorstellung endlich großer Massen, welche in einem ausdehnungslosen Punkte zusammengedrängt sind, Anstoß erregen sollte, können wir uns doch in jedem beliebig kleinen, continuirlich mit körperlicher Substanz erfüllten Raumelemente einen Punkt vorstellen, welcher seine Lage so ändert, daß er bei der Bewegung stets an denselben materiellen Theilchen der ausgedehnten Masse haftet, so daß also die Bewegung solcher Ausschnitte der ganzen Masse durch die Bahn eines Punktes angegeben wird. Solche Punkte würde man ebenfalls als Massenpunkte betrachten können; das wesentliche an diesem Begriffe bleibt die Identität der damit verbundenen Masse zu allen Zeiten ohne die Complication räumlicher Gestaltung.

In vielen praktisch wichtigen Untersuchungen haben wir es mit Massen von endlicher Größe zu thun, welche auf einander wirken, deren Ausdehnungen aber gegenüber den vorhandenen Entfernungen der einen von der anderen so gering sind, daß dieselben gar keinen meßbaren Einfluß auf die Erscheinungen zeigen, obwohl derselbe, streng genommen niemals ganz fehlen wird. Namentlich kommen bei den Untersuchungen über Kräfte, welche in die Ferne wirken, vielfach solche Verhältnisse vor. Wenn wir z. B. die Bewegungen unseres Planetensystems betrachten, so haben wir Körper vor uns von Dimensionen, welche gegen ihre gegenseitigen Abstände fast in

allen Fällen so klein sind, daß sie keinen Einfluß auf die Bewegungen der Massen im ganzen — genauer gesagt — auf die Bewegungen ihrer Schwerpunkte haben. Allerdings kommen auch gerade hier lehrreiche Ausnahmen vor: Einzelne von den planetarischen Körpern sind nämlich groß genug und ihre Entfernungen von einem Nachbar nicht so bedeutend, daß nicht Wirkungen einträten, welche von der Ausdehnung der Körper herrühren. So machen sich bei der Bewegung unseres Mondes auf der Erde gewisse Erscheinungen bemerkbar — namentlich Ebbe und Fluth des Oceans —, welche davon herrühren, daß der Durchmesser der Erde nicht verschwindet gegen den Mondabstand (Verhältniß 1:30); andererseits bringt auch die Erde durch ihre ellipsoidische Gestalt, deren Axen nicht genau in die Ebene der Mondbahn fallen, gewisse Störungen in der Bewegung des Mondes hervor, die bei sorgfältigen Messungen noch wohl zu beobachten sind. Indessen gehören derartige Verhältnisse in der Astronomie zu den Seltenheiten und man kommt in den meisten Fällen in genügender Genauigkeit mit der Annahme aus, daß die Himmelskörper materielle Punkte seien. Der Begriff des materiellen Punktes ist also eine Abstraction, welche mit dem Vorzug begrifflicher Einfachheit eine mehr oder weniger vollkommene Annäherung an die wirklichen Verhältnisse vereinigt. Wir werden später sehen, in welchen Fällen diese Abstraction volle Genauigkeit der Resultate liefert, in welchen nur Annäherungen.

Endlich sei hier noch erwähnt, daß einige Kapitel der Dynamik sich am ungezwungensten behandeln lassen, wenn man bei der durch den Augenschein unterstützten Annahme continuirlich verbreiteter Massen stehen bleibt, und nicht hypothetische Annahmen über besondere Arten von Anhäufung discreter Massenpunkte macht. In diesen Fällen werden die kleinsten Massentheilchen, welche wir uns isolirt vorstellen können, immer einen kleinen Raum ausfüllen, längs dessen gedachter Oberfläche sie ohne Unterbrechung an die Nachbarmassen grenzen, und wegen dieser Begrenzung durch verschieden gerichtete Flächen werden noch besondere Eigenschaften in verschiedenen Richtungen übrig bleiben können, welche bei der Vorstellung eines Massenpunktes fehlen. Wir werden vor der Behandlung der betreffenden Abschnitte die dahingehörigen kinematischen Betrachtungen einschieben, und wollen uns jetzt zur Vereinfachung die körperlichen Massen, mit denen wir zu thun haben, als materielle Punkte vorstellen.

§ 3. Coordinaten.

Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung eines materiellen Punktes ist nöthig und hinreichend, dafs wir die Lage desselben im Raume für jeden Zeitpunkt desjenigen Zeitabschnitts, in welchem wir die Bewegung verfolgen wollen, angeben können. Wir brauchen nun zu einer vollständigen Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume nothwendig drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke oder Coordinaten, welche in beliebigen geometrischen Gröfsen bestehen können, wenn diese nur genügen, um uns eine bestimmte Angabe, einen bestimmten Schluß über die Lage des Punktes machen zu lassen.

Unter den verschiedenen Coordinatensystemen, welche man mit Hülfe geometrischer Abmessungen angeben kann, und welche für besondere Fälle besondere Vortheile bieten, ragen durch ihre allgemeine Nützlichkeit am meisten hervor und werden deshalb bei allgemeineren Betrachtungen vorzugsweise benutzt die geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten, welche zuerst von DESCARTES (CARTESIUS) eingeführt wurden und deshalb auch cartesische Coordinaten genannt werden. Dieselben bestimmen die Lage eines Punktes durch die Abstände, welche derselbe von drei auf einander senkrechten, festgelegten Ebenen zeigt. Diese drei Abstände, gerichtete Strecken, welche senkrecht auf einander stehen, pflegt man mit den Buchstaben x, y, z zu bezeichnen; dem entsprechend nennt man die drei Schnittlinien, welche die festen Ebenen — die Coordinatenebenen — bilden und welche parallel jenen Strecken laufen, die x -Axe, y -Axe und z -Axe. Der Schnittpunkt der drei Ebenen oder der drei Axen heifst der Anfangspunkt des Coordinatensystems, während man die drei Ebenen nach denjenigen Axen, welche in denselben verlaufen, als die (y, z) -Ebene, die (z, x) -Ebene und die (x, y) -Ebene unterscheidet. Es ist ohne weiteres einzusehen, dafs man die drei Abmessungen x, y, z auch erhält, wenn man von dem Punkte, dessen Lage bestimmt werden soll, die Lothe auf die drei Axen fällt, oder mit anderen Worten, dafs die drei Coordinaten eines Punktes in diesem System die Projektionen des vom Anfangspunkte nach dem zu bestimmenden Punkte gezogenen Strahles auf die Axen sind. Die Lothe, welche nach entgegengesetzten Richtungen auf derselben Ebene errichtet sind, oder die Projectionen, welche auf derselben Axe nach den entgegengesetzten Seiten vom Anfangspunkte aus hinzeigen, unterscheidet man durch die algebraischen Vorzeichen +

und — und man setzt ein für alle Mal fest, nach welchen Seiten hin die drei Abmessungen positiv gerechnet werden sollen.

