universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus

in zwei Bänden

Maxwell, James Clerk

1883

Erster Teil. Electrostatik

urn:nbn:at:at-ubi:2-6770

ERSTER TEIL.

Electrostatik.

Cap. I.

Beschreibung der electrischen Erscheinungen.

—×—

Electrisirung durch Reibung.

27. Experiment I*). Reibt man zwei vollkommen electricitätsfreie Stücke von Glas und Harz gegeneinander und lässt sie zunächst mit ihren Reibungsflächen in gegenseitiger Berührung, so bemerkt man noch keine electrische Eigenschaft an ihnen. So wie man sie aber von einander trennt, ziehen sie sich an.

Führt man dieselbe Operation bei zwei andern Stücken von Glas und Harz aus und hängt sie getrennt in der Nähe der beiden ersten Stücke auf, so treten die folgenden Erscheinungen zu Tage:

1) Die beiden Glasstücke stossen einander ab.
2) Jedes Glasstück zieht jedes der beiden Harzstücke an.
3) Die beiden Harzstücke stossen sich gegenseitig ab.

Man bezeichnet die nach den angegebenen Operationen auftretenden Phänomene der Anziehung und Abstossung als *Electrische Erscheinungen*, und betrachtet die betreffenden Körper als *Electrisch* oder *mit Electricität geladen*.

Doch kann man einen Körper ausser durch Reibung gegen einen andern auch noch durch sehr viele andere Manipulationen electrisiren.

Da Glas die Körper anzieht, welche Harz abstösst, und die abstösst, welche dieses anzieht, so verhält sich ein Glasstück ähnlich wie ein anderes Glasstück, aber entgegengesetzt wie ein Harzstück.

Ein Körper ist mit *Glaselectricität* geladen, wenn er unabhängig von der Operation durch die er electrisirt ist, Glas abstösst und Harz anzieht. Ein Körper ist dagegen mit *Harzelectricität* geladen, wenn er Harz abstösst und Glas anzieht.

---

*) William Thomson, *On the Mathematical Theory of Electricity.* Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1848 März.

Andere Arten der Electricität als die beiden eben genannten giebt es nicht, denn man findet, dass das electrische Verhalten aller Körper entweder dem des Glases oder dem des Harzes entspricht.

Wissenschaftlich bezeichnet man die Glaselectricität als *Positive Electricität* und die Harzelectricität als *Negative Electricität*. Das entgegengesetzte Verhalten der beiden Electricitätsarten rechtfertigt auch vollkommen diese beiden Gegensätze ausdrückenden Bezeichnungen, doch beruht es selbstverständlich auf Willkür, wenn wir gerade die Glaselectricität positiv nennen, wie ja auch in der analystischen Geometrie nach Rechts verlaufende Strecken rein conventionell positiv heissen.

Zwischen einem electrisirten und einem nichtelectrisirten Körper kann man keine Kraftwirkung, weder eine Anziehung noch eine Abstossung bemerken. Wo man dennoch eine solche Wirkung zwischen electrisirten und ursprünglich nichtelectrisirten Körpern findet, da sind die letztern durch *Induction* oder *Influenz* electrisch geworden.

Electrisirung durch Induction oder Influenz.

28. Experiment II*). Man hängt ein Metallgefäss an Fäden von weisser Seide auf und bringt an seinem Deckel ebensolche Fäden an, um ihn, ohne das Gefäss zu berühren, leicht abnehmen und aufsetzen zu können. Hängt man an die untere Seite des Deckels mit Seidenfäden ein in der oben angegebenen Weise electrisirtes Glasstück, und setzt den Deckel vorsichtig auf das ursprünglich electricitätsfreie Gefäss, so dass das Glas nirgend die Metallwand desselben berührt, so zeigt sich die Aussenseite des Gefässes mit Glaselectricität geladen, und es lässt sich nachweisen, dass diese Electrisirung des Gefässes unabhängig von der Lage, die das Glasstück in seinem Innern einnimmt, ist. So wie man das Glasstück ohne das Gefäss zu berühren herausnimmt, verschwindet die Electricität der Aussenseite des Gefässes, das Glas dagegen befindet sich in demselben electrischen Zustande wie zuvor.

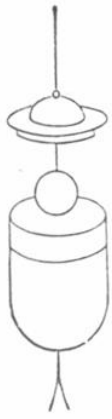


Fig. 4.

Diese Art der Electrisirung, die direct von der Gegenwart des Glases in dem Gefässe abhängt und aufhört, wenn das Glas entfernt ist, wird als Electrisirung durch *Induction* oder *Influenz* bezeichnet.

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn das Glasstück aussen neben das Gefäss aufgehängt wird, doch wird dabei ein Teil der Aussenseite des Gefässes mit Glaselectricität ein anderer mit Harzelectricität geladen, während im vorigen Fall, wo das Glasstück sich in dem Innern des Gefässes befand, die Glaselectricität die ganze Aussenseite bedeckte, und die Harzelectricität die ganze innere Seite des Gefässes einnahm.

*) Dieses und noch manches der folgenden Experimente verdankt man Faraday. *On Static Electrical Inductive Action*. Phil. Mag. 1843 oder Exp. Res. vol. II. pag. 279.

Electrisirung durch Leitung.

29. Experiment III. Wir electrisiren das Metallgefäss wie in dem letzten Versuche durch Induction, hängen in seine Nähe ein anderes Metallgefäss an Seidenfäden auf und verbinden beide Gefässe durch einen Metalldraht mit einander.

Dadurch erreichen wir, dass auch das zweite Gefäss sich mit Glaselectricität ladet, und dass die Glaselectricität des ersten sich vermindert.

Der Draht bildet also die Brücke für den Uebergang des electrischen Zustandes von dem einen Gefäss zu dem andern und heisst demgemäss ein *Leiter* oder *Conductor* der Electricität.

Das zweite Gefäss aber ist durch *Leitung* geladen.

Leiter und Nichtleiter oder Conductoren und Isolatoren.

Experiment IV. Hätten wir die beiden Gefässe statt durch einen Draht mit Hilfe eines Glasstabes, einer Harzstange oder eines Fadens von weisser Seide verbunden, so würde keine Hinüberleitung von Electricität von dem einen zu dem andern stattgefunden haben. Man nennt deshalb diese Körper *Nichtleiter* oder, weil man sich ihrer bei electrischen Experimenten bedient, um Körper so aufzustellen oder aufzuhängen, dass sie ihre Electricität bewahren, *Isolatoren*.

Metalle sind gute Leiter; Luft, Glas, Guttapercha, Harz, Kautschuk, Paraffin u. s. f. gute Isolatoren. Wir werden aber später sehen, dass einerseits alle Körper dem Durchgange der Electricität einen gewissen Widerstand entgegensetzen, und andererseits auch alle, wenn auch in sehr verschiedenem Grade, sie fortleiten. Die genauere Untersuchung über diese Verhältnisse können wir erst bei der Lehre von der Bewegung der Electricität durchführen. Für jetzt teilen wir alle Körper nur in zwei Klassen ein, in gute Leiter oder Conductoren und in gute Nichtleiter oder Isolatoren.

Wir haben eben bemerkt, dass Luft zu den Nichtleitern gehört, und doch zeigte das zweite Experiment, dass das Metallgefäss sich mit Electricität lud, trotzdem es von dem Glasstücke durch die Luft getrennt war. Faraday hat solche Körper, welche den electrischen Zustand von Ort zu Ort fortpflanzen, ohne doch die Electricität zu leiten, *Dielectrica* oder *Dielectrische Medien* genannt. Der Process der bei dieser Art der Verteilung der Electricität sich abspielt, heisst Induction oder Influenz.

Ladung.

Beim dritten Experiment haben wir mit Hilfe eines Drahtes Glaselectricität vom ersten Gefäss auf das zweite übergeführt. Entfernen wir nunmehr den Draht, nehmen das electrische Glasstück aus dem ersten Gefässe heraus und bringen es möglichst weit von demselben fort, so behält

das zweite Gefäss noch weiter seine Glaselectricität, das erste aber findet sich mit Harzelectricität geladen. Verbinden wir jetzt wieder beide Körper durch den Draht, so tritt durch denselben eine Leitung beider Electricitätsarten ein, und die Gefässe werden unelectrisch. Daraus folgt aber, dass sie zuletzt gleich stark und mit entgegengesetzten Electricitäten geladen gewesen sind.

30. Experiment V. Wir haben ferner beim zweiten Versuche gesehen, dass wenn man ein durch Reibung mit einem Harzstück electrisirtes Glasstück in ein Metallgefäss hineinhängt, die Electrisirung der Aussenseite des Gefässes unabhängig von dem Orte ist, an welchem das Glasstück sich in dem Innern befindet. Führen wir nun auch das Harzstück, mit dem wir das Glas gerieben haben, in das Gefäss ein ohne dieses oder das Glas zu berühren, so erweist sich die Aussenseite des Gefässes als unelectrisch. Das Gefäss wird also durch das Harzstück ebenso stark, aber entgegengesetzt electrisirt wie durch das Glasstück.

Hängen wir eine beliebige Anzahl von electrisirten Körpern in das Gefäss hinein, so werden wir immer die Electrisirung seiner Aussenseite gleich der algebraischen Summe der Electrisirungen aller Körper finden, wenn wir unserer früheren Festsetzung gemäss eine Ladung mit Harzelectricität als eine negative ansehen. Wir erlangen so eine praktische Methode, die electrischen Wirkungen einer Reihe von Körpern zu summiren, ohne ihre bezüglichen Ladungen ändern zu müssen.

31. Experiment VI. Wir isoliren die beiden Gefässe A und B, die uns in dem dritten Experiment gedient haben, bringen in A das Glasstück, in B das Harzstück und verbinden die Gefässe mit einander durch einen Metalldraht. Es verschwindet dann jede Spur von Electricität an den Gefässen. Entfernen wir den Draht und ziehen die Stücke Glas und Harz aus den Gefässen ohne sie zu berühren heraus, so finden wir A mit Harzelectricität und B mit Glaselectricität geladen.

Bringt man dann das Gefäss A und das Glasstück oder das Gefäss B und das Harzstück in ein anderes weiteres Gefäss C ohne dasselbe zu berühren, so bemerkt man, dass die Aussenseite von C unelectrisch bleibt. Daraus folgt, dass die jetzige Electrisirung von A genau gleich und entgegengesetzt der des Glasstückes und dass die von B genau gleich und entgegengesetzt der des Harzstückes ist. Wir haben so die Möglichkeit erlangt irgend ein Gefäss mit Electricität zu laden, die an Menge gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der eines andern Körpers ist, ohne die Electrisirung des letztern ändern zu müssen. Nach derselben Methode lassen sich auch eine Reihe von Gefässen mit ein und derselben Menge Electricität irgend einer Art laden, die wir dann als provisorische Masseinheit benutzen können.

32. Experiment VII. Wir laden das Gefäss B mit einer Einheit positiver Electricität und bringen es in das isolirte Gefäss C ohne dasselbe

zu berühren. Die Aussenseite des letztern erhält dadurch ganz so wie in dem zweiten Experiment eine positive Ladung. Diese Ladung ändert sich auch nicht, wenn wir die Innenseite des Gefässes C mit dem Gefässe B in Berührung bringen. Nehmen wir aber nunmehr das letztere heraus, so zeigt es sich, dass es jede Spur von Electricität verloren hat, wohingegen das Gefäss C eine Einheit positiver Electricität, also alles, was dem Gefäss B angehört hat, besitzt. Wir haben also die Ladung des einen Körpers auf einen andern übertragen.

Führen wir dieselbe Operation nochmals aus, laden also B mit einer zweiten Einheit positiver Electricität, bringen es in C, berühren B mit C und nehmen B wieder fort, so wird B wieder unelectrisch, C aber hat eine zweimal so grosse Ladung wie früher.

Wir können den Process beliebig oft wiederholen, ohne etwas anderes zu finden, als dass B seine Ladung stets vollständig an C abgiebt, wie es auch electrisirt sein mag und wie hoch auch schon die Ladung von C ist, wofern nur B zuerst vollständig in C ohne dasselbe zu berühren hineingesenkt, dann mit C zur Berührung gebracht und endlich ohne C zu berühren wieder herausgenommen wird.

Wir werden später in der practischen Durchführbarkeit dieser Methode, einen Körper mit einer beliebigen Anzahl von electrischen Einheiten zu laden, den untrüglichsten Beweis für die Richtigkeit der jetzigen mathematischen Theorie der Electricität finden.

33. Ehe wir zu einer genauen Untersuchung der Gesetze übergehen, nach welchen die electrische Kraft wirkt, wollen wir nochmals die eruirten Tatsachen kurz zusammenfassen.

Bringen wir ein System irgend wie electrisirter Körper in ein isolirtes leitendes Gefäss, so lehrt eine Untersuchung der Electricität der Aussenseite des Gefässes unmittelbar den Gesammtcharakter der Electricität des in seinem Innern befindlichen Systems kennen, ohne dass wir die Electritätsarten der verschiedenen Körper mit einander in Verbindung zu setzen brauchen.

Die Art der Electrisirung der Aussenseite des Gefässes lässt sich aber mit grosser Präcision bestimmen, wenn man dieselbe mit einem Electroskop verbindet.

Als solches Electroskop können wir einen Streifen Blattgold benutzen, welcher zwischen zwei gleich und entgegengesetzt geladenen Kugeln hängt. Wird der Goldstreifen electrisirt, so neigt er sich der Kugel zu, die ihm entgegengesetzt geladen ist. Indem man die Kugeln stark ladet und dem Blattgold eine möglichst hindernisfreie Aufhängung giebt, kann man so die minimalsten Spuren von Electricität auf dem Streifen entdecken und dem Zeichen nach bestimmen.

Wir werden freilich später bei der Beschreibung der Electrometer und Condensatoren noch weit delicatere Methoden zur Entdeckung von Electricität und zur Verification unseres Satzes kennen lernen, einstweilen aber

benutzen wir noch zur Prüfung des electrischen Zustandes des Gefässes ein Blattgold-Electroskop, das wir uns mit ihm in Verbindung gesetzt denken. Hat sich doch Faraday desselben in der angegebenen Weise bei seinen bewunderungswürdigen Untersuchungen über die Gesetze, denen die electrischen Phänomene gehorchen, bedient*).

34. I.) Die Gesammtelectricität eines Körpers oder eines Systems von Körpern ändert sich nur insoweit, als es Electricität an andere Körper abgiebt oder von ihnen empfängt.

Man findet freilich in allen auf Electricität bezüglichen Versuchen, dass die Electrisirung eines Körpers sich mit der Zeit ändert, allein es lässt sich dann auch stets eine mangelhafte Isolation desselben nachweisen. In der Tat verliert auch ein Körper um so weniger von seiner Ladung je besser er isolirt ist, und man darf annehmen, dass jeder Körper seine Electricität ungeschmälert behalten würde, wenn man ihn in ein vollkommen nichtleitendes Medium bringen könnte.

II.) Wird ein Körper durch Leitung von einem andern electrisirt, so ist die Ladung beider Körper zusammen gleich der früher von dem einen Körper allein innegehabten Electricitätsmenge; der eine Körper verliert soviel an positiver und gewinnt soviel an negativer Electricität als der andere an jener gewinnt und an dieser verliert.

Den Beweis für diese Behauptung können wir darin sehen, dass wenn man beide Körper in ein Metallgefäss bringt, die Herstellung einer leitenden Verbindung zwischen ihnen keine Aenderung in der Electrisirung der Aussenseite des Gefässes verursacht.

III.) Bei jeder Electricitätserregung durch Reibung oder durch irgend eine andere Operation tritt ebensoviel positive als negative Electricität auf.

Dieser Satz lässt sich dadurch beweisen, dass man entweder die ganze erregte Electricität auf ihren Trägern in ein Metallgefäss bringt, oder überhaupt die Electrisirung in diesem Gefässe vornimmt. Immer wird das Electroskop anzeigen, dass die Summe der auf der Aussenseite des Gefässes erregten Electricitäten Null ist.

Die electrische Erregung eines Körpers oder seine Electricitätsmenge ist daher eine physikalische der Messung zugängliche Grösse, so dass das Resultat der Addition mehrerer Electrisirungen ganz dem Ergebnis einer algebraischen Summation der einzelnen Electrisirungen entspricht. Demnach sind wir auch berechtigt Ausdrücke einzuführen, die die Electrisirung eines Körpers nicht blos als Qualität, sondern auch als Quantität charakterisiren, so dass ein electrisirter Körper als „geladen mit einer gewissen Menge positiver oder negativer Electricität“ erscheint.

35. Indem wir aber die Electricität in die Klasse der messbaren Grössen bringen, dürfen wir natürlich nicht übereilt jetzt schon sagen, was sie

*) *On Static Electrical Inductive Action* Phil. Mag. 1843 oder *Exp. Res.* vol. II p. 249.

eigentlich ihrer Natur nach ist oder nicht ist, ob sie eine Substanz oder eine Energie oder sonst eine der bekannten physikalischen Quantitäten vorstellt. Alle bisher angeführten Erfahrungen zeigen nur, dass Electricität weder geschaffen noch vernichtet werden kann, so dass die Gesammtelectricität eines durch eine Fläche eingeschlossenen Körpersystems nur dadurch zu vermehren oder zu vermindern ist, dass man Electricität durch die Fläche einströmen bezüglich herausfliessen lässt.

Genau dasselbe gilt auch für Materie und findet in der Hydrodynamik z. B. seinen Ausdruck in der sogenannten Continuitätsgleichung.

Es gilt aber nicht für die Wärme, da diese innerhalb der Fläche selbst durch Verwandlung von Energie einer andern Art in Wärme oder von Wärme in Energie anderer Art vermehrt bezüglich vermindert werden kann.

Lassen wir zwischen Körpern eine Wirkung in die Ferne zu, so gilt jener Satz nicht einmal für die Energie in ihrer allgemeinsten Bedeutung, denn dann kann ein Körper innerhalb einer Fläche mit einem ausserhalb befindlichen Energie austauschen, ohne dass dieser je sich in der Fläche selbst noch so kurze Zeit befunden zu haben braucht. Sobald wir jedoch die Wirkung in die Ferne als nur scheinbar zu betrachten und jede Wirkung zwischen zwei Körpern auf Actionen, die zwischen den kleinsten Teilchen eines Zwischenmediums vor sich gehen, zurückzuführen im Stande sein werden, dann ist es wol möglich, dass wir mit Hilfe einer klaren Vorstellung von den intermediären Vorgängen bei allen Aenderungen, welche Energie innerhalb einer Fläche erleidet, den Durchgang der Energie durch dieselbe werden verfolgen können.

Auch noch aus andern Gründen können wir die Electricität, als physikalische Grösse synonym mit der Electrisirung eines Körpers, nicht wie die Wärme als eine Form der Energie betrachten. Ein electrisirtes System hat allerdings eine gewisse Summe von Energie, aber diese Energie wird dadurch berechnet, dass man die Electricitätsmenge jedes Teiles des Systems mit dem ihm zugehörigen Potential, das selbst eine andere physikalische Grösse bildet, multiplicirt und von der Summe der so erhaltenen Producte die Hälfte nimmt. Die Energie entspricht also hier dem Producte der beiden physikalischen Grössen „Electricität“ und „Potential“, und deshalb können Electricität und Energie unmöglich Grössen derselben Art sein. Electricität ist eben nur einer der beiden Factoren der Energie, der zweite Factor ist das Potential.

Uebrigens tritt die Energie nicht blos in der Electricitätslehre als das Product zweier Factoren auf. So ist sie z. B. auch noch gleich

Einer Kraft $\times$ der Entfernung, durch die die Kraft wirkt.
Einer Masse $\times$ der Schwere, die diese längs einer gewissen Fallhöhe angreift.
Einer Masse $\times$ dem halben Quadrate ihrer Geschwindigkeit.
Einem Drucke $\times$ dem Volumen einer Flüssigkeit, die unter diesem Drucke in ein Gefäss einströmt.

Einer chemischen Verwandschaft $\asymp$ einer chemischen Veränderung, gemessen durch die Zahl der electrochemischen Aequivalente, welche in die Verbindung eintritt.

Wir könnten aber aus dem Begriffe der Energie, falls wir je auch für das electrische Potential eine mechanische Vorstellung gewinnen sollten, die physikalische Kategorie aufsuchen, in welche wir die Electricität zu versetzen haben.

36. Die meisten Theorieen behandeln die Electricität als eine Substanz. Da aber einerseits offenbar zwei Arten von Electricität existiren, die in ihrer Combination sich gegenseitig vernichten, und andererseits zwei Stoffe, die sich zu Nichts zusammensetzen, nicht denkbar sind, so hat man sich gezwungen gesehen, zwischen freier und gebundener Electricität zu unterscheiden.

Hypothese der Zwei Fluida.

In der Hypothese der zwei Fluida nimmt man an, dass jeder Körper in seinem unelectrischen Zustand mit gleichen Mengen positiver und negativer Electricität geladen ist. Dabei sollen diese Mengen so gross sein, dass kein Electrisirungsprocess bis jetzt einen Körper gänzlich einer Electricitätsart hat berauben können. Die Electrisirung eines Körpers besteht dann nach dieser Hypothese in der Uebertragung einer gewissen Menge P positiver Electricität von einem Körper A auf einen andern Körper B, oder einer gewissen Menge N negativer Electricität von B nach A, oder auch in einer Combination beider Processe.

Es hat also A nach der Electrisirung $P + N$ Einheiten negativer Electricität mehr im Verhältnis zu der ihm noch gebliebenen positiven Electricität. Letztere denkt man sich mit einer gleichen Menge negativer Electricität verbunden und bezeichnet sie zusammen mit dieser als *Gebundene* oder *Latente Electricität*. $P + N$ aber heisst die *Freie Electricität* des Körpers A.

Da die beiden Electricitätsarten nach dieser Theorie von einem Körper zu einem andern übergeführt werden können und zudem in Leitern eine ausserordentliche Beweglichkeit zeigen, so bezeichnet man sie meistenteils als *Fluida*. Aber abgesehen von der Beweglichkeit schreiben ihnen diejenigen, welche die Theorie nach ihrer mathematischen Seite verfolgen, fast keine einzige der sonstigen Eigenschaften der Flüssigkeiten zu, also weder Trägheit, noch Gewicht, noch Elasticität. Das Wort Fluidum hat jedoch viele, und unter ihnen auch Gelehrte, welche wenig an naturphilosophisches Denken gewöhnt waren, anzunehmen verleitet, dass es ganz unentbehrlich für den Ausbau der ihnen fasslich scheinenden Theorie sei.

Wir werden später sehen, dass die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes gerade von denen am meisten gefördert worden ist, welche sich der Terminologie der Theorie von zwei Fluidis bedienten. Ihre Resultate sind aber unabhängig von jener Hypothese, weil sie aus Daten erhalten sind, die jederzeit durch das Experiment verificirt werden können, also keinen Zweifel an ihrer Richtigkeit zulassen. Deshalb ist auch die Bestätigung der mathematischen Resultate durch die Erfahrung kein Prüfstein für die Richtigkeit der speciellen Lehren jener Theorie, aber auch keiner gegen dieselbe.

Die Einführung der beiden Fluida gestattet uns die negative Electrisirung von A und die positive Electrisirung von B in dreifacher Weise mit demselben Endresultat zu erreichen. Früher haben wir sie dadurch zu Stande gebracht, dass wir P Einheiten positiver Electricität von A nach B und N Einheiten negativer Electricität von B nach A übergeführt haben. Bringen wir jetzt $P+N$ Einheiten positiver Electricität von A nach B, oder $P+N$ Einheiten negativer Electricität von B nach A, so müssen offenbar A und B ebensoviel freie Electricität erhalten, wie nach der zuerst angegebenen Operation, aber die in A gebundene Electricitätsmenge ist im zweiten Fall kleiner und im dritten grösser, als sie im ersten war.

Demnach würde man nach dieser Theorie nicht blos die freie Electricität eines Körpers, sondern auch seine gebundene ändern können. Bis jetzt hat man noch keine besonderen Eigenschaften an einem Körper, wenn sein Inhalt an gebundener Electricität geändert wurde, in Erscheinung treten sehen. Wir müssen daher schliessen, dass entweder die gebundene Electricität überhaupt keine Eigenschaften besitzt, oder dass ihre Menge in einem Körper nicht verändert werden kann. Die erste dieser Alternativen bietet den Mathematikern weiter keine Schwierigkeiten, denn da diese den Fluidis keine andern Eigenschaften zuschreiben, als die der Attraction und Repulsion, so müssen sich die beiden Electricitätsarten, wenn sie sich binden, in ihren Wirkungen aufheben und so jeder Beobachtung entgehen. Wer jedoch mit dem Worte Fluidum substantielle Eigenschaften verbinden zu müssen glaubt, dem wird es immer undenkbar bleiben, dass die Combinirung der zwei Fluida sie gänzlich jeder Eigenschaft berauben sollte, so dass sie weder das Gewicht, noch die Masse, noch sonst eine Qualität des Körpers, in dem sie sich befinden, zu ändern vermögen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, haben daher einige angenommen, dass jede Electrisirung in einem Transport genau gleicher Quantitäten der beiden Fluida nach entgegengesetzten Richtungen bestehe, so dass die absolute Summe der beiden Fluida in einem Körper sich stets gleich bliebe. Durch dieses neue Gesetz retten sie zwar den Schein, vergessen aber vollständig, dass sie es sehr wol entbehren könnten, wenn sie nicht darauf ausgingen, die zwei Fluida auf alle Fälle mit den Tatsachen in Einklang zu bringen und ihre Theorie davor zu bewahren, Phänomene vorauszusagen, die in der Tat nicht existiren.

Hypothese von Einem Fluidum.

37. Die Hypothese von einem Fluidum unterscheidet sich von der der zwei Fluida eigentlich nur dadurch, dass sie für das eine Fluidum der letztern, im allgemeinen für das negative, alle Eigenschaften der gewöhnlichen Materie vindicirt, und nur das zweite, das positive, als electrisches Fluidum bezeichnet.

Die Teilchen dieses Fluidums sollen sich untereinander im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung abstossen, dagegen die Teilchen des Körpers, in dem sie sich befinden, nach demselben Gesetze anziehen. Aehnlich sollen die Teilchen der Materie gegen einander eine Abstossung und gegen das electrische Fluidum eine Anziehung ausüben. Doch nimmt man an, dass die Attraction zwischen Einheiten der Materie und Electricität etwas grösser ist, als die gegenseitige Repulsion gleicher Einheiten von Materie bezüglich Electricität. Eine Einheit Materie in Verbindung mit einer Einheit Electricität soll also eine entsprechende Combination anziehen. Die Kraft der Attraction zwischen Combinationen von Electricität und Materie wird aber als sehr gering gegen die der Attraction freier Electricität gegen freie Materie betrachtet. Sie soll übrigens dazu dienen, die allgemeine Gravitation zu erklären.

Enthält ein Körper soviel Fluidum, dass seine Electricität ein ausserhalb befindliches electrisches Partikel ebenso stark abstösst, als seine materiellen Teilchen es anziehen, so heisst er electrisch *Gesättigt*. Enthält er mehr Fluidum, so besitzt er einen Ueberfluss an Electricität und ist *Ueberladen*. Enthält er weniger, so ist er nicht gesättigt oder *Unterladen* und hat ein Deficit an Electricität. Zur Sättigung eines Gramms gewöhnlicher Materie scheint eine grosse Electricitätsmenge zu gehören, denn wenn man ein Gramm Gold, was leicht auszuführen ist, zu einem Blatt von einem qm Flächeninhalt auswalzt, so kann es mindestens eine Ladung von 60000 Einheiten negativer Electricität fassen. Es gehört also sicher noch mehr Electricität dazu, um es zu sättigen.

Diese Theorie lehrt, unähnlich der von den zwei Fluidis, nicht mehr als die Erfahrung bestätigen kann. Sie setzt aber voraus, dass die Dichtigkeit der Electricität so gering ist, dass keine bisher erreichbare Electrisirung die Masse oder das Gewicht eines Körpers zu verändern vermag. Zudem ist sie auch nicht im Stande zu erklären, weshalb gerade die Glaselectrisirung in einem Ueberschuss an Electricität im Verhältnis zur Materie bestehen soll.

Ganz ungerechtfertigt ist aber ein anderer Vorwurf, der dieser Theorie selbst von competenter Seite gemacht worden ist. Man sagte nämlich, dass die Lehre von der Repulsion zweier von Electricität freier materieller Teilchen in directem Gegensatze zu der allgemeinen Erfahrung stehe, dass materielle Teilchen sich im ganzen Universum anziehen, denn nach jener Lehre müsste gerade das Gegenteil stattfinden. Das würde richtig sein, wenn eben die Welt-

körper ganz frei von Electricität wären, denn dann hätten sie die höchste negative Ladung und müsten sich gegenseitig abstossen. Zu einer solchen Annahme liegt aber nicht der geringste Grund vor. Man wird vielmehr mit grösserer Wahrscheinlichkeit voraussetzen dürfen, dass die Erde und alle andern Weltkörper sich in einem unelectrischen Zustande befinden, das heisst ebensoviele Einheiten Electricität als Materie besitzen, ihre gegenseitige Anziehung wird dann, wie wir schon bemerkt haben, durch den Ueberschuss der Attraction ungleichnamiger Substanzen über der Repulsion gleichnamiger verursacht. Inzwischen ist nicht zu leugnen, dass die Einführung dieses Ueberschusses etwas gekünstelt erscheint, und dass sie einen mächtigen Vorwurf gegen die Theorie bildet.

Ich werde in diesem Werke bei Gelegenheit verschiedener Untersuchungen die einzelnen Theorieen in dem Lichte neuer Klassen von Phänomenen, die uns die Electricität bietet, zu prüfen haben. Doch glaube ich meinerseits, dass wir die meiste Aufklärung über die Natur der Electricität aus einem Studium der Vorgänge in dem Raume zwischen den electrisirten Körpern schöpfen werden. Ein derartiges Studium charakterisirt auch die Untersuchungen, die Faraday in seine *Experimental Researches* niedergelegt hat. Demnach habe ich vor, die Resultate, zu denen Faraday, W. Thomson und andere gelangt sind, mit einander zu verbinden und in mathematische Form zu bringen, so dass wir die Erscheinungen, welche durch alle Theorieen ihre Erklärung finden, leicht von denen, welche den einzelnen Hypothesen Schwierigkeiten bereiten, werden trennen können.

Messung der Kraftwirkung zwischen electrisirten Körpern.

38. Ich führe von den zahlreichen Methoden, die Kraft, welche electrisirte Körper auf einander ausüben, zu messen, zunächst die folgende als die wichtigste an. Man tarirt einen Körper auf einer feinen Waage aus und legt unter die Schale, welche diesen Körper enthält, in bekannter Entfernung einen andern Körper hin. Electrisirt man beide Körper, so werden sie sich anziehen oder abstossen, und man muss, um an der Waage das Gleichgewicht wieder herzustellen, zu der Tara Gewichte zulegen oder von ihr wegnehmen.

Drückt man diese Gewichtszulagen oder Abnahmen in dynamischem Mass aus, so erhält man die Grösse der Kraftwirkung zwischen den beiden Körpern. Dieser Methode hat sich zunächst W. Snow Harris bedient, und auf ihr basirt auch das absolute Electrometer, welches W. Thomson angegeben hat, und von dem in Art. 217 weiter die Rede sein wird.

Meist bedient man sich jetzt bei Ausführung dieser Methode statt einer gewöhnlichen Waage der Torsionswaage.

Man bringt an das untere Ende eines oben eingeklemmten Drahtes oder Fadens einen horizontalen Arm an, der um diesen als Axe

schwingen kann. Befestigt man dann den einen Körper an ein Ende des Armes und stellt den andern seitlich von ihm auf, so dreht der tangentiale Teil der electrischen Kraft, welche zwischen den beiden Körpern wirkt, den Arm um die vertikale Axe und tordirt dadurch den Draht oder Faden um einen gewissen Winkel. Aus diesem Torsionswinkel kann man dann die Anziehungs- oder Abstossungskraft berechnen, wenn der Torsionscoefficient des Drahtes und das Trägheitsmoment der Waage bestimmt sind.

Die Torsionswaage ist von Michell zur Bestimmung der Gravitation zwischen kleinen Körpern vorgeschlagen und von Cavendish zu diesem Zwecke verwendet worden.

Coulomb erfand sie dann nochmals unabhängig von jenen Naturforschern und eruirte mit ihrer Hilfe die Gesetze, nach denen die electrischen und magnetischen Kräfte wirken. Seitdem ist sie in allen Untersuchungen, die eine Messung von kleinen Kraftwirkungen erheischten, verwendet worden. Ihre Theorie und Benutzungsweise werde ich in Art. 215 auseinandersetzen.

Abhängigkeit der Kraft von der Höhe der Ladung.

39. Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass uns irgend eine Methode zur Messung electrischer Kräfte zu Gebote steht. Bei der Ausführung einer solchen Messung nehmen wir aber die beiden electrisirten Körper möglichst klein im Verhältnis zu ihrem gegenseitigen Abstand, so dass das Resultat unabhängig von etwaigen Ungleichartigkeiten in der Verteilung der Electricität auf einem der Körper ist. Gleichzeitig entfernen wir alle Körper, auf welche unsere Versuchskörper inducirend wirken könnten.

Wir finden dann durch eine solche Messung, dass zwei Körper, welche mit den bezüglichen Electricitätsmengen e, e', die wir uns in irgend einer Einheit ausgedrückt denken, geladen sind, sich in bestimmter Entfernung mit einer Kraft proportional dem Producte von e und e' abstossen, wenn die Zeichen von e und e' gleich, und anziehen, wenn sie entgegengesetzt sind.

Der erste Körper, A, soll m Einheiten positiver und n Einheiten negativer Electricität besitzen, die wir uns wie in dem Experiment V. von einander getrennt denken können.

Der zweite, B, besitze m' Einheiten positiver Electricität und n' Einheiten negativer.

Jede der m positiven Einheiten in A wird dann jede der m' positiven Einheiten in B mit einer Kraft f abstossen. Der Totaleffect ist also $mm'f$. Dagegen wird sie jede der negativen n' Einheiten mit derselben Kraft anziehen, und das giebt eine Kraftwirkung von der Grösse $mn'f$. Aehnlich werden die n negativen Einheiten in A die m' positiven in B anziehen und die n' negativen abstossen.

Die gesammte zwischen den Körpern wirkende Abstossungskraft ist also $(mm' + nn')f$ und die gesammte Anziehungskraft $(mn' + m'nf.)$

Die Resultante beider Kräfte, die wir uns als Abstossung denken wollen, ist also

$$(mm' + nn' - mn' - m'n)f \text{ oder}$$
$$(m - n)(m' - n')f.$$

Nun ist aber $m - n = e$ der algebraische Wert der Ladung von A und ebenso $m' - n' = e'$ der der Ladung von B, somit wird die resultirende Abstossung gleich $ee'f$, wo wir den e die Zeichen zu verleihen haben, welche ihnen als algebraischen Werten zukommen.

Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung.

40. Haben wir die Abhängigkeit der Kraftwirkung zweier in constanter Entfernung gehaltener Körper von der Höhe ihrer Ladung eruirt, so können wir durch Variation dieser Entfernung und Constanthaltung der Ladung auch die Abhängigkeit der Kraft von dem Abstand, in dem die Körper auf einander wirken, bestimmen.

Nach diesem Princip ausgeführte directe Messungen haben ergeben, dass die Kraftwirkung, gleichgiltig ob sie sich als Anziehung oder Abstossung äussert, im umgekehrten Verhältnis zu dem Quadrate der Entfernung der beiden Körper von einander steht. Bezeichnen wir demnach durch f die Kraft zwischen zwei Einheiten Electricität, wenn sie sich in der Einheit der Entfernung befinden, so ist ihre Wirkung auf einander in dem Abstande r gleich fr^{-2}. Allgemein ist also die Anziehung oder Abstossung zwischen zwei Electricitätsmengen e und e', die auf sehr kleinen Körpern concentrirt sind, gegeben durch

$$fee'r^{-2}.$$

Definition der electrostatischen Electricitätseinheit.

41. Wir sind bis jetzt von einer ganz willkürlichen Electricitätseinheit ausgegangen, indem wir die Electricitätsmenge des Glasstückes, welches wir am Beginn unserer Versuche gerade zur Hand hatten, allen Messungen zu Grunde legten. Das oben entwickelte Gesetz für die Kraftwirkung zwischen Electricitätsmengen setzt uns aber in Stand bei der Definition der electrischen Einheit ein ganz bestimmtes Princip zu befolgen, so dass wir sie stets wieder zu finden vermögen. Wir definiren sie nämlich so, dass die Grösse f gleich 1 wird. Also:

Die electrostatische Einheit der Electricität ist diejenige positive Electricitätsmenge, welche eine ihr gleiche positive Electricitätsmenge in der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstösst.

Wie die Definition schon ausdrückt, bezeichnet man diese Einheit als *Electrostatische* zur Unterscheidung von der Electromagnetischen Einheit, von der später die Rede sein wird.

Das allgemeine Gesetz der electrischen Wirkung vereinfacht sich also in

$$F = ee'r^{-2}.$$

Die Abstossungskraft zwischen zwei sehr kleinen Körpern, die mit den in electrostatischen Einheiten gemessenen Electricitätsmengen e bezüglich e' geladen sind, ist direct gleich dem Verhältnis des Productes der Ladungen zu dem Quadrate der Entfernung, in der sich die beiden Körper von einander befinden.

Dimensionen der electrostatischen Electricitätseinheit.

42. Ist $[Q]$ die Electricitätsmenge, welche in der electrostatischen Electricitätseinheit enthalten ist, geben e, e' die numerischen Beträge specieller electrischer Quantitäten an, bezeichnet man weiter mit $[L]$ die Längeneinheit, mit r den numerischen Betrag einer Entfernung; mit $[F]$ die Krafteinheit und mit F den numerischen Betrag einer Kraft, so haben wir

$$F[F] = e\,e'\,r^{-2}\,[Q^2]\,[L^{-2}],$$

somit

$$[Q] = [L\,F^{\frac{1}{2}}]$$
$$= [L^{\frac{3}{2}}\,T^{-1}\,M^{\frac{1}{2}}],$$

und dadurch sind die Dimensionen der electrostatischen Einheit bestimmt.

Man mag wol in der Praxis und auf andern Gebieten der Electricitätslehre andere Einheiten zu Grunde legen, in der Electrostatik sind aber Electricitätsmengen nur nach der electrostatischen Einheit zu messen, wie ja auch in der Astronomie die Masseneinheit durch das Gravitationsgesetz definirt ist, und keineswegs mit den sonst üblichen Einheiten zusammenfällt.

Verification des Gesetzes der electrischen Kraftwirkung.

43. Man darf das oben angeführte electrische Wirkungsgesetz durch die bekannten Versuche Coulombs an der Torsionswaage als in gewisser Annäherung als richtig erwiesen ansehen. Inzwischen erschweren die vielen störenden Ursachen, die nur bei grösster Sorgfalt vermieden werden können, die Ausführung solcher Experimente und rauben den Resultaten einen Teil ihres Wertes.

Zunächst ist man gezwungen den zu electrisirenden Körpern Dimensionen zu verleihen, die nicht gerade klein im Verhältnis zu ihrer Entfernung sind, weil allzu kleine Körper nicht im Stande sind Ladungen aufzunehmen und zu behalten, die messbare Kraftwirkungen aufeinander ausüben. Dadurch

bringt aber jeder der Körper in dem andern eine Verteilung der Electricität hervor, welche die gleichmässige Bedeckung ihrer Oberflächen mit Electricität aufhebt. Man darf dann auch nicht die Ladungen als in den Schwerpunkten der Körper concentrirt betrachten. Man muss also diese Verteilung selbst bestimmen, und das kann meist nur durch den feinsten theoretischen Calcul bewerkstelligt werden. Für zwei Kugeln hat Poisson eine solche Berechnung in der ingeniösesten Weise durchgeführt. Später hat dann W. Thomson mit Hilfe seiner Theorie der electrischen Bilder, wie wir in den Artt. 172—175 sehen werden, denselben Fall in beträchtlicher Vereinfachung behandelt.

Eine andere Schwierigkeit bereitet die in die Wände des Gehäuses, welches die Torsionswaage gegen Luftströmungen schützen soll, inducirte Electricität, doch kann man ihren Einfluss rechnerisch bestimmen, wenn man die Innenseite des Gehäuses möglichst regelmässig und aus Metall herstellt.

Ferner ist es nicht möglich die Körper so vollständig zu isoliren, dass sie nicht doch fortwährend Electricität verlören. Coulomb hat sich daher gezwungen gesehen über diese Zerstreuung der Electricität specielle Untersuchungen anzustellen, um mit Hilfe der für ihren Verlauf eruirten Gesetze die nötigen Correctionen ableiten zu können.

Seitdem hat man freilich, namentlich durch W. Thomson, im Isoliren und im Messen electrischer Kräfte beträchtliche Fortschritte gemacht, aber der strenge Nachweis für die Giltigkeit des Coulombschen Kraftgesetzes ist nicht durch directe Messungen und Versuche (die eher zu seiner Demonstration dienen können), sondern durch die mathematische Verfolgung der von uns in dem Experiment VII. angeführten Tatsache geführt worden, derzufolge ein geladener Leiter B gänzlich entladen wird, wenn man ihn erst vollständig in ein Gefäss C versenkt, dann mit der Innenseite des Gefässes berührt und zuletzt ihn herauszieht ohne wieder mit dem Gefässe in Berührung zu kommen. Durch feine Electroskope kann man leicht nachweisen, dass auf B nach der angegebenen Operation keine Spur von Electricität mehr vorhanden ist, wie auch die Aussenseite von C geladen sein mag, und der mathematische Calcul, den ich im Art. 74 dem Leser vorzuführen gedenke, zeigt, dass das nur dann stattfinden kann, wenn die Kraft im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat der Entfernung steht, und dass nach jedem andern Kraftgesetz B eine gewisse Electricitätsmenge würde behalten müssen.

Das electrische Feld.

44. Man bezeichnet den Raum in der Umgebung eines electrisirten Körpers, insofern sich in demselben die electrischen Phänomene abspielen, als *Electrisches Feld*. Es ist dabei gleichgiltig, ob der Körper sich in der

Luft oder in irgend einem anderen Medium befindet, oder ob er in ein sogenanntes Vacuum, das heisst in einen Raum, aus dem wir mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln alles Körperliche entfernt haben, gebracht ist. Befindet sich ein electrisirter Körper in irgend einem Teile des electrischen Feldes, so wird er von einer Kraft angegriffen, deren Grösse im Allgemeinen von seiner Gestalt und von seiner Ladung abhängt, der Körper bringt seinerseits eine Störung in der Electrisirung der andern Körper des electrischen Feldes hervor. Ist er so klein und seine Ladung so unbedeutend, dass er die Electrisirung anderer Körper nicht fühlbar zu alteriren vermag, so braucht man seine Anwesenheit nur insofern zu berücksichtigen als sein Schwerpunkt, einen Punkt des electrischen Feldes darstellt.

Die den Körper angreifende Kraft ist dann proportional seiner Ladung und wirkt im entgegengesetzten Sinne, wenn das Zeichen seiner Ladung ins entgegengesetzte verwandelt wird.

Sei also e die Ladung des Körpers und F die auf ihn in bestimmter Entfernung wirkende Kraft. So lange der Körper sehr klein ist, haben wir

$$F = Re,$$

wobei R nur von der Configuration und Lage der übrigen im electrischen Felde befindlichen Körper abhängt. Kann man dem kleinen Körper ohne das electrische Feld zu stören eine Einheit von Electricität mitteilen, so wird $F = R$. Wir nennen deshalb R die *Resultirende Electrische Kraftintensität* in dem betrachteten Punkte des electrischen Feldes.

Electromotorische Kraft und electrisches Potential.

45. Führen wir den betrachteten kleinen Körper von einem Punkte A des electrischen Feldes zu einem andern Punkte B, so greift ihn in jeder seiner aufeinanderfolgenden Lagen eine Kraft Re an, die insofern variirt, als R von Punkt zu Punkt der Bahn des Körpers seinen Wert ändert. Bezeichnen wir die gesammte Arbeit, welche geleistet werden muss, um unsern Körper von A bis B zu bringen, durch Ee, so heisst E die gesammte *Electromotorische Kraft* längs der Bahn AB. Läuft die Bahn AB in sich zurück, ohne dass die gesammte electromotorische Kraft längs derselben verschwindet, so kann die Electricität nicht im Gleichgewicht sein, sondern sie befindet sich in Strömung. Die Electrostatik beschäftigt sich also nur mit solchen Zuständen des electrischen Feldes, wo die gesammte electromotorische Kraft längs jeder geschlossenen Bahn gleich Null ist. Bricht man eine geschlossene Bahn in einem solchen Felde in zwei Teile, so hat die electromotorische Kraft für beide Teile denselben Betrag. Da man nun jeden Teil für sich beliebig transformiren kann, so folgt hieraus:

Die gesammte electromotorische Kraft zwischen zwei Punkten eines im Gleichgewicht befindlichen electrischen Feldes ist unabhängig von der Bahn, auf der man von dem einen zu dem andern Punkt übergeht.

Bezieht man die Lage aller Punkte auf die eines einzigen Punktes B, so heisst die electromotorische Kraft von A zu B das *Potential* in A. Gewöhnlich rückt man B in die Unendlichkeit. Kann man also einen Körper, ohne die schon oft genannten Bedingungen zu verletzen, mit einer Electricitätseinheit laden, so giebt das Potential in einem Punkte des electrischen Feldes direct die Arbeit, die man verwenden muss, um denselben von diesem Punkte bis in die Unendlichkeit zu führen.

Ein Körper mit einer positiven Ladung hat das Bestreben von Orten grössern positiven Potentials zu solchen kleinern positiven oder grössern negativen Potentials überzugehen. Ein negativ geladener sucht sich in der entgegengesetzten Richtung zu bewegen.

Es ergiebt sich hieraus die wichtige Folgerung, dass in einem Conductor nur dann electrisches Gleichgewicht herrschen kann, wenn das Potential in allen seinen Punkten einen und denselben Wert hat. Denn da in einem Conductor die Electricität sich vollkommen frei bewegen kann, so wird beispielsweise positive Electricität so lange sich von Orten grössern Potentials zu solchen kleinern Potentials bewegen, als noch Differenzen zwischen den Potentialwerten der einzelnen Punkte des Conductors vorhanden sind. Das Potential in den Punkten des Conductors nach Eintritt des Gleichgewichts heisst das *Potentialniveau* des Conductors oder kürzer das *Potential* des Conductors.

Aequipotentielle Flächen oder Electrische Niveauflächen.

46. Der Name bezeichnet schon, dass man unter einer *Aequipotentiellen Fläche* oder *Niveaufläche* des electrischen Feldes eine Fläche versteht, in deren allen Punkten das Potential einen und denselben Wert hat.

Ein Punkt, den man auf einer aequipotentiellen Fläche zu bleiben zwingt, hat, weil das Potential auf der ganzen Fläche von derselben Grösse ist, kein Bestreben von einem Punkte der Fläche auf derselben zu einem andern ihrer Punkte überzugehen.

Aequipotentielle Flächen sind also Gleichgewichtsflächen, und verdanken dieser Eigenschaft die Bezeichnung als Niveauflächen.

Dagegen wirkt normal zu einer solchen Fläche die ganze electrische Kraft. Die Grösse dieser resultirenden Kraft bestimmt sich dadurch, dass die Arbeit bei Ueberführung einer Electricitätseinheit von der äquipotentiellen Fläche V zu der V' gleich $V-V'$ sein muss.

Zwei Niveauflächen verschiedenen Potentials können sich niemals schneiden, weil in einem Punkt nur ein Potential existiren kann. Dagegen kann eine Niveaufläche sich selbst beliebig oft schneiden. Die Schnittlinien sind dann *Gleichgewichtslinien*.

Aus dem frühern Satze über das Gleichgewicht der Electricität in einem Conductor folgt, dass die Oberfläche eines Leiters notwendig eine Niveaufläche

sein muss. Ist dabei die Electrisirung positiv, so nimmt das Potential mit wachsender Entfernung von dem Conductor ab. Der Conductor wird daher von Niveauflächen umgeben, deren Potentiale niedriger sind als sein Potential. Wenn aber in Folge der Anwesenheit anderer electrisirter Körper der Conductor auf einem Teile positive, auf einem andern negative Electricität besitzt, so besteht die vollständige äquipotentielle Fläche aus der Oberfläche des Conductors und aus einem System anderer Flächen, die den Conductor in den Linien schneiden, welche die positiv geladenen Gebiete von den negativ electrisirten trennen. Solche Linien sind also Gleichgewichtslinien, und ein Punkt, der sich auf einer solchen befindet, wird nach keiner Richtung hingezogen.

Damit aber ein Conductor in einigen Teilen entgegengesetzt geladen sein kann als in andern, muss mindestens ein electrisirter Körper in seiner Nähe und ausserhalb seiner Oberfläche sich befinden. Denn wenn wir einen positiv geladenen Punkt von einem positiv electrisirten Teile der Oberfläche des Conductors aus stets in Richtung der auf ihn wirkenden Kraft sich bewegen lassen, so wird das Potential auf ihn so lange continuirlich abnehmen, bis er entweder eine negativ geladene Fläche, welche ein kleineres Potential besitzt als der Conductor, trifft, oder bis er sich unendlich weit entfernt hat. Da aber in der Unendlichkeit das Potential gleich Null ist, so kann der letztere Fall nur dann eintreten, wenn der ganze Conductor positiv geladen ist.

Ebenso muss ein negativ electrisirter Punkt, von einem negativ geladenen Teile des Conductors ausgehend, entweder einen andern positiv geladenen Körper erreichen, oder bis in die Unendlichkeit wandern, wo das Potential wiederum verschwindet, und die letztere Alternative ist nur möglich, wenn der ganze Conductor negativ electrisirt ist.

Hieraus aber ergiebt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung, dass wenn ein Körper positiv und negativ geladen sein soll, notwendig ausser ihm noch ein anderer electrischer Körper vorhanden sein muss, dessen Potential numerisch grösser, aber von demselben Zeichen wie das des Conductors ist. Befindet sich ein Conductor allein in einem Felde, so ist die Electrisirung in jedem Teile von demselben Zeichen wie das Potential des Conductors.

Die Innenfläche eines hohlen leitenden Gefässes, innerhalb dessen sich keine electrischen Körper befinden, ist stets vollständig frei von Electricität. Wäre nämlich ein Teil der Innenfläche positiv geladen, so müsste ein von ihm ausgehender in Richtung der Kraft sich bewegender positiv geladener Punkt irgendwo einen negativ geladenen Teil der Innenfläche von geringerem Potential treffen. Die Innenfläche besitzt aber als einem Conductor angehörig überall dasselbe Potential, sie kann also keine geladenen Teile haben.

Bringt man einen Conductor in ein leitendes Gefäss und setzt ihn mit diesem in Verbindung, so kann seine Oberfläche als zur Innenfläche des

Gefässes gehörig angesehen werden. Der Conductor wird also durch das Gefäss vollständig gegen alle von Aussen kommenden electrisirenden Einflüsse geschützt, und bleibt stets ungeladen.

Kraftlinien.

47. Die Bahn eines Punktes, der sich in Richtung der auf ihn wirkenden Kraft fortbewegt, heisst *Kraftlinie*. Aus der Definition der Niveauflächen folgt, dass die Kraftlinien die äquipotentiellen Flächen rechtwinklig schneiden. Die Conception der Kraftlinien als Hilfsmittel zur Bestimmung der Grösse und Richtung der Kraft in einem electrischen Felde rührt von Faraday her, der mit ihrer Hilfe vielen der von ihm für die electrische Action entdeckten Gesetzen präcisen Ausdruck verliehen hat. Wir werden daher in der Folge ihre Eigenschaften eingehend zu entwickeln haben.

Electrische Spannung.

48. Da die Oberfläche eines Conductors eine Niveaufläche sein muss, so wirkt die resultirende Kraft in jedem Punkte normal zu derselben. Sie ist ausserdem, wie wir später, Art. 78, sehen werden, proportional der Dichte der Electricität an der betreffenden Stelle. Infolge dessen hat die Electricität eines Oberflächenelements das Bestreben, sich mit einer Kraft proportional dem Producte der resultirenden electrischen Kraft und der Dichte der Electricität, also proportional dem Quadrate der Dichte von dem Conductor fortzubewegen. Dieses nach Aussen gerichtete Streben muss notwendig eine Spannung der Electricität auf dem Conductor bewirken und heisst darum auch die *Electrische Spannung*.

Man hat freilich das Wort Spannung oft in anderer und vielfach in sehr vager Bedeutung gebraucht, so auch namentlich zur Bezeichnung des Potentials. Ein Ueberblick über die Fälle, in denen es benutzt worden ist, lehrt aber, wie ich glaube, dass man darunter, entsprechend seiner gewöhnlichen Bedeutung nach Analogieen aus der Mechanik besser eine forttreibende Kraft versteht, die dem Druck so und so vieler Kilogramm pro Quadratmeter der Oberfläche des Conductors entspricht. Nach Faraday soll diese electrische Spannung nicht blos an der Oberfläche des Conductors wirken, sondern überall im electrischen Felde, und wir werden finden, dass sie in dieser Conception uns zu einer Theorie führt, welche die electrischen Phänomene aus Zwangzuständen in dem Zwischenmedium erklärt.

Electromotorische Kraft zwischen zwei Conductoren.

49. Verbindet man zwei Conductoren verschiedenen Potentials durch einen dünnen Leitungsdraht, so hat die Electricität das Bestreben, diesen entlang mit einer Kraft zu fliessen, die durch die Potentialdifferenz der

beiden Conductoren gemessen wird. Die Potentialdifferenz zweier Conductoren heisst deshalb die zwischen ihnen wirkende *Electromotorische Kraft*. In der Theorie der statischen Electricität werden wir es nur mit dieser durch die Potentialdifferenz definirten electromotorischen Kraft zu thun haben; es giebt aber Fälle, die wir später bei Betrachtung der electrischen Störungen durch chemische Wirkungen, Bewegungen von Magneten und durch Temperaturungleichheiten untersuchen werden, in denen die electromotorische Kraft nicht als eine Potentialdifferenz ausgedrückt werden kann.

Capacität eines Conductors.

50. Isolirt man einen Conductor und hält die Potentiale aller andern noch etwa vorhandenen electrischen Körper durch leitende Verbindung derselben mit der Erde auf Null, so heisst das Verhältnis der Ladung des Conductors zu dem Potential, das er unter diesen Umständen hat, seine *Capacität*. Schliesst man einen Conductor in einen andern vollständig ein ohne diesen irgendwo zu berühren, dann ist die Ladung des eingeschlossenen Conductors gleich und entgegengesetzt der der innern Fläche des einschliessenden. Ihre Grösse ist durch das Product aus der Capacität des eingeschlossenen Conductors in die Potentialdifferenz gegen den einschliessenden Conductor gegeben.

Accumulatoren und Condensatoren.

Man bezeichnet ein System von zwei Conductoren, deren gegenüberstehende Flächen durch eine dünne Lage eines isolirenden Mediums getrennt sind, als einen electrischen *Accumulator*. Die beiden Conductoren des Accumulators heissen *Electroden*, und das isolirende Zwischenmedium nennt man das *Dielectricum*.

So ist eine Leydener Flasche ein Accumulator, in welchem Glas als isolirendes Medium zwei Conductoren aus Metallfolie trennt. Man nennt übrigens die Accumulatoren oft auch *Condensatoren*, doch soll diese Bezeichnung für diejenigen Apparate reservirt werden, die nicht sowohl zur Aufbewahrung von Electricität, als vielmehr zu ihrer Verdichtung bestimmt sind. Die Capacität eines Accumulators ist direct proportional der Grösse der beiden sich gegenüberstehenden Conductorflächen und steht im umgekehrten Verhältnis zur Dicke der isolirenden Schicht.

Widerstand der Körper gegen den Durchgang von Electricität.

51. Teilt man irgend einem Teile einer Metallmasse eine Ladung positiver Electricität mit, so geht dieselbe mit grosser Rapidität von Stellen höhern zu solchen niederern Potentials so lange über, bis das Potential in

der ganzen Masse einen und denselben Wert hat. Die Geschwindigkeit, mit der diese Verteilung Platz greift, ist in Metallstücken, wie man sie in den gewöhnlichen electrischen Experimenten benutzt, so gross, dass sie sich jeder Beobachtung entzieht. Aber in den langen, dünnen Drähten, die in der Telegraphie gebraucht werden, wird das Potential erst nach einer messbaren Zeit constant, weil der Draht dem Durchgange der Electricität einen gewissen *Widerstand* entgegensetzt.

Die Tabellen, die ich bei der Behandlung der electrischen Ströme in den Art. 362, 366 und 369 anführen werde, zeigen, dass die Widerstände der einzelnen Substanzen sehr verschieden sind.

Alle Metalle sind gute Leiter, doch ist der Widerstand von Blei zwölfmal, der des Eisens sechsmal und der des Quecksilbers sechzigmal so gross, als der von Kupfer oder Silber. Der Widerstand der Metalle wächst mit steigender Temperatur.

Das krystallinische Selen kann ebenfalls noch als Leiter angesehen werden, obgleich sein Widerstand $3{,}7 \times 10^{12}$ mal so gross als der eines entsprechend grossen Kupferstückes ist. Auch sein Widerstand wächst mit der Temperatur. Das amorphe Selen aber ist ebenso wie der Schwefel ein guter Isolator.

Von den Flüssigkeiten gestatten einige der Electricität den Durchgang durch *Electrolyse*, eine Art der Leitung, die wir im zweiten Teile dieses Werkes betrachten werden. Einstweilen können wir alle wasserhaltigen Flüssigkeiten und alle dampfförmigen Körper als Leiter, wenn auch als sehr viel schlechtere Leiter wie die Metalle, deshalb ansehen, weil sie die Electricität nicht einmal während der zu ihrer Messung nötigen Zeit zu isoliren vermögen.

Im Gegensatz zu dem, was wir bei den Metallen gefunden haben, nimmt der Widerstand dieser als *Electrolyte* oder *Leiter zweiter Klasse* bezeichneten Körper mit steigender Temperatur ab.

Andererseits sind Gase sowohl im trocknen als feuchten Zustand bei gewöhnlichem Atmosphärendruck für kleine Ladungen so nahe vollkommene Isolatoren, dass man bis jetzt durch sie noch keinen Durchgang der Electricität durch Leitung hat bemerken können. Die continuirliche Abnahme der Ladung eines electrisirten Körpers wird wol in allen Fällen der mangelhaften Isolirung seiner Träger zur Last gelegt werden müssen, indem die Electricität entweder durch diese hindurch oder längs ihrer Oberfläche sich verliert. Als Beweis dafür kann die Tatsache gelten, dass zwei geladene, nebeneinander hängende Körper ihre Electricitäten besser bewahren, wenn sie entgegengesetzt, als wenn sie gleichnamig electrisirt sind. Denn wenn die Leitung der Luft den Verlust an Electricität verursachen würde, müsste gerade bei entgegengesetzter Ladung die Zerstreuung grösser sein, weil in diesem Falle die electromotorische Kraft, welche die Electricitäten durch die Luft treibt, grösser ist als im andern. Für den Durchgang der Electricität durch die Träger ist dagegen der electromotorische Antrieb bei gleichnamiger

Ladung grösser als bei ungleichnamiger, und demgemäss ist auch der Verlust bei gleichnamiger Ladung grösser als bei ungleichnamiger, wie das auch die Erfahrung bestätigt.

Durch Gase geht die Electricität im allgemeinen durch disruptive Entladung, die nicht eher beginnt, als bis die electromotorische Kraft eine gewisse Stärke erreicht hat, hindurch. Man bezeichnet den Maximalbetrag der electromotorischen Kraft, die in einem Dielectricum noch wirken kann, ohne dass eine Entladung vor sich geht, als die *Electrische Stärke* des Dielectricums. Die electrische Stärke der Luft nimmt bei einer Druckverringerung zunächst ab, bis der Druck auf 3 mm Quecksilber gesunken ist. Wird aber der Druck noch weiter reducirt, so nimmt sie schnell wieder zu. Bei der jetzt in der Druckverringerung erreichbaren Grenze bedarf man zur Hervorbringung eines 6 mm langen Funkens eine noch grössere electromotorische Kraft, wie unter gewöhnlichem Druck zu der eines 200 mm langen. Ein Vacuum, das heisst ein Raum, aus dem alles entfernt ist, was wir überhaupt nur mit unsern Mitteln zu entfernen vermögen, ist also ein Isolator von grosser electrischer Stärke.

Wasserstoff hat eine bedeutend geringere Stärke als Luft.

Einige Glassorten sind bei niedriger Temperatur wunderbar gute Isolatoren, so dass W. Thomson in hermetisch verschlossenen Glaskolben Electricität Jahre hindurch aufbewahren konnte. Aber schon bei Temperaturen unter 100° C. werden dieselben Glassorten zu Leitern.

Guttapercha, Kautschuk, Hartgummi, Paraffin sind ebenso wie die Harze gute Isolatoren; beispielsweise ist der Widerstand des Guttapercha bei 24° C. etwa 6×10^{19} mal so gross, wie der des Kupfers.

Eis, Krystalle und starre Electrolyte sind ebenfalls Isolatoren.

Einige Flüssigkeiten wie Naphta, Terpentin und einige Oele sind Isolatoren, wenn auch weniger gute als die angeführten festen Körper.

Dielectrische Medien.

Specifische inductive Capacität.

52. Faraday nannte diejenigen Isolatoren, in denen durch eine electromotorische Kraft die Electricität nicht unmittelbar derartig verteilt wird, dass das Potential überall denselben Wert erhält, *Dielectrica*.

Aus neuerdings veröffentlichten Untersuchungen erhellt, dass Cavendish schon vor 1773 die Capacität von Glas-, Harz-, Wachs- und Schellakplatten maass und mit der Capacität entsprechend grosser Luftplatten verglich.

Ohne von diesen frühen Bestimmungen etwas zu wissen, entdeckte dann Faraday, dass die Capacität eines Accumulators nicht blos von der Form und Lage seiner Electroden, sondern auch von der speciellen Natur des trennenden Zwischenmediums abhängt. Substituirte er in einem Accumulator

ohne die sonstige Anordnung zu ändern, für die Luft als isolirendes Medium andere Gase, so fand sich die Capacität seines Accumulators nicht merklich alterirt, brachte er aber Schellak, Schwefel oder Glas an Stelle der Luft, so wuchs die Capacität je nach der Zwischensubstanz in verschiedenem Maase an.

Faraday bezeichnete darum das Verhältnis der Capacität eines Accumulators für ein bestimmtes Dielectricum als Zwischensubstanz zu der Capacität desselben Accumulators, wenn Luft das Zwischenmedium bildete, als die *Specifische Inductive Capacität* des Dielectricums. Jetzt heisst dieses Verhältnis meist die *Dielectricitätsconstante* des Dielectricums.

Die Constante hängt nicht blos von der Natur des Mediums, sondern auch von seinem Zustande ab. So fand Boltzmann durch delicate Messungsmethoden, dass sie bei Gasen mit Aenderung des Druckes variirt. Ist das Dielectricum kein guter Isolator, so ist es schwer, seine specifische inductive Capacität zu bestimmen, weil die Electricität während der Messung sich durch dasselbe hindurch verbreitet. Doch ist es wahrscheinlich, dass die specifische Capacität nicht auf Isolatoren beschränkt ist, sondern überhaupt für alle Körper ihre Bedeutung hat.

Absorption der Electricität.

53. Wird ein Accumulator einige Zeit, nachdem er electrisirt worden ist, plötzlich entladen und isolirt, so zeigt er sich bald wieder in demselben Sinne wie zuerst, aber schwächer geladen. Man kann ihn mehrmals entladen, erhält aber stetig abnehmende Electricitätsmengen. Man bezeichnet die ganze nach der ersten Entladung noch zum Vorschein kommende Electricität als *Electrisches Residuum*.

Jede der entladenen Electricitätsmengen scheint der bei der Entladung auf dem Accumulator herrschenden Potentialdifferenz proportional zu sein, und das Verhältnis der jeweiligen Entladung zur entsprechenden Potentialdifferenz giebt die wahre Capacität des Accumulators. Derartige Bestimmungen der Capacität eines Accumulators durch Messung der entladenen Electricitätsmenge und der gerade herrschenden Potentialdifferenz führen aber nur dann zu einem richtigen Wert, wenn die Entladung augenblicklich geschieht, denn wenn man die Dauer des Contactes des Entladers gegen den Accumulator verlängert, so birgt dieser auch einen Teil des electrischen Residuums und die berechnete Capacität fällt zu gross aus.

Ein geladener und isolirt aufgestellter Accumulator scheint seine Electricität durch Leitung zu verlieren, und wie die Erfahrung lehrt, ist der Verlust zu Anfang verhältnismässig weit grösser als zuletzt. Man würde demnach die Leitungsfähigkeit des Accumulators zu hoch schätzen, wenn man sie aus den ersten Verlusten berechnen wollte, und das ist der Grund, warum bei einem submarinen Kabel die Isolirung sich mit der Dauer der Electrisirung zu vervollkommnen scheint.

Leitet man Wärme durch einen Körper, dadurch dass man zwei Stellen desselben auf verschiedene Temperaturen erhält, so treten Phänomene auf, die man auf den ersten Blick für ganz analog den geschilderten electrischen Erscheinungen halten möchte. Bei der Wärme hängen sie aber von der vom Körper selbst aufgenommenen und abgegebenen Wärme ab. Man hat darum geglaubt, dass die Körper die Fähigkeit besitzen auch Electricität zu absorbiren und zu emittiren. Ich werde aber in Art. 329 zeigen, dass diese Hypothese einer Absorption der Electricität durch materielle Teilchen zur Erklärung des Residuums nicht nöthig ist, dass schon die Annahme einer gewissen Heterogeneität in der Structur der Dielectrica dazu genügt.

Man kann übrigens leicht nachweisen, dass die sogenannte electrische Absorption nicht in einer wirklichen Absorption von Electricität besteht. Ladet man nämlich die betreffende Substanz, während sie von einem Metallgefäss vollständig eingeschlossen ist, entladet dann das Gefäss und lässt es isolirt, so erhält es keine Spur von der allmälig sich zerstreuenden Electricität des in ihm befindlichen electrisirten Körpers.

54. Faraday*) drückte diese Tatsache durch den Satz aus, dass es nicht möglich sei einem Körper eine absolute unabhängige Ladung einer Electricitätsart mitzuteilen.

In der Tat scheint jedes Experiment zu lehren, dass die Electrisirung der Aussenfläche eines Gefässes ganz unabhängig von den electrischen Actionen ist, die zwischen und in den von ihm eingeschlossenen electrischen Körpern etwa vorgehen.

Könnte man nun Electricität einer Art zwingen, in einem Körper absorbirt, das heisst latent zu werden, ohne doch mit einer gleichen Menge der entgegengesetzten Art mittelbar oder unmittelbar verbunden zu sein, oder könnte man eine Electricitätsmenge allmählich aus ihrem latenten Zustande wieder ans Tageslicht kommen lassen, so müsste offenbar dadurch die Electrisirung des umgebenden Gefässes Abänderungen erleiden.

Da nun solche niemals beobachtet worden sind, so schloss Faraday, dass es nicht möglich ist einer Substanz eine absolute Ladung mitzuteilen, und dass kein Körper durch eine Aenderung seines Zustandes latente Electricität zu entwickeln oder vorhandene Electricität zu verbergen im Stande ist.

Demgemäss betrachtete er die Induction oder Influenz „als die essentielle Grundlage sowol bei der Erregung von Electricität als auch bei den darauf folgenden eigentlichen electrischen Erscheinungen“. Unter „Induction“ versteht er aber (1298) einen gewissen Zustand von Polarität in den Partikeln des Dielectricums, der zufolge jedes Teilchen an der einen Seite eine positive und an der andern Seite eine dieser an Grösse stets gleiche negative Electricitätsmenge beherbergen sollte.

---

*) *Exp. Res.* I. Serie 11.

Disruptive Entladung.*)

55. Lässt man die electromotorische Kraft an einer Stelle eines Dielectricums allmählich anwachsen, so erreicht man schliesslich eine Grenze für dieselbe, bei der die Electricität sich plötzlich durch das Dielectricum hindurch in Begleitung von Schall- und Lichterscheinungen entladet. Gleichzeitig wird das Dielectricum vorübergehend oder ganz zerrissen.

Der Grenzwert der electromotorischen Kraft bei einer solchen disruptiven Entladung hängt von der Natur des Dielectricums ab. Er ist zum Beispiel grösser für Glas als für Luft, und bei dieser wächst er mit zunehmender Dichte. Man kann aber stets die electromotorische Kraft so weit anwachsen lassen, dass eine *Disruptive Entladung* Platz greift, das heisst die Isolation des Mediums aufgehoben und plötzlich einem Strome von Electricität der Durchgang gestattet wird. Darin liegt der Grund weshalb in der Natur keine Ladungen vorkommen können, welche unendlich grosse Kräfte verursachen.

Die electrische Lichthülle, Convective Entladung.

Bei einem Conductor, der in eine Spitze ausläuft, würde die Annahme, dass ein isolirter Körper stets seine Electricität behält, dazu führen, dass die Dichte der Electricität ohne Ende anwüchse, je mehr man sich der Spitze nähert, und in der Spitze selbst unendlich gross würde. Die Kraft würde also dort auch unendlich gross gefunden werden, und factisch müsste das der Fall sein, wenn die isolirende Kraft der umgebenden Luft unendlich gross wäre. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Widerstand der Luft, wenn die Electricität eine gewisse Dichte erreicht hat, zu weichen beginnt, so dass die Luft leitend wird. Sie spielt dann in Umgebung der Spitze die Rolle eines Conductors. Weil aber in genügender Entfernung von der Spitze die electrische Kraft nicht hinreicht um die Isolation aufzuheben, so findet der electrische Strom bald sein Ende und die Electricität sammelt sich in der Luft in der Nähe der Spitze an. Die Spitze ist also von Luftschichten umgeben, die mit ihr gleichsinnig electrisirt, und so gegen die enorme electromotorische Kraft geschützt sind, die sie angreifen würde, wenn die Spitze allein Trägerin der gesammten Electricität sein müsste. Tatsächlich hat also der Conductor gar keine Spitze mehr, denn man muss die Oberfläche der umgebenden electrisirten Luft als Conductoroberfläche ansehen. Könnte man nun die Luft in Ruhe erhalten, so würde der electrisirte Körper, wenn wir zu ihm auch die die Spitze umgebende Luft rechnen, seine Ladung bewahren. Da sich aber die Luftteilchen frei bewegen können, so folgen sie den zwischen ihnen wirkenden Abstossungskräften und suchen sich in Richtung der Kraftlinien

*) Faraday, *Exp. Res.* Vol. I. Serie 12 und 13.

so lange fortzubewegen bis sie unter den umgebenden Körpern die ihnen entgegengesetzt geladenen erreichen. An ihre Stelle kommen dann andere noch ungeladene Luftpartikel in die Nähe der Spitze, und da diese die der Spitze nächsten Teilchen nicht gegen die excessive electrische Spannung schützen können, so findet eine abermalige Entladung statt, nach welcher sich die neugeladenen Partikel entfernen und andern Teilchen Platz machen. So geht es fort, so lange der Conductor überhaupt Electricität besitzt. Es treten also folgende charakteristische Erscheinungen auf:

An der Spitze und in ihrer Nähe zeigt sich eine Lichthülle, die der continuirlichen Entladung der Spitze gegen die umgebende Luft ihre Entstehung verdankt.

Da ferner die Luftteilchen im Allgemeinen nach derselben Richtung sich fortbewegen, so geht von der Spitze ein Luftstrom aus, der die electrisirten Luftteilchen und wahrscheinlich auch nichtelectrisirte mit sich fortführt. Erleichtert man künstlich die Bildung eines solchen Luftstromes, so erstreckt sich die Lichtentwickelung über weitere Strecken. Das entgegengesetzte tritt ein, wenn man seine Bildung erschwert.*)

Der so in der Nähe der Spitze entstehende *Electrische Wind* ist oft sehr heftig. Seine Geschwindigkeit verlangsamt sich aber schon in geringer Entfernung beträchtlich, so dass die electrisirten Luftteilchen nur noch von den zu jeder Zeit vorhandenen gewöhnlichen Luftströmungen fortgeführt werden, und so eine unsichtbare electrische Wolke bilden. Kommen dann die Teilchen in die Nähe einer leitenden Fläche, etwa in die Nähe einer Wand, so induciren sie in diese eine ihrer eigenen Electricität entgegengesetzte Ladung, und werden dann oft an die Wand durch die auftretende electromotorische Kraft herangezogen und entladen. Meist ist aber diese electromotorische Kraft zu gering, und dann bleiben die Luftteilchen lange Zeit in der Nähe der Wand oder anderer Leiter mit ihrer vollen Ladung und bilden eine electrische Atmosphäre um dieselben, deren Existenz sich oft durch das Electroskop verrät.

Die Kraft, welche zwischen geladenen Luftmassen und anderen Körpern wirkt, ist sehr unbedeutend im Vergleich zu der Kraft, mit der Winde durch Dichtigkeitsungleichheiten in der Atmosphäre, veranlasst durch Temperaturdifferenzen, erzeugt werden. Man wird also kaum annehmen können, dass auch nur ein geringer Teil der Bewegung, die man bei gewöhnlichen Gewitterwolken beobachten kann, electrischen Ursachen ihre Entstehung verdankt.

Geschieht der Uebergang der Electricität durch die Bewegung der mit ihr geladenen Teilchen, so bezeichnet man sie als *Electrische Convection* oder als *Convective Entladung*.

Die electrische Lichthülle verdankt also ihre Entstehung dem fortwährenden Durchgang von Electricität durch eine dünne Luftschicht, in der

*) Priestley, *History of Electricity* pp. 117, 591; Cavendish, *Electrical Researches* Phil. Trans. 1771, § 4; *Reprint of Cavendish* Art. 125.

die Spannung so gross ist, dass sie auch die umgebenden Luftteilchen ladet; letztere werden dann durch den electrischen Wind, der einen essentiellen Teil des ganzen Phänomens ausmacht, fortgeführt. Die Lichthülle bildet sich leichter in verdünnter als in verdichteter Luft und auch leichter, wenn die Spitze positiv, als wenn sie negativ geladen ist. Die letzte Bemerkung gilt namentlich für diejenigen, welche die Unterschiede zwischen den Electricitätsarten studiren, um so irgend etwas, was ihnen die Natur der Electricität enthüllen könnte, zu entdecken.

Das electrische Büschellicht.

56. Stumpft man die Spitze eines Conductors ab oder ersetzt sie durch eine kleine Kugel, so nimmt zwar die electrische Spannung mit wachsender Entfernung von derselben ab, aber in weit geringerem Maasse als es bei einer vollständigen Spitze der Fall ist. Die Ausgleichung der Tension geschieht dann durch aufeinanderfolgende Entladungen, die sich in der Luft verzweigen und dadurch enden, dass sie entweder Teile der Luft electrisiren oder auf einen Conductor treffen. Die Erscheinung ist von einem Geräusch begleitet, dessen Höhe von dem Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entladungen abhängt. Ein continuirlicher Luftstrom, wie wir ihn in Begleitung der Entladung durch die electrische Lichthülle gefunden haben, tritt hier nicht auf.

Der electrische Funke.

57. Wenn die Spannung zwischen zwei Conductoren überall sehr bedeutend ist, wie bei zwei geladenen Kugeln, deren gegenseitige Entfernung im Verhältnis zu ihren Radien nicht zu gross ist, so geschieht die Entladung gewöhnlich durch einen von einem Conductor zu dem andern überspringenden *Funken*, der meist die gesammte Electricität mit sich nimmt.

Giebt dabei ein Teil des Dielectricums der Spannung nach, so werden die anliegenden Partikel in Richtung der electrischen Kraft einer stärkern Spannung unterworfen und dadurch gezwungen ebenfalls nachzugeben, so dass die Ladung durch das Dielectricum dringen kann. Den Weg, den der Funke einschlägt, können wir uns durch ein Beispiel versinnbildlichen. Reisst man nämlich ein Blatt Papier an einer Kante ein und zieht die beiden Enden dieser Kante auseinander, so geht der Riss in dem Blatte weiter und zwar stets über die Stellen weg, welche am nachgiebigsten sind. Ganz ebenso beginnt die Entladung da, wo die Spannung zuerst die Isolirung überwindet, und setzt sich in einer unregelmässigen Bahn über die Stellen fort, die ihr den geringsten Widerstand bieten. Der Funke wird also namentlich die Luftteile durchdringen, welche Wasserdämpfe enthalten.

W. Thomson hat die electromotorische Kraft, welche nötig ist, um einen Funken durch verschieden dicke Luftschichten durchzutreiben, mit Hilfe eines Electrometers bestimmt.*)

Er liess die Funken zwischen zwei Flächen überspringen, deren eine ganz eben war, während die andere nur in so weit convex gekrümmt wurde, dass der Funke stets von derselben Stelle auszugehen gezwungen war.

Er fand so, dass die electromotorische Kraft beim Uebersprungen des Funkens mit Vergrösserung des Abstandes der beiden Flächen zwar wuchs, aber weniger schnell zunahm wie die Entfernung. Die electrische Kraft an einer Stelle zwischen den Conductoren, in diesem Falle das Verhältnis der Potentialdifferenz beider Flächen zu der Entfernung der Platten, kann also bei einer dünnen Luftschicht verhältnismässig grösser werden als bei einer dicken, ehe eine Entladung eintritt.

Für eine sehr dünne Schicht von 0,0254 cm ergab sich die Kraft bei der Bildung des Funkens, cm und gr als Einheiten für die Länge und das Gewicht benutzt, gleich 527,7, das heisst, die electrische Spannung betrug 11,29 gr für das qcm.

War der Abstand der beiden Platten etwa 1 mm, so betrug die electrische Kraft 130 und die Spannung 0,68 gr auf das qcm.

Wahrscheinlich ist die Spannung bei noch grösseren Entfernungen nicht viel kleiner als die zuletzt genannte. Zur Vergleichung der genannten Kräfte mit andern geläufigeren führe ich an, dass die Luft mit einem Gewicht von 1032 gr auf dem qcm lastet.

Es ist schwer zu verstehen, weshalb bei einer dünnen Luftschicht zur Bildung eines Funkens eine grössere Tension erforderlich ist als bei einer dicken.

Man kann vielleicht annehmen, dass die Luft an den Oberflächen der Conductoren sich verdichtet und so besser isolirt, sind dann die beiden Conductoren sehr nahe, so stossen die condensirten Luftstrata an einander. Es ist aber auch möglich, dass überhaupt das Potential eines geladenen Conductors nicht mit dem der ihn berührenden Luftschicht übereinstimmt, sondern sich von ihm um eine Grösse unterscheidet, die gerade vor der Entladung ihren maximalen Betrag erreicht. Die beobachtete Potentialdifferenz der beiden Conductoren würde darnach grösser sein als die zwischen den beiden Seiten der Luftschicht herrschende, und zwar um so viel grösser, wie wenn die Dicke der Schicht um etwa 0,127 mm vermehrt würde. Wir kommen im Artikel 370 darauf noch einmal zurück.

Alle diese Erscheinungen fallen für die verschiedenen Gase sehr verschieden aus und variiren selbst für ein und dasselbe Gas mit der Dichtigkeit desselben. Gewisse Entladungen durch verdünnte Gase bieten sehr bemerkenswerte Phänomene dar. Lässt man, zum Beispiel, die Electricität durch eine Röhre, welche nur sehr wenig Gas enthält, längs der Axe der-

*) Proc. R. S. 1860 oder *Reprint of Papers on Electricity and Magnetism*, chap. XIX.

selben sich entladen, so sieht man leuchtende Schichten mit dunklen quer gegen die Röhre gerichteten in fast gleichen Abständen abwechseln. So wie der Strom anwächst, ensteht eine neue Schicht und die alten Schichten rücken näher aneinander. In einer Röhre, wie sie von Gassiot*) beschrieben worden ist, ist das Licht der Schichten nach der Seite des positiven Pols rötlich, nach der des negativen bläulich und in der Mitte glänzend rot.

Solche und ähnliche Phänomene, welche man bei der electrischen Entladung bemerken kann, sind von der grössten Wichtigkeit, da sie uns mit der Zeit zu einer wirklichen Einsicht in die Natur, nicht allein der Electricität, sondern auch der Gase und des den ganzen Raum ausfüllenden Zwischenmediums führen können. Einstweilen ist es aber noch nicht möglich sie in das Bereich der mathematischen Theorie der Electricität einzuverleiben.

Pyroelectricität.

58. Gewisse Krystallformen des Turmalins und anderer Mineralien zeigen Erscheinungen, die man passend als electrische Polarität bezeichnen könnte. Erwärmt man nämlich einen Turmalinkrystall, der sich in gleichförmiger Temperatur befunden hat und anscheinend keine Spur von Electricität zeigte, so wird ein Ende desselben positiv, das andere negativ electrisch. Setzt man die Erwärmung fort, nachdem die entstandene Electricität in irgend einer Weise (etwa dadurch dass man mit dem Krystall durch eine Flamme fährt) entfernt ist, so entsteht von neuem eine electrische Spannung derselben Art wie zuvor zwischen beiden Enden. Lässt man dagegen den Krystall sich abkühlen, so kehrt sich die Polarität um, das früher positiv geladene Ende wird nunmehr negativ electrisch und das früher negative wird positiv.

Die charakteristischen Enden liegen in der krystallographischen Axe. Sind die Krystalle, wie das oft vorkommt, dadurch ausgezeichnet, dass das eine Ende durch eine sechsseitige, das andere durch eine dreiseitige Pyramide gebildet wird, so zeigt sich bei einer Erwärmung die erstere positiv electrisch, die zweite negativ.

Nach W. Thomson hat jeder Teil dieser und ähnlicher hemiedrischer Krystalle eine bestimmte von der Temperatur abhängige Polarität. Führt man den Krystall durch eine Flamme, so wird seine Oberfläche in allen Punkten so stark electrisirt, dass die Wirkung seiner innern Teile nach aussen gerade aufgehoben wird. Der Krystall übt dann keine electrische Wirkung aus und hat auch kein Bestreben seinen electrischen Zustand zu ändern. Erwärmt man ihn dagegen oder kühlt ihn langsam ab, so ändert sich die electrische Erregung seiner inneren Teilchen, so dass sie nicht mehr durch die Ladung an der Oberfläche neutralisirt werden kann. Der Krystall beginnt dann nach aussen zu wirken.

*) Intellectual Observer, 1866 März.

Plan und Anlage dieses Buches.

59. Ich werde in dem ferneren Verlaufe dieses Werkes zunächst die gewöhnliche Theorie der electrischen Wirkung auseinandersetzen, bei der man keine Rücksicht auf das Medium zwischen den electrisirten Körpern nimmt, sondern alle Erscheinungen als nur abhängig von den Ladungen und der gegenseitigen Lage der betreffenden Körper ansieht. Dadurch werden wir das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernungen, die Theorie des Potentials und die Gleichungen von Laplace und Poisson abzuleiten im Stande sein. Weiterhin werden wir dann die Ladungen und Potentiale in einem System electrisirter Körper durch Gleichungen mit einander verbinden, deren Coefficienten wir da, wo die Theorie zu ihrer Bestimmung nicht ausreicht, durch die Erfahrung eruiren müssen. Aus ihnen werden sich die zwischen electrisirten Körpern wirkenden mechanischen Kräfte berechnen lassen. Nächstdem sollen gewisse allgemeine Theoreme untersucht werden, durch welche Green, Gauss und Thomson die Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des Problems der Verteilung der Electricität fixirt haben. Eine Folge dieser Theoreme ist zum Beispiel, dass wenn irgend eine Function die Poissonsche Gleichung erfüllt und an der Oberfläche eines jeden der Conductoren mit dem Potential dieses Conductors zusammenfällt, dass sie dann allgemein das Potential des Systems in jedem Punkte des electrischen Feldes darstellt. Bei der grossen Schwierigkeit, welche die Lösung von vorgelegten Problemen meist bietet, werden wir umgekehrt auch eine Methode angeben, wie man Probleme finden kann, die einer exacten Lösung fähig sind.

Das Thomsonsche Theorem drückt die gesammte Energie eines Systems einmal durch ein Integral über den ganzen von den electrisirten Körpern ausgeschlossenen Raum, und dann auch durch ein anderes Integral, das sich auf die Oberflächen der electrisirten Körper bezieht, aus. Die Tatsache, dass eine und dieselbe Grösse durch ein Raumintegral ebenso wie durch ein Flächenintegral sich ausdrücken lässt, kann physikalisch in folgender Weise interpretirt werden. Man kann nämlich die Wirkung, die zwei Körper auf einander ausüben, entweder als das Resultat eines gewissen Zustandes des sie trennenden Mediums oder aber auch als eine directe *actio in distans* auffassen. Geht man von der letzteren Auffassungsweise aus, so kann man wohl zu einem Ausdrucke für das Wirkungsgesetz zwischen den beiden Körpern gelangen, aber jede weitere Speculation über den Vorgang bei der Einwirkung des einen Körpers auf den andern ist ausgeschlossen. Die zweite Auffassungsweise dagegen zwingt uns geradezu den Process, der bei der Action zweier Körper aufeinander in jedem Teile des Mediums sich abspielt, zu verfolgen.

Jenes Theorem lehrt auch, dass wenn wir die verschiedenen Teile des Dielectricums als Sitz der electrischen Energie betrachten, die Grösse dieser Energie in einem kleinen Teilchen des Dielectricums von dem Producte des

Quadrats der Intensität der electromotorischen Kraft an der Stelle des betrachteten Teilchens in einen Coefficienten, den wir als die specifische inductive Capacität bezeichnet haben, abhängt.

Es ist aber besser, bei einer Theorie der Dielectrica, die von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten ausgeht, zwischen der electromotorischen Kraft und der electrischen Polarisation der Teilchen des Dielectricums zu unterscheiden, denn wenn auch diese beiden Vectorgrössen nicht unabhängig von einander sind, so wirken sie doch in manchen Substanzen nicht in derselben Richtung. Bei flüssigen Dielectricis fallen beide Grössen freilich vollständig zusammen. Im allgemeinsten Fall ist die electrische Energie in der Volumeneinheit eines Mediums gleich dem halben Product der electromotorischen Kraft in die electrische Polarisation multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Wirkungsrichtungen dieser beiden Grössen einschliessen.

Die nach dieser Annahme berechnete gesammte Energie des Mediums ist dann gleich der Energie der Electrisirung der Conductoren, wie man sie unter der Annahme der Wirkung in die Ferne findet. Beide Annahmen führen also zu demselben Endresultat.

Eine nähere Untersuchung ergiebt, dass wenn die Wirkung zweier electrisirter Körper aufeinander unter Vermittelung des sie trennenden Zwischenmediums vor sich gehen soll, dieses sich in einem Zustande eines gewissen mechanischen Zwanges befinden muss, ähnlich wie ein Seil gespannt wird, wenn ein Körper auf einen andern mittelst desselben einen Zug ausübt, und wie eine Stange comprimirt wird, welche zwei Körper, die sonst zusammenfallen würden, auseinander hält.

Der Zwangzustand des Mediums zwischen electrisirten Körpern besteht also nach Faraday*) entsprechend den angeführten Beispielen in einer Spannung in Richtung der Kraftlinien und einem ihr gleichen Druck in allen zu den Kraftlinien senkrechten Richtungen. Die Grösse der Spannung sowohl wie die des Druckes ist proportional der electrischen Energie, das heisst proportional dem Quadrate der resultirenden electromotorischen Kraft und der specifischen inductiven Capacität des Dielectricums.

Nur ein Zwang der eben geschilderten Art kann die Einwirkungen electrisirter Körper auf einander und das trotzdem ungestörte Gleichgewicht des umgebenden flüssigen Mediums erklären.

Ich habe daher geglaubt, dass es für den Fortschritt der Wissenschaft wünschenswert sein dürfte, die Existenz eines solchen Zwangzustandes in dem Medium wirklich anzunehmen und zuzusehen, zu welchen Consequenzen man dadurch gelangt. Da ich aber fand, dass das Wort „electrische Spannung“ vielfach in ganz vager Bedeutung gebraucht wird, so habe ich versucht es so zu interpretiren, wie es wohl manche, die es benutzen, auch verstehen, nämlich als einen Zustand eines gewissen Zwanges in dem dielectrischen Medium, der die electrisirten Körper sich zu bewegen zwingt

*) *Exp. Res.*, Serie 11. 1297.

und zuletzt bei starker Vergrösserung eine disruptive Entladung hervorbringt. So verstanden ist die electrische Spannung ganz von derselben Art und auch so zu messen wie die Spannung eines Seils, und man darf bei einem dielectrischen Medium, das eine gewisse Tension, und nicht mehr, zu ertragen vermag, auch in ganz demselben Sinne wie bei einem Seil von einer gewissen Festigkeit desselben sprechen. So kann zum Beispiel, wie Thomson gefunden hat, die Luft unter gewöhnlichen Verhältnissen eine electrische Tension von 0,67 gr auf das qcm ertragen, ehe eine Funkenentladung eintritt.

60. Aus der Annahme, dass die Wirkung zweier electrisirter Körper auf einander nicht als eine *actio in distans* anzusehen ist, sondern durch Vermittelung des Zwischenmediums vor sich geht, folgte, dass das Dielectricum sich in einem gezwungenen Zustand befinden muss. Wir haben auch gesehen, dass der Zwang unter Zugrundelegung der geläufigen Vorstellungen von den elastischen Kräften in festen Körpern in einer Spannung längs den Kraftlinien und einem Druck in allen zu diesen senkrechten Richtungen besteht. Spannung und Druck sind sich numerisch gleich, und jedes ist proportional dem Quadrate der resultirenden Kraft in dem betrachteten Punkte des Mediums. Damit können wir dann einen Schritt weiter gehen und eine Vorstellung von der Natur der electrischen Polarisation des Mediums zu gewinnen suchen.

Wir erklären ein Körperelement für polarisirt, wenn es an zwei entgegengesetzten Enden der Quantität nach gleiche, der Qualität nach aber entgegengesetzte Eigenschaften zeigt. Permanente Magnete bieten uns ein gutes Mittel zur Versinnbildlichung der Polarität eines ganzen Körpers, sowie auch, wie wir in der Lehre vom Magnetismus sehen werden, zu der von Polarität innerer Teilchen.

Die *Dielectrische Polarisation* entsteht durch den Zwang, den die electromotorische Kraft ausübt, und verschwindet, wenn diese Kraft zu wirken aufhört. Wir können sie als eine durch die electromotorische Kraft hervorgerufene *Verschiebung* der Electricitäten der Teilchen des Dielectricums ansehen. Wirkt nämlich die electromotorische Kraft in einem Leiter, so versetzt sie die Electricität in Strömung. In einem Nichtleiter, in einem Dielectricum ist sie aber nicht im Stande, der Electricität eine solche strömende Bewegung zu erteilen, sie verschiebt nur die Electricitäten der einzelnen Teilchen in Richtung ihrer Wirkung in dem Maasse, wie es eben ihre Stärke mit sich bringt und verschiebt um so weniger, je geringer ihre Intensität ist.

Die Grösse der electrischen Verschiebung wird aber durch die Electricitätsmenge gemessen, welche durch eine Flächeneinheit vom Beginn der Verschiebung an hindurchgeht, und diese Menge ist auch das Maass für die dielectrische Polarisation.

Diese Vorstellung, dass eine electromotorische Kraft eine electrische Verschiebung hervorzubringen vermag, findet ihr Analogon in der Tatsache,

dass eine mechanische Kraft eine elastische Verschiebung verursachen kann, und die Aehnlichkeit zwischen diesen Wirkungsweisen electromotorischer und mechanischer Kräfte ist so augenscheinlich, dass ich es gewagt habe, das Verhältnis der electromotorischen Kraft zu der ihr entsprechenden electrischen Verschiebung als den Coefficienten der electrischen Elasticität oder als den *Electrischen Elasticitätscoefficienten* zu bezeichnen. Dieses Verhältnis ist übrigens verschieden für die verschiedenen Medien, und es steht in umgekehrter Proportion zu der specifischen inductiven Capacität der Dielectrica.

Die Aenderung einer electrischen Verschiebung äussert sich in einem electrischen Strome, der so lange besteht, als die Aenderung fortdauert. Da aber die electrische Verschiebung schliesslich eine disruptive Entladung verursacht, so kann dieser Strom nicht wie Ströme in Leitern beliebig in derselben Richtung fortgesetzt werden. Wahrscheinlich befinden sich der Turmalin und die andern pyroelectrischen Krystalle stets, auch wenn keine fremde electromotorische Kraft gegen sie thätig ist, in einem von ihrer Temperatur abhängigen polarisirten Zustand. Ist aber ein Körper in einem Zustande permanenter Polarisation, so wird seine Aussenseite allmählich so weit geladen, dass die Wirkung der in seinem Innern befindlichen Electricität auf ausserhalb seiner Oberfläche existirende Körper neutralisirt ist. Die Electricität auf der Aussenseite des Krystalls spielt dann fast die Rolle von gebundener Electricität, so dass sie weder bemerkt noch auch durch die gewöhnlichen Mittel, d. h. ohne Zustandsänderungen, entfernt werden kann. Deshalb ist es auch nicht möglich, die innere Polarisation in dem Krystall eher zu entdecken, als bis aussergewöhnliche Mittel, wie Temperaturänderungen, sie vergrössern oder verkleinern, da dann die Oberflächenelectricität nicht mehr im Stande ist, ihre Wirkung auf äussere Körper aufzuheben. Der Körper erscheint dann wie der Turmalin in gewisser Weise electrisirt.

Verteilt man eine Electricitätsmenge e gleichmässig über eine Kugel, so ist die Kraft in einem Punkte des die Kugel umgebenden Mediums gleich dem Verhältnis der Ladung e zu dem Quadrate des Abstandes des betrachteten Punktes von dem Centrum der Kugel. Diese resultirende Kraft bewirkt also nach unserer Theorie eine electrische Verschiebung in dem Medium, die von der Kugel fortgerichtet ist. Denken wir uns concentrisch zu dieser Kugel eine andere Kugelfläche vom Radius r gelegt, so ist die Verschiebung E durch diese Oberfläche proportional der resultirenden Kraft und dem Inhalte der Fläche. Beachtet man aber, was über die Grösse der resultirenden Kraft gesagt ist, so sieht man, dass die gesammte electrische Verschiebung E durch die fragliche Kugelfläche proportional der Ladung e, also ganz unabhängig von dem Radius der Kugelfläche, ist.

Das Verhältnis zwischen den beiden Electricitätsmengen e und E, zwischen der Ladung der leitenden Kugel und der Verschiebung durch irgend eine dieser concentrische Kugelfläche des umgebenden Mediums, können wir dadurch bestimmen, dass wir die Arbeit berechnen, welche in

dem Medium zwischen zwei concentrischen Kugelflächen geleistet wird, während sich E um δE ändert. Sind aber V_1, V_2 die Potentiale der innern bezüglich äussern Kugelfläche, so ist die electromotorische Kraft, welche die hinzukommende Verschiebung δE verursacht, gleich $V_1 - V_2$ und demnach die bei dieser Verschiebung geleistete Arbeit gleich $(V_1 - V_2)\,\delta E$. Lassen wir die innere Fläche mit der electrisirten Kugel zusammenfallen und nehmen den Radius der äussern unendlich gross, so wird V_1 gleich dem Potential V der Kugel selbst und V_2 verschwindet, so dass in dem Medium die gesammte Arbeit $V\delta E$ geleistet wird. Aendert man die Ladung e und δe, so ist die dazu nötige Arbeit $V\delta e$, und wenn diese Arbeit, wie wir voraussetzen, ganz zur Vermehrung der electrischen Verschiebung verwendet wird, so folgt, dass $\delta E = \delta e$ sein muss. E und e verschwinden aber gleichzeitig, also ergiebt sich $E = e$, d. h.:

Die nach Aussen gerichtete electrische Verschiebung durch eine Kugelfläche welche mit einer gleichmässig electrisirten Kugel, ~~welche~~ denselben Mittelpunkt hat, ist gleich der Ladung dieser Kugel.

Um uns eine klare Vorstellung von dem, was wir electrische Verschiebung genannt haben, zu verschaffen, wählen wir noch ein anderes Beispiel.

Wir stellen einen Accumulator aus zwei Platten A und B, die durch eine dielectrische Schicht C getrennt sind, her, verbinden sie mit einem Draht W und lassen durch den Draht vermittelst einer electromotorischen Kraft eine positive Electricitätsmenge Q von B nach A überströmen. Die so entstehende positive Erregung der Platte A bringt mit der negativen Erregung der Platte B eine electromotorische Kraft hervor, welche die dielectrische Schicht in der Richtung von A nach B angreift und in ihr eine electrische Verschiebung von A nach B bewirkt. Der Betrag der electrischen Verschiebung, gemessen durch die Electricitätsmenge, welche durch einen Parallelschnitt der dielectrischen Schicht hindurchgeht, ist dann (Artt. 75, 76, 111) genau gleich der Electricitätsmenge Q.

Es scheint also, dass während die electromotorische Kraft eine Electricitätsmenge durch den Draht hindurch von B nach A transportirt, gleichzeitig eine dieser gleiche Electricitätsmenge Q durch alle Parallelschnitte des Dielectricums sich von A nach B verschiebt.

Wird der Accumulator wieder entladen, so bewegt sich die Electricität entgegengesetzt wie bei der Ladung, durch den Draht geht eine Electricitätsmenge von A nach B, durch das Dielectricum eine ihr gleiche Verschiebung von B nach A, und der Zwang in dem Dielectricum hört mit der Entladung auf. Jede Ladung und Entladung repräsentirt also einen geschlossenen Stromkreis, dessen Querschnitte zu derselben Zeit von gleichen Electricitätsmengen durchflossen werden.

Bei dem Voltaischen Stromkreise hat man schon längst eine solche Bewegung der Electricität angenommen, unsere obigen Betrachtungen zeigen

aber, dass sie auch da stattfindet, wo man bisher nur von Aufhäufung von Electricitätsmengen an bestimmten Stellen gesprochen hat.

61. Das führt uns zu der sehr bemerkenswerten Consequenz der auseinandergesetzten Theorie, dass nämlich die Electricität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt, also ihre Gesammtmenge innerhalb einer geschlossenen Fläche stets dieselbe bleibt. Diese Behauptung scheint schon durch die Tatsache widerlegt zu werden, dass man einen Conductor laden und in den geschlossenen Raum bringen kann, wodurch der Inhalt dieses Raumes an Electricität geändert werden würde. Verfolgen wir aber die Erscheinung der Electrisirung nicht nur in soweit als die Oberflächen der Leiter und Dielectrica dabei geladen werden, sondern ziehen wir auch die gleichzeitig in dem Dielectricum auftretende Verschiebung in Betracht, so zeigt sich jener Widerspruch als nur scheinbar. Ist nämlich der Conductor mit positiver Electricität geladen, und erstreckt sich das dielectrische Medium nach allen Richtungen jenseits der geschlossenen Fläche, so tritt eine electrische Polarisation ein, in Folge deren eine electrische Verschiebung von innen nach aussen durch die geschlossene Fläche vor sich geht. Das Flächenintegral der Verschiebung durch die ganze Fläche ist dann gleich der Ladung des Conductors in derselben. Sobald also der Conductor in einen abgeschlossenen Raum versenkt wird, tritt durch die Verschiebung eine der Ladung des Conductors gleiche Quantität von Electricität durch die Fläche aus dem Raum heraus, und der Inhalt des Raumes an Electricität wird wieder so gross, wie er vor Einführung des geladenen Conductors war.

Im fünften Capitel wird die Theorie der electrischen Polarisation weitläufig auseinandergesetzt werden und in Art. 334 werde ich sie auch durch mechanische Operationen zu illustriren suchen. Ihre hohe Wichtigkeit wird aber erst bei der Untersuchung der electromagnetischen Phänomene ins volle Licht treten können.

62. Fassen wir die Hauptannahmen der eben auseinandergesetzten Theorie noch einmal zusammen, so ergeben sich die folgenden Grundanschauungen.

Der Sitz der Energie einer electrischen Erregung befindet sich in dem Dielectricum, gleichgiltig ob dasselbe fest, flüssig oder gasförmig, dicht oder dünn ist. Es braucht auch nicht aus der gewöhnlichen groben Materie zu bestehen, wenn es nur überhaupt eine electrische Action vermitteln kann.

Die Energie in irgend einem Teile des Mediums ist in Form eines Zwanges aufgespeichert, den wir als eine dielectrische Polarisation bezeichnen, deren Betrag von der Grösse der resultirenden electromotorischen Kraft in jenem Teile abhängt.

Die Wirkung der electromotorischen Kraft auf ein dielectrisches Medium äussert sich in einer — wie wir es genannt haben — electrischen Verschiebung. Die allgemeinste Beziehung zwischen der Kraft und der Verschiebung kann erst in der Theorie der Leitung untersucht werden, doch geht in den wichtigsten Fällen die Verschiebung in Richtung der wirkenden Kraft vor

sich und ist numerisch der Kraftintensität multiplicirt mit $K/4\pi$ gleich, wo K die specifische inductive Capacität des betreffenden Dielectricums angiebt.

Die Energie in der Volumeneinheit des Dielectricums, welche von der dielectrischen Polarisation herrührt, ist gleich dem halben Producte der electromotorischen Kraft und der electrischen Verschiebung multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Richtungen beider einschliessen.

Bei flüssigen Dielectricis ist die Polarisation von einer Spannung in Richtung der Kraftlinien und einem dieser Spannung gleichen Drucke senkrecht zu den Kraftlinien begleitet. Die Grösse der Spannung bezüglich des Druckes auf die Flächeneinheit ist an jeder Stelle numerisch gleich der dort in der Volumeinheit aufgespeicherten Energie.

Zerteilen wir das Dielectricum in kleine Elemente, so haben wir uns die Oberfläche jedes derselben als geladen vorzustellen. Die Flächendichte der Electricität in irgend einem Punkte einer solchen Oberfläche ist dann an Grösse gleich der an diesem Punkte nach Innen stattgehabten electrischen Verschiebung. Findet also eine Verschiebung der Electricität in positiver Richtung statt, so ist das Element auf der positiven Seite negativ, auf der negativen positiv geladen. Natürlich heben sich die Wirkungen dieser Electricitäten der einzelnen Elemente im Innern des Dielectricums auf. An der Oberfläche dagegen und an den Stellen in dem Innern, die an sich schon eine Ladung besitzen, treten sie zu Tage.

Die electrische Verschiebung besteht in einer Bewegung der Electricität von derselben Art wie der Transport der Electricität durch Leitung, was wir auch sonst unter Electricität und Bewegung der Electricität verstehen mögen. Der einzige Unterschied zwischen electrischer Verschiebung in einem Dielectricum und electrischer Strömung in einem Leiter besteht darin, dass jene gegen einen Widerstand zu kämpfen hat, welcher sich mit dem Widerstande vergleichen lässt, den elastische Körper Verschiebungen ihrer Teilchen entgegensetzen, so dass die Electricität sich sofort zurückbewegt, so wie die electromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, bei dieser dagegen giebt die electrische Elasticität fortdauernd nach, und die Electricität wird tatsächlich von Ort zu Ort fortgeleitet. In der Tat hängt auch bei einem electrischen Strome der Widerstand nicht von der gesammten aus dem Gleichgewicht gebrachten Electricität ab, sondern nur von der Menge, welche einen Querschnitt des Leiters in bestimmter Zeit passirt.

In jedem Falle aber folgt die Bewegung der Electricität demselben Gesetze wie die einer incompressibeln Flüssigkeit, vermöge dessen in einem abgeschlossenen Raum genau soviel Electricität eintreten muss als aus ihm herausfliesst.

Ein electrischer Strom läuft also stets in sich zurück, und das ist, wie wir sehen werden, für die Theorie des Electromagnetismus von der grössten Bedeutung.

Da, wie wir bemerkt haben, die Hypothese einer Wirkung in die Ferne zu ganz denselben Resultaten führt wie die Annahme einer Wirkung durch

Vermittelung eines Mediums, so kann man natürlich die electrischen Phänomene, so weit sie nicht noch andere Hypothesen erfordern, durch die eine der genannten Theorieen so gut wie durch die andere verfolgen. So hat denn auch Mossotti die mathematische Theorie der Dielectrica dadurch aus der gewöhnlichen Attractionstheorie abgeleitet, dass er in der Poissonschen Deduction der magnetischen Induction aus der Theorie der magnetischen Fluida den einzelnen Symbolen statt ihrer magnetischen eine electrische Bedeutung beilegte. Infolge dessen nahm er an, dass jedes Dielectricum aus kleinen leitenden Teilchen bestehe, die durch Induction an entgegengesetzten Enden entgegengesetzt electrisirt werden können, die aber Electricität weder aufnehmen noch abzugeben vermögen, weil sie von einander vollständig durch irgend ein anderes nicht leitendes Mittel getrennt sind.

Diese Hypothese über die Constitution der Dielectrica harmonirt mit den Gesetzen der electrischen Wirkung, und es kann wol auch sein, dass sie der Wirklichkeit entspricht. Nach ihr kann die specifische inductive Capacität eines Dielectricums wol grösser, nicht aber kleiner als die der Luft oder die eines Vacuums sein. Bis jetzt weiss man auch noch keine Substanz, deren specifische inductive Capacität kleiner wäre als die der Luft, fände sich aber doch noch eine solche, so müsste Mossotti's Theorie aufgegeben werden. Seine Formeln würden sich aber nur darin ändern, dass ein in ihnen vertretener Coefficient ein anderes Zeichen bekäme.

Es kommt in der Physik oft genug vor, dass Gleichungen von derselben Form zur Beschreibung so verschiedenartiger Phänomene, wie es etwa die electrische Induction durch Dielectrica, die Leitung durch Conductoren und die magnetische Induction sind, verwendet werden können. In allen solchen Fällen wird also die Beziehung zwischen der Kraft und dem von ihr hervorgebrachten Effect durch eine Reihe von Gleichungen derselben Art fixirt.

Ist demnach ein Problem für eine Erscheinungsklasse gelöst, so hat man das Resultat nur in dem Sinne der andern zu interpretiren, um sofort die Lösung eines entsprechenden Problems dieser andern Klasse von Erscheinungen zu erhalten.

Cap. II.

Elementare mathematische Theorie der statischen Electricität.

—×—

Mathematische Definition der Electricitätsmenge.

63. Wir haben gesehen, dass man einen Körper stets so laden kann, dass seine Electrisirung der eines oder mehrerer anderer Körper gleich wird.

Ferner haben wir gezeigt, dass zwei gleich und entgegengesetzt electrisirte Körper, wenn man sie in ein leitendes Gefäss bringt, gar keine Wirkung auf ausserhalb befindliche Körper ausüben. Für diese und noch andere Tatsachen gewinnen wir einen präcisen Ausdruck, wenn wir einen electrischen Körper als einen mit einer gewissen „Quantität e Electricität geladenen Körper" beschreiben. Ist die Electrisirung positiv, besteht sie also nach der allgemein angenommenen Festsetzung aus Glaselectricität, so ist e positiv zu nehmen; fällt sie mit der des Harzes zusammen, so ist e negativ zu rechnen. $-e$ ist also entweder eine negative Quantität positiver Electricität oder eine positive Quantität negativer Electricität.

Addirt man zwei gleiche und entgegengesetzte Ladungen $+e$ und $-e$, so ist die resultirende Ladung gleich Null, der Körper also garnicht electrisirt. Jeder unelectrische Körper kann demnach als mit gleichen und jeder electrisirte als mit ungleichen Mengen der entgegengesetzten Electricitätsarten geladen angesehen werden. Die algebraische Summe der beiden Ladungen bildet dann die beobachtete Electrisirung. Es ist aber klar, dass diese Ansichten über die Constitution der Electricität der Körper zunächst rein künstlich sind, wie man ja auch die Geschwindigkeit eines Körpers als aus mehreren Geschwindigkeiten sich zusammengesetzt denken kann.

Verteilung der Electricität in einem Körper, Raumdichte.

64. Definition. Die *Raumdichte* der Electricität in einem bestimmten Punkte eines von ihr erfüllten Raumes ist gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der in einer den Punkt umgebenden stetig abnehmenden kleinen Kugel enthaltenen Electricitätsmenge zu dem Volumen dieser Kugel.

Die so definirte Raumdichte, ρ, kann je nach der Electricitätsart, um die es sich handelt, positiv oder negativ sein.

Verteilung auf einer Fläche, Flächendichte.

Theorie sowol wie Experiment haben gelehrt, dass die Electricität sich in vielen Fällen auf die Oberfläche eines Körpers zurückzieht und nur diese ladet. Hier würde also die obige Definition für die Dichte einen unendlich grossen Wert ergeben.

Ich schlage daher zu ihrer Definition einen andern Weg ein.

Definition. Die electrische Dichte in einem Punkte einer electrisirten Fläche, die *Flächendichte* der Electricität, ist gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der in einer um den betrachteten Punkt geschlagenen stetig abnehmenden Kugel enthaltenen Electricitätsmenge zu dem Inhalt des von der Kugel ausgeschnittenen Flächenstückes.

Ich bezeichne die Flächendichte durch σ.

Betrachtet man mit manchen Physikern die Electricität als ein materielles Fluidum oder als ein Aggregat von einzelnen Partikeln, so kann man bei einer Verteilung derselben auf einer Fläche nur an eine der Fläche anhaftende electrische Schicht von gewisser Dicke, θ, denken. Die Raumdichte ρ_0 einer solchen Schicht würde dann diejenige Dichte sein, die die Electricität haben müsste, wenn ihre Teilchen so nahe als es überhaupt möglich ist an einander gerückt wären. Demnach ist nach dieser Theorie

$$\theta \rho_0 = \sigma.$$

Ist σ negativ, so würde das nach der dualistischen Theorie der Electricität bedeuten, dass eine gewisse Schicht von der Dicke θ in einem Körper keine positive Electricität enthält und lediglich mit negativer gefüllt ist, nach der unitarischen dagegen würde in dieser Schicht überhaupt keine Electricität, sondern nur Materie vorhanden sein.

Bisher spricht aber noch keine Erfahrung weder dafür, dass die electrische Schicht eine gewisse Dicke besitzt, noch dafür, dass die Electricität eine materielle Flüssigkeit oder ein Aggregat von einzelnen Partikeln ist. Deshalb ist es besser die Flächendichte als selbstständige Grösse zu betrachten, statt sie durch die Dicke der Oberflächenschicht und die in ihr herrschende Raumdichte zu definiren.

Verteilung längs einer Linie, Liniendichte.

In manchen Fällen ist es von Vorteil die Electricität sich längs einer Linie, das heisst längs eines Körpers verteilt zu denken, dessen Dicke vernachlässigt werden kann.

Definition. Die Dichte dieser Verteilung in einem Punkte der Linie, die *Liniendichte*, ist dann gleich dem Grenzwerte des Verhältnisses der in einem daselbst befindlichen stetig abnehmenden Linienelement enthaltenen Electricitätsmenge zu der Länge dieses Elementes.

Electricitätsmenge.

Ist also λ die Liniendichte, ds ein Element der Linie; σ die Flächendichte, dS ein Element der Fläche; ρ die Raumdichte, $d\tau$ ein Element des Raumes, so haben wir

Electricitätsmenge auf einer Linie $= \int \lambda ds$,
Electricitätsmenge auf einer Fläche $= \iint \sigma dS$,
Electricitätsmenge in einem Körper $= \iiint \rho d\tau$.

Die Integrationsgrenzen werden selbstverständlich durch die Grenzen der Linie, der Fläche bezüglich des Körpers bestimmt.

e, λ, σ, ρ sind verschiedenartige Grössen, und jede folgende ist um eine Raumdimension ärmer als die vorhergehende. e, λl, σl^2, ρl^3 sind also gleichartige Grössen. Bezeichnet man durch $[L]$ die Längeneinheit und durch $[\lambda]$, $[\sigma]$, $[\rho]$ die Einheiten für λ, σ, ρ, so drücken

$$[e],\ [\lambda L],\ [\sigma L^2],\ [\rho L^3]$$

alle eine Einheit der Electricität aus.

Definition der Electricitätseinheit.

65. Definition. Zwei gleich stark positiv geladene im Verhältnis zu ihrem gegenseitigen Abstand unendlich kleine Körper, die in der Einheit der Entfernung sich gegenseitig mit der absoluten Einheit der Kraft angreifen, enthalten je eine *Electricitätseinheit*.

Ist die Ladung der Körper gleichnamig, so ist die Krafteinheit eine Repulsionseinheit, ist sie bei dem einen entgegengesetzt wie bei dem andern, so ist jene Krafteinheit eine Attractionseinheit. Die Krafteinheit soll gemäss der für sie in Art. 6 gegebenen mechanischen Definition bestimmt sein.

Die Wirkung zweier Electricitätsmengen aufeinander wird der Erfahrung nach durch die Anwesenheit anderer Electricitätsmengen nicht weiter afficirt. Demnach ist die Abstossungskraft zwischen zwei gleichnamigen Electricitätsmengen e, e', welche auf zwei sehr kleinen Körpern concentrirt sind, in der Einheit der Entfernung gleich ee'.

Kraftgesetz für electrisirte Körper.

66. Wie wir bereits bemerkt haben, hat Coulomb experimentell gezeigt, dass zwei im Verhältnis zu ihrer Entfernung sehr kleine electrisirte Körper auf einander eine Wirkung ausüben, die im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat ihrer Entfernung steht.

Die Abstossungskraft zwischen zwei mit den Electricitätsmengen e, e' gleichnamig geladenen und in der Entfernung r befindlichen sehr kleinen Körpern ist also

$$\frac{ee'}{r^2}$$

In Art. 74 werden wir sehen, dass dieses das einzige Gesetz ist, das sich mit der Tatsache, dass ein Conductor in dem Innern eines anderen hohlen und geschlossenen Conductors durch Berührung mit diesem seine ganze Electricität verliert, vereinbaren lässt.

Man darf auch annehmen, dass unsere Ueberzeugung von der Richtigkeit des Coulomb schen Gesetzes weit mehr auf dieser leicht zu verificirenden Tatsache als auf den directen Messungen, die Coulomb für die Wirkung zweier electrisirter Körper aufeinander ausgeführt hat, beruht.

Resultirende Kraft zwischen zwei electrischen Körpern.

67. Für zwei beliebig grosse electrisirte Körper berechnet man die Kraft aus dem Coulomb schen Gesetz nach dem bekannten Verfahren dadurch, dass man jeden der beiden Körper in Elemente zerlegt. Jedes Element des einen Körpers greift dann alle Elemente des andern an, so dass wir ein System von Kräften erhalten, die nach den Regeln der Statik zusammenzusetzen sind.

Bezeichnen also x, y, z die Coordinaten eines Punktes des einen Körpers, ρ die Dichte der Electricität in diesem Punkte, und gelten accentuirte Buchstaben für die entsprechenden Grössen bei dem andern Körper, so haben wir für die Kraftcomponente in Richtung der x Axe das sechsfache Integral

$$X = \int\int\int\int\int\int \frac{\rho\rho'(x-x')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen sind erst über den einen und dann über den andern Körper auszuführen.

68. Eine wesentliche Erleichterung für die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes erlangen wir dadurch, dass wir uns einen der Körper sehr klein denken, ihm dem entsprechend eine kleine Ladung zuschreiben, und den andern in beliebiger Form annehmen. Wir erreichen damit nämlich, dass der kleine Körper wegen seiner geringfügigen Ladung keine merkbaren electrischen Störungen im grossen Körper hervorzubringen vermag.

Ist also e die Ladung des kleinen Körpers, Re die auf ihn im Punkte (x, y, z) wirkende Kraft, und bezeichnen l, m, n die Richtungscosinusse dieser Kraft, so haben wir für die Kraftcomponenten Xe, Ye, Ze in Richtung der drei Coordinatenaxen

1) $$Xe = Rel,\quad Ye = Rem,\quad Ze = Ren.$$

Ich nenne R die resultirende electrische *Kraftintensität**) in dem Punkte (x, y, z). Ihre Componenten X, Y, Z sind

2) $$X = Rl,\quad Y = Rm,\quad Z = Rn.$$

*) Die Intensität der electrischen und magnetischen Kräfte findet ihr Analogon in der Intensität der Schwere, die man gewöhnlich durch g bezeichnet.

Wenn ich aber von der resultirenden Kraftintensität in einem Punkte spreche, so sage ich damit nicht, dass in dem fraglichen Punkte wirklich eine solche Kraft ausgeübt wird, sondern ich meine, dass wenn dort ein electrischer Punkt mit der Ladung e vorhanden wäre, derselbe von einer Kraft Re angegriffen werden würde.

Definition. Die resultirende electrische *Kraftintensität* in einem Punkte ist gleich der auf einen mit einer positiven Electricitätseinheit geladenen und ohne Störung des electrischen Feldes in den betreffenden Punkt versetzten kleinen Körper ausgeübten Kraft.

Die Wirkung dieser Kraft besteht darin, dass sie einerseits den Körper fortzubewegen und andererseits seine positive Electricität in ihre eigene, seine negative in eine dazu entgegengesetzte Richtung zu treiben sucht. Wegen der zuletzt genannten Wirkung bezeichnet man die Grösse R auch als die *Electromotorische Intensität* in dem Punkte (x, y, z).

Wollen wir die resultirende Kraftintensität in ihrer Eigenschaft als Vectorgrösse betrachten, so wählen wir für sie als Symbol den deutschen Buchstaben $\mathfrak{E}$.

Bei einem Dielectricum mit der specifischen inductiven Capacität K findet, wie wir wissen, in Richtung der Kraft eine electrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ statt. Die durch eine Flächeneinheit senkrecht zu $\mathfrak{E}$ in Richtung von $\mathfrak{E}$ verschobene Electricitätsmenge ist gegeben durch

$$3) \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}.$$

Ist dagegen der Körper ein Leiter, so entsteht, weil der Widerstand fortwährend gerade überwunden wird, ein Strom von geleiteter Electricität, der so lange anhält als die Kraft $\mathfrak{E}$ wirkt.

Das Linienintegral der electrischen Kraftintensität.

69. Die electromotorische Kraftintensität, den Bogen einer Curve AP entlang, misst die Arbeit, welche die electrische Kraft leistet, wenn sie eine Einheit positiver Electricität von dem Anfange A des Bogens bis zu seinem Ende P fortbewegt.

Bezeichnet s die Länge des betreffenden Bogens von A ab gezählt, R die electrische Kraftintensität und ε den Winkel, den R mit der Tangente der Curve bildet, so ist diese Arbeit während der Verschiebung der Electricitätseinheit auf dem Bogenelemente ds gleich

$$R \cos\varepsilon \, ds,$$

somit die gesammte electromotorische Kraftintensität

$$1a) \qquad E = \int_0^s R \cos\varepsilon \, ds.$$

Nach Einführung der Componenten für die Kraftintensität wird daraus

1b) $$E = \int_0^s \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Sind X, Y, Z so beschaffen, dass $X dx + Y dy + Z dz$ das vollständige Differential einer Function $-V$ von x, y, z ist, so erhalten wir

2) $$E = \int_0^s (X dx + Y dy + Z dz) = -\int_0^s dV = V_A - V_P.$$

Wie man dabei von dem Punkte A zu dem P gelangt, ist gleichgiltig, da das Endresultat lediglich von den beiden Werten des V in den beiden Endpunkten der Curve abhängt.

V ist in diesem Falle eine scalare Function der Lage des Punktes (x, y, z) im Raume also vollständig bestimmt sobald die Coordinaten des Punktes gegeben sind, wie auch sonst die Axen des benutzten Coordinatensystems im Raume gerichtet sein mögen. Art. 16.

Da wir im Folgenden sehr viel mit solchen Functionen, wie die eben benutzte zu tun haben werden, so fügen wir gleich hinzu, dass unter einer Function der Lage eines Punktes eine solche Function verstanden werden soll, die allein durch die Coordinaten des Punktes völlig bestimmt ist. Es ist dabei keineswegs nötig, dass die Function für alle Punkte des Raumes durch denselben Ausdruck dargestellt wird.

In der Tat kommt es oft genug vor, dass eine solche Function auf der einen Seite einer Fläche eine ganz andere Form hat als auf der andern.

Potentialfunction.

70. Die Bedingung, dass $X dx + Y dy + Z dz$ ein vollständiges Differential ist, wird stets dann erfüllt, wenn die Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, Attractionen oder Repulsionen ihre Entstehung verdankt, die nur von den Entfernungen des betrachteten Punktes von gewissen andern Punkten abhängen.

Ist nämlich r_1 der Abstand unseres Punktes (x, y, z) von einem der letztgenannten Punkte und R_1 die Abstossungskraft, so haben wir

$$X_1 = R_1 \frac{x - x_1}{r_1} = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial x}, \quad Y_1 = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial y}, \quad Z_1 = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial z},$$

mithin

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = R_1 dr_1$$

und da R_1 eine Function von r_1 allein sein sollte, so ist $R_1 dr_1$ das vollständige Differential einer Function $-V_1$, von r_1.

Aehnliches gilt für eine andere Kraft R_2, die von einem von (x, y, z) um r_2 abstehenden Centrum ausgeht, so dass

$$X_2\,dx + Y_2\,dy + Z_2\,dz = R_2\,dr_2 = -\,dV_2$$

ist, und da die resultirenden Componenten gleich den Summen der entsprechenden Partialcomponenten sind, so hat man

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,dV_1 - dV_2 \ldots = -\,dV.$$

Das Integral

$$-\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = +\int dV$$

wird, wenn es in der Unendlichkeit verschwindet, als *Potentialfunction* bezeichnet.

Die Einführung dieser Function hat man Laplace zu verdanken, der sich ihrer bei der Bestimmung der Attraction der Erde bediente. Den Namen „Potentialfunction" hat sie aber von Green erhalten. Gauss bediente sich in seinen unabhängig von Green geführten Untersuchungen der Bezeichnung Potential, die nachmals von Clausius und andern Physikern auf die Arbeit übertragen wurde, welche geleistet wird, wenn zwei oder mehr Körper sich von einander unendlich weit entfernen. Der letzteren Auffassung entspricht die Definition, welche W. Thomson gegeben hat, die wir auch für die Folge adoptiren.

Definition des Potentials. Das electrische Potential in einem Punkte ist gleich der Arbeit, welche von den electrischen Kräften geleistet wird, wenn eine Einheit von Electricität, die diesem Punkte, ohne irgend welche Störungen im electrischen Felde hervorzubringen, mitgeteilt worden ist, mit dem Punkte bis in die Unendlichkeit (oder bis zu einem Punkte, wo das Potential Null ist) entfernt wird, oder, was dasselbe ist, gleich der Arbeit, welche von fremden Kräften geleistet werden muss, wenn eine Electricitätseinheit aus der Unendlichkeit (oder von einem Punkte, wo das Potential Null ist) ohne weitere Störungen des electrischen Feldes bis zu dem betrachteten Punkte gebracht wird.

Darstellung der Kraftintensität und ihrer Componenten durch das Potential.

71. Wir fanden für die electromotorische Kraft E_{AB} entlang einer Curve AB

1) $$E_{AB} = V_A - V_B.$$

Daraus folgt für die Kraftcomponente in Richtung des Curvenelements ∂s der Ausdruck

2) $$R\cos\varepsilon = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Ersetzt man ∂s der Reihe nach durch $\partial x, \partial y, \partial z$, so ergiebt sich

3) $$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

4) $$R = \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Potential eines Conductors.

72. Unter Conductor verstehen wir bekanntlich einen Körper, in welchem die Electricität unter dem Einfluss auch der geringsten electromotorischen Kraft sich von einer Stelle zur andern bewegt. Findet also eine solche Bewegung nicht statt, das heisst, ist die Electricität in dem Conductor im Gleichgewicht, so kann auch keine angreifende electromotorische Kraft tätig sein, daher ist in allen Punkten des Conductors $R = 0$. Wir haben also zufolge der Gleichung 4) des vorigen Art.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ oder}$$

$$V = \text{Const.} = C.$$

In einem Conductor hat demnach das Potential in allen Punkten einen und denselben Wert.

Die Grösse C heisst, weil sie eben für alle Punkte des Conductors das Potential darstellt, das Potential oder das *Potentialniveau* des Conductors, und sie ist gleich der Arbeit, welche von äussern Kräften geleistet wird, wenn man eine Electricitätseinheit aus der Unendlichkeit auf den Conductor versetzt, ohne daselbst die electrische Verteilung irgendwie zu verändern.

Es kann übrigens vorkommen, dass die Electricität in einem Conductor in Gleichgewicht ist, ohne dass das Potential in allen Punkten des Conductors einen und denselben Wert hat. Der Conductor muss dann aber stets aus mindestens zwei verschiedenen oder auch aus zwei gleichartigen, aber verschieden temperirten sich berührenden Körpern bestehen. Denn, wie wir in Art. 246 sehen werden, tritt dann stets eine electromotorische Kraft auf, welche durch die Berührungsfläche hindurch wirkt, und unter deren Einfluss die Electricität sich im Gleichgewicht befindet, wenn das Potential des einen Körpers höher als das des andern ist.

Wir nehmen deshalb vorläufig an, dass ein Conductor nur aus einer Substanz besteht und überall dieselbe Temperatur hat.

Verbindet man zwei Conductoren A und B, deren Potentiale durch V_A bezüglich V_B dargestelit werden, durch einen Draht, so wirkt in der Ausdehnung dieses Drahtes eine electromotorische Kraft

$$V_A - V_B$$

in Richtung von A nach B. Es geht dann positive Electricität von dem Conductor mit dem höhern Potential zu dem mit dem niederern über. Das

Potential nimmt in der Electricitätslehre physikalisch und analytisch zur Electricität dieselbe Stellung ein, wie der Druck in der Hydrostatik zur Flüssigkeit und die Temperatur in der Wärmelehre zur Wärme.

Electricität, Flüssigkeit und Wärme streben von Orten höhern Potentials, Druckes bezüglich Temperatur zu Orten, wo die genannten Grössen geringere Werte besitzen. Nun ist Flüssigkeit sicher eine materielle Substanz, Wärme aber ebenso sicher keine materielle Substanz, wir erlangen also durch die eben bezeichnete Analogie zwischen Wärme, Flüssigkeit und Electricität weiter nichts als eine Beihülfe bei der Betrachtung der Beziehungen von Electricitätsmengen zu einander. Wir dürfen aber weder aus ihrer Analogie zur Wärme auf eine nicht materielle, noch aus der zur Flüssigkeit auf eine materielle Constitution der Electricität schliessen.

Potential eines electrischen Systems.

73. Es seien x, y, z die Coordinaten eines mit der Electricitätsmenge e geladenen Punktes und r sein Abstand von einem andern Punkte (x', y', z'), dann ist

$1_1)$ $$V = +\int_r^\infty R\,dr = +\int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr = \frac{e}{r}$$

Sind allgemeiner (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2)\ldots$ die Coordinaten anderer mit den Electricitätsmengen $e_1, e_2\ldots$ geladener Punkte und $r_1, r_2, \ldots$ ihre Entfernungen von dem Punkte (x', y', z'), so haben wir für das Potential des Punktsystems in dem Punkte (x', y', z')

1) $$V = \Sigma\left(\frac{e}{r}\right).$$

Bildet das Punktsystem einen Körper, in welchem in einem Punkt (x, y, z) die Electricität die Dichte ρ hat, so verwandelt sich die Summe in ein Integral, und wir erhalten für das Potential des Körpers auf den Punkt (x', y', z')

2) $$V = \iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz,$$

wo

$$r = \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ist, und die Integration sich über den ganzen Körper erstreckt.

Ueber den Beweis des Gesetzes vom umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung.

74a. Man kann wol die Tatsache, dass electrisirte Körper auf einander im umgekehrten Verhältnis des Quadrats ihrer Entfernung einwirken, durch

die Coulombschen Versuche an der Torsionswaage als genügend gesichert betrachten. Inzwischen hängt der wahrscheinliche Fehler des Resultats solcher Experimente von den wahrscheinlichen Fehlern der einzelnen Versuche ab, und diese können, wenn die Versuche mit der Torsionswaage ausgeführt werden, sehr beträchtlich anwachsen, falls der Experimentator nicht ganz besondere Sorgfalt dem Arrangement und der Ausführung seiner Versuche widmet.

Eine weit genauere Verification des Kraftgesetzes können wir durch einen dem in Art. 32 beschriebenen Experiment VII ähnlichen Versuch erhalten. Cavendish hat schon im vorigen Jahrhundert in einem neuerdings erst veröffentlichten Werke über Electricität die Evidenz des Kraftgesetzes von der Ausführbarkeit eines solchen Versuches abhängig gemacht.

Er befestigte eine vollständige Kugel an einen isolirenden Ständer und zwei Halbkugeln durch Glasstangen an 2 hölzerne Rahmen, die von einem Querbalken herabhingen. Brachte er die beiden Holzrahmen aneinander, so bildeten die Halbkugeln eine mit der vollständigen Kugel concentrische isolirte Kugelschale.

Mit Hilfe eines kurzen Drahtes, an welchem ein seidener Faden geknüpft war, um ihn ohne den Apparat zu entladen, entfernen zu können, stellte er dann eine leitende Verbindung zwischen der Kugel und den beiden Halbkugeln her. Zur Ladung der Halbkugeln diente ihm eine Leydener Flasche, deren Potential er vorher mit einem Electrometer bestimmte. Unmittelbar nach der Electrisirung zog er den Verbindungsdraht an der Seidenschnur fort, entfernte die Halbkugeln und entlud sie. Als er dann mit Hilfe eines Electrometers aus Hollundermarkkügelchen die Vollkugel untersuchte, konnte er auf ihr keine Spur von Electricität entdecken.

Die Empfindlichkeit seines Electrometers, das damals (1773) als das delicateste Electroskop galt, untersuchte er dadurch, dass er der Kugel eine vorher bestimmte Ladung mitteilte und ihre Grösse mit seinem Electrometer nochmals auf der Kugel maass. So fand er, dass die Kugel noch nicht den 60sten Teil der ganzen dem Apparat erteilten Ladung enthalten konnte, ohne durch das Electrometer ihre Electrisirung anzuzeigen.

Er nahm nunmehr ein Wirkungsgesetz an, in welchem der negative Exponent der Entfernung $2 +$ einem Bruche betrug, und berechnete damit, dass wenn dieser Bruch auch nur 0,02 wäre, die Kugel eine Ladung von $^1/_{57}$ der Gesammtladung in dem beschriebenen Experiment hätte zeigen müssen, die sich also durch sein Electrometer verraten haben würde.

74b. Dieser fundamentale Versuch ist neuerdings im Cavendish-Laboratorium mit einigen Abänderungen wiederholt worden. Die beiden Halbkugeln wurden an isolirende Ständer angebracht und die Vollkugel mit einem Ebonitring gleich in die ihr zukommende Stellung innerhalb der beiden Kugeln befestigt. Man umging so den isolirenden Ständer für die Halbkugel und hatte keine Störungen von der Electricität zu befürchten, die längs der Fläche des Ständers zur Kugel hinaufkriechen konnte. Nach

Erteilung einer Ladung wurden die Halbkugeln nicht aus ihrer Position entfernt, sondern direct zur Erde entladen. Nun zeigte sich zwar die Einwirkung einer der Kugel selbst gegebenen Ladung auf das Electrometer kleiner, wenn die Kugel von den Halbkugeln eingeschlossen war, als wenn sie ganz frei dastand, allein dieser Nachteil wurde mehr als aufgewogen durch den vollständigen Schutz, den die Halbkugeln der Vollkugel gegen äussere electrische Einflüsse gewährten.

Die aus den Halbkugeln gebildete Schale besass an einer Stelle eine Durchbohrung, welche durch einen kleinen Deckel geschlossen werden konnte. An dem Deckel befand sich einerseits der kurze Verbindungsdraht zwischen der Kugel und der sie umgebenden Schale und andererseits ein Seidenfaden. Schloss der Deckel die Oeffnung, so befand sich die Kugel in leitender Verbindung mit der Schale. Zog man den Deckel an dem Seidenfaden fort, so wurde diese Verbindung aufgehoben, und man konnte durch die Durchbohrung eine Electrode des Electrometers zur Vollkugel einführen.

Das benutzte Electrometer war ein Thomsonsches Quadrantelectrometer, wie es in Art. 219 beschrieben werden soll. Sein Gehäuse und eine seiner Electroden befanden sich stets zur Erde abgeleitet, auch die andere Electrode, die Tastelectrode, stand solange mit der Erde in Verbindung, bis die Schale entladen war.

Die der Kugelschale mitgeteilte Ladung wurde durch die von ihr in einer kleinen, isolirt aufgestellten und während der Ladung zur Erde abgeleiteten Messingkugel influenzirte Electricität bestimmt.

Die einzelnen Operationen bei dem Versuch wurden wie folgt vorgenommen.

Die Schale wurde durch eine Leydener Flasche positiv geladen. Die kleine Messingkugel wurde zur Erde abgeleitet, und, nachdem sie durch Influenz eine negative Ladung erhalten hatte, wieder isolirt.

Man entfernte dann an dem Seidenfaden den Verbindungsdraht zwischen Vollkugel und Kugelschale und entlud die Kugelschale zur Erde, mit der man sie auch weiter in Verbindung liess.

Die Tastelectrode des Electrometers wurde aus ihrer Verbindung mit der Erde gelöst und durch die Durchbohrung der Schale mit der Vollkugel in Berührung gebracht.

Das Electrometer hätte nun, wenn die Kugel electrisirt gewesen wäre, eine Ladung anzeigen müssen, es war aber nicht möglich, auch nur den geringsten Effect bei Berührung der Electrode mit der Kugel auf das Electrometer zu entdecken.

Zur Bestimmung der Empfindlichkeit des Apparates wurde die Schale von der Erdleitung gelöst und die kleine Messingkugel zur Erde entladen. Das Electrometer zeigte dann eine positive Ablenkung D.

Nun war die negative Ladung der Messingkugel etwa $^1/_{54}$ von der ursprünglichen Ladung der Schale, und die von der Messingkugel rückwärts in die entladene und zur Erde abgeleitete Schale influenzirte positive Elec-

tricitätsmenge etwa $^1/_9$ der Ladung der Messingkugel. Das Electrometer zeigte nach Ableitung der Messingkugel zur Erde diese Ladung der Kugelschale, die doch nur $^1/_{486}$ ihrer ursprünglichen Ladung betrug, sehr deutlich an. Nimmt man in dem Wirkungsgesetz für die Potenz r^{-2}, allgemeiner r^{q-2} an, so müsste nach der Gleichung 8_1), die wir bald in dem Art. 74d abzuleiten Gelegenheit haben werden, die Vollkugel eine Ladung $-0{,}14789q$ von der der Schale besitzen.

Ist also $\pm d$ die grösste nicht mehr beobachtbare Deflexion des Electrometers und D die bei der Ladung der Schale durch Influenz der Messingkugel an dem Electrometer beobachtete Deflexion, so kann q nicht grösser sein als

$$\pm \frac{1}{72} \frac{d}{D}.$$

Es war aber selbst bei ganz roher Ausführung eines Experiments D immer noch mehr als 300mal so gross wie d, und folglich kann q nicht grösser sein als

$$\pm \frac{1}{21600}.$$

Theorie des Experiments.

74c. Die Electricität befindet sich nur auf den Oberflächen der Kugeln, daher haben wir zunächst das Potential einer gleichmässig electrisirten Kugelfläche auf einen Punkt unter Annahme, dass das Wirkungsgesetz durch eine Function $\varphi(r)$ die Entfernung bestimmt wird, zu berechnen.

Es sei a der Radius der Kugelfläche und σ die Flächendichte, dann ist die gesammte Electricitätsmenge der Kugelfläche

a) $$\alpha = 4\pi a^2 \sigma.$$

Ferner sei b der Abstand eines gegebenen Punktes von dem Centrum und r seine Entfernung von einem Punkte der Fläche. Bei Benutzung von Kugelcoordinaten, deren Pol im Centrum liegt und deren Axe in Richtung von b verläuft, hat man dann

b) $$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta.$$

Die Electricitätsmenge in einem Punkte der Fläche wird

$$\sigma a^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta.$$

Bezeichnen wir durch $\varphi(r)$ die Abstossungskraft zwischen zwei Electricitätseinheiten in der Entfernung r und wählen eine Function $f(r)$ so, dass

c') $$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = r\int_r^\infty \varphi(r)\, dr$$

ist, so wird das Potential des Elements der Kugelfläche in dem betrachteten Punkt gleich

$$\sigma a^2 \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta\, d\varphi,$$

folglich das Potential der ganzen Schale

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma a^2 \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi a^2 \sigma \int_0^{\pi} \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta.$$

Durch Differentiation der Gleichung b) ergiebt sich aber

$$r\, dr = ab \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

somit

$$V = \frac{2\pi a\sigma}{b} \int_{r_2}^{r_1} f'(r)\, dr$$

$$= \frac{2\pi a\sigma}{b} \{f(r_1) - f(r_2)\}.$$

r_1 giebt den grössten Wert des r an, ist also gleich $a + b$, und r_2 den kleinsten, also $b - a$, wenn der betrachtete Punkt ausserhalb, $a - b$, wenn er innerhalb der Kugelfläche liegt.

Setzt man noch für $2\pi a\sigma/b$ den Wert $\alpha/2ab$ ein, so wird für einen Punkt ausserhalb der Kugelfläche

1) $$V_e = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(b-a)\},$$

für einen Punkt auf der Kugelfläche

2) $$V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a),$$

für einen Punkt innerhalb der Kugelfläche

3) $$V_i = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}.$$

Daraus können wir dann leicht die Potentialniveaus A und B zweier concentrischen Kugelflächen mit den Radien a und b, wo $a > b$ sein mag, und den Ladungen α und β berechnen. Dem Obigen zufolge ist nämlich für einen Punkt der äusseren Kugelfläche

4) $$A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}$$

und für einen der innern

$$5) \qquad B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{\alpha}{2ab}\{f(a+b) - f(a-b)\}.$$

Nun waren in unserm Versuche die beiden Kugelflächen durch einen Draht verbunden, sie mussten also durch die Ladung dasselbe Potential V bekommen. Lösen wir daher die Gleichungen $A = B = V$ für β auf, so folgt

$$6) \qquad \beta = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}.$$

In dem von Cavendish angestellten Versuche wurde die äussere Kugelfläche so weit von der innern entfernt, dass sie keine Wirkung mehr auf diese ausübte und dann entladen. Daher musste in seinem Versuche das Potential der innern Kugeloberfläche

$$7) \qquad B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b)$$

$$= V \frac{1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}}{1 - \frac{[f(a+b) - f(a-b)]^2}{f(2a)f(2b)}}$$

sein. In der angeführten Wiederholung des Experiments dagegen wurde sie an ihrer Stelle gelassen und mit der Erde verbunden, so dass A sich auf Null reducirte. Das Potential der innern Kugeloberfläche ist also

$$8) \qquad B_2 = V\left\{1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right\}.$$

74d. Wir nehmen nun mit Cavendish an, dass

$$9) \qquad \varphi(r) = r^{q-2}$$

ist. Die Wirkung geht dann nicht genau umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vor sich, und es wird nach der Gleichung unter c')

$$c) \qquad f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1}.$$

Ist nun q nicht gleich 0, so wird es jedenfalls verhältnismässig klein sein, so dass r^q nach $q \log r$ entwickelt werden darf.

Man erhält

$$c_1) \qquad f(r) = \frac{r}{1-q^2}\left\{1 + q\log r + \frac{1}{1.2}(q\log r)^2 + \ldots\right\},$$

und indem man die Potenzen von $(q \log r)$, welche höhere Exponenten als 1 haben, vernachlässigt, wird aus den Gleichungen unter 7) und 8)

$$7_1) \qquad B_1 = \tfrac{1}{2} \frac{a}{a-b} Vq\left[\log \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b}\right]$$

$$8_1) \qquad B_2 = \tfrac{1}{2} Vq \left[\log \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right].$$

Die einzelnen Grössen dieser Gleichungen müssen bis auf q durch das Experiment selbst gegeben sein, so dass aus ihnen q berechnet werden kann. In dieser Weise ist die in Art. 74b für q angegebene Grenze eruirt worden.

Da übrigens alle bei der Berechnung von B_1 bezüglich B_2 angeführten Vernachlässigungen sich auf ganze positive Potenzen von q erstrecken, so folgt, dass wenn B_1 und B_2 verschwinden sollen, q gleich Null sein muss.

74e. Eine gleichmässig electrisirte Kugelfläche übt auf einen innern Punkt keine Wirkung aus, und diese Tatsache benutzte Laplace*), um zu beweisen, dass die einzige damit vereinbare Function für das Wirkungsgesetz $\varphi(r) = 1/r^2$ ist. Wir können seine Methode auf unsern Fall übertragen, wenn wir die Bedingung aufsuchen, der $f(r)$ genügen muss, falls $\beta = 0$ sein soll.

Aus Gleichung 6) folgt, dass dann

$$bf(2a) - af(a+b) + af(a-b) = 0$$

wird, woraus nach zweimaliger Differentiation nach b und Division durch a

$$f''(a+b) = f''(a-b)$$

sich ergiebt. Soll diese Gleichung allgemein gelten, so muss

$$f''(r) = \text{Const.} = C_0,$$

also

$$f'(r) = C_0 r + C_1$$

sein. Vermöge der Festsetzung unter c') erhält man weiter

$$\int_r^\infty \varphi(r)\, dr = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r},$$

also schliesslich

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r^2}.$$

Die Annahme von Cavendish, dass die Kraft umgekehrt proportional einer Potenz der Entfernung ist, scheint weniger allgemein zu sein als die von Laplace, der die Form der Function ganz allgemein lässt. Sie ist aber die einzige mit der Tatsache verträgliche, dass in der Form ähnliche Körper electrisirt auch ähnliche electrische Eigenschaften zeigen.

Wäre nämlich die Kraft eine andere Function der Entfernung als eine Potenz derselben, so würde die Kraftwirkung an zwei verschiedenen Stellen nicht vom Verhältnisse der Abstände, sondern von ihren absoluten Beträgen, also von den Verhältnissen der Abstände zu einer fixirten Länge abhängen.

*) Mec. cel. I. 2.

Eine solche Abhängigkeit kann zum Beispiel eintreten, wenn man von Cavendish's Ansicht über die Constitution des electrischen Fluidums ausgeht, der zu Folge die Teilchen der electrischen Flüssigkeit in der Nähe der Oberfläche eines Conductors nahe an einander gerückt sein sollen. Die Abstossungskraft zweier Teilchen würde dann von einer gewissen Grenze ab mit abnehmender Entfernung rascher wachsen als das umgekehrte Quadrat der Entfernung.

In der Tat macht auch Cavendish selbst darauf aufmerksam, dass nach dieser Hypothese über die Constitution des electrischen Fluidums die electrische Verteilung auf zwei geometrisch ähnlichen Körpern nur dann eine ähnliche sein kann, wenn die Ladungen proportional den Voluminibus der Conductoren sind.

Das Flächenintegral der electrischen Induction und die electrische Verschiebung durch eine Fläche.

75. Bezeichnet R die resultirende Kraftintensität in einem Punkte einer Fläche S und ε den Winkel von R gegen die nach der positiven Seite von S gezogene Normale, so giebt $R\cos\varepsilon$ die Normalcomponente der Kraftintensität in dem betrachteten Punkte, und es ist nach Art. 68 die electrische Verschiebung durch ein Flächenelement dS von S gleich

$$\frac{1}{4\pi} K R \cos\varepsilon \, dS.$$

Abstrahirt man von den dielectrischen Eigenschaften der Zwischenmedien, so hat man $K = 1$ zu setzen, und erhält für die gedachte Verschiebung

$$\frac{1}{4\pi} R \cos\varepsilon \, dS.$$

Die Grösse $R\cos\varepsilon\, dS$ können wir aber auch, indem wir vorläufig von einer Einführung des Begriffs der Verschiebung noch absehen, als die Influenz oder Induction in dem Elemente dS bezeichnen. Wir haben es dann mit einer Grösse zu tun, die der mathematischen Physik sehr geläufig ist und deren Name ‚Induction' von Faraday herrührt. Das Flächenintegral der von innen nach aussen gerichteten Induction ist gleich

1 a) $$\iint R \cos\varepsilon \, dS$$

oder, wenn die Componenten X, Y, Z von R in dem von S begrenzten Gebiete endlich und stetig sind,

1 b) $$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende dreifache Integral erstreckt sich über den ganzen von S eingeschlossenen Raum.

Induction eines einzelnen Kraftcentrums durch eine Fläche.

76. *Geschlossene Fläche.* Ist e die Electricität eines Punktes O und r seine Entfernung von einem Punkte P der Fläche S, so ist der Wert der in Richtung von OP auf P wirkenden Kraft R gleich er^{-2}. Zieht man von O aus eine Linie in die Unendlichkeit, so schneidet dieselbe, wenn O ausserhalb S liegt, diese Fläche entweder gar nicht oder sie tritt so oft in die Fläche ein als sie aus ihr austritt. Befindet sich aber O innerhalb S, so muss die Anzahl der Austritte die der Eintritte um eins übersteigen. Wo die Linie aus der Fläche herausgeht, ist $\cos\varepsilon$ positiv, wo sie eintritt, negativ.

Wir denken uns das Flächenelement dS dadurch entstanden, dass OP um O einen Kegel von unendlich kleiner Oeffnung beschreibt. Ist dann $d\omega$ das Flächenelement, welches dieser Kegel aus einer um O mit dem Radius 1 geschlagenen Kugel herausschneidet, so haben wir

$$dS = r^2 \sec\varepsilon \, d\omega.$$

Demnach ist wegen $R = er^{-2}$, je nachdem r aus der Fläche austritt oder in dieselbe eintritt,

$$R\cos\varepsilon \, dS = + ed\omega \text{ oder}$$
$$R\cos\varepsilon \, dS = - ed\omega.$$

Liegt nun der Punkt O ausserhalb der Fläche S, so ist die Anzahl der Eintritte gleich der der Austritte, demnach, wenn wir durch das Zeichen Σ alle von demselben Kegel aus S herausgeschnittenen Flächenelemente zusammenfassen,

$$\Sigma R\cos\varepsilon \, dS = 0,$$

also auch

1) $$\iint R\cos\varepsilon \, dS = 0.$$

Im andern Falle, wenn der Punkt O sich innerhalb der Fläche befindet, übersteigt die letzte Zahl die erste um 1 und deshalb wird

$$\Sigma R\cos\varepsilon \, dS = + ed\omega.$$

Die Integration über die ganze Fläche ist hier gleichbedeutend mit der über die ganze um O gelegte Kugel, mithin

2) $$\iint R\cos\varepsilon \, dS = \iint ed\omega = 4\pi e.$$

Die gesammte von einem Kraftcentrum O, in dem eine Electricitätsmenge e concentrirt ist, von innen nach aussen durch eine geschlossene Fläche bewirkte Induction ist also gleich Null, wenn das Kraftcentrum ausserhalb, und gleich $4\pi e$, wenn es innerhalb der Fläche sich befindet.

Bei der Luft ist die electrische Verschiebung gleich der electrischen Induction dividirt durch 4π, also gleich der innerhalb der Fläche befindlichen inducirenden Electricitätsmenge e.

Begrenzte Fläche. Wenn die Fläche, statt geschlossen zu sein, durch eine in sich zurücklaufende Linie begrenzt ist, so ergiebt sich aus den obigen Betrachtungen für die electrische Induction der Wert

$$3) \qquad \iint R \cos\varepsilon \, dS = \omega e,$$

wo ω die Oeffnung des Kegels bezeichnet, dessen Scheitel in O liegt und dessen Directrix die Grenzcurve der Fläche ist. Die Induction hängt also nur von der Form der Grenzcurve ab, und man kann die Fläche selbst irgend wie biegen und dehnen, ohne, so lange man die Fläche nicht durch das Kraftcentrum hindurch führt, den Betrag der Induction zu ändern.

Die Gleichungen von Laplace und Poisson.

77. Die obige Ableitung für den Wert der Induction durch eine geschlossene Fläche geschah unter der Voraussetzung eines einzigen Kraftcentrums, sie bleibt aber giltig, wenn eine ganz beliebige Anzahl solcher Centra gegeben ist. Wir haben dann in der Gleichung

$$1) \qquad \iint R \cos\varepsilon \, dS = 4\pi e$$

unter e die algebraische Summe aller Ladungen e_1, e_2, .. der Centra zu verstehen, die sich innerhalb der Fläche befinden. Glaselectrische Ladungen rechnen dabei als positive, Harzelectrische als negative.

Füllen die Centra den ganzen von S begrenzten Raum continuirlich aus, ohne dass die electrische Dichte ρ irgendwo unendlich wird, so haben wir nach Art. 64

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

und da weiter nach Art. 75

$$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

ist, so folgt

$$2) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

Haben die Componenten ein Potential V, so ergiebt sich aus Art. 71

$$2_1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Diese Gleichung setzt uns in Stand, wenn das Potential in allen Punkten eines Gebietes gegeben ist, die Verteilung der Electricität in diesem Gebiete zu bestimmen.

In der obigen allgemeinen Form hat Poisson die Gleichung 2) zuerst aufgestellt, für den speciellen Fall aber, dass $\rho = 0$ ist, war sie schon früher von Laplace abgeleitet worden.

Benutzen wir für die Operation

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

das Zeichen ∇^2, so wird

$2_1)$ die Poissonsche Gleichung $\nabla^2 V = 4\pi\rho$,

$2_2)$ die Laplacesche $\nabla^2 V = 0$.

Nach Art. 72 hat V für einen Conductor, in dem die Electricität sich in Gleichgewicht befindet, in allen Punkten denselben Wert, hängt also nicht von x, y, z ab. Die Raumdichte der Electricität ist also in einem Conductor gleich Null, und demgemäss befindet sich die gesammte freie Electricität auf der Oberfläche des Conductors.

Ausser der Raumdichte haben wir früher noch eine Flächen- und Liniendichte der Electricität unterschieden. Stellt man sich aber eine Flächenladung als in einer sehr dünnen Electricitätsschicht und eine Linienladung als in einem sehr dünnen Electricitätsfaden bestehend vor, so wird die Raumdichte ρ auch in diesen Fällen noch einen Sinn haben. Indem wir die Dicke der Schicht bezüglich des Fadens fortwährend verringert und ρ vergrössert denken, gelangen wir schliesslich zu einer Flächen- bezüglich Linienladung, und da die Poissonsche Gleichung während des ganzen Ueberganges besteht, so verliert sich auch im Grenzfall ihre Bedeutung nicht. Sie muss aber den Verhältnissen gemäss interpretirt werden.

Variation des Potentials an einer geladenen Fläche.

78a. Die Potentialfunction V wird im allgemeinen in dem in Art. 7 definirten Sinne continuirlich sein. Nur an der Grenzfläche zweier verschiedener, oder gleicher aber verschieden temperirter Medien, kann, wie schon bemerkt, das Potential einen plötzlichen endlichen Sprung erleiden, so dass es, wenn die Electricität sich im Gleichgewicht befindet, dort in einem Punkte eines Körpers um eine endliche, von der Natur der beiden Medien und ihrer Temperatur abhängige Constante grösser ist als in einem gegenüberstehenden Punkte des andern.

Dagegen können die Derivirten des Potentials nach x, y, z auch ganz allgemein unstetig werden. Die Punkte, in denen eine Discontinuität

stattfindet, liegen dann nach Art. 8 in einer Fläche, deren Gleichung durch

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = 0$$

ausgedrückt werden kann. Die Fläche trennt das Gebiet, wo Φ positiv ist von dem, wo es negative Werte hat.

Erleidet das Potential bei dem Uebergange aus dem Gebiete der negativen Φ, wo es gleich V_1 ist, in das der positiven, wo es gleich V_2 ist, einen Sprung C, so muss auf der Fläche Φ

1) $$V_1 + C = V_2$$

sein.

Wir bezeichnen durch l, m, n die Richtungscosinusse der von der Fläche in das Gebiet der positiven Φ gezogenen Normale ν_2, die entsprechenden Grössen für die in dem Gebiet der negativen Φ verlaufende Normale ν_1 sind dann $-l$, $-m$, $-n$.

Somit wird

2a) $$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = -l\frac{\partial V_1}{\partial x} - m\frac{\partial V_1}{\partial y} - n\frac{\partial V_1}{\partial z},$$

3a) $$\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = +l\frac{\partial V_2}{\partial x} + m\frac{\partial V_2}{\partial y} + n\frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

Für jeden Punkt der Fläche, also auch für jeden Punkt einer auf ihr gezogenen Curve s, gilt aber die Gleichung $V_2 - V_1 = C$, also folgt aus einer Differentiation nach s

4a) $$\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\frac{dz}{ds} = 0,$$

und da die Normale der Fläche auch Normale der Curve s ist, mithin

$$l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} = 0$$

sein muss, so verwandeln sich die drei Gleichungen 2a), 3a), 4a) in

2) $$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = l\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)$$

3) $$\frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = m\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)$$

4) $$\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial z} = n\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right).$$

Uebrigens kann während des Durchganges durch eine Fläche von den Componenten der electromotorischen Kraft nur die zur Fläche normal wirkende einen Sprung erleiden, die tangentialen Componenten müssen stetig bleiben.

Charakteristische Gleichung an einer electrischen Fläche.

78b. Wir bilden mit Hilfe der Gleichungen unter 2) bis 4) das Flächenintegral für den in Rede stehenden Fall.

Nach Art. 21 ist allgemein

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz + \iint\left\{l(X_2-X_1)+m(Y_2-Y_1)+n(Z_2-Z_1)\right\}dS.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung bezieht sich auf die Fläche S, das erste auf den von ihr eingeschlossenen Raum.

Benutzen wir aber die im vorigen Art. unter 2) bis 4) aufgestellten Beziehungen und beachten, dass nach Art. 76, bezüglich 77

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = 4\pi e$$

$$\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = 4\pi\iiint\rho\, dx\,dy\,dz$$

ist, so folgt

1) $$4\pi e = 4\pi\iiint\rho\, dx\,dy\,dz - \iint\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}+\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)dS.$$

Andererseits ist aber nach der Definition der Raumdichte ρ und der Flächendichte σ

$$4\pi e = 4\pi\iiint\rho\, dx\,dy\,dz + 4\pi\iint\sigma\, dS,$$

somit ergiebt sich

2) $$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}+\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}+4\pi\sigma = 0,$$

und diese Gleichung leistet zur Berechnung der Flächendichte dieselben Dienste, wie die Poissonsche zu der der Raumdichte.

Sie ist die *Charakteristische Gleichung* des Potentials V an einer zur Dichte σ electrisirten Fläche.

78c. Ich führe noch eine wichtige Folgerung aus den bisher abgeleiteten Gleichungen an.

Genügt V als Function von x, y, z in einem continuirlichen Raume der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2 V = 0$, und hat sie ausserdem in einem Teile dieses Raumes einen und denselben Wert C, dann muss sie in dem ganzen Geltungsbereich der Laplaceschen Gleichung diesen Wert C besitzen.

Wir ziehen von der Fläche S, welche den Teil des Gesammtgebietes begrenzt, für den von vornherein $V = C$ ist, eine Normale V nach aus-

wärts. Auf der Fläche ist noch $V = C$ und es erhält eventuell andere Werte, erst wenn wir uns längs der Normale fortbewegen. $\partial V / \partial \nu$ kann also in der Nähe und ausserhalb der Fläche positiv oder negativ sein, darf aber nicht verschwinden, wenn nicht zufällig die Normale gerade von einer Linie der Fläche ausgeht, welche positive Electricität von negativer trennt. Für eine nach dem Innern der bezeichneten Fläche gerichtete Normale ν' ist $\partial V'/\partial \nu' = 0$, somit nach 2)

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = -4\pi\sigma.$$

σ wird also, abgesehen von den Grenzlinien zwischen positiver und negativer Electricität, einen endlichen bestimmten Wert haben, und somit müsste auf der Fläche S eine bestimmte Verteilung von Electricität vorhanden sein. Ist das aber der Fall, dann kann die Laplacesche Gleichung auf der Fläche S nicht mehr richtig sein, weil sie gerade voraussetzt, dass in ihrem Geltungsbereich keine freie Electricität vorhanden ist. Die Fläche S, welche die Region, in der $V = C$ ist, von dem Gebiete, wo V andere Werte als C hat, trennt, muss also an die Grenze des Geltungsbereichs der Laplaceschen Gleichung rücken.

Mechanische Kraftwirkung an einer geladenen Fläche.

79. Allgemein lassen sich die nach den drei Axen gerichteten Componenten A, B, C der einen geladenen Körper angreifenden Kräfte darstellen durch

1)
$$A = \iiint \rho X dx\, dy\, dz, \quad B = \iiint \rho Y dx\, dy\, dz$$
$$C = \iiint \rho Z dx\, dy\, dz.$$

Da aber in einer geladenen Fläche ρ unendlich gross ist, so können wir aus diesen Darstellungen die Kraftcomponenten an einer electrischen Fläche nicht ohne weiteres berechnen.

Der Einfachheit wegen verlegen wir zunächst die x Axe in die Normale der Fläche. Die y und z Componente der Kraft verlaufen dann tangential zu der Fläche und ändern sich beim Durchgang durch dieselbe stetig während die x Componente die Fläche senkrecht trifft und beim Durchgang durch dieselbe einen Sprung erleidet. Sehen wir aber eine geladene Fläche als mit einer sehr dünnen Schicht von Electricität belegt an, so können wir die Aenderung der x Componente als allmählich vor sich gehend betrachten, die Ausdrücke unter 1) beibehalten, sie ausrechnen und zusehen, ob wir zu einem brauchbaren Resultat gelangen, wenn wir nach der Ausrechnung die Dicke der Schicht gleich Null setzen.

Nach der Poissonschen Formel ist

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

also

$$A = \frac{1}{4\pi}\int\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx\,dy\,dz.$$

Integrirt man nach x von x_1 bis x_2 und wählt x_2 so, dass $x_2 - x_1$ gleich der Dicke der Schicht wird, so ergiebt sich

$$A = \frac{1}{4\pi}\int\int\left[\tfrac{1}{2}(X_2^2 - X_1^2) + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx\right] dy\,dz$$

als Wert der Kraftcomponente A für eine zur yz Ebene parallele Schicht von der Dicke $x_2 - x_1$. Da nun Y und Z continuirlich sind, so ist $\partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z$ endlich und da auch X endlich ist, so wird

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx < C(x_2 - x_1),$$

wo C den grössten Wert angiebt, den $(\partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z)X$ innerhalb der Schicht $x_2 - x_1$ annehmen kann. Lässt man daher $x_2 - x_1$, die Dicke der Schicht, ohne Ende abnehmen, so bleibt

$$A = \frac{1}{8\pi}\int\int(X_2^2 - X_1^2)\,dy\,dz.$$

Nach der charakteristischen Gleichung ist aber

$$X_2 - X_1 = -\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} - \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = 4\pi\sigma,$$

also

$$A = \int\int \tfrac{1}{2}(X_2 + X_1)\,\sigma\,dy\,dz.$$

In diesem Ausdrucke giebt $\frac{1}{2}(X_2 + X_1)$ das arithmetische Mittel der Kraftcomponente X zu beiden Seiten der Fläche und σ die Flächendichte an. Ein Element der Fläche wird also von einer Kraft angegriffen, deren Normalcomponente gleich dem Producte der Ladung dieses Elements in das arithmetische Mittel der zu beiden Seiten des Elements wirkenden electromotorischen Kräfte ist.

Die in der Tangentialebene der Fläche dieselbe angreifenden Kraftcomponenten sind stetig, ihre Berechnung unterliegt also weiter keinen Schwierigkeiten.

Wählt man das Axensystem beliebig, so hat man allgemein für die Kraftcomponenten an einem Elemente dS

$$A = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\,\sigma dS,$$

2) $$B = \tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\,\sigma dS,$$

$$C = \tfrac{1}{2}(Z_1 + Z_2)\,\sigma dS.$$

[Sind nämlich die Componenten normal und tangential zur Fläche N, T, Θ, so haben wir

$$A = N\cos(Nx) + T\cos(Tx) + \Theta\cos(\Theta x),$$

$$B = N\cos(Ny) + T\cos(Ty) + \Theta\cos(\Theta y),$$

$$C = N\cos(Nz) + T\cos(Tz) + \Theta\cos(\Theta z),$$

oder wegen

$$N = \tfrac{1}{2}(N_1 + N_2)\,\sigma dS, \quad T = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_1)\,\sigma dS,$$

$$\Theta = \tfrac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_1)\,\sigma dS.$$

$$2A = [N_1\cos(Nx) + T_1\cos(Tx) + \Theta_1\cos(\Theta x)]\,\sigma dS$$
$$+ [N_2\cos(Nx) + T_1\cos(Tx) + \Theta_1\cos(\Theta x)]\,\sigma\,dS.$$

Die erste Zeile auf der rechten Seite ist aber $X_1\sigma dS$ und die zweite $X_2\sigma dS$. Entsprechende Ausdrücke gelten für $2Y$, $2Z$.]

Gewöhnlich leitet man diese Ausdrücke für die ein Element angreifenden Kräfte in anderer von Laplace angegebener Weise ab.

Zieht man nämlich von der Mitte von dS aus eine Normale mit den Richtungscosinussen l, m, n und wählt auf dieser zu beiden Seiten von dS zwei Punkte P, P' so nahe an dS, dass ihr Abstand von dS selbst gegen die kleinste Dimension dieses Flächenelements noch unendlich klein ist, so kann das Element in Bezug auf P wie auf P' wie eine unendliche ebene Platte betrachtet werden.

Seine Kraftwirkung auf P in Richtung der Normale berechnet sich dann zu $2\pi\sigma\,dS$ und die auf P', den Punkt auf der andern Seite von dS, zu $-2\pi\sigma\,dS$. Da nun beide Punkte P und P' einander sehr nahe liegen, so müssen beide von der Kraft des Restes der electrischen Fläche und noch anderer etwa vorhandener electrischer Körper gleich stark angegriffen werden. Bezeichnen wir demnach diese letztere Wirkung, wenn sie in Richtung der x Axe vor sich geht, mit A und die ganzen Kraftcomponente durch $\sigma X_1\,dS$ bezüglich $\sigma X_2\,dS$, je nachdem der Punkt P oder P' ins Auge gefasst wird, so haben wir

$$\sigma X_1\,dS = A + 2\pi e\,\sigma dS,$$

$$\sigma X_2\,dS = A - 2\pi e\,\sigma dS,$$

also

$$A = \tfrac{1}{2}\sigma\,(X_1 + X_2)\,dS.$$

Wenn nun P und P' auf dS zusammenfallen, so heben sich die Kraftwirkungen von dS als gleich und entgegengesetzt auf, und A stellt die

gesammte Kraft, die das Flächenelement dS in Richtung der x Axe angreift, dar.

Wir wenden unsere Formeln zur Berechnung der Kraftwirkung an der Oberfläche eines Conductors an.

Im Art. 77 haben wir aus der Laplaceschen Gleichung die Consequenz abgeleitet, dass die Electricität eines Conductors erst dann sich im Gleichgewichte befindet, wenn sie sich vollständig auf die Oberfläche desselben begeben und dort so verteilt hat, dass das Potential überall im Conductor denselben Wert besitzt. In dem Innern eines Leiters kann sich also freie Electricität überhaupt nicht in Ruhe befinden, wol aber in dem eines Nichtleiters.

Demnach ist die resultirende Kraftintensität innerhalb eines Conductors gleich Null, an der Oberfläche dagegen zufolge der charakteristischen Gleichung gleich $4\pi\sigma$ und normal von innen nach aussen gegen den Conductor gerichtet.

Diese Beziehung zwischen der Dichte der Electricität an der Oberfläche eines Conductors und der Intensität der daselbst wirkenden Kraft ist von Coulomb experimentell entdeckt worden. Doch wies er durch Versuche nur nach, dass die Kraftwirkung in den Punkten eines Conductors sich proportional der in ihnen herrschenden Flächendichte der Electricität ändert. Der Proportionalitätsfactor 4π und damit auch die Relation

$$3) \qquad R = 4\pi\sigma$$

ist erst von Poisson angegeben worden.

Nach innen wirkt in dem Conductor keine Kraft, daher ist nach Art. 79 die Kraftwirkung auf ein Oberflächenelement dS des Conductors

$$4) \qquad \tfrac{1}{2} R\sigma\, dS = 2\pi\sigma^2\, dS = \frac{1}{8\pi} R^2\, dS.$$

Diese Kraft ist unabhängig von dem Zeichen der Ladung stets von innen nach aussen gerichtet, sie wirkt also wie eine Spannung von der Conductoroberfläche fort. Ihre Grösse für das qcm ist gleich

$$4_1) \qquad \tfrac{1}{2} R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

81. Verringert man die Querdimensionen eines Conductors, so gelangt man schliesslich zu einem electrisirten Draht.

Sei ds ein Element dieses Drahtes und c sein Umfang, ferner σ die Dichte der Electricität auf seiner Oberfläche und λ die in einer Längeneinheit des Drahtes enthaltene Electricitätsmenge. Wir haben dann für die resultirende Kraftintensität an der Oberfläche des Drahtes wieder den Wert $4\pi\sigma$ und da $c\sigma = \lambda$ sein muss, so folgt

$$5) \qquad R = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{\lambda}{c}.$$

Nimmt der Umfang des Drahtes unbegrenzt ab, während λ constant bleibt, so wird schliesslich R unendlich gross. Wir haben aber schon bemerkt, dass in jedem Dielectricum dem Anwachsen der Kraftintensität durch die disruptive Entladung eine Grenze gesetzt ist, und deshalb kann in der Natur keine Linie mit einer endlichen Electricitätsmenge geladen werden. Selbst dann, wenn wirklich eine Substanz gefunden werden könnte, die so streng isolirt, dass sie jeder noch so grossen electrischen Spannung Widerstand zu leisten vermag, wäre es doch nicht möglich, eine endliche Electricitätsmenge auf eine Linie zu bringen, weil man dazu eine unendlich grosse Kraft zur Verfügung haben müsste.

Ganz ebenso lässt sich einsehen, dass auch kein Punkt in der Natur eine endliche Electricitätsmenge fassen kann.

Doch ist es der kürzern Ausdrucksweise halber von Vorteil, von electrischen Linien und Punkten zu sprechen, man muss dann darunter Drähte bezüglich Körper von so geringem Umfang verstehen, dass ihre Dimensionen zu den gerade in Betracht kommenden Distanzen verschwindend klein sind.

Ich erwähne noch eine für experimentelle Arbeiten wichtige Folgerung, die man aus den obigen Bemerkungen ziehen kann. Da nämlich die einem Drahte bei bestimmtem Potential mitteilbare Electricitätsmenge um so kleiner wird, je mehr sein Querschnitt abnimmt, so kann die Verteilung der Electricität auf Körpern von endlichen Dimensionen durch Einführung feiner Drähte in das electrische Feld nicht merkbar geändert werden, und man darf den Einfluss der Drähte, die etwa Conductoren mit einander oder mit Electrisirmaschinen oder mit der Erde oder mit Electrometern verbinden, gänzlich ausser Acht lassen.

Kraftlinien.

82. Nach Art. 47 ist eine *Kraftlinie* dadurch definirt, dass ihre Tangente in jedem Punkte mit der Richtung der resultirenden Kraft in diesem Punkte zusammenfällt.

Kraftlinien verlaufen von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, sie können also nie in sich zurücklaufen, sondern müssen einen Anfang und ein Ende haben. Sie gehen von positiv geladenen Körperoberflächen aus und enden im allgemeinen in negativ electrisirten.

Anfangs- und Endpunkt einer Kraftlinie bezeichnen wir als *Correspondirende Punkte* der geladenen Flächen, in denen sie sich befinden.

Denkt man sich eine Kraftlinie so bewegt, dass ihr Anfangspunkt auf der positiv geladenen Fläche eine geschlossene Curve beschreibt, so durchläuft ihr Endpunkt auf der negativ geladenen gleichfalls eine geschlossene Linie.

Es entsteht so eine Cylinderfläche, deren Mantel nur aus Kraftlinien gebildet ist, und die wir als Inductionsröhre oder nach Faraday als *Sphondyloid* bezeichnen.

In jedem Punkte einer solchen Röhre ist die Kraft tangential zu ihrer Oberfläche gerichtet, daher kann quer zur Röhre keine Induction stattfinden.

Enthält also die Röhre in ihrem Innern keine Electricität, so muss das Flächenintegral $\iint R \cos\varepsilon \, dS$, auch wenn man zur Oberfläche der Röhre ihre Endflächen mitrechnet, nach Art. 77 verschwinden. Dieses Integral ist also in Bezug auf die beiden Endflächen gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt. Gehen die Kraftlinien von Conductoren aus und enden auch in Conductoren, so ist für die positive Endfläche O_+

$$\varepsilon = 0, \quad R = 4\pi\sigma_+,$$

für die negative O_-

$$\varepsilon = 0, \quad R = 4\pi\sigma_-,$$

somit

$$\int_{O_+} \sigma_+ \, dO_+ = -\int_{O_-} \sigma_- \, dO_-.$$

Die Ladung an dem Ende des Sphondyloids ist also gleich und entgegengesetzt der an seinem Anfang.

Man kann noch andere sehr wichtige Resultate aus den Eigenschaften der Kraftlinien ableiten.

Jede Kraftlinie muss, wie wir bemerkt haben, von positiv geladenen Flächen ausgehen und in negativ electrisirten enden. Befindet sich also eine solche Kraftlinie innerhalb eines überall geschlossenen Metallgefässes, welches keine Electricität in seinem Innern birgt, so nehmen die Kraftlinien von der Innenfläche des Gefässes ihren Anfang und finden auch in derselben ihr Ende. Auf einer Kraftlinie muss das Potential im Ursprung höher sein als im Ende, innerhalb eines Conductors ist es aber überall gleich, also kann dort überhaupt keine Kraftlinie vorhanden sein. Daraus folgt:

Wenn eine leitende überall geschlossene Schale keine freie Electricität in sich birgt, so besitzt ihre Innenfläche keine Ladung, und das Potential ist in dem ganzen eingeschlossenen Raum ebenso gross wie auf der Aussenseite, also gleich dem Potential der Schale.

Bringt man einen Conductor in das Innere eines solchen Gefässes und verbindet ihn durch einen Draht mit der Innenfläche desselben, so verhält sich seine Oberfläche ganz so wie die Innenfläche des Gefässes, sie bildet einen Teil dieser Innenfläche, ist also nicht geladen und hat dasselbe Potential wie die Aussenfläche des Gefässes.

Teilen wir die Oberfläche eines Conductors in einzelne Elemente, deren jedes eine Einheit von der Electricitätsmenge in sich fasst, und lassen von den Grenzlinien derselben Kraftlinien ausgehen, so zerfällt der ganze Raum in Inductionsröhren. Das Flächenintegral der Induction ist dann für jede andere Fläche gleich der Anzahl der Inductionsröhren, welche sie schneidet. In diesem Sinne hat Faraday vornehmlich die Kraftlinien verwendet, denn

sie dienten ihm nicht blos um die Richtung der Kraft anzuzeigen, sondern auch um ihre Grösse in den einzelnen Teilen des electrischen Feldes zu messen.

Eigentlich sollten diese Linien Inductionslinien genannt werden, denn unter Induction versteht Faraday die Beziehung, in der die Ladungen electrischer Körper zu einander stehen, und er versinnbildlicht sich diese Beziehung dadurch, dass er Linien zieht, welche Einheiten positiver Electricität mit correspondirenden Einheiten negativer verbinden. Ich habe aber die Benennung Kraftlinien beibehalten zu müssen geglaubt, weil sie seit Faraday allgemein üblich geworden ist.

Inductionslinien und Kraftlinien fallen im allgemeinen nicht zusammen, in den uns am meisten interessirenden Fällen verläuft aber die Induction in Richtung der electromotorischen Kraftintensität und ist an Grösse dieser proportional. Hier decken sich also die Kraftlinien vollständig mit den Inductionslinien.

Sonst müssen wir aber daran festhalten, dass jene wichtigen Linien, von denen oben die Rede gewesen ist, Inductionslinien sind. Die Kraftlinien bestimmen sich unabhängig von ihnen durch die Festsetzung, dass sie alle Niveauflächen senkrecht schneiden sollen.

Die electromotorischen Kräfte wirken in Richtung dieser Kraftlinien und sind umgekehrt proportional den Abständen auf einander folgender äquipotentieller Flächen.

Berücksichtigung der dielectrischen Eigenschaften der Zwischenmedien.

83a. Bei der bisherigen Auswertung der Flächenintegrale sind wir der gewöhnlichen Annahme einer Wirkung in die Ferne gefolgt und haben infolge dessen keine Rücksicht auf die eventuelle Abänderung, welche die Kräfte in den dielectrischen Medien erleiden, genommen.

Faraday hat aber, wie ich bereits bemerkt habe, die Entdeckung gemacht, dass die von einer bestimmten electromotorischen Kraft in einen Conductor inducirte Electricitätsmenge von der Natur des Dielectricums, in welchem der Conductor sich befindet, abhängt, so dass sie für fast alle festen und flüssigen Dielectrica grösser als für Gase ist. Man drückt diese Tatsache dadurch aus, dass man sagt, die specifische inductive Capacität eines Dielectricums hänge von seiner Beschaffenheit ab und sei bei festen und flüssigen Körpern im allgemeinen grösser als bei der Luft.

Einen mathematischen Ausdruck für Faradays Theorie gewinnt man dadurch, dass man als Induction durch eine Fläche das Product der normalen Induction (wie wir sie bisher betrachtet haben) in die inductive Capacität ansieht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die frühern Kraftcomponenten X, Y, Z durch ihre Producte in die specifische inductive Capacität K ersetzt werden.

Damit wird also die Laplace-Poissonsche Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial z}}{\partial z} + 4\pi\rho = 0.$$

Ferner nimmt die charakteristische Gleichung an der Grenzfläche zweier Medien, deren Potentiale V_1, V_2 und deren specifische Capacitäten K_1, K_2 sind, die Form an

$$2) \qquad K_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + K_2 \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + 4\pi\sigma = 0,$$

ν_1, ν_2 geben die in demselben Punkte nach den beiden Medien gezogenen Normalen und σ bezeichnet die an der Grenzfläche wirklich stattfindende Flächendichte, das heisst, die Dichte der Electricitätsmenge, welche sich auf der Grenzfläche in Form einer Ladung wirklich befindet, die also nur durch Zuführung oder Wegnahme von Electricität geändert werden kann.

Scheinbare Dichte.

83b. Bestimmt man zunächst die Verteilung der Potentialwerte in einem electrischen Felde und dann mit ihrer Hülfe unter der Annahme, dass $K = 1$ ist, die Dichten ρ' und σ' in den electrisirten Körpern, bezüglich auf den Oberflächen, so erhält man nicht die wahren Werte dieser Grössen, sondern nur die scheinbar stattfindenden, weil die so berechnete Verteilung der Electricität nur dann reell sein würde, wenn das in Art. 66 für die Wirkung der Electricität aufgestellte Gesetz durch die Dazwischenkunft von Dielectricis keine Modification erlitte.

Die scheinbare Ladung in einem abgegrenzten Gebiete kann sich demnach vermehren oder vermindern, ohne dass ein Durchgang von Electricität durch die Grenzfläche stattzufinden braucht, und das ist ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal zwischen dieser und der wahren Ladung, welch letztere der Continuitätsgleichung genügen muss.

Demnach haben wir einerseits

$$3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho' = 0$$

und andererseits, wenn K in dem Dielectricum continuirlich variirt,

$$\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + 4\pi\rho = 0,$$

somit

$$4) \qquad \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi(\rho - K\rho') = 0,$$

eine Gleichung, welche zur Bestimmung der scheinbaren Dichte aus der

wahren und umgekehrt dienen kann. Beide Verteilungen, die scheinbare wie die wahre geben zur Entstehung derselben Potentialwerte Veranlassung, wenn bei Annahme der erstern die specifische inductive Capacität gleich 1, bei der der zweiten gleich K angesetzt wird.

Ganz analog finden wir die scheinbare Flächendichte, σ', aus der Gleichung

$$5) \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + 4\pi\sigma' = 0.$$

während die wahre aus der Gleichung 2) zu berechnen ist.

Wenn ein festes Dielectricum vollkommen isolirt und an seiner Oberfläche von Anfang an keine Ladung hat, so bleibt seine wahre Electricitätsmenge stets gleich Null, von welchen electrischen Kräften es auch angegriffen werden mag.

In diesem Falle wird

$$K_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + K_2 \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = 0,$$

also nach Gleichung 5)

$$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = \frac{4\pi\sigma' K_2}{K_1 - K_2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = \frac{4\pi\sigma' K_1}{K_1 - K_2}.$$

σ' ist die Flächendichte der auf der Oberfläche des Dielectricums scheinbar inducirten Electricität. Die scheinbare Ladung verschwindet, wenn die inducirende Kraft entfernt ist. Entladet man aber das Dielectricum während diese noch wirkt, etwa dadurch, dass man es durch eine Flamme führt, dann erscheint nach Entfernung der inducirenden Kraft auf der Oberfläche des Dielectricums eine wirkliche Ladung, welche der erstern scheinbaren entgegengesetzt ist.*)

*) Faraday, *Remarks on Static Induction* Proc. R. S. 1858, Febr. 12.

Cap. III.

Arbeit und Energie in einem electrischen System.

Arbeit bei der Electrisirung eines Systems.

84. Die Definition des Potentials ergiebt nach Art. 70 für die Arbeit δW, welche geleistet werden muss, um eine Electricitätsmenge δe aus der Unendlichkeit (oder von einem Orte, wo das Potential Null ist) zu einem gegebenen System mit dem Potential V hinzubringen, den Ausdruck

$$\delta W = V \delta e$$

Dadurch wird aber die Ladung in einem Teile des Systems um δe vermehrt, und wenn sie daselbst ursprünglich die Grösse e hatte, wird sie jetzt $e + \delta e$. Die Arbeit, welche geleistet werden muss, um in den Teilen des Systems eine Aenderung der Ladungen hervorzubringen, wird also

1) $$W = \Sigma (\int V \delta e).$$

Das Integral bezieht sich auf die Aenderung der Ladung in einem bestimmten Teile des Systems, die Summe fasst alle Teile zusammen, deren Ladungen überhaupt geändert werden.

Aus dem in Art. 73 für das Potential eines Systems in einem Punkt gegebenen Ausdruck erhellt nun, dass man dasselbe als die Summe von Potentialen betrachten kann, die den einzelnen Teilen des Systems ihre Entstehung verdanken. Ist demnach V das Potential in einem Punkte, herrührend von einem System A, und V' das von einem System B, so ist das Potential, welches in dem fraglichen Punkte durch die gleichzeitige Existenz der Ladungen beider Systeme hervorgerufen wird, gleich $V + V'$.

Es folgt hieraus, dass wenn die Ladungen aller Teile eines Systems sich in demselben Verhältnis von n zu 1 ändern, das Potential des ganzen Systems in einem Punkte sich ebenfalls im Verhältnis von n zu 1 ändert.

Nach dieser Bemerkung wollen wir uns das Laden des Systems in folgender Weise ausgeführt denken.

Wir nehmen ein System von Körpern, das ganz frei von Electricität ist und sich auf dem Potential Null befindet, und laden alle Teile desselben gleichzeitig in ein und demselben Verhältnis zu ihren bezüglichen Endladungen. Beträgt dann in irgend einem Stadium der Operation die Ladung eines Teiles des Systems n Teile seiner schliesslichen Ladung e, so wird sein Potential in diesem Stadium auch gleich n Teilen von dem schliesslichen Wert seines Potentials V sein.

Der ganze Process der Ladung besteht nun darin, dass wir n von 0 bis 1 continuirlich anwachsen lassen. Steigt n um δn an, so wächst die Ladung des hervorgehobenen Teiles um $e\delta n$ und sein Potential um $V\delta n$. Die Arbeit, welche während dieser Verstärkung der Ladung an dem Teile geleistet werden muss, ist also bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{eV}{2}\Big((n+\delta n)^2 - n^2\Big) = eVn\,\delta n.$$

Daraus folgt für die Gesammtarbeit bei der Ladung aller Teile des Systems

$$W = \Sigma eV\int_0^1 n\,dn = \tfrac{1}{2}\Sigma eV,$$

das heisst, die halbe Summe aus den Producten der Ladungen der einzelnen Systemteile in die den betreffenden Teilen zugehörigen Potentiale.

Diese Arbeit muss im Verlaufe des Ladens von einer äussern Kraft geleistet werden, da aber unser System ein conservatives *) ist, so ändert sich ihr Wert nicht, wenn das System durch irgend einen andern Process als den von uns geschilderten auf dieselbe Ladung gebracht wird.

Wir dürfen also allgemein die Grösse

$$2) \qquad W = \tfrac{1}{2}\Sigma Ve$$

als die Energie des electrischen Systems, ausgedrückt durch die Ladungen und Potentiale der einzelnen Teile ansehen.

85a. Wir setzen den vorher beschriebenen Process fort, indem wir den Teilen des Systems so lange Electricität zuführen, bis ihre Ladungen die Werte e' und ihre Potentiale die Beträge V' erreichen.

Ist dann in irgend einem Augenblicke die Ladung eines Teiles gleich $e + n(e' - e)$, so ist das zugehörige Potential $V + n(V' - V)$, und die

*) Thomson und Tait, *Theoret. Physik* § 271. Deutsche Ausg. von 1871.

Arbeit bei Verstärkung der Electricitätsmenge dieses Teiles um $e' - e$ ist gegeben durch

$$\int_0^1 (e' - e)\Big(V + n(V' - V)\Big)\, dn = \tfrac{1}{2}(e' - e)\,(V + V').$$

Bezeichnet also W' die Energie des Systems bei der Ladung e', so haben wir

3a) $$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e' - e)\,(V' + V).$$

Andererseits ist aber

$$W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e' V' \text{ und } W = \tfrac{1}{2}\Sigma e V,$$

und damit wird

4) $$\Sigma e V' = \Sigma e' V.$$

Befindet sich also ein System von Körpern nach einander in zwei Zuständen (e, V) und (e', V'), so ist die Summe der Producte aus den Electricitätsmengen der einzelnen Körper in dem ersten Zustande in die entsprechenden Potentiale während des zweiten Zustandes gleich der Summe der Producte aus den Electricitätsmengen in dem zweiten Zustande in die entsprechenden Potentiale während des ersten Zustandes.

85b. Mit Hilfe der Gleichung unter 4) bekommt die unter 3a) die Form

3b) $$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e + e')\,(V' - V).$$

Für unendlich kleine Zustandsänderungen haben wir also

5a) $$\delta W = \Sigma V \delta e,$$

5b) $$\delta W = \Sigma e \delta V.$$

Bezeichnen wir die Energie als Function der Ladungen der einzelnen Körper durch W_e und als Function der Potentiale durch W_V und beziehen den Index r auf einen bestimmten Körper des Systems, so folgt aus den Gleichungen unter 5)

6) $$V_r = \frac{\partial W_e}{\partial e_r},$$

7) $$e_r = \frac{\partial W_V}{\partial V_r}.$$

86. Aus dem unter 4) aufgestellten Satz der elementaren Electricitätslehre, der in dem Greenschen Satz in der analytischen Theorie der Electricität sein Anologon findet,*) ergeben sich durch Specialisirung des Anfangs- und Endzustandes viele sehr nützliche Resultate, von denen wir einige anführen wollen.

*) Doch ist dieser Satz 4) zuerst von Clausius, Wiedem. Ann. I. 493 aufgestellt worden. Anm. d. Uebers.

Wenn in dem System von Conductoren einer, A, weder am Anfang noch am Ende der Electrisirung eine Ladung besitzt, so ist $e = e' = 0$, und aus den Summen der Gleichung 4) verschwinden alle Glieder, die auf diesen Conductor Bezug haben.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn seine Potentialwerte V, V' zu Anfang und zu Ende gleich Null sind.

Sind daher in einem System von Conductoren alle bis auf zwei, A_r und A_s, entweder isolirt und ohne Ladung, oder electrisirt, aber mit der Erde in Verbindung, so bleibt

$$4_1) \qquad e_r V_r' + e_s V_s' = e_r' V_r + e_s' V_s .$$

Macht man noch

$$e_r = 1, \quad e_s = 0,$$

$$e_r' = 0, \quad e_s' = 1,$$

so wird

$$4_2) \qquad V_r' = V_s, \text{ d. h.}$$

Wenn eine Electricitätseinheit auf einen Conductor A_r gebracht das Potential eines sonst nicht geladenen zweiten Conductors A_s bis zu V ansteigen lässt, so verursacht eine Electricitätseinheit auf dem zweiten Conductor A_s in dem ersten nicht geladenen Conductor A_r ein Potential von derselben Grösse V, vorausgesetzt dass etwaige andere Conductoren isolirt und ohne Ladung oder zur Erde abgeleitet sind.

Beispielsweise ist das Potential einer mit der Electricitätseinheit geladenen leitenden Kugel auf einen um r von ihrem Mittelpunkte abstehenden äussern Punkt gleich r^{-1}; erteilen wir also einem ausserhalb einer Kugel im Abstand r von ihrem Centrum befindlichen Punkt eine Electricitätseinheit, so wird das Potential auf der Kugel, welche sonst keine Ladung besitzen soll, ebenfalls gleich r^{-1}.

Solche reciproke Beziehungen wie die obige zwischen zwei Conductoren finden sich in fast allen Zweigen der Wissenschaft, und sie sind ganz besonders dazu geeignet, Probleme auf andere schon gelöste zurückzuführen.

Setzen wir in 4_1)

$$V_r = 1, \quad V_s = 0,$$

$$V_r' = 0, \quad V_s' = 1,$$

so folgt

$$4_3) \qquad e_s = e_r', \text{ d. h.}$$

Steigt das Potential in A_r von 0 bis 1, so wird in A_s dieselbe Electricitätsmenge inducirt wie in A_r, wenn das Potential in A_s sich von 0 bis 1 erhebt.

Als dritten Fall nehmen wir

$$V_r = 1, \quad e_s = 0,$$

$$V'_r = 0, \quad e'_s = 1.$$

Aus 4_1) ergiebt sich dann

4_4) $$e'_r + V_s = 0, \text{ d. h.}$$

Bleibt A_s ohne Ladung und steigt sein Potential, während A_r positiv bis zur Potentialeinheit geladen wird, von 0 bis V, so bekommt A_r, wenn sein Potential auf Null erhalten wird, während A_s mit einer Electricitätseinheit geladen wird, eine negative Ladung von dem Betrage V. Dieser dritte Fall entspricht wieder einem von Green aufgestellten Theorem.

Wir können ihm die folgende etwas allgemeinere Fassung geben, wenn wir auch noch andere Conductoren in die Betrachtung ziehen.

Erteilen wir in einem System von Körpern $A_1, A_2, \ldots$, einem, A_s, eine Electricitätseinheit, und finden wir dann auf den andern Körpern, während ihre Potentiale gleich Null sind, inducirte Ladungen $\eta_1, \eta_2 \ldots$, so wird das Potential von A_s, wenn es ungeladen bleibt, während die andern Conductoren bis zu den Potentialen $V_1, V_2 \ldots$ electrisirt werden,

4_4) $$V_s = -\Sigma \eta_r V_r.$$

Kennen wir demnach in allen Punkten einer leitenden Schale die Flächendichte, wie sie von einem mit einer Electricitätseinheit geladenen innerhalb der Schale befindlichen Punkte inducirt wird, sind wir ferner im Stande, in allen Punkten der Innenfläche der Schale das Potential anzugeben, so vermögen wir auch umgekehrt das Potential in dem vorher geladenen innerhalb der Schale befindlichen Punkt zu berechnen, wenn auf die Schale eine Electricitätseinheit gebracht wird.

Daraus folgt der wichtige Satz:

Ist das Potential in allen Punkten einer geschlossenen Fläche gegeben, so kann es auch für jeden Punkt innerhalb derselben berechnet werden, wenn die Fläche keine electrischen Körper einschliesst; ebenso ist damit auch das Potential in jedem Punkt ausserhalb der Fläche bestimmbar, wenn sie keine electrischen Körper ausschliesst.

Theorie eines Systems von Conductoren.

87. Das electrische System bestehe aus den Conductoren $A_1, A_2, \ldots A_n$, denen die Ladungen $e_1, e_2, \ldots e_n$ und die Potentiale $V_1, V_2 \ldots V_n$ zugehören. Ferner sei das trennende Dielectricum überall von derselben Beschaffenheit und werde während der Ladung des Systems in keinem Teile electrisirt.

Nach Art. 84 ist das Potential jedes der Conductoren eine lineare homogene Function der n Ladungen, somit ist die Energie des Systems nach Gleichung 2) jenes Artikels eine homogene quadratische Function der n Ladungen, also

$$1\,a)\quad W_e = \tfrac{1}{2} p_{11} e_1^2 + p_{12} e_1 e_2 + \ldots + p_{1n} e_1 e_n + \tfrac{1}{2} p_{22} e_2^2 + p_{23} e_2 e_3 + \ldots + p_{2n} e_2 e_n + \ldots + \tfrac{1}{2} p_{nn} e_n^2.$$

Daraus lässt sich dann das Potential jedes Conductors in dem System ableiten. Da nämlich das Potential als die Arbeit definirt ist, welche geleistet werden muss, wenn man eine Electricitätseinheit aus einem Orte, wo das Potential gleich Null ist, zu einem, wo es den vorgeschriebenen Wert hat, bringen will, und da weiter diese Arbeit lediglich dazu verwendet wird, um die Energie W zu vermehren, so muss offenbar das Potential eines Conductors — wie es auch die Gleichung 6) im Art. 85 b aussagt — gleich der Derivirten der Energie nach der Ladung des Conductors sein.

Wir haben also allgemein

$$2)\qquad \begin{aligned} V_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + \ldots + p_{n1} e_n, \\ V_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + \ldots + p_{n2} e_n, \\ &\text{- - - - - - - - - - - -} \\ V_n &= p_{1n} e_1 + p_{2n} e_2 + \ldots + p_{nn} e_n \end{aligned}$$

zu setzen.

Die Coefficienten p_{rs} heissen *Potentialcoefficienten*. Sie haben zwei Indices, deren erster mit dem Index der Ladung übereinstimmt, während der zweite mit dem des Potentials zusammenfällt.

Die n Potentialcoefficienten, deren Indices sich gleich sind, beziehen sich nur auf einen Conductor, so dass z. B. p_{rr} das Potential von A_r ist, wenn dieser Conductor mit der Electricitätseinheit geladen ist, die andern aber nicht electrisirt sind.

Die Coefficienten, deren Indices sich ungleich sind, stellen ebenfalls Potentiale dar, und zwar ist p_{rs} das Potential von A_s, wenn A_r mit der Electricitätseinheit geladen ist, die andern Conductoren aber wieder nicht electrisirt sind.

Aus den Gleichungen unter 1 a) und 2) folgt

$$p_{rs} = \frac{\partial V_s}{\partial e_r} = \frac{\partial}{\partial e_r}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_s}\right) = \frac{\partial}{\partial e_s}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_r}\right) = \frac{\partial V_r}{\partial e_s} = p_{sr},$$

somit

$$3)\qquad p_{rs} = p_{sr},$$

ein Satz, der genau dasselbe aussagt, wie die Gleichung 4_2) in Art. 86.

Aus den Gleichungen unter 2), welche die Potentiale als Functionen der Ladungen bestimmen, kann man umgekehrt die Ladungen als Functionen der Potentiale darstellen. Ihre Auflösung ergiebt nämlich

$$\begin{aligned} e_1 &= q_{11} V_1 + q_{12} V_2 + \ldots + q_{1n} V_n, \\ e_2 &= q_{21} V_1 + q_{22} V_2 + \ldots + q_{2n} V_n, \\ &\text{- - - - - - - - - - - - -} \\ e_n &= q_{n1} V_1 + q_{n2} V_2 + \ldots + q_{nn} V_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt analog der Gleichung unter 3)

$$q_{rs} = \frac{\partial e_r}{\partial V_s} = \frac{\partial}{\partial V_s}\left(\frac{\partial W_V}{\partial V_r}\right) = \frac{\partial}{\partial V_r}\left(\frac{\partial W_V}{\partial V_s}\right) = \frac{\partial e_s}{\partial V_r} = q_{sr},$$

somit

$$q_{rs} = q_{sr}, \tag{5}$$

und das entspricht dem Satze 4_3) in Art. 86.

Weiter ist

$$W = \tfrac{1}{2} e_1 V_1 + \tfrac{1}{2} e_2 V_2 + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} e_n V_n, \tag{1b}$$

also

$$\begin{aligned} W_V = \tfrac{1}{2} q_{11} V_1^2 + q_{12} V_1 V_2 + \ldots q_{1n} V_1 V_n + \tfrac{1}{2} q_{22} V_2^2 + q_{23} V_2 V_3 + \ldots \\ + q_{2n} V_2 V_n + \ldots + \tfrac{1}{2} q_{nn} V_n^2, \end{aligned} \tag{1c}$$

eine Darstellung der Energie als homogene quadratische Function der Potentiale.

Die Coefficienten q_{rr}, deren Indices einander gleich sind, bezeichnen wir als die Capacitäten der betreffenden Conductoren. Daraus ergiebt sich die folgende

Definition. Unter *Capacität* eines Conductors versteht man die Electricitätsmenge, die derselbe in sich fasst, wenn sein Potential gleich der Einheit ist, während alle andern Conductoren des electrischen Feldes sich auf dem Potential Null befinden.

Dies ist die eigentliche Definition der Capacität eines Conductors, und so oft keine nähere Specificirung hinzugefügt ist, verstehen wir auch unter Capacität die so begrenzte Grösse. Manchmal ist es aber von Vorteil, die Bedingungen, denen die andern Conductoren zu genügen haben, für alle oder für einen Teil derselben in anderer Weise festzusetzen, etwa z. B., dass die Ladung nur eines Teiles der Conductoren gleich Null ist. Immer aber ist erforderlich, dass der Conductor, dessen Capacität seiner Ladung gleich sein soll, das Potential Eins hat.

Ist von der Capacität eines Conductors ohne nähere Angaben über Gestalt und Lage anderer Conductoren die Rede, so versteht man darunter die Capacität desselben, wenn kein anderer Leiter oder electrisirter Körper in endlicher Entfernung von ihm vorhanden ist.

Die Coefficienten q_{rs}, deren Indices einander ungleich sind, bezeichnen wir als *Inductionscoefficienten*, denn q_{rs} giebt die Ladung an, welche in

A_r inducirt wird, wenn man A_s bis zur Potentialeinheit electrisirt, während die Potentiale aller andern Conductoren auf Null erhalten werden.

Die Coefficienten p und q sind, wie ich später beweisen werde, in jedem Falle eindeutig bestimmbar. Ihre mathematische Berechnung ist aber, weil sie von Form und Lage der einzelnen Conductoren abhängen, meist sehr schwierig. Für die einfachern Fälle werde ich sie noch ableiten, und in den complicirten Fällen werde ich wenigstens zeigen, wie ihre Beträge experimentell eruirt werden können.

Man bedient sich in Untersuchungen, in welchen nur von Capacitäten und Inductionscoefficienten die Rede ist, für diese mit Vorteil der Bezeichnung $[AP]$, indem man unter diesem Symbol die im Conductor A während einer Electrisirung des Conductors P bis zur Potentialeinheit inducirte Ladung versteht.

Darnach bedeutet $[(A+B)(P+Q)]$ die Ladung, welche in den Conductoren A und B inducirt wird, während man die Conductoren P und Q bis zum Potential 1 electrisirt.

Da übrigens, wie eine leichte Ueberlegung zeigt,

$$6)\quad [(A+B)(P+Q)]=[AP]+[AQ]+[BP]+[BQ]=[(P+Q)(A+B)]$$

ist, so folgt, dass man die benutzten Symbole ganz so durch Addition und Multiplication zusammensetzen kann wie quantitative Grössen.

Das Symbol $[AA]$ bedeutet nach dem Vorigen die Ladung auf A, wenn sein Potential gleich 1 ist, es bezeichnet also die Capacität von A.