Diese rechtwinkligen Coordinaten haben folgende wichtigen Vorzüge vor allen davon verschiedenen Abmessungen, welche man zur Lagenbestimmung im Raume brauchen kann. Dieselben geben erstens im ganzen unendlichen Raume eindeutige Ortsbestimmungen und zweitens sind die drei Abmessungen gleichartige Größen. Bei allen anderen Coordinaten haben wir es nothwendig zu thun mit irgend welchen Functionen von x, y, z , denn wenn die anderen Größen ebenfalls den Ort eines Punktes bestimmen, so müssen sie sich durch x, y, z analytisch ausdrücken lassen, so dafs wir diese Beziehungen als Gleichungen für x, y, z betrachten und deren Lösungen suchen können. Nun wissen wir aber aus der Algebra, dafs nur die linearen Gleichungen eindeutige Wurzeln liefern, während alle anderen (solche von höherem Grade wie auch transcendente), mehrdeutige Aussagen machen und zugleich auch auf verwickelter gebaute Ausdrücke führen; denn Ausdrücke, welche gleichzeitig mehrere Werthe darstellen, sind immer complicirter als eindeutige.

Die analytische Geometrie lehrt nun, dafs ein Coordinatensystem, dessen Abmessungen linear mit x, y, z zusammenhängen, stets wieder ein cartesisches System ist, dessen Axen allerdings schiefwinkelig auf einander stehen können, wenn nicht bestimmte Relationen zwischen den Coefficienten erfüllt sind. Solche schiefwinkligen Coordinaten geben ebenfalls im ganzen Raume eindeutige Angaben, die Lothe des rechtwinkligen Systems sind dabei durch Parallelstrecken zu den drei Axen zu ersetzen; doch wollen wir auf diese Systeme wegen ihrer seltenen Verwendung hier keine Rücksicht nehmen. Bei allen anderen Arten von Coordinaten erhalten wir also, wegen ihres nicht linearen Zusammenhanges mit den cartesischen, Angaben, welche immer Zweifel lassen zwischen mehreren Orten, welche dadurch bestimmt sind; wir erhalten Gruppen von Orten. Dies hat den Nachtheil, dafs wir nicht unmittelbar aus dem Resultat die Lage des gemeinten Punktes herauslesen können, sondern in der Regel noch Nebenbetrachtungen anstellen müssen, um die zutreffende Lösung auszuwählen.

Die Eigenschaft der Gleichartigkeit der drei Coordinaten dieses Systems bietet den Vortheil, dafs dieselben als gerichtete Strecken unmittelbar den Gesetzen der geometrischen Addition unterworfen werden können, dafs also bei additiver Combination von mehreren solchen das Resultat sofort abgelesen werden kann. Auch die Ver-

tauschbarkeit der einzelnen Glieder einer geometrischen Summe läßt sich mittelst dieser rechtwinkligen Coordinaten auf die gleiche Eigenschaft der gewöhnlichen algebraischen Summen zurückführen, wenn man jeden der gerichteten Summanden in die drei den Coordinatax parallel Componenten zerlegt. Wir wollen diesen Gedankengang ausführlicher betrachten, weil er in allen Theilen der theoretischen Physik, wo wir es mit gerichteten Größen zu thun haben, anzuwenden ist. Was dabei von Strecken als begrifflich einfachster Art von gerichteten Größen gesagt wird, gilt ganz allgemein von jeder Art gerichteter Größen. Es seien eine Anzahl gerichteter Strecken $l_1, l_2, \dots l_n$ gegeben, deren Richtungen mit den drei Coordinatax die durch die Indices bezeichneten Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$ bilden, und wir stellen uns die Aufgabe, deren geometrische Summe zu bilden, d. h. wir setzen dieselben zu einer fortlaufenden gebrochenen Linie zusammen. Der Anfangspunkt der ersten Strecke habe die Coordinaten x_0, y_0, z_0 ; die Grenzpunkte zwischen den folgenden Strecken seien bezeichnet durch

$$x_1 y_1 z_1$$

$$x_2 y_2 z_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_n y_n z_n$$

Es gelten dann zwischen den vorher bezeichneten Größen die Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} x_1 - x_0 = l_1 \cos \alpha_1, & y_1 - y_0 = l_1 \cos \beta_1, & z_1 - z_0 = l_1 \cos \gamma_1 \\ x_2 - x_1 = l_2 \cos \alpha_2, & y_2 - y_1 = l_2 \cos \beta_2, & z_2 - z_1 = l_2 \cos \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_{n-1} = l_n \cos \alpha_n, & y_n - y_{n-1} = l_n \cos \beta_n, & z_n - z_{n-1} = l_n \cos \gamma_n \end{array}$$

Die geometrische Summe der an einander gesetzten Strecken ist nun die gerade Strecke, welche vom Punkte $x_0 y_0 z_0$ bis zum Punkte $x_n y_n z_n$ reicht, ihre drei Componenten sind also

$$x_n - x_0, \quad y_n - y_0, \quad z_n - z_0.$$

Diese Ausdrücke erhält man aber durch Addition der vorstehenden drei Sätze von Gleichungen in folgender Form:

$$x_n - x_0 = \sum_{a=1}^n l_a \cos \alpha_a \quad y_n - y_0 = \sum_{a=1}^n l_a \cos \beta_a \quad z_n - z_0 = \sum_{a=1}^n l_a \cos \gamma_a$$

Da nun in diesen algebraischen Summen die Reihenfolge der Summanden ohne Aenderung des Resultates beliebig vertauschbar ist, so gilt dasselbe auch für die geometrische Summe der gerichteten Strecken.