Aehnlich ist $[(A+B)(A+Q)]$ die Summe der auf A und B auftretenden Ladungen, wenn A und Q zum Potential 1 electrisirt werden, und die andern Conductoren das Potential Null behalten. Sie kann in die vier Partialladungen

$$[AA]+[AQ]+[BA]+[BQ]$$

zerlegt werden.

Zufolge der Gleichung

$$7)\qquad 2[AB]=[(A+B)(A+B)]-[AA]-[BB]$$

kann man den Inductionscoefficienten zweier Conductoren aus ihren Capacitäten, wenn man sie getrennt als zwei Conductoren betrachtet und der Capacität, wenn man sie zu einem Conductor vereinigt denkt, zusammensetzen.

Der Grund dafür, dass die Inductionscoefficienten sich so zerlegen lassen, ist darin zu suchen, dass diese Coefficienten eben Ladungen bezeichnen, die man als quantitative Grössen nach den algebraischen Regeln behandeln kann. Bei Potentialen hat die Summe zweier Potentiale V_1 und V_2 auf zwei Conductoren keine rechte auf Erscheinungen sich beziehende physikalische Bedeutung, wenn auch die Differenz V_1-V_2 eine electromotorische Kraft bezeichnet. Deshalb kann man auch mit entsprechenden Symbolen für die Potentialcoefficienten nicht so operiren, wie es oben bei den Inductionscoefficienten geschehen ist.

Dimensionen der Potential- und Inductionscoefficienten.

88. Die Dimensionen der Inductionscoefficienten q_{rs} ergeben sich aus der Bemerkung, dass nach den Gleichungen unter 4) $q_{rs} V_s$ eine Ladung bezeichnet. Da aber das Potential einer Ladung e in der Entfernung r gleich e/r ist, so ist eine Ladung gleich dem Producte einer Linie in ein Potential, und hieraus folgt, dass die Coefficienten der Induction und Capacität die Dimensionen von Linien haben.

Jeder dieser Coefficienten kann also durch eine gerade Strecke dargestellt werden, deren Länge unabhängig von dem System der adoptirten Einheiten ist.

Eine ähnliche Betrachtung ergiebt, dass die Potentialcoefficenten in ihren Dimensionen reciproken Linien gleichen.

Bedingungen, denen die Potential- und Inductionscoefficienten genügen müssen.

89a. Eine Reihe von Bedingungen für die obengenannten Coefficienten ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Energie eines Systems ihrer Natur nach eine positive Grösse ist. Soll also W als quadratische homogene Function der Ladungen e für alle positiven und negativen Werte derselben stets positiv sein, so müssen bei einer bestimmten Anordnung der Conductoren die n Determinanten

$$p_{11}, \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1}, & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

positiv sein. Das giebt n Bedingungen.

n Conductoren lassen sich aber in $2^n - 1$ Arten zu einem System vereinigen und demgemäss bestehen auch zwischen den n^2 Coefficienten $2^n - 1$ der obigen Reihe entsprechende Bedingungsreihen.

Unabhängig von einander können jedoch nur n Bedingungen sein.

Betrachtet man die Energie als homogene quadratische Function der Potentiale, so ergeben sich für die Capacitäts- und Inductionscoefficienten ganz entsprechende Bedingungen wie für die Potentialcoefficienten.

Sätze über Potential- und Inductionscoefficienten.

89b. Bei Gelegenheit der Theorie der Kraftlinien, Art. 82, haben wir gesehen, dass die Ladung eines Conductors durch den Ueberschuss der von ihm ausgehenden Kraftlinien über die in ihn eintretenden gemessen

wird. Ist ein Conductor gar nicht geladen, so müssen also ebensoviele Kraftlinien durch seine Oberfläche eintreten als von ihr ausgehen. Nun laufen aber Kraftlinien stets von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, somit kann ein ungeladener Conductor in einem electrischen Felde nicht das grösste in demselben vorhandene Potential haben. Die Potentiale ungeladener Conductoren liegen also zwischen dem grössten und kleinsten Potentialwerte. Laden wir aber einen Körper mit der Electricitätseinheit, während alle andern Conductoren ungeladen bleiben, so ist sein Potential p_{rr}, und das eines ungeladenen Conductors p_{rs}, und daraus folgt, dass p_{rs} nicht grösser als p_{rr} oder p_{ss} sein kann.

In einem Falle ist das Potential eines ungeladenen Conductors gleich dem eines geladenen, dann nämlich, wenn der geladene Conductor den ungeladenen vollständig umhüllt. Sobald aber die Conductoren sich ausschliessen, muss stets

$$p_{rr},\ p_{ss} > p_{rs}$$

sein.

Ferner ist bei der zuletzt angeführten Ladungsweise das Potential des geladenen Conductors, also p_{rr}, das grösste Potential im electrischen Felde und Null in der Unendlichkeit das kleinste, somit müssen die Potentiale, p_{rs}, der ungeladenen Conductoren zwischen p_{rr} und Null liegen, das heisst mit p_{rr} dasselbe Zeichen haben. p_{rr} ist aber positiv, wir haben also den Satz:

I.) Alle Potentialcoefficienten sind positiv und kein Coefficient p_{rs} ist grösser wie p_{ss} oder p_{rr}.

89c. Wir bringen einen Conductor A_r auf die Potentialeinheit, während alle andern Conductoren A_s auf dem Potentialwert Null erhalten werden. Die Ladung von A_r ist dann q_{rr}, das heisst es gehen q_{rr} Kraftlinien von diesem Conductor aus. Von diesen Kraftlinien kann ein Teil in den andern Conductoren sein Ende finden und ein anderer Teil bis in die Unendlichkeit verlaufen. Es setzt sich aber keine Kraftlinie von einem der auf das Potential Null erhaltenen Conductoren noch weiter ins Unendliche fort, weil eben Null der kleinste Wert des Potentials ist, und Kraftlinien von Orten höhern zu solchen niederern Potentials verlaufen. Eben so wenig kann eine Kraftlinie zwei dieser Conductoren verbinden.

Ein Conductor A_s, dessen Potential gleich Null ist, kann also nur eintretende Kraftlinien besitzen, und er hat überhaupt keine Kraftlinien, wenn er durch einen andern Conductor vollständig von A_r getrennt ist. Die Ladung q_{rs} von A_s wird also höchstens gleich Null sein und ist im allgemeinen von entgegengesetztem Zeichen wie q_{rr} bezüglich q_{ss}.

Weiter sind im ganzen electrischen Felde nur soviel Kraftlinien vorhanden, als von A_r ausgehen, es können also in den andern Conductoren zusammen höchstens q_{rr} Kraftlinien ihr Ende finden, und deshalb kann die Summe der Ladungen der andern Conductoren absolut genommen höchstens gleich q_{rr}, der Ladung von A_r, sein. Sie ist dieser in der Tat gleich,

wenn ein Conductor A_t den Conductor A_r vollständig einhüllt, weil dann alle Kraftlinien in A_t und den durch A_t ausser A_r sonst noch eingeschlossenen Conductoren ihr Ende finden müssen. Im allgemeinen ist jene Summe aber kleiner, weil sich auch Kraftlinien in die Unendlichkeit verlieren werden. Wir haben also den Satz:

II.) Die Capacitäten sind stets positiv, die Inductionscoefficienten stets negativ. Die Summe aller Inductionscoefficienten, die einem einzigen Conductor ihre Entstehung verdanken, ist numerisch nicht grösser als die Capacität dieses Conductors.

Ich habe die beiden Theoreme unter 89b) und 89c) unabhängig von einander vermittelst der Eigenschaften der Kraftlinien abgeleitet und überlasse es dem Leser zu versuchen, ob das eine Theorem eine mathematische Consequenz des andern ist.

Weiter ergiebt sich der Satz:

III.) Wenn im electrischen Felde nur ein Conductor vorhanden ist, so ist sein Potentialcoefficient auf sich selbst gleich dem reciproken Wert seiner Capacität.

90. Man nennt den Schwerpunkt der auf der Oberfläche eines allen äussern Einflüssen entzogenen Conductors verteilten Electricität den *Electrischen Mittelpunkt* des Conductors.

Bei symmetrisch um einen Punkt geformten Conductoren ist der Symmetriepunkt selbst der electrische Mittelpunkt.

Bei Conductoren, deren Dimensionen klein sind im Verhältnis zu den in Frage kommenden Distanzen, lässt sich seine Lage mit genügender Genauigkeit durch Schätzung finden. Rechnet man die Distanzen c vom electrischen Mittelpunkt ab, so muss das Potential solcher Conductoren in der Entfernung c zwischen

$$\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) \text{ und } \frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right)$$

liegen, wenn e die Ladung des Conductors und a den Abstand seines vom electrischen Mittelpunkt am meisten entfernten Oberflächenpunktes bedeutet.

Denkt man sich nämlich die Ladung e zu gleichen Teilen in zwei Punkte concentrirt, die zu entgegengesetzten Seiten des electrischen Mittelpunktes liegen und von ihm um a abstehen, so ist das Potential auf einen Punkt in ihrer Verbindungslinie, weil a sehr klein gegen c sein sollte, gleich der ersten oben angegebenen Grenze und das auf einen Punkt in einem Lot zu ihrer Verbindungslinie gleich der zweiten Grenze, demnach das Potential in Punkten einer mit c um den electrischen Mittelpunkt geschlagenen Kugel kleiner als der erste Grenzwert und grösser als der zweite.

IV.) Befinden sich im electrischen Felde zwei Conductoren, so kann nach dem obigen in ihrem Potential auf einander, in $1/c'$, die Grösse c' von dem Abstande c ihrer electrischen Mittelpunkte um nicht mehr als um $(a^2+b^2)/c$ verschieden sein, wenn a und b die Abstände der am meisten von den be-

züglichen Mittelpunkten entfernten Teile der Conductor-Oberflächen von diesen Mittelpunkten angeben.

91a. V.) Durch die Einführung eines neuen Conductors in ein electrisches Feld werden die Potentialcoefficienten der schon vorhandenen Conductoren auf sich selbst verkleinert, und um so mehr verkleinert, je grösser der neu eingeführte Körper ist.

Wir nehmen zunächst an, dass dieser neu eingeführte Körper B kein Leiter ist und keine Electricität enthält, laden einen der Conductoren, etwa A_1, mit einer Electricitätsmenge e_1 und lassen alle andern Conductoren unelectrisirt, dann ist die Energie

$$W = \tfrac{1}{2} e_1 V_1 = \tfrac{1}{2} e_1^2 p_{11},$$

unbeschadet ob der Körper B existirt oder nicht. Wird nun B leitend, so muss sich in ihm die Electricität von Orten höhern zu Orten niederern Potentials fortbewegen, dadurch tritt eine Verminderung der electrischen Energie des Systems ein, und die Grösse $\frac{1}{2} e_1^2 p_{11}$ wird kleiner. e_1 kann sich aber nicht ändern, also muss p_{11} kleiner werden, wie es der obige Satz ausspricht.

Führen wir noch einen zweiten Leiter c ein, so wird zunächst p_{11} noch weiter vermindert, verbinden wir B mit c durch einen Draht, so fliesst eventuell wieder Electricität durch denselben von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, das heisst p_{11} wird durch die Herstellung der Communication zwischen B und c noch mehr verringert.

Daraus folgt, dass die Verringerung des p_{11} durch Einführung des B grösser als durch die eines von B umschlossenen Körpers und kleiner als durch die eines Körpers, der B umhüllt, ist.

Der Betrag der Verringerung von p_{11} hängt natürlich von der Form und Lage des eingeführten Körpers ab; eine Kugel vom Radius $b/2$ im Abstand r vom geladenen Leiter verringert p_{11}, wie wir im Capitel XI sehen werden, um nahezu $b^3/8r^4$. Die Verringerung durch jeden andern Körper, dessen grösster Diameter gleich b ist, wird also kleiner als $b^3/8r^4$ sein, wo r von der Mitte von b gerechnet ist.

Ist dieser grösste Durchmesser b von B so klein gegen die Entfernung des eingeführten Conductors B vom Conductor A_1, dass man Grössen von der Ordnung $b^3/8r^4$ vernachlässigen kann, so wird auch die Verkleinerung des p_{11} durch B sehr unbedeutend sein. Der Potentialcoefficent des Conductors A_1 auf sich selbst wird dann sehr näherungsweise mit dem reciproken Werte seiner Capacität, wenn er sich allein im electrischen Felde befindet, confundirt werden können.

91b. VI.) Bringt man in ein electrisches Feld einen runden Conductor A_3, dessen Dimensionen gegen die Abstände der Conductoren untereinander klein sind, so wird der Potentialcoefficent eines Conductors A_1 gegen einen Conductor A_2 vergrössert oder verkleinert, je nachdem A_3 innerhalb

oder ausserhalb einer mit der Entfernung von A_1 gegen A_2 als Durchmesser geschlagenen Kugel sich befindet.

Eine positive Electricitätseinheit auf A_1 bringt nämlich in A_3 eine derartige electrische Verteilung hervor, dass $+e$ sich nach der von A_1 entferntesten $-e$ sich nach der A_1 nächsten Stelle von A_3 begiebt. Das Potential dieser in A_3 entstandenen Verteilung auf A_2 ist nun positiv oder negativ, das heisst das Potential von A_1 auf A_2 wird vergrössert oder verkleinert, je nachdem die Electricität $+e$ oder $-e$ des Conductors A_3 dem Conductor A_2 am nächsten ist, und das hängt, wenn A_3 kein verlängerter Körper ist, davon ab, ob der Winkel $A_1 A_3 A_2$ stumpf oder spitz ist, also ob A_3 in der bezeichneten Kugel oder ausserhalb derselben liegt.

Wenn der Conductor A_3 statt rund zu sein eine verlängerte Form hat, so kann er das Potential von A_1 auf A_2 vergrössern, wenn seine lange Axe tangential zum Kreise $A_1 A_3 A_2$ ist, selbst wenn er ganz ausserhalb desselben sich befindet. Umgekehrt kann er dieses Potential verkleinern, wenn seine lange Axe senkrecht zum Kreise verläuft, selbst wenn er ganz innerhalb des Kreises liegt.

Solche Bemerkungen sollen aber nur dazu dienen, dem Leser in gegebenen Fällen eine rohe Vorstellung von den zu erwartenden Erscheinungen zu verleihen.

91c. VII.) Ein neu eingeführter Conductor vergrössert die Capacitäten und verkleinert die numerischen Beträge der Inductionscoefficienten der schon vorhandenen Conductoren.

Wir geben dem Conductor A_1 ein Potential gleich 1 und machen die Potentiale aller anderen Conductoren gleich Null. Da der neu eingeführte Conductor durch Induction sich entgegengesetzt wie A_1 also negativ, ladet, so inducirt er in den andern Conductoren positive Electricitätsmengen. Er vermehrt also die positive Ladung von A_1 und verringert die negativen Ladungen der andern Conductoren.

Specielle Anwendungen.

92a. *Zwei kleine Conductoren.* Es seien A_1 und A_2 zwei Conductoren in einer mittlern Entfernung r von einander, die selbst gegen ihre grössten Dimensionen noch sehr gross ist. Bezeichnen K_1 und K_2 ihre Capacitäten, wenn jeder von ihnen sich allein im electrischen Felde befindet, dann ist dem obigen zufolge

$$p_{11} = \frac{1}{K_1}, \quad p_{12} = \frac{1}{r}, \quad p_{22} = \frac{1}{K_2},$$

also

$$V_1 = e_1 K_1^{-1} + e_2 r^{-1},$$

$$V_2 = e_1 r^{-1} + e_2 K_2^{-1}.$$

Berechnet man aus den beiden letzten Gleichungen e_1 und e_2 und benutzt die Gleichungen 4) in Art. 87, so folgt

$$q_{11} = K_1(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{12} = -K_1 K_2 r^{-1}(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{22} = K_2(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

q_{11}, q_{22} sind die Capacitäten der beiden Conductoren, wenn sie, statt einzeln im electrischen Felde zu sein, sich gleichzeitig in demselben in einer Entfernung r von einander befinden.

92b. *Zwei Condensatoren.* Zwei Körper, die sich so nahe nebeneinander befinden, dass ihre gegenseitige Induction eine beträchtliche Grösse erreicht, bilden zusammen einen *Condensator*, oder, was dasselbe ist, die *Electroden* eines Condensators.

Es seien A, B die Electroden des Condensators (A, B), L gebe die Capacität von A, N die von B an, wenn (A, B) sich allein im electrischen Felde befindet, M bezeichne die gegenseitige Induction von A und B (M ist also eine negative Grösse). Entsprechend seien l, n, m Capacitäten und Induction der Electroden a, b eines andern Condensators (a, b) unter der Bedingung, dass er allein im Felde vorhanden ist.

Zunächst haben wir, wenn jeder Condensator für sich allein besteht, die Gleichungen

$$p_{AA} = D^{-1}N, \qquad p_{aa} = d^{-1}n,$$

$$p_{AB} = p_{BA} = -D^{-1}M, \quad p_{ab} = p_{ba} = -d^{-1}m,$$

$$p_{BB} = D^{-1}L, \qquad p_{bb} = d^{-1}l,$$

wo

$$D = LN - M^2, \quad d = ln - m^2$$

ist.

Befinden sich die beiden Condensatoren in einer Entfernung R von einander, die so gross ist, dass ihre Dimensionen dagegen verschwinden, so werden die obigen Potentialcoefficienten auch für den Fall gelten, dass beide Condensatoren gleichzeitig im electrischen Felde vorhanden sind. Es kommen dann noch 8 Coefficienten p hinzu, die, weil das Potential zweier Conductoren in sehr grosser Entfernung R von einander gleich R^{-1} ist, alle den Wert R^{-1} haben werden. Es gelten demnach noch die 8 Gleichungen

$$p_{Aa} = p_{aA} = p_{Ba} = p_{aB} = p_{Ab} = p_{bA} = p_{Bb} = p_{bB} = R^{-1}.$$

Nach Art. 87, 2) werden dann die Potentiale der 4 einzelnen Electroden

$$V_A = D^{-1} N e_A - D^{-1} M e_B + R^{-1} e_a + R^{-1} e_b,$$

$$V_B = - D^{-1} M e_A + D^{-1} L e_B + R^{-1} e_a + R^{-1} e_b,$$

$$V_a = R^{-1} e_A + R^{-1} e_B + d^{-1} n e_a - d^{-1} m e_b,$$

$$V_b = R^{-1} e_A + R^{-1} e_B - d^{-1} m e_a + d^{-1} l e_b.$$

Löst man diese Gleichungen nach e_A, e_B, e_a, e_b auf, so folgt aus den Gleichungen 4) in Art. 87

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2 (l+2m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{AB} = M' = M + \frac{(L+M)(M+N)(l+2m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{Aa} = - \frac{R(L+M)(l+m)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{Ab} = - \frac{R(L+M)(m+n)}{R^2 - (L+2M+N)(l+2m+n)}.$$

Die 12 andern Coefficienten $q_{BA} = q_{AB}$, $q_{BB} = N'$, q_{Ba}, q_{Bb}, $q_{aa} = l'$, $q_{ab} = q_{ba} = m'$, q_{aA}, q_{aB}; $q_{bb} = n'$, q_{bA}, q_{bB} ergeben sich aus den obigen 4, indem man N mit L, die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht, endlich nach der letztern Vertauschung noch n in l verwandelt.

L', M', N'; l', m', n' haben für die einzelnen Conductoren, wenn beide Condensatoren gleichzeitig im Felde sind, dieselbe Bedeutung wie L, M, N; l, m, n, wenn nur je einer sich daselbst befindet.

Wenn ausser dem Condensator (A, B) nur noch ein Conductor a in der Entfernung R von diesem vorhanden ist, so muss $m = n = o$ sein, also

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2 l}{R^2 - l(L+2M+N)},$$

$$q_{AB} = q_{BA} = M' = M + \frac{(L+M)(M+N) l}{R^2 - l(L+2M+N)},$$

$$q_{Aa} = - \frac{Rl(L+M)}{R^2 - l(L+2M+N)}.$$

Sind nur zwei Conductoren A und a in der grossen Entfernung R von einander vorhanden, so ist noch einfacher

$$q_{AA} = L' = L + \frac{L^2 l}{R^2 - Ll}, \quad q_{Aa} = - \frac{RLl}{R^2 - lL},$$

$$q_{aa} = l' = l + \frac{l^2 L}{R^2 - lL},$$

und diese Ausdrücke fallen mit den in Art. 92 a) abgeleiteten zusammen.

Die Grösse $L + 2M + N$ giebt die gesammte Ladung eines Condensators, wenn seine beiden Electroden des Potential 1 haben, sie ist nicht grösser als die Hälfte des grössten Diameters des Condensators.

Diese Ladung $L + 2M + L$ verteilt sich so, dass die erste Electrode die Ladung $L + M$, die zweite die $N + M$ erhält. Da M eine negative Grösse ist, so sind diese Ladungen positiv und kleiner als die Capacitäten der Electroden (jede allein im Felde gedacht).

Die obigen Beispiele beziehen sich zwar nur auf näherungsweise gelöste Probleme, sie sind aber insofern von Wichtigkeit als sie den Weg zeigen, den man zur Lösung verwickelter Aufgaben einzuschlagen hat, welche wegen etwaiger complicirter Form der Conductoren eine strenge mathematische Behandlung nicht zulassen.

Arbeit während der Verschiebung eines Systems geladener Conductoren.

93a. *Ladungen unveränderlich.* Die Conductoren sollen zunächst isolirt sein, ihre Ladungen können sich dann während der Verschiebung nicht ändern. Ist daher die Energie vor der Verschiebung

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma e V,$$

so beträgt sie nach derselben

$$W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e V'.$$

Die Arbeit der electrischen Kräfte während der Verschiebung, also $W - W'$, ist daher

$1_1)$ $$W - W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e (V - V'),$$

gleichgültig ob die Verschiebung beträchtlich oder gering ist.

Bezeichnen wir weiter mit φ_r die Variabele, von der eine bestimmte Verschiebung abhängt, mit Φ_r die Kraft, welche eine solche Verschiebung φ_r zu Stande bringt, und rechnen Φ_r positiv, wenn es φ_r zu vergrössern sucht, so ist

$$\Phi_r \partial \varphi_r = - \partial W_e .$$

Die Kraft ist also

2a) $$\Phi_r = - \frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r},$$

wo W_e die Energie als Function der Ladungen angiebt.

93b. Wir haben aber für die Energie drei Ausdrücke aufgestellt.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} e_r V_r$$

als Function der Ladungen und Potentiale;

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} e_r e_s p_{rs}$$

als Function der Ladungen und der Potentialcoefficienten, welche ihrerseits von den die Configuration des Leitersystems bestimmenden Variabeln abhängen;

$$W_V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} V_r V_s q_{rs}$$

als Function der Potentiale und mittelbar der Variabeln, die zur Festsetzung der Configuration des Systems dienen.

Diese drei Darstellungen sind sich natürlich vollkommen gleichwertig, so dass

$$W = W_e = W_V$$

ist. Demnach haben wir auch

$$W_e + W_V - 2W = 0.$$

Bezeichnet also e_r eine der zur Bestimmung der Configuration des Systems dienenden Variabeln, so ergiebt die vollständige Variation der letzten Gleichung nach den Ladungen, den Potentialen und den Variabeln

$$\sum \left\{ \left(\frac{\partial W_e}{\partial e_s} - V_s \right) \delta e_s + \left(\frac{\partial W_V}{\partial V_s} - e_s \right) \delta V_s \right\} + \sum \left(\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r} \right) \delta \varphi_r = 0.$$

Nach den Gleichungen 6) und 7) in Art. 85b verschwinden die Factoren der δe_s und δV_s, und da ausserdem die $\delta \varphi_r$ unabhängig von einander sind, so folgt die Beziehung

3) $$\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r} = 0.$$

Daraus ergiebt sich

2b) $$\Phi_r = \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r}.$$

93c. *Potentiale unveränderlich.* Integrirt man die Gleichung unter 2b), so folgt

$$A = \int \Phi \, \partial \varphi = \int \partial W_V$$

Soll also die Verschiebung der Conductoren so vor sich gehen, dass die Potentiale dabei nicht geändert werden, so hat man

1_2) $$A = W'_V - W_V.$$

Die Arbeit, welche die electrischen Kräfte während einer solchen Verschiebung leisten, ist also gleich dem Betrag, um welchen die electrische Energie während der Verschiebung anwächst.

Der Sinn dieses Satzes, welcher eine Beziehung zwischen einer geleisteten Arbeit und einer angewachsenen Energie aufstellt, ist aber der, dass wenn wirklich die Potentiale der Conductoren durch die Verschiebung nicht afficirt werden sollen, dem System von Aussen her, etwa durch eine Voltasche Batterie, Energie zugeführt werden muss.

Die Arbeit, welche die Batterie verbraucht, ist gleich der Summe aus der von den electrischen Kräften geleisteten Arbeit und dem Anwuchs der Energie des Systems, sie ist also zufolge des Satzes unter 1_2) zweimal so gross wie die Arbeit, welche von den electrischen Kräften des Systems geleistet wird.

Beziehungen zwischen Körpern, die in ihrer Form oder in ihrer Ladung sich ähnlich sind.

94. Wenn zwei Systeme einander geometrisch ähnlich sind, das heisst, wenn correspondirende Strecken in ihnen überall in demselben Verhältnis $L : L'$ zu einander stehen, und wenn ferner die Leiter in beiden Systemen durch dasselbe Dielectricum von einander getrennt werden, so verhalten sich die Capacitäten entsprechender Leiter wie L zu L'.

Seien nämlich die Electricitätsmengen auf zwei entsprechenden Elementen A und A' beider Systeme gleich e bezüglich e', dann ist das Potential von A auf ein anderes Element B des ersten Systems gleich $V = e/AB$ und das Potential von A' auf ein dem B entsprechendes Element $V' = e'/A'B'$. Da aber $AB : A'B' = L : L'$ ist, so folgt

1_1) $$e : e' = LV : L'V',$$

woraus sich bei $V = V' = 1$ die Richtigkeit des obigen Satzes ergiebt.

Wenn aber bei Fortbestand des geometrischen Aehnlichkeitsverhältnisses beide Systeme verschiedene Dielectrica als Zwischenmedium haben, so dass die specifische inductive Capacität in dem einen gleich K, in dem andern gleich K' ist, so ergiebt sich

1) $$e : e' = LKV : L'K'V',$$

und diese Gleichung lehrt das Verhältnis der Ladungen entsprechender Teile der beiden Systeme kennen, wenn erstens diese Systeme geometrisch ähnlich sind, also entsprechende Strecken sich wie L zu L' verhalten, zweitens die specifischen inductiven Capacitäten der Dielectrica sich wie K zu K' verhalten, und drittens die Potentiale an entsprechenden Stellen in der Proportion von V zu V' stehen.

Für entsprechende Capacitäts- oder Inductionscoefficienten q, q' folgt hieraus

2) $$q : q' = LK : L'K'$$

und für entsprechende Potentialcoefficienten p, p'

3) $$p : p' = (LK)^{-1} : (L'K')^{-1}.$$

Verschiebt man zwei entsprechende Körper beider Systeme um Strecken, die zu einander in dem Verhältnis von $L : L'$ stehen, und braucht man dazu in dem einen Systeme eine Kraft F, in dem andern eine Kraft F', so ist das Verhältnis der geleisteten Arbeiten A, A' zu einander gegeben durch

4) $$A : A' = LF : L'F'.$$

Weiter stehen die totalen Energieen W, W' beider Systeme dem obigen zufolge im Verhältnis von eV zu $e'V'$, so dass

5) $$W : W' = eV : e'V'$$

ist, und das giebt zusammengehalten mit der Definition der Energie als Arbeit

6) $$FL : F'L' = eV : e'V'.$$

Für das Verhältnis der zur Verschiebung nötigen Kräfte folgt daraus wegen der Gleichung 1)

7a) $$F : F' = KV^2 : K'V'^2$$

oder

7b) $$F : F' = \frac{e^2}{L^2K} : \frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

Nach der ersten dieser Proportionen ist das Verhältnis dieser Kräfte unabhängig von den Dimensionen der Systeme und gleich dem der Producte aus den Quadraten der electromotorischen Kräfte in die specifischen inductiven Capacitäten.

Bringt man also zwei Conductoren in eine Flüssigkeit, deren specifische inductive Capacität grösser als die der Luft ist, so werden sie sich nach der Electrisirung zu bestimmten Potentialen hier stärker anziehen oder abstossen, als wenn sie sich in der Luft befänden und dort zu denselben Potentialen geladen würden.

Nach der zweiten Proportion verhalten sich die beiden Kräfte gerade wie die Quadrate der entsprechenden Ladungen und umgekehrt wie die Quadrate der Distanzen und die einfachen Potenzen der inductiven Capacitäten.

Ladet man demnach zwei Conductoren mit denselben Electricitätsmengen e, e' einmal in Luft und ein andermal in einer Flüssigkeit, die ein grösseres specifisches Inductionsvermögen als die Luft besitzt, so werden sie in letzterer sich weniger stark anziehen, bezüglich abstossen als in der Luft.

Cap. IV.

Allgemeine Theoreme.

—×—

Vorbemerkungen.

95a. Wir haben im zweiten Capitel die Potentialfunction unter Annahme einer Wirkung in die Ferne zu berechnen gelernt, und sie als Resultante der verschiedenen Einzelwirkungen der electrisirten Körperteile auf einander dargestellt.

Daraus haben wir dann eine Anzahl ihrer Eigenschaften abgeleitet.

Wir schlagen nun den entgegengesetzten Weg ein, indem wir die Eigenschaften der Potentialfunction als bekannt voraussetzen und aus ihnen die Form der Potentialfunction zu ergründen suchen.

Die erste directe Methode ist nur da anwendbar, wo ausser der geometrischen Configuration des electrischen Systems auch die electrische Verteilung in allen seinen Partieen gegeben ist. Ihre Hauptaufgabe besteht also in der Bestimmung der electrischen Kräfte, wenn die Electricität in und auf Körpern in vorgeschriebener Weise angehäuft ist.

Die zweite Methode dagegen dient zur Ergründung der electrischen Verteilung und des Potentials aus den Eigenschaften des letztern, und sie führt, wie wir noch zu zeigen haben werden, zu ebenso eindeutigen Resultaten, wie jene erste Methode.

Die fundamentale Eigenschaft des Potentials, von der wir bei der zweiten Methode Gebrauch zu machen haben, ist die durch die Laplace-Poissonsche Formel

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+4\pi\rho=0$$

ausgedrückte.

Sie stellt eine partielle Differentialgleichung für V vor, da sie eine Beziehung zwischen den zweiten Derivirten des Potentials in der Nachbarschaft eines bestimmten Punktes und der in diesem Punkte herrschenden Dichte der Electricität festsetzt.

Im Gegensatz dazu giebt die Hauptgleichung der ersten Methode

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

eine Beziehung zwischen dem Potential in einem Punkte (x, y, z) und den Dichten der Electricität in beliebig weit von diesem Punkte entfernten andern Punkten (x', y', z'). Der durchgreifende Unterschied zwischen ihr und der Laplace-Poissonschen Gleichung besteht also darin, dass das bestimmte Integral als der mathematische Ausdruck der Tatsache einer Wirkung in die Ferne betrachtet werden kann, während die Differentialgleichung sich nur mit dem beschäftigt, was unmittelbar an einer bestimmten Stelle geschieht.

Wir haben aber gesehen, dass das bestimmte Integral auch der Differentialgleichung genügt, und ich werde noch zeigen, dass es die einzige Lösung derselben ist, die gewisse Bedingungen befriedigt.

Beide Ausdrücke für das Potential werden sich uns also als äquivalent ergeben, und dadurch gewinnen wir den Uebergang von der Annahme einer Wirkung in die Ferne zu der einer Einwirkung benachbarter Teilchen aufeinander.

95b. Bei den Theoremen, die ich in diesem Capitel zu begründen haben werde, wird es sich vornehmlich um die Eigenschaften von Raumintegralen, erstreckt über endliche Gebiete, die wir als electrische Felder bezeichnen werden, handeln.

Das Element dieser Integrale, also die Grösse unter dem Integrationszeichen, wird entweder das Quadrat eines gewissen Vectors, der in Betrag und Richtung von Punkt zu Punkt variirt, oder aber ein Product eines Vectors in die in seine Richtung genommene Componente eines andern Vectors sein.

Ueber die Verteilung von Vectoren im Raume, auf die es uns hier, wie man leicht sieht, namentlich ankommen wird, habe ich schon an andern Orten einiges gesagt.

Darnach haben wir namentlich zwei Verteilungsarten zu berücksichtigen.

Bei der ersten Verteilungsart, der irrotationalen, kann ein Vector als die Raum-Variation einer scalaren Function, die wir als Potential bezeichnet haben, betrachtet werden. (Art. 17.)

Die Attractions- und Repulsionskräfte eines Systems von Kraftcentren geben, sofern sie nur von Distanzen abängen, ein Beispiel für eine solche Verteilung von Vectoren ab.

Die zweite Art der Verteilung, die sphondyloidale, ist dadurch charakterisirt, dass der scalare Teil der Operation $\nabla \sigma = i\, \partial\sigma/\partial x + j\, \partial\sigma/\partial y + k\, \partial\sigma/\partial z$ — wir haben ihn früher die Convergenz genannt — in allen Punkten verschwindet. (Art. 25.)

In dieser (sphondyloidalen) Weise ist zum Beispiel die Geschwindigkeit in einer incompressiblen sich bewegenden Flüssigkeit verteilt.

Trifft es sich, dass Centralkräfte dem Newtonschen Gesetze gehorchen, so variirt die resultirende Kraft in dem Raume, wo keine Kraftcentren vorhanden sind, von Ort zu Ort sowohl in der sphondyloidalen als in der irrotationalen Weise.

Entsprechend findet die Verteilung der Geschwindigkeiten in einer incompressibeln Flüssigkeit gleichzeitig nach beiden Arten statt, wenn die sie bewegenden Kräfte nur Centralkräfte sind, oder wenn sie in Druckkräften bestehen und die Flüssigkeit reibungslos ist und sich ursprünglich in Ruhe befand.

Solche Verteilungen, die zugleich sphondyloidal und rotationslos verlaufen, sind namentlich von Laplace untersucht worden, und deshalb werde ich sie als Laplacesche Verteilungen bezeichnen.

Die Raumintegrale, mit denen wir uns zu beschäftigen haben werden, beziehen sich auf Ausdrücke für die Energie im electrischen Felde. In der ersten Gruppe der abzuleitenden Theoreme, die mit dem Greenschen Satz beginnt, wird die Energie als Function der electromotorischen Kraftintensität, also eines Vectors, der im Falle des electrischen Gleichgewichts irrotational verteilt ist, dargestellt.

Es wird sich dabei zeigen, dass bei vorgeschriebenen Potentialwerten für die Conductoroberflächen von allen irrotationalen Verteilungen diejenige die geringste Energie im electrischen Felde hervorbringt, welche zugleich sphondyloidal ausfällt. Daraus folgt dann, dass wenn die Potentialniveaus der Conductoren von vornherein gegeben sind, damit die Laplacesche Verteilung eindeutig bestimmt ist.

In der zweiten Gruppe von Theoremen, welche namentlich den Thomsonschen Satz einschliesst, ist die Energie durch die electrische Verschiebung ausgedrückt, also durch einen Vector mit sphondyloidaler Verteilung. Entsprechend wird man hier finden, dass bei gegebenen Oberflächenladungen von allen sphondyloidalen Verteilungen diejenige die geringste Energie entwickelt, welche gleichzeitig irrotational ist. Es giebt dann nur eine Laplacesche Verteilung, die mit gegebenen Flächenladungen sich vereinbaren lässt.

Die Beweise dieser Sätze werden alle nach demselben Schema geführt, und ich bemerke, um Wiederholungen zu vermeiden, dass in jedem Falle, wo es sich um Untersuchung eines Flächenintegrals handelt, der Satz III_1 in Art. 21,*) der eine Beziehung zwischen einem Flächenintegral und einem entsprechenden Raumintegral herstellt, anzuwenden sein wird. Man hat in

*) Den citirten Satz scheint zuerst Ostrogradsky aufgestellt zu haben, und zwar in einer Abhandlung, die 1828 gelesen und 1831 in den *Mém. de l'Acad. de St. Petersbourg* T. I. p. 39 veröffentlicht worden ist. Der Satz kann auch als ein besonderer Ausspruch der Continuitätsgleichung gelten.

diesem Satze für X, Y, Z die Componenten des Vectors einzusetzen, um den es sich in dem betreffenden Theoreme gerade handelt.

In der ersten Ausgabe dieses Buches habe ich jedes Theorem von einer Menge von Alternativen abhängig gemacht, die einerseits die allgemeine Gültigkeit desselben dartun sollten, und andererseits dazu bestimmt waren zu zeigen, in wie mannigfachen Fällen das Theorem verwendet werden könnte. Ich habe mich aber überzeugt, dass sie viel dazu beitrugen den Leser über das, was angenommen, und das, was bewiesen werden sollte, in Unklarheit zu lassen. Deshalb habe ich in dieser Ausgabe jedes der Theoreme zuerst in ganz bestimmter und etwas eingeschränkter Fassung ausgesprochen und dann erst gezeigt, in wie weit dasselbe einer Verallgemeinerung fähig ist.

Ich habe noch eine kleine Aenderung in der Bezeichnung anzuführen, die im Folgenden hervortreten wird. Das frühere Symbol V für das Potential soll nämlich so lange noch weiter beibehalten werden, als es sich um strict electrostatische Fragen handelt. Sonst benutze ich hier so wie im zweiten Bande dieses Werkes, wo wir electromagnetische Untersuchungen anzustellen haben werden, den Buchstaben Ψ als Bezeichnung für das electrische Potential.

Der Greensche Satz.

96a. Der in der Ueberschrift bezeichnete wichtige Satz ist von Green in seinem *Essay on the Application of Mathematics to Electricity and Magnetism* aufgestellt worden.

Es sei s ein von einer geschlossenen Fläche abgegrenztes Gebiet und ν eine nach dem Innern der Fläche gerichtete Normale mit den Richtungscosinussen l, m, n. Wir haben dann

$$\text{a)} \qquad l\frac{\partial\Psi}{\partial x}+m\frac{\partial\Psi}{\partial y}+n\frac{\partial\Psi}{\partial z}=\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}$$

für die verhältnismässige Aenderung der Function Ψ auf der Normale ν.

Speciell soll aber unter $\partial\Psi/\partial\nu$ der Wert dieser Grösse auf der Oberfläche s verstanden werden, also wenn $\nu=0$ ist.

Weiter setzen wir symbolisch

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=-\nabla^2\Psi$$

und

$$\text{c)} \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-S.\nabla\Psi\nabla\Phi.$$

Für den Leser, der mit der Theorie der Quaternionen wenig vertraut ist, sind jene Symbole $\nabla^2\Psi$ und $S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ weiter nichts als Abkürzungszeichen für die angegebenen Rechnungsoperationen, und da wir im Folgenden

lediglich die gewöhnliche Cartesische Methode anzuwenden haben werden, wird es auch nicht nötig sein, auf ihre Bedeutung in der Quaternionentheorie besonders einzugehen. Ich benutze aber gerade diese Symbole und nicht Buchstaben, die beliebig gewählt werden könnten, weil sie eben in der Sprache der Quaternionen vollständig die Grösse ausdrücken, zu deren Bezeichnung sie dienen sollen. Die Operation ∇ giebt nämlich, auf eine scalare Function Ψ angewendet, die Raum-Aenderung dieser Function, und die Operation $-S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ bezeichnet den scalaren Teil des Products zweier Raum-Aenderungen, oder auch das Product einer dieser beiden Raum-Aenderungen in die in ihrer Richtung genommene Componente der andern.

Man hat übrigens in der Quaternionentheorie auch für die Grösse $\partial\Psi/\partial\nu$ eine besondere Bezeichnung, nämlich $S.U\nu\nabla\Psi$, wo $U\nu$ einen Einheits-Vector in Richtung der Normale angiebt. Die Benutzung dieser Bezeichnung ist bei der Untersuchung anisotroper Mittel von einiger Bedeutung, hier aber bietet sie weiter keine nennenswerten Vorteile dar.

Ich lasse nach diesen Vorbereitungen den Satz folgen, um den es sich handelt.

Sind Ψ und Φ zwei Functionen, die in einem durch eine geschlossene Fläche s abgegrenzten einfach zusammenhängenden Raum τ endlich und stetig verlaufen, dann gelten die Gleichungen

1) $$\iint\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Psi\nabla^2\Phi\,d\tau=\iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi\,d\tau,$$

2) $$\iint\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Psi\nabla^2\Phi\,d\tau=\iint\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Phi\nabla^2\Psi\,d\tau.$$

Die Doppelintegrale beziehen sich auf die gesammte Grenzfläche s, die dreifachen auf den ganzen Raum τ innerhalb dieser Fläche.

Zum Beweise dieses Satzes setzen wir in Theorem III_1 Art. 21, in welchem dieselben Bedingungen der Continuität und Endlichkeit erfüllt sein müssen,

$$X=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ Y=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y},\ Z=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

und erhalten

$$R\cos\varepsilon=\Psi\left(l\frac{\partial\Phi}{\partial x}+m\frac{\partial\Phi}{\partial y}+n\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

$$=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\Psi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$=-\Psi\nabla^2\Phi-S.\nabla\Psi\nabla\Phi,$$

Nach dem citirten Theorem III_1 in Art. 21 ist aber

$$\iint R \cos\varepsilon \, ds = -\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau,$$

somit wird

$$\iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds - \iiint \Psi \bigtriangledown^2 \Phi \, d\tau = \iiint S \,.\, \bigtriangledown \Psi \bigtriangledown \Phi \, d\tau.$$

Eine analoge Gleichung erhält man, wenn Φ mit Ψ vertauscht wird und damit den ganzen oben ausgesprochenen Greenschen Satz.

96b. Wir bekommen eine Erweiterung unseres Theorems durch den Nachweis, dass eine der Functionen, etwa Ψ, auch mehrwertig sein kann, wenn nur ihre ersten Derivirten in dem einfach zusammenhängenden Raum einwertig und endlich sind.

Nach dieser Festsetzung ist $\bigtriangledown\Phi$ sowohl als $\bigtriangledown\Psi$ einwertig, also in der Gleichung 1) das Glied auf der rechten Seite auch einwertig, dagegen ist $\Psi\bigtriangledown^2\Phi$ vielwertig. Gehen wir aber von einem der Werte des Ψ in einem Punkte A, von Ψ_0 aus, dann ist in jedem andern Punkte P der Wert des Ψ eindeutig bestimmt, auf welchem Wege wir auch von A nach P gelangen mögen. Die durch den speciellen Wert Ψ_0 charakterisirte Reihe von Werten des Ψ bildet nämlich einen continuirlichen Zweig der Function Ψ, und wenn man trotzdem auf zwei von A nach P führenden Wegen in P zu zwei verschiedenen Werten des Ψ gelangen sollte, die zwei Zweigen der Function angehören, so kann das nur dadurch geschehen, dass diese beiden Wege einen Punkt einschliessen, in welchem zwei Werte zweier verschiedener Zweige zusammenfallen, so dass man continuirlich aus dem einen Zweig in den andern überzugehen vermag. In einem Verzweigungspunkt werden aber die Derivirten der Function unendlich gross, und da sie in unserem ganzen Gebiet endlich sein sollten, so kann ein solcher Verzweigungspunkt sich nur ausserhalb unseres Gebietes befinden. Wäre das Gebiet mehrfach zusammenhängend, so könnten die beiden Wege ihn doch noch einschliessen, ohne selbst aus dem Gebiete heraustreten zu müssen. Wir haben aber noch die Voraussetzung gemacht, dass unser Gebiet einfach zusammenhängt, und das ist gleichbedeutend damit, dass sich kein geschlossener Weg in demselben angeben lässt, der ausserhalb des Gebietes befindliche Teile umfasst. Es kann demnach, wenn die Annahmen für die Function Ψ bestehen sollen, überhaupt keine geschlossene im Gebiete τ verlaufende Curve einen Verzweigungspunkt einschliessen, das heisst aber, man muss auf jedem in dem Gebiete τ von A nach P führenden Wege stets zu demselben in dem Zweige, dem Ψ_0 angehört, befindlichen Wert für Ψ gelangen.

Hätten wir in A für Ψ_0 einen andern Wert $\Psi_0 + n\varkappa$ gewählt, so würde sich in P statt Ψ der Wert $\Psi + n\varkappa$ finden, die linke Seite der Gleichung 1) würde also noch um die Differenz

$$n\varkappa\left[\iint\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds - \iiint\bigtriangledown^2\Phi\,d\tau\right],$$

anwachsen. Diese Differenz ist aber nach dem citirten Theorem III_1 gleich Null.

96c. Haben wir statt des einfach zusammenhängenden einen mehrfach zusammenhängenden Raum, so verwandeln wir ihn durch geeignete Schnitte oder Diaphragmen in einen einfach zusammenhängenden. Die Diaphragmen zählen dann mit zur Begrenzungsfläche des Raumes.

Ist s_1 ein solches Diaphragma und $\varkappa_1$ der Sprung, den Ψ beim Durchgang durch dieses Diaphragma erleidet, so ist, wenn Ψ_1 und Ψ_1' zwei unmittelbar zu beiden Seiten des Diaphragma geltende Werte des Ψ angeben

$$\Psi_1' = \Psi_1 + \varkappa_1.$$

Bei der Ausführung der Flächenintegration muss nun jedes Element des Diaphragma s_1 zweimal vorkommen, weil zu beiden Seiten desselben Stücke des Gebietes τ liegen, und wenn ν_1 die nach der positiven ν_1', die nach der negativen Seite gezogene Normale zu s_1 ist, so haben wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1},$$

mithin

$$\Psi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1 + \Psi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1'} ds_1 = -\varkappa_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1.$$

Die Gleichung 1) wird also in einem $n$fach zusammenhängenden Raum

$$3) \quad \iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \varkappa_\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_\rho} ds_\rho - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\tau = \iiint S . \nabla \Psi \nabla \Phi \, d\tau.$$

Das erste Integral bezieht sich auf die Grenzfläche, die $n-1$ Integrale unter dem Summenzeichen erstrecken sich auf die einzelnen Diaphragmen, wobei jedes Element derselben nur einmal zu rechnen ist, und die Normalen in positiver Richtung laufen, die dreifachen Integrale umfassen das ganze Raumgebiet τ.

Die Notwendigkeit dieser Erweiterung des Greenschen Satzes ist von Helmholtz*) angegeben worden. Thomson hat sie dann in der angegebenen Weise ausgeführt.**)

96d. In der weitern Verallgemeinerung lassen wir mit Green für eine der Functionen, für Φ, die Voraussetzung, dass sie und ihre ersten Derivirten in dem gegebenen Gebiete endlich sind, fallen. Wir nehmen vielmehr an, dass Φ in dem Punkte P, aber nur in diesem, unendlich wird wie $1/r$. Ist also Φ_0 eine endliche stetige Grösse, so setzen wir in der Nachbarschaft von P das $\Phi = \Phi_0 + e/r$.

*) *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik 1858.

**) *On Vortex Motion.* Trans. R. S. Edin. XXV part I, pag. 241 (1867).

Einen solchen Wert würde Φ zum Beispiel haben, wenn es das Potential einer im Gebiete τ endlichen electrischen Verteilung und einer im Punkte P befindlichen Electricitätsmenge e wäre.

Schliessen wir den Punkt P durch eine kleine mit dem Radius a geschlagene Kugel ein, so können wir in dem Gebiete zwischen s und dieser Kugel den Greenschen Satz anwenden, wenn bei Berechnung des Flächenintegrals die Fläche der Kugel mit zur Grenzfläche gezählt wird, und bei Berechnung des Raumintegrals der Teil desselben, der sich auf die kleine Kugel bezieht, in Abzug gebracht wird.

Nun ist aber das eine Raumintegral,

$$\iiint \Phi \bigtriangledown^2 \Psi \, dx \, dy \, dz,$$

für die kleine Kugel numerisch nicht grösser als

$$(\bigtriangledown^2 \Psi)_g \left\{ \iiint \Phi \, dx \, dy \, dz \right\},$$

also auch nicht grösser als

$$(\bigtriangledown^2 \Psi)_g \left\{ 2\pi e a^2 + \tfrac{4}{3} \pi a^3 \Phi_0 \right\},$$

wenn der Index g angiebt, dass der innerhalb der Kugel grösste Wert einer Quantität genommen werden soll. Dieses Raumintegral der Kugel ist also von der Ordnung a^2 unendlich klein und kann vernachlässigt werden.

Das zweite Raumintegral $\iiint \Psi \bigtriangleup^2 \Phi \, dx \, dy \, dz$ kann numerisch nicht grösser sein als

$$\Psi_g \, (\bigtriangledown^2 \Phi_0) \tfrac{4}{3} \pi a^3$$

und ist demnach als von der Ordnung a^3 ebenfalls zu vernachlässigen.

Von den Flächenintegralen in Bezug auf die Kugel um P ist $\iint \Phi (\partial \Psi / \partial \nu) \, ds$ numerisch nicht grösser als $\Phi_g \iint (\partial \Psi / \partial \nu) \, ds$. Nun ist nach dem Theorem III_1

$$\iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \, ds = - \iiint \bigtriangledown^2 \Psi \, dx \, dy \, dz,$$

und da das Integral auf der rechten Seite nicht grösser ist als $(\bigtriangledown^2 \Psi)_g \, 4\pi a^3/3$, so kann jenes Flächenintegral nicht grösser sein als

$$\Phi_g \, (\bigtriangledown^2 \Psi)_g \, \tfrac{4}{3} \pi a^3.$$

Auf der sehr kleinen Kugel ist aber Φ_g nahezu gleich e/a. Das erste Flächenintegral ist also von der Ordnung a^2 und kann vernachlässigt werden.

Das zweite Flächenintegral über die kleine Kugel, $\iint \Psi \, (\partial \Phi / \partial \nu) \, ds$, verschwindet aber nicht, denn da die Kugel sehr klein ist, und Ψ sich continuirlich ändert, so muss jenes Integral bis auf sehr kleine Grössen gleich $\Psi_0 \iint (\partial \Phi / \partial \nu) \, ds$ sein, wo Ψ_0 den Wert des Ψ im Punkte P bezeichnet.

Nach früheren Sätzen ist dann noch

$$\iint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds = -4\pi e$$

und demnach

$$\iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds = -4\pi e \Psi_0.$$

der durch Gleichung 2) ausgedrückte Greensche Satz wird also unter diesen Umständen

$$4) \quad \iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\tau - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, d\tau.$$

97a. Als Anwendung dieses besonderen Falles des Greenschen Satzes bestimmen wir die Flächendichte, mit der die Electricität sich auf einer Fläche verteilt, wenn die Potentiale innerhalb und ausserhalb derselben vorgeschriebene Werte erhalten. Auf der Fläche müssen die Potentialwerte von Innen und Aussen zusammenfallen, ferner ist innerhalb der Fläche $\nabla^2 \Psi = 0$ und ausserhalb derselben $\nabla^2 \Psi' = 0$.

Green, der dieses Problem auch behandelt hat, beginnt mit der früher charakterisirten directen Methode, welche, wenn die Dichte σ der auf der Fläche verteilten Electricität gegeben ist, die Potentiale für innerhalb bezüglich ausserhalb derselben liegende Punkte P, P' durch die Integrale

$$a) \quad \Psi_P = \iint \frac{\sigma}{r} ds, \quad \Psi_{P'} = \iint \frac{\sigma}{r'} ds,$$

in denen r, r' die Distanzen der Punkte P, P' von den Elementen ds der Fläche bedeuten, finden lehrt.

Wir setzen $\Phi = 1/r$ und wenden den Satz unter 4) auf Punkte P innerhalb der Fläche s an. Da $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$ sein muss, so ergiebt jener Satz, wenn Ψ_P das Potential im Punkte P selbst bedeutet,

$$5) \quad \iint \Psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds - 4\pi \Psi_P = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds.$$

Ferner beziehen wir bei derselben Annahme für Φ den Satz unter 2) auf das Gebiet zwischen s und einer andern in der unendlichen Entfernung a von s sich befindenden geschlossenen Fläche. Hier ist $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi' = 0$, und da das Integral in Bezug auf die unendlich weite Fläche von der Ordnung $1/a$ ist, so kann es fortgelassen werden, mithin wird

$$6) \quad \iint \Psi' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} ds = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'} ds.$$

Für die Fläche s selbst ist $\Psi = \Psi'$, ferner sind ν und ν' Teile derselben Normale, die in entgegengesetzte Richtungen verlaufen, so dass

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} = 0$$

wird. Die Gleichungen 5) und 6) setzen sich also zusammen zu

$$7) \qquad -4\pi\Psi_P = \int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}\right) ds,$$

und hieraus folgt dann wegen der Gleichungen unter a) die bekannte charakteristische Gleichung

$$-4\pi\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}$$

zur Bestimmung der Flächendichte im Element ds, die in Art. 78b in ganz anderer Weise ihre Ableitung gefunden hat.

97b. Eine andere Anwendung, die Green von seinem Satze gemacht hat, besteht in dem Nachweise, dass, wenn das Potential in jedem Punkte auf einer geschlossenen Fläche s beliebig gegeben ist, dasselbe sofort auch für alle Punkte innerhalb und ausserhalb dieser Fläche mitbestimmt ist.

Er nimmt zunächst an, dass sich stets eine Function Φ angeben lässt, die in der Nähe eines innerhalb der Fläche s gelegenen Punktes P sehr nahe gleich $1/r$ ist, für jeden Punkt der Fläche s verschwindet und überall innerhalb der Fläche s der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2\Phi = 0$ genügt.

Die Existenz einer solchen Function resultirt aus der folgenden Betrachtung. Versteht man unter s die Fläche eines Conductors, den man durch einen Draht mit der Erde verbunden hat, und unter P einen mit einer Electricitätseinheit geladenen Punkt, so ist das Potential auf s wegen der Ableitung zur Erde gleich Null, und da das Gesammtpotential in irgend einem Punkte innerhalb s der Electricität in P und der durch diese in s inducirten Ladung seine Entstehung verdankt, so wird auch allda $\nabla^2\Phi = 0$ sein. Endlich ist auch in der Nähe von P das Potential nahezu gleich $1/r$. Dieses Potential genügt also genau den Bedingungen, denen Φ unterworfen werden sollte, und weil der auseinandergesetzte Fall physikalisch existirt, muss Φ auch eindeutig bestimmbar sein.

Der Greensche Satz giebt nach alledem

$$8a) \qquad 4\pi\Psi_P = \int\int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, ds.$$

wo Ψ unter dem Integrationszeichen den Wert des Potentials in dem Flächenelement ds festsetzt, der der Annahme nach gegeben sein sollte.

Eine andere Fassung erhält dieser Satz durch Einführung einer Grösse σ_P die mit $\partial\Phi/\partial\nu$ durch die Gleichung

$$4\pi\sigma_P + \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0$$

verbunden ist. Man bekommt so

8b) $$\Psi_P = \iint \Psi\,\sigma_P\,ds.$$

Hier giebt σ_P, wie man sich leicht aus den Bedingungen, denen die Function Φ unterworfen worden ist, überzeugt, die Flächendichte der Electricität, welche, wenn in P eine Electricitätseinheit concentrirt wäre, auf dem Flächenelement ds inducirt werden würde. Ist also das Potential für jeden Punkt der Fläche s gegeben und genügt es im ganzen Raum innerhalb s der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2\Psi = 0$, so ist es in jedem Punkte durch eine mechanische Quadratur bestimmbar, wenn man die Flächendichte der durch eine in dem betreffenden Punkte P concentrirte Electricitätseinheit auf s inducirten Electricität anzugeben vermag.

Später werden wir noch sehen, dass diese Bedingungen das Potential auch eindeutig bestimmen.

Die Greensche Function.

98. Das eben behandelte Problem giebt uns Gelegenheit zur Einführung einer Function, die unter dem Namen Greensche Function bekannt ist.

Es sei s eine geschlossene Fläche, die (durch eine Verbindung mit der Erde) stets auf dem Potential Null erhalten wird; P und Q mögen zwei auf der positiven Seite von s (gleichgiltig ob es die äussere oder die innere Seite ist) befindliche Punkte bezeichnen. Bringen wir nach P einen sehr kleinen mit einer Electricitätseinheit geladenen Körper, so wird in s Electricität von entgegengesetztem Zeichen inducirt, und das Potential in Q setzt sich demzufolge aus zwei Teilen zusammen. Ein Teil rührt von der directen Wirkung, welche die Electricitätseinheit in P auf Q ausübt, her, der andere verdankt seine Entstehung der in s durch P inducirten Electricität. Diesen zweiten Teil des Potentials in Q nennen wir die *Greensche Function* und bezeichnen sie durch den Buchstaben G_{pq}.

Offenbar hängt der Betrag dieser Function von der Lage der Punkte P und Q gegen einander und zur Fläche ab, während ihre Form durch die geometrische Gestalt der Fläche s bestimmt wird. Man kennt sie in einigen wenigen Fällen und namentlich dann, wenn s eine Kugel ist.

Kurz lässt sich diese Function so definiren, dass sie das Potential der in einer Fläche s durch eine in einem festen Punkt P concentrirte Electricitätseinheit inducirten Ladung auf einen Punkt Q angiebt.

Bezeichnet r_{pq} den Abstand zwischen P und Q, so ist dem obigen zufolge das Gesammtpotential in Q gleich $1/r_{pq} + G_{pq}$.

Auf der Fläche s und in allen Punkten auf der Seite derselben, wo P nicht liegt, sollte das Gesammtpotential verschwinden. Giebt also G_{ps} den Wert der Greenschen Function auf s an, so haben wir

1) $$G_{ps} = -\frac{1}{r_{ps}}.$$

Damit können wir nun einen analytischen Ausdruck für G_{pq} ableiten und dann einen wichtigen Satz beweisen.

Sei nämlich $\sigma_{ps'}$ die durch eine in P concentrirte Electricitätseinheit auf s in Punkt A' inducirte Flächendichte und ds' das Flächenelement von s in A', so ist zunächst

2a) $$G_{pq} = \int\int \frac{\sigma_{ps'}}{r_{qs'}}\, ds',$$

wo die Integration sich auf die ganze Fläche s bezieht. Hätten wir umgekehrt die Electricitätseinheit nach Q versetzt, so wäre nach der Gleichung 1)

1a) $$\frac{1}{r_{qs'}} = -\, G_{qs'}.$$

Bezeichnet aber σ_{qs} die Flächendichte der durch die Electricitätseinheit in Q auf s im Punkte A inducirten Electricität, ds das Flächenelement von s in A und $r_{ss'}$ den Abstand zweier Flächenpunkte A und A', so ist auch

1b) $$G_{qs'} = \int\int \frac{\sigma_{qs}}{r_{ss'}}\, ds,$$

also nach 1a)

$$\frac{1}{r_{qs'}} = -\int\int \frac{\sigma_{qs}}{r_{ss'}}\, ds,$$

und folglich

2b) $$G_{pq} = -\int\int\int\int \frac{\sigma_{ps'}\, \sigma_{qs'}}{r_{ss'}}\, ds\, ds'.$$

Man bemerkt, dass das Integral auf der rechten Seite der Gleichung symmetrisch in Bezug auf p und q ist, demnach wird

3) $$G_{pq} = G_{qp}.$$

Ich habe diesen Satz, der hier als eine Folge der Bestimmungsweise der Greenschen Function sich erweist, schon im Art. 87 aus ganz andern Betrachtungen abgeleitet.

Die Greensche Function drückt auch bei geeigneter Wahl des inducirenden Punktes und der inducirten Fläche das Potential irgend eines electrischen Systems auf einen Punkt Q aus. Bringt man nämlich in einen

Punkt P eine Electricitätseinheit und denkt sich diejenige Niveaufläche s, für welche das Gesammtpotential gleich Null ist, als Leiterfläche, so besteht, wenn P durch s vollständig von dem gegebenen electrischen System getrennt wird, das Potential in einem Punkte Q, der mit P auf derselben Seite von s liegt, aus drei Teilen, aus dem Potential von P auf Q, aus dem Potential G_{pq} der durch P auf s inducirten Electricität, endlich aus dem Potential $\mathfrak{P}$ des electrischen Systems, und da die Niveaufläche s so gewählt ist, dass auf ihr $1/r + \mathfrak{P} = 0$, also nach der unter 1) gegebenen Gleichung 1) $G_{pq} - \mathfrak{P} = 0$ ist, so muss überall in dem Gebiete, wo P liegt, wenn man von der in P befindlichen Electricitätseinheit wieder abstrahirt, das Potential $G_{pq} - \mathfrak{P}$ verschwinden, das heisst aber, es ist $\mathfrak{P} = G_{pq}$.

In dieser Weise kann man sich eine Reihe von Fällen construiren, das heisst Flächen s herstellen, in denen die Greensche Function für bestimmte Lagen des inducirenden Punktes P von vornherein bekannt ist. Weit schwieriger ist die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Greensche Function für bestimmte gegebene Flächen bei beliebiger Lage des inducirenden Punktes zu berechnen. Sie ist aber, wie ich gezeigt habe, mathematisch möglich, und deshalb darf man voraussetzen, dass derartige Probleme sich in jedem Falle auflösen lassen.

Befindet sich der mit einer Electricitätseinheit geladene Punkt P innerhalb der Fläche s, so ist dem obigen zufolge das Potential der auf s durch P inducirten Electricität auf einen Punkt Q ausserhalb s gleich und entgegengesetzt dem von P in Q verursachten Potential. Demnach ist die Verteilung der Electricität auf s eine centrobarische*), sie wirkt auf äussere Punkte mit derselben Kraft, wie ein in dem Innern der Fläche s in gewisser Weise orientirter, mit einer Electricitätseinheit geladener Punkt P.

Electrische Energie.

99a. Macht man in dem analytischen Ausdruck für den Greenschen Satz die beiden Functionen Φ und Ψ einander gleich, so wird

$$1) \qquad \iint \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\, ds - \iiint \Psi \bigtriangledown^2 \Psi \, d\tau = \iiint S.(\bigtriangledown \Psi)^2 \, d\tau.$$

Ist Ψ das Potential einer electrischen Ansammlung im Raume von der Raumdichte ρ und einer electrischen Verteilung auf Conductoren mit den Flächendichten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und den bezüglichen Potentialen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ so ist

$$\bigtriangledown^2 \Psi = 4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1'} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1} = -4\pi\sigma_1, \ldots\ldots$$

*) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 526.

also

$$\int\int \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1} ds_1 = -4\pi e_1, \ \ldots .$$

wenn e_1 die Ladung eines bestimmten Conductors angiebt. Aus der Gleichung unter 1) wird also nach Division mit -8π

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \ldots) + \tfrac{1}{2}\int\int\int \Psi \varrho \, dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\int\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Das erste Glied auf der linken Seite dieser Gleichung stellt die Energie der Ladungen der Conductoren dar, und das zweite giebt die Energie der im electrischen Felde etwa vorhandenen Electricitätsmengen. Beide zusammen umfassen demnach die gesammte Energie der Electricität, und somit muss auch das Glied auf der rechten Seite die gesammte Energie ausdrücken.

Da wir noch oft Gelegenheit haben werden, diesen neugewonnenen Ausdruck für die Energie anzuwenden, so führe ich eine besondere Bezeichnung W_Ψ für ihn ein, indem ich

$$3) \qquad W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

setze.

Wenn im electrischen Felde ausser den Ladungen auf den Conductoren weiter keine Electricitäten vorhanden sind, so wird $\varrho = 0$, und es bleibt nur die Energie der auf den Conductoren aufgehäuften Electricität. Für diesen speciellen Fall lasse ich den Index Ψ fort und verstehe demnach, wie in Art. 84, unter

$$3_1) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int\int\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

die Energie, wenn alle im electrischen Felde vorhandene Electricität sich auf Oberflächen von Leitern befindet.

99b. Wir beschränken die Anzahl der Conductoren auf einen, bezeichnen also mit s eine ringsgeschlossene Fläche und mit Ψ eine Function von x, y, z, die auf dieser Fläche den vorgeschriebenen Wert Ψ hat. Wenn Ψ weiter keinen Bedingungen unterworfen wird, so ist sie noch ganz beliebig, und es lassen sich eine Menge Functionen angeben, die auf s den Wert Ψ haben. Von allen diesen Functionen entspricht nun derjenigen Function Ψ_1, welche innerhalb der Fläche s auch noch der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2 \Psi_1 = 0$ genügt, die kleinste Energie W.

Es sei Ψ eine Function, welche auf s mit Ψ_1 zusammenfällt, sonst aber in jedem Punkte innerhalb s von Ψ_1 verschieden ist. Setzen wir also

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

so ist Ψ_2 auf s gleich Null, und wenn W, W_1, W_2 die dem Ψ, Ψ_1 bezüglich Ψ_2 entsprechende Energie ist, so wird nach 3_1)

$$W = W_1 + W_2 + \iiint \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial y}\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz.$$

Nach dem Greenschen Satz ist aber das auf der rechten Seite stehende dreifache Integral gleich

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \Psi_2 \nabla^2 \Psi_1 d\tau - \frac{1}{4\pi}\iint \Psi_2 \frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} ds,$$

und da einerseits im Raume τ das $\nabla^2\Psi_1 = 0$ ist und andererseits auf der Fläche s das Ψ_2 verschwinden soll, so reducirt sich jenes Integral auf Null, und es bleibt

$$W = W_1 + W_2.$$

Die Elemente unter den Integralausdrücken 3_1) für die Energie sind aber Summen von Quadraten, die Integrale bezeichnen ihrerseits auch weiter nichts als Summen, also muss W_1 wie W_2 stets positiv sein. Verschwindet W_2 nicht, so ist es jedenfalls positiv, also $W > W_1$. Verschwindet es aber, so ist jedes seiner Elemente gleich Null, das heisst

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen an, dass Ψ_2 im ganzen durch s begrenzten Raum τ einen und denselben Wert haben muss, und da es auf der Fläche s gleich Null ist, so verschwindet es überhaupt. W ist also gleich W_1, wenn Ψ gleich Ψ_1 ist, sonst ist stets $W > W_1$.

Gleichzeitig ergiebt sich, dass Ψ_1 auch die einzige Function ist, die innerhalb der Fläche s der Laplaceschen Gleichung genügt und auf derselben einen vorgeschriebenen Wert $\bar{\Psi}$ hat.

Denn wäre Ψ_3 eine andere Function, die ganz denselben Bedingungen genügt wie Ψ_1, so müsste dem obigen zufolge die ihr entsprechende Energie die kleinstmögliche sein, sie kann aber nicht kleiner sein als die der Function Ψ_1 entsprechende Energie W_1, sie muss dieser also gleich sein, und das bedeutet, wie wir eben gezeigt haben, dass überhaupt Ψ_3 mit Ψ_1 zusammenfällt.

Am nützlichsten wird sich für uns der Fall erweisen, wo das electrische Feld durch eine äussere Fläche s begrenzt ist, auf der das Potential gleich Null ist, und eine Reihe von Conductoren $s_1, s_2, \ldots$, auf denen das Potential die bezüglichen constanten Werte $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ hat, enthält.

Auch hier hat die Function Ψ_1, welche den genannten Oberflächenbedingungen genügt und in jedem Punkte des electrischen Feldes die Laplacesche Gleichung befriedigt, die kleinste Energie W_Ψ.

Der Thomsonsche Satz.

100a. *Hilfssatz.* Ich brauche zur Ableitung des Thomsonschen Satzes ein anderes Theorem, das ich zunächst deduciren werde.

Es sei Ψ eine Function von x, y, z, die innerhalb einer geschlossenen Fläche s endlich und stetig verläuft und auf andern geschlossenen Flächen $s_1, s_2, \ldots$ mit den für die betreffenden Flächen geltenden constanten Werten $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ zusammenfällt.

Neben dieser Function Ψ wählen wir noch drei andere Functionen u, v, w von x, y, z, die wir als Componenten eines Vectors $\mathfrak{C}$ betrachten können, und unterwerfen sie der Bedingung

a) $$-S.\nabla\,\mathfrak{C} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ersetzen wir in dem Theorem III_1 Art. 21 die X, Y, Z durch

b) $$X = \Psi u, \quad Y = \Psi v, \quad Z = \Psi w,$$

so folgt aus demselben

1) $$\Sigma_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \Psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Die Flächenintegrale gehen über alle Flächen $s, s_1, s_2 \ldots$, die Raumintegrale über das ganze electrische Feld. Wegen der unter a) aufgestellten Bedingung verschwindet aber das erste Raumintegral und es bleibt

2) $$\Sigma_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0$$

oder, da $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ auf den betreffenden Flächen s_1, s_2 constant sein sollten,

2_1) $$\iint \Psi (lu + mv + nw)\, ds + \sum_{p=1} \Psi_p \iint (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Specialisiren wir noch die Fläche s dadurch, dass wir sie nur aus Teilen zusammensetzen, in denen entweder

c) $$\Psi = 0 \text{ oder } lu + mv + nw = 0$$

ist, und nehmen ferner für die Flächen $s_1, s_2, \ldots$ an, dass in jeder von ihnen entweder

d) $\Psi_p = 0$ oder $l_p u + m_p v + n_p w = 0$ oder $\iint (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p = 0$

ist, so erhalten wir

3) $$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Das ist die Beziehung, die ich habe ableiten wollen.

100b. *Der Thomsonsche Satz.* Nun sei das electrische Feld wie im vorigen Artikel durch die äussere Fläche s und durch eine Reihe anderer geschlossener Flächen $s_1, s_2, \ldots$ begrenzt.

Die Function Ψ von x, y, z

a_1) sei überall im electrischen Felde endlich und stetig,

a_2) verschwinde auf der äussern geschlossenen Fläche s,

a_3) habe auf den innern geschlossenen Flächen $s_1, s_2, \ldots$ die für die betreffenden Flächen constanten Werte $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$

a_4) und genüge im ganzen Felde der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Die Ladung e_1 irgend einer Fläche s_1 ist dann

b) $$e_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1} ds_1,$$

wo die Normale ν_1 von der Fläche fort in das electrische Feld zu ziehen ist.

Weiter seien f, g, h Functionen von x, y, z, die wir als Componenten eines Vectors $\mathfrak{D}$ betrachten. Für jeden Punkt des electrischen Feldes soll

c) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

sein, und für jeden Conductor s_1 die Gleichung

d) $$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 = e_1$$

gelten, in der l_1, m_1, n_1 die Richtungscosinusse der Normale ν_1 angeben, und e_1 die Ladung von s_1, wie sie durch die Formel unter b) bestimmt wird, ist.

Nach diesen Festsetzungen vergleichen wir die beiden Raumintegrale

e) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz$$

und

f) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

deren Gebiet das gesammte electrische Feld innerhalb der Fläche s und ausserhalb der Flächen $s_1, s_2, \ldots$ ausmacht.

Zur Verbindung der Functionen f, g, h mit Ψ nehmen wir noch drei andere Functionen u, v, w, die wir so bestimmen, dass

g) $$u = f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ v = g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ w = h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ist und setzen

h) $$W_{\mathfrak{S}} = 2\pi \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz,$$

indem wir unter $\mathfrak{S}$ die Resultante der u, v, w verstehen.

Wir haben dann nach den Gleichungen g) für das Element von $W_{\mathfrak{D}}$ die Gleichung

$$f^2 + g^2 + h^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] + u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2\pi}\left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right),$$

mithin nach e), f), h)

1) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{S}} - \iiint \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Die hier eingeführten Functionen u, v, w genügen aber ganz denselben Bedingungen wie die durch gleiche Symbole bezeichneten im vorhergehenden Artikel.

Denn erstens ist wegen der Beziehungen unter a_4) und c)

i) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\nabla^2 \Psi = 0.$$

Ferner haben wir

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w)\, ds_1 = \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1}\, ds_1,$$

woraus bei Berücksichtigung der Gleichungen unter b) und d) folgt

k) $$\iint (l_1 u + m_1 v + u_1 w)\, ds_1 = 0.$$

Endlich ist Ψ auf den Flächen s_1, s_2, . . . constant gleich Ψ_1, Ψ_2, . . und verschwindet ganz auf der Fläche s. Damit sind aber alle Bedingungen zur Existenz der Gleichung 3) in Art. 100a) erfüllt, und die Gleichung 1) reducirt sich auf

1_1) $$W_{\mathfrak{D}} = W\Psi + W_{\mathfrak{S}}.$$

Das Element von $W_{\mathfrak{S}}$ besteht aus einer Summe von Quadraten, diese Grösse kann also nur positiv oder Null sein, und im letztern Falle müssen die Functionen u, v, w jede für sich verschwinden. In den Punkten des

electrischen Feldes, wo die u, v, w von Null verschieden sind, wird $W_{\mathfrak{D}} > W_{\Psi}$ sein.

Wir können aber immer die Beziehungen für die f, g, h unter g) so wählen, dass für jeden Punkt des electrischen Feldes $u = v = w = 0$ ist, denn die Supposition

$g_1)$ $$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ändert nichts in den vorangehenden Deductionen.

In diesem Falle haben wir dann

$2_1)$ $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi},$$

und dieser Wert von $W_{\mathfrak{D}}$ ist kleiner als der bei irgend einer andern Annahme für die Functionen f, g, h stattfindende.

Dass das Potential für unsern Fall eindeutig bestimmbar ist, haben wir bereits Art. 99b) nachgewiesen, wir sehen jetzt, dass auch die electrische Verschiebung — denn diese wird durch die ersten Differentialquotienten des Potentials gegeben — sich eindeutig ableiten lässt.

Dieser Satz ist in allgemeinerer Form, die wir bald kennen lernen werden, zuerst von W. Thomson aufgestellt worden.*)

100c. Das Thomsonsche Theorem ändert sich gar nicht, wenn wir die Bedingungen unter c) und d) für die Functionen $f)$, $g)$, $h)$ dadurch verallgemeinern, dass wir für jeden Punkt des electrischen Feldes

c′) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho$$

setzen, wo ρ, die electrische Raumdichte, überall im Felde gegeben ist und continuirlich oder discontinuirlich verlaufen kann, wenn nur $\iiint \rho\, dx\, dy\, dz$ in jedem endlichen Gebiet auch einen endlichen Wert hat.

Natürlich muss dann auch

$a_4')$ $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0$$

sein.

Weiter können wir für einige der innern Grenzflächen in dem Felde statt der Gleichung d) die allgemeinere

d′) $$l_1 f_1 + m_1 g_1 + n_1 h_1 + l_1' f_1' + m_1' g_1' + n_1' h_1' = \sigma_1$$

setzen, wenn l, m, n und l', m', n' die Richtungscosinusse einer Normale der Fläche nach den Gebieten, wo die Verschiebungscomponenten f, g, h bezüglich f', g', h' sind, bezeichnen und wenn σ_1, die Flächendichte in einem Punkte der betreffenden Fläche, überall so gegeben ist, dass sie stetig oder unstetig der Bedingung, dass $\iint \sigma_1\, ds_1$ für ein endliches Stück der Fläche

*) *Cambridge and Dublin Mathem. Journ.* 1848 Febr.

endlich ist, genügt. Nehmen wir auch noch an, dass für jeden Punkt der äussern Fläche s das Potential Ψ constant und die Gleichung

a') $$lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma$$

erfüllt ist, wo wieder die Flächendichte σ in dem betreffenden Punkte der äussern Fläche gegeben ist, dann fällt auch die frühere Bedingung, dass Ψ auf der Fläche s verschwinden sollte, fort.

Es gilt dann in allen Flächen die Gleichung

b') $$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'} + 4\pi\sigma = 0.$$

Durch diese neu eingeführten Bedingungen ändert sich die Form der Functionen u, v, w gar nicht, es bleibt

g) $$u = f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\quad v = g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad w = h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Ferner haben wir für jeden Punkt des Feldes nach c'), a$_4'$), g)

i) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\nabla^2 \Psi = 0,$$

und für irgend eine der innern Grenzflächen

$$\iint (l_1 u + m_1 v + u_1 w)\, ds_1 + \iint (l_1' u' + m_1' v' + n_1' w')\, ds_1$$
$$= \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 + \iint (l_1' f' + m_1' g' + n_1' h')\, ds$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu_1'}\right) ds_1,$$

also wegen d') und b')

k') $$\iint \left(l_1 u + m_1 v + n_1 w + l_1' u' + m_1' v' + n_1' w'\right) ds_1 = 0.$$

Endlich ist noch in der Fläche s

$$\iint \Psi (lu + mv + nw)\, ds + \iint \Psi (l'u' + m'v' + n'w')\, ds$$
$$= \iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds + \iint \Psi (l'f' + m'g' + n'h')\, ds$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint \Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}\right) ds,$$

also weil Ψ constant und die Bedingung a') mit b') zusammen besteht

$$\iint \left(lu + mv + nw + l'u' + m'v' + n'w'\right) ds = 0.$$

Nach 100a ist demnach wieder

$$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

also

1) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\mathfrak{G}} + W_{\Psi},$$

so dass

2) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi}$$

ein wirkliches Minimum ist, wenn wie früher

g_1) $$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

gesetzt wird.

Dielectrische Medien.

Componenten der Verschiebung und der electromotorischen Kraft.

101a. Bis jetzt haben wir unsere Theoreme so gefasst, als ob die Eigenschaften eines electrischen Systems lediglich von der Configuration und Lage der einzelnen Körper und von ihren Ladungen abhängt. Von den Einwirkungen der dielectrischen Zwischenmedien haben wir dagegen ganz abgesehen.

Solche Gesetze also, wie zum Beispiel das Coulombsche, dass die electromotorische Kraftintensität R unmittelbar an einem Conductor stets durch die Beziehung

$$R = 4\pi\sigma$$

gegeben ist, gelten nur so lange, als wir uns in ein und demselben Dielectricum, das wir als Standard betrachten, aufhalten. Jene Relation ändert sich aber von Medium zu Medium, wie schon Cavendish experimentell gefunden, wenn auch nicht bekannt gemacht hat, und wie es später von Faraday nochmals unabhängig entdeckt worden ist. Ich habe aber schon an einer andern Stelle bemerkt, dass wir, um die Erscheinungen in ihrer möglichsten Allgemeinheit verfolgen zu können, zwei Vectorgrössen einführen müssen. Diese beiden Grössen — die electromotorische Kraftintensität und die electrische Verschiebung — sind zwar für sich durch Gleichungen von unveränderlicher Form mit dem Potential bezüglich mit der electrischen Verteilung verbunden. Aber die Relation zwischen ihnen wird durch die Natur des dielectrischen Zwischenmediums bestimmt, und noch ist die

allgemeinste Form der sie verknüpfenden Gleichungen nicht völlig eruirt und scheint nur experimentell durch in verschiedenen Dielectricis anzustellende Versuche entdeckt werden zu können.

101b. Die electromotorische Kraftintensität ist nach ihrer in Art. 68 gegebenen Definition die mechanische Kraft, welche auf eine kleine Electricitätsmenge e ausgeübt wird, dividirt durch diese Electricitätsmenge.

Wir bezeichnen ihre Componenten durch P, Q, R und sie selbst als Vector durch $\mathfrak{E}$.

In einem im electrischen Gleichgewicht befindlichen Felde ist das zwischen zwei Punkten genommene Linienintegral von $\mathfrak{E}$ unabhängig von dem Integrationsweg, $\mathfrak{E}$ ist also die Raum-Variation eines Potentials Ψ und man hat

1) $$P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

was sich in der Sprache der Quaternionen kürzer durch die Gleichung

2) $$\mathfrak{E} = -\nabla \Psi$$

ausdrücken lässt.

101c. Die nach einer Richtung vor sich gehende electrische Verschiebung ist nach ihrer in demselben Art. 68 gegebenen Definition gleich der Electricitätsmenge, welche durch eine zur Verschiebungsrichtung senkrechte kleine Fläche hindurchgeht, dividirt durch den Inhalt dieser Fläche.

Wir bezeichnen ihre Componenten durch f, g, h und sie selbst als Vector durch $\mathfrak{D}$.

Die Raumdichte der Electricität ist dann in irgend einem Punkte

3a) $$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

oder in der Sprache der Quaternionen

3b) $$\rho = -S \cdot \nabla \mathfrak{D}.$$

Die Flächendichte einer geladenen Fläche folgt aus der Gleichung

4a) $$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h'$$

f, g, h; f', g', h' sind die Verschiebungscomponenten unmittelbar an der Fläche in den bezüglichen Gebieten, nach denen die bezüglichen Normalen ν, ν' mit den Richtungscosinussen l, m, n; l', m', n' gezogen sind. Benutzen wir wieder die Ausdrucksweise der Quaternionentheorie, so lautet jene Gleichung

4b) $$\sigma = -[S \cdot U\nu \mathfrak{D} + S \cdot U\nu' \mathfrak{D}'],$$

wo $U\nu, U\nu'$ Einheiten der Normalen zu beiden Seiten der Fläche bedeuten, und das vorgesetzte S wie bisher angiebt, dass man von den Producten $U\nu\mathfrak{D}$, $U\nu'\mathfrak{D}'$ den scalaren Teil zu nehmen hat.

Für den speciellen Fall, dass wir es mit einer Conductorfläche zu tun haben, bei der ν die nach aussen gehende Normale bedeutet, ist $f' = g' = h' = \mathfrak{D}' = 0$ und

$4_1)$ $$\begin{aligned}\sigma &= lf + mg + nh \\ &= -S \cdot U\nu\mathfrak{D},\end{aligned}$$

die gesammte Ladung des Conductors also

$5_1)$ $$\begin{aligned}e &= \iint (lf + mg + nh)\, ds \\ &= -\iint S \cdot U\nu\mathfrak{D}\, ds.\end{aligned}$$

101d. Die electrische Energie W des Systems ist, wie wir in Art. 84 bestimmt haben, gleich der Summe der halben Producte aus den Ladungen in die zugehörigen Potentiale, also

6a) $$\begin{aligned}W &= \tfrac{1}{2}\Sigma e\Psi \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint \rho\Psi\, dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2}\iint \sigma\Psi\, ds \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2}\iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds.\end{aligned}$$

Das Raumintegral bezieht sich auf das ganze electrische Feld, das Flächenintegral auf die Oberflächen aller Conductoren.

Noch einen andern Ausdruck für die Energie liefert uns der Satz III_1 Art. 21. Indem wir nämlich daselbst

$$X = \Psi f, \quad Y = \Psi g, \quad Z = \Psi h$$

schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds = &-\iiint \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &-\iiint \left(f\frac{\partial \Psi}{\partial x} + g\frac{\partial \Psi}{\partial y} + h\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Darnach wird W zufolge der obigen Gleichung für die Energie

6b) $$\begin{aligned}W &= -\tfrac{1}{2}\iiint \left(f\frac{\partial \Psi}{\partial x} + g\frac{\partial \Psi}{\partial y} + h\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint (fP + gQ + hR)\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

101e. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir die Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ für die uns am meisten interessirenden Fälle auf.

Gewöhnlich leitet man die Einheit der Electricität aus Versuchen, die in Luft angestellt sind, ab. Seitdem aber Boltzmann experimentell nach-

gewiesen hat, dass die dielectrische Constante der Luft grösser ist, als die eines Vacuums, und dass sie mit Aenderung der Dichte der Luft in ihrem Betrag variirt, sind alle electrischen Messungen streng genommen entweder auf Luft von bestimmter Dichte und Temperatur, oder, noch wissenschaftlicher, auf ein Vacuum zu beziehen, ganz so wie auch die in der Luft gemessenen Brechungsindices für das Vacuum corrigirt werden müssen. In beiden Fällen sind aber die anzubringenden Reductionen so unbeträchtlich, dass sie nur bei sehr feinen Messungen sich bemerkbar machen.

Für das Standard-Medium haben wir nun, wenn es isotrop ist,

$$7_1) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$$

und

$$8_1) \qquad 4\pi f = P, \quad 4\pi g = Q, \quad 4\pi h = R,$$

also in einem andern ebenfalls isotropen Medium mit der Dielectricitätsconstante K

$$7_2) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E},$$

$$8_2) \qquad 4\pi f = KP, \quad 4\pi g = KQ, \quad 4\pi h = KR.$$

In manchen Medien freilich, wie in Glas, das man am sorgfältigsten untersucht hat, ist die Relation zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ complicirter, da sie die zeitliche Aenderung eines oder beider Vectoren enthält.

Ihre Form ist dann

$$F(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dot{\mathfrak{D}}, \dot{\mathfrak{E}}, \ddot{\mathfrak{D}}, \ddot{\mathfrak{E}} \ldots) = 0.$$

Jch werde aber hier noch keinen Versuch machen, Beziehungen solch allgemeiner Art zu entwickeln, sondern mich auf den einfachsten Fall, in welchem $\mathfrak{D}$ eine homogene lineare Vectorfunction von $\mathfrak{E}$ ist, beschränken.

Verstehen wir also unter φ eine lineare, homogene Vectorfunction, so setzen wir allgemein

$$7) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{E}),$$

und haben dann für die Componenten von $\mathfrak{D}$ entsprechende lineare, homogene Functionen der Componenten von $\mathfrak{E}$, also

$$8) \qquad \begin{aligned} 4\pi f &= K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R, \\ 4\pi g &= K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R, \\ 4\pi h &= K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R. \end{aligned}$$

In den Coefficienten zeigt der erste Index die Richtung der Componente der Verschiebung, der zweite die der Componente der electromotorischen Kraftintensität an.

Drücken wir umgekehrt $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{D}$ aus, so ist

$$9) \qquad \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} = \varphi'(\mathfrak{D}),$$

$$\frac{1}{4\pi} P = k_{xx} f + k_{yx} g + k_{zx} h,$$

10) $$\frac{1}{4\pi} Q = k_{xy} f + k_{yy} g + k_{zy} h,$$

$$\frac{1}{4\pi} R = k_{xz} f + k_{yz} g + k_{zz} h.$$

Die linearen, homogenen Vectorfunctionen φ und φ' enthalten in ihrer allgemeinen Form 9 Coefficienten, die durch die Natur des Mediums bedingt werden. Fallen die Coefficienten mit gleichem Indexpaar zusammen, so heissen sie sich selbst conjugirt.

101f. Man kann aber leicht zeigen, dass, wenn die Dielectrica conservative Systeme bilden — und man weiss, dass das in der Tat der Fall ist, weil sie ungestört beliebig lange Energie aufzubewahren im Stande sind —, die Functionen φ und φ' wirklich selbstconjugirt sein müssen.

Bezeichnen wir nämlich mit dW die Arbeit der electromotorischen Kraftintensität während einer Verschiebung, die sich aus den auf die Volumeinheit des Mediums bezogenen Componenten df, dg, dh zusammensetzt, so ist

11) $$dW = P\,df + Q\,dg + R\,dh,$$

und da das dielectrische Medium sich bei einer electrischen Verschiebung conservativ verhalten sollte, so muss W eine Function von f, g, h sein. Die Verschiebungscomponenten können aber ganz unabhängig von einander gewählt werden, mithin haben wir zu setzen

12) $$P = \frac{\partial W}{\partial f}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial g}, \quad R = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Aus derselben Tatsache der Unabhängigkeit der Componenten f, g, h von einander, folgt dann weiter

13) $$\frac{\partial^2 W}{\partial f \partial g} = \frac{\partial^2 W}{\partial g \partial f}, \text{ also}$$

14) $$\frac{\partial P}{\partial g} = \frac{\partial Q}{\partial f}.$$

Beachten wir aber, dass $\partial P/\partial g = 4\pi k_{yx}$ und $\partial Q/\partial f = 4\pi k_{xy}$ ist, und dass dieselben Betrachtungen auch für die Paare P, R; Q, R gelten, so erhalten wir

a) $$k_{yx} = k_{xy}, \quad k_{zy} = k_{yz}, \quad k_{xz} = k_{zx}.$$

Damit ergiebt sich dann leicht auch

b) $$K_{yx} = K_{xy}, \quad K_{zy} = K_{yz}, \quad K_{xz} = K_{zx}.$$

101g. Benutzen wir diese Resultate zur Umgestaltung der electrischen Energie, die wir durch $W_{\mathfrak{E}}$, $W_{\mathfrak{D}}$ bezeichnen, je nachdem sie durch die

Componenten der electromotorischen Kraftintensität oder durch die der Verschiebung bestimmt ist, so erhalten wir

15a) $$W_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{8\pi}\iiint\Big(K_{xx}P^2 + K_{yy}Q^2 + K_{zz}R^2 + 2K_{yz}QR + 2K_{zx}RP + 2K_{xy}PQ\Big)\,dx\,dy\,dz,$$

15b) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi\iiint\Big(k_{xx}f^2 + k_{yy}g^2 + k_{zz}h^2 + 2k_{yz}gh + 2k_{zx}hf + 2k_{xy}fg\Big)\,dx\,dy\,dz,$$

15c) $$W = \tfrac{1}{2}\iiint\Big(fP + gQ + Rh\Big)\,dx\,dy\,dz$$

oder

15a) $$W_{\mathfrak{E}} = -\frac{1}{8\pi}\iiint S.\mathfrak{E}\varphi(\mathfrak{E})\,d\tau,$$

15b) $$W_{\mathfrak{D}} = -2\pi\iiint S.\mathfrak{D}\varphi'(\mathfrak{D})\,d\tau,$$

15c) $$W = -\tfrac{1}{2}\iiint S.\mathfrak{D}\mathfrak{E}\,d\tau.$$

Der Vollständigkeit wegen habe ich noch die letzte Form hinzugefügt, die schon in Art. 101 d) abgeleitet worden ist.

Im ganzen haben wir also 6 Ausdrucksformen für die Energie in einem electrischen Felde kennen gelernt, nämlich ausser den drei eben gegebenen noch die drei anderen in Art. 87 aufgestellten. Die letztern sind aus den Ladungen und Potentialen der Conductoren zusammengesetzt, sie gelten also unter der Annahme einer Wirkung in die Ferne.

Die erstern drei dagegen stellen die Energie durch Raumintegrale erstreckt über das ganze electrische Feld dar und drücken die Tatsache einer Wirkung vermittelst des Zwischenmediums aus. Sie enthalten die Componenten der electromotorischen Kraftintensität, bezüglich die Componenten der electrischen Verschiebung, bezüglich die Componenten beider genannten Grössen.

Allgemeine Form des Greenschen Satzes.

101h. Wir leiten den Greenschen Satz für diesen allgemeinen Fall eines heterogenen anisotropen Mittels ab, indem wir in Theorem III_1 Art. 21

$$X = \Psi\left(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right),$$

$$Y = \Psi\left(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right),$$

$$Z = \Psi\left(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

setzen. Die Substitution ergiebt unter Berücksichtigung der Gleichungen unter b) in Art. 101f)

1a)
$$\begin{aligned}
&\iint\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\
&\qquad+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big]\Psi\,ds\\
&+\iiint\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\Big(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\Big(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\Big]\Psi\,d\tau\\
&=-\iiint\Big[K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\\
&\qquad+K_{yz}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)+K_{zx}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+K_{xy}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big]\,d\tau\\
&=\iint\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\
&\qquad+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big]\Phi\,ds\\
&+\iiint\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\Big(K_{yx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\Big(K_{zx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\Big]\Phi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Kürzer lässt sich das in der Sprache der Quaternionentheorie durch die Gleichungen ausdrücken

1b)
$$\begin{aligned}
&\iint\Psi S.\,U\nu\varphi(\nabla\Phi)\,ds-\iiint\Psi S.(\nabla\varphi\nabla)\Phi\,d\tau\\
&\quad=-\iiint S.\nabla\Psi\varphi\nabla\Phi\,d\tau=+\iiint S.\nabla\Phi\varphi\nabla\Psi\,d\tau\\
&\quad=\iint\Phi S.\,U\nu\varphi(\nabla\Psi)\,ds-\iiint\Phi S.(\nabla\varphi\nabla)\Psi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Grenzwerte für die electrische Capacität.

102a. Als Anwendung der bisherigen Untersuchungen bestimmen wir nach der von J. W. Strutt in der Abhandlung *On the Theory of Resonance* Phil. Trans. 1871 entwickelten Methode die Grenzwerte, zwischen denen die Capacität eines Conductors liegen muss.

Als Capacität eines Conductors oder eines Systems von Conductoren haben wir die Electricitätsmenge definirt, welche sich auf ihm befindet, wenn sein Potential gleich der Einheit, das aller andern noch etwa vorhandenen Conductoren aber gleich Null ist.

Es seien nun s_1, Ψ_1, e_1 und s_0, Ψ_0, e_0 Flächeninhalt, Potential und Ladung des Systems von Conductoren, dessen Capacität bestimmt werden soll, bezüglich des Systems, das sich sonst noch im Felde befindet. e_1 ist dann gleich $-e_0$.

Giebt q die Capacität von s_1 an, so ist

1a) $$q = \frac{e_1}{\Psi_1 - \Psi_0},$$

ferner die Energie des Gesammtsystems bei der betreffenden electrischen Verteilung

a) $$W = \tfrac{1}{2} e_1 (\Psi_1 - \Psi_0),$$

demnach

1b) $$q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2}$$

1c) $$= \frac{e_1^2}{2W}.$$

Nehmen wir nun einen speciellen Wert für Ψ, der auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich Null wird, und berechnen mit ihm das über das ganze electrische Feld zu erstreckende Raumintegral

b) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

so kann nach Art. 99b) W jedenfalls nicht grösser sein als dieses W_Ψ; die obere Grenze von q ist also gleich $2W_\Psi$.

Zur Bestimmung der untern Grenze von q benutzen wir ein System von Werten von f, g, h, welches der Gleichung

c) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

genügt, und ferner

d) $$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 = e_1$$

macht. Berechnet man mit den so bestimmten Functionen das ebenfalls über das ganze electrische Feld zu erstreckende Raumintegral

e) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz$$

so ist nach Art. 100c) W jedenfalls nicht grösser als dieses $W_{\mathfrak{D}}$, die untere Grenze von q ist daher $e_1^2/2W_{\mathfrak{D}}$, also

2) $$2W_{\Psi} > q > \frac{e_1^2}{2W_{\mathfrak{D}}}.$$

Darnach verfährt man bei der Bestimmung der Grenzen von q so, dass man auf s_1 und s_0 electrische Verteilungen annimmt, deren Summe Null giebt. Damit berechnet man ein dieser Verteilung entsprechendes Potential Ψ, das auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich 0 ist, und aus der Gleichung b) die entsprechende Energie W_{Ψ}. Es ist dann

$$q < 2W_{\Psi}.$$

Ferner macht man

$$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

und bestimmt nach e) die Energie $W_{\mathfrak{D}}$. Man erhält so

$$q > \frac{e_1^2}{2W_{\mathfrak{D}}}.$$

Es ist dabei nicht nötig $W_{\mathfrak{D}}$ durch eine Integration über das ganze electrische Feld zu eruiren, denn da im ganzen Felde $\nabla^2 \Psi = 0$ sein muss, so haben wir auch

e_1) $$W_{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{2}\iint \Psi\, \sigma_1\, ds_1 + \tfrac{1}{2}\iint \Psi\, \sigma_0\, ds_0,$$

wo sich das erste Integral auf die Conductoroberfläche s_1, das zweite auf die s_0 bezieht.

Wenn gar keine anderweitigen Conductoren in endlicher Entfernung von s_1 vorhanden sind, verschwindet das zweite Integral.

Wegen weiterer Ausführungen verweise ich auf Art. 308.

102b. Die obige Methode für die Bestimmung der Grenzen, innerhalb deren die Capacität eines Conductors sich befindet, erfordert die Berechnung eines Potentials, dessen Eruirung selbst meist mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Ich will daher noch zeigen, wie man das Potential von Conductoren mit beliebiger Annäherung bestimmen kann, wenn seine Werte auf den Conductoren selbst gegeben sind.

Es sei also, um bei dem uns interessirenden Fall zu bleiben, s_1 die Fläche des Conductors (oder eines Systems von Conductoren), auf dem das

Potential 1 ist, und s_0 die eines andern Conductors (oder eines Systems von Conductoren), auf dem das Potential den Wert Null hat.

Stellen wir uns vor, dass man die Kraftlinien von s_1 nach s_0 in gewisser Annäherung zu ziehen vermag und bezeichnen mit $s_1 s_0$, Ps_0 die Bogenlänge einer solchen Linie vom System s_1 bis zu dem s_0 bezüglich von einem Punkte P bis zu s_0, so können wir in erster Annäherung für das Potential Ψ den Wert

1) $$\Psi_1 = \frac{Ps_0}{s_1 s_0}$$

nehmen, der auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich 0 wird.

Ziehen wir nun die Kraftlinien, welche senkrecht zu den Niveauflächen $\Psi = \text{const.}$ sind, und bezeichnen ein Bogenelement derselben mit ds, so haben wir für die Kraftcomponenten in erster Annäherung

a) $$R_1 \frac{dx}{ds} = f_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad R_1 \frac{dy}{ds} = g_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad R_1 \frac{dz}{ds} = h_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z},$$

wenn R die resultirende Kraft bezeichnet. Um zu einer zweiten Annäherung zu gelangen, nehmen wir diese Kraftcomponenten etwas allgemeiner

b) $$R_2 \frac{dx}{ds} = f_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad R_2 \frac{dy}{ds} = g_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad R_2 \frac{dz}{ds} = h_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$$

und bestimmen p so, dass die Laplacesche Gleichung $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z = 0$ erfüllt wird.

Wir machen also

c) $$-p \bigtriangledown^2 \Psi_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung für p lässt sich aber leicht integriren, denn da wegen der Beziehungen unter a)

d) $$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -R_1 \frac{dp}{ds} = -R_1^2 \frac{dp}{ds}\frac{1}{R_1}$$
$$= R_1^2 \frac{dp}{ds}\frac{1}{\frac{d\Psi_1}{ds}} = R_1^2 \frac{dp}{d\Psi_1}$$

ist, so folgt aus c)

c′) $$p \bigtriangledown^2 \Psi_1 = R_1^2 \frac{dp}{d\Psi_1},$$

somit

e) $$p = C\, e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\bigtriangledown^2 \Psi_1}{R_1^2} d\Psi_1}.$$

Die Integration nach Ψ_1 bezieht sich auf alle Werte des Ψ_1 längs der Kraftlinie $s_1 s_0$. Führt man diesen Wert von p in die Gleichungen b) ein,

so erhält man die zweite Annäherung für die Kraftcomponenten. Die zweite Annäherung für das Potential, also Ψ_2, ergiebt sich dann, weil

$$-\frac{d\Psi_2}{ds} = f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} + h\frac{dz}{ds} = -p\frac{d\Psi_1}{ds}$$

ist, aus

2) $$\Psi_2 = C\int_0^{\Psi_1} e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2\Psi_1}{R_1^2}\, d\Psi_1}\, d\Psi_1.$$

Ψ_2 verschwindet schon, wenn Ψ_1 gleich Null ist, also auf s_0, damit es auch die zweite Bedingung erfüllt und auf s_1 gleich 1 wird, muss die Constante C aus

f) $$C\int_0^1 e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2}\, d\Psi_1}\, d\Psi_1 = 1$$

bestimmt werden. Aus dieser zweiten Annäherung Ψ_2 kann man wieder eine dritte Ψ_3 u. s. f. rechnen.

Die damit bestimmten Energieen W_{Ψ_1}, $W_{\mathfrak{D}_1}$, W_{Ψ_2}, $W_{\mathfrak{D}_2}$, ... geben dann nach der im Vorigen auseinandergesetzten Methode für die Capacität Werte, die bald grösser bald kleiner, als ihr wahrer Wert sind und diesem sich möglichst zu nähern gestatten.

Zur Ausführung dieser Methode ist aber, wie man sieht, die genäherte Kenntnis des Verlaufs der Kraftlinien nötig, weil sonst die Integrationen sich nicht ausführen lassen, und das erschwert und beschränkt ihre Anwendbarkeit ganz beträchtlich.

102c. Ich lasse ein Beispiel zu ihrer Klarstellung folgen, indem ich die Niveauflächen und Inductionslinien (Kraftlinien) in einem electrischen Felde zwischen zwei schwach gekrümmten und nahezu parallelen Flächen angenähert bestimme.

Sei z die Axe, welche beide Flächen senkrecht verbindet,

$$z_1 = f_1(x, y) = a$$

die Gleichung der Fläche, auf der das Potential gleich Null, und

$$z_2 = f_2(x, y) = b$$

die derjenigen, auf welcher es gleich 1 sein sollte. a und b, wo b grösser sein soll als a, sind dann gegebene Functionen von x, y, deren Derivirte nach x und y wegen der schwachen Krümmung der Flächen sehr klein sind.

Offenbar kann man wegen des eben erwähnten Umstandes zunächst annehmen, dass die Kraftlinien parallel der zAxe laufen.

Da $\Psi_1 = Ps_0/s_1s_0$ sein sollte, so ist in erster Annäherung

$$\Psi_1 = \frac{z-a}{b-a}.$$

Die Kraftlinien laufen senkrecht zu den Flächen

$$\Psi_1 = \frac{z-a}{b-a} = \text{const.},$$

und die Kraftcomponenten sind

$$f_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x},\ g_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y},\ h_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -\frac{1}{b-a}.$$

Bei der Bildung von R_1^2 können wir f_1 und g_1 als sehr klein gegen h_1 fortlassen und dann bleibt

$$R_1^2 = \frac{1}{(b-a)^2}.$$

Ferner ist bei Vernachlässigung von Producten der Derivirten von a und b nach x und y

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi_1 &= \frac{1}{b-a}\left\{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{z-a}{b-a}\left(\frac{\partial^2 (b-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (b-a)}{\partial y^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{b-a}\left\{\nabla^2 a + \Psi_1 \nabla^2 (b-a)\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{A + \Psi_1 B\right\}.\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\nabla^2 \Psi_1}{R_1^2}\, d\Psi_1 = (b-a)\,(A + B\Psi_1)\, d\Psi_1,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}p &= C e^{(A\Psi_1 + \frac{1}{2}B\Psi_1^2)\,(b-a)} \\ &= C\left(1 + A(z-a) + \tfrac{1}{2} B \frac{(z-a)^2}{(b-a)}\right)\end{aligned}$$

und

$$\Psi_2 = C\left(\Psi_1 + (b-a)\,(\tfrac{1}{2} A \Psi_1^2 + \tfrac{1}{6} B \Psi_1^3)\right).$$

Für $\Psi_1 = 1$ sollte $\Psi_2 = 1$ sein, man hat also bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung

$$C = 1 - (b-a)\,(\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{6} B),$$

und damit

$$p = 1 + \tfrac{1}{6}(b-a)\,\nabla^2(2a+b) - (z-a)\,\nabla^2 a - \tfrac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\,\nabla^2(b-a)$$

$$\Psi_2 = \frac{z-a}{b-a} + \tfrac{1}{6}(z-a)\,\nabla^2(2a+b) - \tfrac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\,\nabla^2 a - \tfrac{1}{6}\frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}\,\nabla^2(b-a).$$

Ψ_2 ist die zweite Annäherung an das Potential.

Die zweitgenäherten Werte für die Kraftcomponenten ergeben sich aus den Gleichungen b) des vorigen Artikels zu

$$f_2 = -\frac{p}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{z-a}{b-a}\frac{\partial (b-a)}{\partial x}\right],$$

$$g_2 = -\frac{p}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{z-a}{b-a}\frac{\partial (b-a)}{\partial y}\right],$$

$$h_2 = -\frac{p}{b-a}.$$

Sind endlich σ_a, σ_b die Flächendichten auf den Flächen a und b und Ψ_a, Ψ_b die zugehörigen Potentiale, so haben wir noch

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi}(\Psi_a - \Psi_b)\left[\frac{1}{b-a} + \tfrac{1}{6}\nabla^2(2a+b)\right],$$

$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi}(\Psi_b - \Psi_a)\left[\frac{1}{b-a} - \tfrac{1}{6}\nabla^2(a+2b)\right].$$

Cap. V.

Mechanische Kräfte zwischen zwei electrischen Systemen.

—×—

103. Wir bezeichnen die beiden electrischen Systeme, um deren Einwirkung auf einander es sich handelt, durch E_1 und E_2 und die bezüglichen Raumdichten der in ihnen angehäuften Electricitätsmengen durch ρ_1 und ρ_2.

Die in Richtung der x Axe wirkende Abstossungskraft eines Elements (x_2, y_2, z_2) in E_2 auf ein Element (x_1, y_1, z_1) in E_1 ist dann

$$A' = \rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

wo

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ist. Giebt also A die nach der xAxe gerichtete Krafteinwirkung des ganzen Systems E_2 auf das ganze System E_1, so haben wir

1a) $$A = \int\int\int\int\int\int \frac{x_1 - x_2}{r^3} \rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

Die Grenzen der Integrationen werden durch die Grenzen der beiden Systeme E_2 und E_1 bestimmt. Da aber ρ_1 nur in E_1 und ρ_2 nur in E_2 von Null verschieden ist, so kann man auch $\pm \infty$ als Integrationsgrenzen wählen.

Die obige Formel für die Kraftwirkung ist der mathematische Ausdruck der Annahme einer Wirkung in die Ferne zwischen den beiden electrischen Systemen, ohne Rücksicht auf eine etwaige Modificirung des Kraftgesetzes durch das beide Systeme trennende Medium.

Führen wir wieder das Potential ein, das wir durch Ψ_2 bezeichnen, wenn es von der Einwirkung des Systems E_2 auf ein Element (x_1, y_1, z_1) von E_1 und durch Ψ_1, wenn es von der Einwirkung des Systems E_1 auf ein Element (x_2, y_2, z_2) in E_2 herrührt, so haben wir zunächst

a) $$\Psi_2 = \iiint \frac{\rho_2}{r}\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

b) $$\Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r}\, dx_1\, dy_1\, dz_1;$$

c) $$\nabla^2 \Psi_2 = +4\pi\rho_2,$$

d) $$\nabla^2 \Psi_1 = +4\pi\rho_1,$$

wozu noch kommt, dass Ψ_2 und Ψ_1 in der Unendlichkeit verschwinden.

Damit erhalten wir

1b) $$A = -\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\rho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

oder wenn von der Gleichung d) Gebrauch gemacht wird,

1c) $$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\nabla^2 \Psi_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

ein Ausdruck für die Kraft, der nur noch die beiden Potentiale enthält.

Es ist dabei vorausgesetzt, dass Ψ_2 sowohl wie Ψ_1 in jedem Punkte des electrischen Feldes einen bestimmten Wert hat.

104. Wir haben schon bemerkt, dass man als Integrationsgrenzen auch $\pm\infty$ wählen darf, allgemein also irgend welche Grenzen, durch die das System E_1 vollständig eingeschlossen wird. Im Folgenden werden wir annehmen, dass die beiden Systeme E_1 und E_2 so zu einander liegen, dass sich stets eine geschlossene Fläche s angeben lässt, welche E_1 gänzlich einschliesst und E_2 gänzlich ausschliesst.

Setzen wir dann

e) $$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

so ist innerhalb s

$$\rho_2 = 0, \quad \rho = \rho_1,$$

und ausserhalb s

$$\rho_1 = 0, \quad \rho = \rho_2,$$

also auch

1d) $$A = -\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Auch die Form 1c) für die Kraftcomponente A können wir in ähnlicher Weise umgestalten.

Es ist nämlich zunächst

$$4\pi A = -\iiint \frac{\partial (\Psi - \Psi_1)}{\partial x}\nabla^2(\Psi - \Psi_2)\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

und da innerhalb der Grenzfläche s die Grösse $\nabla^2 \Psi_2 = 0$ ist, so wird

$$4\pi A = -\iiint \frac{\partial (\Psi - \Psi_1)}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 .$$

Die Grösse

$$A_{11} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$$

bezeichnet aber die in Richtung der x Axe fallende Kraftwirkung des Systems E_1 auf sich selbst, sie muss also verschwinden, weil die Wirkungen zweier Teilchen aufeinander sich gleich und entgegengesetzt sind. Damit wird

1e) $$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 .$$

Ψ ist das Potential beider Systeme auf ein Element des Systems E_1, und die Integration erstreckt sich auf den ganzen Raum innerhalb der Grenzfläche s, die das ganze System E_1 einschliessen muss, aber keinen Teil des Systems E_2 enthalten darf.

105. Ich leite für die Kraftwirkung A noch einen andern Ausdruck ab, in welchem die dreifache Integration über den Raum innerhalb s durch ein zweifaches Integral über die Fläche s ersetzt ist.

Hier leistet uns, wie im vorigen Capitel, das Theorem III_1 in Art. 21 die nötigen Dienste. Ehe wir es aber anwenden können, müssen wir die Grösse

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

auf die Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

bringen.

Nun ist

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 ,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2$$

und ähnlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 ,$$

Setzt man also

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2=8\pi\,p_{xx},$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2=8\pi\,p_{yy},$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2=8\pi\,p_{zz},$$

2)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}=4\pi\,p_{yz}=4\pi\,p_{zy},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x}=4\pi\,p_{zx}=4\pi\,p_{xz},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}=4\pi\,p_{xy}=4\pi\,p_{yx},$$

so wird

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\nabla^2\Psi=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z},$$

also nach dem citirten Satz

1f)
$$A=\iint(l\,p_{xx}+m\,p_{yx}+n\,p_{zx})\,ds,$$

2f)
$$B=\iint(l\,p_{xy}+m\,p_{yy}+n\,p_{zy})\,ds,$$

3f)
$$C=\iint(l\,p_{xz}+m\,p_{yz}+n\,p_{zz})\,ds.$$

Die Integrationen erstrecken sich über die Fläche s, welche E_1 ganz einschliesst und E_2 ganz ausschliesst. Wenn nun die Wirkung von E_2 auf E_1 direct ohne Inanspruchnahme des zwischenliegenden Mediums vor sich geht, so haben die Grössen p weiter keine physikalische Bedeutung; sie sind dann einfach als Abkürzungen für die Grössen zu betrachten, denen sie gleichgesetzt sind.

Abstrahirt man aber von einer *actio in distans* und sucht die Einwirkung zweier electrischer Systeme aufeinander aus einem Zwange, der in gewisser Weise im Zwischenmedium verteilt ist, abzuleiten, so ist klar, dass man die ganze mechanische Wirkung von E_2 auf E_1 muss berechnen können, wenn man die Zwangskräfte in jedem Punkte einer Fläche s, welche E_1 von E_2 trennt und E_1 ganz einschliesst, kennt. Denn wenn man damit nicht die ganze Kraftwirkung von E_2 auf E_1 erhielte, so müsste eben noch eine Wirkung von Teilen, die ausserhalb s liegen, auf Teile, die sich innerhalb s befinden, zur Vervollständigung hinzutreten.

Das erste Erfordernis zur Rechtfertigung der Annahme einer Wirkung vermittelst des Zwischenmediums ist also die Umwandelbarkeit der Raumintegrale für die Kraftcomponenten über den Raum innerhalb s in Flächenintegrale über s.

Wir haben aber eben gezeigt, dass eine solche Transformirung wirklich möglich ist, und wir haben die drei Kraftcomponenten durch die drei Flächenintegrale unter 1f), 2f) und 3f) dargestellt.

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit den für die entsprechenden Grössen in der Elasticitätstheorie geltenden Gleichungen, so folgt, dass wenn wir der Annahme folgen, vermöge deren zwei electrische Systeme auf einander nicht direct, sondern vermittelst eines Zwanges, der in dem Zwischenmedium continuirlich verteilt ist, wirken, dass wir dann die eingeführten Functionen $p_{xx}, \ldots$ als die Componenten eines in dem Medium wirklich vorhandenen Zwanges zu betrachten haben.

106. Die Verteilung des Zwanges und seine Natur wird uns klarer werden, wenn wir die Fläche s specialisiren. Da diese Fläche keiner andern Bedingung unterworfen ist, als der, dass sie E_1 vollständig einschliesst und E_2 vollständig ausschliesst, so können wir auch irgend eine äquipotentielle Fläche, welche der obigen Bedingung genügt, zur Fläche s benutzen. Ist dann ν die nach aussen gerichtete Normale derselben und R die resultirende Kraftintensität in Richtung von ν, so ist

$$-R = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}$$

$$-Rl = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad -Rm = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad -Rn = \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

also nach den Gleichungen unter 2)

$$p_{xx} = \frac{1}{8\pi} R^2 (l^2 - m^2 - n^2),$$

$$p_{yy} = \frac{1}{8\pi} R^2 (m^2 - n^2 - l^2),$$

$$p_{zz} = \frac{1}{8\pi} R^2 (n^2 - l^2 - m^2),$$

2_1)

$$p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{4\pi} R^2 mn,$$

$$p_{zx} = p_{xz} = \frac{1}{4\pi} R^2 nl,$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \frac{1}{4\pi} R^2 lm.$$

Bezeichnen wir durch a_π, b_π, c_π die Componenten der Druckkraft, welche senkrecht zu ds auf die Flächeneinheit wirkt, so ist

$$3) \qquad \begin{aligned} a_\pi &= l p_{xx} + m p_{xy} + n p_{xz}, \\ b_\pi &= l p_{yx} + m p_{yy} + n p_{yz}, \\ c_\pi &= l p_{zx} + m p_{zy} + n p_{zz}, \end{aligned}$$

also zufolge der obigen Werte für die p

$$3_1) \qquad \begin{aligned} a_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 l, \\ b_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 m, \\ c_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 n, \end{aligned}$$

$$4_1) \qquad \left(a_\pi^2 + b_\pi^2 + c_\pi^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

Daraus ergiebt sich, dass die Kraftwirkung des ausserhalb ds befindlichen Mediums auf das Medium, welches sich innerhalb ds aufhält, senkrecht zu ds und nach aussen gerichtet ist. Sie besteht also in einer Spannung gleich der eines Seils, und hat zur Resultanten

$$\frac{1}{8\pi} R^2.$$

Wir nehmen zweitens an, dass ds ein Flächenelement von s ist, welches senkrecht zu den Niveauflächen, die es treffen, steht.

Wir haben dann

$$l \frac{\partial \Psi}{\partial x} + m \frac{\partial \Psi}{\partial y} + n \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Andererseits ist aber

$$8\pi (l p_{xx} + m p_{yx} + n p_{xz}) = l \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] + 2m \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2n \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

also durch Combination beider Gleichungen

$$8\pi (l p_{xx} + m p_{xy} + n p_{xz}) = -l \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] = -l R^2.$$

Die drei Componenten $a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma$ des auf die Flächeneinheit und senkrecht zu derselben wirkenden Druckes sind demnach

$$-a_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 l,$$

$3_2)$ $$-b_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 m,$$

$$-c_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 m,$$

$4_2)$ $$(a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

Steht also das Flächenelement ds senkrecht zu den Niveauflächen, so ist die darauf wirkende Kraft eine Druckkraft, die wieder das Element senkrecht angreift. Ihr numerischer Betrag ist gleich dem der vorher bestimmten Zugkraft, die auf ds wirkt, wenn es parallel einer Niveaufläche verläuft.

Damit ist der Charakter des Zwanges in dem Medium vollständig klar gestellt.

Die Richtung, nach der die electromotorische Kraftintensität an einer Stelle des Mediums wirkt, ist eine Hauptaxe des Zwanges, der längs derselben eine Spannung von der Grösse $R^2/8\pi$ verursacht.

Jede zu der Richtung der electromotorischen Kraftintensität senkrechte Richtung ist ebenfalls eine Hauptaxe des Zwanges. Doch äussert sich hier der Zwang in einem Druck von derselben Grösse $R^2/8\pi$ wie die zuerst angeführte Spannung.

Der Zwang ist von ziemlich specieller Natur, denn alle Hauptcomponenten desselben haben numerisch denselben Betrag. Die Zeichen der den Zwang in Richtung der electromotorischen Kraftintensität zusammensetzenden Componenten sind aber den Zeichen der Componenten, aus welchen der Zwang senkrecht zu jener Richtung resultirt, entgegengesetzt.

Demnach gelten zwischen den sechs eingeführten Variabeln p, welche den Zwangzustand des Zwischenmediums bestimmen, wie man leicht aus den Formeln unter 2) deduciren kann, die folgenden drei Bedingungsgleichungen

$$p_{yz}^2 = (p_{xx} + p_{yy})\ (p_{zz} + p_{xx}),$$

5) $$p_{zx}^2 = (p_{yy} + p_{zz})\ (p_{xx} + p_{yy}),$$

$$p_{xy}^2 = (p_{zz} + p_{xx})\ (p_{yy} + p_{zz}),$$

und es fallen die sechs Variabeln p zu drei zusammen. Ebenso ist ja auch der Zustand des Mediums durch die drei Derivirten des Potentials, durch

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

bestimmt.

107. Die bisherigen Untersuchungen basiren auf der Annahme, dass die Dichte der Electricität überall endlich ist, die Electricität also räumlich verteilt ist. Ich werde jetzt zeigen, dass man mit Hilfe desselben durch die Gleichungen unter 2) in Art. 105 definirten Zwangzustandes des Zwischenmediums auch die electrische Kraftwirkung erklären kann, wenn eine endliche Electricitätsmenge auf einer endlichen Fläche ausgebreitet ist, wo also die Raumdichte derselben unendlich gross wird, die Flächendichte aber endlich bleibt.

Da die Kraftcomponenten beim Durchgang durch eine electrisirte Fläche Sprünge erleiden, so kann auch der Zwang, welcher im Zwischenmedium herrschen soll, nicht im ganzen Felde stetig variiren, er muss vielmehr ebenfalls zu beiden Seiten der electrischen Fläche um einen endlichen Betrag verschiedene Werte haben.

Sind nun l, m, n die Richtungscosinusse der Normale zu dem Element ds einer electrischen Fläche, P, Q, R die Componenten der electrischen Kraftintensität auf der Seite von ds, wohin die Normale läuft, und P', Q', R' die Componenten auf der entgegengesetzten Seite, so haben wir für die in Richtung der xAxe die Flächeneinheit angreifende Componente a des zu beiden Seiten des Flächenelements ds wirkenden Zwanges

$$6') \qquad a = l\,(p_{xx} - p'_{xx}) + m\,(p_{xy} - p'_{xy}) + n\,(p_{xz} - p'_{xz}),$$

also nach den Gleichungen unter 2) in Art. 105

$$a = \frac{1}{8\pi} l \left\{(P^2 - P'^2) - (Q^2 - Q'^2) - (R^2 - R'^2)\right\} + \frac{1}{4\pi} m\,(PQ - P'Q') + \frac{1}{4\pi} n\,(PR - P'R'),$$

$$= \frac{1}{8\pi} l \left\{(P - P')(P + P') - (Q - Q')(Q + Q') - (R - R')(R + R')\right\} + \frac{1}{8\pi} m \left\{(P - P')(Q + Q') + (P + P')(Q - Q')\right\} + \frac{1}{8\pi} n \left\{(P - P')(R + R') + (P + P')(R - R')\right\}.$$

Es ist aber nach den Gleichungen 2) bis 4) in Art. 78a und 2) in Art. 78b

$$P - P' = 4\pi l\sigma,$$
$$Q - Q' = 4\pi m\sigma,$$
$$R - R' = 4\pi n\sigma,$$

wo σ die Flächendichte der Electricität angiebt, mithin wird

$$a = \tfrac{1}{2} l\sigma \left\{l\,(P + P') - m\,(Q + Q') - n\,(R + R')\right\} + \tfrac{1}{2} m\sigma \left\{l\,(Q + Q') + m\,(P + P')\right\} + \tfrac{1}{2} n\sigma \left\{l\,(R + R') + n\,(P + P')\right\}$$

oder

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{2}\sigma(P + P'),\\
b &= \tfrac{1}{2}\sigma(Q + Q'),\\
c &= \tfrac{1}{2}\sigma(R + R').
\end{aligned}
\qquad 6)
$$

Definiren wir also den Zwangzustand in einem Medium durch die Gleichungen unter 2) in Art. 105, so ist die in irgend einer Richtung wirkende Componente des ein Element ds der electrischen Fläche senkrecht angreifenden Zwanges gleich dem Product aus der daselbst herrschenden Flächendichte in das arithmetische Mittel der zu beiden Seiten des fraglichen Elements ds in jener Richtung wirkenden electrischen Kraftcomponenten.

Dieses Resultat stimmt aber vollständig mit dem überein, das wir schon im Art. 79 in ganz anderer Weise abgeleitet haben.

Die Hypothese eines Zwangzustandes im Zwischenmedium reicht also auch in dem Falle einer superficiellen Verteilung einer endlichen Electricitätsmenge vollständig zur Ableitung der mechanischen Kraftwirkung der Electricität hin.

108. Ich benutze die Entwicklung dieser Hypothese, um einen Satz zu beweisen, von dem ich schon im Art. 104) zur Ableitung der Formel 1c) Gebrauch gemacht habe, dass nämlich die resultirende Kraftwirkung eines Systemes auf sich selbst verschwindet, also

$$A = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, \nabla^2 \Psi \, d\tau = 0$$

wird, wenn Ψ das Potential der im Raume τ verteilten electrischen Massen auf einen Punkt (x, y, z) dieses Raumes angiebt.

Dieser Satz scheint zwar evident genug zu sein, wenn man bedenkt, dass die Wirkungen zweier Teilchen aufeinander sich gleich und entgegengesetzt sind. Allein hier handelt es sich zunächst darum, dass eine Summe von Gliedern ohne Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung verschwinden soll, wenn die Function Ψ von vornherein durch gewisse Bedingungen, die sie zu erfüllen hat, gegeben ist, und ob das wirklich zutrifft, ist so ohne weiteres nicht einzusehen.

Einen Beweis für den obigen Satz können wir aus dem in den Art. 99b und 100c abgeleiteten Resultat erhalten, dass wenn $\nabla^2 \Psi$ in jedem Punkte gegeben ist und Ψ in der Unendlichkeit verschwindet, das Potential Ψ' in jedem Punkte (x', y', z') einen und nur einen endlichen Wert

$$\Psi' = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{1}{r}\, \nabla^2 \Psi \, d\tau$$

hat.

Einen andern Beweis erhalten wir durch die früher vorgenommene Umwandlung des Raumintegrals für eine Kraftcomponente in ein Flächenintegral, wenn wir von der directen Darstellung des Potentials als Function der Coordinaten ausgehen, also das Potential Ψ selbst und nicht die Grösse $\nabla^2 \Psi$ als das Primäre betrachten.

Wir haben

$$A = \iint (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz})\, dS,$$

wo S irgend eine das electrische System einschliessende Fläche bedeutet.

Die p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} können dem frühern zufolge nicht grösser als $R^2/8\pi$ sein. Wählen wir aber, was uns vollständig freisteht, die Fläche S in sehr bedeutender Entfernung a von der Fläche s, welche alle Punkte einschliesst, für die $\nabla^2\Psi$ einen von Null verschiedenen Wert hat, so ist, wie man weiss, Ψ numerisch nicht grösser als e/a, und R numerisch nicht grösser als $\partial\Psi/\partial a$ oder e/a^2, die p sind also numerisch nicht grösser als $e^2/8\pi a^4$. Specialisiren wir die Fläche S noch weiter, indem wir sie als eine Kugel mit dem sehr grossen Radius a ansehen, so folgt, dass A nicht grösser als $e^2/2a^2$ ist. Wächst demnach a unendlich an, so convergirt A gegen Null. Allein die Darstellung des A durch das Flächenintegral über S ist identisch mit der durch das Raumintegral über τ. Dieses letztere giebt aber nach Art. 104 stets denselben Wert für A, wie gross auch der von S eingeschlossene Raum τ sein mag, wenn ihm nur jeder Punkt angehört, in welchem $\nabla^2\Psi$ von Null verschieden ist. Es muss also A überhaupt verschwinden, wenn es die Kraftwirkung eines electrischen Systems auf sich selbst bezeichnet, wie auch die Fläche S sonst gewählt sein mag, vorausgesetzt dass sie keinen electrischen Punkt ausschliesst.

109. Der Zwangzustand in dem Zwischenmedium, wie ich ihn in diesem Capitel zur Erklärung der Kraftwirkung electrischer Systeme auf einander angenommen habe, unterscheidet sich in nichts von dem von Faraday bei seinen Untersuchungen über die Induction durch Dielectrica hindurch supponirten.

Faraday kommt nämlich in seinen *Researches* zu folgenden Resultaten:

„(1297) Die direct inducirende Kraft, die man sich als längs Linien wirkend vorstellen kann, welche von der Oberfläche eines geladenen Conductors zu der eines andern gezogen sind, wird von einer seitlichen oder transversalen Kraft begleitet, welche eine Dilatation oder Repulsion jener vorgestellten Linien hervorbringt.

(1224) Die in Richtung der Inductionslinien zwischen den Teilchen des dielectrischen Mediums wirkende Attraction ist von einer seitlich wirkenden und eine Divergenz der Inductionslinien verursachenden Abstossungskraft begleitet.

(1298) Induction scheint in einem gewissen durch den electrisirten Körper in den einzelnen Partikeln des Mediums hervorgerufenen und erhaltenen Polarisationszustand zu bestehen, der sich dadurch charakterisirt, dass die Partikel zwei entgegengesetzt begabte, positive und negative Teile erhalten, welche gegen einander und gegen die inducirenden Flächen oder Teilchen symmetrisch angeordnet sind. Der Zustand, in den das Medium

dadurch gerät, ist ein erzwungener, denn er entsteht durch eine äussere Kraft, bleibt solange diese Kraft wirkt und verschwindet sobald die Kraft entfernt wird. Dieser Zustand wird aber nur in Isolatoren durch ein und dieselbe Electricitätsmenge fortdauernd erhalten, denn nur bei ihnen bleiben die einzelnen Partikel in ihrer erzwungenen Lage, solange die Electricitätsmenge vorhanden ist."

Diese Theorie entspricht vollständig den Schlüssen, zu denen wir in den obigen Auseinandersetzungen gelangt sind, denen zufolge das Medium in jedem Punkte tangential zu der durch ihn hindurchgehenden Kraftlinie einen Zug, proportional dem Quadrate der electrischen Kraftintensität und senkrecht zu derselben einen dem Zuge numerisch gleichen Druck erleiden sollte.

Wenn ich mich statt der Bezeichnung „Zug" des Namens „electrische Spannung" — ein Wort, das von verschiedenen Physikern vielfach in sehr verschiedenem Sinne gebraucht wird — bedienen sollte, so verstehe ich darunter stets die mechanische Kraftwirkung in Richtung der Kraftlinien, also eine Grösse, welche von Punkt zu Punkt proportional dem Quadrate der electrischen Kraftintensität variirt.

110. Es könnte nun zunächst scheinen, als ob die Hypothese, dass ein solcher Zwangzustand in flüssigen Dielectricis, wie in Luft oder Terpentin, wirklich existirt, mit der Tatsache im Widerspruche steht, dass in solchen Flüssigkeiten ein Druck sich gleichmässig nach allen Seiten fortpflanzt und an jeder Stelle nach allen Richtungen mit derselben Stärke wirkt. Indessen wird bei der Ableitung dieses Princips aus den für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit unter der Annahme einer vollständigen Beweglichkeit ihrer Teilchen geltenden Bedingungen von solchen Vorgängen, wie sie nach unsern früheren Schilderungen an den Kraftlinien stattfinden sollen, gänzlich abstrahirt. In der Tat ist auch ein solcher Zwangzustand in einer Flüssigkeit sehr wol mit dem Gleichgewicht und der Beweglichkeit ihrer Partikel verträglich, denn wenn ein Teil der Flüssigkeit nicht electrisch geladen ist, so üben die an seiner Oberfläche verteilten Zwangskräfte, wie gross sie da auch sein mögen, doch im Innern dieses ungeladenen Teiles keine von Null verschiedene Wirkung aus. Nur wenn dieser Teil selbst geladen ist, bringen die an der Oberfläche wirkenden Kräfte im Innern einen gezwungenen Zustand hervor, und dann sucht auch das Medium, wie ich schon im Art. 55 auseinandergesetzt habe, wirklich sich zu bewegen. Sonst wird das Gleichgewicht der Flüssigkeit durch den charakterisirten Zwangzustand nicht weiter gestört.

Wir können nun die Grösse W, deren Eigenschaften uns in Art. 99 beschäftigt haben, als die Energie des Zwanges, der durch das ganze Medium wirkt, definiren. Es folgt dann aus den an der betreffenden Stelle abgeleiteten Theoremen, dass der Zwangzustand ein absolutes Minimum der Energie hervorbringt, wenn er den dort aufgestellten Bedingungen entspricht. Wenn aber ein System in einer gewissen Configuration ein

Minimum der Energie besitzt, so befindet es sich in dieser Configuration in stabilem Gleichgewicht. Ein Dielectricum kommt also von selbst, wenn es unter dem Einfluss der Induction electrischer Körper aufeinander steht, in einen Zwangzustand, der in der angegebenen Weise im Medium verteilt ist.

Mit der Hypothese eines Zwangzustandes in dem Zwischenmedium sind wir aber nur einen Schritt in der Erkenntnis der Rolle, welche das Zwischenmedium bei der Fortleitung der electrischen Kraft von einem electrisirten Körper zu einem anderen spielt, vorwärts gekommen, denn einstweilen haben wir weder die Art und Weise dargelegt, wie dieser Zwang physikalisch entsteht, noch auch, wie er erhalten wird. Der nächste Schritt, den wir zu machen hätten, müsste uns erklären, wie dieser Zwang durch die Einwirkung der einzelnen Partikel des Mediums auf einander zu Stande kommt. Er scheint mir deshalb von grosser Wichtigkeit zu sein, weil er Erscheinungen, die man früher nur durch die Annahme der Existenz einer Wirkung in die Ferne hat erklären können, auf das Spiel molecularer Kräfte reduciren würde.

Ich bin aber nicht im Stande gewesen, diesen zweiten Schritt zu machen und mit den Principien der Mechanik jenen Zwangzustand eines Mediums aus Molecularkräften abzuleiten. Ich werde daher die Theorie auf diesem Punkte noch stehen lassen und mich zu den andern Erscheinungen, die in einem Dielectricum während der Induction zu Tage treten, wenden.

111. I. *Electrische Verschiebung.* Wenn ein Körper auf einen andern durch ein Dielectricum hindurch inducirend einwirkt, so findet in dem Dielectricum in Richtung der Induction eine electrische Verschiebung statt. So geht, zum Beispiel, in einer Leydener Flasche, deren innere Belegung positiv und deren äussere Belegung negativ geladen ist, durch den trennenden Glaskörper der Flasche eine electrische Verschiebung von innen nach aussen vor sich.

Ein Ansteigen der electrischen Verschiebung während einer gewissen Zeit entspricht einem während dieser Zeit in Richtung der Verschiebung stattfindenden electrischen Strome, ein Abnehmen der Verschiebung ist einem in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Strome äquivalent.

Die gesammte Electricitätsmenge, welche durch eine bestimmte Fläche s in dem Medium verschoben wird, ist nach Art. 75 gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi} K \iint R \cos\varepsilon \, ds,$$

wo K die specifische inductive Capacität bezeichnet und die Integration auf das Stück der Fläche sich bezieht, für welches die verschobene Electricitätsmenge gemessen werden soll.

II. *Die Flächenladung der einzelnen Teilchen des Dielectricums.* Trennen wir von dem Dielectricum einen Teil durch eine geschlossene Fläche ab, so geht durch diese Fläche eine electrische Verschiebung nach dem Aeussern vor

sich. Wir müssen daher annehmen, dass jedes Element der Trennungsfläche eine Ladung besitzt, deren Grösse durch die durch das Element nach dem Innern verschobene Electricität gemessen wird.

Die Ladung ist positiv auf der Seite der Fläche, welche von der Verschiebungsrichtung getroffen wird, negativ, wo sie von ihr verlassen wird; in einer Leydener Flasche, deren innere Belegung positiv, deren äussere Belegung negativ electrisirt ist, wird also ein Stück des Glaskörpers auf der nach dem Innern der Flasche zugewendeten Partie positiv, auf der nach aussen gerichteten negativ geladen sein.

Befindet sich also das abgegrenzte Stück des Dielectricums ganz innerhalb des Mediums, so hebt sich die Ladung eines Elements seiner Oberfläche durch die Ladung des daran stossenden Elementes des Restes des Dielectricums auf. Stösst dagegen dieser Teil an einen Conductor, der als solcher nicht im Stande ist, in sich von selbst den inductiven Zustand zu erhalten, so wird seine Flächenladung nicht mehr neutralisirt, sondern sie bringt die scheinbare Ladung des Conductors hervor, die wir gewöhnlich als die Ladung des Conductors bezeichnen.

Was man also in der älteren Theorie als Ladung eines Conductors ansah, muss nach dieser Theorie der Induction durch das Zwischenmedium als die Ladung der an dem Conductor anstossenden Fläche des Dielectricums bezeichnet werden.

Darnach besteht also jede Ladung in dem Zutagetreten der nicht neutralisirten Polarisation eines Teiles des Dielectricums. Die Polarisation existirt zwar im ganzen Medium, aber ihre Wirkungen werden in dem Innern des Dielectricums durch die entgegengesetzte Ladung benachbarter Teile aufgehoben und treten nur da hervor, wo eben eine solche Neutralisirung nicht stattfinden kann, weil ein Conductor die Continuität des Mediums unterbricht.

Diese Theorie giebt auch Rechenschaft von der im Art. 77 aufgestellten Behauptung, der zufolge die gesammte Induction durch eine geschlossene Fläche gleich dem Product der innerhalb der Fläche befindlichen Electricitätsmenge in 4π sein sollte. In der Tat ist die Induction durch eine Fläche nichts weiter als die electrische Verschiebung multiplicirt mit 4π, und die gesammte nach aussen durch die Fläche stattfindende electrische Verschiebung muss nach den obigen Betrachtungen gleich der innerhalb der Fläche befindlichen Ladung sein.

Nach unserer Theorie sollte jedes Partikel des Dielectricums an entgegengesetzten Stellen gleiche und entgegengesetzte Ladungen haben, was wir vielleicht besser so ausdrücken, dass wir sagen, es sollte unter dem Einflusse der electrischen Polarisation an entgegengesetzten Seiten mit gleichen aber entgegengesetzten Electricitätsmengen geladen sein. Sie giebt also auch von der Tatsache, dass es nicht möglich ist, einem Körper eine absolute Ladung einer Electricitätsart mitzuteilen, Rechenschaft.

Das Dielectricum besitzt im polarisirten Zustande eine electrische Energie, die für die Volumeinheit von derselben Grösse ist, wie die auf die Flächeneinheit des Dielectricums wirkende electrische Spannung. Beide Grössen sind gleich dem halben Product aus der electrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in die electrische Kraftintensität $\mathfrak{E}$. Ist also p die Spannung, so haben wir

$$p = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi} K\mathfrak{E}^2 = \frac{2\pi}{K}\mathfrak{D}^2.$$

Wenn das Medium nicht vollständig isolirt, so lässt der Zwangzustand, den wir als electrische Polarisation bezeichnet haben, stetig nach. Das Medium weicht der electromotorischen Kraft, der Zwang erlahmt, und seine potentielle Energie geht in Wärme über. Das Verhältnis, in dem diese Abnahme der Polarisation mit der Zeit vor sich geht, hängt von der Natur des jeweiligen Mediums ab. Beim Glase zum Beispiel nimmt der Zwang so langsam ab, dass Jahre vergehen können, ehe er auf die Hälfte seines Wertes gesunken ist, beim Kupfer dagegen geschieht das schon in kaum einem Billionteil einer Secunde.

Das gilt so lange als das Medium nach seiner Polarisirung sich selbst überlassen ist.

Wird es dagegen von einem electrischen Strome durchflossen, so sucht dieser fortdauernd die Polarisation in demselben Verhältnis wieder zu ergänzen, als sie durch die Leitung abnimmt. Die äussere Kraft, welche den Strom unterhält, muss also bei der Wiederherstellung der Polarisation eine Arbeit leisten; die Polarisation nimmt fortdauernd ab und wird fortdauernd ergänzt, ihr Verlust geht aber in Wärme über. Das Schlussresultat besteht darin, dass die Energie, die dazu diente, den Strom zu unterhalten, die Temperatur der Strombahn soweit erhöht, bis die von ihr in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge den durch Fortleitung und Strahlung in dieser Zeit entstandenen Verlust gerade deckt.

Cap. VI.

Punkte und Linien des Gleichgewichts.

—×—

Bedingungen an Stellen des electrischen Gleichgewichts.

112. Ein Punkt des electrischen Feldes heisst ein *Gleichgewichtspunkt*, wenn in ihm die resultirende electrische Kraft verschwindet.

Besteht eine Linie aus lauter solchen Gleichgewichtspunkten, so heisst sie eine *Gleichgewichtslinie*.

Bezeichnet V das Potential in einem Punkte (x, y, z), so ist die Bedingung dafür, dass dieser Punkt ein Gleichgewichtspunkt ist,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Das Potential ist also daselbst in Bezug auf die Coordinatenvariationen ein Maximum oder ein Minimum oder stationär. Nun kann das Potential in einem Punkte ein Maximum oder Minimum nur dann sein, wenn dieser Punkt entweder selbst positiv bezüglich negativ geladen ist, oder wenn er sich innerhalb einer positiv bezüglich negativ geladenen Fläche befindet. Kommt also ein Gleichgewichtspunkt in einem nicht electrisirten Teile des Feldes vor, so wird das Potential daselbst nur stationär sein, nicht aber einen grössten oder einen kleinsten Wert haben.

In der Tat, die erste Bedingung für ein Maximum bezüglich Minimum besteht darin, dass die zweiten Derivirten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

wenn sie endlich sind, alle einen negativen bezüglich positiven Wert haben. Nach der Laplaceschen Gleichung verschwindet aber die Summe jener drei Abgeleiteten in jedem nicht selbst geladenen Punkt, sie können also nicht alle zugleich negativ oder positiv sein.

Ich will aber statt den Fall, dass die Kraftcomponenten in einem Punkte verschwinden, analytisch weiter zu verfolgen, eine allgemeine Unter-

suchung über diese Verhältnisse mit Hilfe der äquipotentiellen Flächen anstellen.

Wenn in irgend einem Punkte P das Potential V ein wirkliches Maximum besitzt, so kann das nur so sein, dass V in allen P umgebenden Punkten einen kleinern Wert als in P selbst hat. P wird also von einer Reihe von geschlossenen Niveauflächen umgeben, deren jede alle vorhergehenden völlig umhüllt. In allen Punkten einer jeden dieser äquipotentiellen Flächen wirkt die electrische Kraft von innen nach aussen, und da nach den Ausführungen des Art. 76 das Flächenintegral der electromotorischen Kraftintensität über die betreffende Niveaufläche multiplicirt mit 4π die innerhalb dieser Fläche befindliche Ladung darstellt, dieses Flächenintegral aber, weil die Kraft nach aussen gerichtet ist, einen positiven Wert hat, so muss die Ladung innerhalb der äquipotentiellen Fläche positiv sein. Man kann aber die Fläche dem Punkte P beliebig nahe annehmen, und es folgt, dass V nur dann in P ein Maximum sein kann, wenn dieser Punkt positiv geladen ist.

Ganz ebenso lässt sich zeigen, dass V in P nur dann ein Minimum besitzt, wenn P negativ electrisirt ist.

Befindet sich P in einer nicht electrisirten Region des electrischen Feldes, so kann das Potential auf einer kleinen um P gelegten Kugelfläche nicht in allen ihren Punkten grösser oder kleiner als in P sein. Es ist vielmehr in einigen Teilen der Kugel grösser, in andern kleiner und in den Linien, welche diese Teile gegen einander begrenzen, gleich dem in P. Längs den Linien, die P mit Punkten der Kugel verbinden, in denen das Potential kleiner ist als in P, wirkt die electrische Kraft von P fort, längst denen dagegen, die von P zu Punkten der Kugel führen, die ein grösseres Potential als P haben, wirkt die Kraft nach P hin. Für Verrückungen nach gewissen Richtungen ist also P ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, für solche nach andern Richtungen ein Punkt des labilen Gleichgewichts.

Im freien Raume können Gleichgewichtslinien nur unter ganz besondern Verhältnissen existiren, auf Conductoren treten sie stets da auf, wo beide Electricitätsarten neben einander vorhanden sind.

Ein Conductor kann aber nur dann auf seiner Oberfläche entgegengesetzte Ladungen beherbergen, wenn im electrischen Felde Gebiete vorhanden sind, in denen das Potential einen höhern Wert, und solche, in denen es einen niederern Wert als auf dem Conductor hat.

Wir verfolgen diese Verhältnisse etwas näher für den Fall, dass zwei Conductoren im Felde existiren, die beide positiv und zu demselben Potential geladen sind. Man übersieht leicht, dass dann zwischen beiden Körpern ein Gleichgewichtspunkt sich befinden muss. Verringert man allmählich das Potential des ersten Conductors, so rückt der Gleichgewichtspunkt diesem näher, bis er, wenn die Verringerung einen gewissen Grad erreicht hat, auf seine Oberfläche fällt. Die Niveaufläche des zweiten Conductors, der ein Potential von der Grösse, welche das Potential des ersten Conductors nach

jener Verkleinerung erreicht hat, zugehört, berührt dann die Oberfläche des ersten Conductors. Fahren wir mit der Verkleinerung des Potentials des ersten Conductors fort, so schneidet die bezeichnete Niveaufläche seine Oberfläche rechtwinklig und giebt dadurch Anlass zur Entstehung einer Gleichgewichtslinie. Je weiter die Verringerung vor sich geht, desto weiter rückt die Gleichgewichtslinie auf dem Conductor fort, bis sie bei einer bestimmten Grösse des Potentials wieder zu einem Punkt zusammenschrumpft, der auf der von dem zweiten Conductor abgewendeten Seite des ersten Conductors liegt. Bei noch weiterer Verkleinerung des Potentials rückt der Gleichgewichtspunkt vom Conductor fort und befindet sich in der Unendlichkeit, wenn beide Körper gleiche und entgegengesetzte Ladungen besitzen.

Anzahl der Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien.

113. Zur Bestimmung der Anzahl der Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien teilen wir das electrische Feld in Regionen ein, die von einander durch Niveauflächen getrennt sind, in denen das Potential einen vorgeschriebenen Wert C hat. Die Teile des Feldes, für welche $V < C$ ist, bezeichnen wir als negativ, und die, für welche $V > C$ ist als positiv. Weiter sei V_0 der kleinste, V_1 der grösste Wert, den das Potential im electrischen Felde überhaupt annimmt. Machen wir dann $C = V_0$, so umfasst die negative Region nur den Punkt oder Conductor, wo das Potential ein Minimum erreicht, also eine Region, die negativ geladen sein muss. Das positive Gebiet, der Rest des ganzen Feldes, umgiebt dieses negative und ist demnach periphractisch. Lassen wir C von V_0 ab anwachsen, so breitet sich das negative Gebiet aus, und es entstehen immer mehr negative Regionen um negativ geladene Körper. Jede so neu auftretende negative Region vermehrt zunächst die periphractische Zahl des positiven Gebietes um eine Einheit.

Je weiter sich aber die negativen Regionen ausdehnen, um so eher werden sich zwei oder mehr von ihnen durchsetzen, und dadurch verliert das positive Gebiet wieder an Periphraxe. Schneiden sich $n + 1$ negative Regionen, so nimmt die periphractische Zahl des positiven Gebietes um n ab und es entsteht ein Gleichgewichtspunkt oder eine Gleichgewichtslinie vom $n$ten Grade.

Wird endlich C gleich V_1, so hat sich das positive Gebiet auf einen Punkt oder einen Conductor, in dem das Potential seinen höchsten Wert besitzt, reducirt, und schliesst weiter keine fremden Regionen in sich ein.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass, wenn wir jeden Gleichgewichtspunkt bezüglich jede Gleichgewichtslinie so oft rechnen, als der Grad desbezüglich derselben Einheiten besitzt, die Anzahl aller so entstehenden Gleichgewichtspunkte oder Gleichgewichtslinien gleich der um eine Einheit verminderten Anzahl der negativ geladenen Körper ist.

Verfahren wir genau so, indem wir von $C = V_1$ ausgehen und das positive Gebiet sich ausbreiten lassen, so müssen wir wieder ebenso viele (Punkte und Linien vom $n$ten Grade $n$mal gerechnet) Gleichgewichtspunkte bezüglich Linien erhalten, als die um 1 verminderte Anzahl aller positiv geladenen Körper beträgt.

Hat also ein Feld p positiv und n negativ geladene Körper, so ist die Anzahl der Grade der positiven Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien gleich $p - 1$ und die Anzahl der Grade der negativen gleich $n - 1$, falls jene durch die Durchsetzung der positiven diese durch die der negativen Regionen entstehend gedacht werden. Dabei ist diejenige Fläche, welche in der Unendlichkeit liegt und das ganze electrische System einschliesst, mit der Ladung in Rechnung zu bringen, welche gleich der algebraischen Summe der Einzelladungen des Systems ist.

Ausser diesen in ihrer Zahl bestimmt angebbaren Punkten und Linien des Gleichgewichts sind noch andere vorhanden, von denen wir weiter nichts auszusagen vermögen, als dass sie in ihrer Summe eine gerade Zahl ergeben müssen. Denn während sich eine negative Region ausbreitet, kann es vorkommen, dass ihre Grenzfläche sich selbst einmal oder mehrmal schneidet oder berührt, so dass die Region mehrfach zusammenhängend wird, und jeder Zunahme des Zusammenhanges um eine Einheit entspricht die Entstehung eines Punktes oder einer Linie des Gleichgewichts. Je weiter sich aber die negative Region ausbreitet, um so mehr Grade des Zusammenhanges verliert sie wieder, und wenn sie das ganze Feld umfasst, ist sie nur noch einfach zusammenhängend. Es muss also wieder ebensoviele Punkte und Linien des Gleichgewichts geben, wo das negative Gebiet an Graden des Zusammenhanges verliert, als es Punkte und Linien gab, wo es an Zusammenhang gewann. Hieraus folgt, dass allgemein die Anzahl der so entstehenden Punkte und Linien des Gleichgewichts gerade ist. Weiter können wir auch über sie nichts aussagen, solange wir von der Form der geladenen Körper nichts näheres wissen. Besteht das System nur aus geladenen Punkten oder kugelförmigen Conductoren, so kann die Zahl der in der angegebenen Weise entstehenden Gleichgewichtspunkte nicht grösser als $(n - 1)(n - 2)$ sein, wo n die Summe aller Einzelkörper des Systems bezeichnet.

114. Man kann das Potential V in der Nähe eines Punktes P, in welchem es den Wert V_0 erreicht, durch eine Reihe

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \ldots$$

darstellen, in der H_k eine homogene Function des $k$ten Grades der vom Punkte P ab gerechneten Coordinaten x, y, z bezeichnet. Ist nun P ein Punkt des Gleichgewichts, so haben wir in ihm $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$, und da H_1 vom ersten Grade ist, so muss H_1 in P überhaupt verschwinden. Es können noch eine Anzahl anderer H gleich Null sein, wenn dann H_n das erste H ist, das einen von Null verschiedenen Wert hat, so

kann man, weil die Coordinaten von P aus gerechnet werden, in der Nähe dieses Punktes alle folgenden H gegen H_n vernachlässigen, und es bleibt

$$V = V_0 + H_n.$$

Im Punkte P ist $V = V_0$, also $H_n = 0$. Letztere Gleichung stellt aber einen Kegel vom $n$ten Grade dar, der mit der durch P gelegten äquipotentiellen Fläche die innigste Berührung eingeht.

Die den Punkt P enthaltende Niveaufläche hat also in P einen singulären Punkt, in welchem sie von einer Kegelfläche von mindestens dem zweiten Grade berührt wird.

Den Durchschnitt dieser Kegelfläche mit einer um P gelegten Kugel bezeichnen wir als eine *Knotenlinie*.

Liegt P nicht auf einer Gleichgewichtslinie, so besteht die Knotenlinie aus n oder aus einer geringern Anzahl getrennter geschlossener Curven.

Befindet sich dagegen P auf einer Gleichgewichtslinie, so schneidet sich die Knotenlinie in einem oder in mehreren Punkten und dem entsprechend durchsetzt sich die zugehörige Niveaufläche in der Gleichgewichtslinie, der P angehört.

So oft sich die Knotenlinie an nicht gerade entgegenstehenden Stellen der Kugel schneidet, so oft muss das auch bei der äquipotentiellen Fläche der Fall sein, und da jede Durchsetzung der äquipotentiellen Fläche in einer Gleichgewichtslinie geschieht, so gehen durch P dann drei oder mehr Gleichgewichtslinien.

Durchschnitt einer Niveaufläche durch sich selbst.

115. Zwei Stücke einer und derselben äquipotentiellen Fläche können sich, wenn sie es überhaupt tun, nur rechtwinklig schneiden.

Legt man nämlich die zAxe in Richtung der Tangente der Durchschnittslinie der beiden Stücke und lässt die xAxe eines derselben berühren, so ist $\partial^2 V/\partial x^2 = \partial^2 V/\partial z^2 = 0$. Demnach ist nach der Laplaceschen Gleichung auch $\partial^2 V/\partial y^2 = 0$, das heisst die yAxe ist dann Tangente des zweiten Stückes an der Durchschnittstelle, oder die Stücke der Niveaufläche durchsetzen sich rechtwinklig.

Damit sich aber an derselben Stelle nur zwei Schalen derselben äquipotentiellen Fläche schneiden, muss in der Entwicklung des Potentials nach den H das H_2 von Null verschieden sein.

Ist das nicht der Fall, so können sich mehrere Schalen in derselben Linie schneiden, und wenn das n Schalen tun, so geschieht das unter einem Winkel π/n.

Dieser Satz rührt von Rankine*) her und lässt sich folgendermassen beweisen.

*) „*Summary of the Properties of certain Stream Lines*“. Phil. Mag. 1864 Oct.; Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 780; Rankine und Stokes in den Proc. R. S. 1867, pag. 468; W. R. Smith Proc. R. S. Edin. 1869—70, pag. 79.

Man legt die z Axe wieder in Richtung der Tangente der Schnittlinie der Schalen der Niveaufläche und den Coordinatenursprung in die Schnittlinie. Da dann $\partial^2 V/\partial z^2 = 0$ wird, so geht die Laplacesche Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Macht man $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, so resultirt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung nach steigenden Potenzen von r hat die Form

$$V = V_0 + A_1 r\cos(\vartheta + \alpha_1) + A_2 r^2\cos(2\vartheta + \alpha_2) + A_3 r^3\cos(3\vartheta + \alpha_3) + \ldots.$$

Die Niveaufläche schneidet sich selbst aber in einer Gleichgewichtslinie, demnach ist $A_1 = 0$ zu setzen, und das Potential V geht, wenn das erste nicht verschwindende Glied von der $n$ten Potenz nach r ist, über in

$$V = V_0 + A_n r^n\cos(n\vartheta + \alpha_n) + A_{n+1} r^{n+1}\cos(\overline{n+1}\,\vartheta + \alpha_{n+1}) + \ldots$$

Für sehr kleine r wird

$$V - V_0 = A_n r^n\cos(n\vartheta + \alpha_n),$$

und daraus folgt schon, dass n Schalen einer Niveaufläche $V = V_0$ sich unter gleichen Winkeln π/n schneiden.

Earnshaw's Theorem.

116. Der folgende auf das Gleichgewicht von Körpern im electrischen Felde sich beziehende Satz rührt von Earnshaw her.

Ein geladener Körper kann sich an keiner Stelle des electrischen Feldes in stabilem Gleichgewicht befinden.

Ich beweise die Richtigkeit dieses Satzes zunächst für electrisirte Isolatoren. Demnach sollen also der bewegliche electrisirte Körper A und das System B der umgebenden geladenen Körper so beschaffen sein, dass sich die Electricität auf ihnen in keiner Weise verschieben kann.

Ist V das Potential des Systems B auf einem Punkt (x, y, z) des beweglichen Körpers A und e die Electricitätsmenge eines den Punkt (x, y, z) umgebenden Flächenelements, so haben wir für die potentielle Energie von A in Bezug auf B

$$M = \Sigma Ve,$$

wo die Summation sich auf alle geladenen Teile von A bezieht.

Ausser dem im Raume festen Axensystem der x, y, z nehme ich noch ein zweites, diesem paralleles der a, b, c an, dessen Ursprung sich mit dem Körper A bewegt und in Bezug auf das feste System der x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ hat.

Beschränkt man die Bewegung des Körpers A so, dass er nur sich selbst parallel sich verrücken kann, so ändert das neue Coordinatensystem der a, b, c nur die Lage seines Ursprungs, nicht die Richtung seiner Axen im Raume. Die absoluten Coordinaten eines Punktes a, b, c sind in diesem Falle

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c,$$

und das Potential V der Körper B auf einen Punkt a, b, c in A ist eine Function der a, b, c und der ξ, η, ζ. Das Gesammtpotential M auf A besteht demnach aus einer Reihe von Gliedern, deren Summe ebenfalls eine Function der a, b, c, die bei der Bewegung von A für jeden Punkt constant bleiben, und der ξ, η, ζ, deren Aenderung allein eine Bewegung des Körpers A anzeigt, ist. Es muss ebenso wie jedes seiner constituirenden Glieder der Laplaceschen Gleichung genügen, demnach haben wir

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Bezeichnet dM die Aenderung, welche dieses Potential, während einer Verschiebung des Körpers A um eine Strecke dr, deren Componenten

$$d\xi = l dr, \quad d\eta = m dr, \quad d\zeta = n dr$$

sind, erleidet, so erhält man durch dM/dr die Kraft, welche bei dieser Aenderung von r um dr wachgerufen wird. Dieselbe strebt r wieder zu verkleinern, wenn dM positiv ist, sie sucht r noch weiter zu vergrössern, wenn dM einen negativen Wert hat. Nimmt also das Potential bei der Verrückung von A zu, muss also dabei eine Arbeit geleistet werden, so befindet sich A in einem stabilen Gleichgewicht, verkleinert es sich dagegen, so befindet sich A in einem labilen Gleichgewicht.

Legt man aber um den Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius r eine Kugel S, die so klein ist, dass solange der feste Punkt (ξ, η, ζ) des beweglichen Körpers sich in ihr befindet, dieser in keinem Teile mit irgend einer Partie des Systems B zusammenfällt, so ist, innerhalb der Kugel überall $\nabla^2 M = 0$, also auch das Flächenintegral

$$\iint \frac{dM}{dr} dS$$

über die ganze Kugel gleich Null, und das kann nur sein, wenn auf der Kugel neben positiven Werten des dM/dr auch negative vertreten sind. Es muss also auch Richtungen geben, nach denen eine Verrückung des Körpers A parallel mit sich selbst eine Verkleinerung des Potentials des Systems B auf ihn hervorbringt, in denen der Körper also immer weiter von seiner Gleichgewichtslage sich entfernt. Geschieht das aber schon bei einer so

beschränkten Verrückungsart, so muss es *a fortiori* bei ganz frei und beliebig vor sich gehenden Verschiebungen eintreten.

Wenn der Körper A ein Leiter ist, die Electricität auf ihm also sich frei bewegen kann, so mag man diese Electricität als einen Teil des Systems A betrachten, A mit seiner Electricität hat dann mehr Freiheitsgrade als früher, wo seine Electricität sich nicht bewegen können sollte. Man mag dann so argumentiren, dass wenn ein System bei weniger Freiheitsgraden sich schon im labilen Gleichgewicht befand, seine Lage *a fortiori* keine stabile sein kann, wenn es mehr Freiheitsgrade besitzt.

Strenger ist aber der folgende Beweis.

Wir denken uns zunächst den Körper A allein um dr verrückt, während seine Electricität auf ihm fixirt ist, die Potentialänderung ist dann $(dM/dr)\,dr$. Nun stellen wir uns vor, dass seine Electricität in die ihr für seine neue Position zukommende Gleichgewichtslage sich begiebt. Bei dieser zweiten Bewegung muss das Potential abnehmen um eine Grösse, die wir mit $C\,dr$ bezeichnen.

Die gesammte Aenderung des Potentials ist demnach für den Fall, dass A ein Leiter ist,

$$\left(\frac{dM}{dr} - C\right) dr$$

und die daraus entspringende Kraft

$$\frac{dM}{dr} - C,$$

wo C stets positiv ist.

Den grössten Wert hat diese Kraft also, wenn $C = 0$ ist. Wir haben aber gesehen, dass wenn die Electricität auf A fixirt ist, dM/dr auch für gewisse Richtungen negativ sein muss. Durch die Beweglichkeit der Electricität kann also die Labilität des Körpers A nur vermehrt werden.

Cap. VII.

Aequipotentielle Flächen und Kraftlinien.

Beschreibung der Niveauflächen und Kraftlinien in einfachen Fällen.

117. Die Bestimmung der Verteilung der Electricität auf Conductorflächen hängt, wie wir gesehen haben, von der Auflösung der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

für das Potential V unter Berücksichtigung der Bedingungen ab, dass dasselbe als Function von x, y, z überall im electrischen Felde endlich und stetig ist, auf den vorhandenen Conductoren vorgeschriebene constante Werte annimmt und in der Unendlichkeit verschwindet.

Da es aber mit den jetzigen mathematischen Hilfsmitteln im allgemeinen nicht möglich ist, jene Gleichung für beliebig gegebene Formen der Conductoren aufzulösen, so schlägt man mit Vorteil den entgegengesetzten Weg ein, indem man — was nicht schwer ist — eine Reihe von Functionen, welche der Laplaceschen Gleichung genügen, niederschreibt und aus ihnen dann die Conductorformen ableitet, für welche sie gelten.

Es scheint also, dass das umgekehrte Problem der Bestimmung der Conductorform zu einem vorgeschriebenen Potential sich leichter und bequemer lösen lässt, als das directe der Berechnung des Potentials für eine gegebene Conductorform.

In der Tat ist auch fast jedes Problem der Electrostatik, dessen Lösung wir besitzen, auf jenem umgekehrten Wege bewältigt worden. Deshalb ist es für den Electriker von grösster Wichtigkeit, sich mit allen so bereits gewonnenen Ergebnissen vertraut zu machen, da die einzige Möglichkeit, ein neues Problem zu lösen, darauf beruht, dass man es auf Fälle, für die die angeführte umgekehrte Methode die Lösungen schon kennen gelehrt hat, zurückzuführen vermag. Eine solche historische Kenntnis gewonnener Resultate ist uns in zweifacher Weise von Nutzen. Einmal können wir,

wenn für electrische, in der Messung grosse Genauigkeit erfordernde Untersuchungen, Instrumente gebaut werden sollen, für die zu electrisirenden Körper immer die Formen uns heraussuchen, für welche exacte Lösungen der Laplaceschen Gleichung schon vorliegen. Dann aber gewinnen wir auch für den schwierigern Fall, dass uns die Form der zu electrisirenden Körper schon vorgeschrieben ist, aus unserer bezeichneten Kenntnis wenigstens die Möglichkeit, angenäherte Lösungen herzustellen. Zunächst suchen wir uns nämlich aus den gewonnenen Resultaten eine äquipotentielle Fläche aus, die einigermassen der gegebenen Conductorform entspricht, und dann ändern wir versuchsweise das schon gelöste Problem so lange ab, bis wir zu einer äquipotentiellen Fläche gelangen, die in der Form dem gegebenen Conductor noch mehr gleicht.

Diese Methode ist vom mathematischen Standpunkte aus zwar sehr unvollkommen, aber einstweilen hat die Wissenschaft noch keine exactere entdeckt, und da wo man sich die Bedingungen nicht selbst stellen kann, muss man sich eben mit möglichster Annäherung an die gegebenen Verhältnisse begnügen.

Wir haben also unser Augenmerk darauf zu richten, so viele Formen von äquipotentiellen Flächen und Inductionslinien zu ergründen, als nur irgend möglich ist. Für gewisse Klassen von Problemen, so namentlich für solche, die sich auf kugelförmige Conductoren beziehen, hat man mathematische Methoden kennen gelernt, die ihre Lösung ermöglichen. In andern Fällen dagegen kann man sich noch nicht anders helfen, als durch die weniger wissenschaftliche Methode, auf Papier versuchsweise nach bekannten Formeln Figuren zu zeichnen und diejenigen unter ihnen auszuwählen, welche der gegebenen Conductorform am meisten entsprechen.

Ich glaube übrigens, dass diese letztere Methode selbst in den Fällen noch von grossem Nutzen ist, wo man die strenge Lösung besitzt, denn ich finde, dass eine Kenntnis äquipotentieller Flächen aus directer Anschauung oft zur Wahl einer richtigen mathematischen Methode bei der Lösung eines Problems führt.

Deshalb habe ich auch eine Reihe von Zeichnungen für äquipotentielle Flächen und zugehörige Kraftlinien ausgeführt, damit der Leser ihre Formen seinem Gedächtnisse genügend einprägen kann. Ich lasse zunächst eine Beschreibung der einzelnen Zeichnungen folgen, in Art. 123 werde ich auch angeben, wie ich bei ihrer Herstellung verfahren bin.

118. In der Tafel II. am Ende dieses Bandes haben wir die Schnitte der äquipotentiellen Flächen, welche zwei gleichnamig im Verhältnis von 20 zu 5 geladene Punkte*) umgeben, mit einer durch diese Punkte gelegten Ebene.

*) Die Anzahl der Electricitätseinheiten, welche jeder Punkt enthält, ist in allen Figuren entsprechend der Faradayschen Ansicht von der Bedeutung der Kraftlinien (Art. 82) durch die Anzahl der Kraftlinien, die von ihm einseitig ausgehen, charakterisirt. Anm. d. Uebers.

Zunächst ist jeder der beiden Punkte von einer Reihe von äquipotentiellen Flächen eingeschlossen, die sich in der Form um so mehr einer Kugel anschliessen, je näher sie dem betreffenden Punkte sind, ohne doch je ganz kugelförmig zu werden. Versehen wir also zwei entsprechende, um die beiden Punkte gelegte Niveauflächen, die wir uns zu Conductoren erstarrt denken, mit bezüglichen Ladungen, die zu einander im Verhältnis von 4 zu 1 stehen, so giebt uns die Tafel II. die Niveauflächen dieser Conductoren, wenn wir die in ihrem Innern gezeichneten Flächen uns fortgelöscht denken. Die Wirkung zwischen zwei solchen Conductoren ist also ganz dieselbe, wie die zwischen den beiden bezeichneten Punkten, die dem frühern zufolge von dem Halbirungspunkt der Verbindungslinie zwischen beiden Conductoren etwas weiter entfernt sind, als die Mitten der Axen der Conductoren.

Eine der äquipotentiellen Flächen — ihr Schnitt ist in der Figur durch die aus Strichen und Punkten gezeichnete Curve charakterisirt — besteht aus zwei Schalen, die sich in dem vielfachen Punkte P schneiden. Dieser Durchsetzungspunkt P ist ein Gleichgewichtspunkt. Auf einem Conductor von der Form der bezeichneten Niveaufläche hat die Electricität in diesem Punkte die Flächendichte Null.

Die dieser Fläche folgenden Niveauflächen umgeben beide geladenen Punkte und sind oval geformt. Denken wir uns eine dieser Flächen wieder zum Conductor erstarrt und mit 25 Einheiten Electricität geladen, so zeigt die Figur, dass die grösste Flächendichte auf dem spitzen Ende herrscht, eine geringere auf dem stumpfen und die geringste auf einem Kreise sich befindet, der dem spitzen Ende näher liegt als dem stumpfen.

Die Kraftlinien bestehen aus zwei verschiedenen Systemen von Curven, die von einander durch eine Fläche sechsten Grades — ihr Schnitt mit der Ebene der Figur ist durch eine aus Punkten bestehende Linie markirt — getrennt sind. Die Fläche geht durch den Gleichgewichtspunkt P und sieht einer Schale eines zweischaligen Hyperboloids nicht unähnlich.

Uebrigens kann dieselbe Figur auch zur Versinnbildlichung des Verlaufs der Niveauflächen und Kraftlinien zweier gravitirender Kugeln, deren Massen zu einander im Verhältnis von 4 zu 1 stehen, benutzt werden.

119. Die dritte Tafel gilt für den Fall, dass zwei Punkte wieder im Verhältnis von 20 zu 5, diesmal aber entgegengesetzt, der erste positiv, der andere negativ, geladen sind.

Man ersieht aus dem Diagramm, dass zwei runde entgegengesetzt geladene Conductoren sich gegenseitig in derselben Weise anziehen, wie zwei entsprechend electrisirte Punkte, die einander näher gerückt sind als die Mitten der beiden Conductoren.

Die wichtigste Niveaufläche, auf welche ich noch in der Theorie der electrischen Bilder zu sprechen kommen werde, ist die mit dem Potential 0. Sie ist kugelförmig und in der Figur durch einen aus Strichen gezeichneten Schnitt Q markirt.

Auch hier giebt es wie im vorigen Fall eine Niveaufläche — ihr Schnitt ist in der Figur aus Strichen und Punkten zusammengesetzt —, welche aus zwei Schalen besteht, die sich in dem Gleichgewichtspunkt P durchsetzen, und deren eine den mit fünf Einheiten geladenen Punkt umgiebt, während die andere beide Punkte umfasst.

Hat ein Conductor gerade die Form der äussern Schale, die einem Apfel, dessen Stielgrund sich in P befindet, nicht unähnlich sieht, so kann man leicht die Verteilung der Electricität auf ihm aus dem Diagramm studiren. Ich hebe hervor, dass in dem Stielgrund dieses apfelförmigen Conductors die Flächendichte der Electricität gleich Null ist.

Die äussere Schale der bezeichneten äquipotentiellen Fläche wird von einer Reihe anderer Flächen umgeben, welche alle an der P entsprechenden Stelle eine Vertiefung zeigen, die sich um so mehr verflacht, je weiter die Fläche von der genannten Schale entfernt ist, bis sie in einer durch den Punkt M der Figur gehenden Fläche verschwindet.

Die Kraftlinien setzen sich wieder aus zwei Systemen zusammen, die durch eine durch den Gleichgewichtspunkt P gehende Fläche — in der Figur durch eine punktirte Linie charakterisirt — getrennt werden.

Die resultirende Kraft in Richtung der Verbindungslinie der beiden electrischen Punkte A und B nimmt, je weiter man sich von B und gleichzeitig auch von A entfernt, immer mehr ab, bis sie in dem Doppelpunkt P ganz verschwindet. Von P ab ändert sie ihr Zeichen, erreicht in M (wo die Niveauflächen ihre Vertiefung verlieren) ein Maximum und nimmt dann wieder stetig ab.

Das eben bezeichnete Maximum ist aber kein absolutes Maximum, sondern gilt als solches nur für die in Richtung der Verbindungslinie von A und B wirkende Kraft, denn wenn man durch M eine Fläche senkrecht zu AB legt, so ist die resultirende Kraft (weil dort gerade die Vertiefung der Niveauflächen verschwindet) in allen in der Nähe von M gelegenen Punkten dieser Fläche grösser als in M selbst.

120. Die folgende Tafel IV. charakterisirt die Störung, welche ein mit zehn Einheiten geladener Punkt A in den Niveauflächen und Kraftlinien eines nach Grösse und Richtung der Kraft gleichförmigen electrischen Feldes (wie es etwa ein sehr weit entfernter electrischer Körper näherungsweise hervorbringt) verursacht. Die modificirten äquipotentiellen Flächen haben alle Asymptotenebenen. Eine von ihnen — in der Figur durch eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie markirt — hat einen vielfachen Punkt P und eine Schale, die A umgiebt. Die unterhalb dieser liegenden Flächen sind einschalig und mit Vertiefungen versehen, durch welche eine gerade Kraftlinie hindurchgeht. Die oberhalb befindlichen bestehen aus zwei durch die bezeichnete Niveaufläche getrennten Stücken, deren eines den Punkt A ganz umgiebt, während das andere sich überall in die Unendlichkeit erstreckt und nach A hin in Richtung der geraden Kraftlinie leicht deprimirt ist.

Setzen wir an Stelle zweier zu beiden Seiten von A liegender Niveauflächen zwei entsprechend geformte Conductoren, so bestimmen die dazwischen befindlichen Flächen und Linien die Verteilung der Kraftwirkung im electrischen Felde. Befindet sich der untere Conductor in genügender Entfernung von A, so geht seine Begrenzungsfläche in eine Ebene über. Wir erhalten dann durch das Diagramm die Verteilung der Electricität auf zwei Conductoren, die beide nahezu parallel und eben sind, und von denen der obere einen mehr oder minder nach dem andern Conductor zu vorragenden Buckel hat, während der untere eine entsprechende Einbuchtung zeigt.

121. Tafel V. enthält eine Zeichnung der äquipotentiellen Flächen und Kraftlinien für drei electrisirte Punkte, von denen A 15 Einheiten positiver, B 12 Einheiten negativer und C 20 Einheiten positiver Electricität in sich concentrirt. Die drei Punkte sind in einer Graden in den Entfernungen

$$AB = 9, \quad BC = 16, \quad AC = 25$$

angeordnet.

Die Fläche, für welche das Potential gleich Null ist, besteht aus zwei Kugeln mit den Mittelpunkten in A und C und mit den Radien 15 und 20. Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreise, der die Ebene der Zeichnung senkrecht in den Punkten D und D' trifft, dessen Mittelpunkt in den negativ geladenen Punkt B fällt und dessen Radius die Länge 12 hat.

Die resultirende Kraft verschwindet in jedem Punkte dieses Kreises, er bildet das erste Beispiel einer Gleichgewichtslinie.

Wird die Kugel, deren Centrum in A liegt, zum Conductor, dessen aus drei Einheiten positiver Electricität bestehende Ladung unter dem Einflusse der in C concentrirten 20 Einheiten positiver Electricität sich befindet, so giebt unser Diagramm alle auftretenden Niveauflächen und Kraftlinien, wenn die Curven innerhalb der bezeichneten Kugel gelöscht werden. Die Ladung der Kugel ist dann unter dem Einfluss von C innerhalb des kleinen Kreises DD' negativ, ausserhalb desselben positiv. Auf dem Kreise selbst befindet sich keine freie Electricität.

Ebenso können wir dasselbe Diagramm benutzen, wenn die Kugel mit dem Centrum in C durch acht Einheiten positiver Electricität geladen und unter den Einfluss der 15 Einheiten positiver Electricität in A gestellt wird.

Endlich bleibt das Diagramm noch ungeändert, wenn der Conductor aus den zwei grössern Kugelfragmenten besteht, die im Kreise DD' an einander stossen und zusammen eine Ladung von 23 Einheiten positiver Electricität haben. Doch komme ich auf diese Tafel noch einmal zurück, wenn ich Illustrationen zu der Thomsonschen Theorie von den electrischen Bildern vorzuführen haben werde (Art. 168).

122. Man bedient sich dieser Diagramme mit Vorteil, um für die Faradayschen Bezeichnungen „Kraftlinie“, „Wirkungen auf einen electrisirten Körper“ u. a. m. eine Versinnbildlichung zu gewinnen.

So wird nach Faraday die Electricitätsmenge eines Körpers durch die Anzahl der Kraftlinien, oder richtiger gesprochen, der Inductionslinien gemessen, welche von ihm ausgehen. Diese Linien müssen aber alle irgendwo ein Ende finden, sei es auf andern in der Nachbarschaft vorhandenen Körpern oder auf den Wänden und der Decke des Zimmers, in dem sich das electrische System befindet, oder auf der Erde oder endlich auf den Himmelskörpern. Wo eine Kraftlinie endet, da muss sich eine Electricitätsmenge befinden, die an Quantität gleich, im Zeichen aber entgegengesetzt ist der Ladung an der Stelle des Conductors, von der die Kraftlinie ausgegangen ist. Dasselbe lehren aber auch die vorgeführten Diagramme, die nach mathematischen Rechnungen ausgeführt sind, wie sie die alte Theorie der Electricitätswirkungen vorschreibt. In den Resultaten besteht kein Widerspruch zwischen der Faradayschen Annahme einer Vermittelung der electrischen Wirkungen durch Kraflinien und der alten Theorie einer Fernewirkung. Die Conception der Kraftlinien bringt aber noch den Vorteil mit sich, dass durch sie die mathematischen Resultate unmittelbar in eine physikalische Beschreibung der auftretenden Erscheinungen übertragen werden können. Ausserdem scheint es, als ob man mit Hilfe der Kraftlinien mit der Zeit tiefer in das Verständnis der electrischen Erscheinungen wird eindringen können, als es die alte Theorie je ermöglichen kann.

Anleitung zum Zeichnen von Niveauflächen und Kraftlinien.

123. Ich lasse nun eine Beschreibung der Methode folgen, nach der solche Diagramme angefertigt werden können, und von mir angefertigt worden sind.

Wir betrachten zunächst als einfachsten Fall einen kleinen mit der Electricitätsmenge e geladenen Körper. Das Potential V dieses kleinen Körpers ist in der Entfernung r von demselben gleich e/r. Legen wir mit dem Radius $r = e/V$ eine Kugel um den kleinen Körper, so haben alle Punkte ihrer Oberfläche dasselbe Potential V. Machen wir demnach der Reihe nach $V = 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir ein System von concentrischen Kugelflächen, die die Niveauflächen darstellen, deren Potentiale der Reihe nach die natürlichen Zahlen angeben. Eine durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt gelegte Ebene schneidet alle Niveauflächen in Kreisen, die wir der Reihe nach durch die die betreffenden Potentiale repräsentirenden Zahlen kennzeichnen. Auf der rechten Hälfte der auf Tafel I. gezeichneten Figur sieht man die Hälften dieser Kreise durch punktirte Linien angedeutet.

Befindet sich im Felde noch ein zweiter Kraftmittelpunkt, so können wir für ihn ohne Berücksichtigung des ersten Kraftcentrums ganz ebenso die äquipotentiellen Flächen zeichnen.

Wir finden dann die äquipotentiellen Flächen bei gleichzeitiger Existenz beider Kraftcentren durch die Ueberlegung, dass in irgend einem Punkte das Potential V beider Kraftcentren gleich $V_1 + V_2$ ist, wenn V_1 das vom ersten, V_2 das vom zweiten Kraftcentrum für sich allein an der betreffenden Stelle hervorgebrachte Potential angiebt. Man kennt aber V_1 und V_2 an den Durchschnittsstellen der beiden den einzelnen Centren angehörigen Systeme äquipotentieller Flächen, also ist dort auch der Wert von V gegeben. Wir suchen nun von allen Schnittstellen diejenigen heraus, die für $V = V_1 + V_2$ einen und denselben Wert ergeben, und legen durch diese eine Fläche, die an den Schnittstellen sich an die entsprechende äquipotentielle Fläche beider Centren anschmiegen wird. Je näher aneinander die Niveauflächen jedes der Systeme gezogen sind, um so mehr solcher zusammengehöriger Schnittstellen haben wir, und um so genauer schliesst sich die gezeichnete Fläche einer wirklichen Niveaufläche beider Centren an. Wir können so jeden beliebigen Grad von Präcision in der Zeichnung der Niveauflächen bei gleichzeitiger Existenz beider Centren erreichen.

In dieser Weise sind zum Beispiel die äquipotentiellen Flächen zweier gleich und entgegengesetzt geladener Punkte gewonnen, und auf der rechten Seite der auf Tafel I. befindlichen Zeichnung durch ihre Schnittlinien mit einer durch die electrischen Punkte gelegten Ebene fixirt.

Selbstverständlich kann man dieselbe Methode in jedem Falle anwenden, wenn das Potential aus einer Summe von Potentialen gebildet ist, für die man schon die Niveauflächen gezeichnet hat.

Was ferner die Kraftlinien anbetrifft, so sind sie bei einem einzelnen Kraftcentrum radial von diesem ausgehende gerade Linien. Sollen sie aber nicht blos die Richtung der Kraft kennzeichnen, sondern auch ein Maass für die electrische Kraftintensität liefern, so muss man sie vom Kraftcentrum aus so ziehen, dass sie auf den äquipotentiellen Flächen Stücke ausschneiden, für welche das Flächenintegral der Induction (Art. 75, 76) vorgeschriebene Werte hat.

Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man die in der Ebene des Kraftcentrums angefertigte Zeichnung als den Schnitt dieser Ebene mit einer Figur im Raume betrachtet, die durch Rotation der Zeichnung um eine durch das Kraftcentrum gehende Axe hervorgebracht wird. Eine Kraftlinie, die mit der Axe einen Winkel ϑ bildet, beschreibt dann einen Kegel, der von den äquipotentiellen Flächen bestimmte Stücke ausschneidet.

Das Flächenintegral der Induction für ein solches die positive Axe schneidendes Stück ist nach Art. 76 gleich

$$2\pi e(1 - \cos\vartheta).$$

Demnach ist die Induction Φ durch den Teil des betrachteten Stückes, der durch zwei Ebenen abgeschnitten wird, welche durch die Axe gehen

und einen Winkel, dessen Bogen gleich dem halben Radius ist, einschliessen, gleich dem $1/4\pi$ ten Teil der Grösse $2\pi e(1 - \cos\vartheta)$, also

$$2\Phi = e(1 - \cos\vartheta),$$

und hieraus folgt

$$\vartheta = \arccos\left(1 - 2\frac{\Phi}{e}\right).$$

Giebt man dem Φ nach einander die Werte 1, 2, 3 ... e, so erhält man eine Reihe entsprechender Werte für ϑ, und wenn e eine ganze Zahl ist, wird die Anzahl der Werte für ϑ, also auch die Anzahl der Kraftlinien, die Axe als solche mitgerechnet, gleich e.

Diese Methode lehrt die Kraftlinien eines Centrums so zu ziehen, dass ihre Anzahl in einer durch das Centrum gehenden Halbebene gleich der Ladung dieses Centrums ist, und dass die Induction durch ein Kugelstück, welches von zwei im Bogenabstand $1/4\pi$ gezogenen Meridianen und einem bestimmten Breitenkreise begrenzt wird, durch die Anzahl aller dieses Flächenstück schneidenden Kraftlinien gemessen wird. Auf der linken Hälfte der Figur auf Tafel I. bezeichnen die gestrichelten Linien die Kraftlinien jedes der beiden electrischen Punkte. Entsprechend der Ladung + 10 und — 10 derselben zählt man auch für jeden Punkt 10 solcher Kraftlinien.

Sollen nun die Kraftlinien gezeichnet werden, die der gleichzeitigen Existenz beider Punkte ihre Entstehung verdanken, so beginnt man damit, dass man erst die jedem Punkt für sich zugehörigen und den Inductionswerten Φ_1 bezüglich Φ_1' entsprechenden Kraftlinien zieht. Dann sucht man von den Schnittpunkten der so gewonnenen zwei Systeme von Kraftlinien diejenigen aus, welche für die Summe $\Phi_1 + \Phi_1'$ denselben Wert ergeben, und verbindet sie durch eine Linie, je mehr solcher Schnittpunkte man zur Verfügung hat, desto genauer schliesst sich die gezogene Linie einer Kraftlinie der combinirten electrischen Punkte an. Nach diesem Princip sind die Kraftlinien auf der linken Hälfte der oft genannten Figur auf Tafel I. in Gestalt ausgezogener Linien gezeichnet.

Ich habe so die Kraftlinien unabhängig von den äquipotentiellen Flächen ziehen gelehrt, letztere müssen aber von erstern senkrecht geschnitten werden, und das giebt eine Controle für die Exactheit der ganzen Zeichnung Ferner muss der Abstand zweier aufeinanderfolgender äquipotentieller Flächen sich zu dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Kraftlinien ebenso verhalten, wie die Hälfte des mittlern Abstandes von der Symmetrieaxe zur benutzten Längeneinheit, und damit können wir unsere Zeichnung einer zweiten Probe unterwerfen.

Wenn ein derartiges electrisches System endliche Dimensionen hat, so besitzt diejenige Kraftlinie, deren zugehörige Induction Φ kleiner als die Gesammtladung e des ganzen Systems ist, eine Asymptote, die durch das

electrische Centrum (Art. 89 d) hindurchgeht. Sie bildet mit der Axe einen Winkel ϑ, dessen Wert aus der Gleichung

$$\vartheta = \arccos\left(1 - 2\frac{\Phi}{e}\right)$$

folgt. Kraftlinien, deren zugehörige Induction grösser als e ist, hören in der Endlichkeit auf, haben also eine endliche Länge. Daraus ergiebt sich, dass wenn die Gesammtladung e verschwindet, keine Kraftlinie bis in die Unendlichkeit verlaufen kann.

In einem Felde, in welchem die Kraft überall gleichförmig parallel einer Axe verteilt ist, laufen die Kraftlinien dieser Axe parallel. Ihre Abstände von derselben repräsentiren die Quadratwurzeln einer arithmetischen Reihe.

Eine besondere Untersuchung verdient der Fall, dass die äquipotentiellen Flächen und Linien schon in zwei Dimensionen bestimmt sind. Ich komme aber später bei der Behandlung der Theorie der conjugirten Functionen darauf zurück.*)

*) Ich verweise noch auf die Abhandlung von W. R. Smith, „*On Flow of Electricity in conducting Surfaces*“ Proc. R. S. Edin. 1869—70 pag. 79.

Cap. VIII.

Einfache Fälle der electrischen Verteilung.

Zwei parallele unendlich ausgedehnte Ebenen.

124. Wir betrachten zunächst zwei parallele, unendlich ausgedehnte, leitende Ebenen A, B, deren Entfernung von einander gleich c ist und welche zu den Potentialen A bezüglich B geladen sind.

Von vornherein sieht man, dass die äquipotentiellen Flächen in diesem Falle selbst unendlich ausgedehnte, zu den gegebenen Ebenen parallele Ebenen sein müssen, die nur da, wo die Conductoren aufhören, also in der Unendlichkeit eine Gestaltsänderung erleiden würden. Nehmen wir demnach die Ebene A zur xy Ebene, so dass die z Axe senkrecht von A nach B übergeht, so reducirt sich die Laplacesche Gleichung auf

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

woraus das Potential V auf einen zwischen beiden Ebenen liegenden Punkt

$$V = C_1 + C_2 z$$

folgt. Für $z = 0$ ist $V = A$ und für $z = c$ ist $V = B$, also allgemein

$$V = A + (B - A)\frac{z}{c}.$$

Für die resultirende Kraftintensität R erhalten wir

$$R = \frac{A - B}{c},$$

sie ist also überall von derselben Grösse und wirkt normal zu den Platten.

In den Conductoren selbst ist $R = 0$, demnach die Flächendichte σ_1, σ_2 der auf A bezüglich B ausgebreiteten Electricität

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{A - B}{c},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{B - A}{c}.$$

Schliessen wir weiter von der ersten Conductorebene ein Stück S aus, das nirgends in die Unendlichkeit reicht, so ist die auf demselben befindliche Electricitätsmenge $e_1 = S\sigma_1$. Nach Art. 79 wirkt aber auf jede Electricitätseinheit eine Kraft von der Grösse $R/2$. Die Kraft, welche S angreift und es nach der andern Ebene B hinzudrängen sucht, wird demnach

$$F_1 = \tfrac{1}{2} R S \sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 S = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{A-B}{c}\right)^2.$$

Die Kraft ist so durch die Grösse des Flächenstückes, den Abstand beider Conductorebenen und die Potentialdifferenz zwischen ihnen bestimmt. Einen Ausdruck für dieselbe durch die Grösse des Flächenstückes und durch die auf demselben befindliche Electricitätsmenge gewinnt man durch die Beziehung

$$e_1 = \frac{S}{4\pi} \cdot \frac{A-B}{c},$$

welche

$$F_1 = \frac{2\pi}{S} e_1^2$$

finden lässt.

Die Energie W der Electricität, welche auf S und auf der Projection S von S auf die Ebene B enthalten ist (die Projectionslinien sind hier Kraftlinien), wird nach Art. 84

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}(e_1 A + e_2 B) \\ &= \frac{S}{8\pi} \frac{(A-B)^2}{c} \\ &= \frac{R^2}{8\pi} Sc \\ &= \frac{2\pi}{S} e_1^2 c \\ &= Fc. \end{aligned}$$

Im ganzen haben wir also fünf Ausdrücke für diese Energie.

Der erste derselben giebt sie in ihrer allgemeinen Form, wie wir sie in Art. 84 kennen gelernt haben.

Der zweite bestimmt die Energie durch die Grösse der Fläche, für welche sie gelten soll, den Abstand und die Potentialdifferenz der Conductoren.

Der Dritte macht sie von der resultirenden Kraft R und dem Volumen Sc zwischen den Flächen S, S und den durch ihre Begrenzungen gehenden Kraftlinien abhängig. Aus dieser letzteren Darstellung folgt, dass die Energie p für die Volumeinheit gleich $R^2/8\pi$ ist. Die Grösse p hat auch noch eine andere Bedeutung. Da nämlich $p.S$ die Attraction zwischen den Flächen angiebt, so ist p auch gleich der gegen die Flächeneinheit wirkenden electrischen Spannung.

Der vierte Ausdruck für die Energie stellt diese durch die Ladung, den Inhalt der Flächen S, S und durch den Abstand derselben dar.

Der fünfte endlich lehrt, dass die Energie gleich der Arbeit ist, welche die electrische Kraft leistet, indem sie die Flächen S, S mit ihren fixirt und unveränderlich gedachten Ladungen parallel mit sich selbst bis zu ihrem Zusammenfallen verschiebt.

Weiter haben wir

$$e_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{c}(A - B) = q(A - B),$$

daher ist die Capacität der Fläche S in Gegenwart der ihr entsprechenden Fläche S des andern Conductors gleich $q = S/4\pi c$.

Wenn die specifische inductive Capacität des Mediums zwischen den Conductoren nicht, wie wir bisher angenommen haben, gleich 1, sondern gleich K ist, so wird die Ladung Kmal so gross als im erstern Fall, also

$$e_1 = \frac{KS}{4\pi c}(A - B),$$

ferner die Energie

$$W = \frac{KS}{8\pi c}(A - B)^2$$

$$= \frac{2\pi}{KS} e_1^2 c$$

und die Kraftwirkung zwischen S und S

$$F = pS = \frac{KS}{8\pi}\left(\frac{A - B}{c}\right)^2$$

$$= \frac{2\pi}{KS} e_1^2.$$

Bringt man also zwischen zwei stets zu derselben Potentialdifferenz $A - B$ geladene Platten verschiedene Zwischenmedien, so ändert sich die Kraftwirkung zwischen den Platten direct wie die specifische inductive Capacität, ladet man dagegen, während verschiedene Medien zwischen den Platten sich befinden, dieselben mit stets derselben Electricitätsmenge e_1, so variirt die betreffende Wirkung umgekehrt wie die specifische inductive Capacität. (Vergl. Art. 94.)

Zwei concentrische Kugelflächen.

125. Als zweiten Fall betrachten wir zwei sich gegenüberstehende concentrische Kugelflächen mit den Radien a und b (wo $b > a$ ist) und den Potentialen A, B.

Die äquipotentiellen Flächen können offenbar nur von r, dem Abstande ihrer Punkte von dem Mittelpunkt der Kugelflächen abhängen. Die Laplacesche Gleichung wird also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

woraus zunächst

$$V = C_1 + C_2 r^{-1}$$

folgt. Für $r = a$ ist aber $V = A$ und für $r = b$ ist $V = B$, somit ist zwischen beiden Flächen

$$V = \frac{Aa - Bb}{a - b} + \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-1},$$

$$R = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-2}.$$

Bezeichnen σ_1, σ_2 die Flächendichten der auf den einander zugewandten Seiten der Kugelflächen befindlichen Electricität, so ist

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\,\frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2}\,\frac{B - A}{a^{-1} - b^{-1}},$$

also haben wir für die Ladungen e_1, e_2 der einander gegenüberstehenden Kugelflächen

$$e_1 = 4\pi a^2 \sigma_1, \quad e_2 = 4\pi b^2 \sigma_2 \text{ oder}$$

$$e_1 = -e_2 = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{ab}{b - a}(A - B).$$

Die Capacität der innern Kugelfläche in der Gegenwart der äussern ist demnach

$$q = \frac{ab}{b - a}.$$

Diese Resultate gelten unabhängig von der Gestalt der äussern Oberfläche der äussern Kugelfläche. Wenn diese äussere Oberfläche auch eine Kugelfläche vom Radius c $(c > b > a)$ ist, so wird das Potential ausserhalb derselben Bc/r, und ihre Ladung

$$e_3 = Bc.$$

Die ganze der äussern Kugelfläche angehörige Electricitätsmenge ist demnach

$$e_2 + e_3 = -\frac{ab}{b - a}(A - B) + Bc,$$

während die der innern gleich

$$e_1 = \frac{ab}{b-a}(A-B)$$

bleibt.

Die an der Flächeneinheit der innern Kugelfläche wirkende electrische Spannung ist

$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2.$$

Die Resultante dieser Spannung bezogen auf eine Hälfte der innern Kugel ist numerisch gleich $\pi a^2 p = F$. Sie wirkt senkrecht zur Basis der Halbkugel und wird neutralisirt, wenn man an der Längeneinheit der Begrenzung der Basis der Halbkugel eine Spannung

$$T = \frac{1}{2\pi a}F$$

wirken lässt, wir haben also

$$F = \frac{b^2}{8}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2 = \frac{e_1^2}{8a^2},$$

$$T = \frac{b^2}{16\pi a}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2 = \frac{e_1^2}{16\pi a^3}.$$

Wird $b = \infty$ genommen, so bleibt die Kugel mit dem Radius a allein im unendlichen Raume übrig. Ihre Capacität ist dann gleich a, also gleich ihrem Radius.

Für eine zum Potential A electrisirte Seifenblase haben wir

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{A}{a}.$$

Die resultirende Kraftintensität ist in der äussern Fläche $4\pi\sigma$ und an der innern gleich Null. Nach Art. 79 wirkt also an der Flächeneinheit der Seifenblase eine mechanische Kraft $2\pi\sigma^2$ von innen nach aussen.

Die Electrisirung der Seifenblase vermindert demnach den in ihrem Innern herrschenden Luftdruck um $2\pi\sigma^2$, d. h. um $A^2/8\pi a^2$. Wenn aber T_0 die Spannung längs der Längeneinheit eines Flüssigkeitsfadens angiebt, so muss, wie man leicht einsieht, im Innern der Seifenblase, damit sie nicht zusammenfällt, ein Ueberdruck $2T_0/a$ gegen den äussern Luftdruck herrschen. Soll also die Seifenblase durch die Electrisirung allein gerade noch erhalten werden, während der Druck in ihrem Innern gleich dem äussern Luftdruck ist, so muss sie bis zum Potential

$$A = \sqrt{16\pi a T_0}$$

geladen werden.

Zwei unendlich lange coaxiale Cylinderflächen.

126. Die Radien der beiden sich gegenüberstehenden coaxialen Cylinderflächen seien a bezüglich b $(b>a)$, die Potentiale A und B.

Da die äquipotentiellen Flächen zwischen den beiden Cylinderflächen mit ihnen coaxiale Cylinderflächen sein werden, so geht die Laplacesche Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=0,$$

wenn r den Abstand eines zwischen den Cylinderflächen gelegenen Punktes von ihrer gemeinschaftlichen Axe bezeichnet. Daraus folgt

$$V=C_1+C_2\log r,$$

und weil $V=A$ für $r=a$ und $V=B$ für $r=b$ ist,

$$V=\frac{A\log\frac{b}{r}+B\log\frac{r}{a}}{\log\frac{b}{a}},$$

$$R=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{A-B}{r\log\frac{b}{a}}.$$

Sind weiter σ_1, σ_2 die Flächendichten an den einander zugewandten Seiten der Cylinderflächen, so haben wir

$$\sigma_1=\frac{1}{4\pi}\frac{A-B}{a\log\frac{b}{a}},\quad \sigma_2=\frac{1}{4\pi}\frac{B-A}{b\log\frac{b}{a}}.$$

Für die auf Cylinderstücken von der Länge l vorhandenen Electricitätsmengen e_1, e_2 erhalten wir

$$e_1=2\pi a l\sigma_1,\quad e_2=2\pi b l\sigma_2$$

oder

$$e_1=-e_2=\tfrac{1}{2}\frac{A-B}{\log\frac{b}{a}}l.$$

Die Capacität eines Stückes von der Länge l des innern Cylinders ist also bei Gegenwart des äussern Cylinders

$$q=\tfrac{1}{2}\frac{l}{\log\frac{b}{a}}.$$

Befindet sich zwischen den Cylinderflächen ein Dielectricum von der specifischen inductiven Capacität K, so geht die Capacität des betrachteten Teiles des innern Cylinders über in

$$\tfrac{1}{2}\frac{Kl}{\log\frac{b}{a}},$$

und die Energie der auf entsprechenden Stücken der beiden Cylinder befindlichen Electricität wird

$$W = \tfrac{1}{4} \frac{lK(A-B)^2}{\log \frac{b}{a}}.$$

Drei coaxiale Cylinder.

127. In der nachstehenden Figur bezeichnen A und B zwei einseitig sich in die Unendlichkeit erstreckende, durch einen kurzen Zwischenraum δ getrennte Hohlcylinder mit gemeinschaftlicher zur x Axe gewählter Axe und mit innern Radien a, b. Wir zählen die x von einem Punkte in der Nähe der Mitte der Trennungsstelle zwischen A und B von links nach rechts, so dass A als positiver, B als negativer Cylinder bezeichnet werden kann.

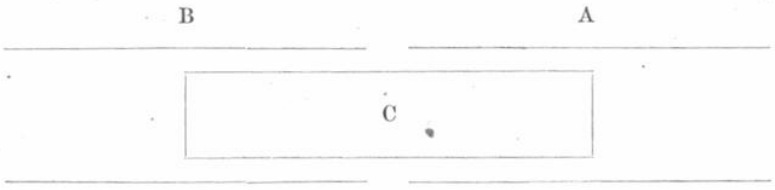


Fig. 5.

Coaxial mit ihnen und in beide Hohlcylinder gleich weit hineinreichend befindet sich ein dritter Cylinder C von der Länge $2l$ und der Dicke $2c$, dessen Mitte von dem Ursprung der x Coordinaten um x nach der positiven Seite absteht.

Die Potentiale der Cylinder setzen wir entsprechend ihrer Bezeichnung gleich A, B, C, und verstehen unter α die Capacität einer Längeneinheit des Cylinders C in Gegenwart von A und unter β dieselbe Grösse in Gegenwart von B.

Wir sind noch nicht im Stande die wahre Verteilung der Electricität auf den drei Cylindern in der Nähe ihrer bezüglichen Enden zu berechnen. Wenn aber l genügend gross gegen δ und gegen x ist, also ein beträchtliches Stück des innern Cylinders C in jeden der Hohlcylinder hineinragt, so wird die Flächendichte auf Teilen der Hohlcylinder A, B weder in der Nähe des Coordinatenursprungs noch in der Nähe der Enden des Cylinders C durch den Betrag des Abstandes x der Mitte des Cylinders C von dem Coordinatenursprung merklich beeinflusst werden. Bewegt man also den innern Cylinder in seiner Axenrichtung, so ändert sich dadurch weder die electrische Verteilung an den Enden der Hohlcylinder noch auch die auf dem Mantel des innern Cylinders, vorausgesetzt, dass dabei immer noch gegen x und δ genügend lange Stücke von C in die Hohlcylinder hineinragen. Der einzige Effect einer solchen Verschiebung von C besteht also darin, dass lediglich die Länge des Stückes desselben, auf welchem die Verteilung der

Electricität der auf einem unendlich langen Cylinder entspricht, vergrössert bezüglich verkleinert wird.

Die gesammte Energie des Systems in ihrer Abhängigkeit von x ist demnach nach Art. 126

$$W = \tfrac{1}{2}\alpha(l+x)(C-A)^2 + \tfrac{1}{2}\beta(l-x)(C-B)^2 + \Theta,$$

wo $\alpha = 1/(2\log a/c)$, $\beta = 1/(2\log b/c)$ ist und Θ Glieder in sich fasst, die von x unabhängig sind. Man erhält daraus für die parallel der Axe der Cylinder bei einer solchen Verschiebung wirkende resultirende Kraft

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\alpha(C-A)^2 - \tfrac{1}{2}\beta(C-B)^2.$$

Für den Fall, dass die Hohlcylinder A und B gleiche Querschnitte besitzen, wird $\alpha = \beta$ und

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha(B-A)\,[C - \tfrac{1}{2}(A+B)].$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichung für X geht dahin, dass der innere Cylinder durch eine constante Kraft in den Hohlcylinder hineingezogen wird, von dessen Potential das seinige am meisten abweicht.