§ 4. Stetigkeit und Differenzirbarkeit.

Um nun mit Hilfe dieser Coordinaten die Bewegung eines materiellen Punktes darzustellen, müssen wir angeben, in welcher Weise sich die Abmessungen x, y, z , welche die Lage in jedem Augenblicke bestimmen, mit der Zeit verändern, das heisst, wir müssen diese Coordinaten als Functionen der Zeit ausdrücken. Die dabei als unabhängige Urvariable auftretende Gröfse ist derjenige Zeitraum, welcher seit einem bestimmten, als Beginn der Zeitzählung festgesetzten Zeitpunkt verstrichen ist. Es ist eine Form unserer Anschauungen, dafs wir die fortschreitende Zeit als eine wachsende Gröfse und die zwischen irgend wie markirten Zeitpunkten verstrichenen Zeiträume als unter einander vergleichbare mefsbare Quanta betrachten. Den Methoden der Zeitmessung werden wir erst im weiteren Verlaufe des Studiums der Bewegungserscheinungen begegnen. Wir wollen die von einem bestimmten Anfangspunkt aus gemessene Zeit durch das Zeichen t ausdrücken.

Die Functionen von t , welche x, y, z bilden, können nicht von ganz beliebiger Form sein, müssen vielmehr gewisse Bedingungen erfüllen, damit mögliche Bewegungsvorgänge dadurch gekennzeichnet werden.

Erstens müssen x, y, z überall stetige Functionen von t sein. Diese Forderung ist nothwendig für die Erkenntnifs der Identität eines Massenpunktes zu verschiedenen Zeiten, denn wenn sich die Coordinaten oder auch nur eine einzelne zu irgend einem Zeitpunkt sprungweise veränderten, so würde die dadurch dargestellte Bahn des Massenpunktes abbrechen und an einer davon getrennten Stelle weiterlaufen, die Masse würde daher an einem Orte verschwinden und an einem räumlich getrennten anderen Orte im selben Momente auftauchen, ohne einen die beiden Orte verbindenden Weg durchlaufen zu haben. In einem solchen Falle können wir uns überhaupt gar kein Mittel vorstellen, durch welches die Identität des Massenpunktes vor und nach dem Sprunge nachzuweisen wäre, wir würden vielmehr eine solche nimmermehr anerkennen, sondern uns vor einen Vorgang gestellt sehen, welcher dem obersten Erfahrungsgrundsatz aller Naturerscheinungen, der Unzerstörbarkeit und Unentstehbarkeit der Materie zuwiderläuft.

Die zweite Forderung, welche wir jetzt für die Zeitfunctionen x, y, z aufstellen wollen, kann in ihrer Nothwendigkeit erst eingesehen werden, wenn wir zu den von NEWTON aufgestellten Principien

der Dynamik kommen, indessen soll dieselbe bereits hier als eine später zu rechtfertigende Beschränkung eingeführt werden: Die Coordinaten jedes bewegten Massenpunktes müssen stets nach der Zeit differenzirbar sein. Die Differenzirbarkeit fordert mehr als die Stetigkeit; sie verlangt, daß die Veränderung, welche eine Function bei einem Zuwachs der Variabeln erfährt, zu diesem Zuwachs in einem Verhältniß stehen muß, welches bei hinreichender Kleinheit dieses Zuwachses von dessen Größe unabhängig wird, also einen festen Grenzwert besitzt, den man als den Differentialquotienten der Function bezeichnet. Wenn x die Function und t die Variable bedeutet, so drückt man den Differentialquotient symbolisch durch das Zeichen $\frac{dx}{dt}$ aus. Die Größen der Differentialquotienten von x, y, z werden nun im Allgemeinen ebenfalls mit der Zeit veränderlich, also Functionen von t sein, dieselben dürfen sich aber niemals sprungweise verändern, weil sonst für den Zeitpunkt dieses Sprunges kein eindeutiger Werth des Differentialquotienten angeben läßt. Wir können daher die aufgestellte Bedingung der Differenzirbarkeit auch dadurch ausdrücken, daß wir verlangen: Die Differentialquotienten von x, y, z müssen stetige Functionen der Zeit sein.

§ 5. Geschwindigkeit, gleichförmige Bewegung.

Die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten bezeichnet man mit dem allgemeinen Namen Aenderungsgeschwindigkeiten der Functionen, während das Wort Geschwindigkeit im speciellen Sinne (gleich Weggeschwindigkeit) die Differentialquotienten der Coordinaten oder anderer die veränderliche Lage des Massenpunktes bestimmender Längenabmessungen bedeutet. Die Aenderungsgeschwindigkeiten von x, y, z wollen wir nun durch folgende Gleichungen angeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dz}{dt} &= w \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

in denen u, v, w stetige Functionen von t sind. Sobald u, v, w bekannt sind, können wir uns die Aufgabe stellen x, y, z selbst zu finden, das heißt die Bewegung des Punktes zu berechnen. Dies geschieht durch die Integration der Gleichungen (1).