Wenn C gegen $A + B$ numerisch gross ist, so wird näherungsweise

$$X = \alpha\,(B-A)\,C.$$

Diese Gleichung kann zur Berechnung der Potentialdifferenz der äussern Cylinder dienen, wenn ausser α das Potential C des innern Cylinders und die Kraft X gemessen werden können. Die Berechnung schliesst sich um so genauer den Tatsachen an, je grösser C im Verhältnis zu $A + B$ genommen wird.

In etwas modificirter Weise ist diese Methode zur Bestimmung der Potentialdifferenz zweier Leiter von Thomson bei der Construction seines Quadrantenelectrometers, auf das ich in Art. 219 noch zu sprechen kommen werde, zu Grunde gelegt worden.

Dieselbe Anordnung dreier Cylinder kann auch noch, wie seiner Zeit ausgeführt werden soll, benutzt werden, um die Capacität direct zu messen.

Cap. IX.

Harmonische Kugelfunctionen.

—×—

128. Die Theorie der harmonischen Kugelfunctionen ist mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen für Mathematiker und Physiker gewesen. Ich nenne zunächst als das umfassendste Werk das *Handbuch der Kugelfunctionen* von E. Heine, das 1878—81 in zweiter Auflage (bei G. Reimer, Halle) in zwei Bänden erschienen ist. Dann haben wir noch die *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, Teubner 1878) von Neumann und die Abhandlung über harmonische Kugelfunctionen in Thomson und Taits *Theoretische Physik*, die in der zweiten englischen Ausgabe (von 1879) eine beträchtliche Erweiterung erfahren hat. Ferner sind noch zu erwähnen Todhunters *Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lamé's Functions, and Bessel's Functions* und Ferrers *Elementary Treatise on Spherical Harmonics and subjects connected with them.* Bei der Fülle an Belehrungsmitteln über die Kugelfunctionen wird es also wol nicht nötig sein, sie in einem Buche über Electricität eingehend mathematisch zu untersuchen.

Doch habe ich auch in diese Ausgabe die Darstellung der Kugelfunctionen in ihrer Abhängigkeit von der Lage ihrer Pole mit aufgenommen.

Singuläre Punkte des Potentials.

129a. Befindet sich eine Electricitätsmenge A_0 in gleichförmiger Ausbreitung auf einer Kugel, deren Mittelpunkt die Strecken a, b, c zu Coordinaten hat, so ist nach Art. 125 das Potential derselben auf einen um r von ihrem Mittelpunkt entfernten ausserhalb ihrer Oberfläche liegenden Punkt (x, y, z)

$$V = \frac{A_0}{r},$$

wobei

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ist. Der Ausdruck für V ist von dem Radius der Kugel unabhängig, er bleibt also auch bestehen, wenn wir die Kugel sich beliebig zusammenziehen lassen. Die Ladung A_0 befindet sich dann zuletzt auf einer Kugel, die so

klein ist, dass sie mit einem Punkte confundirt werden kann. In der Natur ist es zwar nicht möglich, eine endliche Electricitätsmenge auf einen Punkt zu bringen, weil dazu nach Art. 55, 81 eine unendlich grosse Kraft gehören würde, und man kann deshalb tatsächlich den Radius der Kugel nicht unter eine gewisse Grenze sinken lassen. Da aber die Gleichung $V = A_0/r$ die physikalisch möglichen Potentialwerte in dem Raume um eine Kugel darstellt, so können wir bei einer rein mathematischen Untersuchung von der Fiction ausgehen, als ob die Ladung A_0 sich auch in einen Punkt (a, b, c) condensiren lasse.

Ich bezeichne den Punkt (a, b, c) als Unendlichkeitspunkt von der Ordnung Null. Ehe ich zur Ableitung der Eigenschaften dieses und noch complicirterer singulärer Punkte übergehe, teile ich eine Reihe von Ausdrücken mit, die sich bei Operationen mit Richtungen im Raume und mit zu jenen Richtungen in Beziehungen stehenden auf Kugelflächen gelegenen Punkten von grossem Nutzen erweisen.

129 b. Eine *Axe* ist eine bestimmte Richtung im Raume.

Zieht man vom Centrum einer Kugel in Richtung der Axe einen Radius, so heisst der Punkt, wo der Radius die Kugel trifft, *Pol* der Axe. Der Pol kann also zur Markirung einer Axe dienen. Es ist aber zu beachten, dass nach der Definition eine Axe nur einen Pol haben kann, nicht zwei. Ist μ der Cosinus des Winkels zwischen einer Axe h und einem Vector r und setzt man

a) $$p = \mu r,$$

so heisst p die *Componente* des Vectors r in Richtung der Axe h.

Verschiedene Axen charakterisiren wir dadurch, dass wir an die Grössen, die zu ihnen in Beziehungen stehen, verschiedene Indices anhängen. Namentlich verstehen wir unter

b) $$\lambda_{mn}$$

den Cosinus des Winkels zwischen zwei Axen m und n.

Unter einer *Differentiation nach einer Axe* h, deren Richtungscosinusse die Grössen L, M, N sind, verstehe ich die Operation

c) $$\frac{d}{dh} = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aus den Festsetzungen unter a), b), c) folgten die Beziehungen

α) $$\frac{\partial r}{\partial h_m} = \frac{p_m}{r} = \mu_m,$$

β) $$\frac{\partial p_n}{\partial h_m} = \lambda_{mn} = \frac{dp_m}{dh_n},$$

γ) $$\frac{\partial \mu_m}{\partial h_n} = \frac{\lambda_{mn} - \mu_m \mu_n}{r}.$$

Uebt ein singulärer Punkt beliebiger Ordnung, der sich im Ursprung einer Axe h befindet, auf einen andern Punkt mit den Coordinaten x, y, z ein Potential

$$A f(x, y, z)$$

aus, so ist das Potential desselben Punktes, wenn er in das Ende der Axe h verlegt wird, an derselben Stelle (x, y, z) gleich

$$A f[x - Lh,\ y - Mh,\ z - Nh].$$

Bringen wir nunmehr in den Ursprung der Axe einen andern geladenen Punkt hin, der sich vom vorigen nur dadurch unterscheidet, dass seine Electricität A das entgegengesetzte Zeichen wie die des ersten Punktes hat, so ist das Potential des Punktpaares im Punkte (x, y, z)

$$V = Af[x - Lh,\ y - Mh,\ z - Nh] - Af(x\,y\,z)$$

oder nach dem Taylorschen Satz

$$V = -Ah\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial h} + \text{Gliedern von höherer Potenz als } h.$$

Indem man h continuirlich abnehmen und A continuirlich so stark wachsen lässt, dass das Product $Ah = A'$ einen endlichen Wert behält, wird schliesslich

$$V' = -A'\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial h}.$$

Genügt $f(x, y, z)$ der Laplaceschen Gleichung, so muss dasselbe auch bei V' der Fall sein, weil dieses nichts weiter als die Differenz zweier Functionen ist, deren jede die Laplacesche Gleichung identisch erfüllt.

129c. Das Potential eines Unendlichkeitspunktes von der Ordnung Null, also

1) $$V_0 = \frac{A_0}{r}$$

ist nun in der Tat eine Lösung der Laplaceschen Gleichung, daher muss jede andere Function, die aus diesem Potential durch successive Differentiation nach irgend einer Anzahl von Axen entstanden ist, ebenfalls die Laplacesche Gleichung erfüllen.

Ich kann jetzt auseinandersetzen, was ich unter einem singulären Punkt von anderer Ordnung als Null verstehe.

Bringt man einen Punkt von der Ordnung Null mit einer Ladung $-A_0$ in den Anfang und einen andern von derselben Ordnung Null mit der Ladung $+A_0$ in das Ende einer Axe h_1, lässt h_1 continuirlich abnehmen und A_0 continuirlich wachsen, so dass $A_0 h_1$, das *Moment*, endlich bleibt, so fallen schliesslich beide Punkte zusammen und bilden einen Doppelpunkt, den ich als singulären Punkt erster Ordnung bezeichne.

Das Potential V_1 eines solchen Punktes von der ersten Ordnung ist also

2) $$V_1 = -h_1 \frac{\partial V_0}{\partial h_1}$$
$$= A_1 \frac{\mu_1}{r^2}.$$

Bringt man weiter einen Punkt von der ersten Ordnung mit dem Moment $-A_1$ an den Anfang und einen andern von derselben Ordnung mit dem Moment $+A_1$ an das Ende einer zweiten Axe h_2, lässt wieder h_2 ohne Ende abnehmen und A_1 wachsen, so dass

$$A_1 h_2 = \tfrac{1}{2} A_2$$

endlich bleibt, so erhält man einen singulären Punkt von der zweiten Ordnung.

Das Potential eines solchen Punktes ist nach Art. 129 b, α), γ)

3) $$V_2 = -h_2 \frac{\partial V_1}{\partial h_2}$$
$$= \tfrac{1}{2} A_2 \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}.$$

Ein singulärer Punkt von der zweiten Ordnung besteht aus vier Punkten der nullten Ordnung, hat zwei Axen h_1, h_2 und ein Moment A_2. Er ist vollständig definirt, wenn die Richtungen dieser Axen und die Grösse des Moments gegeben sind.

Harmonische Raum- und Flächenfunctionen.

Aus den bisherigen Ableitungen sieht man schon, dass man durch Differentiation des Potentials eines Punktes der nullten Ordnung nach n Axen zu dem Potential eines *Singulären Punktes n ter Ordnung* gelangt.

Dieses Potential ist dann das Product dreier Factoren, nämlich einer Constante, einer gewissen Combination von Cosinussen und endlich der Potenz $r^{-(n+1)}$. Es empfiehlt sich dabei aus Gründen, die erst später klar werden können, den numerischen Betrag der Constante so zu wählen, dass, wenn die Richtungen aller Axen mit der Richtung des Vectors r zusammenfallen, der Coefficient des Moments $r^{-(n+1)}$ wird. Dazu hat man nach einer Differentiation nach h_n durch n zu dividiren.

So resultirt ein bestimmter numerischer Betrag für die besondere Potentialfunction

1a) $$V_n = (-1)^n \frac{1}{1.2.3 \ldots n} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{\partial}{\partial h_3} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right),$$

die wir als *Harmonische Raumfunction* des $-(n+1)$ten Grades bezeichnen.

Diese Function hört auch nicht auf das Potential eines Punktes von der $n$ten Ordnung zu sein, wenn wir sie noch mit einer Constante multipliciren.

129d. Das Resultat der durch die Gleichung 1a) des vorigen Artikels angedeuteten Operation ist von der Form

1b) $$V_n = Y_n r^{-(n+1)}.$$

Y_n ist eine Function der n Cosinusse $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ der Winkel zwischen den n Axen und dem Vector r und der $\frac{1}{2} n (n-1)$ Cosinusse $\lambda_{12}, \lambda_{13} \ldots$ der Winkel zwischen je zwei Axen. Ziehen wir von dem Mittelpunkt einer Kugel Radien in Richtung der Axen $h_1, h_2 \ldots h_n$ und des Vectors r, so erhalten wir auf der Kugelfläche n Punkte zur Markirung der n Axen und einen Punkt zur Markirung von r. Y_n ist dann durch die relative Lage dieser $n+1$ Punkte gegeneinander bestimmt und gilt für den Punkt, der den Vector r markirt. Aendert sich die Richtung von r, so wandert sein Pol auf der Kugelfläche und Y_n nimmt andere Werte an. Y_n ist demnach eine Function der $\frac{1}{2} n (n+1)$ Abstände der n Pole der Axen und des Pols des Vectors r von einander.

Wir bezeichnen Y_n als *Harmonische Kugelflächenfunction* oder *Flächenfunction* von der Ordnung n.

130a. Ich beweise, dass zu jeder harmonischen Flächenfunction der $n$ten Ordnung ausser der harmonischen Raumfunction vom $-(n+1)$ten Grade noch eine andere vom $n$ten Grade gehört, das heisst, dass nicht bloss $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$, sondern auch $H_n = Y_n r^n$ der Laplaceschen Gleichung genügt.

Zunächst ist

2) $$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1},$$

also

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = (2n+1) r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{\partial V_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = (2n+1) \left\{ (2n-1) x^2 + r^2 \right\} r^{2n-3} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{\partial V_n}{\partial x} + r^{2n+1} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}.$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die Derivirten nach y und z. Es wird also

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = (2n+1)(2n+2) r^{2n-1} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} \left(x \frac{\partial V_n}{\partial x} + y \frac{\partial V_n}{\partial y} + z \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) + r^{2n+1} \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right).$$

Da aber V_n eine homogene Function des $-(n+1)$ten Grades der Coordinaten ist, so ergiebt der Eulersche Satz die Beziehung

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = -(n+1)V_n.$$

Damit heben sich dann die beiden ersten auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Glieder auf, und weil ausserdem $\nabla^2 V_n = 0$ sein sollte, bleibt

3) $$\nabla^2 H_n = 0.$$

H_n genügt also in der Tat der Laplaceschen Gleichung und ist eine harmonische Raumfunction vom $n$ten Grade.

Das eben bewiesene Theorem bildet nur einen speciellen Fall eines allgemeinen Satzes über reciproke Verhältnisse in der Electricitätstheorie, demzufolge die Existenz einer Function $F(x, y, z)$, die der Laplaceschen Gleichung genügt, sofort die einer andern Function

$$\frac{a}{r}F\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2}\right),$$

welche ebenfalls die Laplacesche Gleichung erfüllt, mitbedingt. (Art. 162.)

130b. Die nAxen der harmonischen Flächenfunction Y_n sind durch ihre auf der Kugel gelegenen n Pole bestimmt, jeder der Pole erfordert aber zu seiner Fixirung die Angabe zweier sphärischer Coordinaten, wie Länge und Breite. Daher enthält eine harmonische Flächenfunction der $n$ten Ordnung $2n$ Constanten.

Ihrer Definition zufolge müssen auch die harmonischen Raumfunctionen V_n und H_n je $2n$ willkürliche Constanten besitzen. Sie hören aber nicht auf der Laplaceschen Gleichung zu genügen, wenn man sie mit Constanten multiplicirt, somit enthalten sie in ihrer allgemeinsten Form $2n+1$ willkürliche Constanten.

Nun hat zwar eine homogene ganze Function K dreier Variabeln vom $n$ten Grade im allgemeinsten Fall $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Constanten. Es ist aber leicht zu zeigen, dass trotzdem AH_n, wo A eine Constante ist, die allgemeinste ganze homogene Function vom n Grade ist, welche der Laplaceschen Gleichung genügt. Denn wenn wir die allgemeinste Form K der Operation ∇^2 unterwerfen, so wird $\nabla^2 K$ eine homogene ganze Function vom $n-2$ten Grade und besitzt als solche nur noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten, die einzeln verschwinden müssen, sobald $\nabla^2 K = 0$ sein soll, die allgemeinste Function K behält also nur noch $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)$ oder $2n+1$ willkürliche Constanten, also genau soviele wie AH_n schon besitzt.

Potential einer Kugelschale.

131. Die Raumfunction $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$ vom $-(n+1)$ten Grade genügt der Laplaceschen Gleichung, verschwindet in der Unendlichkeit,

wird aber unendlich im Ursprung des Vectors r. Andererseits genügt $H_n = Y_n r^n$ der Laplaceschen Gleichung, verschwindet in dem Ursprung des Vectors r, wird aber unbestimmt in der Unendlichkeit.

Setzen wir also fest, dass in allen Punkten ausserhalb einer um den Ursprung des Vectors r mit dem Radius a gelegten Kugelschale das Potential $V_n = a^n Y_n r^{-(n+1)}$ und in allen Punkten innerhalb dieser Kugel gleich $V'_n = a^{-(n+1)} Y_n r^n$ sein soll, und bestimmen ferner, dass in allen Punkten auf der Kugel die Flächendichte σ durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n,$$

gegeben sein soll, dann erfüllt das Potential alle Bedingungen, die an dasselbe gestellt werden, denn erstens ist es überall endlich und stetig, ferner verschwindet es in der Unendlichkeit, dann sind seine ersten Derivirten überall endlich, abgesehen von der Kugelfläche selbst, und dort genügen sie der Grenzbedingung

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V'}{\partial \nu'} = -4\pi\sigma.$$

Aus Art. 100a folgt dann weiter, dass die Lösung

1) $$V = a^n Y_n r^{-(n+1)}$$

für Punkte ausserhalb der Kugel, und

2) $$V' = a^{-(n+1)} Y_n r^n$$

für Punkte innerhalb der Kugel die einzig mögliche ist, wenn die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche durch die Bedingung

3) $$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n$$

gegeben ist.

Lässt man die Kugel vom Radius a sich unendlich zusammenziehen, so giebt $V = a^n Y_n r^{-(n+1)}$ das Potential eines singulären Punktes von der $n$ten Ordnung.

Darstellung der harmonischen Kugelfunctionen.

132. Ich leite jetzt die allgemeine Form einer harmonischen Flächenfunction Y_n der $n$ten Ordnung in Termen der Cosinusse der Winkel der Axen gegeneinander und gegen den Vector, oder kürzer, in Termen der Winkel zwischen den $n+1$ auf der Kugelfläche gelegenen Polen ab.

Für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ sind die Flächenfunctionen leicht hinzuschreiben, wenn man ihre Definition beachtet. Es ist nämlich

$$Y_0 = 1,\ Y_1 = \mu_1,\ Y_2 = \tfrac{3}{2}\mu_1\mu_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_{12},$$
$$Y_3 = \tfrac{5}{2}\mu_1\mu_2\mu_3 - \tfrac{1}{2}(\mu_1\lambda_{23} + \mu_2\lambda_{31} + \mu_3\lambda_{12}), \quad \text{u. s. f.}$$

Jedes Glied von Y_n besteht aus Producten von Cosinussen, von denen die mit einem Index markirten μ für die Winkel, welche die Axen gegen den Radiusvector bilden, die mit zwei Indices ausgezeichneten λ für die Winkel der Axen untereinander gelten.

Da jede Differentiation eine neue Axe einführt, so kann das Symbol einer jeden Axe in jedem Gliede einmal und nur einmal unter den Indices der Cosinusse vertreten sein.

Enthält also ein Glied von Y_n s Cosinusse mit doppeltem Index, so müssen sich $n - 2s$ Cosinusse mit einfachem Index in ihm vorfinden.

Ich bezeichne durch

$$\Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}$$

die Summe aller Glieder, in denen s Cosinusse doppelte, also $n - 2s$ Cosinusse einfache Indices haben.

Um ferner auszudrücken, dass ein besonderer Index m nur bei den μ bezüglich nur bei den λ vertreten ist, hänge ich diesen Index dem μ bezüglich dem λ an. Die Gleichung

$$\Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)} = \Sigma \mu_m^{(n-2s)} \lambda^{(s)} + \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda_m^{(s)}$$

drückt also aus, dass die ganze Summe der einzelnen Glieder in zwei Partialsummen zerlegt werden kann, in deren einer der Index m sich in den Richtungscosinussen μ der Axen gegen den Radiusvector r vorfindet, während in der zweiten Partialsumme derselbe Index in den Richtungscosinussen der Axen gegen einander vertreten ist.

Es sei nun für ein bestimmtes n

$$Y_n = A_{n,0} \Sigma \mu^{(n)} + A_{n,1} \Sigma \mu^{(n-2)} \lambda^{(1)} + A_{n,2} \Sigma \mu^{(n-4)} \lambda^{(2)} + \ldots . \\ + A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)} + \ldots ..$$

Verstehen wir unter S eine Summation, die nach s ausgeführt werden soll, während s alle ganzzahligen zwischen 0 und $n/2$, die 0 mit eingeschlossen, gelegenen Werte umfasst, so lässt sich obiger Ausdruck auch schreiben

1′) $$Y_n = S[A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

und man erhält für die harmonische Raumfunction des $-(n+1)$ten Grades

2′a) $$V_n = r^{-(n+1)} S[A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

oder

2′b) $$V_n = S[A_{n,s} r^{2s-2n-1} \Sigma p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

wo wie früher $p = r\mu$ gesetzt ist.

Die Grössen A sind Constanten, deren Werte wir leicht bestimmen können, wenn wir von der Function V_n zu der V_{n+1} übergehen.

Es ist aber nach der Definition der harmonischen Function durch eine $n$fache Differentiation

$$\frac{\partial V_n}{\partial h_m} = -(n+1)\, V_{n+1},$$

also unter Beachtung der in Art. 129b, α) bis γ) gegebenen Beziehungen

$$(n+1)\, V_{n-1} = S\,[A_{n,s}\,(2n+1-2s)\, r^{2s-2n-3}\, \Sigma p_m^{(n-2s+1)}\, \lambda^{(s)} - A_{n,s}\, r^{2s-2n-1}\, \Sigma p^{(n-2s-1)}\, \lambda_m^{(s+1)}],$$

oder, wenn man die Glieder unter dem Zeichen S so ordnet, dass sie immer s Cosinusse mit zwei Indices enthalten,

$$(n+1)\, V_{n+1} = S\,[r^{2s-2n-3}\{A_{n,s}\,(2n+1-2s)\, \Sigma p_m^{(n-2s+1)}\, \lambda^{(s)} - A_{n,s-1}\, \Sigma p^{(n-2s+1)}\, \lambda_m^{(s)}\}].$$

Die Summen $\Sigma p_m^{(n-2s+1)}\, \lambda^{(s)}$ und $\Sigma p^{(n-2s+1)}\, \lambda_m^{(s)}$ unterscheiden sich aber nur dadurch von einander, dass der Index m einmal unter den p, das andere mal unter den λ vertreten ist, und da die Function Y_n nur Glieder enthält, in denen alle Indices zu finden sind, so muss zunächst

a) $$(2n-2s+1)\, A_{n,s} = -A_{n,s-1}$$

sein. Weiter entsteht V_{n+1} aus V_n auch dadurch, dass man in dem Ausdrucke für V_n an Stelle des n die Zahl $n+1$ setzt, demnach haben wir

b) $$(n+1)\, A_{n+1,s} = (2n-2s+1)\, A_{n,s}.$$

Für $s=0$ wird

b_1) $$(n+1)\, A_{n+1,0} = (2n+1)\, A_{n,0},$$

und weil wegen $Y_1 = p_1$ die Constante $A_{1,0} = 1$ ist,

c_1) $$A_{n,0} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Allgemein ist dann nach a)

c) $$A_{n,s} = (-1)^s\, \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!},$$

und damit wird der Ausdruck für die harmonische Flächenfunction

1) $$Y_n = S\left[(-1)^s\, \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!}\, \Sigma \mu^{(n-2s)}\, \lambda^{(s)}\right],$$

und der für die harmonischen Raumfunctionen

$$2) \qquad V_n = r^{-(n+1)} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s!)} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right]$$

$$= S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma r^{2s-2n-1} p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right],$$

$$3) \qquad H_n = r^n S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right]$$

$$= S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma r^{2s} p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right].$$

Die Summe S bezieht sich auf alle Werte des s zwischen 0 und $\frac{1}{2}n$, die 0 mitgenommen, die Summe Σ dagegen auf die Indices der Cosinusse μ und λ der Winkel der Axen gegen den Vector und gegen einander. Die Indices laufen von 1 bis n und müssen alle in jedem Gliede vertreten sein, so aber dass kein Index in demselben Gliede zweimal vorkommen kann. Dadurch ist die Operation Σ vollständig bestimmt, wenn man noch beachtet, dass die Exponenten $(n-2s)$ und (s) keine Potenzirungen anzeigen, sondern festsetzen, dass $n-2s$ Cosinusse der Klasse μ und s Cosinusse der Klasse λ vertreten sein sollen. Da die Existenz jedes Poles in jedem Gliede von Y_n einmal und nur einmal ihren Ausdruck findet und λ und μ Cosinusse sind, so muss Y_n sein Zeichen ändern, wenn man einen Pol durch das Centrum der Kugel nach der entgegengesetzten Seite sich hinbegeben lässt, also wenn man die entsprechende Axe in die der ersten Richtung entgegengesetzte verlegt.

Verwandelt man also die Richtungen einer geraden Anzahl von Axen ins Entgegengesetzte, so bleibt die harmonische Flächenfunction ungeändert, tut man dasselbe mit einer ungeraden Anzahl, so wechselt sie ihr Zeichen.

Indessen hat Sylvester nachgewiesen*), dass wenn die harmonische Function Y_n gegeben ist, die Aufgabe, ihre Axen zu finden, nur eine Lösung zulässt, trotzdem, wie wir eben gesehen haben, die Function Y_n keine Aenderung erleidet, wenn man die Richtungen einer geraden Anzahl ihrer Axen um 180° dreht.

Sätze über harmonische Kugelfunctionen.

133 a. Bei der Ableitung der fundamentalen Sätze aus der Theorie der Kugelfunctionen gehe ich von dem rein physikalischen Problem der Bestimmung der Energie eines electrischen Systems E auf einen singulären Punkt der $n$ten Ordnung aus. Die ganze Deduction wird aber rein mathematisch verlaufen, so dass alle Endresultate unabhängig von der speciellen physikalischen Bedeutung der einzelnen benutzten Grössen bestehen bleiben.

*) Phil. Mag. 1876 Oct.

Nichtsdestoweniger habe ich so und nicht anders verfahren zu müssen geglaubt, weil einerseits auch dem Mathematiker die physikalischen Grössen immer noch geläufiger sein dürften, als andere, die er etwa einführen könnte, und andererseits der Physiker einem rein mathematischen Calcul besser zu folgen im Stande ist, wenn er jeder Einzelgleichung eine physikalische Deutung beizulegen vermag.

Ist zunächst A_0 die Ladung eines singulären Punktes der nullten Ordnung und Ψ das Potential des electrischen Systems E in ihm, so wird die potentielle Energie des Systems auf den singulären Punkt

$$W_0 = A_0 \Psi.$$

Haben wir nun zwei Punkte der nullten Ordnung mit den Ladungen $-A_0$ und $+A_0$, deren erster sich im Anfang der Axe h_1 befindet, während der zweite im Ende derselben liegt, so ist

$$W_1 = -A_0 \Psi + A_0 \left(\Psi + h_1 \frac{d\Psi}{dh_1} + \tfrac{1}{2} h_1^2 \frac{d^2\Psi}{dh_1^2} + \ldots \right);$$

und wenn wir wieder wie früher h_1 unendlich abnehmen und A_0 unendlich wachsen lassen, so dass $A_0 h_1 = A_1$ endlich bleibt, so wird die Energie des Systems E auf einen Punkt der ersten Ordnung

$$W_1 = A_1 \frac{d\Psi}{dh_1}.$$

Allgemein ist die potentielle Energie eines electrischen Systems E auf einen singulären Punkt der $n$ten Ordnung, dessen Moment $A_n/n!$ ist,

a) $$W_n = \frac{A_n}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial h_1 \partial h_2 .. \partial h_n}.$$

133 b. Nun bestehe das electrische System E aus mit den einzelnen bezüglichen Electricitätsmengen dE geladenen Teilen, so dass

$$\Psi = \Sigma \frac{dE}{r}$$

wird. Ebenso seien die Ladungen der einzelnen den singulären Punkt zusammensetzenden Punkte nullter Ordnung dargestellt durch de, das Potential des singulären Punktes wird also

$$V_n = \Sigma \frac{de}{r}.$$

Die Energie der Wirkung des Systems E auf den singulären Punkt ist dann

b) $$W_n = \Sigma \Psi \, de = \Sigma \Sigma \frac{1}{r} dE \, de$$
$$= \Sigma V_n \, dE.$$

Der letzte Ausdruck also $\Sigma V_n \, dE$ giebt auch umgekehrt die Energie der Wirkung des singulären Punktes auf das System E.

Ersetzen wir ferner den singulären Punkt durch eine ihm entsprechende, das System E ausschliessende geladene Kugelfläche vom Radius a (Art. 131), deren Potential auf ausserhalb ihrer Oberfläche gelegene Punkte gleich V_n ist, und deren Flächendichte σ durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n$$

bestimmt ist, so haben wir

c') $$W_n = \Sigma V_n \, dE = \Sigma\Sigma \frac{1}{r} dE \sigma \, ds$$
$$= \Sigma \Psi \sigma \, ds,$$

wo ds ein Flächenelement der Kugel bezeichnet. Die Summation in dem dritten Ausdruck erstreckt sich über alle Elemente der Kugel, ersetzen wir sie also durch eine Integration, so wird

c) $$W_n = \int\int \Psi \sigma \, ds = \frac{2n+1}{4\pi a^2} \int\int \Psi \, Y_n \, ds.$$

134 a. Beachtet man, dass die bisher für die Energie abgeleiteten Ausdrücke alle eine und dieselbe Grösse darstellen, so erhält man aus a) und c) unter Berücksichtigung, dass in unserm Falle $A_n = a^n$ zu setzen ist, die Beziehung

1) $$\int\int \Psi \, Y_n \, ds = \frac{4\pi}{n!\,(2n+1)} \, a^{n+2} \frac{\partial^n \Psi}{\partial h_1 \, \partial h_2 \ldots \partial h_n}.$$

Das Glied auf der linken Seite dieser Gleichung bezieht sich auf eine Operation über eine Kugelfläche, das auf der rechten Seite auf eine Operation im Centrum dieser Kugelfläche, und die Gleichung spricht den Satz aus, dass man die Integration der Grösse ΨY_n über eine Kugelfläche vom Radius a durch eine $n$fache Differentiation von Ψ nach den n Axen der harmonischen Flächenfunction Y_n ersetzen kann, wenn man das Resultat auf den Mittelpunkt der Kugel reducirt.

Die Grösse Ψ ist ein Potential, nehmen wir also an, dass Ψ eine harmonische Raumfunction vom $m$ten Grade, also

$$\Psi = a^{-m} Y_m \, r^m$$

ist, so wird auf der Kugeloberfläche, weil dort $r = a$ ist, $\Psi = Y_m$. Demnach

2) $$\int\int Y_m \, Y_n \, ds = \frac{4\pi}{n!\,(2n+1)} \, a^{n-m+2} \frac{\partial^n (Y_m \, r^m)}{\partial h_1 \, \partial h_2 \ldots \partial h_n}.$$

Ist zunächst $n < m$, so ist das Resultat der $n$fachen Differentiation eine homogene Function von x, y, z vom $m-n$ten Grad, und da die Differen-

tiation auf das Centrum der Kugel bezogen werden soll, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null. Wenn ferner $n > m$ ist, so ergiebt die Differentiation an sich schon Null. Demnach wird

$$3) \qquad \iint Y_m Y_n \, ds = 0, \; m \gtrless n.$$

Für $m = n$ ist das Endresultat der $n$fachen Differentiation eine Constante, deren Wert wir aus der in Art. 132 gegebenen Darstellung der harmonischen Kugelfunctionen zu eruiren vermögen.

Zunächst ist nach der Gleichung unter 3) des angeführten Art.

$$Y_m r^m = S\left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s}\, m!\, (m-s)!} \Sigma\, r^{2s} p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}\right].$$

Differenzirt man ein Glied von $Y_m r^m$ etwa $r^{2s} p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}$ nach den n Axen $h_1, h_2, \ldots h_n$, so ist in Bezug auf die s ersten Axen $p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}$ als Constante zu betrachten. Führt man also die s ersten Differentiationen, die sich nur auf r^{2s} erstrecken, aus, so wird nach Art. 129 b Gleichung α) bei jeder Differentiation ein neues μ_n oder p_n/r eingeführt. Nach einer $s$maligen Differentiation sind also s der p_n neu eingetreten und zugleich hat sich der Factor

$$2s\,(2s-2)\ldots 2 = 2^s s!$$

abgeschieden. Setzt man die Operation fort, indem man nach den $s$nächsten Axen differenzirt, so gehen die neueingetretenen p_n in λ_{nn} über, ein Zahlenfactor kommt aber nicht zum Vorschein. Endlich werden durch die $n-2s$ letzten Differentiationen nach den $n-2s$ letzten Axen die p_m in λ_{mn} verwandelt, so dass das Glied $r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_m^s$ nach der $n$fachen Differentiation übergeht in $2^s s!\, \lambda_{nn}^{(s)} \lambda_{mm}^{(s)} \lambda_{mn}^{(m-2s)}$.

Unterwirft man alle Glieder von $Y_m r^m$ derselben Operation, so wird schliesslich, weil $m = n$ sein sollte.

$$4) \qquad \iint Y_m Y_n \, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)\,(n!)^2} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!\, s!}{2^{n-2s}(n-s)!} \Sigma\,(\lambda_{mm}^{(s)} \lambda_{nn}^{(s)} \lambda_{mn}^{(n-2s)})\right].$$

Dieser Ausdruck gilt ganz allgemein, wie auch die Axenrichtungen in Y_m sich zu denen in Y_n verhalten, wenn nur beide Flächenfunctionen eine gleiche Anzahl von Axen haben. Deshalb sind auch die beiden Flächenfunctionen und alle auf sie Bezug habenden Grössen noch durch die Indices m, n von einander unterschieden, obgleich die Zahlenwerte m und n einander gleich sein sollten.

134 b. Ich setze speciell voraus, dass die Axen von Y_m alle zu einer Axe zusammenfallen. Y_m geht dann in eine *Zonale* harmonische Function P_m von der $m$ten Ordnung über. Alle Cosinusse der Form λ_{nm} werden dann zu Cosinussen μ_n, indem wir unter μ_n den Cosinus des Winkels

zwischen der $m$fachen Axe von $Y_m = P_m$ und einer der n Axen von Y_n verstehen. Die Cosinusse von der Form λ_{mm} werden gleich 1, so dass $\Sigma \lambda_{mm}^{(s)}$ gleich ist der Zahl aller Combinationen von s Symbolen, deren jedes zwei verschiedene aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, . . . n entnommene Indices hat.

Demnach wird

$$\Sigma \lambda_{mm}^{(s)} = \frac{n!}{2^s s! (n-2s)!}.$$

Ferner ist die Anzahl aller Permutationen von $n-2s$ Indices der Axen von P_m gleich $(n-2s)!$, somit

$$\Sigma \lambda_{mn}^{(n-2s)} = (n-2s)! \, \mu^{(n-2s)}.$$

Dadurch geht aber die Gleichung 3) des vorigen Artikels über in

$$5a) \quad \iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1) n!} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}(n-s)!} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right],$$

oder nach Gleichung 1) in Art. 132

$$5b) \quad \iint Y_n P_m = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)} Y_{n(m)},$$

wenn $Y_{n(m)}$ den Wert der harmonischen Flächenfunction Y_n im Pole der zonalen harmonischen Function P_m, also im Pole der zusammenfallenden Axen von P_m angiebt.

Weniger umständlich können wir zu demselben Resultat auf dem folgenden Wege gelangen.

Aus der Gleichung 1) in Art. 134 folgt, dass für $m = n$ und $Y_m = P_m$ auch

$$\iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1) n!} \frac{\partial^n (Y_n r^n)}{\partial z^n}$$

ist. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass die zAxe mit der Axe der zonalen harmonischen Function P_m zusammenfällt und denken uns $Y_n r_n$ als homogene Function des $n$ten Grades nach x, y, z entwickelt, so ist der Wert von $Y_n r^n$ im Pol von P_m wo $x = y = 0$ ist gleich Cz^n. Dort ist aber $z = r$, also bezeichnet C den Wert von Y_n im Pol der Function P_m.

Andererseits ist $d^n (Cz^n)/dz^n = n! \, C$, somit

$$\iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} C = \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_{n(m)}.$$

Entwickelung nach zonalen harmonischen Functionen.

135. Das durch die vorstehende Gleichung ausgedrückte Resultat ist eines der wichtigsten, zu der die Theorie der Kugelfunctionen geführt hat, weil es lehrt, wie man eine Reihe von harmonischen Kugelfunctionen zu

bilden hat, welche den Wert einer Grösse wiedergiebt, die in den Punkten einer Kugelfläche endliche und sich stetig aneinanderschliessende, sonst aber beliebig vorgeschriebene Werte besitzt.

Ist nämlich F der Wert dieser Grösse in einem Punkt Q der Kugeloberfläche, ds ein Element um Q und P_n der Wert, den eine zonale harmonische Function, deren Pol in P liegt, in Q besitzt, so kann das Flächenintegral $\iint F P_n \, ds$, weil der Wert des P_n von der Lage des Punktes P abhängt, zunächst als Function der Lage dieses Punktes betrachtet werden.

Hier ist also der Pol P fixirt, und die ihm entsprechende zonale harmonische Kugelfunction für jeden Punkt der Kugel genommen. Da aber der Wert einer harmonischen zonalen Function in einem Punkte Q, wenn ihr Pol in P liegt, ebenso gross ist als der einer andern zonalen harmonischen Function derselben Ordnung im Punkte P, wenn ihr Pol sich in Q befindet, so kann man auch umgekehrt die Werte der zonalen harmonischen Function auf einen festen Punkt P beziehen und ihren Pol auf der Kugel wandern lassen, also für jedes Element ds der Kugelfläche eine zonale harmonische Function construiren, deren Pol in Q liegt und die Fds zum Coefficienten hat.

In dieser Weise erhält man ein System übereinander gelagerter Functionen, deren Werte alle auf einen und denselben Punkt der Kugelfläche bezogen sind, und deren Pole sich in allen den Punkten der Kugel befinden, wo F einen von Null verschiedenen Wert hat. Jede dieser Functionen besteht aus einem Factor Fds und einer harmonischen zonalen Flächenfunction von der Ordnung n, ist also ein Vielfaches der letztern, und daraus folgt, dass auch die Summe dieser übereinander gelagerten Functionen ein Vielfaches einer harmonischen Flächenfunction (nicht notwendig einer zonalen) sein muss.

Das Flächenintegral $\iint F P_n \, ds$ als Function der Lage des Punkts P betrachtet, ist also ein Vielfaches einer harmonischen Flächenfunction Y_n.

Wenn demnach F überhaupt nach Kugelfunctionen entwickelbar ist, so muss $\iint F P_n ds$ der in dieser Entwickelung auftretenden harmonischen Flächenfunction der $n$ten Ordnung proportional sein, so dass sie statt dieser substituirt werden kann. Der Proportionalitätsfactor lässt sich leicht mit Hilfe der Sätze unter 3) und 5b) bestimmen.

Es sei die gegebene Entwickelung

1) $$F = A_0 Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \ldots + A_n Y_n + \ldots,$$

wo F für jeden Punkt der Kugel einen bestimmten Wert hat. Multiplicirt man mit $P_n ds$ und integrirt über die Kugelfläche, so ist nach 3) und 5b)

$$\iint Y_k P_n \, ds = 0 \quad k \gtrless n,$$

$$\iint Y_n P_n \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_n.$$

also

$$\iint FP_n \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} A_n Y_n,$$

und damit wird

$$2) \quad F = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\iiint FP_0 \, ds + 3\iint FP_1 \, ds + \ldots (2n+1)\iint FP_n \, ds + \ldots .\right\}.$$

Lässt sich also eine Function F überhaupt nach Kugelfunctionen entwickeln, so ist die unter 2) gegebene Entwickelung die einzig mögliche.

Conjugirte harmonische Functionen.

136. Wenn zwei harmonische Functionen verschiedenen Ordnungen angehören, so ist, wie wir gesehen haben, das Flächenintegral ihres Products über eine Kugelfläche gleich Null. Haben die beiden Functionen dieselbe Ordnungszahl, so ist jenes Integral im allgemeinen von Null verschieden, und es hat den auf der rechten Seite der Gleichung 4) in Art. 134a angegebenen Wert.

Die beiden Functionen können aber in einem derartigen Verhältnis zu einander stehen, dass jedes Glied des Ausdrucks auf der rechten Seite der citirten Gleichung für sich verschwindet, dann hat das Flächenintegral den Wert Null auch für gleiche Ordnungszahlen. Die beiden harmonischen Functionen sind in diesem Falle einander *Conjugirt*.

Aus der Gleichung 5b) in Art. 134b folgt, dass eine harmonische Flächenfunction zu einer zonalen harmonischen Function nur dann conjugirt sein kann, wenn ihr Wert im Pole der zonalen Function gleich Null ist.

Im allgemeinen hat eine harmonische Function der $n$ten Ordnung abgesehen von einen constanten Factor $2n$ willkürliche Constanten, durch deren geeignete Bestimmung man sie anderen harmonischen Functionen derselben Ordnung conjugirt machen kann. Lassen wir sie nur einer Function conjugirt sein, so haben ihre $2n$ Constanten auch nur einer Bedingung zu genügen.

Soll weiter eine dritte harmonische Function zweien andern Functionen derselben Ordnung conjugirt werden, so haben ihre $2n$ Constanten zwei Bedingungen zu befriedigen.

Fahren wir so fort immer neue Kugelfunctionen einer gegebenen conjugirt zu machen, so werden die $2n$ Constanten der $(2n+1)$ten harmonischen Function $2n$ Bedingungen zu erfüllen haben. Die Function wird demgemäss gar keine willkürlichen Constanten mehr enthalten, sondern vollständig bestimmt sein.

Nehmen wir nun an, dass in einem gegebenen System von $2n+1$ harmonischen Functionen $Y_n^0, Y_n^1, \ldots, Y_n^s, \ldots$ jede allen andern conjugirt sein soll, so enthält die Reihe

$$A_0 Y_n^0 + A_1 Y_n^1 + \ldots + A_s Y_n^s + \ldots + A_{2n} Y_n^{2n}$$

$2n+1$ Constanten, und da jede harmonische Function AY_n ebenfalls $2n+1$ Constanten hat, so können wir

1) $$AY_n = A_0 Y_n^0 + A_1 Y_n^1 + \ldots + A_\sigma Y_n^\sigma + \ldots + A_{2n} Y_n^{2n}$$

setzen. Die Constanten $A_0, A_1, \ldots A_\sigma, \ldots A_{2n}$ lassen sich stets eindeutig so bestimmen, dass die Gleichung identisch befriedigt wird. Multipliciren wir nämlich mit $Y_n^\sigma ds$ und integriren über die ganze Kugel, so fallen alle Glieder $A_\tau \iint Y_n^\tau Y_n^\sigma ds$, wo $\sigma \gtrless \tau$ ist, fort, und es bleibt

2) $$A\iint Y_n Y_n^\sigma ds = A_\sigma \iint (Y_n^\sigma)^2 ds,$$

woraus sich der Wert des A_σ bestimmt.

Ist also ein System von $2n+1$ conjugirten harmonischen Functionen gegeben, so lässt sich jede andere harmonische Function derselben Ordnung durch dieses eindeutig ausdrücken. Gleichzeitig ersieht man, dass keine andere Function mehr den Functionen des gegebenen Systems conjugirt sein kann, denn da jede andere Function AY_n derselben Ordnung sich durch

$$AY_n = A_0 Y_n^0 + \ldots + A_\sigma Y_n^\sigma + \ldots.$$

ausdrücken lassen muss, und

$$A_\sigma \iint (Y^\sigma)^2 ds = A \iint Y_n Y_n^\sigma ds$$

ist, so kann $\iint Y_n Y_n^\sigma ds$ nicht, wie es nötig wäre, verschwinden, wenn nicht A_σ verschwindet, das heisst, wenn nicht Y_n schon unter den $2n+1$ conjugirten Functionen sich befindet.

Symmetrisches System harmonischer Functionen.

137. Ein System von $2n+1$ harmonischen zu einander conjugirten Functionen der $n$ten Ordnung enthält $2n(2n+1)$ Constanten, die mit einander durch $n(2n+1)$ Bedingungen verbunden sind. Ein solches System hat also noch $n(2n+1)$ willkürliche Constanten und kann deshalb noch mannigfachen Bedingungen unterworfen werden, wenn man es zur Darstellung anderer harmonischer Functionen derselben Ordnung verwenden will.

Wählt man, wie es Thomson und Tait tun, Systeme harmonischer Functionen so, dass von den nPolen jeder Function j in dem Pole der xAxe, k in dem der yAxe und $l = n - j - k$ in dem Pol der zAxe zusammenfallen, so kann man durch die $n+1$ Verteilungen der Pole, für welche $l = 0$, und durch die nVerteilungen, für welche $l = 1$ gegeben ist, alle andern ausdrücken. Dieses System ist aber nicht das allgemein acceptirte, viel-

mehr haben alle Mathematiker (auch Thomson und Tait) ein System harmonischer Functionen gewählt, wo in jeder $n - \sigma$ Pole in einem Punkt zusammenfallen, den wir als *Positiven Pol* der Kugel bezeichnen, und die übrigen σ Pole in gleichen Abständen auf dem zum positiven Pol der Kugel gehörigen Aequator verteilt sind, und zwar auf dem ganzen Aequator, wenn σ eine ungerade, auf einer Hälfte des Aequators, wenn σ eine gerade Zahl angiebt. Das ist das *Symmetrische System* harmonischer Functionen.

Wir haben für diesen Fall $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-\sigma} = \cos\vartheta$, und $\mu_{n-\sigma+1}$, $\mu_{n-\sigma+2} \ldots \mu_n$ von der Form $\sin\vartheta \cos(\varphi - \beta)$, wenn wir unter β das Azimut eines der auf dem Aequator verteilten Pole verstehen.

Ferner ist in diesem Falle λ_{pq} gleich 1, wenn p, q beide kleiner als $n - \sigma$ sind, gleich 0, wenn einer dieser Indices kleiner, der andere grösser als $n - \sigma$ ist, und gleich $\cos(\pi r/\sigma)$ wo r eine ganze unterhalb σ liegende Zahl angiebt, wenn p, q beide grösser als $n - \sigma$ sind.

Zonale Functionen.

138. Fallen alle Pole in den positiven Pol der Kugel, so wird $\sigma = 0$ und die harmonische Function geht in eine zonale Function P_n über.

Die zonalen harmonischen Functionen sind von ganz besonderer Bedeutung, und ich werde sie in der Folge unter den andern harmonischen Functionen durch die Bezeichnung P_n *) charakterisiren.

Die Entwickelung für P_n können wir entweder der in Art. 132 gegebenen allgemeinen Entwickelung für harmonische Functionen entnehmen oder aus der Beziehung

$$1a) \qquad P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ableiten, wo die z Axe in die n fache Axe der zonalen Function verlegt ist. Führt man die Differentiation aus, so ergiebt sich**)

$$P_n = \frac{1.3.5.7 \ldots (2n-1)}{1.2.3 \ldots n}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right]$$

$$1b) \qquad = \sum_p \left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p!\,(n-p)!\,(n-2p)!}\mu^{n-2p}\right].$$

p durchläuft alle ganzen Zahlen, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}n$ liegen, die 0 mit einbegriffen.

*) Heine hat die Bezeichnung $P^{(n)}$ gewählt.

**) Vergl. Thomson und Tait, *Theoretische Physik* Teil II. Seite 330 der ersten Ausgabe.

Für einige Untersuchungen ist es von Vorteil, P_n nicht blos durch $\mu = \cos\vartheta$, sondern auch durch $\nu = \sin\vartheta$ auszudrücken. Man erhält so

$$P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2.2}\mu^{n-2}\nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\mu^{n-4}\nu^4 - \ldots.$$

1c)
$$= \sum_p \left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p}(p!)^2(n-2p)!}\mu^{n-2p}\nu^{2p} \right].$$

Die Grösse P_n ist, wie in mathematischen Werken über Kugelfunctionen nachgewiesen wird, der Coefficient von h^n in der Entwickelung von $(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von h.

Nach früheren Sätzen ist

2)
$$\iint P_m P_n \, ds = 0, \quad m \gtrless n$$

und

$$\iint P_n^2 \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} P_{n(n)}.$$

Im Pol von P_n ist aber $\mu = 1$, $\nu = 0$, also nach 1c) $P_{n(n)} = 1$ und

3)
$$\iint P_n^2 \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}.$$

Andererseits ist $ds = a^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = -a^2 \, d\mu \, d\varphi$, somit

$$\int\int P_n^2 \, ds = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} a^2 P_n^2 \, d\mu \, d\varphi = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} P_n^2 \, d\mu.$$

Aus der Gleichung 3) folgt dann

4)
$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 \, d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

139. Die zonale harmonische Function P_n lediglich als Function des μ ohne Rücksicht auf ihre Beziehung zur Kugelfläche betrachtet, kann auch als *Legendrescher Coefficient* bezeichnet werden.

Fasst man aber die Function gerade in ihrer Beziehung zur Kugelfläche auf, sieht sie also als Function der sphärischen Coordinaten ihres Pols und des Punktes, für welchen sie gelten soll, an, so nennt man P_n den *Laplaceschen Coefficienten*, oder mit Thomson und Tait die *Zweiaxige harmonische Function*.

Fixirt man die Punkte der Kugelfläche durch die Winkel ϑ und φ, und bezeichnet die Coordinaten des Poles der zonalen harmonischen Function

durch ϑ' und φ', so ist der Wert von P_n in einem Punkte der Kugel, welcher die Coordinaten ϑ, φ hat, eine Function der vier Winkel ϑ, φ, ϑ', φ'. Da aber P_n eine Function von μ, dem Cosinus des Bogens zwischen (ϑ, φ) und (ϑ', φ') ist, so ändert es seinen Wert nicht, wenn man ϑ mit ϑ', φ mit φ' vertauscht, ein Satz, von dem ich schon Art. 135 Gebrauch gemacht habe.

Tesserale und Sectorielle Functionen.

140a. Die zonale harmonische Function gehört zu dem System harmonischer Functionen, das ich am Ende des Art. 137 charakterisirt habe, wo also $n - \sigma$ Pole zum positiven Pol der Kugel zusammenfallen, und σ Pole gleichmässig auf dem ganzen Aequator oder auf seiner Hälfte, je nachdem σ ungerade oder gerade ist, verteilt sind.

Um noch die andern harmonischen Functionen dieses Systems zu eruiren, haben wir Differentiationen nach σ Axen auszuführen, die alle in der Ebene des Aequators liegen und miteinander Winkel von der Grösse π/σ bilden.

Ich verlege die Ebene der Coordinaten x, y in den Aequator der Kugel, richte die z Axe so, dass ihr Pol in den positiven Pol der Kugel fällt und führe mit Thomson und Tait*) imaginäre Coordinaten ein, indem ich setze

a) $$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy.$$

Richten wir die yAxe nach einer der Functionsaxen, so wird zufolge der in Art. 129b für die Differentiation nach Axen gegebenen Definition

b'$_1$) $$\frac{\partial^\sigma}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_\sigma} = i\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} - \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right) = D^{(\sigma)} s.$$

Lassen wir aber die y Axe in die Mitte zwischen zwei Axen fallen, so erhalten wir

c'$_1$) $$\frac{\partial^\sigma}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_\sigma} = \left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} + \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right) = D^{(\sigma)} c.$$

Beide Operationen, sowohl $D^{(\sigma)}s$ als $D^{(\sigma)}c$, führen zu reellen Resultaten und sind nur Abkürzungen für die Operationen

b'$_2$) $$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)} s = \sigma \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial x^{\sigma-1}} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3} \frac{\partial^{\sigma-3}}{\partial x^{\sigma-3}} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \cdots$$

c'$_2$) $$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)} c = \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} \frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots\cdots$$

*) *Theoretische Physik*, Teil I. S. 163.

Entsprechend setze ich noch

d') $$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(D^{(\sigma)}s\right) = D_n^{(\sigma)}s,$$

e') $$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(D^{(\sigma)}c\right) = D_n^{(\sigma)}c.$$

$D_n^{(\sigma)}s$ und $D_n^{(\sigma)}c$ bezeichnen Operationen, bei denen Differentiationen nach n Axen auszuführen sind, von denen $n-\sigma$ mit der z Axe zusammenfallen und σ in der Ebene der xy sich befinden und miteinander Winkel gleich π/σ bilden. Die genannten Symbole stellen also die ganze Operation, die wir vorzunehmen haben, dar, und zwar $D_n^{(\sigma)}s$, wenn die y Axe mit einer der σ Axen der Function zusammenfällt, $D_n^{(\sigma)}c$, wenn die y Axe mitten zwischen zwei der σ Axen zu liegen kommt.

Ich definire jetzt *Tesserale harmonische Functionen* von der Ordnung n und dem Typus σ durch die Gleichungen

1') $$Y_n^{(\sigma)}s = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D_n^{(\sigma)}s\left(\frac{1}{r}\right),$$

2') $$Y_n^{(\sigma)}c = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D_n^{(\sigma)}c\left(\frac{1}{r}\right).$$

Wir haben darnach zwei Arten solcher Functionen. Setzen wir aber

f) $$\mu = \cos\vartheta,\ \nu = \sin\vartheta,\ \rho^2 = x^2 + y^2,$$

g) $$z = \mu r,\ \rho = \nu r,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

so wird

b_1) $$D^{(\sigma)}s\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\, i\,(\eta^\sigma - \xi^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

c_1) $$D^{(\sigma)}c\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\quad (\xi^\sigma + \eta^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

also weil

$$\frac{i}{2}(\eta^\sigma - \xi^\sigma) = \rho^\sigma \sin\sigma\varphi,\quad \frac{1}{2}(\xi^\sigma + \eta^\sigma) = \rho^\sigma\cos\sigma\varphi \text{ ist,}$$

b_2) $$D^{(\sigma)}s\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\,\sigma!}\, 2\sin\sigma\varphi\,\frac{\rho^\sigma}{r^{2\sigma+1}},$$

c_2) $$D^{(\sigma)}c\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\,\sigma!}\, 2\cos\sigma\varphi\,\frac{\rho^\sigma}{r^{2\sigma+1}}.$$

Wir haben diese Ausdrücke noch nach z zu differenziren. Dabei ist die einzige Variabele $1/r^{2\sigma+1}$, und man erhält nach bekannten Regeln

$$h_1) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!\,2^\sigma\sigma!}{2^n n!\,(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}z^{n-\sigma-2}r^2 + \ldots\right],$$

oder auch, weil nach den Gleichungen unter g) $r^2 = z^2 + \rho^2$ ist

$$h_2) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}z^{n-\sigma-2}\rho^2 + \ldots\right].$$

Beachtet man die Beziehungen $z = \mu r$, $\rho = \nu r$ und setzt

$$3) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-\sigma-2} + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4} - \ldots\right],$$

$$4) \quad \vartheta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\mu^{n-\sigma-2}\nu^2 + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4.8(\sigma+1)(\sigma+2)}\mu^{n-\sigma-4}\nu^4 - \ldots\right],$$

so wird also

$$h_3) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!\,2^\sigma\sigma!\,\rho^{-\sigma}}{2^n n!\,(2\sigma)!\,r^{n+1}}\Theta_n^{(\sigma)}$$

$$h_4) \quad = (-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!\,\rho^{-\sigma}}{(2\sigma)!\,r^{n+1}}\vartheta_n^{(\sigma)}$$

und

$$5) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \frac{2^{n-\sigma}n!\,(n+\sigma)!}{(2n)!\,\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)},$$

so dass sich die Functionen Θ und ϑ nur durch eine multiplicirende Constante von einander unterscheiden.

Nach den unter 1') und 2') gegebenen Definitionen haben wir also für die beiden tesseralen harmonischen Functionen von der Ordnung n und dem Typus σ

$$1a) \quad Y_n^{s(\sigma)} = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi$$

$$1b) \quad = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\,\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi$$

2a) $$Y_n^{(\sigma)}c = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}\, n!\, n!}\, \Theta_n^{(\sigma)} 2\cos\sigma\varphi$$

2b) $$= \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}\, n!\, \sigma!}\, \vartheta_n^{(\sigma)} 2\cos\sigma\varphi.$$

Für $\sigma = 0$ ist $\sin\sigma\varphi = 0$, $\cos\sigma\varphi = 1$, somit

$$Y_n^{(0)}c = \frac{(2n)!}{2^n n!\, n!}\, 2\Theta_n^{(0)}.$$

Es ist aber

$$\Theta_n^{(0)} = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots.$$

$$= \frac{2^n n!\, n!}{(2n)!}\, P_n,$$

somit

1_1) $$Y_n^{(0)}s = 0,$$

2_1) $$Y_n^{(0)}c = 2P_n.$$

Für jeden andern Wert der σ von 1 bis n, die Grenzen mit einbegriffen, existiren zwei tesserale harmonische Functionen. Rechnet man also die zonale Function P_n als speciellen Fall einer tesseralen hinzu, so giebt es, wie es sein muss, $2n+1$ tesserale harmonische Functionen von der Ordnung n, die sich von einander durch ihre typische Zahl σ unterscheiden, welche festsetzt, wie viele Pole auf dem ganzen oder auf dem halben Aequator gleichmässig verteilt sein sollen.

140 b. Die Entwickelungen für die tesseralen harmonischen Functionen sind aus der allgemeinen Definition der harmonischen Functionen als Differentialquotienten des reciproken Radiusvector nach einer gewissen Anzahl von Axen dividirt durch $n!$ geflossen. Sie bestehen aus vier Componenten, einem Sinus oder Cosinus von $\sigma\varphi$, einer Potenz σ von ν, einer Function von μ oder von μ und ν und endlich einem numerischen Factor.

Für das Product der zweiten und dritten Componente hat man drei verschiedene Symbole eingeführt, die sich von einander nur durch Zahlen-Factoren unterscheiden.

Ich habe in diesem Buche für jenes Product von ν^σ in die nach absteigenden Potenzen von μ (beginnend mit $\mu^{n-\sigma}$) verlaufende Reihe dasselbe Zeichen $\Theta_n^{(\sigma)}$ verwendet, welches Thomson und Tait in ihrem oft citirten Werke benutzt haben.

Heine hat in seinem Handbuch der Kugelfunctionen (§ 47) eine Function $P_\sigma^{(n)}$ eingeführt, die er „eine zugeordnete Function der ersten Art" nennt (von Todhunter in seinem am Eingang dieses Capitels angeführten

Buche mit *Associated Function of the First Kind* übersetzt), und die zu unserm $\Theta_n^{(\sigma)}$ in der Beziehung

$$\alpha) \qquad \Theta_n^{(\sigma)} = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} P_\sigma^{(n)}$$

steht.

Die Reihe der absteigenden Potenzen von μ selbst bezeichnet Heine durch $\mathfrak{P}_\sigma^{(n)}$ und Todhunter durch $\omega(\sigma, n)$.

Man kann übrigens diese Reihe auch durch die folgenden Formeln ausdrücken.*)

$$\beta) \qquad \mathfrak{P}_\sigma^{(n)} = \omega(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!} \frac{\partial^{n+\sigma}}{\partial \mu^{n+\sigma}} (\mu^2 - 1)^n$$

oder da

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} (\mu^2 - 1)^n = P_n$$

ist, auch durch

$$\gamma) \qquad \mathfrak{P}_\sigma^{(n)} = \omega(\sigma, n) = \frac{2^n (n-\sigma)!\, n!}{(2n)!} \frac{\partial^\sigma}{\partial \mu^\sigma} P_n.$$

Der letztere Ausdruck, in welchem $\mathfrak{P}_\sigma^{(n)}$ durch Differentiation der zonalen harmonischen Function P_n erhalten wird, scheint Ferrers zur Einführung seines Zeichens $T_n^{(\sigma)}$ bewogen zu haben, welches durch

$$\delta) \qquad T_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial \mu^\sigma} P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n-\sigma)!\, n!} \Theta_n^{(\sigma)}$$

definirt ist.

Endlich habe ich noch das Symbol $\vartheta_n^{(\sigma)}$ benutzt, um dasselbe Product durch eine nach absteigenden Potenzen von μ und aufsteigenden Potenzen von ν verlaufende Reihe auszudrücken.

140 c. Die Namen „zonal" und „tesseral", die wir den Kugelfunctionen des eben behandelten Systems beigelegt haben, gewinnen eine geometrische Bedeutung, wenn wir mit Thomson und Tait die harmonischen Functionen nach den sphärischen Curven klassificiren, auf denen sie Null werden.

Die zonale harmonische Function ist, wie wir gesehen haben, eine Function des n Grades des Cosinus der Poldistanz des Punktes, für den sie gelten soll, als solche muss sie also für n Werte dieses Cosinus, die alle zwischen $+1$ und -1 liegen,**) verschwinden. Die Curven, in deren Punkten die zonale Function auf der Kugel gleich Null ist, sind also Breitenkreise, deren Pol mit dem Pol der Function zusammenfällt. Zwei benachbarte

*) Heine, *Kugelfunctionen*, erste Ausg. 1861 pag. 117, zweite Ausg. 1878 pag. 152 ff.

**) Heine l. c. § 7.

Breitenkreise schliessen eine Zone ein, in der die Function nur positive oder nur negative von Null verschiedene Werte hat; innerhalb des dem Pol nächsten Breitenkreises sind nur positive Werte vertreten. Die Werte der Function sind also auf Zonen verteilt, in denen sie abwechselnd positive und negative Beträge besitzen.

Die zonale Function eignet sich deshalb zur Darstellung von Functionen, die in gewissen Breitenkreisen einer Kugel oder auf gewissen konischen Flächen im Raume verschwinden.

Die andern harmonischen Functionen des behandelten Systems treten zu Paaren auf, in denen die eine Function den $\cos\sigma\varphi$ die andere den $\sin\sigma\varphi$ zum Factor hat. Diese Functionen verschwinden also auf σ Meridianen, und, da sie nach μ vom Grade $n-\sigma$ sind, auch auf $n-\sigma$ Breitenkreisen. Die ganze Kugelfläche zerfällt für sie demgemäss in $2\sigma(n-\sigma-1)$ sphärische Vierseite und 4σ an den Polen gelegene sphärische Dreiecke. Innerhalb dieser $2\sigma(n-\sigma+1)$ Felder haben sie von Null verschiedene Werte.

Wir haben sie deshalb als tesserale (oder quadrilaterale) Functionen bezeichnet, weil sie namentlich bei Untersuchungen, die sich auf zwischen Parallel- und Meridiankreisen befindliche Vierseite (im Grenzfall Dreiseite) beziehen, ihre Anwendung finden müssen.

Die tesseralen Functionen, für welche $\sigma = n$ ist, im ganzen also zwei zu einem Paare vereinigt, verschwinden auf n Meridianen, also auf gar keinen Breitenkreisen. Wir scheiden deshalb dieses letzte Paar von den andern tesseralen aus, indem wir den in ihm vertretenen Functionen die Bezeichnung *Sectorielle Flächenfunctionen* beilegen, weil die von Null verschiedenen Werte auf Sectoren, welche von Meridianen begrenzt werden, verteilt sind.

141. Wir haben nun noch, ähnlich wie es für zonale harmonische Functionen schon geschehen ist, auch für tesserale Functionen das Flächenintegral ihres Quadrats zu bestimmen.

Dazu verfahren wir nach ganz derselben Methode wie in Art. 134, die ja auch durch den allgemeinen Satz über das Flächenintegral zweier harmonischer Functionen vorgeschrieben ist.

Wir verwandeln also die Flächenfunction $Y_n^{(\sigma)}$ durch Multiplication mit der positiven Potenz r^n in eine harmonische Raumfunction, differenziren sie dann nach ihren n Axen, setzen $x = y = z = 0$ und multipliciren das Schlussresultat mit $4\pi a^2/n!\,(2n+1)$.

Nach der adoptirten Bezeichnungsweise ist also

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{n!\,(2n+1)}\, D_n^{(\sigma)}\,(r^n\, Y_n^{(\sigma)}).$$

Es ist aber nach Art. 140a; 1a), 4), a), g) als Function von z, ξ, η

$$r^n\, \underset{n}{Y_s^{(\sigma)}} = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}\, n!\, \sigma!}\, i\,(\eta^\sigma - \xi^\sigma)\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\, z^{n-\sigma-2}\,\xi\eta + \ldots\right],$$

und deshalb müssen nach der $n-\sigma$ fachen Differentiation nach z alle Glieder bis auf das erste fortfallen. Durch die Differentiation dieses ersten wird dann $(n-\sigma)!$ als Factor eingeführt. Die weitere Differentiation nach ξ und η erstreckt sich auch nur auf das erste Glied und führt den Factor $\sigma!$ ein so dass man schliesslich erhält

$$6) \qquad \iint \left(Ys_n^{(\sigma)} \right)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{(2n+1)} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}$$

$$= [n, \sigma].$$

Diese Gleichung gilt für $\sigma = 1, 2, \ldots n$, für $\sigma = 0$ aber giebt es keine Function Ys. Ganz dasselbe Resultat erhält man auch für $Yc_n^{(\sigma)}$, nämlich

$$7) \qquad \iint \left(Yc_n^{(\sigma)} \right)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}.$$

Diese Gleichung gilt aber auch für $\sigma = 0$ und ergiebt

$$7_1) \qquad \iint \left(Yc_n^{(\sigma)} \right)^2 ds = \iint P_n^2 ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1},$$

wie wir schon im Art. 138 gefunden haben.

Entwickelung nach tesseralen harmonischen Functionen.

142a. Die eben gegebenen Entwickelungen gestatten nach der in Art. 136 auseinandergesetzten Methode, die Constanten in der Darstellung einer beliebigen Function der Lage eines Punktes auf einer Kugel vom Radius a durch eine nach tesseralen Functionen fortschreitende Reihe zu bestimmen.

Ist nämlich F diese willkürliche Function und

$$1) \qquad F = A_0 Y_0^{(\sigma)} + A_1 Y_1^{(\sigma)} + \ldots + A_n Y_n^{(\sigma)} + \ldots,$$

so haben wir

$$A_n \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 = \iint F Y_n^{(\sigma)} ds,$$

also wegen der Gleichungen unter 6) und 7) des vorigen Artikels

$$2) \qquad A_n = \frac{1}{[n, \sigma]} \iint F Y_n^{(\sigma)} ds,$$

wo

$$3) \qquad [n, \sigma] = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}$$

ist.

142 b. Ist Ψ eine Function, welche der Laplaceschen Gleichung genügt und in einem Abstande a von einem Punkt 0, in den wir den Coordinatenursprung verlegen, keine singulären Punkte hat, so kann man Ψ, unter Benutzung der bisherigen Resultate, immer in eine Reihe harmonischer Raumfunctionen positiven Grades, deren Kugelmittelpunkt sich in 0 befindet, entwickeln.

Man gelangt zu einer solchen Entwickelung nach harmonischen Raumfunctionen zunächst in der folgenden Weise.

Man entwickelt das Potential Ψ auf der Fläche einer mit dem Radius r um 0 geschlagenen Kugel nach harmonischen Flächenfunctionen und multiplicirt jede der Flächenfunctionen mit einer Potenz von r/a, welche gleich der Ordnungszahl der betreffenden harmonischen Flächenfunction ist. Dadurch erhält man eine Reihe, die nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades fortschreitet und als Darstellung für das Potential Ψ im ganzen gegebenen Gebiete angesehen werden kann.

Bei der Bestimmung der Constanten dieser Entwickelung hat man, dem obigen zufolge, Integrationen über die Kugelfläche auszuführen. Entwickelt man aber das Potential nach tesseralen Functionen, so kann man die Operation des Integrirens durch die geeignetere des Differenzirens nach den Axen der tesseralen Functionen ersetzen.

Führt man nämlich an der Entwickelung von Ψ nach tesseralen Kugelfunctionen vom Typus $Y_n^{(\sigma)}c$, also in $\Psi = \Sigma A_k^{(\sigma)}c\, Y_k^{(\sigma)}c\, r^k$, die für tesserale Functionen charakteristische Operation

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma}+\frac{\partial^\sigma}{\partial \eta_1^{\,\sigma}}\right)$$

aus und setzt nachher $x = y = z = 0$, so fallen alle Glieder fort bis auf das, welches $A_n^{(\sigma)}c$ als Factor enthält, und man bekommt

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma}+\frac{\partial^\sigma}{\partial \eta_1^{\,\sigma}}\right)\Psi = A_n^{(\sigma)}c\,\frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{\sigma+1}\,n!}$$

oder expliciter

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1\,.\,2}\frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\ldots\right)\Psi = A_n^{(\sigma)}c\,\frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma}\,n!},$$

woraus dann die Constante $A_n^{(\sigma)}c$ zu berechnen ist, wenn die angedeuteten Differentiationen für Ψ ausgeführt und auf den Mittelpunkt 0 bezogen sind.

Graphische Darstellung der Curven gleicher Werte von harmonischen Functionen.

143. Man kann, wie sich aus den Untersuchungen des Art. 135a ergiebt, jede harmonische Function $n$ter Ordnung durch ein System zonaler harmonischer Functionen derselben Ordnung darstellen, deren Pole auf der Kugelfläche verteilt sind. Die Vereinfachung eines solchen Systems scheint aber nicht leicht zu sein. Indessen habe ich, um dem Leser eine geometrische Anschauung von dem Verlauf harmonischer äquipotentieller Flächen zu verschaffen, die zonalen Functionen der dritten und vierten Ordnung berechnet, und dann nach dem in Art. 123 für die graphische Summation auseinandergesetzten Verfahren die auf der Kugelfläche liegenden äquipotentiellen Linien harmonischer Functionen, welche durch algebraische Addition der beiden genannten zonalen Functionen entstehen, in orthogonaler Projection gezeichnet. Die Figuren befinden sich auf den Tafeln VII. bis X. am Ende dieses Bandes.

Die Tafel VII. repräsentirt die Curven gleicher Werte der Differenz zweier zonaler Functionen der dritten Ordnung, deren Axen 120^0 gegen einander in der Ebene der Zeichnung geneigt sind. Diese Differenz ist eine tesserale harmonische Function von der dritten Ordnung und dem ersten Typus ($\tau = 1$) mit einer zur Ebene der Zeichnung senkrechten Axe.

In der Tafel VIII. sind die Curven gleicher Werte der Summe zweier zonaler Functionen der dritten Ordnung dargestellt, deren Axen gegeneinander um 90^0 geneigt sind. Die resultirende harmonische Function ist von der dritten Ordnung, gehört aber nicht dem symmetrischen System an. Von den Knotenlinien — den sphärischen Curven, in deren Punkten die harmonische Function verschwindet — ist eine ein grösster Kreis, die beiden andern, welche von ihr geschnitten werden, sind keine Kreise.

Tafel IX. enthält die Zeichnung für die Differenz zweier zonaler Functionen der vierten Ordnung, deren Axen senkrecht zu einander sind. Die harmonische Function ist hier eine tesserale von der vierten Ordnung und dem zweiten Typus ($\tau = 2$).

Endlich repräsentirt die Tafel X. die Curven gleicher Werte der Summe derselben zwei zonalen Functionen. Sie soll dazu dienen, dem Leser vom Verlauf einer etwas allgemeineren Kugelfunction vierter Ordnung eine Vorstellung zu verschaffen. Die Knotenlinie besteht hier aus 6 Ovalen, die sich in der sechsfach zusammenhängenden Fläche nirgend schneiden. Innerhalb dieser Ovale ist die harmonische Function positiv, ausserhalb derselben negativ.

Ausser den eben angeführten Zeichnungen für die harmonischen Flächenfunctionen habe ich noch eine auf Tafel VI. befindliche Zeichnung für eine harmonische Raumfunction angefertigt.

Die Kugel ist so electrisirt, dass das Potential auf ihr wie eine harmonische Flächenfunction der ersten Ordnung variirt, und die Zeichnung stellt einen

Schnitt der äquipotentiellen Flächen mit einer Ebene dar, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht und die Axe der Kugelfunction enthält.

Man sieht, dass die äquipotentiellen Flächen innerhalb der Kugel durch Ebenen gebildet werden, die senkrecht zur Axe einander in gleichen Abständen folgen. Die Kraftlinien sind also hier gerade parallel der Axe verlaufende Linien. Ihre Abstände von der Axe entsprechen den Quadratwurzeln der natürlichen Zahlenreihe. Ausserhalb der Kugel sind Flächen und Linien gekrümmt. Wäre der Magnetismus der Erde nach der einfachsten harmonischen Function verteilt, so würde diese Zeichnung ihre äquipotentiellen Flächen und ihre Kraftlinien in einem bestimmten grössten Kreise darstellen.

Anwendungen der Kugelfunctionen.

144a. *Eine Kugel unter dem Einfluss eines electrischen Systems.* Wir können nunmehr die Verteilung der Electricität auf einem kugelförmigen Conductor berechnen, wenn er sich unter dem Einfluss electrischer Massen befindet, für die das Potential von vorn herein gegeben ist.

Wir entwickeln zunächst das gegebene Potential Ψ nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades, deren Mittelpunkt sich in dem Mittelpunkt der Kugelfläche befindet, und erhalten so

$$\Psi = B_0 + B_1 Y_1 r + B_2 Y_2 r^2 + \ldots + B_n Y_n r^n$$

für das Potential der electrischen Massen auf einen im Innern der Kugel im Abstande r vom Centrum befindlichen Punkt.

Da nun das gesammte Potential innerhalb der Kugel constant sein muss, so lautet die Entwickelung des Potentials der inducirten Kugeloberfläche

$$V_i = B_0' - B_1 Y_1 r - B_2 Y_2 r^2 - \ldots - B_n Y_n r^n,$$

und demnach ist das Potential ausserhalb der Kugel (s. Art. 131a)

$$V_a = B_0' \frac{a}{r} - B_1 Y_1 \frac{a^3}{r^2} - B_2 Y_2 \frac{a^5}{r^3} - \ldots - B_n Y_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

Aus der charakteristischen Gleichung erhält man dann

$$4\pi\sigma = B_0' \frac{1}{a} + 3 B_1 Y_1 + 5 B_2 Y_2 a + \ldots + (2n+1) B_n Y_n a^{n-1}.$$

Darin ist durch die für Ψ gegebene Entwickelung alles bestimmt bis auf den Coefficienten B_0'. Ist aber die Entwickelung von σ nach Kugelfunctionen

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n,$$

wo σ_n den Wert $(2n+1)\, B_n\, Y_n a^{n-1}$ hat, so erhält man für die auf der Kugel inducirte Electricitätsmenge

$$e = \int \sigma\, ds = \sum_k \int \sigma_k\, ds.$$

Für $k > 0$ muss aber $\int \sigma_k\, ds$ verschwinden, weil 1 ebenfalls eine harmonische Flächenfunction (nämlich Y_0) ist, es bleibt demnach

$$e = \int \sigma_0\, ds = 4\pi a^2 \sigma_0$$

und da $\sigma_0 = B_0'/4\pi a$ war, so folgt

$$B_0' = \frac{e}{a}.$$

Zur vollständigen Bestimmung der Flächendichte gehört also auch noch die Kenntnis der durch das electrische System in der Kugel inducirten Electricitätsmenge.

Das Potentialniveau der Kugel findet sich zu

$$V = \Psi_0 + \frac{e}{a}.$$

144b. *Die Greensche Function einer inducirenden Kugel.* Wir nehmen nun an, dass die Kugel sich in der Nähe von Conductoren befindet, die stets in Verbindung mit der Erde stehen, so dass das Potential auf ihnen immer gleich Null ist. Die Kugel inducirt dann in diese Leiter Electricitätsmengen, und es soll unsere Aufgabe sein, das Potential dieser Electricitätsmengen auf einen Punkt zu bestimmen, wenn die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche gegeben ist.

Im Art. 98 haben wir schon einen analogen Fall behandelt, dabei aber die inducirende Electricität uns in einem Punkt concentrirt gedacht. Dort habe ich auch eine Function, die Greensche Function, eingeführt, die ich als das Potential auf einen Punkt $p = (x, y, z)$ der von einer in einem Punkte $p' = (x', y', z')$ befindlichen Electricitätseinheit in andern auf dem Potentialniveau Null befindlichen Körpern inducirten Electricitätsmenge definirt habe.

Ist also diese Function $G_{pp'}$, die in p' concentrirte inducirende Electricitätsmenge gleich A_0 und das Potential der in den andern Körpern inducirten Electricitäten auf einen Punkt $p = (x, y, z)$ gleich Ψ, so haben wir

$$\Psi = A_0\, G_{vp'}.$$

Wir können nun die Bedeutung der Greenschen Function auch auf unsern Fall ausdehnen, wo die Electricitätsmenge A_0 sich nicht in einem Punkt, sondern auf einer Kugel verteilt befindet.

Stellt man nämlich die Flächendichte σ der auf der Kugel befindlichen Electricität durch eine harmonische Reihe dar — eine solche Darstellung ist, wie wir wissen, immer möglich — so kann man die von der Ladung

der Kugel ausserhalb derselben hervorgebrachten Wirkungen, durch die Wirkungen singulärer geladener Punkte, die sich sämmtlich im Centrum der Kugel befinden, ersetzt denken.

Jeder in der Entwickelung der Dichte auftretenden Kugelfunction entspricht ein singulärer Punkt, dessen Ordnung sich aus den in Art. 129c angestellten Untersuchungen ableiten lässt.

Haben wir also

$$4\pi a^2\sigma = \Sigma 4\pi a^2\sigma_k = A_0 + 3A_1 Y_1 + 5A_2 Y_2 + \ldots + (2n+1)A_n Y_n + \ldots$$

so ist das Potential, welches von einer dieser Partialdichten, etwa von $4\pi a^2\sigma_n$, herrührt, gleich (Art. 131a).

$$\frac{r^n}{a^{n+1}} A_n Y_n \text{ für innerhalb der Kugel befindliche Punkte,}$$

$$\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n \text{ für ausserhalb derselben gelegene.}$$

Nun ist aber nach den Gleichungen 1a) und 1b) in Art. 129c, d

$$\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n = (-1)^n A_n \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo die Differentiationen auf der rechten Seite der Gleichung auf den Mittelpunkt der Kugel zu beziehen sind.

Das durch die electrische Partialverteilung σ_n auf der Kugelfläche in Punkten ausserhalb derselben hervorgerufene Potential ist also ebenso gross, wie das durch einen im Centrum der Kugel liegenden vielfachen Punkt, dessen Axen $h_1, h_2, \ldots h_n$ sind, und dessen Moment die Grösse $A_n a^n$ hat, verursachte.

Die Greensche Function für die Partialverteilung $4\pi a^2\sigma_n$ auf der Kugel fällt also, sowohl was die Verteilung der auf dem System inducirten Electricität als die der Potentialwerte anbetrifft, mit der für diesen vielfachen Punkt geltenden zusammen, und wenn wir das Potential der durch die Partialverteilung $4\pi a^2\sigma_n$ in andern Conductoren, die sich auf dem Potential Null befinden, inducirten Electricität auf einen Punkt x, y, z mit Ψ_n bezeichnen, so haben wir

$$1_1) \qquad \Psi_n = A_n \frac{a^n}{n!} \frac{\partial'^n G}{\partial' h_1 \partial' h_2 \ldots \partial' h_n},$$

wo die Accente der ∂ angeben, dass die Differentiationen sich auf den Punkt x', y', z', den wir nachher mit dem Centrum der Kugel zu confundiren haben, beziehen sollen.

Es ist nun von Vorteil jede der Kugelfunctionen Y_n durch die $2n+1$ Kugelfunctionen des symmetrischen Systems $Y_n^{(\sigma)}$ (die zonalen und tesseralen und sectoriellen in sich begreifend) darzustellen. Ist dann

$Y_n = \Sigma A_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}$, so haben wir

$$\frac{\partial'^n}{\partial' h_1 \partial' h_2 \ldots \partial' h_n} = D'^{(\sigma)}_n,$$

wo von den Zeichen s und c (je nachdem $Y_k^{(\sigma)}$ einen $\sin\sigma\varphi$ oder $\cos\sigma\varphi$ als Factor enthält) abgesehen ist.

Für das ganze Potential Ψ der inducirten Electricität haben wir also

1) $$\Psi = A_0 G + \sum\sum\left[A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D'^{(\sigma)}_n (G)\right].$$

Innerhalb der Kugel ist das Potential der inducirten Electricität plus dem Potential der Ladung auf der Kugelfläche constant, also ergiebt sich

2) $$\Psi + \frac{1}{a} A_0 + \Sigma\Sigma \frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} = \text{Const.}$$

Die Werte der n_1 und σ_1 sind von den Beträgen der n und σ unabhängig. Führt man an der linken Seite dieser letztern Gleichung die Operation $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$ in Bezug auf x, y, z aus, so fallen in $\Sigma\Sigma r^{n_1} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} / a^{n_1+1}$ alle Glieder bis auf das mit $Y_{n_1}^{(\sigma_1)}$ fort, und man findet

3) $$-2 \frac{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}{2^{2\sigma_1} n_1!} \frac{1}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)}$$
$$= A_0 D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G) + \sum\sum\left[A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_{n_1}^{\sigma_1}\left(D'^{(\sigma)}_n(G)\right)\right].$$

Wir erhalten so eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung der Constanten $A_{n_1}^{(\sigma_1)}$.

Das Hauptglied auf der rechten Seite dieser Gleichungen ist das erste, welches die Ladung A_0 der Kugel zum Factor hat. Vernachlässigt man alle andern Glieder, so bekommt man in erster Annäherung

3_1) $$A_{n_1}^{(\sigma_1)} = -\tfrac{1}{2} \frac{2^{2\sigma_1} n_1!}{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!} A_0\, a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G).$$

Bezeichnet b die kürzeste Entfernung des Kugelmittelpunktes vom nächsten Conductor, so ist

$$a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G) < \left(\frac{a}{b}\right)^{n_1+1}.$$

Wenn demnach b gegen a, den Radius der Kugel beträchtlich ist, so sind die Coefficienten aller andern Kugelfunctionen klein im Verhältnis zu A_0. Die unter der Doppelsumme stehenden vernachlässigten Glieder der rechten Seite der Gleichung 3) sind von ähnlicher Grösse wie

$(a/b)^{2n+n_1+1}$, woraus man ersieht, dass man sie in der Tat in erster Annäherung fortlassen darf.

Ersetzt man dann in diesen Gliedern die Constanten $A_{n_1}^{(\sigma_1)}$ durch ihre in erster Näherung gefundenen Werte, so kann man eine zweite Näherung rechnen, mit dieser dann eine dritte u. s. f.

145 a. *Verteilung der Electricität auf nahezu sphärischen Conductoren.* Wir betrachten als anderes Beispiel die Verteilung der Electricität auf einem nahezu sphärischen Conductor.

Die Gleichung des Conductors sei

$$r = a(1 + F)$$

wo F eine Function der Richtung des Radiusvector r, also eine Function von ϑ und φ ist, für Kugeln ganz verschwindet und für unsern Conductor so klein sein soll, dass ihr Quadrat unbeanstandet fortgelassen werden darf.

Entwickelt man F nach Kugelfunctionen, so dass

$$F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n$$

ist, so hängt das erste Glied von dem Ueberschuss des mittlern Radiusvector über den Radius a ab. Aendern wir also die Bedeutung des a dahin, dass wir unter a gerade diesen mittlern Radiusvector verstehen, so dass $4\pi a^3/3$ sehr nahe dem Volumen des gegebenen Conductors gleich ist, so wird in der Entwickelung des F die Grösse f_0 verschwinden.

Das zweite Glied $f_1 Y_1$ hängt von dem Abstande des Massenmittelpunktes des überall gleich dicht gedachten Conductors von dem Coordinatenanfang ab. Wählt man also diesen Mittelpunkt selbst zum Coordinatenursprung, so verschwindet auch f_1, und es bleibt

$$r = a(1 + f_2 Y_2 + f_3 Y_3 + \ldots).$$

Hat der Conductor eine Ladung A_0, und ist er sonst keinen äussern electrischen Kräften unterworfen, so wird sein Potential in Punkten, die ausserhalb seiner Grenzfläche liegen, von der Form

$$V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y_1' \frac{1}{r^2} + \ldots + A_n Y_n' \frac{1}{r^{n+1}}$$

sein, wobei die Y' nicht von demselben Typus zu sein brauchen wie die Y in der Entwickelung des F. Auf der Fläche selbst ist das Potential constant gleich dem Potential α des Conductors. Aus der Gleichung des Conductors folgt aber bei Vernachlässigung höherer Potenzen von F als der ersten für Punkte, die auf dem Conductor gelegen sind,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - F), \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}(1 - 2F) \text{ u. s. f.},$$

mithin haben wir

$$\alpha = A_0 \frac{1 - F}{a} + A_1 \frac{1 - 2F}{a^2} Y_1' + \ldots + A_n \frac{1 - (n+1)F}{a^{n+1}} Y_n'.$$

Die Coefficienten A_1, A_2, u. s. f. sind aber klein gegen A_0 und wenn wir ihre Producte mit F in erster Annäherung fortlassen, erhalten wir

$$\alpha = A_0 \frac{1-F}{a} + A_1 Y_1' \frac{1}{a^2} + A_2 Y_2' \frac{1}{a^3} + \ldots + A_n Y_n' \frac{1}{a^{n+1}},$$

oder, weil $F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n$ ist,

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a}\Big(1 - (f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n)\Big) + A_1 Y_1' \frac{1}{a^2} + A_2 Y_2' \frac{1}{a^3} + \ldots.$$

Es ist aber sehr näherungsweise $\alpha = A_0/a$, lassen wir also die Glieder mit harmonischen Functionen derselben Ordnung verschwinden, so ergiebt sich das Gleichungssystem

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a},$$

$$A_1 Y_1' = A_0 a f_1 Y_1,$$

$$A_2 Y_2' = A_0 a^2 f_2 Y_2,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_n Y_n' = A_0 a^n f_n Y_n.$$

Daraus folgt zunächst, dass die Y' Functionen desselben Typus sein müssen wie die Y, und ferner, weil $f_1 = 0$ ist,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_0 a^2 f_2, \text{ u. s. f.}$$

Ist also die Entwickelung der Grösse F nach harmonischen Functionen bekannt, so resultirt daraus unmittelbar eine angenäherte Entwickelung des Potentials des Conductors nach denselben harmonischen Functionen.

Für die Bestimmung der electrischen Verteilung auf unserm Conductor haben wir die charakteristische Gleichung

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial r}\cos\varepsilon,$$

wo ν die Normale und ε der Winkel zwischen dieser und r ist. Da F und seine Derivirten sehr klein sein sollten, so darf man bis auf Grössen von der Ordnung F^2 den $\cos\varepsilon = 1$ setzen, und erhält

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial r} = A_0 \frac{1}{r^2} + 2A_1 Y_1 \frac{1}{r^3} + \ldots + (n+1) A_n Y_n \frac{1}{r^{n+2}}.$$

Indem man wieder die Potenzen von r durch a und F genähert ausdrückt und Producte der $A_1, A_2, \ldots A_n$ mit F vernachlässigt, findet man

$$4\pi\sigma = \frac{A_0}{a^2}(1 - 2F) + 2A_1 Y_1 \frac{1}{a^3} + \ldots.$$

oder mit Hilfe der Näherungswerte für die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2}\left[1 + f_2 Y_2 + 2 f_3 Y_3 + \ldots + (n-1) f_n Y_n\right].$$

Unterscheidet sich demnach der Conductor von einer Kugel durch eine dünne Schicht, deren Tiefe von Punkt zu Punkt wie eine harmonische Function der $n$ten Ordnung variirt, so ist das Verhältnis der Differenz der Flächendichten in zwei Punkten zu der Summe dieser Flächendichten $n-1$ mal so gross wie das Verhältnis der Differenz der zugehörigen Radien zu deren Summen.

145 b. Existiren ausserhalb des Conductors noch electrische Massen, die ihn mit einer Kraft, deren Potential gleich U ist, angreifen, so entwickeln wir dieses Potential nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades, deren Mittelpunkt wie früher sich in dem Volumcentrum des Conductors befindet, setzen also

$$U = B_0 + B_1 Y_1' r + B_2 Y_2' r^2 + \ldots + B_n Y_n' r^n.$$

Die Functionen Y' brauchen wieder nicht von demselben Typus zu sein wie die Y in der Entwickelung von F.

Wäre der Conductor vollständig kugelförmig, so würde das Potential seiner Ladung auf einen ausserhalb seiner Oberfläche gelegenen Punkt (s. Art. 144a) gleich

$$V = A_0 \frac{a}{r} - B_1 Y_1' \frac{a^3}{r^2} - \ldots - B_n Y_n' \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

sein. Da er aber nur genähert kugelförmig ist, so fügen wir zu V noch eine Grösse W hinzu, die wir durch die Entwickelung

$$W = C_0 \frac{a}{r} + C_1 Y_1'' \frac{a^3}{r^2} + \ldots + C_m Y_m'' \frac{a^{2m+1}}{r^{m+1}}$$

darstellen können, in der die Y'' im allgemeinen von den Y und Y' im Typus abweichen werden, und wo die Constanten C klein sind, weil F nur zu geringen Beträgen ansteigt.

Das Gesammtpotential des Conductors und der electrischen Massen ist also $U + V + W$. Auf der Fläche selbst, also für $r = a(1 + F)$, muss

$$U + V + W = \text{Const.} = A_0 + B_0$$

gleich dem Potential des Conductors sein. Entwickelt man aber in den Ausdrücken für U, V, W die Potenzen von r nach Potenzen von a und F, vernachlässigt höhere Potenzen von F als die erste und lässt auch alle Producte von C mit F fort, so kommt

$$F\left[-A_0 + 3 B_1 a Y_1' + 5 B_2 a^2 Y_2' + \ldots + (2n+1) a^n B_n Y_n'\right]$$
$$+ C_0 + C_1 a Y_1'' + \ldots . C_m a^m Y_m'' = 0.$$

Der Ausdruck $F(A_0 - 3B_1 a Y_1' - \ldots)$ stellt also direct die Entwickelung von W auf der Conductorfläche dar und lässt demnach in bekannter Weise W auch für jeden ausserhalb derselben gelegenen Punkt finden. Es ist aber noch folgendes zu beachten.

F ist selbst durch eine harmonische Reihe darstellbar. Die Reihe für W enthält also zunächst Producte harmonischer Functionen. Das Product zweier harmonischer Functionen der Ordnungen n, m ist eine rationale Function des $(n+m)$ten Grades von den Grössen x/r, y/r, z/r, und als solche nach einer Reihe harmonischer Functionen entwickelbar*), deren Ordnungen $n+m$ nicht überschreiten. Kann man also F nach Kugelfunctionen entwickeln, deren Ordnungen nicht grösser als m sind, und ebenso das Potential der äussern Kräfte nach Kugelfunctionen entwickeln, deren Ordnungen nicht grösser als n sind, so wird das Potential der geladenen Conductorfläche keine Kugelfunction enthalten, deren Ordnung die Zahl $m+n$ überschreitet.

Die Flächendichte findet man nach Berechnung des W in erster Annäherung aus der Gleichung

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial}{\partial r}(U+V+W).$$

145 c. *Conductor innerhalb einer Schale.* Als Seitenstück zu der im Art. 125 gelösten Aufgabe und als Verallgemeinerung derselben behandele ich noch den Fall, dass ein nahezu kugelförmiger Conductor sich innerhalb einer nahezu kugelförmigen und mit ihm nahezu concentrischen Schale befindet.

Die Gleichung der Conductoroberfläche sei wieder

$$r = a(1+F)$$

wo

$$F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots f_n Y_n,$$

ist, die der inneren Schalenfläche

$$r = b(1+G)$$

und

$$G = g_1 Y_1 + g_2 Y_2 + \ldots + g_n Y_n.$$

Die f und g sind klein gegen die Einheit, und die Y_n harmonische Flächenfunctionen von der Ordnung n.

Ferner sei das Potential auf dem Conductor gleich α, auf der Schale gleich β und in einem Punkte zwischen Conductor und Schale gleich Ψ. Entwickeln wir Ψ (weil der Punkt ausserhalb des einen und innerhalb des andern Conductors sich befindet) nach harmonischen Raumfunctionen positiven und negativen Grades, setzen also

$$\Psi = h_0 + h_1 Y_1 r + \ldots + h_n Y_n r^n + k_0 \frac{1}{r} + k_1 Y_1 \frac{1}{r^2} + \ldots + k_n Y_n \frac{1}{r^{n+1}},$$

*) Heine, *Kugelfunctionen*; Bd. I, pag. 71 ff.

so haben wir die h und die k so zu bestimmen, dass für $r = a(1 + F)$ das $\Psi = \alpha$ und für $r = b(1 + G)$ das $\Psi = \beta$ wird. Nun sind die h und k, abgesehen von h_0 und k_0, so kleine Grössen, dass wir ihre Producte mit F vernachlässigen dürfen, wir erhalten also ganz wie bei frühern Gelegenheiten

$$\alpha = h_0 + k_0(1 - F)\frac{1}{a} + \left(h_1 a + \frac{k_1}{a^2}\right) Y_1 + \ldots + \left(h_n a^n + \frac{k_n}{a^{n+1}}\right) Y_n,$$

$$\beta = h_0 + k_0(1 - G)\frac{1}{b} + \left(h_1 b + \frac{k}{b^2}\right) Y_1 + \ldots + \left(h_n b^n + \frac{k^n}{b^{n+1}}\right) Y_n,$$

also

$$\alpha = h_0 + \frac{k_0}{a}, \qquad \beta = h_0 + \frac{k_0}{b},$$

$$\frac{k_0}{a} f_1 = h_1 a + \frac{k_1}{a^2}, \qquad \frac{k_0}{b} g_1 = h_1 b + \frac{k_1}{b^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{k_0}{a} f_n = h_n a^n + \frac{k_n}{a^{n+1}}, \quad \frac{k_0}{b} g_n = h_n b^n + \frac{k_n}{b^{n+1}}.$$

Die Ladung des innern Conductors wird demnach

$$k_0 = (\alpha - \beta)\frac{ab}{b - a},$$

und ausserdem ist allgemein

$$h_n = k_0 \frac{b^n g_n - a^n f_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}},$$

$$k_n = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n - a^{n+1} g_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}},$$

h_n, k_n, f_n, g_n sind aber Coefficienten einer und derselben harmonischen Flächenfunction in den verschiedenen Entwickelungen.

Die Flächendichte der Electricität auf dem innern Conductor findet man aus der Gleichung

$$4\pi\sigma a^2 = k_0(1 + A_1 Y_1 + \ldots A_n Y_n),$$

wo allgemein

$$A_n = \frac{f_n\{n a^{2n+1} + (n+1) b^{2n+1}\} - g_n (2n+1) a^{n+1} b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}$$

gesetzt ist.

146. *Zwei kugelförmige Conductoren.* Als specielles Beispiel für die Anwendung zonaler Functionen untersuchen wir die electrische Verteilung auf zwei kugelförmigen Conductoren.

a und b seien die Radien der Kugeln und c gebe den Abstand ihrer Mittelpunkte von einander an. Bezeichnen wir noch mit x, y zwei Zahlen, die kleiner als 1 sind, so haben wir $a = xc$, $b = yc$. Weiter sei r der Abstand eines Punktes von dem Centrum der ersten und s der von dem Centrum der zweiten Kugel, σ_1 die Flächendichte der Electricität auf der ersten Kugel und σ_2 die auf der zweiten.

Wir legen in die Centrale der beiden Kugeln die Axen und in die einander zugewandten Schnittpunkte der Centrale mit den Kugeln die Pole zweier Systeme zonaler Functionen. Entwickeln wir dann die Dichten σ_1, σ_2 nach diesen zonalen Functionen, setzen also

1) $$4\pi a^2 \sigma_1 = A + A_1 P_1 + 3 A_2 P_2 + \ldots + (2m+1) A_m P_m,$$

2) $$4\pi b^2 \sigma_2 = B + B_1 P_1 + 3 B_2 P_2 + \ldots + (2n+1) B_n P_n,$$

und bezeichnen mit U', U das Potential der Electricität der ersten Kugel auf Punkte innerhalb bezüglich ausserhalb ihrer Oberfläche und mit V', V das Potential der zweiten Kugel auf Punkte innerhalb bezüglich ausserhalb ihrer Oberfläche, so haben wir

3) $$aU' = A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m},$$

4) $$rU = A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \ldots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m},$$

5) $$bV' = B + B_1 P_1 \frac{s}{b} + B_2 P_2 \frac{s^2}{b^2} + \ldots + B_n P_n \frac{s^n}{b^n},$$

6) $$sV = B + B_1 P_1 \frac{b}{s} + B_2 P_2 \frac{b^2}{s^2} + \ldots + B_n P_n \frac{b^n}{s^n}.$$

Dabei sind A und B die Ladungen der entsprechenden Kugeln.

Ist ferner das Gesammtpotential auf der ersten Kugel gleich α, das auf der zweiten gleich β und das in einem ausserhalb beider Kugeln gelegenen Punkte gleich Ψ, so haben wir

7a) $\alpha = U' + V$ für Punkte innerhalb der ersten Kugel,

8a) $\beta = U + V'$ „ „ „ „ zweiten „

9) $\Psi = U + V$ „ „ ausserhalb beider Kugeln.

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt aber für Punkte innerhalb der ersten Kugel

$$\frac{\partial (U' + V)}{\partial r} = \frac{\partial^2 (U' + V)}{\partial r^2} = \ldots = \frac{\partial^n (U' + V)}{\partial r^n} = 0.$$

Bildet man diese Gleichungen speciell für Punkte auf der Centrale, wo also

$$r + s = c$$

ist, und beachtet, dass eine zonale Function in ihrem Pole den Wert 1 hat, so folgt für $r=0$, also $s=c$

$$A_1\frac{1}{a^2}-\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_{s=c}=0,$$

10)
$$A_2\frac{2!}{a^3}+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_{s=c}=0,$$

. . . .

$$A_m\frac{m!}{a^{m+1}}+(-1)^m\left(\frac{\partial^m V}{\partial s^m}\right)_{s=c}=0.$$

Indem man die Differentiationen von V ausführt und $a/c=x$, $b/c=y$ setzt, erhält man das System der Gleichungen

11$_1$)
$$0=A_1+Bx^2+2B_1x^2y+3B_2x^2y^2+\ldots\ldots+(n+1)B_nx^2y^n,$$
$$0=A_2+Bx^3+3B_1x^3y+6B_2x^3y^2+\ldots+\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)B_nx^3y^n,$$
. . . .
$$0=A_m+Bx^{m+1}+(m+1)B_1x^{m+1}y+\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)B_2x^{m+1}y^2$$
$$+\ldots\ldots+\frac{(m+n)!}{m!\,n!}B_nx^{m+1}y^n.$$

In ganz derselben Weise ergiebt sich aus der zweiten Gleichung $U+V'=\beta$ für $r=c$ und $s=0$

11$_2$)
$$0=B_1+Ay^2+2A_1y^2x+3A_2y^2x^2+\ldots+(m+1)A_my^2x^m,$$
$$0=B_2+Ay^3+3A_1y^3x+6A_2y^3x^2+\ldots+\tfrac{1}{2}(m+1)(m+2)A_my^3x^m,$$
. . . .
$$0=B_n+Ay^{n+1}+(n+1)A_1y^{n+1}x+\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)A_2y^{n+1}x^2$$
$$+\ldots\ldots+\frac{(m+n)!}{m!\,n!}A_ny^{n+1}x^m.$$

Wir haben also zwei Systeme von im Ganzen $m+n$ Gleichungen, aus denen wir die $m+n$ Grössen $A_1, A_2\ldots, A_m, B_1, B_2\ldots B_n$ durch A und B berechnen können.

Die Lösung lässt sich durch Determinanten ausführen, die folgende Methode führt aber den Rechner schneller zum Ziel.

Entnimmt man dem Gleichungssystem 11$_2$) die Werte der B und trägt sie in das System 11$_1$) ein, so geht dieses über in

$$A_1=-Bx^2+A\ x^2y^3[2.1+3.1\ y^2+4.1\ y^4+5.1y^6+6.1y^8+\&c.$$
$$+A_1x^3y^3[2.2+3.3\ y^2+4.4\ y^4+5.5y^6+\&c.$$
$$+A_2x^4y^3[2.3+3.6\ y^2+4.10y^4+\&c.$$
$$+A_3x^5y^3[2.4+3.10y^2+\&c.$$
$$+A_4x^6y^3[2.5+\&c.$$
. . . .

$$A_2 = -Bx^3 + A\ x^3y^3[3.1 + 6.1\ y^2 + 10.1y^4 + 15.1y^6 + \&c.$$
$$+ A_1x^4y^3[3.2 + 6.3\ y^2 + 10.4y^4 + \&c.$$
$$+ A_2x^5y^3[3.3 + 6.6\ y^2 + \&c.$$
$$+ A_3x^6y^3[3.4 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_3 = -Bx^4 + A\ x^4y^3[4.1 + 10.1y^2 + 20.1y^4 + \&c.$$
$$+ A_1x^5y^3[4.2 + 10.3y^2 + \&c.$$
$$+ A_2x^6y^3[4.3 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_4 = -Bx^5 + A\ x^5y^3[5.1 + 15.1y^2 + \&c.$$
$$+ A_1x^6y^3[5.2 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots \text{ u. s. f.}$$

Als erste Näherungswerte für $A_1, A_2, \ldots$ kann man die mit A und B multiplicirten Glieder ansehen. Trägt man dann diese Näherungswerte in die rechten Seiten der vorangehenden Gleichungen ein, so erhält man zweite Näherungswerte u. s. f.

Die allgemeine Form der A und B ist aber

$$A_n = p_nA - q_nB,$$
$$B_n = -r_nA + s_nB,$$

und man findet leicht

$$p_1 = x^2y^3\ [\ 2 + \ 3y^2 + \ 4y^4 + \ 5y^6 + \ 6y^8 + 7y^{10} + 8y^{12} + 9y^{14} + \&c.$$
$$+ x^5y^6\ [\ 8 + \ 30y^2 + \ 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \&c.$$
$$+ x^7y^6\ [\ 18 + \ 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \&c.$$
$$+ x^9y^6\ [\ 32 + 200y^2 + 780y^4 + \&c.$$
$$+ x^{11}y^6[\ 50 + 375y^2 + \&c.$$
$$+ x^{13}y^6[\ 72 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ x^8y^9\ [\ 32 + 192y^2 + \&c.$$
$$+ x^{10}y^9[144 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_1 = x^2$$
$$+ x^5y^3\ [\ 4 + \ 9y^2 + \ 16y^4 + \ 25y^6 + \ 36y^8 + \ 49y^{10} + 64y^{12} + \&c.$$
$$+ x^7y^3\ [\ 6 + \ 18y^2 + \ 40y^4 + \ 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} + \&c.$$
$$+ x^9y^3\ [\ 8 + \ 30y^2 + \ 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \&c.$$
$$+ x^{11}y^3[\ 10 + \ 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \&c.$$
$$+ x^{13}y^3[\ 12 + \ 63y^2 + 224y^4 + \&c.$$
$$+ x^{15}y^3[\ 14 + \ 84y^2 + \&c.$$
$$+ x^{17}y^3[\ 16 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ x^8y^6\ [\ 16 + \ 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \&c.$$
$$+ x^{10}y^6[\ 60 + 342y^2 + 1222y^4 + \&c.$$
$$+ x^{12}y^6[150 + 1050y^2 + \&c.$$
$$+ x^{14}y^6[308 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ x^{11}y^9[\ 64 + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Für die folgenden Untersuchungen ist es vorteilhafter, diese Coefficienten durch a, b und c auszudrücken und alles nach c zu ordnen. Man erhält so, indem man bei den Näherungswerten stehen bleibt, die durch die niedergeschriebenen Glieder charakterisirt sind,

$$\begin{aligned}p_1 = {} & 2a^2b^3c^{-5} + 3a^2b^5c^{-7} + 4a^2b^7c^{-9} + (5a^2b^9 + 8a^5b^6)c^{-11} \\ & + (6a^2b^{11} + 30a^5b^8 + 18a^7b^6)c^{-13} \\ & + (7a^2b^{13} + 75a^5b^{10} + 90a^7b^8 + 32a^9b^6)c^{-15} \\ & + (8a^2b^{15} + 154a^5b^{12} + 288a^7b^{10} + 32a^8b^9 + 200a^9b^8 + 50a^{11}b^6)c^{-17} \\ & + (9a^2b^{17} + 280a^5b^{14} + 735a^7b^{12} + 192a^8b^{11} + 780a^9b^{10} \\ & \qquad + 144a^{10}b^9 + 375a^{11}b^8 + 72a^{13}b^6)c^{-19}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_1 = {} & a^2c^{-2} + 4a^5b^3c^{-8} + (6a^7b^3 + 9a^5b^5)c^{-10} \\ & + (8a^9b^3 + 18a^7b^5 + 16a^5b^7)c^{-12} \\ & + (10a^{11}b^3 + 30a^9b^5 + 16a^8b^6 + 40a^7b^7 + 25a^5b^9)c^{-14} \\ & + (12a^{13}b^3 + 45a^{11}b^5 + 60a^{10}b^6 + 80a^9b^7 \\ & \qquad + 72a^8b^8 + 75a^7b^9 + 36a^5b^{11})c^{-16} \\ & + (14a^{15}b^3 + 63a^{13}b^5 + 150a^{12}b^6 + 140a^{11}b^7 + 342a^{10}b^8 \\ & \qquad + 175a^9b^9 + 209a^8b^{10} + 126a^7b^{11} + 49a^5b^{13})c^{-18} \\ & + (16a^{17}b^3 + 84a^{15}b^5 + 308a^{14}b^6 + 224a^{13}b^7 + 1050a^{12}b^8 \\ & \qquad + 414a^{11}b^9 + 1222a^{10}b^{10} + 336a^9b^{11} + 488a^8b^{12} + 196a^7b^{13} \\ & \qquad + 64a^5b^{15})c^{-20}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2 = {} & 3a^3b^3c^{-6} + 6a^3b^5c^{-8} + 10a^3b^7c^{-10} + (12a^6b^6 + 15a^3b^9)c^{-12} \\ & + (27a^8b^6 + 54a^6b^8 + 21a^3b^{11})c^{-14} \\ & + (48a^{10}b^6 + 162a^8b^8 + 158a^6b^{10} + 28a^3b^{13})c^{-16} \\ & + (75a^{12}b^6 + 360a^{10}b^8 + 48a^9b^9 + 606a^8b^{10} \\ & \qquad + 372a^6b^{12} + 36a^3b^{15})c^{-18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_2 = {} & a^3c^{-3} + 6a^6b^3c^{-9} + (9a^8b^3 + 18a^6b^5)c^{-11} \\ & + (12a^{10}b^3 + 36a^8b^5 + 40a^6b^7)c^{-13} \\ & + (15a^{12}b^3 + 60a^{10}b^5 + 24a^9b^6 + 100a^8b^7 + 75a^6b^9)c^{-15} \\ & + (18a^{14}b^3 + 90a^{12}b^5 + 90a^{11}b^6 + 200a^{10}b^7 \\ & \qquad + 126a^9b^8 + 225a^8b^9 + 126a^6b^{11})c^{-17} \\ & + (21a^{16}b^3 + 126a^{14}b^5 + 225a^{13}b^6 + 350a^{12}b^7 + 594a^{11}b^8 \\ & \qquad + 525a^{10}b^9 + 418a^9b^{10} + 441a^8b^{11} + 196a^6b^{13})c^{-19}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3 = {} & 4a^4b^3c^{-7} + 10a^4b^5c^{-9} + 20a^4b^7c^{-11} + (16a^7b^6 + 35a^4b^9)c^{-13} \\ & + (36a^9b^6 + 84a^7b^8 + 56a^4b^{11})c^{-15} \\ & + (64a^{11}b^6 + 252a^9b^8 + 282a^7b^{10} + 84a^4b^{13})c^{-17}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3 = {} & a^4c^{-4} + 8a^7b^3c^{-10} + (12a^9b^3 + 30a^7b^5)c^{-12} \\ & + (16a^{11}b^3 + 60a^9b^5 + 80a^7b^7)c^{-14} \\ & + (20a^{13}b^3 + 100a^{11}b^5 + 32a^{10}b^6 + 200a^9b^7 + 175a^7b^9)c^{-16} \\ & + (24a^{15}b^3 + 150a^{13}b^5 + 120a^{12}b^6 + 400a^{11}b^7 + 192a^{10}b^8 \\ & \qquad + 525a^9b^9 + 336a^7b^{11})c^{-18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4 = {} & 5a^5b^3c^{-8} + 15a^5b^5c^{-10} + 35a^5b^7c^{-12} + (20a^8b^6 + 70a^5b^9)c^{-14} \\ & + (45a^{10}b^6 + 120a^8b^8 + 126a^5b^{11})c^{-16}.\end{aligned}$$

$$q_4 = a^5c^{-5} + 10a^8b^3c^{-11} + (15a^{10}b^3 + 45a^8b^5)c^{-13}$$
$$+ (20a^{12}b^3 + 90a^{10}b^5 + 140a^8b^7)c^{-15}$$
$$+ (25a^{14}b^3 + 150a^{12}b^5 + 40a^{11}b^6 + 350a^{10}b^7 + 350a^8b^9)c^{-17}.$$
$$p_5 = 6a^6b^3c^{-9} + 21a^6b^5c^{-11} + 56a^6b^7c^{-13}$$
$$+ (24a^9b^6 + 126a^6b^9)c^{-15}.$$
$$q_5 = a^6c^{-6} + 12a^9b^3c^{-12} + (18a^{11}b^3 + 63a^9b^5)c^{-14}$$
$$+ (24a^{13}b^3 + 126a^{11}b^5 + 224a^9b^7)c^{-16}.$$
$$p_6 = 7a^7b^3c^{-10} + 28a^7b^5c^{-12} + 84a^7b^7c^{-14}.$$
$$q_6 = a^7c^{-7} + 14a^{10}b^3c^{-13} + (21a^{12}b^3 + 84a^{10}b^5)c^{-15}.$$
$$p_7 = 8a^8b^3c^{-11} + 36a^8b^5c^{-13}.$$
$$q_7 = a^8c^{-8} + 16a^{11}b^3c^{-14}.$$
$$p_8 = 9a^9b^3c^{-12}.$$
$$q_8 = a^9c^{-9}.$$

Daraus erhält man die Werte der r und s indem man a mit b in den q bezüglich p vertauscht.

Die Potentiale α und β auf den Kugeln selbst sind zunächst

7b) $$\alpha = \frac{1}{c}\left[A\frac{1}{x} + B + B_1y + B_2y^2 + \ldots + B_ny^n\right]$$

8b) $$\beta = \frac{1}{c}\left[B\frac{1}{y} + A + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_my^m\right]$$

oder

7c) $$\alpha = lA + mB,$$

8c) $$\beta = mA + nB.$$

l, m, n sind die Potentialcoefficienten (Art. 87), und man findet aus den angegebenen Werten der A und B

$$m = c^{-1} + p_1ac^{-2} + p_2a^2c^{-3} + \ldots.$$
$$n = b^{-1} - q_1ac^{-2} - q_2a^2c^{-3} - \ldots.$$

oder in ihrer Entwickelung nach a, b, c

$$m = c^{-1} + 2a^3b^3c^{-7} + 3a^3b^3(a^2+b^2)c^{-9} + a^3b^3(4a^4 + 6a^2b^2 + 4b^4)c^{-11}$$
$$+ a^3b^3(5a^6 + 10a^4b^2 + 8a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5b^6)c^{-13}$$
$$+ a^3b^3(6a^8 + 15a^6b^2 + 30a^5b^3 + 20a^4b^4$$
$$+ 30a^3b^5 + 15a^2b^6 + 6b^8)c^{-15}$$
$$+ a^3b^3(7a^{10} + 21a^8b^2 + 75a^7b^3 + 35a^6b^4 + 144a^5b^5$$
$$+ 35a^4b^6 + 75a^3b^7 + 21a^2b^8 + 7b^{10})c^{-17}$$
$$+ a^3b^3(8a^{12} + 28a^{10}b^2 + 154a^9b^3 + 56a^8b^4 + 446a^7b^5 + 102a^6b^6$$
$$+ 446a^5b^7 + 56a^4b^8 + 154a^3b^9 + 28a^2b^{10} + 8b^{12})c^{-19}$$
$$+ a^3b^3(9a^{14} + 36a^{12}b^2 + 280a^{11}b^3 + 84a^{10}b^4 + 1107a^9b^5 + 318a^8b^6$$
$$+ 1668a^7b^7 + 318a^6b^8 + 1107a^5b^9 + 84a^4b^{10} + 280a^3b^{11}$$
$$+ 36a^2b^{12} + 9b^{14})c^{-21}.$$

$$
\begin{aligned}
n = b^{-1} &- a^3c^{-4} - a^5c^{-6} - a^7c^{-8} - (a^3 + 4b^3)a^6c^{-10} \\
&- (a^5 + 12a^2b^3 + 9b^5)\ a^6c^{-12} \\
&- (a^7 + 25a^4b^3 + 36a^2b^5 + 16b^7)a^6c^{-14} \\
&- (a^9 + 44a^6b^3 + 96a^4b^5 + 16a^3b^6 + 80a^2b^7 + 25b^9)a^6c^{-16} \\
&- (a^{11} + 70a^8b^3 + 210a^6b^5 + 84a^5b^6 + 260a^4b^7 \\
&\qquad + 72a^3b^8 + 150a^2b^9 + 36b^{11})a^6c^{-18} \\
&- (a^{13} + 104a^{10}b^3 + 406a^8b^5 + 272a^7b^6 + 680a^6b^7 + 468a^5b^8 \\
&\qquad + 575a^4b^9 + 209a^3b^{10} + 252a^2b^{11} + 49b^{13})a^6c^{-20} \\
&- (a^{15} + 147a^{12}b^3 + 720a^{10}b^5 + 693a^9b^6 + 1548a^8b^7 + 1836a^7b^8 \\
&\qquad + 1814a^6b^9 + 1640a^5b^{10} + 1113a^4b^{11} + 488a^3b^{12} \\
&\qquad + 392a^2b^{13} + 64b^{15})a^6c^{-22}.
\end{aligned}
$$

Der Wert des l folgt aus dem des n, indem man a mit b vertauscht.

Aus den Entwickelungen des Art. 87. ergiebt sich für die potentielle Energie des Systems

12) $$W = \tfrac{1}{2}lA^2 + mAB + \tfrac{1}{2}nB^2,$$

Die Abstossungskraft, welche die beiden Kugeln in Richtung ihrer Centrale auf einander ausüben, ist nach Art. 93a

13) $$-\frac{\partial W}{\partial c} = \tfrac{1}{2}A^2\frac{\partial l}{\partial c} + AB\frac{\partial m}{\partial c} + \tfrac{1}{2}B^2\frac{\partial n}{\partial c}.$$

Endlich findet man noch die Beträge der Flächendichten der Ladungen auf den Kugeln aus den Gleichungen unter 1) und 2), indem man die $A_1 \ldots B_1 \ldots$ durch ihre gefundenen Werte ersetzt.

Cap. X.

Confocale Flächen zweiten Grades.

—×—

Krummlinige Coordinaten.

Eine zweite Methode, Lösungen der Poisson-Laplaceschen Gleichung, und damit electrostatischer Probleme zu erhalten, besteht darin, dass man sie für andere Coordinatensysteme transformirt.

In dem Cartesischen Coordinatensystem wird jeder Punkt des Raumes als Schnittpunkt dreier zu den Axenebenen paralleler Ebenen angesehen.

Bei dem jetzt einzuführenden System fixiren wir jeden Punkt des Raumes durch die drei confocalen Flächen zweiten Grades (einschaliges Hyperboloid, zweischaliges Hyperboloid und Ellipsoid), deren Schnittpunkt er ist.

147. Die allgemeine Gleichung eines Systems*) confocaler Flächen ist

$$1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

λ ist ein Parameter, durch dessen Variation man von einer Fläche zu einer andern übergeht, und es soll, je nachdem es sich auf Systeme confocaler zweischaliger Hyperboloide, einschaliger Hyperboloide, Ellipsoide bezieht, durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ charakterisirt werden.

Die Reihenfolge der a, b, c ist so gewählt, dass $a < b < c$, demnach

$$a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$$

wird. Doch ist die Grösse a nur der Symmetrie der Resultate wegen eingeführt und kann und soll auch in den Schlussresultaten gleich Null gesetzt werden.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen dreier confocaler Flächen, denen die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zukommen, das y^2 und z^2, so folgt

*) Die folgenden Untersuchungen sind der Hauptsache nach dem höchst interessanten Werke Lamé's — *Leçons sur les Fonctions Inverses des Transcendantes et les Surfaces Isothermes.* Paris, 1857, entlehnt.

2) $$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_2^2-a^2)(\lambda_3^2-a^2)$$

als Gleichung für die x Coordinate des Durchschnittspunktes der drei Flächen.

y und z erhält man durch Vertauschung von a mit b und b mit a, bezüglich von a mit c und c mit a.

Weiter ergiebt eine Differentiation

3) $$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-a^2}x,$$

woraus die acht andern entsprechenden Differentialquotienten durch geeignete Vertauschung der Buchstaben resultiren.

Bezeichnet also s_1 den Bogen der Schnittlinie der Flächen λ_2 und λ_3, der von zwei aufeinander folgenden Flächen λ_1 und $\lambda_1+d\lambda_1$ eingefasst wird, so ergiebt sich

4a) $$\left(\frac{\partial s_1}{\partial \lambda_1}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}\right)^2=\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_1^2-b^2)(\lambda_1^2-c^2)}.$$

Entsprechende Gleichungen erhalten wir für die Grössen $\partial s_2/\partial \lambda_2$, $\partial s_3/\partial \lambda_3$.

Setzen wir

a) $$D_1^2=\lambda_3^2-\lambda_2^2,\quad D_2^2=\lambda_3^2-\lambda_1^2,\quad D_3^2=\lambda_2^2-\lambda_1^2$$

und nehmen $a=0$, so wird

4b) $$\frac{\partial s_1}{\partial \lambda_1}=\frac{D_2 D_3}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}}.$$

Der Nenner ist das Product der parallel der y bezüglich z Axe laufenden Halbaxen der Fläche mit dem Parameter λ_1. Der Zähler ist ebenfalls ein Product von Halbaxen, und zwar desjenigen Centralschnittes der Fläche λ_1, welcher zum Halbmesser, der durch den Schnittpunkt der drei Flächen geht, conjugirt ist. Es ist auch leicht zu zeigen, dass D_2 parallel ds_2, D_3 parallel ds_3 und D_1 parallel ds_1 verläuft, doch gehe ich nicht weiter darauf ein.

Wir machen nun die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von drei andern Grössen α, β, γ abhängig, indem wir setzen

$$\alpha=\int_0^{\lambda_1}\frac{c\,d\lambda_1}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}},$$

5a) $$\beta=\int_b^{\lambda_2}\frac{c\,d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2-b^2}\sqrt{c^2-\lambda_2^2}},$$

$$\gamma=\int^{\lambda_3}\frac{c\,d\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2-b^2}\sqrt{\lambda_3^2-c^2}},$$

und erhalten damit

4c) $$ds_1 = \frac{1}{c} D_2 D_3 d\alpha, \quad ds_2 = \frac{1}{c} D_3 D_1 d\beta, \quad ds_3 = \frac{1}{c} D_1 D_2 d\gamma.$$

Das Volumenelement, dessen Kanten ds_1, ds_2, ds_3 sind, hat einen Inhalt

6) $$ds_1\, ds_2\, ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3} d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die drei Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 sind zu einander rechtwinklig geneigt, und die Bogen s_1, s_2, s_3, zu denen sie gehören, bilden ein orthogonales krummliniges Coordinatensystem.

148. Man kann diese drei Grössen α, β, γ auch als elliptische Integrale erster Art darstellen. Setzt man nämlich

$$\lambda_1 = b \sin\vartheta,$$

b) $$\lambda_2 = \sqrt{c^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi},$$

$$\lambda_3 = c \sec\psi,$$

ferner

c) $$b = kc,$$

d) $$k^2 + k'^2 = 1,$$

so dass k und k' als complementäre Moduli des Systems confocaler Flächen angesehen werden können, so findet sich

$$\alpha = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2\vartheta}} = F(k, \vartheta),$$

5b) $$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2\varphi}} = F(k') - F(k', \varphi),$$

$$\gamma = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2\psi}} = F(k) - F(k, \psi).$$

$F(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung, das man auch durch K zu bezeichnen pflegt, $F(k')$ ist das ihm complementäre.

Darnach ist α eine Function von ϑ, also von λ_1, β eine Function von φ, also von λ_2, γ eine Function von ψ, also von λ_3. Man kann aber auch umgekehrt die Winkel ϑ, φ, ψ und die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von α, β, γ abhängig machen. Lamé behandelt gerade die Eigenschaften, die sich aus solcher Inversion von Functionen ergeben.

Da übrigens die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ periodische Functionen der Hilfswinkel ϑ, φ, ψ sind, so müssen sie auch periodische Functionen der α, β, γ sein. Aus der Theorie der elliptischen Functionen folgt, dass die Periode von λ_1 und λ_3 gleich $4F(k)$ ist, während λ_2 zur Periode $2F(k')$ hat.

Transformation der Laplace-Poissonschen Gleichung.

149. Wir transformiren die Laplace-Poissonsche Gleichung, indem wir statt der bisherigen Cartesischen Coordinaten die neuen Coordinaten α, β, γ einführen.

Jene Gleichung ist bekanntlich identisch mit der Beziehung

$$\iint R \cos\varepsilon \, ds + \iiint 4\pi\rho \, d\tau = 0,$$

und darum bilden wir zunächst das Flächenintegral der Kraft R.

Bezeichnet V das Potential in einem Punkte (α, β, γ), so ist die in Richtung von ∂s_1 resultirende Kraft

1) $$R_1 = -\frac{\partial V}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{c}{D_2 D_3}$$

und demzufolge

$$R_1 \, ds_2 \, ds_3 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{c}{D_2 D_3} \cdot \frac{D_3 D_1}{c} \cdot \frac{D_1 D_2}{c} d\beta \, d\gamma = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{D_1^2}{c} d\beta \, d\gamma.$$

Die linke Seite der Gleichung giebt das Flächenintegral von R_1 für das Flächenelement $ds_2 \, ds_3$. Fassen wir ferner das von dem System der Flächen α, β, γ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ gebildete Raumelement (solcher Raumelemente giebt es acht, eines in jedem Octanten) ins Auge, so erhalten wir durch die rechte Seite jener Gleichung das Flächenintegral der (von aussen nach innen als positiv bezeichneten) Normalcomponente der Kraft für das Element der Fläche α, welches zwischen den Flächen β und $\beta + d\beta$, γ und $\gamma + d\gamma$ liegt. Das Flächenintegral für das entsprechende Flächenelement auf $\alpha + d\alpha$ ist dann, weil D_1^2 von α unabhängig ist,

$$+\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{D_1^2}{c} d\beta \, d\gamma + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\frac{D_1^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Die beiden Flächenelemente auf α und $\alpha + d\alpha$ stehen sich in dem von α, β, γ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ begrenzten Volumelement $d\alpha \, d\beta \, d\gamma$ gegenüber und das Flächenintegral in Bezug auf beide zusammen wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\frac{D_1^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Entsprechend erhalten wir für die Flächenintegrale der Normalcomponente der Kraft in Bezug auf die Paare gegenüberstehender Elemente der Flächen β und $\beta + d\beta$ bezüglich γ und $\gamma + d\gamma$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\frac{D_2^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2}\frac{D_3^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Die sechs Flächenelemente schliessen einen Raum ein, dessen Volumen nach Art. 147, 6)

$$ds_1\, ds_2\, ds_3 = \frac{D_1^2\, D_2^2\, D_3^2}{c^3}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

ist, und da nach Art. 77 die Summe aus dem Flächenintegral des Elements und aus der in demselben enthaltenen Electricitätsmenge, welcher hier gleich $\rho\, ds_1\, ds_2\, ds_3$ ist, verschwinden muss, so erhalten wir

$$2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} D_1^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} D_2^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} D_3^2 + 4\pi\rho \frac{D_1^2\, D_2^2\, D_3^2}{c^2} = 0,$$

und das ist die transformirte Poissonsche Gleichung.

Die Laplacesche folgt, wenn $\rho = 0$ gesetzt wird.

Wegen der allgemeinen Discussion dieser Gleichung muss auf das citirte Werk von Lamé verwiesen werden.

Lösungen der Differentialgleichung.

150. Ganz so wie die Laplacesche Gleichung in ihrem Ausdruck durch Cartesische Coordinaten x, y, z durch eine lineare Function dieser Coordinaten erfüllt wird, genügt ihr in ihrer transformirten Gestalt eine lineare Function der α, β, γ. Dadurch sind wir aber in den Stand gesetzt, die electrische Verteilung auf zwei confocalen Flächen derselben Art so wie die Potentialwerte zwischen diesen Flächen zu bestimmen, wenn die Potentiale auf den Flächen selbst gegeben sind.

Zweischalige Hyperboloide.

Wenn α constant ist, so sollte die Fläche, um die es sich handelt, ein zweischaliges Hyperboloid sein. Nehmen wir für α dasselbe Zeichen, welches die x Coordinate der betreffenden Schale hat, so können wir beide Schalen gleichzeitig behandeln.

Es seien α_1 und α_2 die Werte des α für zwei Schalen, die zu demselben oder zu verschiedenen Hyperboloiden gehören, und V_1, V_2 die Potentialniveaus auf ihnen.

Das Potential für einen Punkt zwischen ihnen ist dann

$$1') \qquad V = A + B\alpha$$

und folglich, weil

$$V_1 = A + B\alpha_1, \quad V_2 = A + B\alpha_2$$

sein muss,

$$1) \qquad V = \frac{\alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 + \alpha(V_1 - V_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Die resultirende Kraft in Punkten der confocalen Schalen ist durch

2′) $$R_2 = -\frac{\partial V}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -R_1$$

gegeben, sie wird also (Art. 147, 4c)

2a) $$R_2 = -\frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c}{D_2 D_3} = -R_1.$$

Bezeichnet man mit p_1 die Länge des von dem Mittelpunkt auf die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte gefällten Lotes und mit P_1 das Product der Halbaxen des betreffenden Hyperboloids, so ist bekanntlich $p_1 D_2 D_3 = P_1$, demnach auch

2b) $$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c p_1}{P_1}.$$

Die Kraft ist also proportional der Länge des Lotes von dem Mittelpunkt auf die Tangentialebene der betreffenden Fläche.

Für die Flächendichte σ haben wir die Gleichung

3a) $$4\pi\sigma = R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c}{D_2 D_3},$$

oder

3b) $$4\pi\sigma = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c p_1}{P_1}.$$

Daraus folgt für die auf einem Segmente, welches durch eine Ebene $x = a$ von einer Schale eines Hyperboloids abgeschnitten wird, vorhandene Electricitätsmenge

4) $$Q = \frac{c}{2}\frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{a}{\lambda_1} - 1\right).$$

Eine ganze Schale enthält also eine unendlich grosse Electricitätsmenge.

Grenzfälle erhalten wir für

1) $\alpha = F(k)$, die Schale wird zu einem Stück der xz Ebene, welches sich auf der positiven Seite des positiven Hyperbelarms, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ist, befindet

2) $\alpha = 0$, die Fläche geht in die yz Ebene über.

3) $\alpha = -F(k)$, die Schale wird zu einem auf der negativen Seite des negativen Arms der angeführten Hyperbel liegenden Stück der xz Ebene.

Einschalige Hyperboloide.

Die Gleichung $\beta = \text{const.}$ bestimmt ein einschaliges Hyperboloid. Wird also das electrische Feld durch zwei confocale einschalige Hyperboloide begrenzt, denen die Parameter β_1 bezüglich β_2 angehören, und welche zu den Potentialen V_1 bezüglich V_2 geladen sind, so hat man

$$V = A + B\beta$$

zu setzen, und die weitere Rechnung in ganz derselben Weise zu führen, wie beim zweischaligen Hyperboloid.

Auch hier gelangt man zu dem Resultat, dass die Flächendichte der Electricität in einem Punkte eines der Hyperboloide proportional ist der Länge des Lotes vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte, und dass auf einer Schale eine unendlich grosse Menge Electricität ausgebreitet ist.

Von Grenzfällen hebe ich die folgenden hervor.

1) $\beta = 0$, die Fläche geht in den Teil der xz Ebene über, welcher zwischen den beiden Zweigen der Hyperbel

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

sich befindet.

2) $\beta = F(k')$, die Fläche geht in den Teil der xy Ebene über, welcher von der Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ausgeschlossen wird.

Ellipsoide.

Für ein Ellipsoid ist γ der constante Parameter. Wird also das electrische Feld durch zwei confocale Ellipsoide $\gamma = \gamma_1$ und $\gamma = \gamma_2$ begrenzt, deren Potentiale V_1 bezüglich V_2 sind, so haben wir

1) $$V = \frac{\gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 + \gamma(V_1 - V_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Die Flächendichte der Electricität in einem Punkte eines Ellipsoids ist

2) $$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{c p_3}{P_3} = -\sigma_2,$$

wo p_3 die Länge des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Ellipsoides in dem betreffenden Punkte gefällten Lotes ist, und P_3 das Product aus den Halbaxen bezeichnet.

Die Ladung jedes der Ellipsoide ist gegeben durch

$$3) \qquad Q_2 = -Q_1 = c\frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Q_1 und Q_2 sind also endliche Grössen.

Für ein unendlich grosses Ellipsoid ist $\gamma = F(k)$. Setzen wir also $V_2 = 0$ und $\gamma_2 = F(k)$, so haben wir es mit einem Ellipsoid γ_1 in einem unendlich ausgedehnten electrischen Felde zu tun. Die auf demselben befindliche Electricitätsmenge ist dann gleich

$$3_1) \qquad Q = c\frac{V_1}{F(k) - \gamma_1}.$$

Haben wir zugleich $\gamma_1 = 0$, so geht die Fläche des Ellipsoides in den von der Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

eingeschlossenen Teil der xy Ebene über. Man erhält so eine elliptische Platte mit den Halbaxen c und $\sqrt{c^2 - b^2}$ und von der Excentricität k.

Für die Flächendichte der Electricität in einem Punkte (x, y) haben wir für jede Seite der Platte

$$2_2) \qquad \sigma = \frac{V_1}{4\pi F(k)\sqrt{c^2 - b^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y}{c^2 - b^2}}},$$

und für die Ladung

$$3_2) \qquad Q = c\frac{V_1}{F(k)}.$$

Besondere Fälle.

151. Bleibt c endlich, während b, also auch k fortdauernd bis Null abnimmt, so wird in jedem der zweischaligen Hyperboloide die reelle Axe und eine der imaginären Axen immer kleiner, bis schliesslich jedes Hyperboloid in zwei in der z Axe sich schneidende Ebenen übergeht. Die Grösse α wird gleich ϑ, und man erhält als Gleichung des Systems der meridionalen Ebenen, in welches das System der confocalen zweischaligen Hyperboloide übergegangen ist,

$$1) \qquad \frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Aus der Grösse β würde in diesem Falle (Art. 147, 5a)

$$\beta = \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2\sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}$$

werden. Für die untere Grenze wird aber das Integral unendlich gross, deshalb führe ich eine neue Definition für β ein, indem ich setze

$$\beta = \int_{\lambda_2}^{c} \frac{c\, d\lambda_2}{\lambda_2 \sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}.$$

Nach den Gleichungen unter b) in Art. 148 wird dann

$$\beta = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Definiren wir umgekehrt φ durch β, so erhalten wir

$$\cos\varphi = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{e^{\beta} + e^{-\beta}}.$$

Bekanntlich bezeichnet man die Grösse $(e^{\beta} + e^{-\beta})/2$ als den hyperbolischen Cosinus von β und die $(e^{\beta} - e^{-\beta})/2$ als den hyperbolischen Sinus von β. Führt man entsprechende Definitionen für die hyperbolische Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante ein und unterscheidet die hyperbolischen Functionen von den gewöhnlichen trigonometrischen durch Anhängung eines h an die Symbole dieser, so wird

$$\cos\varphi = \operatorname{tgh}\beta,$$
$$\sin\varphi = \operatorname{sech}\beta.$$

Die Gleichung des Systems der einschaligen Hyperboloide geht also über in

$$2) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\operatorname{sech}^2\beta} - \frac{z^2}{\operatorname{tgh}^2\beta} = c^2.$$

Weiter wird für $b = 0$ das $\gamma = \psi$, also

$$\lambda_3 = c \sec\gamma,$$

und die Gleichung des Systems der Ellipsoide geht über in

$$3) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\sec^2\gamma} + \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2\gamma} = c^2.$$

Die Ellipsoide sind also abgeplattete Rotationsellipsoide mit der Aequatorialaxe $2c\sec\gamma$ und der Polaraxe $2c\operatorname{tg}\gamma$.

Die auf einem solchen abgeplatteten Rotationsellipsoid enthaltene Electricitätsmenge ist

$$4) \qquad Q = c\,\frac{V}{\frac{1}{2}\pi - \gamma}.$$

Für $\gamma = 0$ wird das Ellipsoid zur Kreisscheibe vom Radius c, und man erhält dann

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{c^2 - r^2}},$$

$$Q = c\,\frac{V}{\frac{1}{2}\pi}.$$

152. Als zweiten Fall setzen wir $b = c$. Es wird dann $k = 1$ und $k' = 0$, also

$$\alpha = \log \operatorname{tg} \frac{\pi + 2\vartheta}{4},$$

$$\lambda_1 = c \operatorname{tgh} \alpha.$$

Die zweischaligen Hyperboloide gehen in zweischalige Rotationshyperboloide über, deren Gleichungen durch

$$1) \qquad \frac{x^2}{\operatorname{tgh}^2\alpha} - \frac{y^2 + z^2}{\operatorname{sech}^2\alpha} = c^2$$

dargestellt werden.

Ferner wird $\beta = \varphi$, und jedes der einschaligen Hyperboloide geht in ein Ebenenpaar über, dessen Componenten sich in der x Axe schneiden und zur Gleichung

$$2) \qquad \frac{y^2}{\sin^2\beta} - \frac{z^2}{\cos^2\beta} = 0$$

haben. Es entsteht so ein System von Meridianebenen, deren gemeinschaftliche Axe die x Axe ist und die sich durch ihre Länge β von einander unterscheiden. Nach der Definition unter 5a) in Art. 147 wird γ für $b = c$ unendlich gross. Ich definire daher diese Grösse in anderer Weise, indem ich setze

$$\gamma = \int_{\lambda_3}^{\infty} \frac{c\,d\lambda_3}{\lambda_3^2 - c^2}.$$

Machen wir dann $\lambda_3 = c \sec\psi$, so wird

$$\gamma = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin\psi} = \log \cot \frac{\psi}{2},$$

also

$$\lambda_3 = c \coth \gamma.$$

Damit geht die Gleichung für das System der Ellipsoide über in

$$3) \qquad \frac{x^2}{\coth^2\gamma} + \frac{y^2+z^2}{\operatorname{cosech}^2\gamma} = c^2,$$

und zeigt ein System confocaler verlängerter Rotationsellipsoide an.

Die Electricitätsmenge eines solchen verlängerten Rotationsellipsoids ist gleich

$$4a) \qquad Q = \frac{cV}{\log\cot\frac{\psi_0}{2}},$$

wo $c\sec\psi_0$ gleich der Länge der Rotationsaxe ist. Hat also das Ellipsoid A zur Polarhalbaxe und B zur Aequatorialhalbaxe, so wird

$$4b) \qquad Q = V\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{\log\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{B}}.$$

Ist B verhältnismässig klein gegen A, so wird das Ellipsoid sehr gestreckt und geht in einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt und abgerundeten Enden über. Die Electricitätsmenge wird dann

$$4_1) \qquad Q = \frac{AV}{\log 2A - \log B}.$$

Wenn ausserdem, dass $b=c$ ist, auch noch die Gleichung $b=c=0$ stattfindet, so erhalten wir zwei Systeme confocaler Kegel und ein System concentrischer Kugeln, deren Radien umgekehrt proportional der Grösse γ variiren, falls das Verhältnis von b zu c von Null verschieden und endlich ist.

Ist aber $b/c=0$ oder gleich 1, so besteht ein System von Flächen aus Meridianebenen, das zweite aus geraden Kegeln mit gemeinschaftlicher Axe und das dritte wieder aus concentrischen Kugeln mit Radien, die im umgekehrten Verhältnis zu ihren Parametern γ stehen.

Die letztern drei Flächensysteme dienen zur Definition der sphärischen Polarcoordinaten.

Cylindrische Flächen.

153. Ist c unendlich gross, so gehen die Flächen in cylindrische Flächen über, deren erzeugende Linien parallel der z Axe laufen.

Ein System hyperbolischer Cylinder entsteht durch die Degenerirung der zweischaligen Hyperboloide, und da für $c=\infty$ das $k=0$ und $\vartheta=\alpha$ wird, so erhalten wir als Gleichung dieses Systems

$$1) \qquad \frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = b^2.$$

Im zweiten System wird

$$\beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - b^2}}$$

also $\lambda_2 = b \cosh \beta$, und

2) $$\frac{x^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{y^2}{\sinh^2 \beta} = b^2$$

repräsentirt das zweite aus elliptischen Cylindern bestehende System.

Im dritten wird $\lambda_3 = \varkappa$ und

3) $$z^2 = (\lambda_3^2 - c^2).$$

Das System besteht also aus parallelen zu beiden Seiten der xy Ebene senkrecht zur z Axe verlaufenden Ebenen.

Die Curven auf Tafel XI. stellen einen Durchschnitt der beiden ersten Flächensysteme mit einer Fläche des dritten Systems, also mit einer zur z Axe senkrechten Ebene dar.

Confocale Paraboloide.

154. Wir transformiren die allgemeine Gleichung confocaler Flächen zweiten Grades, indem wir den Coordinatenursprung auf der x Axe um die Grösse t verschieben. Setzen wir für x, λ, b, c die neuen Werte $x + t$, $\lambda + t$, $b + t$, $c + t$, und lassen t bis ins Unendliche wachsen, so geht die allgemeine Gleichung über in

1) $$4(x - \lambda) + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 0.$$

Sie stellt ein System von Paraboloiden dar, deren Brennpunkte im $x = b$ und $x = c$ liegen.

Wir verstehen speciell unter λ den Parameter elliptischer Paraboloide, unter μ den hyperbolischer Paraboloide und unter ν den elliptischer Paraboloide der zweiten Art, so dass

$$\lambda < b < \mu < c < \nu$$

ist. Für einen Durchschnittspunkt dieser drei Flächenarten haben wir dann

2a) $$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu + \nu - c - b, \\ y^2 &= 4\frac{(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)}{c-b}, \\ z^2 &= 4\frac{(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-c)}{c-b}, \end{aligned}$$

Ferner setzen wir, um unendlich grossen Werten, die wir bei der frühern in Art. 147 gegebenen Definition für α, β, γ in unserm Fall erhalten würden, aus dem Wege zu gehen,

$$\alpha = \int_{\lambda}^{b} \frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}},$$

3)
$$\beta = \int_{b}^{\mu} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}},$$

$$\gamma = \int_{c}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}},$$

woraus sich ergiebt

4)
$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}(c+b) - \tfrac{1}{2}(c-b)\cosh\alpha, \\ \mu &= \tfrac{1}{2}(c+b) - \tfrac{1}{2}(c-b)\cos\beta, \\ \nu &= \tfrac{1}{2}(c+b) + \tfrac{1}{2}(c-b)\cosh\gamma, \end{aligned}$$

also

$$x = \frac{1}{2}(c+b) + \frac{1}{2}(c-b)(\cosh\gamma - \cos\beta - \cosh\alpha)$$

2b)
$$y = 2(c-b)\sinh\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cosh\frac{\gamma}{2},$$

$$z = 2(c-b)\cosh\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sinh\frac{\gamma}{2}.$$

Für $b=c$ erhalten wir Rotationsparaboloide mit der x Axe als Rotationsaxe, und es wird

$$\begin{aligned} x &= a(e^{2\alpha} - e^{2\gamma}), \\ y &= 2a\,e^{\alpha+\gamma}\cos\beta, \\ z &= 2a\,e^{\alpha+\gamma}\sin\beta. \end{aligned}$$

Die Flächen $\alpha = \text{const}$ sind, wie schon bemerkt, confocale Paraboloide, die sich, wenn $\alpha = -\infty$ wird, auf gerade Linien, die im Coordinatenanfang ihr Ende finden, reduciren.

Die Flächen $\beta = \text{const}$ sind Ebenen, welche alle durch die x Axe gehen, und deren Neigung gegen eine die x Axe enthaltende feste Ebene durch die Grösse β ausgedrückt wird.

Man kann auch die Werte der α, β, γ durch sphärische Polarcoordinaten ausdrücken, deren Ursprung im Brennpunkt sich befindet, und deren Axe mit der der Paraboloide zusammenfällt. Man hat so

$$\begin{aligned} \alpha &= \log(r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta), \\ \beta &= \varphi, \\ \gamma &= \log(r^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta). \end{aligned}$$

Das Potential $V = \alpha$ lässt sich mit dem Potential, das durch eine zonale harmonische Raumfunction $r^i Q_i$ dargestellt wird, vergleichen. Beide Potentiale genügen der Laplaceschen Gleichung und beide sind homogene Functionen von x, y, z. Im erstern Falle tritt aber an der Axe eine Discontinuität ein und i fällt mit Null zusammen.

Die Flächendichte in einem Punkt eines Paraboloids, das sich in einem unendlichen electrischen Felde befindet, ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Radiusvector des Punktes (seinem Abstande vom Brennpunkte). Geht das Paraboloid in eine nach einer Seite sich ins Unendliche erstreckende gerade Linie über, so fällt der Brennpunkt in den Anfang der Linie, die Dichtigkeit der Electricität in einem Punkte einer solchen Linie ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Strecke vom Anfang der Linie bis zu dem betreffenden Punkt.

Cap. XI.

Theorie der electrischen Bilder und der electrischen Inversion.

—x—

155. Ein anderes Mittel zur Lösung electrischer Probleme liefert uns die Theorie der electrischen Bilder und der electrischen Inversion.

Wir haben schon gesehen, dass, wenn sich eine leitende Kugel unter dem Einflusse bestimmt verteilter electrischer Agentien befindet, man stets mit Hilfe harmonischer Kugelfunctionen die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche und das Potential auf Punkte ausserhalb derselben bestimmen kann. Man hat dazu das Potential des influencirenden Systems in eine nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades fortschreitende Reihe zu entwickeln, aus der sich dann unmittelbar eine andere nach harmonischen Raumfunctionen negativen Grades fortschreitende Reihe ergiebt, welche das Potential der influencirten Kugel auf ausserhalb derselben gelegene Punkte darstellt (Art. 144a).

Nach dieser in ihrer Anwendbarkeit mächtigen Analyse hat Poisson die Electrisirung einer Kugel, die unter dem Einflusse eines gegebenen electrischen Systems steht, bestimmt und auch noch das schwierigere Problem der Berechnung der Verteilung der Electricität auf zwei gleichzeitig im electrischen Felde vorhandenen Kugeln gelöst. Plana und andere haben dann die Poissonschen Untersuchungen weiter verfolgt und seine Resultate bestätigt.

Im einfachsten Falle, wenn eine Kugel durch einen electrischen Punkt influencirt wird, hat man also das Potential dieses Punktes nach Kugelfunctionen zu entwickeln und daraus dann die entsprechende Reihe von Kugelfunctionen abzuleiten, die das Potential der Kugel auf Punkte ausserhalb ihrer Oberfläche darstellt.

Bildet man nun diese zweite Reihe harmonischer Kugelfunctionen, also das Potential der influencirten Kugelfläche, so zeigt sich, dass die Wirkung der durch den ursprünglichen electrischen Punkt inducirten Electricität auf ausserhalb der Kugel gelegene Punkte vollständig durch die eines imaginären,

innerhalb der Kugel befindlichen electrischen Punktes ersetzt werden kann. Der eben genannte Punkt hat keine reelle Existenz, man nennt ihn das *Electrische Bild* des die Kugel influencirenden Punktes.

Diese Aequivalenz zwischen der Wirkung einer durch einen electrischen Punkt influencirten Kugelfläche und der des electrischen Bildes des influencirenden Punktes scheint vor W. Thomson von keinem Mathematiker bebemerkt worden zu sein.

W. Thomson deducirte aber aus derselben eine äusserst wirksame Methode zur Lösung electrischer Probleme und zur elementaren geometrischen Darstellung der erhaltenen Resultate.

Seine ersten diesbezüglichen Untersuchungen sind in dem *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* vom Jahre 1848 enthalten und noch ganz in der Terminologie der gewöhnlichen Theorie der Wirkung in die Ferne durchgeführt. Er macht in seiner ersten Abhandlung noch keinen Gebrauch vom Potential und ebensowenig von den in Cap. IV auseinandergesetzten Lehrsätzen, wenn er auch wahrscheinlich gerade durch den Begriff des Potentials zu seiner Entdeckung geführt worden ist.

Ich werde aber bei der Wiedergabe seiner Theorie der electrischen Bilder nicht der Methode des Autors folgen, sondern von den Begriffen des Potentials und der Niveauflächen überall, wo die Untersuchung durch ihre Einführung an Klarheit gewinnt, den freiesten Gebrauch machen.

Theorie der electrischen Bilder.

156. Es seien (Fig. 6) A und B zwei in einem gleichförmigen dielectrischen Medium von unendlicher Ausdehnung befindliche Punkte, welche die bezüglichen Electricitätsmengen e_1 und e_2 enthalten. Ihr Potential auf einen dritten Punkt P, der von A um r_1 und von B um r_2 absteht, ist

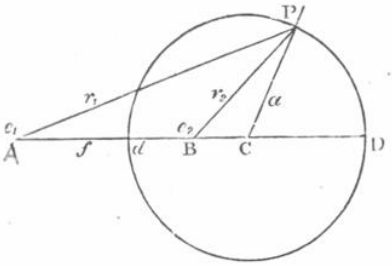


Fig. 6.

$$1) \qquad V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}.$$

Ich habe schon in Art. 118 und 119 den Verlauf der äquipotentiellen Flächen für diesen Fall beschrieben und auf den Tafeln II. und III. Darstellungen von Schnitten durch diese Flächen für die Fälle gegeben, dass e_1 und e_2 gleiche bezüglich entgegengesetzte Zeichen haben. Hier interessirt uns nur eine äquipotentielle Fläche, nämlich die, für welche das Potential verschwindet. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$1_1) \qquad \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0.$$

Haben e_1 und e_2 dasselbe Zeichen, so kann sich die zugehörende Fläche nur in der Unendlichkeit befinden. Sind aber e_1 und e_2 entgegengesetzte Grössen, so wird jene Gleichung auch für in der Endlichkeit liegende Punkte erfüllbar. Sie stellt dann eine Kugel und im Grenzfall eine Ebene dar.

Der Mittelpunkt C der Kugel liegt auf der Verbindungslinie der beiden electrischen Punkte A und B und sein Abstand AC, BC von ihnen genügt der Gleichung

$$2) \qquad AC : BC = e_1^2 : e_2^2.$$

Der Radius der Kugel ist dann

$$3) \qquad Cd = AB \frac{e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2} = BC \frac{e_1}{e_2} = \sqrt{AC \cdot BC}.$$

Er ist also die mittlere Proportionale zu den Abständen der Punkte A und B vom Kugelmittelpunkt.

Die beiden Punkte A und B heissen in Bezug auf die Kugel *Inverse Punkte*. Hat die Kugel den Radius Eins, so bilden sie mit den auf der Kugel liegenden Punkten des durch sie gehenden Durchmessers ein harmonisches Punktsystem, in dem sie einander zugeordnet sind.

Da sich die eben bestimmte Kugelfläche auf dem Potential Null befindet, so können wir sie uns durch eine dünne zur Erde abgeleitete Metallkugelfläche ersetzt denken. Wir ändern dadurch das Potential weder in dem von ihr eingeschlossenen noch in dem von ihr ausgeschlossenen Raum, vielmehr bleibt die electrische Wirkung stets von der Grösse, wie sie durch die alleinige Existenz der beiden electrischen Punkte bedingt wird.

Entfernen wir jetzt den innerhalb der Kugel befindlichen Punkt B, während diese noch mit der Erde in Verbindung bleibt, so sinkt das Potential in allen Punkten innerhalb der Kugel auf Null herab, ausserhalb der Kugel aber bleibt es ungeändert, weil erstens die Kugel ihr früheres Potentialniveau Null beibehalten hat und zweitens der electrische Punkt A in seiner ursprünglichen Lage geblieben ist.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich das Resultat:

Liegt ein electrischer Punkt ausserhalb eines kugelförmigen auf dem Potential Null erhaltenen Conductors, so ist seine electrische Wirkung auf ausserhalb des Conductors befindliche Punkte zusammen mit der Wirkung der durch ihn in dem Conductor inducirten Electricität ebenso gross wie seine Wirkung zusammen mit der eines innerhalb des Conductors befindlichen Punktes, den wir als sein electrisches Bild bezeichnen können.

Liegt der electrische Punkt innerhalb des Conductors, so ist seine electrische Wirkung auf innerhalb des Conductors befindliche Punkte zu-

sammen mit der Wirkung des inducirten Conductors ebenso gross wie seine Wirkung zusammen mit der eines ausserhalb des Conductors befindlichen und als electrisches Bild bezeichneten electrischen Punktes.

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen und verallgemeinern sie noch dadurch, dass wir statt der Kugel irgend eine Fläche zu Grunde legen, so haben wir die folgende Definition.

157. *Definition eines electrischen Bildes.* Befindet sich ein System von electrischen Punkten auf einer Seite einer Fläche, so ist sein electrisches Bild mit Bezug auf diese Fläche ein System electrischer auf der andern Seite der Fläche gelegener Punkte, welches auf der Seite der Fläche, wo das ursprüngliche electrische System sich befindet, in jeder Hinsicht ganz dieselbe Wirkung ausübt, wie die auf der Fläche selbst tatsächlich vorhandene Electricität.

In der Optik bezeichnet man bekanntlich ein auf der einen Seite eines Spiegels oder einer Linse gelegenes Punktsystem, welches, wenn es existirte, auf der andern Seite des Spiegels bezüglich der Linse dieselben Strahlen hervorbringen würde, welche dort tatsächlich vorhanden sind, als ein virtuelles Bild.

Electrische Bilder entsprechen also solchen virtuellen optischen Bildern insofern, als ihre Wirkung in Räumen betrachtet wird, in denen sie nicht existiren, die also von ihren imaginären Aufenthaltsorten durch Flächen getrennt sind. Sie entsprechen ihnen aber nicht in der wirklichen Lage, und sie können auch nicht, wie jene es wenigstens näherungsweise vermögen, in Brennpunkten vereinigt auftreten.

Während ferner optische Bilder wirklich im Raume existiren können, giebt es keine reellen electrischen Bilder, das heisst keine imaginären electrischen Punkte, welche auf derselben Seite der Fläche, auf der auch ihr imaginärer Aufenthaltsort sich befindet, dieselbe Wirkung wie die electrische Fläche ausüben.

Denn, wenn das Potential in einem bestimmten Gebiete gleich dem durch ein gewisses electrisches System hervorgebrachten Potential ist, so ist es eben das Potential dieses Systems allein, und keines andern, und dieses System muss eine reelle Existenz haben, weil man mit Hilfe der Poisson-Laplaceschen Gleichung die Electricitätsmenge in jedem Punkte des electrischen Systems eindeutig und reell bestimmen kann.

Es sei nunmehr a der Radius der Kugel und f der Abstand eines Punktes A, welcher die Electricitätsmenge e enthält, von ihrem Mittelpunkt. Das Bild B des Punktes A liegt auf dem zu A führenden Radius, ist vom Mittelpunkt der Kugel um

1) $$BC = \frac{a^2}{f}$$

entfernt und besitzt eine Electricitätsmenge von der Grösse

2) $$e_1 = -e\frac{a}{f}.$$

Dieses Bild wirkt, wie wir wissen, ausserhalb bezüglich innerhalb der Kugel (je nachdem es sich innerhalb bezüglich ausserhalb derselben befindet) wie die Kugel selbst, und das setzt uns in den Stand, die Verteilung der Electricität auf der Kugel zu bestimmen.

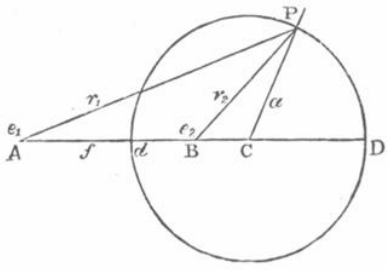


Fig. 7.

Nach der Coulombschen Gleichung (Art. 80) ist die resultirende Kraft R an einer Stelle der Oberfläche eines Conductors, wo die Electricität die Dichte σ hat,

$$R = 4\pi\sigma,$$

falls eine Kraft als positiv gerechnet wird, wenn sie von der Fläche fort wirkt.

Die Kraft R setzt sich aber aus zwei Teilen zusammen, einem Teile, der dem Punkte A seine Entstehung verdankt, längs der Linie AP wirkt und die Grösse e/AP^2 hat, und einem zweiten, dem Zeichen nach diesem entgegengesetzten, der von der Wirkung des Bildes B von A herrührt, in Richtung von BP wirkt und von der Grösse ea/fPB^2 ist.

Zerlegen wir jede dieser beiden Partialkräfte nach AC und CP, so hat die erste Kraft die Componenten

$$\frac{ef}{AP^3} \text{ in der Richtung } AC \text{ und } \frac{ea}{AP^3} \text{ in der Richtung } CP.$$

Die entsprechenden Componenten der zweiten Kraft sind

$$-e\frac{a}{f}\frac{BC}{BP^3} \text{ nach } AC \text{ und } -e\frac{a^2}{f}\frac{1}{BP^3} \text{ nach } CP.$$

Es ist aber

$$BP = \frac{a}{f}AP, \quad BC = \frac{a^2}{f},$$

und damit werden die Componenten der letztern Kraft

$$-ef\frac{1}{AP^3} \text{ in Richtung von } AC \text{ und } -e\frac{f^2}{a}\frac{1}{AP^3} \text{ in Richtung von } CP.$$

Die in Richtung AC wirkenden Componenten der Partialkräfte heben sich auf, so dass die gesammte Kraft den Punkt P in Richtung des Radius CP angreift. Hieraus folgt zunächst, dass die Kugelfläche wirklich eine Niveaufläche ist, denn an einer äquipotentiellen Fläche wirken die Kräfte überall senkrecht zu ihr.

Die resultirende Kraft in P wirkt also in Richtung von CP nach der Seite der Kugel, auf welcher der ursprüngliche electrische Punkt A sich befindet, und ihre Grösse ist

$$3_1) \qquad R = -e\frac{f^2 - a^2}{a}\frac{1}{AP^3},$$

wenn A ausserhalb und

$$3_2) \qquad R = -e\frac{a^2-f^2}{a}\frac{1}{AP^3},$$

wenn A innerhalb der Kugel liegt.

In der Form

$$3) \qquad R = -e\frac{AD.\,Ad}{CP}\frac{1}{AP^3},$$

wo D, d die Schnittpunkte der Kugel mit irgend einer von A aus durch die Kugel gezogenen Linie bezeichnen, braucht man keinen Unterschied zwischen den Fällen zu machen, wo der Punkt A ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt, weil $AD.\,Ad$ stets positiv ist.

158. Aus dem angeführten Coulombschen Satz ergiebt sich nunmehr die Flächendichte der Electricität im Punkte P der Kugel

$$4) \qquad \sigma = -\frac{e}{4\pi}\frac{AD.\,Ad}{CP}\frac{1}{AP^3},$$

woraus folgt, dass die Flächendichte in den einzelnen auf ein und derselben Kugel gelegenen Punkten umgekehrt proportional der dritten Potenz ihrer Entfernung vom electrischen Punkt A ist.

Die gesammte auf der Kugel vorhandene Electricitätsmenge ist, wie man leicht findet,

$$5) \qquad E = -e\frac{a}{f}.$$

Um es nochmals zu wiederholen, so bringt die so auf der Kugel verteilte Electricität zusammen mit der Ladung des Punktes A auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Kugel liegen, dieselbe Wirkung hervor, wie die Ladung des Punktes A zusammen mit einer Electricitätsmenge $-e\,a/f$, welche sich in einem vom Centrum der Kugel um a^2/f entfernten Punkte B befindet, der auf der Verbindungslinie des Punktes A mit dem Kugelmittelpunkt liegt. Die Electricität der Kugel für sich wirkt also, wenn sie auf derselben so verteilt ist, wie die Gleichung 4) vorschreibt, auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Fläche liegen, ebenso wie das mit der Electricitätsmenge $-e\,a/f$ geladene Bild von A.

Damit erhalten wir die folgenden Sätze.

Wenn Electricität auf einer Kugel vom Radius a so verteilt ist, dass ihre Flächendichte in irgend einem Punkte P umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkt A ist, dass also

$$\sigma = \frac{C}{AP^3}$$

ist, so giebt

$$6) \qquad -e = \frac{4\pi a\,C}{AD.\,Ad}$$

die Electricitätsmenge, welche im festen Punkt A concentrirt gedacht, auf der Kugel durch Influenz jene Verteilung hervorbringen würde.

Die Wirkung der so auf der Kugelfläche verteilten Electricität auf Punkte, die durch sie von A getrennt sind, ist ebenso gross wie die der im Punkte A concentrirt gedachten Electricitätsmenge

$$7) \qquad -e = \frac{4\pi a\, C}{AD.\, Ad}.$$

Ihre Wirkung auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Kugel liegen, ist ebenso gross wie die einer in dem Bilde von A concentrirt gedachten Electricitätsmenge

$$8) \qquad e_1 = \frac{4\pi a^2\, C}{f.\, AD.\, Ad}.$$

Die gesammte auf der Kugel verteilte Electricitätsmenge ist gleich

$$9_1) \qquad E_1 = \frac{4\pi a\, C}{AD.\, Ad},$$

wenn A innerhalb der Kugel liegt, und gleich

$$9_2) \qquad E_2 = \frac{4\pi a^2\, C}{f.\, AD.\, Ad},$$

wenn A ausserhalb derselben sich befindet.

All diese Sätze sind zuerst von W. Thomson in seinen geometrischen Untersuchungen über die Verteilung der Electricität auf kugelförmigen Conductoren aufgestellt. Ich verweise den Leser auf die Originalabhandlung.

159. Wir untersuchen den allgemeinen Fall, dass eine Kugel statt unter dem Einflusse eines electrischen Punktes unter dem eines ganzen Systems von Punkten sich befindet.

Die Kugelfläche sei also leitend, habe den Radius a und befinde sich durch ihre Verbindung mit der Erde stets auf dem Potential Null.

Die electrischen Punkte bezeichne ich durch $A_1, A_2, \ldots$, ihre bezüglichen Entfernungen vom Mittelpunkt der Kugel durch $f_1, f_2, \ldots$, ihre Ladungen durch $e_1, e_2, \ldots$ und endlich ihre Bilder mit Bezug auf die Kugel durch B_1, $B_2 \ldots$ Jedes Bild B_k befindet sich mit dem ihm zugehörigen electrischen Punkt A_k und dem Centrum der Kugel auf derselben Geraden. Die Entfernungen der Bilder vom Centrum sind

$$\frac{a^2}{f_1}, \frac{a^2}{f_2}, \ldots,$$

ihre bezüglichen Ladungen

$$-e_1\frac{a}{f_1}, \quad -e_2\frac{a}{f_2}, \ldots$$

Das Potential der durch Influenz der electrischen Punkte auf der Kugel verteilten Electricität ist dann auf Punkte, die mit den influencirenden

Punkten auf derselben Seite ihrer Oberfläche liegen, gleich dem Potential der Bilder der influencirenden Punkte.

Das System der einzelnen Bilder giebt also das Bild des Systems der influencirenden Punkte.

Man kann diese und alle vorhergehenden Betrachtungen leicht so abändern, dass sie ihre Geltung behalten, wenn das Potentialniveau der Kugel auch von Null verschieden ist.

Hat nämlich das Potentialniveau der Kugel den Wert V, so haben wir zu der influencirten Electricität noch eine andere hinzuzufügen, die mit gleichförmiger Dichte

$$\sigma_1 = \frac{V}{4\pi a}$$

auf der Kugel ausgebreitet ist.

Das Potential der Kugel ist dann in diesem Zustande in Punkten ausserhalb ihrer Oberfläche gleich dem Potential in ihrem frühern Zustande zusammen mit dem Potential einer in ihrem Mittelpunkt concentrirt gedachten Electricitätsmenge Va; das Potential auf Punkte innerhalb ihrer Oberfläche wächst um V an.

Die gesammte Electricitätsmenge der Kugel ist, wenn die influencirenden Punkte sich ausserhalb ihrer Oberfläche befinden,

$$10_1) \qquad E_1 = Va - e_1\frac{a}{f_1} - e_2\frac{a}{f_2} - \cdots$$

Kennt man eine der Grössen V oder E, so lässt sich die andere nach dieser Gleichung berechnen.

Liegen die influencirenden Punkte innerhalb der Kugeloberfläche, so wird die gesammte Electricitätsmenge der Kugel

$$10_2) \qquad E_2 = Va - e_1 - e_2 - \ldots$$

$-\Sigma e$ giebt die auf ihr inducirte Electricität an, die für jede geschlossene Fläche gleich und entgegengesetzt der inducirenden ist, wenn diese sich im Innern der Fläche befindet.

160.*) Bezeichnet man das Potentialniveau des electrischen Punktes A, wenn er als sehr kleine Kugel vom Radius b angesehen wird, mit v, verwendet für die Capacität der Kugel bezüglich des Punktes A die Buchstaben q_{aa}, q_{bb} und setzt den Inductionscoefficienten zwischen Kugel und Punkt gleich q_{ab}, so ist die electrische Energie dieser beiden Körper nach Art. 87, 1 c)

$$W = \tfrac{1}{2}\{q_{aa}V^2 + 2q_{ab}Vv + q_{bb}v^2\}.$$

---

*) Diese Stelle ist in dem Original etwas dunkel, die Anmerkung, die der Herausgeber der zweiten engl. Aufl., Herr Niven, deshalb zu derselben gemacht hat, scheint mir aber nicht zutreffend zu sein, ich habe sie darum fortgelassen und den Anfang des Artikels etwas anders, ich hoffe etwas klarer, gefasst. Anm. d. Uebers.

Aus Art. 93 ergiebt sich hieraus für die zwischen dem Punkt und der Kugel wirkende Abstossungskraft

$$F = \tfrac{1}{2}\left\{V^2 \frac{\partial q_{aa}}{\partial f} + 2\,Vv\,\frac{\partial q_{ab}}{\partial f} + v^2\,\frac{\partial q_{bb}}{\partial f}\right\}.$$

Nun ist zwar v für einen Punkt unendlich gross von der Ordnung e/b, aber $v\partial q_{ab}/\partial f$ ist ebenso wie $v^2\partial q_{bb}/\partial f$ endlich. Man hat nämlich, wenn der Punkt ausserhalb der Kugel liegt, nach später in Art. 173 abzuleitenden Formeln

$$q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{f^2 - b^2} + \cdots,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{f} - \frac{a^2 b^2}{f(f^2 - a^2 - b^2)} - \cdots,$$

$$q_{bb} = b + \frac{b^2 a}{f^2 - a^2} + \cdots,$$

somit bis auf unendlich kleine Grössen

$$\frac{\partial q_{aa}}{\partial f} = 0,\quad v\,\frac{\partial q_{ab}}{\partial f} = \frac{ae}{f^2},\quad v^2\,\frac{\partial q_{bb}}{\partial f} = -\frac{2e^2 af}{(f^2 - a^2)^2}.$$

Hiernach wird

$$11_1) \qquad F_1 = ea\left(\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2 - a^2)^2}\right) = \frac{e}{f^2}\left(E - e\,\frac{a^3(2f^2 - a^2)}{f(f^2 - a^2)^2}\right).$$

Die Kugel und der Punkt ziehen sich also an, wenn

1. die Kugel nicht isolirt ist,
2. die Kugel ausser der Influenzelectricität keine andere Ladung besitzt,
3. der electrische Punkt A der Kugelfläche hinlänglich kommt.

Soll jene Kraft in einer Repulsion bestehen, so muss das Potential der Kugel positiv und grösser sein als $ef^3/(f^2 - a^2)^2$, oder die Gesammtladung der Kugel muss mit e dasselbe Zeichen haben und einen grössern Betrag besitzen als $ea^3(2f^2 - a^2)/f(f^2 - a^2)^2$.

Im allgemeinen befindet sich im Felde eine Gleichgewichtsstelle, da aber Kugel und Punkt sich anziehen, wenn sie einander nahe kommen und sich abstossen, wenn sie sich von einander mehr entfernen, so kann A in diesem Punkte sich nur in einem labilen Gleichgewicht befinden.

Liegt der electrische Punkt innerhalb der Kugel, so ist die Grösse der auf ihn wirkenden Kraft

$$11_2) \qquad F_2 = \frac{e^2 af}{(a^2 - f^2)^2}.$$

Der Punkt wird dann stets vom Mittelpunkt fortgedrängt.

Befindet sich der influencirende Punkt wieder ausserhalb der Kugel, so ist die Flächendichte der Electricität in dem ihm nächsten Punkte der Kugel

$$12_1) \qquad \sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f+a)}{(f-a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E - e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\right\}.$$

und in dem von ihm entferntesten

$$12_2) \qquad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f-a)}{(f+a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E + e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}\right\}.$$

Liegt die Gesammtladung E der Kugel zwischen

$$e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \text{ und } -e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2},$$

so ist die Electricität negativ an der dem influencirenden Punkte A nächsten und positiv in der von ihm entferntesten Stelle der Kugel.

Es giebt dann auf der Kugel eine kreisförmige Linie, welche die beiden Electricitätsarten von einander trennt, und die in Folge dessen eine Gleichgewichtslinie sein muss.

Ist speciell

$$E = ea\left(\frac{1}{\sqrt{f^2-a^2}} - \frac{1}{f}\right),$$

so wird die Gleichgewichtslinie durch die Schnittcurve der Kugel mit einer andern äquipotentiellen Kugel gebildet. Der Mittelpunkt dieser zweiten Kugel liegt in A, und der Radius derselben ist gleich $\sqrt{f^2-a^2}$.

Die in Art. 121 beschriebene Figur auf Tafel V. soll dem Leser einen Begriff von dem Verlauf der äquipotentiellen Flächen und der Kraftlinien, die sich in diesem Falle ausbilden, geben.

Abbildung in einer leitenden unendlichen Ebene.

161. Wenn zwei Punkte gleich stark, aber entgegengesetzt electrisirt sind, so ist die Niveaufläche mit dem Potentialniveau Null eine Ebene, welche zwischen beiden Punkten hindurch geht, und deren Elemente ebenso weit von dem einen wie von dem andern electrischen Punkte abstehen.

Ist also A ein mit der Electricitätsmenge e geladener, in der Entfernung AD von einer leitenden und mit der Erde verbundenen Ebene liegender Punkt, so befindet sich sein Bild mit Bezug auf diese Ebene in einem Punkte B, der von ihm durch die Ebene getrennt ist, auf dem von A auf die Ebene gefällten Lote liegt, von dieser Ebene ebensoweit absteht wie A und die Electricitätsmenge $-e$ enthält. Dieses Bild wirkt auf alle von ihm durch die leitende Ebene getrennten Punkte, ganz ebenso wie die durch A auf der Ebene influenzirte Electricität. Denn erstens erfüllt das Gesammtpotential von A und B in allen Punkten, die mit A auf derselben Seite der Ebene sich befinden,

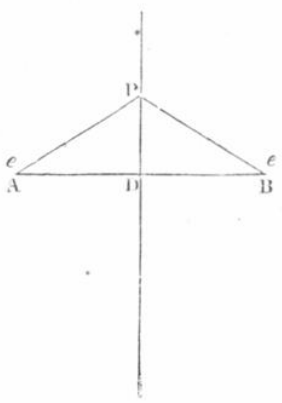


Fig. 8.

mit Ausnahme von A selbst, die Laplacesche Gleichung, und zweitens verschwindet dieses Gesammtpotential auf der Ebene. Die Bedingung, dass eine Function der Laplaceschen Gleichung genügt und auf einer vorgeschriebenen Fläche einen vorgeschriebenen Wert annimmt, genügt aber zur eindeutigen Bestimmung derselben.

Jedes Element P der Ebene wird von zwei Kräften angegriffen, die in den Richtungen AP bezüglich PB wirken und numerisch gleich $e/AP^2 = e/PB^2$ sind. Die resultirende Kraft wirkt also in Richtung von AB und ist der Grösse nach gleich

$$\frac{e}{AP^2}\,\frac{AB}{AP}.$$

Rechnet man die Kraft als positiv, wenn sie nach der Seite des Raumes wirkt, wo A liegt, und beachtet, dass $AB = 2AD$ ist, so folgt für dieselbe

1) $$R = -\frac{2eAD}{AP^3},$$

damit wird die Dichte der im Punkte P der Ebene durch A inducirten Electricität nach der Coulombschen Gleichung

2) $$\sigma = -\frac{eAD}{2\pi AP^3}.$$

Inversion.

162. Die Theorie der electrischen Bilder führt, wie ich im Folgenden zeigen will, unmittelbar zu einer besondern Transformation, die uns gestattet, aus einem electrischen Problem, dessen Lösung wir besitzen, eine Reihe anderer Probleme gleichzeitig mit ihren Auflösungen abzuleiten.

Bezeichnet r den Abstand eines electrischen Punktes vom Mittelpunkt einer mit dem Radius R geschlagenen Kugel, und giebt r' den Abstand seines Bildes (das sich auf demselben Radius wie der Punkt befindet) ebenfalls vom Mittelpunkt der Kugel, so gilt die Relation

a_1) $$rr' = R^2.$$

Man erhält also das Bild eines Systems von Punkten, Linien oder Flächen durch eine Constructionsmethode, die in der reinen Geometrie unter dem Namen der *Inversion* (Methode der reciproken Radien) bekannt und von Chasles, Salmon und andern Mathematikern behandelt worden ist.

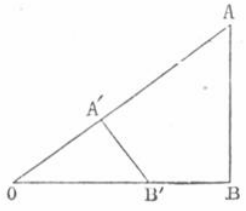


Fig. 9.

Sind A und B zwei electrische mit den Electricitätsmengen e, e_1 geladene Punkte, A' und B' ihre bezüglichen die Electricitätsmengen e', e_1' enthaltenden Bilder und O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel, so ergiebt sich aus der Gleichung unter a_1)

a) $$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = R^2.$$

Die Dreiecke OAB und $OB'A'$ sind also einander ähnlich und geben unter Zuhilfenahme der Gleichung a) die Doppelproportion

b) $$AB : A'B' = OA : OB' = OA \,.\, OB : R^2.$$

Ist V das Potential von A in B und V' das Potential von A' in B', so haben wir

$$V = \frac{e}{AB}, \quad V' = \frac{e}{A'B'}.$$

Da aber A', B' Bilder von A, B sind, so besteht nach Art. 156, 2) die Gleichung

c) $$e : e' = OA : R = R : OA',$$

also ist

d) $$V : V' = R : OB.$$

Das Potential eines electrischen Punktes auf einen andern Punkt verhält sich zum Potential seines Bildes auf das Bild dieses andern Punktes wie der Radius der abbildenden Kugel zu der Entfernung des zweiten Punktes vom Centrum der Kugel.

Es fällt sofort auf, dass dieses Verhältnis der bezeichneten Potentiale ganz unabhängig von der Lage des ersten electrischen Punktes in A ist, wir können daher den erweiterten Satz aufstellen:

Das Verhältnis des Potentials eines electrischen Systems auf einen Punkt zu dem Potential des Bildes des Systems auf das Bild des Punktes ist gleich dem Verhältnis des Radius der abbildenden Kugel zu der Entfernung des Punktes von dem Centrum der Kugel.

Daraus und aus den vorhergehenden Gleichungen fliessen eine Menge von Relationen, die ich nach dem Vorgange von Thomson und Tait in ihrem Lehrbuche über theoretische Physik (Art. 515) hier wiedergeben will.

Ausser den schon benutzten Bezeichnungen r, r'; e, e' für die Entfernung vom Kugelmittelpunkt und für die Electricitätsmenge des Punktes A bezüglich seines Bildes führe ich noch ein L, S, K; λ, σ, ρ für das Element einer Linie, Fläche und eines Raumes bezüglich für die Linien-, Flächen- und Raumdichte der Electricität in A, L', S', K'; λ', σ', ρ' für die entsprechenden Grössen im Bilde von A und nenne V das Potential in A, herrührend von einem Punkte B und V' das Potential im Bilde von A, herrührend vom Bilde von B. Damit erhalten wir

1) $$\frac{r'}{r} = \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2}, \quad \frac{S'}{S} = \frac{R^4}{r^4} = \frac{r'^4}{R^4}, \quad \frac{K'}{K} = \frac{R^6}{r^6} = \frac{r'^6}{R^6}$$

2) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{R^3}{r'^3}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^5}{R^5} = \frac{R^5}{r'^5}.$$

3) $$\frac{e'}{e} = \frac{R}{r} = \frac{r'}{R}.$$

4) $$\frac{V'}{V} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}.$$

Befindet sich im ursprünglichen System in A eine Conductorfläche vom constanten Potentialniveau P, so haben die Punkte ihres Bildes das Potential PR/r'. Verlegt man daher in den Mittelpunkt der abbildenden Kugel, in das *Centrum der Inversion*, eine Electricitätsmenge von der Grösse $-PR$, so reducirt sich das Potential des abgebildeten Conductors auf Null.

Kennt man also die Verteilung der Electricität auf einem isolirten Conductor, der bis zum Potential P geladen ist, so erhält man durch Inversion die Verteilung der Electricität auf einem andern mit der Erde in Verbindung stehenden Conductor, dessen Form gleich der des Bildes jenes Conductors ist, und der unter dem Einflusse einer im Centrum der abbildenden Kugel vom Radius R, im Inversionsmittelpunkt, concentrirten Electricitätsmenge $-PR$ sich befindet.

163. Ehe ich zu weitern Folgerungen und Anwendungen dieser Theorie übergehe, habe ich noch eine Reihe geometrischer Ergebnisse derselben anzuführen, deren Kenntniss uns von grossem Nutzen sein wird.

I. Der Winkel zwischen zwei geometrischen Figuren bleibt bei der Inversion ungeändert.

Oder allgemeiner.

Das Bild ist dem Gegenstand in den kleinsten Teilchen ähnlich.

II. Die Abbildung eines Kreises ist wiederum ein Kreis, der zur geraden Linie wird, falls der Kreis durch das Inversionscentrum geht.

III. Das Bild einer Kugel, die Ebene als Kugel mit unendlich grossem Radius mitgerechnet, ist wiederum eine Kugel. Geht die Kugel durch das Inversionscentrum, so wird ihr Bild zur Ebene.

Sind a, a' die Abstände der Mittelpunkte einer Kugel und ihrer Abbildung vom Mittelpunkt der abbildenden Kugel, also vom Inversionsmittelpunkt, α, α' die bezüglichen Radien der Kugeln und verstehen wir unter Potenz einer Kugel in Bezug auf das Inversionscentrum, wie üblich, das Product der Strecken einer Geraden vom Inversionscentrum bis zu ihren Schnittpunkten mit der Kugel, so dass die Potenz der ersten Kugel gleich $a^2 - \alpha^2$ und die der zweiten gleich $a'^2 - \alpha'^2$ ist, so gilt der Satz:

IV. Das Verhältnis der Abstände der Mittelpunkte einer Kugel und ihrer Abbildung vom Inversionscentrum ist gleich dem Verhältnis ihrer Radien, oder gleich dem Verhältnis der Potenz der Inversionskugel zu der Potenz der abzubildenden oder endlich gleich dem Verhältnis der Potenz der abgebildeten Kugel zur Potenz der Inversionskugel.

Wir haben also

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R^2}{a^2 - \alpha^2} = \frac{a'^2 - \alpha'^2}{R^2}.$$

V. Besteht der Gegenstand und sein Bild in einer Kugel und einer Ebene, so verhält sich das vom Inversionscentrum auf die Ebene gefällte Lot zum Radius der Inversionskugel wie dieser Radius zum Durchmesser der Kugel. Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf diesem Lote und geht durch das Centrum der Inversion.

VI. Das Bild des Centrums vom Bilde einer gegebenen Kugel in Bezug auf eine und dieselbe Inversionskugel fällt mit dem Bilde des Inversionscentrums in Bezug auf die gegebene Kugel zusammen.

Oder allgemeiner.

Das Bild des Inversionscentrums in Bezug auf eine der beiden Kugeln ist der inverse Punkt des Centrums der andern Kugel in Bezug auf die Inversionskugel.

VIIa. Geht ein Kreis gleichzeitig durch einen Punkt und durch das Bild dieses Punktes, so schneidet er die Inversionskugel senkrecht.

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig.

VIIb. Geht also ein Kreis durch einen Punkt und schneidet er zugleich die Inversionskugel senkrecht, so geht er auch durch das Bild jenes Punktes.*)

Zwei Punkte heissen *Invers in Bezug auf zwei Kugeln*, wenn sie Bilder von einander in den bezüglichen Kugeln sind.

VIII. Das Bild eines der beiden inversen Punkte in Bezug auf die Kugel, innerhalb deren er liegt, fällt mit seinem Bilde in Bezug auf die andere Kugel, also mit dem zweiten inversen Punkt zusammen.

IX. Geht ein Kreis durch die beiden inversen Punkte zweier Kugeln, so schneidet er diese Kugeln orthogonal.

Die inversen Punkte haben noch eine andere Eigenschaft, welche hervorgehoben werden muss, weil sie im folgenden oft benutzt wird.

X. Die Bilder zweier sich nicht schneidenden Kugeln in Bezug auf einen der beiden inversen Punkte sind concentrische Kugeln.

Sind α_1 und α_2 die Radien der Kugeln, c der Abstand ihrer Mittelpunkte, und ξ die Entfernung eines der inversen Punkte von dem Mittelpunkt der Kugel (α_2), so ist

$$\xi^2 + \xi\left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - c^2}{c}\right) = -\alpha_2^2.$$

Setzt man die Grösse

$$\left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c}\right)^2 - \alpha_2^2 = k^2,$$

also

$$k = \frac{1}{2c}\sqrt{\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + c^4 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2 c^2 - 2\alpha_2^2 c^2},$$

*) Die folgenden Sätze bis zum Schluss des Artikels habe ich wegen der in den Art. 171 bis 174 behandelten Probleme hinzugefügt, um wenigstens etwas für das leichtere Verständniss der dort ziemlich schwierig gehaltenen Untersuchungen zu tun. Anm. d. Uebers.

so wird

$$\xi = -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - c^2}{2c} \pm k.$$

Daher sind die Abstände der inversen Punkte von den bezüglichen Mittelpunkten der Kugeln (α_2), (α_1)

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c} - k = \sqrt{k^2 + \alpha_2^2} - k,$$

$$\xi_1 = c - \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c} + k\right) = c - \left(\sqrt{k^2 + \alpha_2^2} + k\right).$$

Der Abstand der beiden inversen Punkte von einander ist

$$\overline{\xi_1 \xi_2} = 2k.$$

164. Wir benutzen die Methode der Inversion, um die Verteilung der Electricität auf einer von einem electrischen Punkt influencirten leitenden, nicht isolirten Kugel (a) aus der gleichförmigen Verteilung der Electricität einer Kugel (a'), welche sich ganz allein im electrischen Felde befindet, abzuleiten.

Wir nehmen den electrischen Punkt A, den wir uns vorläufig als ungeladen vorstellen, zum Inversionscentrum. Ist dann f die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel (a) von A, bezeichnet ferner a den Radius dieser Kugel (a), a' den Radius ihrer Abbildung (a') und f' die Entfernung des Mittelpunktes unserer Abbildung vom Inversionscentrum A, so haben wir nach Art. 163, IV.

$$f' = f\frac{a'}{a} = f\frac{R^2}{f^2 - a^2}.$$

Erteilen wir der Kugel (a') eine Electricitätsmenge e' und entziehen sie allen fremden Einflüssen, so verteilt sich diese Electricitätsmenge ganz gleichförmig auf ihrer Oberfläche und giebt zur Entstehung einer Flächendichte

$$\sigma' = \frac{e'}{4\pi a'^2}$$

Veranlassung.

Die Wirkung dieser Electricität auf ausserhalb dieser Kugel gelegene Punkte ist dieselbe, wie die einer gleichen, in ihrem Mittelpunkt B' concentrirten Electricitätsmenge e'. Auf der Kugel selbst und in ihrem Innern ist das Potential

$$P' = \frac{e'}{a'}$$

eine Constante.

Bilden wir nunmehr diese gleichförmig belegte Kugel (a') in Bezug auf die um A gelegte Inversionskugel ab, so geht sie wieder in die ursprüngliche Kugel (a) über, und wir erhalten ausserdem einen Punkt B, der die

Abbildung des Centrums der Abbildung (a') des ursprünglichen Kugelconductors (a) mit Bezug auf eine und dieselbe Inversionskugel darstellt, der also nach dem im vorhergehenden Artikel angeführten Satz VI. mit dem Bilde des Inversionscentrums A in Bezug auf den Kugelconductor (a) zusammenfällt.

Der Ladung e', die wir uns früher in B' vereinigt denken konnten, entspricht in B eine Ladung $e'R/f'$.

Das Potential $P' = e'/a'$ des Punktes B' in einem Punkte der Bildkugel (a') geht für einen Punkt P auf dem ursprünglichen Conductor (a) oder für einen Punkt, der mit B auf derselben Seite dieses Conductors liegt, nach Art. 162, 4) über in

$$P = \frac{e'}{a'} \frac{R}{AP}.$$

Bringen wir aber in A eine Electricitätsmenge

$$e = -\frac{e'}{a'} R,$$

so sinkt das Gesammtpotential für alle Punkte der neuen Kugel (a) und für alle Punkte, die mit B auf derselben Seite von a liegen, auf Null herab.

Hingegen ist das Potential in allen Punkten, die sich auf derselben Seite der Kugelfläche wie A befinden, gleich dem Potential der Ladung e in A zusammen mit dem der Ladung $e'R/f'$ in B.

Es ist aber

$$\frac{e'R}{f'} = -e\frac{a'}{f'} = -e\frac{a}{f}.$$

Die Ladung des Punktes B ist also dieselbe, wie wir sie schon früher für die Ladung des Bildes von A erkannt haben, und hieraus folgt, dass das Potential der Kugel (a) auf Punkte, die mit A auf derselben Seite ihrer Oberfläche liegen, gleich dem Potential des Bildes B von A ist.

Für die Dichte der Electricität in einem Punkte der Kugel (a) ergiebt sich nach Art. 162, 2)

$$\sigma = \sigma' \frac{R^3}{AP^3} = \frac{e'}{4\pi a'^2} \frac{R^3}{AP^3} = -\frac{e}{4\pi a'} \frac{R^2}{AP^3}$$

oder

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \frac{f^2 - a^2}{a} \frac{1}{AP^3}.$$

Der letzte Ausdruck ist aber genau derselbe, wie wir ihn schon in Art. 157 für die Dichte der Electricität auf einer zur Erde abgeleiteten und durch die im Punkte A concentrirte Electricitätsmenge e influencirten Kugel vom Radius a berechnet haben.

Successive Bilder in endlicher Anzahl.

Abbildung in zwei Ebenen.

165a. Wenn ein Punkt sich zwischen zwei Conductorflächen befindet, so entwirft die eine derselben ein Bild von ihm. Dieses Bild wird dann von der zweiten Fläche wieder abgebildet und von dieser Abbildung des Bildes macht die erste Fläche ein neues Bild u. s. f. Dasselbe gilt von den Bildern, welche von dem durch die zweite Fläche erzeugten primären Bilde entworfen werden. Man erhält so zwei Reihen von Bildern des electrischen Punktes, die im allgemeinen eine unendliche Anzahl von Bildern umfassen. In besondern Fällen kommt es aber vor, dass in der Folge der einen Reihe von Abbildungen ein Bild mit dem primären Bilde der zweiten Reihe zusammenfällt, dann geben die beiden Reihen dieselben Bilder und umfassen eine endliche Anzahl von Bildern.

Das trifft beispielsweise ein, wenn die Conductoren aus zwei Ebenen bestehen, die sich unter einem Winkel schneiden, der ein Submultiplum von zwei Rechten ist.

Es sei in diesem Falle AOB ein Schnitt durch die beiden leitenden Ebenen, der senkrecht zur Durchsetzungslinie derselben geführt ist und den electrischen Punkt P enthält. Den Winkel AOB setzen wir gleich π/n, machen $PO = r$ und $POB = \vartheta$. Bilden wir den Punkt P in der Ebene OB ab, so erhalten wir nach Art. 161 sein Bild Q_1 auf dem Lote von P auf OB ebenso weit von der Ebene abstehend wie P. Die zweite Ebene OA entwirft dann ein Bild von Q_1 in P_2, welches auf dem Lote von Q_1 auf OA liegt und ebenso weit von OA absteht wie Q_1. Dann bildet die erste Ebene P_2 in Q_3 ab und die zweite Q_3 in P_3, die erste wieder P_3 in Q_2 und schliesslich in dem in der Figur angenommenen Fall die zweite Ebene Q_2 in P_1 ab, welches mit P zusammenfällt, so dass Q_2 das Bild von P in der Ebene OA ist. All diese Bilder liegen auf einem Kreise, der in O seinen Mittelpunkt hat und durch den electrischen Punkt P geht.

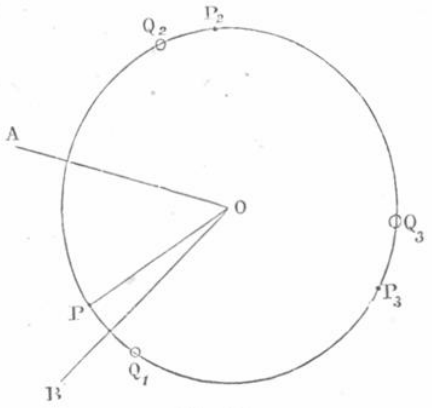


Fig. 10.

Hätten wir mit dem Bilde von P in AO begonnen, so würden wir ganz dieselben Bilder, nur in der umgekehrten Folge Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1 erhalten haben, wenn eben AOB ein Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist. Denn man überzeugt sich leicht, dass die Bilder von P mit Bezug auf die Ebene OA, also P_1, P_2, P_3, ebenso wie die Bilder mit Bezug auf die Ebene OB, also Q_1, Q_2, Q_3, auf dem Kreise in Intervallen von der Winkelgrösse $2AOB$ angeordnet sind. Wenn also $2AOB$ ein Submultiplum von

2π ist, so kann es nur eine endliche Anzahl von Bildern geben, deren keines in den Raum AOB fallen darf.

Wir haben also in diesem Falle, wo $AOB = \pi/n$ ist, n negative Bilder $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$, deren jedes (Art. 161) gleich und entgegengesetzt geladen ist wie P und $n-1$ positive $P_2, P_3 \ldots P_n$, deren jedes gleich und gleichsinnig geladen ist wie P.

Der Winkel im Centrum O zwischen zwei gleichsinnig geladenen Bildern ist gleich $2\pi/n$. Die Bilder sind in Bezug auf jede der beiden Ebenen symmetrisch angeordnet, so dass jedem positiven Bilde auf der entgegengesetzten Seite der Ebene ein negatives auf derselben Normale und in gleichem Abstande von der Ebene befindliches entspricht.

Die Bilder bestimmen völlig die durch Influenz des Punktes P auf den Ebenen hervorgerufenen Electricitäten, wie bald bei einem andern Beispiel erläutert wird.

Abbildung in zwei sich schneidenden Kugeln.

165b. Wir können aus diesem Fall sofort einen zweiten ableiten, indem wir die Ebenen mit Bezug auf irgend einen Punkt als Inversionscentrum abbilden. Sie gehen dann in zwei Kugeln oder in eine Kugel und eine Ebene über, die sich in einem Kreise schneiden und so eine Linse bilden. Der Winkel π/n zwischen den beiden Ebenen ändert seine Grösse nicht, und der electrische Punkt P liegt innerhalb dieses Winkels.

Die successiven Bilder von P mit Bezug auf die beiden Kugeln sind auf einem Kreise angeordnet, der durch P geht und die Kugeln rechtwinklig schneidet.

Wir finden diese Bilder, weil ein Punkt und sein Bild auf demselben Radius der abbildenden Kugel liegt, dadurch dass wir mit P anfangend Sehnen des Kreises ziehen, die alternirend durch die Mittelpunkte der Kugeln gehen.

Die Zeichen der Bilder wechseln wieder ab, so dass, wenn man den electrischen Punkt P mitzählt, ebenso viele positive als negative Bilder vorhanden sind.

Die Ladungen aller Bilder sind proportional ihren Abständen von ein und demselben (sonst willkürlichen) auf dem Schnittkreise der Kugeln liegenden Punkt, als welchen man den Punkt, wo die Ebene des Bilderkreises diesen Schnittkreis der beiden Kugeln trifft, annehmen kann.

In dieser Weise lässt sich also die Verteilung der Bilder bestimmen, wenn ein Raum durch zwei leitende Kugelflächenstücke begrenzt wird, die sich unter einem ausspringenden Winkel π/n schneiden, auf dem Potential Null erhalten werden und unter dem Einfluss eines electrischen von ihnen eingeschlossenen Punktes stehen.

166. Der eben betrachtete Raum wurde von zwei Kugelflächen begrenzt, deren Mittelpunkte ausserhalb desselben lagen, er hatte also die Gestalt einer gewöhnlichen biconvexen oder planconvexen Linse mit ausspringender Kante. Bilden wir jetzt jene Kugeln mit Bezug auf den electrischen Punkt P als Inversionscentrum ab, so erhalten wir durch die vorangegangenen Betrachtungen die Lösung des Problems der electrischen Verteilung auf zwei sich unter einem einspringenden Winkel π/n schneidenden Kugelsegmenten, deren Potentialniveau gleich 1 ist, und die von keinen äussern electrischen Agentien angegriffen werden.

Der Kreis, auf dem die Bilder früher lagen, geht in eine Gerade über, welche nach Art. 163, I, II durch die Mittelpunkte der Kugelsegmente hindurchgeht, er transformirt sich also in die Centrale der neuen Kugelflächen.

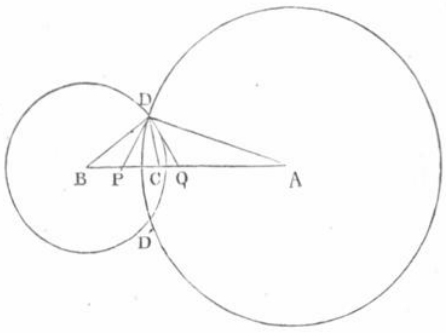


Fig. 11.

Die beistehende Fig. 11 repräsentirt einen Centralschnitt durch die Kugeln. A, B sind die Mittelpunkte der Kugeln, $P, C, Q, \ldots$ die electrischen Bilder und D, D' Punkte auf dem Durchsetzungskreis der Kugeln.

Die successiven Bilder liegen auf der Centrale AB.

Verbinden wir D mit A und ziehen von D aus Linien, die gegen DA um Winkel von der Grösse π/n, $2\pi/n, \ldots$ geneigt sind, so sind die Schnittpunkte $C, B \ldots$ mit der Centralen AB die positiven Bilder. Das letzte positive Bild liegt im Centrum B einer der Kugeln.

Ziehen wir andererseits von D aus Linien, welche die Centrale AB unter Winkeln $\pi/n, 2\pi/n, \ldots$ treffen, so sind die Schnittpunkte dieser Linien mit der Centralen die negativen Bilder. Die Ladungen der Bilder sind abgesehen vom Zeichen proportional ihren bezüglichen Abständen von D.

Die Flächendichte in irgend einem Punkte S einer der Kugeln ist gleich der Summe der Flächendichten, welche die einzelnen entsprechenden Bilder dort hervorrufen.

Liegt also beispielsweise S auf der Kugel mit dem Centrum A, und sind $A, B, C \ldots$ die positiven Bilder, so ist nach Art. 157 die Flächendichte der Electricität in S

$$1) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi DA}\left[1 + (AD^2 - AB^2)\frac{DB}{BS^3} + (AD^2 - AC^2)\frac{DC}{CS^3} + \ldots\right].$$

In dem Schnittkreise der Segmente ist die Flächendichte gleich Null.

Die ganze auf einem der Kugelsegmente enthaltene Electricitätsmenge findet sich durch eine einfache Integration.

Nehmen wir wieder das Kugelsegment um A, so ist σ_1 die Flächendichte in einem Punkte desselben, welche von der positiven Electricitäts-

menge AD in A hervorgerufen wird. Aehnlich verdankt σ_2 der positiven Electricitätsmenge BD in B seine Entstehung u. s. f.

Die einzelnen Integrationen sind über die ganze Fläche des Segments auszuführen, und indem man von den angegebenen Werten für die Flächendichten Gebrauch macht, findet sich

$$\iint \sigma_1 \, ds = DA \, \frac{DA + OA}{2\,DA} = \frac{DA + OA}{2}$$

$$\iint \sigma_2 \, ds = DB \, \frac{DB + OB}{2\,DB} = \frac{DB + OB}{2} \qquad \text{u. s. f.,}$$

wo O den Mittelpunkt des Schnittkreises der beiden Segmente um A und B angiebt, und die Strecken OA, OB, ... von O zur Rechten gemessen als positiv, zur Linken als negativ in Anschlag zu bringen sind.

Die Gesammtladung des Segments (A) ist also

$$2) \qquad E = \tfrac{1}{2}(DA + DB + DC + \ldots) + \tfrac{1}{2}(OA + OB + OC + \ldots) - \tfrac{1}{2}(DP + DQ + DR + \ldots) - \tfrac{1}{2}(OP + OQ + OR + \ldots).$$

167. Man kann die Methode der electrischen Bilder auf irgend einen Raum anwenden, welcher von Ebenen oder Kugeln begrenzt wird, die sich alle unter Winkeln, welche Submultipla von zwei rechten Winkeln sind, schneiden.

Dazu muss im Falle sphärischer Flächen jeder körperliche Winkel in dem System von drei Flächen begrenzt sein, zwei seiner Kantenwinkel müssen rechte Winkel, der dritte ebenfalls ein rechter oder ein Submultiplum von zwei rechten Winkeln sein.

Die Anzahl der Bilder ist endlich, wenn wir haben

1) Eine einzelne Kugelfläche oder Ebene.

2) Zwei Ebenen, eine Kugel und eine Ebene, oder zwei Kugeln, die sich unter einem Winkel π/n durchsetzen.

3) Zwei der unter 2) erwähnten Flächen und eine dritte Ebene oder Kugel, welche jene rechtwinklig durchsetzt.

4) Drei der unter 3) erwähnten Flächen und eine vierte Ebene oder Kugel, welche die beiden ersten Flächen rechtwinklig, die dritte unter einem Winkel π/n' schneidet.

In diesem Falle muss wenigstens eine der vier begrenzenden Flächen eine Kugelfläche sein.

Den ersten und zweiten Fall haben wir schon behandelt, und es hat sich ergeben, dass im ersten Falle ein Bildpunkt vorhanden ist, im zweiten $2n - 1$ Bilder (abgesehen vom influencirenden Punkt) sich vorfinden, die alle auf einem Kreise angeordnet sind, der durch den influencirenden Punkt geht und die beiden Flächen orthogonal schneidet.

Im dritten Fall haben wir ausser diesen $2n - 1$ Bildern auch noch ihre Bilder in Bezug auf die dritte Fläche, zusammen also $4n - 1$ Bilder ausser dem influencirenden Punkt.

Um im vierten Fall die Anzahl der Bilder zu finden, construiren wir zunächst die Bilder für die beiden ersten Flächen auf dem Kreise, der sie beide orthogonal trifft. Dann construiren wir uns zu jedem der $2n$ Bilder (der influencirende Punkt eingeschlossen), indem wir durch jedes Bild einen Kreis ziehen, der orthogonal zur dritten und vierten Fläche ist, die $2n' - 1$ neuen Bilder, so dass wir im ganzen den influencirenden Punkt mit einbegriffen $2nn'$ positive und $2nn'$ negative, also $4nn'$ Bilder erhalten.

Diese $4nn'$ Bilder sind die Schnittpunkte von n Kreisen mit n' andern Kreisen, welche zu den beiden Systemen von Krümmungslinien einer Cyclide gehören.

Ist jeder der Punkte mit der ihm zukommenden Electricitätsmenge geladen, so besteht die Fläche, deren Potential gleich Null ist, aus $n + n'$ Kugeln, die sich in zwei Reihen anordnen. In der einen Reihe ist der Schnittwinkel auf einander folgender Kugeln gleich π/n, in der andern ist dieser Winkel gleich π/n'.

Jede Kugel der ersten Reihe durchsetzt jede Kugel der zweiten Reihe orthogonal.

168 a. *Zwei sich rechtwinklig schneidende Kugeln.* (Tafel V.) Ich führe die Rechnungen specieller zunächst für den Fall aus, dass zwei leitende Kugeln sich rechtwinklig durchschneiden.