Wir wollen diese Frage zunächst für den einfachen Fall behandeln, daß u, v, w während der ganzen Zeit der Betrachtung unveränderliche Werthe besitzen, also von t unabhängig und constant sind. Wir nehmen die Untersuchung nach einer allgemein verwendbaren Methode vor, welche zwar bei diesem einfachen Problem einen etwas weitläufigen Weg geht, welche uns aber die Gewähr bietet, daß wir dadurch zur Kenntniß aller möglichen Integralwerthe jener Gleichungen (1) gelangen. Wir stellen zu diesem Zwecke die festen Größen u, v, w ebenfalls als Differentialquotienten nach der Zeit dar:

$$u = \frac{d(u t)}{d t}, \quad v = \frac{d(v t)}{d t}, \quad w = \frac{d(w t)}{d t}$$

schaffen diese Ausdrücke auf die linke Seite der Gleichungen (1) und vereinigen sie mit den dortstehenden Differentialquotienten der Coordinaten. Dadurch entstehen folgende nur formellen Umformungen der ursprünglichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{d t} (x - u t) = 0$$

$$\frac{d}{d t} (y - v t) = 0$$

$$\frac{d}{d t} (z - w t) = 0$$

In dieser Form finden wir die Differentialquotienten von drei Functionen gleich Null gesetzt, was nichts anderes heißt, als daß die Functionen selbst sich in der Zeit nicht ändern, vielmehr jede irgend einen constanten Werth bewahrt, dessen Betrag aber durch die Aufgabe selbst nicht vorgeschrieben ist. Dergleichen unbestimmte Constanten treten bei jeder Integration von Differentialgleichungen auf. Bezeichnen wir dieselben der Reihe nach durch x_0, y_0, z_0 , so können wir statt des letzten Satzes von Differentialgleichungen die gewöhnlichen Gleichungen schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} x - u t = x_0, \quad y - v t = y_0, \quad z - w t = z_0 \\ \text{oder in anderer Schreibweise:} \\ x - x_0 = u t, \quad y - y_0 = v t, \quad z - z_0 = w t \end{array} \right\} \quad (2)$$

Die Integration ist damit vollendet, und wir wollen nun die Natur der durch die Gleichungen (2) dargestellten Bewegung untersuchen. Um zunächst die Bahn des Punktes aufzufinden, müssen wir aus den drei letzten Gleichungen die Zeit eliminiren, denn jeder bestimmte Werth von t , in diese Gleichungen eingesetzt, liefert einen

bestimmten Punkt der Bahn, mithin ergibt das Resultat der Elimination von t die rein analytisch-geometrischen Beziehungen zwischen x , y , z , welche die Gestalt der Bahn charakterisiren. Die Elimination ist leicht auszuführen, indem wir t aus jeder der drei Gleichungen ausrechnen und die gewonnenen Ausdrücke einander gleichsetzen. Wir erhalten so die Doppelgleichung:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

welche zwei von einander unabhängige Beziehungen zwischen den Coordinaten feststellt. Greifen wir die folgende heraus:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}.$$

Dieselbe sagt als lineare Gleichung zwischen x und y aus, daß die Orte, welche der Massenpunkt auf seiner Bahn berührt, in einer gewissen Ebene bleiben müssen, welche parallel zur x -Axe liegt. Ebenso folgt aus der anderen Beziehung:

$$\frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

daß die Bahn in einer gewissen Ebene parallel zur x -Axe verlaufen muß. Diese beiden Ebenen werden im Allgemeinen verschieden von einander sein, die Bahn kann daher nur diejenige gerade Linie sein, welche durch den Schnitt der beiden Ebenen gegeben ist.

Die soeben gegebenen Auseinandersetzungen werden hinfällig, wenn die vorgeschriebenen Constanten u , v , w zum Theil oder sämmtlich gleich Null sind, denn wir haben zum Zwecke der Elimination von t dieselben als Divisoren angewendet, was keinen Sinn mehr hat, wenn dieselben gleich Null sind. Wir müssen deshalb für diese Fälle Specialbetrachtungen anstellen. Wenn alle drei $u = v = w = 0$ sind, so liefern die Gleichungen (2) $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, der Massenpunkt befindet sich also dauernd an irgend einem festen Orte in Ruhe. Ist nur eine Constante, etwa u von Null verschieden, so bleibt $y = y_0$ und $z = z_0$ und nur x verändert sich mit der Zeit. Die Bahn des Punktes ist also irgend eine gerade Linie parallel der x -Axe. Sind endlich zwei Constanten, etwa u und v ungleich Null, während $w = 0$ ist, so bleibt $z = z_0$, die Bewegung findet daher in einer Ebene senkrecht zur z -Axe statt. Andererseits liefern dann die beiden ersten Gleichungen (2) wie im allgemeinen Fall durch Elimination von t eine Ebene parallel der z -Axe. Der Schnitt dieser beiden senkrecht stehenden Ebenen bestimmt in diesem Falle die Bahn des Massenpunktes.

Wir erkennen also in allen Fällen, daß die Bahn eines Massenpunktes, dessen Coordinaten constante Differentialquotienten haben, eine gerade Linie im Raume sein muß. Die unbestimmt gebliebenen Integrationsconstanten x_0, y_0, z_0 bezeichnen einen Punkt dieser Geraden und zwar denjenigen, in welchem sich der Massenpunkt zu Beginn der Zeitrechnung $t = 0$ befindet. Von diesem Anfangspunkt aus können wir die Länge l des auf der geraden Linie zurückgelegten Weges abmessen; die Projectionen dieser Strecke auf die Coordinataxen sind $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$, folglich ist

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Das Vorzeichen dieser Wurzel ist zunächst doppeldeutig; da aber der Radicandus fortdauernd wächst mit der Zeit, der Werth also nach der Zeit $t = 0$ niemals wieder gleich Null wird, so können wir l positiv rechnen in der Richtung, in welcher der Massenpunkt sich bewegt.

Für die einzelnen unter der Wurzel stehenden Terme können wir aus den Gleichungen (2) diejenigen Ausdrücke einsetzen, welche die Abhängigkeit derselben von der Zeit erkennen lassen und erhalten so:

$$l = (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}) \cdot t \quad (3)$$

Da die in diesem Ausdruck vorkommende Wurzel nur aus den vorgeschriebenen Constanten zusammengesetzt ist, so ist sie selbst gleich einem bestimmten und von der Zeit unabhängigen Werthe, den wir q nennen wollen. Der durchlaufene Weg l wächst proportional der verstrichenen Zeit t , der Massenpunkt legt auf seiner geradlinigen Bahn in gleichen Zeiten gleiche Wegstrecken zurück, und die Weggeschwindigkeit ist:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = q \quad (3a)$$

also unveränderlich. Man nennt eine Bewegung von den hier gefundenen Eigenschaften eine gleichförmige Bewegung.