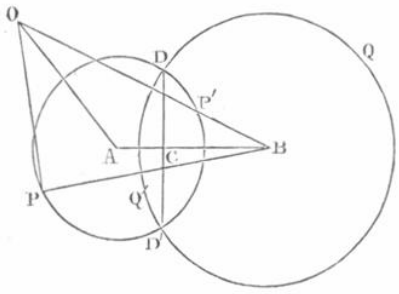


Fig. 12.

A und B (Fig. 12) seien die Mittelpunkte der Kugeln, D und D' Punkte auf ihrem Durchschnittskreis und C gebe den Schnittpunkt von DD' mit der Centrale AB, also den Mittelpunkt des Schnittkreises der Kugeln an.

n ist in diesem Fall gleich 2, es giebt also 4 Bilder, zwei davon, die positiven, fallen in A bezüglich B, die beiden andern negativen Bilder liegen in demselben Punkte C, denn C ist sowohl das Bild von A in der Kugel um B als das Bild von B in der Kugel um A.

Setzt man zur Abkürzung

a) $$AD = \alpha,\ BD = \beta,$$

so wird

b) $$DC = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Demnach sind, Art. 165, 166, die Ladungen in A, B und C

1) $$\alpha,\ \beta,\ -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Das Potential der drei Punkte auf einen von ihnen um die bezüglichen Strecken r_1, r_2, r_3 abstehenden Punkt ist

2) $$V = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\beta}{r_2} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{1}{r_3}.$$

Sucht man die Fläche, für welche dieses Potential gleich 1 wird, so findet man nach leichter Zwischenrechnung unsere Kugelflächen. Letztere sind also Niveauflächen mit dem Potentialniveau 1.

Wenn sich nun 2 Kugeln schneiden, so können wir vier Configurationen ableiten, deren Grenzflächen Teile beider Kugeln sind, nämlich die Linse $PDQD'P$ mit einspringender Kante, die Linse $P'DQ'D'P'$ mit auspringender Kante, den Meniscus $DPD'Q'D$ und den Meniscus $DQD'P'D$.

Auf jeder dieser Configurationen ist das Potential gleich 1.

Wir erhalten demnach durch die obigen in A, B und C gelegenen Bilder die Lösung für die Verteilung der Electricität in 4 Problemen.

1) Der Conductor $PDQD'P$ befindet sich auf dem Potentialniveau 1 und enthält die Electricitätsmenge

1_1) $$\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = AD + BD - CD,$$

welche die Capacität dieses Conductors bezeichnet, wenn er sich, wie im angenommenen Fall, in einem freien electrischen Felde befindet.

Man bekommt in der oft angegebenen Weise die Flächendichte der Electricität in einem Punkte P der Kugel um A bezüglich in einem Punkte Q der Kugel um B, wenn man beachtet, dass der Punkt C bei jeder Kugel zweimal berücksichtigt werden muss, einmal als Bild von A in der Kugel um B und dann als Bild von B in der Kugel um A, gleich

3_1) $$\frac{1}{4\pi\alpha}\left[1 - \left(\frac{\beta}{BP}\right)^3\right] \text{ bezüglich } \frac{1}{4\pi\beta}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{AQ}\right)^3\right].$$

Auf dem Durchschnittskreise der Segmente ist die Flächendichte gleich Null.

Wenn eine der Kugeln sehr gross gegen die andere wird, so ist die Dichte in dem Scheitel der kleineren Kugel dreimal so gross wie die in dem Scheitel der grösseren.

2) Die Linse $P'DQ'D'P'$ befindet sich auf dem Potential 1, enthält die Electricitätsmenge

1_2) $$-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = -CD$$

und wird von den in den Punkten A, B concentrirten bezüglichen Ladungen α, β angegriffen.

Für die Dichte der Electricität in den verschiedenen Punkten der Linsenfläche findet man dieselben Ausdrücke, wie im vorigen Fall.

3) Der Meniscus $DPD'Q'D$ hat das Potentialniveau 1, enthält die Ladung

$1_3)$ $$\alpha = AD$$

und wird von den in den Punkten B, C concentrirten Electricitätsmengen β, $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ angegriffen. Alles andere wie früher.

4) Der Meniscus $DQD'F'D$ hat wieder das Potential 1, ist mit der Electricität

$1_4)$ $$\beta = BD$$

geladen und steht unter dem Einflusse der in den Punkten A, C concentrirten Electricitäten α und $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Das gilt alles für die äussern Flächen der angeführten Conductorformen. Man kann aber auch die entsprechenden Probleme für die innern Flächen lösen, wenn diese sich unter dem Einflusse der betreffenden von ihnen eingeschlossenen electrischen Punkte A, B, C befinden. Ich gehe darauf nicht weiter ein, sondern wende mich zu einer Erweiterung des ad 1) behandelten Falles.

168b. *Linse mit einspringender Kante von einem äussern electrischen Punkt influencirt.*

Ich bestimme nämlich die Flächendichte in Punkten der ersten Linse (der mit einspringender Kante), wenn sie von einer negativen Electricitätseinheit, die sich ausserhalb ihrer Oberfläche im Punkte O befindet, influencirt wird, und das Potentialniveau Null hat.

Ist r der Abstand eines Punktes P der Oberfläche unseres Conductors in seinem jetzigen Zustande vom Punkte O, so wird durch Ladung dieses Punktes mit einer negativen Electricitätseinheit das Potential in P um $-1/r$ vermehrt, so dass es auf $1-1/r$ ansteigt.

Wir haben daher ein System zu construiren, dessen Inversion mit unserm Conductor zusammenfällt und auf der Oberfläche das Potential $1/r$ hat.

Ein solches System erhält man aber, wenn man den Conductor in Bezug auf eine Kugel, deren Radius gleich 1 ist, und deren Centrum sich in O befindet (das wir uns noch als electricitätsfrei vorzustellen haben), abbildet.

Die Abbildung darf sich aber nur auf die Form erstrecken.

Die Inversion unseres Conductors ist diesem in den kleinsten Teilchen ähnlich und alle Betrachtungen, die wir für diesen angestellt haben, gelten unmittelbar auch für seine Inversion.

Setzen wir im ursprünglichen Conductor

a) $$OA = a,\ OB = b,\ OP = r,\ OQ = \varrho,\ BP = p,\ AQ = q,$$
$$AD = \alpha,\ BD = \beta,\ AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

und benutzen accentuirte Buchstaben zur Bezeichnung der Bilder dieser Grössen, so haben wir nach der Aufgabe ad 1)

1') $$\sigma' = \frac{1}{4\pi\alpha'}\left[1 - \left(\frac{\beta'}{p'}\right)^3\right],$$

wenn P' auf der Kugel um A' liegt und das Potentialniveau des inversen Systems gleich 1 ist.

Es ist aber nach den Gleichungen unter 1) in Art. 162 und nach IV) in Art. 163

b) $$a' = \frac{a}{a^2 - \alpha^2}, \quad b' = \frac{b}{b^2 - \beta^2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{b^2 - \beta^2},$$

$$r' = \frac{1}{r}, \quad p'^2 = \frac{\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)}{r^2 (b^2 - \beta^2)^2},$$

somit wird

1) $$\sigma' = \frac{1}{4\pi}\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{[\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Bilden wir nunmehr die Inversion des inversen Systems mit Bezug auf dieselbe Abbildungskugel, so erhalten wir genau unser ursprüngliches System wieder, aber da wir dem inversen System das Potentialniveau 1 zugeschrieben haben, so wird in einem Punkt P der Inversion des inversen Systems, also unseres ursprünglichen Systems, das Potential nach der citirten Gleichung 4) in Art. 162 gleich $1/r$. Bringen wir dann in O eine negative Electricitätseinheit, so sinkt das Potential in P und überhaupt in allen Punkten unseres Conductors auf Null.

Ferner ist nach Art. 162, 2)

2') $$\sigma = \frac{1}{r^3}\sigma'.$$

Befindet sich also ein Conductor der angegebenen Form, während er zur Erde abgeleitet ist, unter dem influencirenden Einfluss einer in O concentrirten negativen Electricitätseinheit, so ist die Flächendichte der in einem vom electrischen Punkt O um r abstehenden Punkt P der Kugel A influencirten Electricität

2) $$\sigma = \frac{1}{4\pi r^3}\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{[\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Die Flächendichte in einem von O um ϱ abstehenden Punkte Q der Kugel um B erhalten wir durch Vertauschung von $a, b, \alpha, \beta, p, r$ mit $b, a, \beta, \alpha, q, \varrho$.

Um die gesammte Influenzelectricität unseres Conductors zu finden, wenden wir uns wieder dem inversen System zu; dort befinden sich in den Punkten A', B', C' die bezüglichen Ladungen

$$\alpha', \beta', -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},$$

A', B' sind die Mittelpunkte der inversen Kugeln, C' ist der inverse Punkt C,

Setzen wir also

c) $$OA' = a', \quad OB' = b', \quad OC' = c',$$

so erhalten wir, indem wir das inverse System in unser ursprüngliches zurück invertiren, nach der Gleichung unter 3) in Art. 162 für die Ladungen in A, B, C

3') $$\frac{\alpha'}{a'}, \quad \frac{\beta'}{b'}, \quad -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\frac{1}{c'}.$$

Nun ist zunächst (Art. 163)

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta'}{b'} = \frac{\beta}{b}.$$

Ferner haben wir

$$A'C' : C'B' = \alpha'^2 : \beta'^2,$$

$$A'B' = \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

also

$$c'^2 = \frac{a'^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2 - \alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2},$$

und damit wird die gesammte Influenzelectricität des Conductors

3) $$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

Drei orthogonale Kugeln im freien electrischen Felde.

169. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Kugeln mit A, B, C die Radien mit α, β, γ, so wird

a) $$AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad BC = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}, \quad CA = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2}.$$

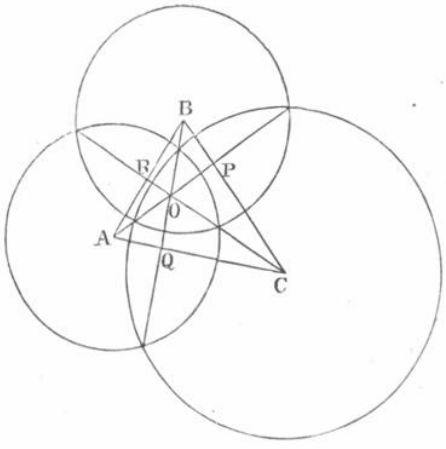


Fig. 13.

Ferner seien P, Q, R die Fusspunkte der von A, B, C auf die gegenüberliegenden Centralen gefällten Lote und O gebe den Schnittpunkt dieser Lote an.

P ist das Bild von B in der Kugel (C) und ebenso das Bild von C in der Kugel (B), und es wird seinerseits durch O in der Kugel (A) abgebildet.

Sind α, β, γ die in den Mittelpunkten A, B, C concentrirten Ladungen, so haben wir für die Ladung in P (ähnlich wie im vorigen Artikel für die Ladung in C)

1) $$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Ferner ist

$$AP=\frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},$$

also die Ladung im Bilde O von P

2) $$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Genau so berechnet man die Ladungen der Bilder in R und in Q zu

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}}} \text{ und } -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

Die weitern Abbildungen von R und Q fallen dann in O, so dass O ein dreifacher Bildpunkt ist.

Damit lässt sich dann alles, was auf die Verteilung der Electricität auf dem System Bezug hat, unmittelbar erledigen. Das Potentialniveau der Kugeln ist gleich Eins.

Vier orthogonale Kugeln.

170 a. Aehnlich kann man die Verteilung der Bilder, welche vier electrischen, sich rechtwinklig schneidenden Kugelflächen mit dem Potentialniveau 1 electrisch äquivalent sind, finden.

Ist der Mittelpunkt der vierten Kugel D, ihr Radius gleich δ, und concentriren wir in dem Mittelpunkt eine Ladung δ, so ist die Ladung in dem Schnittpunkte der Centrale zweier Kugeln, etwa (A) und (B), mit der Ebene des Schnittkreises der beiden Kugeln, also in dem Bilde von B in (A) oder A in (B), gleich

1) $$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

Das Bild dieses Punktes liegt in dem Schnittpunkte der durch die drei Centren A, B, C gelegten Ebene mit einem von D gefällten Lot, und die daselbst befindliche Ladung ist

2) $$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Durch die vier Centren lassen sich aber vier Ebenen legen, welche je drei von ihnen in sich aufnehmen, wir haben also auch vier von den betreffenden übrigbleibenden Centren zu fällende Lote. Diese vier Lote schneiden sich in einem Punkt, der wieder der Bildpunkt des letzten Bildes ist und die Ladung

$$3) \qquad -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}}}$$

enthält. Genau so kann man alle noch fehlenden Bilder construiren und ihre Ladungen berechnen. Die letzten Abbildungen fallen immer in den Schnittpunkt D der vier letztgenannten Lote, der somit ein vierfacher Bildpunkt ist. Ausser den vier Centren hat man sechs einfach invertirte, vier zweimal invertirte Punkte und einen dreimal invertirten Punkt; mit den vier Centren kommen also für diesen Fall fünfzehn Bilder in Rechnung.

170b. *Vier sich rechtwinklig schneidende Kugeln unter dem Einfluss eines electrischen Punktes.* Wie früher bezeichnen A, B, C, D die Centren der vier Kugeln und O den electrischen Punkt. Man construirt vier andere Kugeln A_1, B_1, C_1, D_1, von denen jede durch O hindurchgeht und die ihr nicht entsprechenden drei ursprünglichen Kugeln orthogonal schneidet, so dass die Kugel (A_1) durch O hindurchgeht und (B), (C), (D) rechtwinklig durchsetzt. Ausser in dem Punkte O schneiden sich je drei der vier construirten Kugeln auch noch in einem andern Punkte, den ich mit A', B', C', D' bezeichne, je nachdem zu den sich schneidenden Kugeln A_1, B_1, C_1 oder D_1 nicht gehört. Darauf construirt man weitere sechs Kugeln (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd), deren jede durch O und den Schnittkreis zweier der ursprünglichen Kugeln geht [z. B. (ab) durch den von (A) und (B)].

Von diesen sechs Kugeln wird jede, etwa (cd) von zwei der zuerst construirten vier Kugeln, von (A_1), (B_1) in einem Punkte $(a'b')$ geschnitten. Das giebt sechs Punkte.

Weiter schneidet jede der Kugeln (A_1), (B_1), (C_1), (D_1), etwa (A_1), drei der sechs Kugeln, etwa (ab), (ac), (ad) in einem Punkte a', was wieder vier Schnittpunkte giebt.

Endlich durchsetzen sich alle sechs Kugeln noch in einem Punkt S. Im ganzen haben wir also, abgesehen von O, fünfzehn Schnittpunkte.

Bilden wir die Inversion des aus den leitenden vier Kugeln bestehenden Conductors und aller zehn dazu construirten Kugeln in Bezug auf eine um O als Centrum mit dem Radius R geschlagene Kugel, so geht der Conductor in einen ihm in den kleinsten Teilchen ähnlichen Conductor über, und die zehn construirten Kugeln geben, weil sie alle das Inversionscentrum enthalten, zehn Ebenen.

Von den fünfzehn Schnittpunkten zwischen je drei der zehn construirten Kugeln gehen die vier ersten A', B', C', D' in die Centren der inversen Conductorkugeln über. Die elf andern verwandeln sich in das System der Bilder, das wir am Ende des vorigen Artikels behandelt haben. Die Inversionen der

fünfzehn Schnittpunkte der construirten Kugeln sind also die Bilder des Punktes O in unserm aus vier Kugeln zusammengesetzten Conductor.

In dem Punkt A', der das Bild von O in der Kugel (A) ist, haben wir die Ladung zu verlegen, die ihm als Bild von O zukommt, also $-\alpha/a$, wo α der Radius von (A) ist und a den Abstand seines Centrums von O angiebt.

Entsprechend haben wir in den Punkt B', C', D' die Ladungen $-\beta/b$, $-\gamma/c$, $-\delta/d$ zu concentriren.

Die Ladungen der andern elf Bilder ergeben sich aus den am Ende des letzten Capitels abgeleiteten Ausdrücken, indem man in ihnen α, β, γ, δ durch

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{b^2 - \beta^2}, \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2 - \gamma^2}, \quad \delta' = -\frac{\delta}{d^2 - \delta^2}$$

ersetzt und jede Ladung mit dem Abstande des zugehörigen Punktes vom electrischen Punkt O multiplicirt.

Successive Bilder in unendlicher Anzahl.

Zwei concentrische Kugelflächen.

171. Wird ein Raum von zwei Kugelflächen begrenzt, die sich nirgends schneiden, und die unter dem Einfluss eines in diesem Raume befindlichen electrischen Punktes stehen, so bilden die successiven Abbildungen des electrischen Punktes in ihnen zwei unendliche Reihen. Alle Bilder liegen ausserhalb des von beiden Kugelflächen begrenzten Raumes, so dass man die Theorie der electrischen Bilder in Anwendung bringen kann.

Man darf das Problem, das uns jetzt beschäftigen soll, dadurch vereinfachen, dass man die Kugelflächen als concentrisch annimmt, denn wenn sie es nicht sind, so kann man sie durch Inversion in Bezug auf einen ihrer inversen Punkte immer dazu machen (Art. 163, X).

Wir beginnen also mit dem Fall, wo wir zwei concentrische, leitende, nicht isolirte Kugelflächen haben, die von einem electrischen zwischen ihnen liegenden Punkt influencirt werden.

Der Radius der ersten Kugel sei b, der der zweiten be^{ω} und der Abstand des electrischen Punktes P vom Centrum O gleich be^{u}. Alle Bilder liegen mit P auf demselben Radius der Kugelflächen ausserhalb des von ihnen begrenzten Raumes.

Sei Q_0 das Bild von P in der ersten Kugel, P_1 das von Q_0 in der zweiten, Q_1 das von P_1 in der ersten u. s. f., dann haben wir allgemein nach Art. 162, 1)

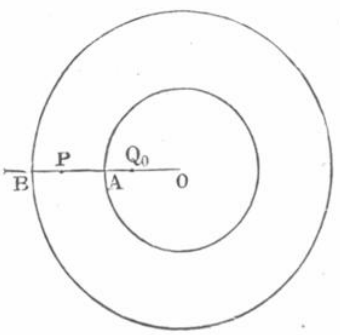


Fig. 14.

1′) $$OP_s \cdot OQ_s = b^2,$$

2′) $$OP_s \cdot OQ_{s-1} = b^2 e^{2\omega},$$

wo Q_s das Bild von P_s in der ersten Kugel und P_s das Bild von Q_{s-1} in der zweiten Kugel ist. Aus diesen Recursionsformeln folgt

$$OQ_0 = be^{-u},$$
$$OP_1 = be^{u+2\omega},$$
$$OQ_1 = be^{-(u+2\omega)},$$

und allgemein

1) $$OP_s = be^{u+2s\omega},$$

2) $$OQ_s = be^{-(u+2s\omega)}.$$

Bezeichnet man die Ladung des electrischen Punktes in P durch P, und allgemein die Ladung eines Bildes in P_s durch P_s, so haben wir

3) $$P_s = Pe^{s\omega},$$

4) $$Q_s = -Pe^{-(u+s\omega)},$$

und damit ist die erste Reihe von Bildern vollständig bestimmt.

Die zweite Reihe von Bildern bekommen wir dadurch, dass wir P zuerst in der zweiten Kugel abbilden. Ist Q_1' das Bild von P in der zweiten Kugel, P_1' das von Q_1' in der ersten, Q_2' das von P_1' in der zweiten u. s. f., so findet man

$$OQ_1' = be^{2\omega-u}, \qquad OP_1' = be^{u-2\omega},$$
$$OQ_2' = be^{4\omega-u}, \qquad OP_2' = be^{u-4\omega},$$
. . . . . .

Allgemein ist

5) $$OP_s' = be^{u-2s\omega},$$

6) $$OQ_s' = be^{2s\omega-u}.$$

Die Ladungen dieser Bilder ergeben sich zu

7) $$P_s' = Pe^{-s\omega},$$

8) $$Q_s' = -Pe^{s\omega-u}.$$

Alle Bilder P sind positiv geladen, alle Bilder Q negativ, ausserdem gehören alle P' und Q, also alle Bilder in Bezug auf die erste Kugel, zur Bestimmung der electrischen Verteilung auf der ersten Kugel und alle P und Q', also alle Bilder in Bezug auf die zweite Kugel, zur Bestimmung der Verteilung auf der zweiten.

Die Ladungen der Bilder, die bei der ersten Kugel in Betracht kommen, bilden eine convergente Reihe, deren Summe

$$9\,a) \qquad (A) = -P\frac{e^{\omega-u}-1}{e^{\omega}-1}$$

die Electricitätsmenge der ersten, innern, Kugelfläche angiebt.

Die Bilder, die bei der zweiten, äussern, Kugel in Rechnung zu ziehen sind, liegen ausserhalb ihrer Oberfläche, und ihre Ladungen bilden eine divergente Reihe, aber da eben das Flächenintegral einer jeden Einzelladung in Bezug auf diese zweite Kugelfläche verschwindet (d. h. die gesammte auf beiden Kugelflächen influencirte Electricitätsmenge gleich und entgegengesetzt der influencirenden ist), so hat man für die auf der äussern Kugelfläche influencirte Electricitätsmenge

$$10\,a) \qquad (B) = P\left(\frac{e^{\omega-u}-1}{e^{\omega}-1}-1\right) = -P\frac{e^{\omega}-e^{\omega-u}}{e^{\omega}-1}.$$

Beachten wir, dass

$$e^{\omega} = \frac{OB}{b} = \frac{OB}{OA} \text{ und } e^{u} = \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OA}$$

ist, so resultirt auch

$$9\,b) \qquad (A) = -P\frac{OA}{OP}\frac{PB}{AB},$$

$$10\,b) \qquad (B) = -P\frac{OB}{OP}\frac{AP}{AB}.$$

Werden die Radien der Kugeln unendlich gross, so liegt der electrische Punkt zwischen zwei parallelen unendlichen Ebenen, und es wird

$$9_1) \qquad (A)_1 = -P\frac{PB}{AB},$$

$$10_1) \qquad (B)_1 = -P\frac{AP}{AB}.$$

Zwei sich ausschliessende Kugelflächen.

172. Auf den eben behandelten Fall lässt sich der allgemeinere reduciren, dass zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, irgendwie zu einander liegen. Denn, wenn man die beiden Kugeln in Bezug auf einen der beiden inversen Punkte OO', durch welche auch alle Kreise hindurchgehen, welche beide Kugeln orthogonal schneiden, invertirt, so erhält man zwei concentrische Kugeln.

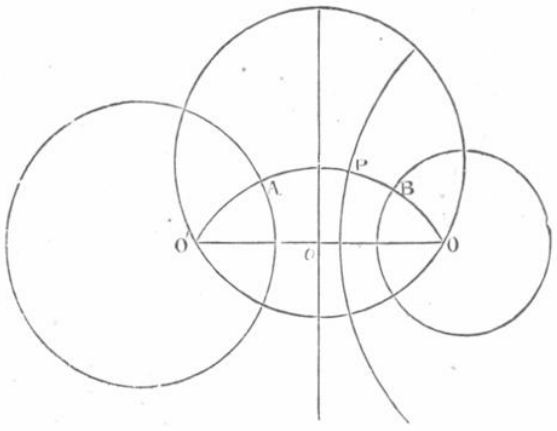


Fig. 15.

Für zwei concentrische Kugelflächen haben wir aber schon im vorigen Artikel die Lösung gefunden. Bilden wir demnach rückwärts die Inversion der concentrischen Kugeln in Bezug auf einen der charakterisirten Punkte O, O', der zwischen ihnen liegt, so gehen die beiden concentrischen Kugelflächen in zwei andere sich ausschliessende über, und wir erhalten so die Lösung unseres jetzigen Problems.*)

Die Bilder des Inversionscentrums in Bezug auf die beiden sich ausschliessenden Kugeln fallen nach Art. 163 mit dem Bilde des Centrums der beiden concentrischen Kugeln in dem zweiten inversen Punkte zusammen.

Der Radius $OAPB$ in Fig. 14, auf welchem die Bilder liegen, geht daher in Fig. 15 in den Bogen eines Kreises durch O und O' über, auf dem sich also die successiven Bilder und auch der electrische Punkt P befinden. Die Lage des electrischen Punktes P ist dadurch fixirt, dass das Verhältnis von $O'P$ zu OP gleich Ce^u ist, wo C eine Zahl bedeutet. Setzen wir also

a) $$\vartheta = \log \frac{O'P}{OP}, \quad \alpha = \log \frac{O'A}{OA}, \quad \beta = \log \frac{O'B}{OB},$$

so erhalten wir

b) $$\beta - \alpha = \omega, \quad u + \alpha = \vartheta.$$

Die Lage des Bildes Q_0 von P in der Kugel (A) ergiebt sich aus

$$\vartheta(Q_0) = \log \frac{O'Q_0}{OQ_0} = 2\alpha - \vartheta,$$

*) Eine genaue Untersuchung über dieses Problem findet man in Heine's *Handbuch der Kugelfunctionen* Bd 2, p. 261 ff. Man sehe ferner Poisson, *Mémoire de la classe des sc. math. et phil. de l'Institut de France* année 1811. Plana, *Memorie delle scienze di Torino* VII. 1845. Kirchhoff in Crelle's *Journal für reine und angew. Math.* 1861, Bd. 59, oder *Gesammelte Abhandlungen* pag. 78 ff.

die des Bildes P_1 von Q_0 in der Kugel (B) aus

$$\vartheta(P_1) = \log \frac{O'P_1}{OP_1} = \vartheta + 2\omega.$$

Allgemein ist

1) $$\vartheta(P_s) = \vartheta + 2s\omega, \quad \vartheta(Q_s) = 2\alpha - \vartheta - 2s\omega.$$

Aehnlich bestimmen sich die Bilder von P, wenn man P zuerst in der zweiten Kugel abbildet. Man hat

$$\vartheta(Q_0') = 2\beta - \vartheta, \qquad \vartheta(P_1') = \vartheta - 2\omega,$$

und allgemein

2) $$\vartheta(Q_s') = 2\beta - \vartheta + 2s\omega, \quad \vartheta(P_s') = \vartheta - 2s\omega.$$

Für die Ladung eines Punktes P_s fanden wir bei den concentrischen Kugeln nach den Gleichungen unter 1) und 3) den Wert

$$P\sqrt{\frac{OP_s}{OP}},$$

daher ist die Ladung des entsprechenden Bildes für unsern jetzigen Fall

3'a) $$P_s = P\sqrt{\frac{OP_s}{OP}\,\frac{O'P_s}{O'P}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

c') $$\xi = \sqrt{OP.\,O'P},$$

und nennen ξ den Parameter des Punktes P, so wird

3'b) $$P_s = \frac{\xi_s}{\xi} P.$$

Die Ladung eines Bildes ist also proportional seinem Parameter.

Genau so berechnen sich die Ladungen für die andern drei Klassen von Bildern Q, P', Q'.

Zur Fixirung der Lage des electrischen Punktes P führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen x Axe mit der Linie OO' zusammenfällt und dessen y Axe durch die Mitte von OO' geht.

Sind dann x, y die Coordinaten von P und $k = \frac{1}{2}\,OO'$, so setzen wir

d) $$e^{\vartheta + i\varphi} = \frac{x + iy - k}{x + iy + k}.$$

Für die Grösse k ergiebt sich aus der Bedingungsgleichung für die inversen Punkte O, O' nach Art. 163, X)

e) $$k = \frac{1}{2c}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2},$$

wo a, b die Radien der Kugeln sind und c die Entfernung ihrer Mittelpunkte bezeichnet.

ϑ ist gleich $\log O'P - \log OP$, φ bezeichnet den Winkel OPO' und wir erhalten

f) $$x = -\frac{k \sinh\vartheta}{\cosh\vartheta - \cos\varphi}, \quad y = \frac{k \sin\varphi}{\cosh\vartheta - \cos\varphi},$$

also

$$x^2 + (y - k\cot\varphi)^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2\varphi,$$

$$(x + k\coth\vartheta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{cosech}^2\vartheta,$$

und daraus folgt

g) $$\cot\varphi = \frac{x^2 + y^2 - k^2}{2ky}, \quad \coth\vartheta = -\frac{x^2 + y^2 + k^2}{2kx}.$$

Weiter haben wir

$$OP^2 = (k - x)^2 + y^2, \quad O'P^2 = (k + x)^2 + y^2,$$

somit

c) $$\xi = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}.$$ *)

Die Ladung eines jeden Bildes ist, wie wir schon bemerkt haben, proportional seinem Parameter, und sie hat das positive oder negative Zeichen, je nachdem sie zu den P oder Q gehört. Demnach findet sich

3) $$P_s = \frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

4) $$Q_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

5) $$P'_s = \frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

6) $$Q'_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\beta - \vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}.$$

*) Es ist zu bemerken, dass

$$2\cosh\vartheta = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}, \quad 2\sinh\vartheta = e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}$$

gesetzt ist. Vergl. noch Art. 151.

Die Anwendung dipolarer Coordinaten rührt von Thomson her, Liouville Journal 1847, und Thomson *Reprint of Electrical Papers* § 211, 212.

Die Rechnungen sind im Anschluss an Betti's Untersuchungen über unser Problem (Nuovo Cimento XX) durchgeführt, die Methode aber, die der electrischen Bilder, ist dieselbe, deren sich Thomson zuerst bedient hat. Vergl. Phil. Mag. 1853.

Die durch den electrischen Punkt P inducirte Ladung (A) der Kugel um A ist gleich der Summe der Ladungen der Bilder Q und P', welche innerhalb dieser Kugel sich befinden, die Ladung (B) der Kugel um B ist gleich der Summen der Ladungen der Bilder Q' und P, welche innerhalb dieser Kugel liegen. Also

$$7)\quad (A) = P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}}$$

$$- P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

$$8)\quad (B) = P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}$$

$$- P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\beta - \vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}.$$

Das Potential ist auf beiden Kugeln gleich Null.

173. *Capacität und Induction zweier Kugeln.* Wir leiten daraus die Bestimmung der Capacitäts- und Inductionscoefficienten zweier Kugeln her, deren Radien a und b sind, und deren Centralabstand durch c gegeben ist.

Nach der Definition dieser Grössen (Art. 87) haben wir eine der Kugeln auf dem Potential Null, die andere, deren Capacität bestimmt werden soll, auf dem Potential Eins zu erhalten.

Im vorigen Fall hatten beide Kugeln das Potential Null, bringen wir also in den Mittelpunkt der Kugel (A) mit dem Radius a eine Electricitätsmenge a, so wird ihr Potentialniveau gleich Eins und das der Kugel (B) bleibt Null. Die durch die successiven Bilder dieser Ladung a berechnete Verteilung der auf den Kugeln inducirten Electricität entspricht vollständig der Verteilung, wie sie unter Annahme der bezeichneten Potentialniveaus eintreten muss. Die Bilder dieser Ladung liegen alle auf der Centralen zwischen den Polen und den Centren der Kugeln, und es bleiben von den vier Systemen von Bildern Q, P, Q', P', die wir im vorigen Artikel bestimmt haben, nur zwei übrig, das erste und das letzte System.

Als Ladung in P haben wir die Ladung des Centrums A, also a zu setzen, und diese Ladung muss natürlich bei der Bestimmung der Gesammtladung (A) mit in Rechnung gezogen werden.

Nach den unter a) aufgestellten Gleichungen des vorigen Artikels und nach Art. 163, X) haben wir

$$a)\qquad \sinh\alpha = -\frac{k}{a},\quad \sinh\beta = \frac{k}{b},$$

wo k den schon angegebenen Wert

b) $$k = \frac{1}{2c}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}$$

besitzt.

Demnach ist auch

c) $$P = -\frac{k}{\sinh\alpha}.$$

Ferner haben wir nach den Gleichungen unter a) und g) des vorigen Artikels, in denen $y = 0$ zu setzen ist,

d) $$\varphi = 0,\ \vartheta = 2\alpha.$$

Damit wird die Capacität q_{aa} von A

1a) $$q_{aa} = k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(s\omega - \alpha)},$$

und der Inductionscoefficient von A auf B oder von B auf A

2a) $$q_{ab} = -k\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh s\omega}.$$

Genau so erhalten wir, wenn (B) das Potential 1 und (A) das Potential 0 hat,

3a) $$q_{bb} = k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(\beta + s\omega)}.$$

In diesen Ausdrücken können wir noch α, β, ω und k durch a, b, c ersetzen. Machen wir nämlich

e) $$K = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2} = 2ck,$$

so ergiebt sich wegen der Beziehung $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ und der Gleichungen unter b) im vorigen Artikel

f) $$\sinh\alpha = -\frac{K}{2ac},\ \sinh\beta = \frac{K}{2bc},\ \sinh\omega = \frac{K}{2ab},$$

$$\cosh\alpha = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},\ \cosh\beta = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},\ \cosh\omega = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Indem man noch von den Relationen

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta,$$
$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$

Gebrauch macht, gelangt man zu demselben Resultat, welches Thomson

durch directe Berechnung der einzelnen Bilder schon gefunden hat, nämlich zu den Gleichungen

$$1\,b)\quad q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3 b^2}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \ldots$$

$$2\,b)\quad q_{ab} = q_{ba} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3 b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - a^2 - b^2 - ab)} - \ldots$$

$$3\,b)\quad q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \ldots$$

174. Haben die beiden Kugeln Potentialniveaus V_a bezüglich V_b, so ergeben sich ihre Ladungen E_a, E_b nach Art. 87 aus den Gleichungen

$$4)\quad E_a = V_a q_{aa} + V_b q_{ab},$$

$$5)\quad E_b = V_a q_{ab} + V_b q_{bb}.$$

Setzen wir die Determinante der q

$$g_1)\quad q_{aa} q_{bb} - q_{ab}^2 = D = \frac{1}{D'}$$

und machen

$$6)\quad p_{aa} = q_{bb} D',\ p_{ab} = p_{ba} = -q_{ab} D',\ p_{bb} = q_{aa} D',$$

also

$$g_2)\quad p_{aa} p_{bb} - p_{ab}^2 = D',$$

so erhält man zur Berechnung der Potentialniveaus aus den Ladungen die Formeln

$$7)\quad V_a = p_{aa} E_a + p_{ab} E_b,$$

$$8)\quad V_b = p_{ab} E_a + p_{bb} E_b.$$

Die p sind die Potentialcoefficienten.

Die Energie unseres Systems ist nach Art. 85

$$9\,a)\quad Q = \tfrac{1}{2}(E_a V_a + E_b V_b),$$

$$9\,b)\quad = \tfrac{1}{2}(q_{aa} V_a^2 + 2 q_{ab} V_a V_b + q_{bb} V_b^2),$$

$$9\,c)\quad = \tfrac{1}{2}(p_{aa} E_a^2 + 2 p_{ab} E_a E_b + p_{bb} E_b^2).$$

Endlich ergiebt sich für die Abstossungskraft zwischen den beiden Kugeln aus Art. 92, 93

$$10\,a)\quad F = \tfrac{1}{2}\left\{V_a^2 \frac{\partial q_{aa}}{\partial c} + 2 V_a V_b \frac{\partial q_{ab}}{\partial c} + V_b^2 \frac{\partial q_{bb}}{\partial c}\right\},$$

$$10\,b)\quad = -\tfrac{1}{2}\left\{E_a^2 \frac{\partial p_{aa}}{\partial c} + 2 E_a E_b \frac{\partial p_{ab}}{\partial c} + E_b^2 \frac{\partial p_{bb}}{\partial c}\right\},$$

wo c wie bisher den Abstand der Centren der beiden Kugeln darstellt.

Von diesen beiden Ausdrücken für die zwischen den Kugeln wirkende Abstossungskraft ist der erste zu speciellen Rechnungen geeigneter als der zweite; er setzt sich aus Producten der Potentiale der Kugeln und der Derivirten der Capacitäts- und Inductionscoefficienten zusammen.

Bei der Differentiation der q nach c sind a und b als Constanten zu betrachten, somit ergiebt sich aus den Gleichungen [s. Art. 173 f)]

$$k = -a\sinh\alpha = b\sinh\beta = -c\frac{\sinh\alpha\sinh\beta}{\sinh\omega},$$

h) $$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega},$$

i) $$\frac{\partial\alpha}{\partial c} = \frac{\sinh\alpha\cosh\beta}{k\sinh\omega},$$

k) $$\frac{\partial\beta}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\sinh\beta}{k\sinh\omega},$$

l) $$\frac{\partial\omega}{\partial c} = \frac{1}{k}.$$

Wir finden also

11a) $$\frac{\partial q_{aa}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{aa}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + b\cosh\beta)\cosh(s\omega - \alpha)}{c\sinh^2(s\omega - \alpha)},$$

12a) $$\frac{\partial q_{ab}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{ab}}{k} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s\cosh s\omega}{\sinh^2 s\omega},$$

13a) $$\frac{\partial q_{bb}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{bb}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + a\cosh\alpha)\cosh(\beta + s\omega)}{c\sinh^2(s\omega + \beta)}.$$

Man gelangt zu diesen Differentialquotienten auch durch Differentiation der Reihen in a, b, c, welche ich unter den Gleichungen 1b), 2b), 3b) des vorigen Artikels für die q gegeben habe.

11b) $$\frac{\partial q_{aa}}{\partial c} = -\frac{2a^2bc}{(c^2-b^2)^2} - \frac{2a^3b^2c(2c^2-2b^2-a^2)}{(c^2-b^2+ac)^2(c^2-b^2-ac)^2} - \cdots$$

12b) $$\frac{\partial q_{ab}}{\partial c} = \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2(3c^2-a^2-b^2)}{c^2(c^2-a^2-b^2)^2} + \frac{a^3b^3\{(5c^2-a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)-a^2b^2\}}{c^2(c^2-a^2-b^2+ab)^2(c^2-a^2-b^2-ab)^2} - \cdots$$

13b) $$\frac{\partial q_{bb}}{\partial c} = -\frac{2ab^2c}{(c^2-a^2)^2} - \frac{2a^2b^3c(2c^2-2a^2-b^2)}{(c^2-a^2+bc)^2(c^2-a^2-bc)^2} - \cdots$$

Thomson*) hat die Kraftwirkung zwischen zwei Kugeln von gleichen Radien, deren Abstand er von geringerer Grösse als den Durchmesser einer der Kugeln annahm, berechnet. Bei grösseren Entfernungen der Kugeln von einander braucht man nicht mehr als zwei oder drei aufeinanderfolgende Bilder zu berücksichtigen.

Zwei sich berührende Kugeln.

175. Zwei sich berührende Kugeln von den bezüglichen Radien a und b sollen zum Potentialniveau 1 geladen sein und von keinen fremden electrischen Punkten influencirt werden.

Bildet man die Inversion der beiden Kugeln in Bezug auf ihren Berührungspunkt als Inversionscentrum, so erhält man zwei um die bezüglichen Strecken $1/2a$ und $1/2b$ vom Berührungspunkt abstehende Ebenen, welche von einer Electricitätseinheit, die in diesem Punkte concentrirt zu denken ist, influencirt werden.

Die Bilder des electrischen Punktes in diesen Ebenen zerfallen in zwei Reihen, deren eine alle positiv geladenen enthält, während die andere die negativ electrisirten umfasst.

Bezeichnet s eine ganze von $-\infty$ bis $+\infty$ variirende Zahl, so sind die Abstände der positiven Bilder vom electrischen Punkt gleich $s\,(1/a + 1/b)$ und die der negativen $1/a + s\,(1/a + 1/b)$ in Richtung von a.

Die Ladungen der positiven Bilder sind alle gleich $+1$, die der negativen alle gleich -1.

Bilden wir die beiden Ebenen wieder in sich berührende Kugeln um, so geht die Reihe der positiven Bilder in negative über, deren Abstände vom Berührungspunkt durch

$$Q_s = \frac{1}{s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

gegeben sind. Davon gehören alle Bilder mit positivem s der Kugel mit dem Radius a, alle mit negativem s der Kugel mit dem Radius b an. Die Ladung jedes Bildes ist, wenn das Potentialniveau den Wert 1 hat, numerisch gleich seinem Abstand vom Berührungspunkt und, wie schon bemerkt, stets negativ.

Die positiven Bilder liegen in Abständen

$$P_s = \frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

*) *Reprint of Electrical Papers*, pag. 96 ff.; Wiedemann *Electricität* 1882, Bd. I. pag. 83.

vom Berührungspunkt (wobei die positive Richtung nach dem Centrum der Kugel (A) hin gerechnet ist). Alle Bilder, für welche s gleich Null oder gleich einer ganzen positiven Zahl ist, liegen innerhalb der Kugel (A), alle, für welche s eine ganze negative, von Null verschiedene Zahl ist, befinden sich in der Kugel (B). Die Ladung jedes Bildes ist auch hier gleich seinem Abstand vom Berührungspunkt der Kugeln, sie ist aber stets positiv.

Demnach ist die ganze Ladung der Kugel (A)

1a) $$E_a = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Für sich genommen, divergirt jede der beiden Reihen, verbinden wir aber die zwei Reihen zu einer

1b) $$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2 b}{s(a+b)\{s(a+b)-a\}},$$

so erhalten wir eine convergente Reihe. Die Ladung der Kugel (B) ist

2b) $$E_b = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab^2}{s(a+b)\{s(a+b)-b\}}.$$

Poisson giebt diese Ladungen in Form bestimmter Integrale. Nach ihm ist

1c) $$E_a = \frac{ab}{a+b}\int_0^1 \frac{\vartheta^{\frac{b}{a+b}-1}-1}{1-\vartheta}\,d\vartheta,$$

2c) $$E_b = \frac{ab}{a+b}\int_0^1 \frac{\vartheta^{\frac{a}{a+b}-1}-1}{1-\vartheta}\,d\vartheta,$$

was dem Resultate nach mit unseren Reihen zusammenfällt.

Eine andere Darstellung ist (*Legendre Traité des Fonc. Elliptiques, II, 438*)

1d) $$E_a = a - \left\{\gamma + \psi\left(\frac{b}{a+b}\right)\right\}\frac{ab}{a+b},$$

2d) $$E_b = b - \left\{\gamma + \psi\left(\frac{a}{a+b}\right)\right\}\frac{ab}{a+b},$$

wo

$$\gamma = 0{,}57712\ldots,\ \psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(1+x)$$

gesetzt ist.

Die Auswertung dieser Ausdrücke ist durch die Tafel, welche Gauss (Werke Bd. III. pagg. 161, 162) für die Function ψ berechnet hat, beträchtlich erleichtert worden.

Für die Differenz der Ladungen beider Kugeln haben wir, wenn $x = b/(a+b)$ gesetzt wird,

3) $$E_a - E_b = -\frac{ab}{a+b}\frac{d}{dx}\Big(\log\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\Big)$$
$$= \frac{ab}{a+b}\frac{d}{dx}\Big(\log\sin\pi x\Big)$$
$$= \frac{\pi ab}{a+b}\cot\frac{\pi b}{a+b}.$$

Sind beide Kugeln gleich gross, so sind ihre Ladungen einander gleich und es wird

4) $$E = E_a = E_b = a\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{2s(2s-1)}$$
$$= a\left(\tfrac{1}{2\cdot 1}+\tfrac{1}{4\cdot 3}+\tfrac{1}{6\cdot 5}+\cdots\right)$$
$$= a\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots\right)$$
$$= a\log 2$$
$$= 0{,}69314718\ldots a.$$

Ist die Kugel (A) sehr klein, so haben wir näherungsweise

1_1) $$E_a = \frac{a^2}{b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6}\frac{a^2}{b}.$$

und

2_1) $$E_b = b.$$

Die Ladung auf (B) ist also so gross, als wenn (A) gar nicht existirte.

Die mittlere Dichte auf jeder der Kugeln ergiebt sich durch Division der zugehörigen Ladung mit dem Flächeninhalt der betreffenden Kugel. Für ein sehr kleines (A) ist also

5_1) $$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{24b},$$

6_1) $$\sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b},$$

7) $$\sigma_a = \frac{\pi^2}{6}\sigma_b = 1.644936\ldots\sigma_b.$$

Berührt also eine kleine Kugel eine grosse, so ist die mittlere Flächendichte der auf ihr sich verbreitenden Electricität das 1.644936 fache der mittlern Flächendichte der Ladung der grossen Kugel.

Kugelkalotte.

176. Eines der bemerkenswertesten Beispiele von der Anwendbarkeit der Thomsonschen Methode der electrischen Inversion bietet das von Thomson selbst untersuchte Problem der Verteilung der Electricität auf einem Stücke einer Kugelfläche, das von einem kleinen Kreise begrenzt ist. Thomson teilte seine Resultate ohne Details Liouville mit, der sie 1847 in seinem *Journal* veröffentlichte. Später erschienen dann auch die diesbezüglichen speciellen Rechnungen in Thomsons *Electrical Papers*, Art. XV.

Es scheint dies das erste und einzige Mal gewesen zu sein, dass die electrische Verteilung auf einer begrenzten krummen Fläche bestimmt worden ist.*)

Da aber der specielle Zweck meines Buches mehr darin besteht, Methoden auseinander zu setzen, als Rechnungen zu wiederholen und zu verificiren, so kann ich nicht auf die geometrischen und analytischen Einzelheiten eingehen, und muss den Leser auf das citirte Thomsonsche Werk verweisen. Ich will aber sowohl den Weg angeben, den man bei der Behandlung von Kugelsegmenten einzuschlagen hat, als auch die einzelnen Resultate mitteilen.

Dazu bedarf es einer kleinen Vorbereitung.

177. Eine Kugelkalotte entsteht durch Abbildung einer Kreisscheibe, und daher müssen wir uns zunächst mit dieser beschäftigen.

Eine Kreisscheibe ist aber eine specielle Form des Ellipsoids, so dass die Verteilung auf einer solchen bekannt ist, wenn man die Verteilung der Electricität auf Ellipsoiden kennt.

Verteilung der Electricität auf einem Ellipsoid. Es lässt sich in bekannter**) Methode (vergl. Art. 150) nachweisen, dass die Attraction einer von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen concentrischen Ellipsoidenflächen begrenzten Schale auf jeden in ihrem Innern gelegenen Punkt verschwindet. Lässt man die Dicke der Schale mehr und mehr abnehmen, so gelangt man schliesslich zu der Conception eines auf einer Ellipsoidenfläche ausgebreiteten Agens, dessen Flächendichte von Punkt zu Punkt wie das vom Centrum auf die Tangentialebene gefällte Lot variirt. Ist also das auf dem Ellipsoid ausgebreitete Agens Electricität, dessen Flächendichte in der angegebenen Weise bestimmt ist, so wird sich die Electricität, weil sie im Innern des Ellipsoides keine Wirkung ausübt, auf demselben in Gleichgewicht befinden. Wir können also umgekehrt schliessen:

Wird die Electricität auf einem Ellipsoid durch keine anderweitigen electrischen Pole beeinflusst, so verteilt sie sich derartig, dass ihre Flächendichte in einem Punkte proportional dem Lote ist, das man vom Mittelpunkt des Ellipsoides auf die Tangentialebene in jenem Punkte fällt.

---

*) Vergl. dagegen Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*. Bd. 2 pag. 292 Anm. Anm. d. Uebers.

**) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 520. Clausius, *Mechanische Wärmetheorie* Bd. II, § 19.

Verteilung der Electricität auf einer Scheibe. Macht man zwei Axen des Ellipsoides einander gleich und lässt die dritte verschwinden, so geht dasselbe in eine kreisförmige Scheibe über, und man erhält durch Specialisirung des obigen Satzes einen Ausdruck für die Flächendichte der Electricität in den Punkten einer Scheibe, welche zum Potentialniveau V geladen und allen fremden Einflüssen entzogen ist.

Bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte P einer solchen Scheibe und KPL eine durch P gehende Sehne, deren Schnittpunkte mit dem Grenzkreis der Scheibe in K und L liegen, so hat man

$$1) \qquad \sigma = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{KP.PL}}.$$

178. *Inversion einer electrischen Scheibe, Kugelkalotte.* Wir bilden nunmehr die Scheibe in einer um einen Punkt Q mit dem Radius R geschlagenen Kugel ab. Die Scheibe verwandelt sich dann in ein Stück einer durch das Inversionscentrum Q gehenden Kugelfläche, das von einem Kreise begrenzt ist, und als Kugelkalotte bezeichnet wird.

Ist die Scheibe S' bei Abwesenheit fremder electrischer Pole zum Potential V' geladen gewesen, so wird ihr Bild S, die Kugelkalotte, sich auf dem Potential Null befinden und von einer Electricitätsmenge $V'R$, die in Q concentrirt ist, influencirt werden.

S muss als Bild einer Ebene durch den electrischen Punkt Q hindurchgehen. Wir lösen also durch die bezeichnete Inversion das Problem der Verteilung der Electricität auf einer Kugelkalotte, die von einem auf ihrer Oberfläche befindlichen electrischen Punkt influencirt wird.

Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss eines auf dem Rest der Kugelfläche liegenden electrischen Punktes. Das Resultat, zu dem man auf dem angegebenen Wege gelangt, lässt sich so aussprechen:

Liegt der Pol der Kugelkalotte in C in einem Abstande a von einem Punkte der Kante der Kalotte, giebt q die im electrischen auf der Kugeloberfläche liegenden Punkt Q concentrirte Electricitätsmenge, bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte P der Kalotte, wie sie durch die in Q concentrirte Electricitätsmenge dort inducirt wird, wenn die Kalotte zur Erde abgeleitet ist, so haben wir

$$2) \qquad \sigma = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{QP^2} \sqrt{\frac{CQ^2 - a^2}{a^2 - CP^2}},$$

wo QP, CQ, CP die die Punkte C, P, Q verbindenden Geraden bezeichnen.

Es muss hervorgehoben werden, dass dieser Ausdruck für σ unabhängig von dem Radius der Kugel ist, von der die Kalotte einen Teil bildet, er gilt also auch für eine ebene Scheibe.

179. *Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss beliebig vieler auf dem Rest der Kugelfläche liegender electrischer Punkte.* Wenn auf dem Rest der Kugel sich mehrere electrische Punkte befinden, welche die Kugelkalotte influenciren, so wird die Dichte der hervorgerufenen Electricität gleich der Summe aller durch die einzelnen Punkte inducirten Flächendichten sein. Das gilt, wie nahe auch die electrischen Punkte nebeneinander liegen, es gilt auch, wenn sie so dicht gruppirt sind, dass sie den ganzen Rest der Kugelfläche continuirlich mit der Dichte ρ bedecken. In diesem Falle tritt an Stelle der Summation eine Integration, die sich über den ganzen Rest der Kugelfläche erstreckt und die Flächendichte auf einer Kugelkalotte bestimmt, die sich auf dem Potential Null befindet und von einer electrischen Schicht, die mit der Dichte ρ auf dem Rest der Kugelfläche ausgebreitet ist, influencirt wird.

Wir isoliren jetzt das ganze System, also die Kugelkalotte sammt dem zugehörigen Rest der Kugel, und bringen es in eine andere Kugel vom Durchmesser f, die durch eine electrische Schicht, welche sich auf ihr gleichförmig mit der Raumdichte ρ' ausbreitet, electrisirt ist.

Innerhalb einer gleichförmig electrisirten Kugel hat aber die electrische Kraft keine von Null verschiedene Resultante. Die Verteilung der Electricität auf dem Kugelsegment wird also durch die angegebene Operation nicht alterirt. Das Potential dagegen wächst in allen Punkten, die sich innerhalb der neuen Kugel befinden, um die Grösse

$$V = 2\pi\rho' f.$$

an. Das Potentialniveau der Kalotte geht dadurch von Null in V über.

Legen wir die umgebende Kugel concentrisch mit der Kugel, zu der die Kalotte gehört, und lassen ihren Radius so lange abnehmen, bis sie sich unserer Kugel eng anschliesst, so gewinnen wir die Lösung unserer Aufgabe für den Fall, dass die Kalotte bei dem Potentialniveau V sich unter dem Einfluss einer den Rest der Kugel, von der sie einen Teil bildet, mit der Raumdichte

$$\rho + \rho' = \rho + \frac{V}{2\pi f}$$

fest bedeckenden electrischen Schicht befindet.

180. *Eine Kugelkalotte im freien electrischen Feld.* Nehmen wir speciell $\rho + \rho' = 0$, so ergiebt sich sofort die Lösung des Problems der Verteilung der Electricität auf einer Kugelkalotte, die zum Potential V geladen ist und von keinen fremden electrischen Punkten angegriffen wird.

Bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte einer der Flächen der Kalotte, wenn diese sich auf dem Potential Null befindet und von dem Rest der Kugel, welche zur Dichte ρ geladen ist, influencirt wird, so wächst also die Dichte auf der Aussenseite der Kalotte, wenn ihr Potentialniveau zu V erhoben wird, um $\rho' = V/2\pi f$.

Eine nähere Untersuchung lehrt, dass, wenn wie bisher f den Durchmesser der Kugel und a, r die Entfernung des Pols der Kalotte von einem Punkte ihrer Kante bezüglich von einem Punkte P ihrer Fläche bezeichnet, dass also die Flächendichte in einem auf der Innenseite der Kalotte gelegenen Punkt

$$3) \qquad \sigma_i = \frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\}$$

ist.

Die Flächendichte in dem entsprechenden Punkte P der Aussenseite der Kalotte findet sich zu

$$4) \qquad \sigma_a = \sigma_i + \frac{V}{2\pi f} = \frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\pi + \sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\}.$$

Bei der Berechnung dieses Endresultates hat man, abgesehen von der Inversion selbst, weiter keine schwierigeren Operationen auszuführen, als Integrationen über Teile von Kugelflächen.

181. *Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss eines beliebig gelegenen electrischen Punktes.* Auf die Lösung des eben behandelten Problems reducirt sich die des allgemeinern Falls, dass der eine Kugelkalotte influencirende electrische Punkt sich nicht auf dem Rest der Kugel befindet. Ich gebe den Weg, den man bei der Berechnung der dann eintretenden Verteilung einzuschlagen hat, und die Resultate, zu denen man gelangt, an.

Man geht von dem Bilde S' der Kalotte, das wieder eine Kalotte ist, in einer mit dem Radius R um den electrischen Punkt Q geschlagenen Kugel aus, nimmt in diesem Bilde Q als unelectrisch an und setzt voraus, dass die Bildkalotte das Potentialniveau q/R hat, wo q die in Q ursprünglich vorhandene Electricitätsmenge ist. Berechnet man dann nach dem vorigen Artikel die Verteilung der Electricität auf dieser Bildkalotte und invertirt sie wieder zurück in die ursprüngliche Kalotte, so wird das Potential in einem von Q um r abstehenden Punkte dieser Kalotte nach Art. 162, 4) gleich q/r, verlegt man also die Electricitätsmenge $-q$ in den bisher als unelectrisch angenommenen Punkt Q, so fällt das Potentialniveau der Kalotte auf Null und sie tritt in die von unserm Problem vorgeschriebenen Verhältnisse. Bezeichnet man also mit σ die Dichte in dem Punkte P der ursprünglichen Kugelkalotte S und mit σ' die Dichte in dem Bilde von P auf der Bildkalotte, in P', so hat man nach Art. 162, 2)

$$\sigma = -\frac{\sigma' R^3}{(QP)^3}.$$

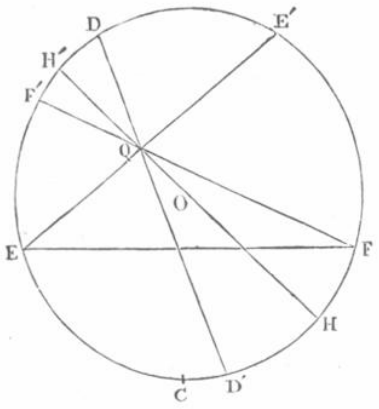


Fig. 16.

Zur Durchführung der Inversion benutzen wir die beistehende Figur 16, welche einen Durchschnitt durch das Centrum O der Kugel, den Pol C der Kugelkalotte um den influencirenden Punkt Q darstellt. E, F sind im Rande der Kalotte gelegene Punkte.

Nimmt man zum Radius R der Inversionskugel die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der durch den electrischen Punkt Q gelegten Sehnen der Kugel, und zieht durch den bezeichneten Punkt die Sehnen EQE' und FQF', so ist $E'F'$ das Bild von EF.

Halbirt man den Bogen $F'CE'$ in D' und zieht die Grade $D'QD$, so ist D das Bild vor D', wo eine von Q durch den Mittelpunkt des Randes der Kalotte gezogene Linie die Fläche der Kalotte trifft. Verbindet man ferner Q mit O und verlängert QO zu beiden Seiten, so ist H' das Bild von H.

Damit findet man für die durch die Electricitätsmenge q des Punktes Q in einem Punkte P der Kugelkalotte, der von Q durch die vervollständigte Kugelfläche getrennt ist, inducirte Flächendichte

$$5)\quad \sigma_a = \frac{q}{2\pi^2}\,\frac{QH\,.\,QH'}{HH'\,.\,PQ^3}\left\{\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arctg}\left[\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

wo a wie bisher den Abstand des Poles C von einem im Rande der Kalotte gelegenen Punkte bezeichnet.

Liegt P auf der Q zugewandten Seite der Kalotte, so hat man

$$6)\quad \sigma_i = \sigma_a + \frac{q}{2\pi}\,\frac{QH\,.\,QH'}{HH'\,.\,PQ^3}\,.$$

Cap. XII.

Electrische Probleme in zweidimensionalen Gebieten.

—×—

182. Die Methoden, die wir bisher zur Lösung von Problemen über das electrische Gleichgewicht kennen gelernt haben, sind in den Bereichen ihrer Anwendbarkeit äusserst wirksam. So beantwortet die Methode der Entwickelung nach Kugelfunctionen alle Fragen, die sich auf Kugelconductoren beziehen, und noch vielseitiger und mächtiger in ihrer Anwendbarkeit ist die Methode der electrischen Bilder. Im Ganzen ist aber doch die Zahl der vollständig untersuchten von einander unabhängigen Fälle des electrischen Gleichgewichts sehr beschränkt, und so viel ich weiss, kennt man nur für Conductoren, die von Flächen zweiten Grades begrenzt sind, den Verlauf der Niveauflächen und der Kraftlinien, wenn letztere nicht gerade ebene Curven sind.

Wir haben nun noch eine Klasse von wichtigen Problemen näher zu untersuchen, die sich dadurch charakterisiren, dass die Functionen, die bei ihrer Behandlung auftreten, zweidimensional sind, also nur von zwei Variabeln abhängen.

Haben wir zum Beispiel einen Teil des electrischen Feldes zu untersuchen, in welchem die Flächen aller Conductoren durch Bewegung von geraden Linien, die ein und derselben Axe, der der z Coordinaten, parallel laufen, gebildet sind, und der so weit von andern Teilen des Feldes, in denen das nicht zutrifft, entfernt ist, dass man von diesen andern Teilen abstrahiren darf, so ist die Electricität längs jeder erzeugenden Geraden gleichförmig verteilt. Betrachtet man also ein Stück des electrischen Feldes, das durch zwei parallele, zur z Axe senkrechte und um die Einheit der Länge von einander abstehende Ebenen ausgeschnitten wird, so werden darin Potential und Verteilung der Electricität lediglich Functionen von x und y sein.

Bezeichnet $\rho\, dx\, dy$ diejenige Electricitätsmenge, welche in einem Raumelement enthalten ist, dessen Grundfläche gleich $dx\, dy$ und dessen Höhe

gleich 1 ist, so nennen wir ρ die Raumdichte der Electricität. Entsprechend ist σ die Flächendichte, wenn $\sigma\, ds$ die in einem Flächenelement mit der Basis ds und der Höhe 1 vorhandene Electricitätsmenge angiebt.

Die Poissonsche Gleichung geht über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+4\pi\rho=0.$$

Wo keine freie Electricität vorhanden ist, da tritt an Stelle dieser Gleichung die Laplacesche

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Das allgemeine Problem, dessen Lösung uns lehren soll, wie die Electricität in diesem Falle sich verteilt, wenn sie sich im Gleichgewicht befindet, lässt sich so aussprechen.

Man soll eine Function V finden, die innerhalb eines durch geschlossene Curven begrenzten zwei dimensionalen Gebietes der Laplaceschen Gleichung genügt, endlich, stetig und einwertig ist, und die auf den Grenzlinien des Gebietes constante vorgeschriebene Werte V_1, V_2, ... annimmt.

Ich glaube nicht, dass dieses Problem bisher eine allgemeine Lösung erfahren hat. Die Transformationsmethode aber, die wir in Art. 190 kennen lernen werden, wird uns mehr specielle Aufgaben erledigen helfen, als irgend eine der für dreidimensionale Gebiete entwickelten Methoden.

Ehe ich sie auseinander setzen kann, muss ich den Leser mit den Eigenschaften der conjugirten Functionen zweier Variabeln vertraut machen.

Conjugirte Functionen.

183. *Definition.* Zwei Grössen α und β heissen *Conjugirte Functionen* der Variabeln x und y, wenn ihre Zusammenfassung zu $\alpha+i\beta$ eine Function von $x+iy$ ist.

Aus dieser Definition ergiebt sich

I) $$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\beta}{\partial y},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=-\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

II) $$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}=0.$$

Zwei Functionen, die in einem conjugirten Verhältnis zu einander stehen, genügen also gleichzeitig der Laplaceschen Gleichung.

Ferner ergiebt sich aus der Formel unter I) die Beziehung

III) $$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2=R^2.$$

Die Gleichungen $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ stellen in der xy Ebene gelegene Curven dar. Bezeichnet man mit ds_1 das Bogenstück einer Curve β, welches von zwei aufeinander folgenden Curven α und $\alpha + d\alpha$ ausgeschnitten wird, und mit ds_2 das Bogenstück einer Curve α, das von zwei aufeinander folgenden Curven β und $\beta + d\beta$ ausgeschnitten wird, so hat man

IV) $$\frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{1}{R}.$$

Die Curvensysteme α und β schneiden einander rechtwinklig.

α und β sind beide Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Nehmen wir also das Potential $V = V_0 + k\alpha$, wo k irgend eine Constante bedeutet, so genügt V der Laplaceschen Gleichung, und die Curven $\alpha = \text{const}$ stellen die Niveaulinien dar. Die zu α conjugirten Curven $\beta = \text{const.}$ geben die Kraftlinien.

Die resultirende Kraft in einem Punkte x, y ist zufolge der Gleichung unter III) gleich

1) $$kR = k\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = k\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Das Flächenintegral von R in Bezug auf ein Stück der Cylinderfläche, dessen Breite gleich der Längeneinheit ist, und dessen Projection auf die xy Ebene durch die Curve AB dargestellt wird, ist gleich

2) $$F = k(\beta_B - \beta_A),$$

wo β_A bezüglich β_B die Werte von β in den beiden Endpunkten der Curve AB darstellen.

Zeichnet man in der xy Ebene eine Reihe von Curven $\alpha = \text{const}$, in der die Differenz der Constanten zweier aufeinander folgender Curven überall dieselbe ist (so dass die Constanten eine arithmetische Reihe bilden), und eine entsprechende Reihe von Curven $\beta = \text{const}$, bei der die constante Constantendifferenz zweier aufeinander folgender Curven dieselbe ist wie bei den Curven α, so zerfällt die ganze Ebene bei abnehmender Constantendifferenz schliesslich in lauter kleine Quadrate, deren Seiten in den verschiedenen Teilen des electrischen Feldes verschieden gerichtet und verschieden lang sein können. Die Grösse der Seite eines solchen Quadrats ändert sich umgekehrt proportional der Grösse der resultirenden Kraft R.

Laufen zwei oder mehr äquipotentielle Linien α in sich zurück, so können die von ihnen eingefassten Cylinderflächen als Conductoroberflächen mit den bezüglichen Potentialniveaus $V_0 + k\alpha_1$, $V_0 + k\alpha_2$, ... gewählt werden.

Die auf einem zwischen zwei Kraftlinien β_1 und β_2 liegenden Stück einer solchen Conductoroberfläche befindliche Electricitätsmenge ist gleich

3) $$e = \frac{k}{4\pi}(\beta_2 - \beta_1).$$

Die Zahl der zwischen zwei Conductoren verlaufenden äquipotentiellen Linien zeigt die Potentialdifferenz der Conductoren an.

Die Zahl der von einem Conductor ausgehenden Kraftlinien giebt die Ladung desselben.

Ich habe nun noch einige Sätze über conjugirte Functionen anzuführen, deren Beweise entweder aus den unter I) gegebenen Differentialgleichungen oder direct aus der Definition der conjugirten Functionen, welche auf der Kenntnis der complexen Grössen basirt, fliessen.

184. V. *Sind x', y' und x'', y'' zwei Paare conjugirter Functionen von x, y, so geben die Summen $x' + x''$, $y' + y''$ ein Paar ebenfalls conjugirter Functionen von x, y.*

Aus den unter I) angeführten Gleichungen des vorigen Artikels folgt

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial y''}{\partial y}; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x''}{\partial y} = -\frac{\partial y''}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial (x' + x'')}{\partial x} = \frac{\partial (y' + y'')}{\partial y}, \quad \frac{\partial (x' + x'')}{\partial y} = -\frac{\partial (y' + y'')}{\partial x},$$

was mit den Definitionsgleichungen eines conjugirten Functionenpaars übereinstimmt.

Graphische Summation. Es sei eine Function α von x, y graphisch durch eine Reihe von Curven, deren jede einem bestimmten Werte des α entspricht, in der xy Ebene so dargestellt, dass die Differenz δ der Werte von α auf zwei aufeinanderfolgenden Curven überall dieselbe ist.

Ebenso sei eine zweite Function β von x, y durch eine Reihe von Curven β repräsentirt, in der die Constantendifferenz zweier aufeinander folgender Curven ebenfalls überall dieselbe bleibt und von derselben Grösse δ wie die Constantendifferenz bei den Curven α ist.

Verbinden wir die Schnittpunkte der Curven α und β, $\alpha + \delta$ und $\beta - \delta$, $\alpha + 2\delta$ und $\beta - 2\delta$, so erhalten wir eine neue Curve, die durch die Gleichung $\alpha + \beta = \text{const}$ repräsentirt ist. Verbinden wir ebenso die Schnittpunkte der Curven α und $\beta + \delta$, $\alpha + \delta$ und β, $\alpha + 2\delta$ und $\beta - \delta$ u. s. f., so ergiebt sich die nächste Curve $\alpha + \beta + \delta = \text{const}$. Man erhält also eine dritte Reihe von Curven, deren Gleichungen allgemein $\alpha + \beta = \text{const}$ sind, die also die Summe der beiden gegebenen Functionen α und β darstellen.

Bei der wirklichen Ausführung solcher graphischen Summationen kann man natürlich die drei Curvensysteme auf verschiedenen transparenten Papierstücken zeichnen, man legt dann die Papierstücke mit den Curven α und β in der gehörigen Weise übereinander und deckt darüber das Blatt, auf welches das System der Curven $\alpha + \beta$ hingezeichnet werden soll.

Durch diese Methode Functionen graphisch zu summiren, kann man in manchen interessanten Fällen den Verlauf complicirter Functionen kennen lernen, wenn man die einfachern Functionen, aus denen sie zusammengesetzt sind, darzustellen vermag.

Es giebt aber noch eine andere in ihrer Anwendbarkeit weit mächtigere Methode, aus schon bekannten Lösungen der Laplaceschen Gleichung andere Lösungen abzuleiten. Sie wird aus dem folgenden Theorem deducirt.

185. VI. *Sind x'', y'' conjugirte Functionen von x' und y', und x', y' ihrerseits conjugirte Functionen von x und y, so sind x'', y'' auch in Bezug auf x und y einander conjugirt.*

Es ist nämlich

$$\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

also nach der Gleichung I) des Art. 183

$$\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial y''}{\partial y}.$$

Ebenso haben wir

$$\frac{\partial x''}{\partial y} = \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}$$

also

$$\frac{\partial x''}{\partial y} = -\frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} - \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = -\frac{\partial y''}{\partial x},$$

so dass x'', y'' auch in Bezug auf x, y die beiden Definitionsgleichungen conjugirter Functionen erfüllen.

Man kann diesen Satz übrigens noch leichter aus der ursprünglichen Definition conjugirter Functionen ableiten, denn es ist

$$x'' + iy'' = f(x' + iy') = f[\varphi(x + iy)] = \psi(x + iy).$$

Als Zusatz ergiebt sich daraus:

VII. *Sind x' und y' conjugirte Functionen von x und y, so sind auch* umgekehrt *x und y conjugirte Functionen von x' und y'.*

Graphische Darstellung. Wir benutzen x' und y' als Coordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem und ziehen parallel den Axen horizontal und vertical in gleichen Abständen gerade Linien, die wir durch die zugehörigen Werte der x' bezüglich y' markiren. In dem so liniirten Blatt zeichnen wir die als von x', y' abhängig aufgefassten Curven, welche Werten von x'' und y'' entsprechen, die eine arithmetische Reihe bilden. Dadurch erhalten wir zwei Systeme von Curven, die das Zeichenblatt in lauter kleine Quadrate zerlegen.

Auf einem andern Blatt benutzen wir x und y als Coordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem, liniiren wieder dasselbe parallel den Axen und zeichnen darauf die als von x, y abhängig gedachten Curvensysteme x', y' in ganz derselben Weise wie früher die x'', y''.

Dieses so auf dem x, y Blatt erhaltene System krummliniger Coordinaten x', y' entspricht dann Punkt für Punkt dem früher auf dem x', y' Blatt gezeichneten System geradliniger Coordinaten x', y'.

Nehmen wir also eine Reihe von Punkten auf einer Curve x'' des ersten Blattes und suchen die zu diesen Punkten gehörigen Werte von x', y' auf dem zweiten Blatte auf, so gelangen wir zu einer Reihe von Punkten auf dem zweiten Blatt, die der Reihe von Punkten auf dem ersten entspricht, also auf der Transformation der Curve x'' von x', y' in x, y liegt. Führt man das für alle Curven x'', y'' des ersten Blattes aus, so erhält man auf dem zweiten Blatte zwei neue Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven, die der Form nach von den frühern Curven x'', y'' verschieden sein können, aber alle Eigenschaften conjugirter Curvensysteme besitzen, die also namentlich das ganze zweite Blatt in kleine Quadrate zerteilen.

186. VIII. *Ist V eine Function von x' und y', die ihrerseits conjugirte Functionen von x und y sind, so besteht die Integralgleichung*

$$\int\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int\int\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy',$$

in der die Integrationen zu beiden Seiten zwischen denselben Grenzen auszuführen sind.

In der Tat ist zunächst

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}.$$

Die Addition ergiebt also unter Beachtung der Gleichungen I) und II) des Art. 183

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]$$

oder zufolge der Gleichung III) in Art. 183

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right).$$

Also

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy',$$

nach einem bekannten Satz über Transformation vielfacher Integrale.

Ist V ein Potential, so dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+4\pi\rho=0$$

wird, so lautet der obige Satz auch

4) $$\iint\rho\,dx\,dy=\iint\rho'\,dx'\,dy',$$

oder:

In entsprechenden Teilen zweier Systeme befindet sich eine gleich grosse Electricitätsmenge, wenn die Coordinaten in einem System conjugirte Functionen der Coordinaten in dem andern System sind.

187 a. IX. *Die beiden Functionen*

$$X=x_1x_2-y_1y_2,\quad Y=x_1y_2+x_2y_1$$

sind einander conjugirt, wenn x_1, y_1 und x_2, y_2 conjugirte Paare ergeben.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus der leicht zu verificirenden Gleichung

$$X+iY=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2).$$

187 b. X. *Ist φ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

so sind die Grössen

$$R=\log\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Theta=-\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

conjugirte Functionen von x und y.

Zunächst sind nämlich nach bekannten Sätzen aus der Theorie der complexen Grössen R und Θ conjugirte Functionen von $\partial\varphi/\partial x$ und $\partial\varphi/\partial y$, diese Derivirten sind aber ihrerseits conjugirte Functionen von x, y.

Inversion in zweidimensionalen Gebieten.

188. Als erste Anwendung der angeführten Transformationsmethoden untersuche ich die Inversion in zweidimensionalen Gebieten.

Sei O ein in der Ebene der xy befindlicher fester Punkt, OA eine feste Richtung und P ein beliebig gelegener Punkt ebendaselbst.

Benutzen wir Polarcoordinaten, deren Pol in O liegt und deren Axe in Richtung von OA läuft, und setzen

$$r = OP,\ \vartheta = AOP,$$

so ist, wenn O zugleich den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, dessen x Axe mit der Geraden OA zusammenfällt,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ .$$

Macht man aber

$$r = ae^{\rho}\ ,$$

so wird

$$\rho = \log\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

$$x = ae^{\rho}\cos\vartheta\ ,\quad y = ae^{\rho}\sin\vartheta\ ,$$

und ρ und ϑ sind nach dem unter X. gegebenen Satz conjugirte Functionen von x und y.

Weiter sind die Grössen $\rho' = n\rho$ und $\vartheta' = n\vartheta$ ebenfalls conjugirte Functionen, und da n irgend eine Zahl bedeuten kann, so werden auch $\rho' = -\rho$ und $\vartheta' = -\vartheta$ conjugirte Functionen von x, y sein. Wir haben dann

$$r' = \frac{a^2}{r},\quad \vartheta' = -\vartheta.$$

Diese Transformirung von ρ und ϑ in $-\rho$ und $-\vartheta$ ist also gleichbedeutend mit einer Inversion unserer Figur verbunden mit einer Drehung derselben um die Axe OA durch 180^0.

Wie bei der früher behandelten Inversion in dreidimensionalen Gebieten, haben wir auch hier entsprechend den in Art. 162 gegebenen Formeln eine Reihe von Gleichungen zwischen den einzelnen auf die ursprüngliche und invertirte Figur sich beziehenden Grössen.

Es seien also r, r' Abstände entsprechender Punkte der beiden Figuren vom Inversionscentrum O; S, S' Flächenelemente; K, K' Raumelemente; σ, σ' Flächendichten; ρ, ρ' Raumdichten; e, e' Electricitätsmengen; φ, φ' Potentiale in entsprechenden Punkten der Figur und ihrer Inversion.

Die den Gleichungen 1) bis 4) Art. 162 entsprechenden Beziehungen sind dann

1) $$\frac{r'}{r} = \frac{S'}{S} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{r'^2}{a^2},\quad \frac{K'}{K} = \frac{a^4}{r^4} = \frac{r'^4}{a^4},$$

2) $$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{a^2}{r'^2}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^4}{a^4} = \frac{a^4}{r'^4},$$

3) $$\frac{e'}{e} = 1,$$

4) $$\frac{\varphi'}{\varphi} = 1.$$

Electrische Bilder in zweidimensionalen Gebieten.

189. Die Fig. 17 stellt einen Durchschnitt durch einen leitenden Cylinder vom Radius $AQ = b$ dar, so dass A, der Mittelpunkt des gezeichneten Kreises, den Durchschnitt der Cylinderaxe mit der Ebene der Zeichnung markirt.

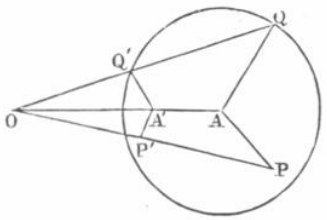


Fig. 17.

Wir nehmen an, dass der Cylinder zur Erde abgeleitet ist, also das Potentialniveau Null hat, und dass die Axe desselben gleichförmig mit Electricität, von der in der Längeneinheit die Menge E vorhanden sein soll, belegt ist. Wir haben dann einen speciellen Fall des Problems, das schon Art. 126 behandelt worden ist, und finden das Potential in einem innerhalb der Mantelfläche des Cylinders gelegenen Punkte P

$$\varphi = 2E \log \frac{b}{AP},$$

und die Flächendichte auf dem Mantel des Cylinders

$$\sigma = -\frac{E}{2\pi b}.$$

Die Aufgabe, die ich nunmehr mit Hilfe von electrischen Bildern lösen will, soll in der Bestimmung des Potentials für einen innerhalb des Cylinders gelegenen Punkt bestehen, wenn das Potentialniveau des Cylinders nach wie vor Null ist, die electrische Linie aber aus seiner Axe parallel mit sich selbst herausgerückt ist.

Bilden wir unsere Figur in einem um einen Punkt O geschlagenen Kreis ab, dessen Centrum O wir in die Entfernung $OA = mb$ von A verlegen, und dessen Radius a durch die Gleichung

$$a^2 = (m^2 - 1)\, b^2$$

gegeben sein soll, so haben wir

$$OA' = \frac{a^2}{OA} = \frac{(m^2 - 1)\, b}{m}, \quad \text{also } AA' = \frac{b}{m}.$$

Die Ladung in dem Bilde A' von A bleibt zufolge der Gleichung 3) des vorigen Artikels dieselbe, wie sie früher in A gewesen ist.

Ferner ist Q', der Schnittpunkt unseres Kreises mit der Secante OQ, gemäss der Wahl, die wir für a getroffen haben, das Bild des auf unserm Kreise gelegenen Punktes Q, und es folgt aus der Proportion

$$OQ' : OA = A'Q' : AQ,$$
$$OQ' = A'Q'm.$$

Aehnlich findet man, wenn P' das Bild des innerhalb des ursprünglichen Kreises gelegenen Punktes P ist,

$$AP = \frac{A'P'mb}{OP'}.$$

Die Flächendichte in dem Bilde Q' von Q ist zufolge der Gleichungen unter 2) des Art. 188

1) $$\sigma' = \sigma \frac{a^2}{OQ'^2}$$
$$= -\frac{E}{2\pi b} \frac{b^2 - AA'^2}{A'Q'^2}.$$

Das Potential φ' in dem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte P' ist nach Gleichung 4) des citirten Art. ebenso gross wie das des Punktes P, dessen Bild P' ist, also haben wir

2a) $$\varphi' = \varphi = 2E(\log b - \log AP)$$
$$= 2E(\log OP' - \log A'P' - \log m).$$

Das entspricht aber der combinirten Wirkung einer Ladung E, die in A', und einer imaginären Ladung $-E$, die sich in dem Bilde O von A' in Bezug auf den ursprünglichen Kreis um A befindet, so dass die Wirkung dieser beiden durch A' bezüglich O gehenden electrischen Axen auf innerhalb der Mantelfläche gelegene Punkte ebenso gross ist, wie die der electrischen durch A' gehenden Axe und der durch diese Axe in der Mantelfläche des Cylinders um die Axe A inducirten Electricität.

Ich bestimme die Lage des Punktes P' durch Polarcoordinaten $AP' = r$, $OAP' = \vartheta$, deren Pol in A liegt, und setze zur Abkürzung

$$\rho = \log AP' - \log b, \quad \log \frac{1}{m} = \rho_0 = \log AA' - \log b.$$

Dann wird

$$AP' = be^{\rho}, \quad AA' = be^{\rho_0}, \quad AO = be^{-\rho_0},$$

und wir erhalten für das Potential in einem Punkte mit den Coordinaten ρ, ϑ

2b) $$\varphi = E \log (e^{-2\rho_0} - 2e^{-\rho_0} e^{\rho} \cos\vartheta + e^{2\rho})$$
$$- E \log (e^{2\rho_0} - 2e^{\rho_0} e^{\rho} \cos\vartheta + e^{2\rho}) + 2E\rho_0.$$

Das Potential verschwindet, wenn $\rho = 0$, das heisst, wenn $r = b$ ist, also in allen Punkten des Kreisquerschnitts des Cylinders um die Axe A. Es stellt also φ das Potential in den Punkten innerhalb eines inducirten Cylinders dar, dessen Mantelfläche das Potentialniveau Null hat, während parallel seiner Axe, innerhalb der Mantelfläche eine gleichförmig electrisirte Linie läuft, deren Schnittpunkt A' mit der Ebene unserer Zeichnung die Coordinaten $\rho = \rho_0$, $\vartheta = 0$ hat.

ρ und ϑ sind die in Art. 188 erwähnten conjugirten Functionen, ρ ist der Logarithmus des Verhältnisses des Radiusvectors eines Punktes zum Radius des Kreises, und ϑ ist ein Winkel.

In dem durch diese Grössen definirten Coordinatensystem ist das Centrum A der einzige singuläre Punkt. Ferner ist das Linienintegral $\int(\partial\vartheta/\partial s)\,ds$ längs einer geschlossenen Curve gleich Null oder gleich 2π, je nachdem das Centrum innerhalb oder ausserhalb der Integrationscurve liegt.

190. *Neumanns Transformation**). Es seien α und β zwei conjugirte Functionen von x und y, und es mögen die Curven (α) äquipotentielle Linien und die Curven (β) Kraftlinien darstellen, die in Folge der Wirkung einer halben im Coordinatenursprung befindlichen Electricitätseinheit und eines in einem gewissen Abstande vom Ursprung irgendwie angeordneten electrischen Systems entstehen.

Wir denken uns das electrische System so verteilt, dass eine äquipotentielle Curve (α_0) in sich zurückläuft und abgesehen von der halben im Ursprung concentrirten Electricitätseinheit keine weitern electrischen Punkte einschliesst. Alle Curven (α), welche zwischen (α_0) und dem Ursprung liegen, sind dann geschlossene Linien, die diesen Ursprung umgeben. Die Curven (β) schneiden sich also alle im Ursprung und treffen die Curven (α) senkrecht.

Die Coordinaten irgend eines Punktes des von α_0 umfassten Gebietes sind durch die Werte der α und β, also durch die Curven (α) und (β), welche sich in ihm schneiden, bestimmt, wandert der Punkt auf derselben Curve (α) in positiver Richtung bis er an seine Ausgangsstelle zurückgekommen ist, so wächst der ihn charakterisirende Wert β für jeden vollen Umlauf um 2π.

Es sei nun α_0 der Schnitt der innern Fläche eines hohlen Cylinders mit der xy Ebene. Nehmen wir an, dass das Potential des Cylinders unter dem Einfluss einer electrischen Linie, von der der Ursprung die Projection auf unsere Ebene ist, den Wert Null hat, so können wir bei der Untersuchung des Potentialwertes in Punkten, die innerhalb der Curve α_0 liegen, von dem äussern electrischen System ganz absehen. Ist dann E die Liniendichte der Electricität auf der electrischen Axe, so ist in einem auf der Curve (α) innerhalb des Cylinders gelegenen Punkt das Potential

$$\varphi = 2E(\alpha - \alpha_0).$$

*) Crelle, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 1861.

Für die auf einem von den Kraftlinien β_1 und β_2 ausgeschnittenen Teile der Curve α_0 inducirte Electricitätsmenge finden wir nach Art. 183, 3)

$$Q = \frac{1}{2\pi}(\beta_1 - \beta_2).$$

Haben wir so den Verlauf des Potentials innerhalb einer bestimmten Querschnittscurve berechnet, wenn der electrische Punkt sich im Ursprung der Coordinaten befindet, so können wir durch die allgemeine Transformation diesen Verlauf auch noch bestimmen, wenn der electrische Punkt irgend eine andere Stelle innerhalb der Querschnittscurve einnimmt, (das heisst, wenn die electrische Linie parallel mit sich selbst aus dem Ursprung herausgeschoben ist) und das Potentialniveau auf der Curve gleich Null bleibt.

Denn wenn die Werte von α und β in dem electrischen Punkt durch α_1 und β_1 bezeichnet werden, so haben wir für das Potential in einem Punkte α, β nach dem vorhergehenden Artikel, wo ϑ wie man sieht, durch $\beta - \beta_1$ und ρ durch $\alpha - \alpha_0$ zu ersetzen ist,

$$\begin{aligned}\varphi = \quad & E \log\left(1 - 2e^{\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0)}\right) \\ & - E \log\left(1 - 2e^{\alpha - \alpha_1}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha - \alpha_1)}\right) - 2E(\alpha_1 - \alpha_0).\end{aligned}$$

Das Potential verschwindet für $\alpha = \alpha_0$ also auf der Grenzlinie und ist in den innerhalb α_0 gelegenen Punkten endlich und stetig. Nur im electrischen Punkte α_1, β_1 selbst wird das zweite Glied wie $-(2E \log r')_{r'=0}$ unendlich, falls r' den Abstand eines Punktes in der nächsten Nachbarschaft des electrischen Punktes bezeichnet.

Man kann also die Greensche Function für eine bestimmte Lage des electrischen Punktes berechnen, wenn sie bei einer andern Lage desselben schon bekannt ist.

Die in einem, zwischen den Curven β und $\beta + d\beta$ gelegenen Element ds_2 der Curve α_0 inducirte Electricitätsmenge ist, weil die Curve (β) die Curve α_0 senkrecht schneidet, gleich

$$de = -\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}ds_2\right)_{\alpha=\alpha_0},$$

wo ∂s_1 ein zwischen den Curven α und $\alpha + d\alpha$ gelegenes und nach innen als positiv gerechnetes Element der Curve β angiebt, also nach Gleichung IV) in Art. 183

$$de = -\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\beta\right)_{\alpha=\alpha_0}.$$

Mit Benutzung des Potentialausdruckes für φ wird daraus

$$de = -\frac{E}{2\pi}\frac{1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}{1 - 2e^{\alpha_1 - \alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}d\beta.$$

Damit können wir umgekehrt das Potential in einem Punkte α_1, β_1 innerhalb der geschlossenen Curve berechnen, wenn der Potentialwert in jedem Punkte der Curve als Function von β gegeben ist, und im Innern der Curve sich keinerlei electrische Punkte befinden.

Nach Art. 97, 8b) ist nämlich das Potential in α_1, β_1, herrührend von der Electricität des zum Potential V geladenen Elementes der Curve α gleich Vde, wenn de diejenige Electricitätsmenge angiebt, welche von einer in α_1, β_1 supponirten Electricitätseinheit in diesem Element inducirt werden würde.

Ist also V das Potential in einem Punkte einer geschlossenen Curve α als Function von β gegeben, und liegen innerhalb der Curve keine electrischen Punkte, so ist das Potential der ganzen Curve auf den innerhalb derselben befindlichen Punkt α_1, β_1, weil β um 2π wächst, wenn man die Curve α in positiver Richtung einmal durchläuft, gleich

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)})\, V d\beta}{1 - 2e^{\alpha_1 - \alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}.$$

Verteilung der Electricität in der Nähe der Kante eines von zwei Ebenen begrenzten Conductors.

191. Erstreckt sich zunächst der Conductor nach allen Seiten in die Unendlichkeit, so ist das Potential in einem von ihm um y abstehenden Punkte P

$$V = C - 4\pi\sigma_0 y,$$

wo C das Potentialniveau und σ_0 die gleichförmige Dichte der Ladung des Conductors angiebt.

Transformiren wir den obigen Ausdruck in Polarcoordinaten, deren Axe in der Ebene des Conductors liegt, und bezeichnen mit $r = ae^{\vartheta}$ das vom Punkt P auf die Axe gefällte Lot und mit ϑ den Winkel, den dieses Lot mit einer von seinem Fusspunkt zu dem Fusspunkt des von P auf die Ebene gefällten Lotes y gezogenen Linie bildet, so finden wir

$$V = C - 4\pi\sigma_0 ae^{\vartheta}\sin\vartheta.$$

Die in einem an die Axe anstossenden Parallelogramm von einer Breite gleich der Längeneinheit und von einer Länge gleich ae^{ϑ} auf der Conductorebene ausgebreitete Electricitätsmenge ist

$$E = \sigma_0 ae^{\vartheta}.$$

Ich führe die Transformation $\rho = n\rho'$ und $\vartheta = n\vartheta'$ ein, wobei ρ' und ϑ' conjugirte Functionen von ρ und ϑ sein sollen. Die Ausdrücke

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a e^{n\rho'} \sin n\vartheta',$$
$$E = \sigma_0 a e^{n\rho'},$$

bestimmen dann eine mögliche Verteilung der Electricität.

Ersetzt man $ae^{\rho'}$ durch r, wo also r den Abstand eines Punktes von der Axe bezeichnet, und schreibt für ϑ' wieder ϑ, so ist

$$V = C - 4\pi\sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \sin n\vartheta$$

$$E = \sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}},$$

V wird gleich C, wenn $n\vartheta$ einen vielfachen Wert von π ausmacht.

Die Grösse n ist noch willkürlich, wir können sie benutzen, um unsern bisherigen Conductor abzuändern.

Die folgenden Rechnungen lehren, dass n eindeutig bestimmt ist, wenn wir annehmen, dass der Conductor von zwei halben unendlichen Ebenen eingefasst wird, die an der unendlich langen geraden Grenze eine Kante vom Winkel α bilden.

Der Winkel des anstossenden Dielectricums ist $2\pi - \alpha$.

Das Potential muss auf einem solchen keilförmigen Conductor in entsprechenden Punkten zu beiden Seiten der Kante denselben Wert haben, und daraus bestimmt sich die Grösse n.

Wir haben also

$$n(2\pi - \alpha) = \pi,$$

und

$$n = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$$

zu setzen.

Weitere Bedingungen erfordert unser Conductor nicht, daher ist

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} \sin \frac{\pi\vartheta}{2\pi - \alpha}$$

das Potential desselben in einem durch r, ϑ charakterisirten Punkt.

Die Electricitätsmenge E wird

$$E = \sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

Für die Flächendichte σ in einem von der Kante um r abstehenden Punkt des Conductors findet sich

$$\sigma = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha-\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

Die Kante des Conductors kann verschieden geformt sein.

Ist α ein ausspringender Winkel, also kleiner als π, so ist $\alpha - \pi$ negativ, und demnach ändert sich die Dichte wie eine gewisse negative Potenz der Abstände der Punkte von der Kante des Conductors. In der Kante selbst wird die Dichte unendlich gross, trotzdem die gesammte auf einem von der Kante bis in gewisser Entfernung von derselben reichenden endlichen Flächenstück enthaltene Electricitätsmenge endlich ist.

Wenn speciell $\alpha = 0$ ist, das heisst, wenn die Kante unendlich scharf zuläuft, so ist die Dichte in einem Punkte umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus seinem Abstande von der Kante.

Bei $\alpha = \pi/3$, wo die Kante so aussieht, als ob sie einem gleichseitigen Prisma angehörte, ist die Dichte umgekehrt proportional der fünften Wurzel aus dem Quadrate des Abstandes.

Ist $\alpha = \pi/2$, so wird die Kante rechtwinklig und die Dichte umgekehrt proportional der Kubikwurzel aus der Entfernung.

Für $\alpha = 2\pi/3$ gehört die Kante einem regulären hexagonalen Prisma an, und die Dichte variirt umgekehrt wie die vierte Wurzel aus dem Abstande.

Erreicht α den Wert π, so ist die Kante verschwunden, der Conductor erstreckt sich überall in die Unendlichkeit und die Dichte ist überall dieselbe.

Für $\alpha = 4\pi/3$ sieht die Kante so aus wie die Innenseite der Kante eines hexagonalen Prisma, und die Dichte variirt direct wie die Quadratwurzel aus der Entfernung des Punktes, für den sie bestimmt wird, von der Kante.

Bei $\alpha = 3\pi/2$ bildet die Kante einen einspringenden rechten Winkel, und die Dichte ändert sich direct wie die Entfernung von derselben.

Endlich bildet die Kante für $\alpha = 5\pi/3$ einen einspringenden Winkel von 60^0, die Dichte variirt wie das Quadrat des Abstandes.

In der Natur kommt es nicht vor, dass die Dichte in einer Kante unendlich wird, denn wir haben schon gesehen (Art. 55), dass, wenn die Electricität übermässig an einer Stelle aufgehäuft wird, eine Entladung in das Dielectricum eintritt.

Confocale Ellipsen und Hyperbeln als Niveau- und Kraftlinien.

192. Setzt man

$$x_1 = e^{\varphi} \cos\psi, \quad y_1 = e^{\varphi} \sin\psi,$$

so sind, wegen $x_1 + iy_1 = e^{\varphi + i\psi}$ die x_1 und y_1 conjugirte Functionen von φ und ψ.

Ebenso sind unter der Annahme

$$x_2 = e^{-\varphi}\cos\psi\,,\quad y_2 = -e^{-\varphi}\sin\psi\,,$$

auch x_2 und y_2 conjugirte Functionen von φ und ψ. Daraus folgt nach Theorem V, dass wenn

$$2x = x_1 + x_2 = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\cos\psi\,,\quad 2y = y_1 + y_2 = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})\sin\psi$$

gemacht wird, auch x und y conjugirte Functionen von φ und ψ sein müssen.

Die Punkte x, y, für welche φ constant ist, liegen auf einer Ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)^2} = 1\,,$$

deren Axen $e^{+\varphi} + e^{-\varphi}$ und $e^{+\varphi} - e^{-\varphi}$ sind. Die Punkte x, y, für welche ψ constant ist, befinden sich auf einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{\cos^2\psi} - \frac{y^2}{\sin^2\psi} = 1\,,$$

welche $2\cos\psi$ und $2\sin\psi$ zu Axen hat.

Auf der x Axe haben wir $y = 0$, also entweder $\varphi = 0$, oder $\psi = n\pi$. Wenn $\varphi = 0$, so ist $\psi = \arccos x$, also reell für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden Abscissen x. Ist dagegen $\psi = n\pi$, so ergiebt sich für e^{φ} eine quadratische Gleichung, deren Lösung eine Wurzel $\sqrt{x^2 - 1}$ enthält. Man hat also zusammen

$$\varphi = 0,\quad \psi = \arccos x$$

von $x = -1$ bis $x = +1$,

$$\psi = 0,\quad \varphi = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

für $x > +1$,

$$\psi = \pi,\quad \varphi = \log\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)$$

für $x < -1$.

Benutzen wir φ als Potentialfunction und ψ als Stromfunction, so haben wir den Fall vor uns, dass Electricität aus den Punkten der x Axe, welche zwischen $x = +1$ und $x = -1$ liegen, heraus die Ebene in Richtung von $+x$ nach $-x$ durchströmt, während die ausserhalb der Grenzpunkte befindlichen Teile der x Axe undurchgängig für Electricität sind.

Zu den Stromlinien, welche hier Hyperbeln sind, gehört auch die y Axe, man darf diese also ebenfalls als für Electricität undurchdringlich ansehen.

Man kann φ auch als die Potentialfunction, welche ein langer flacher Conductor von elliptischem Querschnitt, der bei einer Breite gleich 2 auf einer Einheit seiner Länge mit einer halben Electricitätseinheit geladen ist, hervorbringt, ansehen.

Macht man umgekehrt ψ zur Potential-, φ zur Stromfunction, so hat man die Lösung für den Fall, dass von zwei halben Ebenen, die derselben Ebene angehören und durch einen Zwischenraum von der Breite 2 von einander getrennt sind, die eine zum Potential π, die andere zu dem Potential Null geladen ist.

Die Lösung dieser behandelten Fälle lässt sich auch aus der schon in Cap. X. durchgeführten Theorie der electrischen Verteilung auf Flächen zweiten Grades ableiten.

Die Curven sind auf Tafel XI. abgebildet.

Strömung in zerteilten Streifen.

193. Eine weitere Transformation erhalten wir durch die Substitution

$$x' = b \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y' = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

wo x und y in der im letzten Artikel angegebenen Weise als Functionen von φ und ψ definirt sind. x' und y' sind nach dem Theorem X. conjugirte Functionen von φ und ψ. Die früheren in der xy Ebene liegenden und auf Tafel XI. abgebildeten Curven φ und ψ werden in andere auf der $x'y'$ Ebene befindliche transformirt, deren Verlauf dem Leser durch die Tafel XII. vorgeführt wird.

Sind x', y' rechtwinklige Coordinaten, so gehen die Eigenschaften, die früher der x Axe zukamen, also für $y = 0$ stattfanden, jetzt auf Reihe von der x' Axe parallelen Geraden $y' = bn'\pi$ über, wo n' alle ganzen Zahlen durchläuft.

Den Punkten der x Axe, für welche $x > 1$ war, entsprechen die Punkte dieser Schaar von Geraden, für welche $x' > 0$ ist. Die diesen Punkten zugehörigen Werte von φ und ψ folgen aus den Gleichungen

$$1) \qquad \psi = n\pi, \quad \varphi = \log (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \log \left(\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1} + e^{\frac{x'}{b}} \right).$$

Den Punkten der x Axe, für welche $x < 1$ war, entsprechen die Punkte der Schaar von Geraden, für welche $x' < 0$ ist, und man hat für diese Punkte

$$2) \qquad \varphi = 0, \quad \psi = \arccos x = \arccos e^{\frac{x'}{b}}.$$

Ferner gehen die Eigenschaften der y Axe, die also für $x = 0$ gelten, in unserer Transformation auf eine zweite Reihe von zur x' Axe parallelen Geraden $y' = b(n' + \frac{1}{2})\pi$ über.

Für alle Punkte dieser Geraden haben φ und ψ die Werte

$$3) \qquad \varphi = \log (y + \sqrt{y^2 + 1}) = \log \left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1} \right), \quad \psi = (n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Man kann*) die Curven, für welche φ bezüglich ψ constant ist, direct durch die Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2} b \log \tfrac{1}{4} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2\cos 2\psi), \\ y' &= b \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \operatorname{tg}\psi\right) \end{aligned}$$

construiren. Da aber die Figur sich in zur x' Axe parallelen Streifen von der Breite πb wiederholt, so genügt ihre Beschreibung für einen solchen Streifen.

y' wechselt sowohl mit φ als ψ sein Zeichen, und wir haben darum zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem φ oder ψ durch Null hindurch geht. Nehmen wir an, dass ψ keinen Zeichenwechsel erleidet, so zeigt die Gleichung für x', dass die Curve $\psi = \text{const}$, also

$$5) \qquad 4e^{\frac{2x'}{b}} = -\frac{\sin(\frac{y'}{b} + \psi)}{\sin(\frac{y'}{b} - \psi)} - \frac{\sin(\frac{y'}{b} - \psi)}{\sin(\frac{y'}{b} + \psi)} + 2\cos 2\psi$$

symmetrisch zur x' Axe liegt.

Sie schneidet die negative Hälfte der x' Axe in einem Punkte

$$6) \qquad x' = b \log \cos\psi,$$

wo $\varphi = 0$ ist, senkrecht und läuft schliesslich für grosse Werte des φ der x' Axe parallel. Die Werte des ψ liegen entsprechend den Grenzwerten 0 und $\pm \pi b/2$ von y' zwischen 0 und $\pi/2$.