Der Anfangspunkt der Bahn, also der Punkt x_0, y_0, z_0 ist bei der Lösung der Differentialgleichungen unbestimmt geblieben, dagegen hat die Bahn eine durch die vorgeschriebenen Constanten bestimmte Richtung im Raume, denn die Winkel, welche l mit den drei Axen bildet, und die wir durch (l, x) , (l, y) , (l, z) bezeichnen wollen, sind zunächst gegeben durch:

$$\cos(l, x) = \frac{x - x_0}{l}, \quad \cos(l, y) = \frac{y - y_0}{l}, \quad \cos(l, z) = \frac{z - z_0}{l}.$$

Die Richtung von l ist zugleich die Richtung der resultirenden Geschwindigkeit q , also ist auch $(l, x) = (q, x)$ etc. zu setzen. Entnehmen wir endlich aus den Gleichungen (2) und aus Gleichung (3) die Werthe $(x - x_0)$, . . . und von l , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \cos(q, x) &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, & \cos(q, y) &= \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \\ \cos(q, z) &= \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

oder kürzer:

$$\cos(q, x) : \cos(q, y) : \cos(q, z) = u : v : w.$$

Aus diesen Angaben über die Richtung von q in Verbindung mit dem in Gleichung (3a) gegebenen Werthe von q erkennt man, daß constante Aenderungsgeschwindigkeiten der drei Coordinaten sich nach denselben Gesetzen zu einer resultirenden constanten Weggeschwindigkeit zusammenfügen, wie sich verschieden gerichtete Strecken zu einer Resultante vereinigen.

Daher gestalten sich die vorstehenden Ableitungen noch einfacher, wenn wir die Ausdrucksweise der geometrischen Addition anwenden. Die Größen $x_0, y_0, z_0, x, y, z, l, u, v, w, q$ sind alsdann als gerichtete Größen (Vectoren) zu behandeln. Die mit l bezeichnete Wegstrecke stellt sich dar als geometrische Summe:

$$l = (x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0).$$

Durch diese eine Gleichung ist nicht nur die Länge, sondern auch die Richtung von l bestimmt. Durch Anwendung der Gleichung (2) wird hieraus:

$$l = (u + v + w) \cdot t,$$

und durch Differentiation erhält man

$$q = \frac{dl}{dt} = u + v + w. \quad (3c)$$

Die resultirende Geschwindigkeit ist also geometrische Summe der Aenderungsgeschwindigkeiten der einzelnen Coordinaten, und ist durch die eine Gleichung (3c) sowohl ihrer Größe wie ihrer Richtung nach bestimmt. Uebrigens beschränkt sich selbstverständlich die geometrische Addition von Geschwindigkeiten nicht auf solche, welche senkrecht auf einander stehen, nur die auf Grund des pythagoräischen Satzes aufgestellte Gleichung (3) und ihre Consequenzen verlangen rechte Winkel.

§ 6. Beschleunigung.

Wenn die Geschwindigkeitscomponenten u , v , w nicht constant sind, sondern durch irgend welche Zeitfunctionen bestimmt sind, so können wir die im vorigen Paragraphen durchgeführte Betrachtung nicht über einen größeren Zeitraum ausdehnen. Da wir aber in Hinsicht auf ein später zu besprechendes Naturgesetz verlangt hatten, daß die Geschwindigkeiten stetige Functionen der Zeit sein müssen, werden die Veränderungen in verschwindend kurzen Zeiten selbst verschwindend klein, und wir können innerhalb solcher kurzer Zeiträume die Größen u , v , w als unveränderlich ansehen und die Betrachtungen des vorigen Paragraphen verwenden. Es werden sich also in jedem Zeitelement die Geschwindigkeitscomponenten zu einer resultirenden Geschwindigkeit q nach Gleichung (3a) zusammenfassen lassen, und auch die mit der Richtung des Weges übereinstimmende Richtung von q läßt sich durch die Gleichungen (3b) angeben.

Der Unterschied besteht nur darin, daß q in Größe und Richtung nicht mehr constant bleibt, sondern selbst eine Function der Zeit wird, und zwar gleich wie u , v , w selbst, eine stetige Function. Die Stetigkeit, mit welcher die Richtung sich nur verändern kann, hat zur Folge, daß die Bahn des materiellen Punktes höchstens eine endliche Krümmung, nirgends aber einen Knick, einen Winkelpunkt besitzen darf.

Die Differenzirbarkeit derjenigen Zeitfunctionen, welche die Geschwindigkeitscomponenten darstellen, wollen wir nicht ebenso zuversichtlich für alle Zeiten voraussetzen, wie diejenige der Coordinaten selbst. Es giebt thatsächlich viele Bewegungserscheinungen, die sich am einfachsten beschreiben lassen, wenn man zu gewissen Zeitpunkten Unstetigkeiten der Differentialquotienten der Geschwindigkeiten annimmt. In solchen Zeitpunkten existirt dann kein angebarwer Werth des Differentialquotienten. Wir wollen indessen jetzt die Bewegung eines Punktes in Zeitabschnitten verfolgen, in denen auch die Geschwindigkeitscomponenten u , v , w differenzirbare Functionen der Zeit bleiben. Um diese neue Annahme mathematisch auszudrücken, müssen wir zu den Gleichungen (1) noch folgende ganz analoge Gleichungen hinzufügen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha \\ \frac{dv}{dt} &= \beta \\ \frac{dw}{dt} &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

in denen α, β, γ zu allen Zeiten, welche in Betracht kommen, eindeutige und stetig sich verändernde Größen sind.

Begrifflich wären dieselben zu bezeichnen als die Aenderungsgeschwindigkeiten der Geschwindigkeitscomponenten, welch' letztere ursprünglich eingeführt waren als die Aenderungsgeschwindigkeiten der Coordinaten. Statt dieser umständlichen Benennung führen wir eine kürzere ein, und bezeichnen α, β, γ als die Beschleunigungen der Coordinaten. Wir können auch die Gleichungen (1) und (4) zu einem gemeinsamen Gleichungssystem zusammenfassen, wenn wir die Operation

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} \quad \text{oder in kürzerer Form} \quad \frac{d^2x}{dt^2}$$

anwenden, deren Resultat man den zweiten Differentialquotient von x nach t nennt. Wir erhalten auf diese Weise:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \beta \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

oder in Worten: Die Beschleunigungen der Coordinaten sind durch deren zweite Differentialquotienten nach der Zeit gegeben.

Wir können nun mit den neu aufgestellten Gleichungen (4) eine ganz ebensolche Integration vornehmen, wie wir sie im vorigen Paragraphen mit den Gleichungen (1) ausgeführt haben; wir müssen dazu nur voraussetzen, daß α, β, γ längere Zeit hindurch constant bleiben, oder daß wir nur ein so kurzes Zeitintervall betrachten, daß die Veränderungen der stetigen Größen α, β, γ unmerklich bleiben. Dann können wir dieselben oben ausführlich besprochenen Schritte der Rechnung ausführen, welche in folgenden Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{dt}(\alpha t), & \beta &= \frac{d}{dt}(\beta t), & \gamma &= \frac{d}{dt}(\gamma t), \\ \frac{d}{dt}(u - \alpha t) &= 0, & \frac{d}{dt}(v - \beta t) &= 0, & \frac{d}{dt}(w - \gamma t) &= 0, \\ u - \alpha t &= u_0, & v - \beta t &= v_0, & w - \gamma t &= w_0. \end{aligned}$$

In den letzten drei Gleichungen bedeuten u_0, v_0, w_0 die unbestimmt bleibenden Integrationsconstanten, welche die zur Zeit $t = 0$ herrschende Geschwindigkeit q_0 durch ihre drei Componenten darstellen. Diese drei Gleichungen kann man in anderer Anordnung auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= \alpha \cdot t \\ v - v_0 &= \beta \cdot t \\ w - w_0 &= \gamma \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dieselben sagen aus, daß die durch die Integration gefundene Geschwindigkeit q zur Zeit t , deren Componenten durch u, v, w angegeben sind, dadurch gefunden wird, daß wir zu q_0 eine neue Geschwindigkeit geometrisch addiren, deren Componenten gleich $\alpha \cdot t, \beta \cdot t, \gamma \cdot t$ sind und deren bestimmt gerichtete Resultante wir durch q' bezeichnen wollen. In der Ausdrucksweise der geometrischen Addition ist dann:

$$q = q_0 + q'.$$

Die Elimination von t aus den Gleichungen (6) führt zu der Doppelgleichung:

$$\frac{u - u_0}{\alpha} = \frac{v - v_0}{\beta} = \frac{w - w_0}{\gamma}.$$

welche eine bestimmt gerichtete gerade Linie im Raume anzeigt, nämlich die Richtung der hinzutretenden Geschwindigkeit q' . Der Betrag der letzteren ergibt sich durch Zusammensetzung der auf einander senkrechten Componenten nach dem pythagoräischen Satze:

$$q' = \sqrt{(\alpha \cdot t)^2 + (\beta \cdot t)^2 + (\gamma \cdot t)^2} = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) \cdot t \quad (7)$$

also proportional der verstrichenen Zeit, so lange die Quadratwurzel als unverändert gelten kann, also jedenfalls während eines hinreichend kleinen Zeitintervalls. Diese gerichtete Größe

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \kappa \quad (8)$$

erhält man, auch bei stetig-veränderlichen α, β, γ , in jedem Falle durch Differentiation von q' :

$$\frac{dq'}{dt} = \kappa.$$

Wir nennen sie die Beschleunigung des Massenpunktes. Ihre Richtung ist die Richtung von q' und wird nach den vorhergehenden

Gleichungen durch Angabe der Cosinus der Winkel (κ, x) , (κ, y) , (κ, z) folgendermaßen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\kappa, x) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, & \cos(\kappa, y) &= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \\ \cos(\kappa, z) &= \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

oder kürzer:

$$\cos(\kappa, x) : \cos(\kappa, y) : \cos(\kappa, z) = \alpha : \beta : \gamma.$$

Diese Richtung wird im Allgemeinen verschieden sein von derjenigen der augenblicklich herrschenden Geschwindigkeit, dieselbe ist vielmehr allein bestimmt durch die drei vorgeschriebenen Größen α , β , γ , welche sich als die Componenten von κ herausstellen. Die Componenten der Beschleunigung sind die Beschleunigungen der Coordinaten. Wir haben hiermit die wichtige Erkenntnis gewonnen, daß der eingeführte Begriff Beschleunigung eine gerichtete Größe ist, daß dieselbe nach den Gesetzen der geometrischen Addition aus Componenten verschiedener Richtung zusammengesetzt gedacht werden kann. In der Ausdrucksweise der geometrischen Summe werden die 4 Gleichungen (8) und (8a) ersetzt durch folgende einzige Aussage:

$$\kappa = \alpha + \beta + \gamma, \quad (8b)$$

welche noch allgemeiner ist, als jene Angaben, indem nicht verlangt wird, daß α , β , γ senkrecht auf einander stehende Vektoren sind.

§ 7. Andere Zerlegung der Beschleunigung.

Mitunter ist es übersichtlicher, die Beschleunigung nicht aus den drei Componenten in festen Axenrichtungen zusammengesetzt zu denken, sondern eine Zerlegung vorzunehmen, bei welcher die eine Componente in die Richtung der Bahn fällt, während die andere eine bestimmte darauf senkrechte Richtung besitzt.

Wir wollen zu dieser Bildungsart der Beschleunigung auf einem vom vorigen Paragraphen unabhängigen Wege gelangen, indessen aber doch die gleichen Begriffe durch dieselben Buchstaben bezeichnen.

Der betrachtete materielle Punkt habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit q_0 und nach Verlauf der sehr kurzen Zeit t die Geschwindigkeit q . Die vorausgesetzte Differenzirbarkeit der Geschwindigkeit fordert alsdann, daß sowohl die Größendifferenz $(q - q_0)$, als

auch die Richtungsdivergenz, d. h. der Winkel, welcher entsteht, wenn man q_0 und q vom selben Punkte aus angesetzt denkt, und den wir durch (q, q_0) bezeichnen wollen, daß diese beiden Veränderungen zur verstrichenen Zeit t in je einem Verhältniß stehen, welches bei verschwindender Kürze der Zeit t einen festen Grenzwert annimmt. Nennen wir diesen Grenzwert bei der Größenänderung η , bei der Richtungsänderung ω , so können wir die Forderung der Differenzierbarkeit durch folgende beide Gleichungen ausdrücken:

$$q - q_0 = \eta \cdot t \quad (9)$$

$$(q, q_0) = \omega \cdot t \quad (9a)$$

in denen t nur verschwindend klein sein darf, welche also unter Voraussetzung endlicher fester Werthe von η und ω auch auf der linken Seite nur verschwindend kleine Größen enthalten. Begrifflich definiert, stellt η die Aenderungsgeschwindigkeit der Weggeschwindigkeit, oder kürzer die Wegbeschleunigung dar, während ω die Aenderungsgeschwindigkeit der Richtung der Bahn oder kurz die Winkelgeschwindigkeit mißt. Die gerichteten Größen q_0 und q können wir uns durch Strecken im Raume versinnlichen. Wenn wir dieselben von demselben Ausgangspunkt aus ansetzen, so bestimmen dieselben ein in einer gewissen Ebene liegendes Dreieck, welches wir näher betrachten wollen: Es sei in Fig. 1 die Strecke von A bis B der Repräsentant von q_0 , diejenige von A bis C bezeichne q . Dann ist der Winkel $CAB = (q, q_0)$. Durch diese drei Stücke ist das Dreieck bestimmt. Die dritte Seite von B bis C wollen wir q' nennen; dieselbe repräsentirt die im vorigen Paragraphen eingeführte Zusatzgeschwindigkeit, denn AC ist die geometrische Summe von AB und BC . Den Außenwinkel bei B , welcher den Richtungsunterschied von q' gegen q_0 mißt, wollen wir mit dem Buchstaben $\mathcal{S}$ bezeichnen.



Fig. 1.

Eine bekannte trigonometrische Formel drückt das Quadrat der Seite BC durch die beiden anderen Seiten und den gegenüberliegenden Winkel aus, und liefert dadurch die Gleichung:

$$q'^2 = q_0^2 + q^2 - 2q_0 q \cdot \cos(q, q_0),$$

welche nach einer einfachen goniometrischen Umformung auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$q'^2 = (q - q_0)^2 + 4q_0 q \cdot \sin^2 \frac{(q, q_0)}{2}.$$

Wegen der verschwindenden Kleinheit des Winkels (q, q_0) können wir den Sinus desselben durch den Arcus selbst ersetzen, auch können wir das Product $q_0 \cdot q$ durch den nur verschwindend wenig davon verschiedenen Ausdruck q_0^2 oder q^2 ersetzen und erhalten, nach Ausziehung der Quadratwurzel, für q' selbst den Ausdruck:

$$q' = \sqrt{(q - q_0)^2 + q^2 \cdot (q, q_0)^2}.$$

Wenn wir nun unter der Wurzel die durch die Gleichungen (9) und (9a) gegebenen Werthe von $(q - q_0)$ und (q, q_0) einsetzen, so bekommen wir:

$$q' = (\sqrt{\eta^2 + q^2 \omega^2}) \cdot t \quad (10)$$

Die Quadratwurzel dieses letzten Ausdrucks besteht nur aus den vorgeschriebenen Constanten η und ω und aus der während des betrachteten Zeittheilchens herrschenden Geschwindigkeit q , ist also eine feste Gröfse, welche wir bezeichnen wollen:

$$\sqrt{\eta^2 + q^2 \omega^2} = \kappa; \quad (10a)$$

dieselbe ist unabhängig von der Gröfse des kleinen Zeitintervalles, deshalb stellt sich die Zusatzgeschwindigkeit q' als proportional der verstrichenen Zeit t heraus. Dieses κ ist die Beschleunigung des Massenpunktes. Ihre Richtung ist die Richtung von q' , bildet also mit q_0 oder dem nur verschwindend anders gerichteten q den vorher mit ϑ bezeichneten Winkel. Ueber diesen Winkel ϑ sagt der sogenannte Sinussatz aus, dafs:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin (q, q_0)} = \frac{q}{q'}$$

ist. Da aber $\sin (q, q_0) = (q, q_0) = \omega \cdot t$ ist, und q' aus Gleichung (10) entnommen werden kann, ergibt sich:

$$\sin \vartheta = \frac{q \omega}{\sqrt{\eta^2 + q^2 \omega^2}} = \frac{q \cdot \omega}{\kappa} \quad (11)$$

ein Ausdruck, der, wie leicht zu sehen, stets einen echten Bruch darstellt, mithin auch immer einen reellen Winkel ϑ liefert. Die Richtung der Beschleunigung κ ist also auch unabhängig von t und durch die vorgeschriebenen Constanten bestimmt. Aus Gleichung (11) folgt unmittelbar:

$$\cos \vartheta = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + q^2 \omega^2}} = \frac{\eta}{\kappa}, \quad (11a)$$

und wir können nun κ zerlegen in eine Componente in Richtung der Bahn und eine zweite senkrecht auf der Bahn. Dieselben findet man folgendermaßen:

$$\text{In der Bahn: } \kappa \cdot \cos \vartheta = \eta \quad (12)$$

$$\text{Quer: } \kappa \cdot \sin \vartheta = q \cdot \omega \quad (13)$$

Die erstere wird also direkt gleich der durch Gleichung (9) eingeführten GröÙe η und mißt die Wegbeschleunigung, deren Existenz eine Veränderung der GröÙe oder Intensität der Geschwindigkeit anzeigt. Die senkrecht auf der Bahn stehende Componente ist dagegen von η ganz unabhängig und wird bestimmt durch das Product der Weggeschwindigkeit q und der Winkelgeschwindigkeit ω , welche letztere nur vorhanden ist, wenn die Richtung der Bewegung sich ändert, wenn also die Bahn gekrümmt ist. Man kann alsdann durch Einführung des Krümmungsradius dieser Beschleunigungscomponente eine andere Form der Darstellung geben. Der Krümmungsradius, den ein Längenelement einer Raumcurve besitzt, liegt in der Krümmungsebene dieses Bogenstückes, normal auf dem letzteren nach der concaven Seite hin. Dieselbe Richtung hat aber auch die in Rede stehende Beschleunigungscomponente, denn die Ebene, in welcher das in Fig. 1 betrachtete Dreieck liegt, ist, wie man leicht sieht, die Krümmungsebene. Nennen wir den Krümmungsradius ρ , so ist der von dem Massenpunkt in der oben betrachteten sehr kurzen Zeit t zurückgelegte Weg, durch den Winkel (q, q_0) ausgedrückt, gleich $\rho \cdot (q, q_0)$ oder gleich $\rho \cdot \omega \cdot t$, andererseits kann man diesen Weg auch aus der herrschenden Geschwindigkeit q berechnen gleich $q \cdot t$. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für den Weg liefert, nach Hebung des in beiden Fällen gleichen t , folgende Beziehung:

$$q = \rho \cdot \omega,$$

durch welche man die Gleichung (13) auch in folgenden beiden Gestalten hinstellen kann:

$$\kappa \sin \vartheta = \rho \omega^2 \quad (13a)$$

$$\kappa \sin \vartheta = \frac{1}{\rho} \cdot q^2 \quad (13b)$$

Da diese Art von Beschleunigung nur bei gekrümmter Bahn vorkommt, und dann stets nach dem Centrum der Krümmung hin gerichtet ist, wollen wir dieselbe als Centralbeschleunigung bezeichnen. Dieselbe wird später ihre Rolle spielen bei der Erklärung der sogenannten Centrifugalkraft.

Specielle Fälle der durch die angesetzten Gleichungen (9) und (9a) bedingten Bewegungsverhältnisse treten ein, wenn ω oder η gleich Null sind. Wenn $\omega = 0$ ist, haben wir eine geradlinige Bahn, $\kappa = \eta$ ist die Beschleunigung, deren Richtung mit derjenigen von q zusammenfällt, da $\vartheta = 0$ wird. Im zweiten Falle dagegen, wenn $\eta = 0$ ist, haben wir eine unveränderte Weggeschwindigkeit, die Beschleunigung wird $\kappa = q \cdot \omega$ und steht wegen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ senkrecht auf der Bahn, welche nach derselben Seite ihre concave Krümmung zeigt. Ist ω für längere Zeit eine constante GröÙe, so bleibt auch der Krümmungsradius ρ constant, der Punkt bewegt sich dann mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Kreisbahn.

Man kann dieses wichtige Resultat, daÙ eine krummlinige Bahn auch bei unveränderter Weggeschwindigkeit eine quengerichtete Beschleunigung involvrt, auch aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition herleiten, nämlich, daÙ die Componente der Beschleunigung in einer bestimmten Richtung gleich ist dem zweiten Differentialquotienten der in dieser Richtung abgemessenen Coordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Wir stellen uns zu diesem Zwecke die zu einem bestimmten Wegelement gehörige Krümmungsebene vor, in welcher dieses kleine Stück seinen Verlauf nimmt, und legen das Axensystem in der Weise, daÙ die $x - y$ -Ebene mit dieser Krümmungsebene zusammenfällt. Die z -Abmessung des Massenpunktes bleibt dann während des betrachteten kurzen Zeitraumes gleich Null, und wir haben nur die Veränderung von x und y zu betrachten. Die Neigung des Wegelementes oder der Geschwindigkeit q gegen die x -Axe bezeichnen wir durch (q, x) . Dann ist:

$$\operatorname{tg}(q, x) = \frac{dy}{dx}$$

oder, da die Veränderungen von y und x in der Zeit erfolgen:

$$\operatorname{tg}(q, x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dieser Tangens wird sich wegen der Krümmung des Wegelementes während der Zeit t ein wenig ändern. Die Aenderungsgeschwindigkeit desselben ist der Differentialquotient des Tangens nach der Zeit und wir erhalten durch Ausführung dieser Differentiation:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg}(q, x) = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Nun wollen wir das Axenkreuz der x - und y -Axe noch eine besondere Lage in der Krümmungsebene besitzen lassen. Die x -Axe sei nämlich Tangente an den Anfangspunkt des Wegelementes, während die y -Axe ebenfalls durch diesen Punkt geht und nach der concaven Seite zeigt, also mit der Richtung des Radius übereinstimmt. Der Winkel (q, x) ist dann zu Anfang gleich Null und erreicht am Schlufs dieses Wegelementes in Folge von dessen Krümmung nur den kleinen Betrag, den wir in der vorhergehenden Betrachtung durch (q, q_0) bezeichnet hatten. Jedenfalls können wir den Tangens dieses kleinen Winkels mit dem Arcus selbst identificiren, und der Differentialquotient desselben stellt direct die Winkelgeschwindigkeit ω dar, was sich durch Differentiation der Gleichung (9a) direct ergibt.

Von den auf der rechten Seite vorkommenden Gröfsen wird bei dieser besonderen Lage der Axen $\frac{dy}{dt} = 0$, während $\frac{dx}{dt}$ die herrschende Geschwindigkeit q bezeichnet. Dadurch nimmt die letzte Gleichung die einfachere Gestalt an:

$$\omega = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{q},$$

oder

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = q \cdot \omega.$$

Da nun y die Abmessung senkrecht auf der Bahn ist, so giebt dessen zweiter Differentialquotient die in diese Richtung fallende Componente der Beschleunigung, also die Centralbeschleunigung, deren Betrag $q \cdot \omega$ denn auch in Uebereinstimmung mit der Gleichung (13) gefunden wird.