Die positive x' Axe gehört mit zu den ψ Curven.

Die Curven $\varphi = \text{const}$ schneiden die eben behandelten $\psi = \text{const}$ senkrecht und liegen in dem Intervall $\varphi = +\infty$ bis $\varphi = -\infty$.

Ihre Gleichung ist

$$7) \qquad 2e^{\frac{2x'}{b}} = \cosh 2\varphi + \frac{\operatorname{tgh}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\frac{y'}{b}}{\operatorname{tgh}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\frac{y'}{b}}.$$

Nun haben wir gesehen, dass die ψ Curven symmetrisch zur positiven x' Axe liegen, eine Curve, welche alle ψ Curven orthogonal schneidet, läuft also ebenfalls symmetrisch zur x' Axe, wie das auch direct aus der gegebenen Formel für die φ Curven folgt. Bezeichnen wir eine solche Curve, die zu dem System der φ Curven gehört, durch PQR, wo P auf der Linie $y' = +\pi b/2$, Q auf der $y' = 0$, also auf der x' Axe und R auf der Linie $y' = -\pi b/2$ liegt, und setzen auf dem Stück PQ den Wert von φ gleich $+c$, so muss er auf dem Stück QR gleich $-c$ sein. Im Punkte Q erleidet

*) Das Folgende bis zum Schluss des Artikels ist mit geringen Abänderungen vom englischen Herausgeber, Herrn Dr. Niven, hinzugefügt. Anm. d. Uebers.

also φ einen Sprung von $+c$ auf $-c$. In Art. 195 wird sich zeigen, durch welche electrische Verteilung ein solcher Sprung verursacht wird.

Die Curven ψ und φ sind auf der Tafel XII. verzeichnet. Das oberste Drittel der Figur ist eine Wiederholung des untersten Drittels und fortzudenken, da schon die beiden ersten Drittel das Intervall $y' = -\pi b/2$ bis $y' = +\pi b/2$ enthalten.

Wir nehmen zweitens an, dass φ sein Zeichen stets beibehält und ψ mit y' sein Zeichen wechselt.

Dem Werte $\varphi = 0$ entspricht als φ Curve die negative x' Axe und dem Werte $\varphi = \infty$ eine zur x' Axe senkrechte, in der Unendlichkeit liegende Linie. Längs einer φ Curve PQR ist φ constant und positiv.

Aehnlich wie im vorigen Fall φ erleidet jetzt ψ auf einer ψ Curve beim Durchgang durch die negative x' Axe dadurch einen Sprung, dass der Wert von ψ plötzlich ins Entgegengesetzte umschlägt.

Die physikalische Bedeutung dieser Discontinuität wird aus den Erörterungen in Art. 197 erhellen.

194. Ich mache erst eine electrodynamische Anwendung dieser Ergebnisse. Benutzt man φ zur Bestimmung des Potentials und ψ zu der der Stromlinien, so haben wir den Fall eines unendlich langen Metallstreifens von der Breite πb, dessen in Richtung der positiven x' Axe laufender Teil durch einen vom Ursprung ausgehenden, parallel der x' Axe gerichteten, nicht leitenden Canal (etwa durch einen Schlitz in dem Streifen hervorgebracht) in zwei Hälften geteilt ist.

φ und ψ bestimmen dann Potential- und Stromlinien, wenn ein electrischer Strom in der Unendlichkeit in die eine Hälfte des positiven Teiles des Streifens ein- und durch die andere Hälfte dieses Teiles in der Unendlichkeit wieder austritt.

Ist umgekehrt ψ Niveau- und φ Stromfunction, so haben wir die Lösung für den Fall, dass ein Strom im Allgemeinen in Richtung der y' Axe durch eine Schicht fliesst, welche durch nichtleitende Canäle zerschnitten ist, die alle von der y' Axe ausgehen und parallel mit der negativen x' Axe in die Unendlichkeit verlaufen.

Eine einseitig begrenzte Platte zwischen zwei unendlichen Ebenen.

195. Wichtiger noch ist die Anwendung der obigen Formeln auf zwei electrostatische Fälle, die sich ergeben, je nachdem man ψ oder φ als Potentialfunction wählt. Es sei ein Conductor in Form einer ebenen Tafel gegeben, die sich nach einer Seite hin in die Unendlichkeit erstreckt und nach der andern Seite durch eine gerade Kante begrenzt ist.

Wir verlegen die Tafel in den positiven Teil der $x'z'$ Ebene, lassen die x' Axe senkrecht zur Kante stehen und bringen über und unter ihr in den

Abständen $\pi b/2$ zwei leitende, unendlich grosse Ebenen hin. Das Potential ψ ist dann auf der Tafel gleich Null und auf den beiden Ebenen gleich $\pi/2$.

Die in einem Streifen von der Breite 1 und der Länge $x'_2 - x'_1$ auf der Tafel enthaltene Electricitätsmenge, ist zunächst nach Art. 183, 3) gleich $(\varphi_2 - \varphi_1)/4\pi$. Machen wir also $x'_1 = 0$, $x'_2 = a$, so haben wir für diese Electricitätsmenge nach der Formel 1) des vorigen Artikel

$$1) \qquad E = \frac{1}{4\pi} \log \left(e^{\frac{a}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{b}} - 1} \right).$$

Ist a, die Breite des Streifens, sehr gross im Verhältnis zu b, dem Quotienten aus dem Abstande der beiden die Tafel einfassenden Ebenen und aus π, so wird

$$1_1) \qquad E = \frac{1}{4\pi} \log 2 e^{\frac{a}{b}}$$

oder

$$1_2) \qquad E = \frac{a + b \log 2}{4 \pi b}.$$

Die Ladung unserer Tafel ist bei der tatsächlichen Verteilung grösser, als sie sein würde, wenn die Electricität sie gleichförmig mit der Dichte bedecken würde, welche auf der Tafel in einiger Entfernung von der Kante herrscht.

Ein Streifen von der angegebenen Art hat also bei der tatsächlichen Verteilung ebensoviel Electricität als ein um $b \log 2$ breiterer Streifen bei der gleichförmigen Verteilung.

In der Tafel XII. sind die Niveau- und Kraftlinien für den supponirten Fall einer gleichmässigen Verteilung der Electricität, wenn die beiden einfassenden Ebenen gleichförmig electrisirt sind und allseitig sich in die Unendlichkeit erstrecken, durch die punktirten Linien dargestellt. Man sieht, dass beide Liniensysteme aus Geraden bestehen. Die horizontalen geben die Durchschnitte der Niveauflächen mit der Platte, die verticalen die Kraftlinien.

196. *Condensator aus drei Platten.* Man wendet in der Praxis manchmal electrische Condensatoren an, die man sich in der oben angegebenen Weise dadurch herstellt, dass man eine Platte zwischen zwei andere bringt, welche sie weit überragen. Ist dabei der Krümmungsradius der Begrenzung der Mittelplatte gross im Verhältnis zu dem Abstande der einfassenden Platten, so darf man die Begrenzung als geradlinig auffassen und die obigen Formeln anwenden.

Man bestimmt also die Capacität der Mittelplatte des Condensators dadurch, dass man ihren Flächeninhalt durch einen um den Rand herumgelegten Streifen von der constanten Breite $b \log 2$ vergrössert, und dann unter Annahme, dass die Electricität mit der Dichte, die man auf der Platte

in einiger Entfernung von der Kante antrifft, verteilt ist, die gesammte auf der vergrösserten Platte enthaltene Electricitätsmenge berechnet.

Bezeichnen wir mit B den Abstand der umfassenden Platten, mit S den wahren Flächeninhalt der Mittelplatte und mit L die Länge ihrer wahren Begrenzung, so ist wegen der Beziehung $\pi b = B$ die Breite des hinzuzufügenden Streifens

a_1) $$\alpha = \frac{B}{\pi} \log 2,$$

der vergrösserte Flächeninhalt also

$$S' = S + \frac{BL}{\pi} \log 2,$$

woraus sich die Capacität der Mittelplatte ergiebt zu

2_1) $$\frac{S'}{2\pi B} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{S}{B} + \frac{L}{\pi} \log 2 \right\}.$$

Correction für die Dicke der Platte. Bei diesen Rechnungen ist von der Dicke der Mittelplatte ganz abgesehen worden, im allgemeinen wird man sie aber nicht gegen den Abstand der einfassenden Ebenen vernachlässigen dürfen. In einiger Entfernung von der Kante wird die Dicke überall dieselbe sein, an der Kante selbst aber, die wir uns als abgerundet vorzustellen haben, wird sie stark variiren.

Man gelangt daher zu genauern Resultaten, wenn man die Oberfläche der Platte nicht wie bisher mit der vermittelst der Curve $\psi = 0$ charakterisirten Niveaufläche, sondern mit der durch die Curve $\psi = \psi'$ bestimmten confundirt.

Ist β die Dicke der Platte, so haben wir $b\psi' = \beta/2$ zu setzen. Die Lage der Kante ergiebt sich aus der Bemerkung, dass für sie $y' = 0$ ist, die Kante geht also durch einen Punkt x' der x' Axe, der nach Art. 193, 6) durch die Gleichung

b) $$x' = b \log \cos \psi$$

bestimmt ist.

φ hat in dieser Kante den Wert Null und in einem Punkte $x' = a$ den Wert $(a + b \log 2)/b$. Daraus folgt, dass die Electricitätsmenge unserer Platte gefunden wird, wenn man ihr ausser dem frühern Streifen von der Breite $(B \log 2)/\pi$ noch einen von der Breite $(B \log \cos \pi\beta/2B)/\pi$ hinzufügt.

Im ganzen ist also die Platte um

a_2) $$\alpha_1 = \frac{B}{\pi} \left(\log 2 + \log \cos \frac{\pi\beta}{2B} \right) = \frac{B}{\pi} \log \left(2 \cos \frac{\pi\beta}{2B} \right)$$

zu verbreitern.

Die Electricität ist dann überall als gleichförmig mit einer Dichte, welche in einem in einiger Entfernung von der Kante der Platte befind-

lichen Punkt angetroffen wird, ausgebreitet zu denken, und man hat die Capacität

$$2) \qquad \frac{S'}{2\pi B} = \frac{1}{2B}\left\{\frac{S}{B} + \frac{L}{\pi}\log\left(2\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right)\right\}.$$

Dichte der Electricität in der Nähe der Kante. Allgemein ist die Flächendichte in einem Punkte x' der Platte nach Art. 193, 1) gleich

$$3) \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x'}\log\left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}\right) = \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}}$$

$$= \frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2x'}{b}}}} = \frac{1}{4\pi b}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{2x'}{b}} + \tfrac{3}{8}e^{-\frac{4x'}{b}} + \ldots\right).$$

Der Klammerausdruck nähert sich rasch mit wachsendem x', also mit wachsender Entfernung von der Kante, der 1.

Die bei der Berechnung der Electricitätsmenge anzunehmende Normaldichte ist also gleich $1/4\pi b$, und die wahre Dichte in einem Punkte, der sich in einer Entfernung $n\alpha = nb\log 2$ von der Kante befindet (dessen Entfernung von der Kante n mal so gross ist wie die Breite des ersten hinzuzufügenden Streifens), ist nur noch um den $1/2^{2n+1}$ ten Teil der Normaldichte grösser als diese Normaldichte.

In ähnlicher Weise berechnet sich die in Punkten der einfassenden Ebenen herrschende Dichte der Electricität aus der Gleichung 3) in Art. 193 zu

$$4) \qquad \sigma' = \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}}.$$

Für $x' = 0$ ist diese Dichte das $2^{-\frac{1}{2}}$ fache der Normaldichte $1/4\pi b$.

Für $x' = n\alpha$ ist sie um den $1/2^{2n+1}$ ten Teil der Normaldichte kleiner als diese.

Für $x' = -n\alpha$ ist sie das $1/2^n$ fache der Normaldichte.

Man gewinnt durch diese speciellen Resultate ein Kriterium für die bei Platten von endlicher Ausdehnung oder bei Platten, welche in nicht zu grosser Entfernung von ihrer Grenze einige Unregelmässigkeiten aufweisen, durch die obige abgekürzte Berechnung erlangte Genauigkeit.

Ganz so wie in dem eben behandelten Fall verteilt sich die Electricität auch, wenn man eine unendlich grosse Anzahl von ähnlichen Platten, die sich in gleichen Abständen B auf einander folgen, hat, deren Potentialniveaus abwechselnd $+V$ und $-V$ sind.

Eine Reihe paralleler Halbebenen.

197. Wählen wir zweitens φ zur Potentialfunction, so gelangen wir zu der Lösung eines Problems, das sich auf eine unendliche Anzahl von leitenden Ebenen bezieht, welche einander in Intervallen $B = \pi b$ folgen, der $x'z'$ Ebene parallel in Richtung der negativen x' laufen und nur durch die Schnittlinien mit der $y'z'$ Ebene begrenzt sind, wenn das Potentialniveau aller dieser Halbebenen gleich Null ist.

Für eine im Abstande $y' = n\pi b$ von der $x'z'$ Ebene in der Verlängerung einer Ebene jener Schaar liegende Ebene haben wir

$$1) \qquad y' = n\pi b,\ x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}),$$

und für eine andere durch die Mitte zwischen dieser und der folgenden hindurchgehende Ebene

$$2) \qquad y' = b(n + \tfrac{1}{2})\pi,\ x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}).$$

Die Curve $\varphi = \text{const}$ verläuft also wie eine in der $x'y'$ Ebene liegende Wellenlinie.

Ist φ sehr gross, so ist der mittlere Abstand der zugehörigen Wellenlinie von der y' Axe näherungsweise

$$3) \qquad x' = a = b(\varphi - \log 2).$$

Die Amplitude der Undulation zu einer Seite der Wellenaxe ist gleich

$$4) \qquad \tfrac{1}{2} D = \tfrac{1}{2} b \log \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}},$$

also für grosse Werte von φ gleich

$$4_1) \qquad D_1 = 2 b e^{-2\varphi}.$$

In der grossen positiven Entfernung a von der y' Axe nähert sich die Wellenlinie einer Geraden.

Denken wir uns durch $x' = a$ senkrecht zur $x'z'$ Ebene eine leitende Ebene gelegt, die ein bestimmtes Potentialniveau hat, das sich von dem Potentialniveau der Conductoren unterscheiden kann, so ist, weil allda $b\varphi = a + b \log 2$ ist, die Flächendichte der in dieser Ebene inducirten Electricität ebenso gross, wie wenn die Electricität durch eine der fraglichen Ebene parallele, im Abstand $\alpha = b \log 2$ von den Kanten der electrischen Ebenen auf der Seite der negativen x' befindliche und zu dem Potential dieser Ebenen geladene Ebene inducirt wäre.

Ist noch B der Abstand zweier auf einander folgender Ebenen, so haben wir

$$\alpha = \frac{B}{\pi} \log 2.$$

Die Flächendichte auf den zur $x'z'$ Ebene parallelen electrischen Ebenen findet sich aus der Gleichung

$$\sigma = \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)_{\varphi=0}$$

nach Art. 193, 2) zu

5) $$\sigma = \frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{e^{-\frac{2x'}{b}}-1}}.$$

Auf einer in beträchtlicher Entfernung von den Kanten unserer Reihe von Ebenen befindlichen Ebene ist die mittlere Dichte

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi b},$$

sie ist also das $\sqrt{2^{2n}-1}$ fache der auf einer der electrischen Ebenen in der n fachen Entfernung $n\alpha = nb\log 2$ von ihrer Kante herrschenden Dichte.

Eine plane und eine gewellte Ebene.

198. Wir betrachten nun den Raum zwischen zwei äquipotentiellen Flächen, deren eine durch parallele Berge und Thäler wellig gebogen ist, während die andere in der Entfernung $x' = a$ von den Kanten der electrischen Ebenen befindliche mit einer Ebene confundirt werden darf.

Bezeichnet D die Tiefe der Wellen einer bestimmten Niveaufläche von der Spitze bis zur Sohle gerechnet, so haben wir das zugehörige

1) $$\varphi = \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{\frac{D}{b}}+1}{e^{\frac{D}{b}}-1}.$$

Ist Φ das Potential auf der Niveaufläche $x' = a$, die wie eine Ebene zu behandeln ist, und φ das Potential einer andern Niveaufläche, so ist, weil die Ladung der Flächeneinheit jener Ebene gleich $1/4\pi b$ ist, die Capacität derselben in Gegenwart der zweiten Niveaufläche

2) $$C = \frac{1}{4\pi b(\Phi-\varphi)}.$$

Wir setzen das gleich

2′) $$C = \frac{1}{4\pi(A+\alpha')}$$

und erhalten

a) $$A + \alpha' = b\,(\Phi - \varphi).$$

Verstehen wir nunmehr unter A den Abstand der Wellenspitzen der zweiten Niveaufläche von der ersten als Ebene zu betrachtenden, dann ist nach den Gleichungen unter 1) und 2)

$$A + x' = A + b \log \tfrac{1}{2}\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = a = b\,(\Phi - \log 2),$$

also haben wir

b) $$\begin{aligned} \alpha' &= -b\varphi + b\,[\log 2 + \log \tfrac{1}{2}\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi})] \\ &= b \log (1 + e^{-2\varphi}) \\ &= b \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{b}}}, \end{aligned}$$

und das bedeutet, dass die Capacität des aus einer planen und einer gewellten Ebene bestehenden Systems von Niveauflächen ebenso gross wie die zweier paralleler von einander um $A + \alpha'$ abstehender Ebenen ist, wenn A die mittlere Entfernung unserer beiden Niveauflächen angiebt und

$$\alpha' = b \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{b}}}$$

gemacht wird.

Durchfurchte Flächen.

199. Dem obigen zufolge ist also die Capacität einer Ebene in Gegenwart einer andern grösser, als diejenige einer gewellten Ebene in Gegenwart einer andern Ebene. Bringt man also in einen durch eine Ebene begrenzten Conductor eine Furche an, so wird seine Capacität in Gegenwart eines andern ebenen Conductors verringert. Von je mehr Furchen einer der Conductoren durchzogen wird, desto kleiner ist seine Capacität im Verhältnis zu der Capacität, die er haben würde, wenn er ganz eben wäre. Die Verringerung der Capacität durch n Furchen ist aber kleiner als das $n$fache der Verringerung durch eine Furche, so dass die Capacität verhältnismässig um so weniger abnimmt, je mehr Furchen man zieht; denn da die durchschnittliche zwischen den Conductoren wirkende electrische Kraft bei mehrfacher Durchfurchung eines derselben kleiner als bei einfacher Durchfurchung ist, so wird die Induction in eine Furche durch die Existenz anderer Furchen verringert.

Bezeichnet man mit L die Länge, mit B die Breite und mit D die Tiefe einer Furche in einem der um A von einander abstehenden Conductoren,

so ist die Capacität eines Flächenstückes S des gegenüberstehenden Conductors

$$1) \qquad C = \frac{S - LB}{4\pi A} + \frac{LB}{4\pi(A+\alpha')} = \frac{S}{4\pi A} - \frac{LB}{4\pi A}\frac{\alpha'}{A+\alpha'}.$$

Das Glied $-LB\alpha'/4\pi A(A+\alpha')$ bezeichnet die Correction, welche nach der Durchfurchung an die ursprüngliche Capacität anzubringen ist, um die dem neuen Zustand entsprechende Capacität zu erhalten.

Ist A sehr gross gegen B oder α', so wird nach der Gleichung b) im vorigen Artikel

$$1_1) \qquad C = \frac{S}{4\pi A} - \frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}}.$$

Wird $D = \infty$, so geht die Furche in einen durch den ganzen Conductor führenden Schlitz über, und die Capacität wird

$$1_2) \qquad C = \frac{S}{4\pi A} - \frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log 2$$

$$= \frac{S}{4\pi A} - 0{,}0175576\,\frac{B^2}{A^2}L.$$

Abänderung der Conductoren durch Rotation.

200. *Cylindrisch gebogene Platten.* Wir suchen mit Hilfe der obigen Ergebnisse die electrische Verteilung in einer Configuration zu bestimmen, welche durch Rotation unserer Halbebenen um eine Axe $y' = -R$ entsteht. Die ebenen Platten gehen in cylindrisch gekrümmte über und die gewellten Niveauebenen bleiben gewellte Ebenen, ihre Canellirung wird aber kreisförmig.

Die Poissonsche Gleichung erhält für diesen Fall die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{1}{R+y'}\frac{\partial V}{\partial y'} + 4\pi\rho = 0.$$

Setzen wir V gleich unserer frühern Function φ (Art. 193), so wird

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}.$$

Nimmt man also an, dass neben der auf Flächen in der früher Art. 197, 5) bestimmten Weise verteilten Electricität von der Dichte σ noch eine Raumverteilung von der durch obige Gleichung angegebenen Raumdichte ρ existirt, so kann man alle frühern Rechnungen und Resultate beibehalten. Die Figur auf Tafel XII. repräsentirt also auch für diesen Fall den Verlauf der äquipotentiellen Linien.

Eine nähere Betrachtung dieser Figur lehrt aber, dass $\partial\varphi/\partial y$, abgesehen von den Kanten der Platten, verhältnissmässig klein ist, so dass die neu einzuführende Verteilung von Electricität als lediglich auf diese Kanten beschränkt angesehen werden darf, und näherungsweise als das erscheint, was wirklich vorhanden ist, nämlich als eine Flächenladung.

Das Integral $E = \iint \rho\, dx'\, dy'$ von $y' = 0$ bis $y' = \pi b/2$ und von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ giebt demnach die gesammte Ladung, die einer Seite der Platten wegen der eingeführten Krümmung hinzugefügt werden muss.

Man hat aber $\partial\varphi/\partial y' = -\partial\psi/\partial x'$ und $\pi b = B$, also

$$E = \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx'\, dy' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R + y'} \frac{\partial\psi}{\partial x'}\, dx'\, dy'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{B}{2}} \frac{1}{R + y'} (\psi_{+\infty} - \psi_{-\infty})\, dy'$$

oder nach Art. 193, 4)

$$E = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{B}{2}} \frac{1}{R + y'} \left(2\,\frac{y'}{B} - 1\right) dy'$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\,\frac{2R + B}{B} \log \frac{2R + B}{2R}$$

$$= -\frac{1}{32}\,\frac{B}{R} + \frac{1}{192}\,\frac{B^2}{R^2} + \cdots$$

Das giebt die Hälfte der gesammten Electricitätsmenge, die man in dem Raume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Cylinderflächen von den Radien R und $R + B/2$ für die Längeneinheit des Umfangs zu verteilen hat. Sie ist, wie ich bemerkt habe, fast nur an der Kante einer Fläche fühlbar und kann, ohne dass die Wirkung dieser Fläche auf die gegenüberstehende alterirt wird, gänzlich auf ihr condensirt gedacht werden. Man darf also auch die Abstossungskraft zwischen den Flächen unter Annahme einer solchen Flächenverteilung der hinzukommenden Electricität berechnen.

Vor der Rotation war die gesammte auf einem unendlich langen Streifen von der Breite $z = 1$ auf der positiven Seite einer Platte enthaltene Electricitätsmenge (Art. 193, 4)

$$E' = -\int_{-\infty}^{\circ} \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\, dx' = \frac{1}{4\pi} (\psi_0 - \psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

Nach der Rotation wird also die entsprechende gesammte Ladung einer Cylinderfläche vom Radius R näherungsweise das $(1 + \frac{1}{2} B/R)$ fache der frühern.

Kreisscheibe zwischen zwei unendlichen Ebenen. Aehnlich erhält man für die Capacität einer Scheibe vom Radius R, die sich mitten zwischen zwei unendlichen Platten, deren Abstand von einander B beträgt, befindet,

$$C = \frac{R^2}{B} + \frac{2R}{\pi} \log 2 + \frac{B}{2}.$$

Theorie des Thomsonschen Schutzringes.

201. In einigen der von W. Thomson construirten Electrometer befindet sich gegenüber einer breiten ebenen, zu einem gewissen Potential geladenen Platte, in einer Entfernung A eine ebene Scheibe vom Radius R, welche von einem breiten Ring, dem Schutzring, mit dem innern Radius R' concentrisch umgeben wird. Scheibe und Ring werden beide auf dem Potential Null erhalten.

Bei der Entwickelung der Theorie dieses Systems von Conductoren kann man, Scheibe und Ring zusammen genommen, wie eine Ebene betrachten, welche von einer kreisförmigen Furche, deren Tiefe unendlich gross und deren Breite $B = R' - R$ ist. Diese gefurchte Ebene befindet sich dann einer andern Ebene gegenüber.

Setzt man voraus, dass die Electricität auf der Scheibe gleichmässig verteilt ist, so ist die Ladung derselben, welche von dem Potentialniveau 1 der Platte hervorgerufen wird, nach Art. 124 gleich $R^2/4A$.

Weiter kann man die Ladung an einem Rande einer geraden Furche von der Breite B, der Länge L und einer unendlich grossen Tiefe durch die Anzahl der Inductionslinien messen, welche von der Platte ausgehend, in diesem Rande ihr Ende finden. Unter Beachtung der in Art. 197 und 198 geführten Untersuchungen erhält man diese Ladung

$$E' = \tfrac{1}{2} L B \frac{1}{4\pi b}$$

oder, weil für $\Phi = 1$, $\varphi = 0$ das $b = A + \alpha'$ wird und $L = 2\pi R$ ist,

$$E' = \tfrac{1}{4} \frac{RB}{A + \alpha'}.$$

In unserm Fall ist die Furche kreisförmig, nach Art. 200 haben wir also den obigen Ausdruck noch mit $1 + B/2R$ zu multipliciren. Wir erhalten dann für die Gesammtladung der Scheibe

1a) $$E = \frac{R^2}{4A} + \frac{1}{4} \frac{RB}{A + \alpha'} \left(1 + \frac{B}{2R}\right),$$

oder zufolge des Wertes von B

1b) $$E = \frac{R^2 + R'^2}{8A} + \frac{R^2 - R'^2}{8A} \frac{\alpha'}{A + \alpha'}.$$

Die Grösse

2) $$\alpha' = \frac{B}{\pi} \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{B}\pi}}$$

ist nicht grösser als $(B \log 2)/\pi$, ist also näherungsweise gleich $0{,}22\, B$.

Wenn demnach B verhältnismässig klein gegen A oder R ist, so erhält man durch die obige Formel einen genügenden Ausdruck für die in Folge ihrer Potentialdifferenz gegen die Platte auf der Scheibe durch Induction hervorgerufene Electricitätsmenge.

Das Verhältnis von A zu R ist keiner Beschränkung unterworfen; dagegen muss der Radius der Platte sowohl wie der des Schutzringes den Radius der Scheibe um ein möglichst grosses Multiplum von A übersteigen.

Eine halbe Ebene gegenüber einer ganzen Ebene.

202. Ich schlage auch hier den entgegengesetzten Weg ein, indem ich erst einen gewissen Ausdruck für das Potential aufstelle, und dann die zugehörigen Conductoren bestimme. Dabei folge ich dem Gedankengange, der Helmholtz leitete, als er in seiner Abhandlung über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen*) die Coordinaten als Functionen des Potentials und der diesem conjugirten Function darstellte.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$x_1 = A\varphi, \qquad y_1 = A\psi$$
$$x_2 = Ae^{\varphi}\cos\psi, \qquad y_2 = A\, e^{\varphi}\sin\psi$$

zwei Paare conjugirter Functionen von φ und ψ sind. Setzen wir also

1) $$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi,$$

2) $$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi,$$

so sind x und y conjugirte Functionen von φ und ψ und umgekehrt auch φ und ψ conjugirte Functionen von x und y.

Wir verstehen nunmehr unter x, y rechtwinklige Coordinaten, unter k eine Constante und unter $k\psi$ ein Potential, dem $k\varphi$ conjugirt ist.

Machen wir, um zu erfahren, welchem System von Conductoren $k\psi$ als Potential zugehört, zuerst $\psi = 0$, so wird $y = 0$; die xzEbene ist also eine äquipotentielle Fläche vom Potentialniveau Null.

Setzen wir ferner $\psi = \pi$, so wird $y = A\pi$, $x = A(\varphi - e^{\varphi})$.

*) Abh. d. Kgl. Acad. der Wissenschaften zu Berlin, 1868, April 23.

Durchläuft also φ alle Werte von $-\infty$ bis 0 und dann von 0 bis $+\infty$, so variirt x von $-\infty$ bis $-A$ und von $-A$ zurück bis $-\infty$.

Die äquipotentielle Fläche $k\psi = k\pi$ ist also eine der xzEbene parallele Ebene, welche vom Coordinatenursprung um die Strecke $b = A\pi$ entfernt ist und bei $x = -\infty$ und $x = -A$ von geraden Linien begrenzt wird.

An der Kante dieser Niveauebene, wo $x = -A$ ist, haben wir $\varphi = 0$, in einer Entfernung a von der Kante, wo x den Wert $-(A+a)$ besitzt, berechnet sich φ aus der Gleichung

$$-(A+a) = A(\varphi - e^{\varphi}).$$

Diese Gleichung giebt aber zwei reelle Werte für φ, einen negativen φ_1 und einen positiven φ_2, die entgegengesetzten Seiten der Niveauebene $k\psi = k\pi$ zugehören. Daher ist die Electricitätsmenge auf einem Streifen, der von den vier Linien $x = -A$, $x = -(A+a)$, $z = 0$, $z = c$ eingefasst wird, nach der hierher gehörigen Gleichung in Art. 183 gleich $-ck\varphi_1/4\pi$ auf der einen, und gleich $ck\varphi_2/4\pi$ auf der andern Seite. Weil φ_1 negativ und φ_2 positiv ist, sind beide Seiten des Streifens positiv geladen, und die ganze Electricitätsmenge des Streifens beträgt

$$3') \qquad \frac{ck(\varphi_2 - \varphi_1)}{4\pi}.$$

Die Gleichung für φ ist transcendent, als Näherungswerte ihrer Wurzeln erhält man

$$4) \qquad \varphi_1 = -\frac{a}{A} - 1 + e^{\varphi_1} = -\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A} - 1 + e^{\cdots}}},$$

$$5) \qquad \varphi_2 = \log\left\{\frac{a}{A} + 1 + \varphi_2\right\} = \log\left\{\frac{a}{A} + 1 + \log\left(\frac{a}{A} + 1 + \log\left(\frac{a}{A} + 1 + \cdots\right.\right.\right\}.$$

Ist a so gross gegen A, dass man $e^{-a/A}$ schon vernachlässigen darf, so wird

$$4_1) \qquad \varphi_1 \doteq -\frac{a}{A} - 1.$$

Die Ladung auf der negativen Seite des Streifens ist dann ebenso gross, wie die Ladung, die der Streifen auf dieser Seite haben würde, wenn seine Breite um $A = b/\pi$ vergrössert und die Electricität auf ihm mit der Dichte, die sie in der Wirklichkeit erst in einiger Entfernung von der Kante hat, gleichförmig ausgebreitet wäre.

Die Capacität beider Seiten des Streifens der Niveauebene $k\psi = k\pi$ ist

$$6) \qquad C = \frac{c}{4\pi^2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right),$$

und da die gesammte Ladung gleich CV ist, wo V das Potentialniveau angiebt, so haben wir für die Attraction des Streifens gegen die ganze

Niveauebene $y = 0$, wo $\psi = 0$ ist, für verhältnisgrosse Werte von a/A den Ausdruck

$$7) \qquad -\tfrac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial b} = V^2 \frac{ac}{8\pi b^2}\left(1 + \frac{\frac{A}{a}}{1 + \frac{A}{a}\log\frac{a}{A}} + e^{-\frac{a}{A}} + \cdots\right)$$

$$= V^2 \frac{c}{8\pi b^2}\left(a + \frac{b}{\pi} - \frac{b^2}{\pi^2 a}\log\frac{\pi a}{b} + \cdots\right).$$

Die Figur auf Tafel XIII. enthält die auf diesen Fall bezüglichen Niveau- und Kraftlinien.

Theorie des Schutzgitters.

203. Das Problem der Electricitätsverteilung auf einem von parallelen Drähten gebildeten Gitter hat für die Praxis eine gewisse Bedeutung, weil solche Gitter häufig verwendet werden, um Körper gegen die Influenz anderer Körper zu schützen.

Am einfachsten hält man von einem Körper die Influenz ab, wenn man ihn in ein ihn vollständig einschliessendes und nirgend berührendes Metallgefäss bringt, das sich mit ihm auf demselben Potentialniveau befindet. Da aber der Körper dann für den aussenstehenden Experimentator unsichtbar wird, so ist man gezwungen, in das umhüllende Gefäss eine Oeffnung zu bohren, die man, um die schützende Wirkung des fortgefallenen Metallstückes zu ersetzen, mit einem Gitter von parallelen Drähten schliesst.

Wir haben nun zu untersuchen, inwiefern ein solches Gitter die schützende Wirkung eines Metallstückes wirklich zu ersetzen vermag.

Das Gitter soll aus einer Reihe feiner paralleler und in einer Ebene in gleichen Abständen angeordneter Drähte bestehen. Die Intervalle zwischen den Drähten sollen sehr gross gegen die Durchmesser der Drähte, aber verhältnismässig klein gegen die Entfernung des dem Gitter nächsten electrischen Körpers sein.

204. Das Potentialniveau eines geraden dünnen Drahtes von unendlicher Länge, der auf einer Längeneinheit die Electricitätsmenge λ enthält, ist nach Art. 126 in einer Entfernung r' von seiner Axe

$$V = -2\lambda \log r' + C.$$

Führen wir Polarcoordinaten (s. Art. 191) r, ϑ ein, deren Axe in der Einheit der Entfernung von der Axe des Drahtes parallel mit dieser läuft, so haben wir

$$r'^2 = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2.$$

Laden wir die Coordinatenaxe selbst mit Electricität, so dass sich auf ihrer Längeneinheit die Menge λ' befindet, so geht das Potential im Punkte r, ϑ über in

$$V = -\lambda \log(1 - 2r\cos\vartheta + r^2) - 2\lambda' \log r + C.$$

Setzen wir endlich

a) $$r = e^{2\pi \frac{y}{a}}, \quad \vartheta = \frac{2\pi x}{a}$$

und verstehen unter x und y rechtwinklige Coordinaten, so giebt nach der Theorie der conjugirten Functionen der Ausdruck

1) $$V = -\lambda \log\left(1 - 2e^{\frac{2\pi y}{a}} \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{\frac{4\pi y}{a}}\right) - 2\lambda' \log e^{\frac{2\pi y}{a}} + C$$

das Potential in dem Punkte x, y, herrührend von einer unendlichen Reihe feiner Drähte, die alle in der $x\,z$ Ebene parallel der z Axe laufen, die x Axe von Null angefangen in lauter gleiche Intervalle a zerschneiden, und die alle mit derselben Electricitätsmenge λ auf der Längeneinheit geladen sind.

Das Glied mit dem Factor λ' zeigt eine Electrisirung an, welche in Richtung der y Axe eine constante Kraft $4\pi\lambda'/a$ ausübt.

Die Figur auf Tafel XIV. zeigt die in einer zu den Drähten senkrechten Ebene liegenden Niveau- und Kraftlinien für den Fall, dass $\lambda' = 0$ ist.

In der Nähe der Drähte sind die Niveauflächen nahezu Cylinder, so dass die obige Lösung auch noch gilt, wenn die Drähte durch cylindrische Stäbe gebildet werden. Doch darf die Bedingung, dass ihre Abstände von einander sehr viel grösser als ihre Durchmesser sind, nicht verletzt werden.

In genügender Entfernung von den Drähten gehen die äquipotentiellen Flächen in Ebenen über, die sich parallel der Ebene des Drahtgitters erstrecken, also die y Axe senkrecht schneiden.

Auf einer Ebene $y = b_1$ ist also, wenn b_1 verhältnismässig gross gegen a, den Zwischenraum zwischen zwei Drähten, ist, näherungsweise

1_1) $$V_1 = -\frac{4\pi b_1}{a}(\lambda + \lambda') + C.$$

Aehnlich haben wir für $y = -b_2$, wo b_2 eine positive und gegen a beträchtliche Grösse bedeutet,

1_2) $$V_2 = \frac{4\pi b_2}{a}\lambda' + C.$$

Das Potentialniveau des Gitters erhalten wir durch die Annahme, dass die Oberfläche eines jeden Drahtes mit der Niveaufläche zusammenfällt, welche in einer dem Radius c der Drähte gleichen Entfernung von der z Axe die $x\,z$ Ebene schneidet.

Wir haben also in dem allgemeinen Ausdruck für das Potential $x = c$, $y = 0$ zu setzen, und erhalten für das Potentialniveau des Gitters, weil c gegen a sehr klein sein sollte,

1_3a) $$V = -2\lambda \log 2 \sin\frac{\pi c}{a} + C.$$

Der folgenden Untersuchungen wegen setze ich

b) $$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\log 2\sin\frac{\pi c}{a}$$

und habe

1_3b) $$V = \frac{4\lambda\pi}{a}\alpha + C.$$

α ist eine Linie, die für ein sehr kleines c unendlich lang wird.

205. Die beiden Ebenen $y = b_1$, $y = -b_2$ sind zwar streng genommen keine Niveauebenen, nimmt man aber b_1 und b_2 möglichst gross an, so darf man sie durch Conductorebenen ersetzen. Bezeichnen wir die Dichte der auf der Ebene $y = b_1$ bezüglich $y = -b_2$ influencirten Electricität mit σ_1 bezüglich σ_2, so ist

2a) $$4\pi\sigma_1 = \frac{\partial V_1}{\partial b_1} = -\frac{4\pi}{a}(\lambda + \lambda'),$$

3a) $$4\pi\sigma_2 = \frac{\partial V_2}{\partial b_2} = +\frac{4\pi}{a}\lambda'.$$

Eliminirt man aus diesen beiden und den drei voraufgehenden Gleichungen für V, V_2, V_1 die drei Grössen λ, λ', C, so resultiren für die Dichten die beiden Gleichungen

2b) $$4\pi\sigma_1\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1\left(1 + \frac{b_2}{\alpha}\right) - V_2 - V\frac{b_2}{\alpha},$$

3b) $$4\pi\sigma_2\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_2\left(1 + \frac{b_1}{\alpha}\right) - V_1 - V\frac{b_1}{\alpha}.$$

Sind die Drähte sehr dünn, so ist α unendlich gross, und man erhält für die Dichten σ_1, σ_2 auf den beiden Ebenen dieselben Ausdrücke, welche gelten würden, wenn zwischen den Ebenen überhaupt kein Gitter vorhanden wäre.

Verbindet man das Gitter leitend mit einer der Ebenen, etwa mit der Ebene $y = b_1$, so wird $V = V_1$ und

2_1) $$4\pi\sigma_1\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1 - V_2.$$

Demnach verhält sich die Dichte der unter Anwesenheit des Gitters auf der ersten Ebene durch die zweite inducirten Electricität zu der Dichte, welche die Electricität dort erlangt, wenn das Gitter nicht vorhanden ist, während die zweite Ebene ihr Potential ungeändert beibehält, wie

4) $$1 \text{ zu } \left(1 + \frac{b_1 b_2}{\alpha(b_1 + b_2)}\right).$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir das Gitter mit der zweiten Ebene verbinden (es folgt das sowohl daraus, dass b_1 und b_2 in den Formeln in derselben Weise auftreten oder auch aus Art. 88).

Bringt man also ein Drahtgitter zwischen zwei Ebenen, so wird ihre Induction aufeinander ebenso stark verringert, wie wenn man den Abstand $b_1 + b_2$ der beiden Ebenen um $b_1 b_2/\alpha$ vergrössert hätte.

Erhält man beide Ebenen auf dem Potential Null und electrisirt das Gitter zu einem gewissen Potentialniveau, so steht seine Electricitätsmenge zu der, welche bei einer in seiner Lage befindlichen Ebene auftritt, in dem Verhältnis von

5) $$b_1 b_2 \text{ zu } b_1 b_2 + \alpha (b_1 + b_2).$$

Doch gilt das Alles nur, wenn b_1 und b_2 gegen a, und α gegen c genügend gross ist.

Wird der Radius c der Drähte gleich $a/2$, so berühren sich die Drähte gegenseitig und bilden eine geschlossene Wand.

Es dürfte also in diesem Falle durch das Gitter hindurch keine Induction der beiden Ebenen aufeinander auftreten, und man müsste haben

$$4\pi\sigma_1 = \frac{V_1 - V}{b_1}, \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{V_2 - V}{b_2},$$

das heisst es müsste $\alpha = 0$ sein.

Aus der für α gegebenen Formel findet man dagegen

$$\alpha_{c=a/2} = -\frac{a}{2\pi}\log 2 = -0{,}11\,a.$$

Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass dann auch unsere Gleichungen, weil sie nur approximativ gelten, nicht mehr ausreichen. Ich werde deshalb, freilich ohne genaue Durchführung der einzelnen Rechnungen, zeigen, wie man zu noch weiter getriebenen Annäherungen gelangen kann.

206. Ich gehe bei dieser strengern Rechnung direct davon aus, dass ein Gitter und zu beiden Seiten desselben zwei ihm parallele ebene Conductoren gegeben sind, die aufeinander und auf das Gitter influencirend einwirken.

Nach der Theorie der electrischen Bilder hat man das Gitter in den beiden Ebenen abzubilden, und dann die Potentiale der einzelnen Bilder zu summiren. Für jedes Bild wird das Potential ähnlich construirt sein, wie das, was wir schon benutzt haben, es wird also namentlich von dem $\cos(2\pi x/a)$ und von der Grösse $2\pi y/a$ abhängen.

Setzen wir also

$$\vartheta = \measuredangle(r, y), \quad \xi = \frac{2\pi x}{a}, \quad \eta = \frac{2\pi y}{a}, \quad \rho = \frac{2\pi r}{a}, \quad \beta = \frac{2\pi b}{a},$$

und bilden eine Function

1a) $$F_\beta = \log(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2\cos\xi),$$

so können wir, indem das Potential des Gitters

2) $$V = A_0 F + A_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} + A_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \ldots$$

gesetzt wird, die Constanten $A_0, A_1, \ldots$ so bestimmen, dass V ein Potential angiebt, welches von η und von $\cos\xi$ abhängt und nur für $\eta + \beta = 0$ und $\cos\xi = 1$ unendlich wird.

Entwickelt man die Function F_β nach ρ und ϑ, so ergiebt sich

für $\beta > 0$

1b) $$F_\beta = \beta + 2\log(1-e^{-\beta}) + \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\rho\cos\vartheta - \frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}\rho^2\cos 2\vartheta + \ldots,$$

für $\beta = 0$

1_1) $$F_0 = 2\log\rho + \frac{1}{12}\rho^2\cos 2\vartheta - \frac{1}{1440}\rho^4\cos 4\vartheta + \ldots,$$

und damit lässt sich dann V für jeden gitterförmigen Conductor berechnen.

Bei der Abbildung des Gitters in den Ebenen erhält man nun zwei unendliche Reihen von Bildern. Die erste Reihe besteht aus dem Gitter selbst und aus Bildern, die zu beiden Seiten desselben liegen und mit ihm gleich und gleichsinnig geladen sind.

Bezeichnet man die Gleichungen der beiden Ebenen durch $\eta_1 = \beta_1$, $\eta_2 = -\beta_2$ und fixirt die Lage des Gitters durch $\eta = 0$, so liegen die Axen dieser Bilder (also die Axen der abgebildeten Drähte) in Ebenen

$$\eta = \pm 2n(\beta_1 + \beta_2),$$

wo n eine ganze Zahl angiebt.

Für das Potential eines jeden dieser Bilder gilt dann eine Entwickelung, wie sie oben in ihrer Abhängigkeit von den Constanten A angegeben worden ist. Die Constanten A sind für diese Bilder dieselben, wie für das Gitter.

Die zweite Reihe umfasst wieder eine unendliche Anzahl von Bildern, in deren Potentialfunctionen die Constanten $A_0, A_2, A_4 \ldots$ gleich und entgegengesetzt, die Constanten A_1, A_3, A_5 gleich den entsprechenden in der Potentialfunction des Gitters vertretenen Constanten sind. Die Axen dieser Bilder liegen in Ebenen

$$\eta = 2\beta_2 \pm 2m(\beta_1 + \beta_2),$$

wo m eine ganze Zahl ist.

Das Gesammtpotential der Ebenen und des Gitters ist gleich der Summe der Potentiale aller Bilder.

Wenn man es mit einer endlichen Anzahl von Bildern zu tun hat, so hängt das Gesammtpotential davon ab, ob die Anzahl der Bilder eine gerade oder eine ungerade ist, bei einer unendlichen Anzahl von Bildern ist also die Summe der einzelnen Potentiale eine unbestimmte Grösse. Fügt man aber noch eine Function $B\eta + C$ hinzu, so erlangt man eine hinreichende Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die electrische Verteilung auf den leitenden Ebenen bestimmen zu können.

Man entwickelt für jedes Bild das zugehörige Potential nach den Gleichungen 1) und 2), summirt alle Potentiale, fügt noch die Terme $B\rho\cos\vartheta + C$ hinzu und erhält so eine Reihe von Gliedern, die zum Teil nach Potenzen von ρ und Cosinussen von Vielfachen von ϑ fortschreiten. Betrachtet man dieses Aggregat von Gliedern als das gesuchte Potential, so hat man also

$$V' = V + \Sigma\, C_i \rho^i \cos i\vartheta.$$

V, das Potential des Gitters, hängt nur von r, dem Abstand des betrachteten Punktes von der Axe eines Drahtes, nicht von ϑ ab, die C sind Functionen von β, B und von den A.

Jeder Draht des Gitters ist aber ein Leiter, auf ihm muss also V' überall einen und denselben Wert haben, folglich müssen die Glieder, die nach Cosinussen von Vielfachen von ϑ fortschreiten, wenn r gleich dem Radius eines Drahtes wird, herausfallen, das giebt

$$C_i = 0,$$

eine Reihe von Gleichungen, aus denen man beliebig viele der Constanten A berechnen kann.

Es sind dann noch die Constanten A_0, B unbestimmt. Zu ihrer Berechnung bedient man sich der Kenntnis der Potentialniveaus V_1, V_2, V auf den beiden Ebenen und auf dem Gitter, indem man jedes derselben in der schon angegebenen Weise entwickelt, und die schon eruirten Werte der A benutzt.

Die Mittelwerte σ_1, σ_2 für die Flächendichten auf den beiden Ebenen ergeben sich zu

$$\sigma_1 = \frac{1}{2a}(A_0 - B),\quad \sigma_2 = \frac{1}{2a}(A_0 + B),$$

und man erhält nach Ausführung der angegebenen Operationen Gleichungen von der Form

3) $$V_1 - V = 4\pi\sigma_1(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_2(\alpha + \gamma),$$

4) $$V_2 - V = 4\pi\sigma_2(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_1(\alpha + \gamma).$$

Für α und γ ergiebt eine genauere Rechnung die Näherungswerte

a)
$$\alpha = \frac{a}{2\pi}\left\{\log\frac{a}{2\pi c} - \frac{5}{3}\,\frac{\pi^4 c^4}{15a^4 + \pi^4 c^4} + 2e^{-4\pi\frac{b_1+b_2}{a}}\left(1 + e^{-4\pi\frac{b_1}{a}} + e^{-4\pi\frac{b_2}{a}} + \ldots\right) + \ldots\right\}$$

b)
$$\gamma = \frac{3\pi a c^2}{3a^2 + \pi^2 c^2}\left(\frac{e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}{1 - e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}} - \frac{e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}{1 - e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}\right) + \ldots$$

Ich hebe hervor, dass die Induction einer der Ebenen auf die andere durch Einschiebung eines Drahtgitters zwischen ihnen um ebensoviel geändert wird, wie durch Vergrösserung ihres Abstandes $b_1 + b_2$ um den Betrag

5)
$$y = \frac{(\alpha - \gamma)(b_1 + b_2) + b_1 b_2 - 4\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}.$$

Cap. XIII.

Apparate für electrostatische Untersuchungen.

Man kann die Apparate, mit deren Einrichtung und Theorie wir uns zu beschäftigen haben, in die folgenden vier Klassen verteilen:

1) Electrisirmaschinen zur Erzeugung und Vermehrung der Electricität,

2) Condensatoren zur Vergrösserung der electrischen Erregung in einem vorgeschriebenen Verhältnis,

3) Electrometer zur Messung, Electroskope zur Constatirung von Electricitätsmengen und von Potentialen,

4) Accumulatoren zur Aufbewahrung beträchtlicher electrischer Ladungen.

Electrisirmaschinen.

207. In der gewöhnlichen *Electrisirmaschine* lässt man eine Glasplatte oder einen Glascylinder um eine Axe rotiren und dabei gegen ein Lederkissen, welches mit einem Amalgam von Zink und Quecksilber bestrichen ist, sich reiben.

Die Oberfläche des Glases wird positiv, die des Reibzeuges ebenso stark negativ electrisch. Durch die Rotation wird die an einer Stelle des Glases entstandene Electricität vom Reibzeug fort- und in die Nähe einer Reihe von Spitzen, welche mit dem Conductor der Maschine in Verbindung stehen, hingeführt. Je weiter die Ladung sich von dem Reibzeug entfernt, desto höher steigt ihr Potential und ihre Wirkung nach aussen an. Geht sie dann an den Spitzen vorbei, so werden diese durch Influenz negativ electrisch, und zwar um so stärker electrisch, je spitzer sie sind und je näher sie dem rotirenden Glaskörper stehen.

Dabei sieht man, wenn die Maschine in gehöriger Tätigkeit ist, zwischen dem Glaskörper und den Spitzen Entladungen Platz greifen, infolge deren jener einen Teil seiner positiven Electricität an die Spitzen abgiebt, von

denen er wieder auf den isolirten Conductor oder auf irgend einen andern mit diesem leitend verbundenen Körper übertragen wird.

Kommt dann der betreffende Teil des Glaskörpers wieder an das Reibzeug, so ist er mit weniger positiver Electricität geladen als der Teil des Glases, welcher gerade das Reibzeug verlässt, und infolge dessen werden Reibzeug und alle mit ihm in Verbindung stehenden Körper negativ electrisch.

Die das Reibzeug verlassende stark electrisirte Stelle des Glaskörpers wird von der negativen Ladung des Reibzeuges mit grösserer Kraft zurückgezogen, als die zum Reibzeug zurückkehrende und zum Teil entladene von diesem herangezogen wird. Die electrische Kraft wirkt also der Kraft, die man beim Drehen der Scheibe verwendet, entgegen, so dass man, um die Maschine in Gang zu erhalten, eine grössere Kraft aufwenden muss, als zur Ueberwindung der Reibung und anderer mechanischer Widerstände an sich erforderlich wäre.

Die gesammte Arbeit, die beim Drehen der Electrisirmaschine verbraucht wird, zerfällt also in zwei Teile, der eine dient zur Ueberwindung der mechanischen Widerstände und geht in Wärme über, der andere wird benutzt, um den Ueberschuss der electrischen Attraction des Reibzeuges auf sich von ihm entfernende Teile des Glaskörpers über die auf sich ihm nähernde zu paralysiren und findet sich in der Energie der durch die Reibung entstandenen Electricität wieder.

Die Energie der erregten Electricität ist diesem zweiten Teile der aufgewendeten Arbeit genau gleich, und kann rückwärts in eine Arbeit oder eine entsprechende Wärmemenge verwandelt werden.

Wenn die Maschine so construirt ist, dass sie die von der verwendeten Arbeit herrührende Energie nicht in sich aufhäuft, so wird die gesammte Energie in Wärme übergeführt; ein Unterschied zwischen der durch Ueberwindung der Reibung und der aus der electrischen Energie entstandenen Wärme findet nur darin statt, dass jene Wärme an Ort und Stelle, also da, wo die Reibung überwunden wird, entsteht, während diese in von dem Orte, wo die Electricität hervorgerufen wird, entfernten Leitern erst in Erscheinung treten kann.*)

Es kann vorkommen, dass die Attraction der Glaselectricität zu der auf dem Reibkissen vorhandenen Ladung so gross wird, dass zwischen Glaskörper und Reibzeug Entladungen auftreten, statt, wie es der Zweck der Maschine erheischt, zwischen dem Glaskörper und den Saugspitzen. Man bringt deshalb an das Reibzeug Seidenstreifen an, die sich mit ihm gleichnamig laden und infolge dessen an den Glaskörper anschmiegen.

---

*) Wahrscheinlich wird in vielen Fällen da, wo mechanische Energie durch Reibung in Wärme verwandelt wird, ein Teil der Energie zunächst in electrische Energie übergeführt, und geht dann erst, dadurch dass die electrische Energie zur Unterhaltung kurzer geschossener Ströme in der Nähe der reibenden Flächen verbraucht wird, in Wärme über. Vergl. W. Thomson, *On the Electrodynamic Qualities of Metals*, Phil. Trans. 1856, p. 650.

Unter dem Einfluss des Seidenstreifens steigt das Potential der positiven Electricität des Glaskörpers, während sie sich von der negativen Electricität des Reibzeuges entfernt, weniger rasch an, als es sonst der Fall sein würde; ihre Attraction gegen die negative Electricität ist also geringer und die Gefahr einer Entladung zwischen Glaskörper und Reibkissen vermindert.

Statt der Glaskörper verwendet man in manchen Electrisirmaschinen Ebonitplatten und benutzt als Reibkissen Wolle oder Pelzwerk. Die rotirende Scheibe, also auch der Conductor der Maschine, wird dann negativ, das Reibkissen positiv electrisch.

Der Voltasche Electrophor.

208. Der *Electrophor* besteht aus einem in ein flaches Metallgefäss gelegten Harz- oder Ebonitkuchen, welcher von einer ihm in der Grösse gleichen Metallscheibe überdeckt wird. Durch den Kuchen geht ein Metallstift, der den Deckel mit dem Boden des Metallgefässes leitend verbindet. Deckel und Gefäss sind mit isolirenden Handhaben versehen.

Reibt man den Kuchen mit Wolle oder einem Katzenfell, so wird er negativ electrisch und inducirt in den Metalldeckel, wenn man ihm diesen an der isolirenden Handhabe nahe bringt, ohne ihn zu berühren, ein negatives Potential. Zwischen dem Deckel und dem Kuchen tritt dabei keine Entladung ein, kommt aber der Deckel dem Metallstift, welcher den Kuchen durchsetzt, nahe, so springt von ihm ein Funke auf den Stift über, und man findet, nachdem man den Deckel wieder entfernt hat, diesen positiv, den Boden des Metallgefässes ebenso stark negativ geladen.

Will man mit dem Electrophor einen Condensator oder einen Accumulator positiv laden, so electrisirt man den Kuchen, legt den Deckel darauf und leitet ihn zur Erde ab. Wird dann der Deckel abgehoben, so zeigt er eine positive Ladung, die man durch Berührung auf den Condensator übertragen kann. Man wiederholt den Prozess so lange, bis man die genügende Electricitätsmenge hat.

Um einen Conductor mit dem Electrophor negativ zu laden, leitet man den Deckel zur Erde ab und bringt den Conductor mit dem Kuchen in Berührung.

Die Arbeit, welche der Arm bei der Trennung des Deckels vom Kuchen zu verrichten hat, ist grösser als die Arbeit, welche die electrischen Kräfte bei der Annäherung des Deckels an den Kuchen leisten. Das Laden eines Conductors mit Hilfe des Electrophors bedingt also immer einen Aufwand an Arbeit, die zum Teil in der Energie der dem Conductor mitgeteilten Electricität, zum Teil in dem Geräusch und in der Wärme der überspringenden Funken sich wiederfindet, zum Teil bei der Ueberwindung der der Bewegung sich entgegenstellenden Hindernisse verbraucht wird.

Influenzmaschinen.

209. Bei der gewöhnlichen Reibungselectrisirmaschine ist die Arbeit, welche zur Ueberwindung der Reibung verbraucht werden muss, weit grösser als diejenige, welche der Vermehrung der Electricität zu Gute kommt. Daher sind Apparate, in welchen die bei der Electrisirung verwendete mechanische Arbeit nur gegen electrische Kräfte geleistet wird, von hohem Interesse für die Wissenschaft nicht minder wie für die Praxis.

Ein solcher Apparat scheint der Nicholsonsche in den *Philosophical Transactions* vom Jahre 1788 beschriebene *Revolving Doubler* gewesen zu sein, welcher durch die Drehung einer Kurbel beide Electricitätsarten ohne Reibung und ohne Erdverbindungen hervorbrachte („*an instrument which by the turning of a Winch produces the two states of Electricity without friction or communication with the Earth*").

210. Mit Hilfe eines solchen *Revolving Doubler* ist es Volta gelungen unter Anwendung der an den Polen seiner Säule entstehenden Ladungen eine so grosse Electricitätsmenge hervorzubringen, dass sie von seinem Electrometer angezeigt werden konnte.

Später sind dann auf demselben Princip beruhende Apparate unabhängig von C. F. Varley*) und W. Thomson angegeben worden.

Sie bestehen der Hauptsache nach aus isolirten Conductoren, deren einige fest, andere beweglich sind. Die beweglichen Conductoren bezeichnet man als Carrier, die festen kann man je nach der Aufgabe, die sie zu erfüllen haben, Inductoren, Receptoren und Regeneratoren nennen. Die Inductoren und Receptoren sind so eingerichtet, dass die Carrier an gewissen Punkten ihrer Bahn gänzlich von Leitern umgeben sind. Da es nun ohne die complicirteste Einrichtung nicht möglich ist einen Carrier mit Inductoren und Receptoren vollständig einzuschliessen und ihm doch das freie Aus- und Eintreten in das System der Inductoren und Receptoren zu lassen, so ist die Maschine theoretisch unvollständig, wenn man ihr nicht noch zwei Regeneratoren hinzufügt, welche die Aufgabe haben, die geringe Electricitätsmenge, die der Carrier, nachdem er durch das System der Inductoren und Receptoren hindurchgegangen ist, noch zurückbehalten hat, in sich aufzunehmen.

Die Theorie des Apparates vereinfacht sich aber beträchtlich, wenn wir annehmen, dass der Carrier wirklich von den Inductoren und Receptoren beim Durchgang durch sie vollständig umhüllt wird.

Ich setze also zunächst voraus, dass die Maschine zwei Inductoren A und C, zwei Receptoren B und D und zwei Carrier F und G hat.

Der Inductor A sei positiv zum Potential A geladen, der Carrier F möge sich in dem Inductor befinden und das Potential F haben. Ist dann der

*) *Specification of Patent*, 1860 Jan. 27, N. 206.

Coefficient der Induction zwischen A und F als positive Grösse gedacht gleich Q, so hat die vom Carrier beherbergte Electricitätsmenge den Wert $Q(F-A)$.

Verbindet man den Carrier, während er sich in dem Inductor A befindet, mit der Erde, so wird $F=0$ und die Ladung des Carriers, $-QA$, negativ. Wir führen nun den Carrier aus dem Inductor A heraus bis er in den Receptor B eintritt und bringen ihn dort mit einer Feder in Berührung, die mit B in leitender Verbindung steht. Nach Art. 32 entladet sich dann der Carrier vollständig und giebt seine gesammte negative Electricitätsmenge an B ab.

Auf seiner weitern Bahn tritt dann der Carrier in den Inductor C ein, der negativ geladen sein soll, und erhält allda, wenn er zugleich mit der Erde in Verbindung steht, eine positive Ladung, die er mit sich nimmt und an den Receptor D abgiebt.

So geht es weiter, und wenn die Inductoren immer auf demselben Potential erhalten werden, bekommen die Receptoren B und D bei jedem Umlauf des Carriers frische Electricitätsmengen von immer derselben Stärke, so dass jeder Umlauf ihre bezüglichen Ladungen um dieselbe Grösse erhöht.

Verbindet man aber noch den Inductor A mit dem Receptor D und den Inductor C mit dem Receptor B, so wachsen die Potentiale der Inductoren fortwährend an, und infolge dessen werden auch die Electricitätsmengen, welche die Carrier den Receptoren übermitteln, fortdauernd grösser.

Den zweiten Carrier G richtet man so ein, dass er sich im Inductor C befindet, wenn der erste in A ist, und dass er sich im Receptor D aufhält, wenn der erste im Receptor B verweilt.

Ist nun das Potential von A und D gleich U und das von B und C gleich V, so ist die Ladung, die der Carrier innerhalb A, während er zur Erde abgeleitet ist, durch Influenz erhält, $z=-QU$.

Der Carrier giebt dann diese Electricitätsmenge an B ab und verwandelt dadurch das Potential V von B und C in $V-QU/B$, wo B die Capacität von B und C ist. In derselben Zeit hat der zweite Carrier eine Ladung $-Q'V$ von C nach D gebracht und dadurch das Potential U von A und D in $U-Q'V/A$ übergeführt, wo A die Capacität von A und D, Q' den Coefficienten der Induction zwischen G und C bezeichnet.

Es seien allgemein U_{n-1}, V_{n-1} die Potentiale der beiden Inductoren nach $n-1$ halben Revolutionen der Carrier und U_n, V_n die nach n halben Revolutionen, dann ist also

1'a) $$U_n = U_{n-1} - \frac{Q'}{A} V_{n-1},$$

2'a) $$V_n = V_{n-1} - \frac{Q}{B} U_{n-1}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p^2 = \frac{Q}{B},\quad q^2 = \frac{Q'}{A},$$

so wird

1'b) $$p\,U_n + q\,V_n = (p\,U_{n-1} + q\,V_{n-1})(1 - pq)$$

2'b) $$p\,U_n - q\,V_n = (p\,U_{n-1} - q\,V_{n-1})(1 + pq)$$

und aus diesen Recursionsformeln folgt sofort

1'c) $$p\,U_n + q\,V_n = (p\,U_0 + q\,V_0)(1 - pq)^n,$$

2'c) $$p\,U_n - q\,V_n = (p\,U_0 - q\,V_0)(1 + pq)^n,$$

also

1) $$U_n = U_0\left\{(1 - pq)^n + (1 + pq)^n\right\} + \frac{q}{p}V_0\left\{(1 - pq)^n - (1 + pq)^n\right\},$$

2) $$V_n = V_0\left\{(1 - pq)^n + (1 + pq)^n\right\} + \frac{p}{q}U_0\left\{(1 - pq)^n - (1 + pq)^n\right\}.$$

Aus der Gleichung 1'c) ergiebt sich, dass die Grösse $pU + qV$ fortdauernd kleiner wird. Die beiden Receptoren erscheinen also schliesslich, wie auch ihr ursprünglicher electrischer Zustand beschaffen gewesen sein mag, einander entgegengesetzt electrisirt, und es stehen die Endwerte ihrer Potentiale ebenso wie die der bezüglichen Inductoren, mit denen sie verbunden sind, in dem Verhältnis von p zu $-q$.

Dagegen wächst nach der Gleichung 2'c) die Grösse $pU - qV$ fortdauernd an, so dass, wie klein auch ihr Anfangswert $pU_0 - qV_0$ gewesen sein mag, ihr Betrag doch im Laufe der Revolutionen der Carrier so hoch ansteigt, dass die electromotorische zwischen den Receptoren wirkende Kraft schliesslich alle Isolationen des Apparates überwindet.

Derartige Instrumente finden mannigfache Anwendung.

Die Varleysche grosse Maschine dient dazu, um eine bedeutende Verstärkung der Electricität bei hohem Potentiale zu erzielen.

Kleine Maschinen, sogenannte *Replenisher*, verwendet man, um, wie beim Thomsonschen Electrometer, mit wenigen Umdrehungen die Ladung eines Condensators auf eine bestimmte Stärke zu bringen und zu justiren. Weiter kann man mit ihrer Hilfe kleine Potentialdifferenzen, soweit es die Isolation zulässt, vergrössern und so electromotorische Kräfte, die sonst der Beobachtung entgehen würden, messen. Ladet man zum Beispiel die beiden Inductoren zu der so geringen Potentialdifferenz eines aus nur zwei Metallteilen bestehenden Thermoelements, setzt die Maschine in Gang, bis die Potentialdifferenz mit Hilfe eines Electrometers messbar geworden ist, und bestimmt das Verhältnis, in welchem die Potentialdifferenz bei jeder

Umdrehung zunimmt, so kann man nach den frühern Formeln auch die ursprüngliche Potentialdifferenz durch die Anzahl der ausgeführten Umdrehungen und den erreichten Endzustand berechnen.

Bei den meisten derartigen Instrumenten lässt man die Carrier um eine Axe rotiren und bringt sie durch Drehung einer Kurbel in die geeignete Lage zu den Inductoren.

Die ableitenden Verbindungen zur Erde und zu den Receptoren werden durch Federn hergestellt, mit denen die Carrier in geeigneten Momenten in Contact treten.

211. W. Thomson*) hat eine Maschine construirt, bei der die Carrier durch Wassertropfen gebildet werden, welche durch einen hohlen Inductor in einen isolirten Receptor fallen, so dass dieser fortwährend Electricität zugeführt erhält, deren Zeichen dem der Electricität des Inductors entgegengesetzt ist.

Aus dem Receptor läuft das Wasser in einen Trichter, dessen Röhre grösstenteils von dem Metall des Receptors umgeben ist, so dass das Wasser fast gänzlich entladen den Receptor verlässt. Der Apparat enthält noch einen zweiten Inductor und Receptor, von denen der erstere mit dem frühern Receptor, der zweite mit dem frühern Inductor leitend verbunden ist. Die Receptoren laden sich entgegengesetzt und ihre Electricitätsmengen, die ihnen durch die Wassertropfen zugeführt werden, wachsen nicht mehr wie früher in arithmetischer, sondern in geometrischer Progression mit der Zeit.

Die electrische Erregung der Receptoren nimmt so lange zu, bis die Tropfen durch die electrische Kraft entweder seitwärts vom Receptor abgelenkt oder gegen die Wände der Inductoren geschleudert werden.

Uebrigens schöpft die Ladung der Receptoren ihre Energie hier aus der kinetischen Energie der fallenden Tropfen.

212. Man hat noch eine Anzahl anderer Maschinen construirt, die auf der Benutzung der Influenz beruhen. Die bemerkenswerteste ist die *Influenzmaschine* von Holtz, in der der Carrier aus einer mit Schellack überstrichenen Glasplatte besteht, und wo die Inductoren durch Pappstücke gebildet sind. Um das Ueberspringen von Funken zwischen den Teilen des Apparates zu verhindern, befinden sich zu beiden Seiten der rotirenden Scheibe zwei andere Glasscheiben. Die Maschine hat sich als sehr wirksam und ziemlich unabhängig von dem Zustande der umgebenden Atmosphäre erwiesen. Das Princip, auf dem die Wirkung dieses Apparates beruht, ist ganz dasselbe, wie das im *Revolving Doubler* und den andern angeführten Maschinen dieser Art massgebende, der Carrier ist aber bei der Holtzschen Maschine ein Isolator und die Inductoren sind unvollkommene Leiter. Deshalb ist auch die Theorie dieser Maschine weit schwieriger zu entwickeln, als in dem Falle, wo der Carrier ein guter Leiter von bekannter Form ist, und die Entladungen immer an denselben bestimmten Stellen auftreten.

*) *Proc. R. S.*, 1867, Juni 20.

213. Bei den beschriebenen electrischen Maschinen treten immer Funken auf, so oft der Carrier mit einem Leiter in Verbindung kommt, der ein von dem seinigen verschiedenes Potential besitzt. Die Bildung solcher Funken ist aber, wie ich schon bemerkt habe, mit einem Energieaufwand, der sich in der Wärme und in dem Geräusch des Funkens wieder findet, verbunden, und dieser Energieaufwand geht für die Electrisirung verloren, so dass man nicht die ganze Arbeit, die zum Drehen der Maschine verwendet wird, für die Electrisirung nutzbar machen kann.

Ich habe daher geglaubt, dass es einem Bedürfnis entsprechen würde, wenn ich zeige, wie man Maschinen bauen kann, die gegen einen solchen Verlust von Energie geschützt sind. Doch will ich damit weniger praktische Formen für solche Maschinen empfehlen, als vielmehr ein Beispiel dafür geben, wie man die Vorrichtung, welche bei den thermodynamischen Maschinen unter dem Namen des *Regenerators* bekannt ist, auch bei den Electrisirmaschinen benutzen kann, um Energieverluste zu verhindern.

Es seien A, B, C, A', B', C' hohle festgelegte Conductoren, die so angeordnet sind, dass der Carrier P der Reihe nach durch jeden von ihnen hindurch gehen kann. A, A' und B, B' fassen den Carrier fast ganz ein, wenn er sich in der Mitte seiner betreffenden Bahn befindet, C, C' dagegen bedecken ihn weniger vollständig. Ich verbinde A, B, C mit einer Leydener Flasche von grosser Capacität und vom Potentiale V und A', B', C' mit einer andern Flasche von dem Potentiale $-V'$.

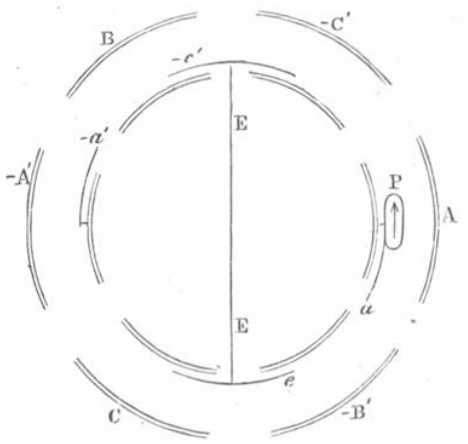


Fig. 18.

P soll in unserer Figur den Carrier vorstellen, der sich in einem Kreise von A nach $C'\ B\ A'\ C\ B'\ A$ bewegt und in gewissen Punkten a, a'; e, e' seiner Bahn durch Federn mit den Conductoren A, A' bezüglich mit der Erde in Verbindung tritt.

Es sei, während sich der Carrier in der Mitte von A befindet, $-A$ der Coefficient der Induction zwischen P und A und $A + a$ die Capacität von P in dieser Lage.

Da P von A nur zum Teil umfasst wird, so muss seine Capacität grösser sein als A, die Grösse a ist also positiv.

Die in P in der angegebenen Lage inducirte Ladung ist $(A + a)\,U - AV$, wenn U das Potential von P und V das von A bezeichnet. Ist aber P gleichzeitig durch die Feder a in leitender Verbindung mit A, so geht sein Potential in das von A, also in V über und seine Ladung wird gleich aV, die er beim Verlassen der Feder mit sich weiter führt.

Sowie P sich aus dem Inductor A entfernt, wird sein Potential kleiner und verringert sich um so beträchtlicher, je näher es an C', das negativ geladen sein sollte, kommt. Innerhalb C' sei das Potential von P auf eine Grösse U gesunken, ferner sei sein Inductionscoefficient gegen C' gleich $-C'$ und seine Capacität in Gegenwart von C' gleich $C'+c'$, dann haben wir

$$(C'+c')\,U + C'\,V' = aV,$$

und indem wir den Conductor C' so wählen, dass

$$C'\,V' = aV$$

wird, reducirt sich das Potential U des Carrier P auf Null. Tritt also P durch die Feder e', deren Potential ebenfalls Null ist, in Verbindung mit der Erde, so geschieht das ohne Funkenbildung.

Der Conductor C' hat also die Aufgabe, eine funkenlose Verbindung des Carrier P mit der Erde zu ermöglichen, und er entspricht bei den thermodynamischen Maschinen der Vorrichtung, die man als Regenerator bezeichnet. Ich werde ihm daher in der Tat den Namen Regenerator beilegen.

Bei seiner Weiterbewegung bleibt P immer noch durch die Feder e' in Verbindung mit der Erde, bis er in die Mitte des Inductors B kommt, dessen Potential V ist. Bezeichnet $-B$ den Coefficienten der Induction zwischen P und B in dieser Lage, so geht die Ladung von P, dessen Potential $U=0$ ist, in $-BV$ über.

Beim Verlassen der Feder e' nimmt P diese Ladung mit sich, und indem es sich gegen den negativen Receptor A' bewegt, wächst sein Potential stetig negativ an, in der Position gegenüber A' würde, falls P seine Ladung beibehält, sein Potential, wenn V' das von A' bezeichnet, gleich

$$-\frac{A'V'+BV}{A'+a'}$$

sein, wo $-A'$ der Inductionscoefficient zwischen A' und P ist, und $A'+a'$ die Capacität von P in Gegenwart von A' bezeichnet. Ist BV grösser als $a'V'$, so würde das Potential des Carrier numerisch das des Receptors noch übersteigen. P kommt dann, bevor es noch die Mitte von A' erreicht, in eine Lage, wo sein Potential gerade gleich $-V'$ ist, und in dieser Lage berührt es eine Feder a', die es leitend mit A' verbindet. Eine Funkenbildung findet nicht statt, weil P dasselbe Potential wie der Receptor und die mit ihm verbundene Feder hat. P bewegt sich dann weiter immer in Berührung mit der Feder und teilt dabei dem Receptor A' eine negative Ladung mit. Mit dem Rest seiner Electricität, $-a'V'$, verlässt es in der Mitte von A' die Feder und wandert zum positiven Regenerator C, welcher sein Potential reducirt und es gerade dann auf Null bringt, wenn P die Feder e, die es zur Erde ableitet, erreicht. P bleibt mit der Feder e in Berührung, bis es in die Mitte des negativen Inductors B' gelangt. Es

erhält dabei durch Induction eine positive Ladung $B'V'$, die es am Schlusse des Kreislaufes, der beliebig oft wiederholt werden kann, dem Receptor A mitteilt.

Während dieses Kreislaufs hat der positive Receptor eine Ladung aV verloren und eine Ladung $B'V'$ gewonnen, ebenso hat der negative Receptor eine Ladung $a'V'$ verloren und eine Ladung BV gewonnen.

Der Totalgewinn an positiver Electricität ist also

$$B'V' - aV$$

und der an negativer Electricität

$$BV - a'V'.$$

Man kann nun dadurch, dass man die Inductoren den Carrier so eng, als es nur irgend ohne Gefährdung der Isolation geschehen darf, einschliessen lässt, B und B' sehr gross, und indem man auch die Receptoren möglichst vollständig den Carrier einfassen lässt, a und a' ziemlich klein machen, so dass jede Revolution des Carrier den Receptoren, die man sich mit Leydener Flaschen verbunden denken kann, einen Gewinn an positiver bezüglich negativer Electricität bringt.

Die Regeneratoren müssen so geformt sein, dass sie den Bedingungen

$$C'V' = aV \text{ und } CV = a'V'$$

gehorchen. Sind a' und a' durch die Wahl der Receptoren sehr klein gemacht, so braucht man die Regeneratoren weder sehr eng noch sehr weit zu wählen.

Electrometer und Electroskope.

Classificirung der Instrumente.

214. Mit *Electrometer* bezeichnet man ein Instrument, das die Messung von Ladungen und von Potentialen ermöglicht.

Unter *Electroskop* versteht man dagegen ein Instrument, das die Existenz von Ladungen oder von Potentialdifferenzen anzeigt, ohne eine genügende numerische Bestimmung zu gestatten.

Doch vermag man auch Electroskope, wenn sie sehr empfindlich sind, zu Schätzungen zu verwenden, die sich auf die Anzeige der Abwesenheit von Electricität stützen. So kann man bei zwei electrischen Körpern A, B nach der im ersten Capitel auseinandergesetzten Methode entscheiden, welcher von ihnen der stärker geladene ist. Man bringt den Körper A an einer isolirenden Handhabe in ein leitendes Gefäss C, das ihn ganz einschliesst und nirgend berührt. Verbindet man C mit der Erde und isolirt es wieder, so bemerkt man auf seiner Aussenfläche keine Spur von freier

Electricität. Entfernt man nun A aus C und führt den Körper B ein, so wird das Electroskop an der Aussenseite von C immer noch keine Electricität nachweisen, wenn B ebenso stark geladen ist wie A. Beherbergt aber B eine grössere oder kleinere Electricitätsmenge als A, so zeigt das Electroskop an der Aussenfläche von C eine mit der von B gleichnamige bezüglich entgegengesetzte Ladung an.

Derartige Methoden, die auf Anzeigen von der Nichtexistenz einer Erscheinung sich stützen, kann man als Null- oder Zero-Methoden bezeichnen. Ihre Anwendung erfordert weiter nichts als ein Instrument, mit Hilfe dessen man die Existenz der Erscheinung zu entdecken vermag.

Eine andere Classe von Apparaten zur Registrirung von Erscheinungen wird so eingerichtet, dass man für dieselbe Erscheinung, wenn sie in derselben Stärke auftritt, stets dieselbe Anzeige erhält. Solche Instrumente sind mit Scalen versehen, deren Teilungen im allgemeinen nicht proportional der Quantität der zu messenden Grösse verlaufen. Die zu messende Quantität ist dann eine Function der betreffenden Scalenablesung, von der man meist weiter nichts weiss, als dass sie in continuirlicher Abhängigkeit von der betreffenden Quantität steht.

Dahin gehören einige Electrometer, bei denen die Messungen mit Hilfe der gegenseitigen Abstossung ähnlich electrisirter Teile des Instruments ausgeführt werden. Man erhält bei ihnen anstatt der wahren Werte der zu messenden Grösse eine Reihe von Zahlen, die nicht eher verwertet werden können, als bis man die Scala des betreffenden Instruments gehörig untersucht, und die ihren Angaben entsprechenden Werte der zu messenden Grösse in Tafeln gebracht hat.

Einer höhern Klasse von Instrumenten gehören dann endlich diejenigen an, bei denen gleichen Ablesungsdifferenzen gleiche Differenzen in den Werten der zu messenden Grösse entsprechen. Um solche Instrumente vollständig zum Gebrauch fertig zu machen, hat man weiter nichts zu tun, als den Proportionalitätsfactor des betreffenden Instruments zu bestimmen, also die constante Zahl zu eruiren, mit der man die Scalenablesungen zu multipliciren hat, um die entsprechenden Werte der zu messenden Grösse zu erhalten.

Man nennt Instrumente, die in sich selbst die Mittel besitzen, um in jedem Falle die wahren Werte der zu messenden Grössen bestimmen zu können, *Absolute Instrumente*.

Die Coulombsche Torsionswage.

215. Ein grosser Teil der Experimente, aus denen Coulomb seine Fundamentalgesetze für die Wirkung electrischer Körper aufeinander deducirt hat, basirt, wie wir in Art. 38 gesehen haben, auf der Messung der Kraftwirkung zwischen zwei electrisirten kleinen Kugeln, deren eine fixirt war, während die andere unter der Einwirkung der electrischen Kraft und der

Torsionselasticität eines Glasfadens oder Metalldrahtes in Gleichgewicht erhalten wurde.

Die *Torsionswage*, deren Coulomb sich dabei bediente, besteht aus einem mit Hilfe eines Drahtes oder Glasfadens horizontal aufgehängten Schellackstäbchen, an dessen einem Ende sich eine kleine, leicht vergoldete Hollundermarkkugel befindet. Der Aufhängedraht ist in einem verticalen Metallstück befestigt, der durch die Mitte eines horizontalen graduirten Kreises geht und durch einen horizontalen Arm um die Axe des Drahtes gedreht werden kann. Die Drehung bewerkstelligt eine Torsion des Drahtes um einen am horizontalen *Torsionskreis* abzulesenden Winkel.

Um den Apparat gegen Luftströmungen zu schützen, umgiebt man ihn mit einem Gehäuse, auf dem man zugleich eine Kreisteilung, die sich in der Schwingungsebene des Wagebalkens befindet, eingravirt. Das Gehäuse hat oben eine Oeffnung, durch welche an einem isolirenden Stabe eine andere kleine leitende Kugel, die *Standkugel*, eingeführt und bis in die Ebene des Schwingungskreises des Wagebalkens versenkt werden kann.

Die eingravirte Teilung gestattet dann die Lage dieser Kugel zu der am Wagebalken befestigten und in derselben Entfernung vom Aufhängedraht befindlichen zu bestimmen.

Wenn zunächst beide Kugeln unelectrisch sind, so möge der Winkel, den der Wagebalken mit einem durch die Standkugel gehenden Radius bildet, gleich φ sein. Sind beide Kugeln geladen und befindet sich die aufgehängte Kugel im Gleichgewicht, wenn der Wagebalken gegen den bezeichneten Radius um einen Winkel ϑ geneigt ist, so ist die Entfernung der Centren beider Kugeln gleich $2a\sin(\vartheta/2)$, wo a die Entfernung jeder der Kugeln von der Axe des Drahtes angiebt. Bezeichnet man mit F die directe electrische Kraftwirkung zwischen den beiden Kugeln in dieser Enfernung $2a\sin(\vartheta/2)$, so ist das electrische Drehungsmoment um die Axe der Torsion (d. h. des Drahtes) gleich $Fa\cos(\vartheta/2)$, und da dieses Moment den Draht um den Winkel $\vartheta-\varphi$ tordirt, so haben wir, falls M den Torsionscoefficienten des Drahtes angiebt,

$$1_1) \qquad Fa\cos\frac{\vartheta}{2} = M(\vartheta-\varphi),$$

eine Gleichung, welche F, die electrische Kraftwirkung, zwischen den beiden Kugeln, wenn sie von einander um $2a\sin(\vartheta/2)$ abstehen, zu berechnen gestattet, wenn M bekannt ist.

M bestimmt man aber durch die Beziehung

$$2) \qquad M = 4\pi^2\frac{K}{T^2},$$

wo K das Trägheitsmoment des Balkens sammt der Kugel in Bezug auf die Axe des Drahtes angiebt, und T die Zeit eines Hin- und Herganges desselben, wenn er lediglich unter Einwirkung der Torsionselasticität um diese Axe schwingt, bezeichnet.

Im allgemeinen ist freilich die so berechnete Grösse F nicht der Grösse der Kraftwirkung zwischen den Kugeln gleich zu setzen, denn die bewegliche Kugel wird nicht blos von der Ladung der Standkugel angegriffen, sondern auch von der in den Wänden des Gehäuses etwa influencirten Electricität.

Besteht das Gehäuse aus Glas, so kann man seine electrische Erregung nicht anders bestimmen als durch mühsame Messungen, die für jeden Punkt desselben ausgeführt werden müssen. Wenn aber das Gehäuse aus Metall gearbeitet ist, oder wenn zwischen dem Glasgehäuse und dem eigentlichen Apparat ein letzteren fast ganz einschliessender Metallschirm angebracht ist, so hängt die electrische Erregung auf den inneren Wänden desselben gänzlich von der der Kugeln ab, und jede Unbestimmtheit in der Bedeutung der Kraft F verschwindet.

Ich führe ein Beispiel an, in welchem man die fremden Einwirkungen auf die bewegliche Kugel berechnen kann.

Das Gehäuse habe die Form einer Metallkugel, deren Centrum im Bewegungsmittelpunkt des Wagebalkens sich befindet und deren Radius gleich b ist. Die Ladungen der kleinen Kugeln seien E_1 und E und der Winkel zwischen den ihnen entsprechenden Radien werde durch ϑ gegeben. Den Abstand der Standkugel von der Axe des Drahtes bezeichne ich durch a_1 und den der beweglichen Kugel durch a. Endlich soll r die Entfernung der beiden Kugeln von einander bedeuten.

Vernachlässigt man die von den Kugeln durch die gegenseitige Influenz in ihnen hervorgebrachte Störung in der gleichmässigen Verteilung ihrer bezüglichen Electricitäten, so wird die zwischen den beiden Kugeln wirkende Abstossungskraft gleich EE_1/r^2, somit das Drehungsmoment in Bezug auf die Axe des Drahtes

$$\frac{EE_1 a a_1 \sin\vartheta}{r^3}.$$

Den Einfluss der von der Standkugel in dem Kugelgehäuse influencirten Electricität auf die bewegliche Kugel können wir durch den des Bildes der Standkugel mit Bezug auf das Kugelgehäuse ersetzen. Ist die Standkugel sehr klein gegen das Kugelgehäuse, so liegt ihr Bild in dem durch die Standkugel gezogenen Radius in einer Entfernung b^2/a_1 von dem Bewegungsmittelpunkte und hat die Ladung $-E_1 b/a_1$. Da der Abstand dieses Bildes von der beweglichen Kugel gleich

$$\left(a^2 - 2\frac{ab^2}{a_1}\cos\vartheta + \frac{b^4}{a_1{}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so haben wir für das von dem Bilde der Standkugel auf die bewegliche Kugel um die Drahtaxe ausgeübte Drehungsmoment

$$D' = -EE_1 \frac{b}{a_1} \cdot \frac{a \frac{b^2}{a_1} \sin\vartheta}{\left\{a^2 - 2\frac{ab^2}{a_1}\cos\vartheta + \frac{b^4}{a_1^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -EE_1 \frac{aa_1 \sin\vartheta}{b^3\left\{1 - 2\frac{aa_1}{b^2}\cos\vartheta + \frac{a^2a_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir haben also die Gleichung

$$1) \quad EE_1 aa_1 \sin\vartheta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3\left\{1 - 2\frac{aa_1}{b^2}\cos\vartheta + \frac{a^2a_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}\right) = M(\vartheta - \varphi).$$

Ist der Radius des Kugelgehäuses sehr beträchtlich gegen die Entfernung der beiden Kugeln von der Drehungsaxe, so geht der obige Ausdruck über in

$$1_2) \quad EE_1 aa_1 \sin\vartheta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}\right) = M(\vartheta - \varphi).$$

Electrometer zur Messung von Potentialen.

216. Bei allen Electrometern besteht der bewegliche Teil aus einem Körper, der mit Electricität zu einem Potential geladen ist, welches von den Potentialen anderer in seiner Nähe befindlicher fixirter Körper abweicht.

Isolirt man mit Coulomb den beweglichen Körper von allen andern, so ist seine Ladung das directe Object der Messung. Wenn man die Kugeln des Coulombschen Electrometers durch feine Drähte mit andern Conductoren verbindet, so laden sie sich mit Electricitätsmengen, welche von den Potentialen der betreffenden Conductoren und von dem Potential des Gehäuses abhängen. Näherungsweise ist dann die Ladung jeder Kugel gleich dem Producte ihres Radius in die Differenz ihres Potentials gegen das Potential des Gehäuses, vorausgesetzt dass die Radien der Kugeln verhältnismässig klein sind gegen den Abstand sowohl der Kugeln von einander als von der nächsten Wand oder Begrenzung des Gehäuses. Die letzte Bedingung bringt es mit sich, dass die Coulombsche Form der Torsionswage sich für genaue Messungen geringer Potentialdifferenzen nicht eignet, weil die Kraft, mit der die beiden Kugeln in der durch die Bedingung geforderten Entfernung aufeinander einwirken, bei kleiner Potentialdifferenz zu unbeträchtlich ausfällt.

Absolutes Scheibenelectrometer mit Schutzring von Thomson. Weit geeigneter zu Messungen kleiner Potentialdifferenzen sind die Electrometer, in denen die Kugeln durch Scheiben ersetzt sind.

Solche Electrometer sind zuerst von W. Snow Harris construirt worden.*) Ihre grösste Vervollkommnung in theoretischer wie in constructiver Hinsicht verdankt man aber W. Thomson.**)

Wenn zwei Scheiben von verschiedenem Potential einander bis auf einen geringen Abstand gegenüber gebracht werden, so verteilen sich die Electricitäten auf den einander zugewendeten Flächen derselben fast ganz gleichförmig und verlassen fast vollständig die von einander abgewendeten Scheibenflächen, so dass man dort, falls keine fremden Körper in der Nähe sind, nur Spuren von Electricität vorfindet.

Die Ladung einer der Scheiben, der positiven etwa, ist dann direct proportional dem Producte aus dem Flächeninhalt dieser Scheibe in ihre Potentialdifferenz gegen die andere Scheibe und umgekehrt proportional dem Abstande der beiden Scheiben von einander. Nimmt man also grosse Scheiben und nähert sie einander so weit, als man nur, ohne die Isolation aufzuheben, vermag, so wird auch eine nur geringe Potentialdifferenz zu einer messbaren Attractionswirkung Veranlassung geben.

Ich habe schon in Art. 202 die mathematische Theorie der Verteilung der Electricität auf zwei Scheiben gegeben, dort ist aber angenommen worden, dass die Scheiben in der Unendlichkeit von einander isolirt sind, und das ist natürlich in der Praxis unstatthaft. Es ist daher auch nicht leicht, aus den numerischen Angaben so construirter Apparate die zu messenden Grössen abzuleiten.

217. Thomson hat darum, um den theoretischen Bedingungen möglichst nahe zu kommen, die bewegliche Scheibe noch mit einem Schutzring umgeben und damit die wichtigste Verbesserung seines Apparates zuwege gebracht.

Er nahm zunächst beide Scheiben gleich gross und schnitt aus der beweglichen einen kleinen centralen Teil heraus, den er zur eigentlichen beweglichen Scheibe machte, während er den übrig gebliebenen Ring fest mit der fixirten Scheibe verband. Dadurch erreichte er zweierlei, einmal wird die Kraftwirkung nur an dem Teile der Scheibe gemessen, wo sie noch am regelmässigsten gestaltet ist, dann aber fällt auch der Einfluss, den sonst die nicht ganz gleichförmige Verteilung der Electricität ausüben würde, fast ganz heraus, weil gerade der Teil der Scheibe, wo die Ungleichförmigkeit in der electrischen Verteilung am meisten hervortritt, also der an der Kante, auf dem Schutzring fixirt bleibt.

Ausserdem kann man auf dem Schutzring ein Metallgehäuse anbringen, durch welches die Rückseite der beweglichen Scheibe und alle mit dieser in Verbindung stehenden Teile des Apparates gegen fremde Influenzeinwirkungen geschützt werden.

---

*) *Phil. Trans.* 1834.

**) Man sehe Thomsons vorzüglichen Bericht über Electrometer. *Report of the British Association.* Dundee 1867.

Das absolute Electrometer von Thomson besteht also der Hauptsache nach aus zwei parallelen Platten, die zu verschiedenen Potentialen geladen sind, und von denen die eine so eingerichtet ist, dass nur ihr centraler Teil, der als solcher frei von der an der Kante herrschenden ungleichförmigen Verteilung der Electricität ist, unter dem Einfluss der electrischen Kräfte sich bewegen kann.

Die feste Scheibe ist horizontal auf einem isolirenden Fuss befestigt, der durch eine Micrometerschraube vertical auf und ab bewegt werden kann. Der Schutzring muss möglichst eben gestaltet und parallel der festen Scheibe befestigt sein. Sein Rand muss mindestens über dem Rande der Scheibe

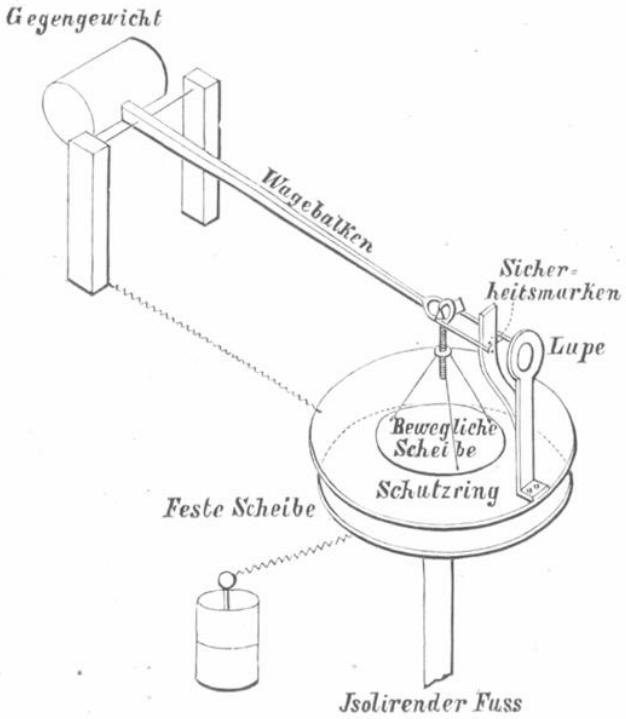


Fig. 19.

sich befinden, es ist aber gut, wenn er diesen noch überragt. Die bewegliche Scheibe ist an einem Wagebalken, der eine sehr delicate Bewegung gestattet, an drei Fäden so aufgehängt, dass sie gerade durch die Oeffnung des Ringes ohne Reibung hindurchgehen kann. Ihre untere der festen Scheibe zugewandte Fläche muss möglichst eben sein, und die Aufhängung ist so einzurichten, dass diese untere Fläche in einer gewissen Lage mit der untern Fläche des Ringes vollständig zu einer Ebene zusammenfällt, die nur durch den schmalen kreisförmigen Zwischenraum, der Ring und Scheibe trennt, unterbrochen ist.

Zu dem Behufe schraubt man die fixirte Scheibe so lange in die Höhe, bis sie den Schutzring berührt, lässt die bewegliche Scheibe, indem man sie eventuell mit Gewichten belastet herunter und justirt die Aufhängung so lange, bis die Scheibe gerade noch, aber vollständig auf der festen Scheibe aufliegt. Die untere Fläche der beweglichen Scheibe befindet sich dann mit der untern Fläche des Ringes in einer Ebene. Wenn auch die obern Flächen von Scheibe und Ring möglichst eben sind, so erkennt man das daran, dass das Bild eines Gegenstandes, welches zum Teil von der Scheibe, zum Teil vom Ring entworfen wird, keine Discontinuität zeigt. Die Lage der beweglichen Scheibe gegen den Ring wird durch Sicherheitsmarken fixirt. Thomson verwendet dazu ein horizontal in einer Gabelöffnung des Wagebalkens ausgespanntes dunkles Haar, das bei der Schwingung des Balkens zwischen zwei auf weissem Grunde gezeichneten schwarzen Punkten sich hin und her bewegt. Die Punkte befinden sich auf einem auf dem Ring befestigten Halter, der auch eine Lage trägt, durch die man die Lage des Haares zu den Punkten näher beobachten kann. Man bringt nun die Punkte so an, dass das Haar, wenn die untere Seite der Scheibe in der Ebene der untern Fläche des Ringes schwebt, und alle Teile des Apparates durch Herstellung von Verbindungen zwischen ihnen vollständig von Electricität befreit sind, durch die Lupe gesehen als gerade Linie erscheint, welche das Intervall zwischen den beiden Punkten bisecirt. Diese Lage bezeichnet man als *Visirlage*.

Auf den Ring setzt man noch ein Metallgehäuse, das die Scheibe und ihre Aufhängungsvorrichtung umgiebt, und Oeffnungen zur Beobachtung der Visirmarken enthält.

Bei einigen Electrometern schwingt der Wagebalken nicht auf einer Schneide, sondern um einen gespannten Platindraht, der durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht (die Figur 19 stellt ein solches Electrometer dar). Man kann sie dann im allgemeinen nicht zu absoluten Messungen verwenden, doch sind ihre Angaben constant dieselben, wenn die Torsionselasticität des Drahtes sich mit der Zeit nicht ändert.

Ring, Gehäuse und bewegliche Scheibe stehen mit einander in leitender Verbindung, sind aber von allen andern Teilen des Apparates isolirt.

218a. Hat man mit Hilfe dieses Electrometers die Potentialdifferenz zweier Conductoren zu bestimmen, so verbindet man sie durch Drähte mit den bezüglichen Scheiben, nimmt von der beweglichen Scheibe das Gewicht, welches sie in der Visirlage erhält, herunter und schraubt die feste Scheibe mit der Micrometerschraube so lange in die Höhe, bis die bewegliche Scheibe durch die electrische Attraction wieder in die Visirlage gebracht wird. Die electrische Anziehungskraft der Scheiben in ihrer neuen Lage gegeneinander wird dann durch das Gewicht gemessen, welches die bewegliche Scheibe früher in der Visirlage erhalten hat.

Es sei also W der numerische Betrag des Gewichts, g die Constante der Schwerkraft; die dem Gewicht entsprechende Kraft ist gleich gW. Ist

dann A der Flächeninhalt der beweglichen Scheibe, D ihr Abstand von der festen Scheibe und V die Potentialdifferenz der beiden Scheiben gegeneinander, so haben wir

$$Wg = \frac{V^2 A}{8\pi D^2},$$

also

1) $$V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

A ist eigentlich nicht genau gleich dem Flächeninhalt der beweglichen Scheibe, sondern hat einen etwas grössern Wert.

Bezeichnet man nämlich mit R den Radius der beweglichen Scheibe, mit R' den der Oeffnung im Schutzring, so dass $B = R' - R$ die Breite der zwischen Scheibe und Schutzring vorhandenen Furche ist, so haben wir nach Art. 201 für die Electricitätsmenge der beweglichen Scheibe

2_1) $$Q = V\left\{\frac{R^2 + R^2}{8D} + \frac{R^2 - R'^2}{8D}\cdot\frac{\alpha}{D+\alpha}\right\},$$

wo

a) $$\alpha = \frac{B}{\pi}\log 2 = 0{,}220635(R' - R)$$

ist. Befindet sich die Ebene des Schutzringes nicht in derselben Höhe über der festen Scheibe wie die Ebene der beweglichen Scheibe, sondern ist sie um z von derselben weiter entfernt als die bewegliche Scheibe, so tritt der Charakter des Randes der beweglichen Scheibe als Kante etwas hervor, und man hat zu der frühern Electricitätsmenge noch eine Correction hinzuzufügen, deren Wert nach einer Berechnung, die erst im Art. 225 angeführt werden soll, gleich

$$\frac{V}{D}(R + R')\, z \log\frac{4\pi(R + R')}{z}$$

ist.

Man hat also

2) $$Q = V\left\{\frac{R^2 + R'^2}{8D} + \frac{R^2 - R'^2}{8D}\,\frac{\alpha}{D+\alpha} + \frac{R + R'}{D}\, z \log\frac{4\pi(R + R')}{z}\right\}$$

und hieraus folgt allgemeiner*)

b) $$A = \frac{\pi}{2}\left\{R^2 + R'^2 + (R^2 - R'^2)\frac{\alpha}{D+\alpha} + 8(R + R')\, z \log\frac{4\pi(R + R')}{z}\right\}.$$

*) Eine strenge Theorie des Thomsonschen Schutzring-Condensators hat Kirchhoff geliefert. Der Leser findet sie in den *Gesammelten Abhandlungen* dieses Physikers auf Seite 113 ff.

Ist B, das Intervall zwischen der beweglichen Scheibe und dem Ring, sehr klein, so fällt das zweite Glied fort, ist z die Höhendifferenz zwischen der beweglichen Scheibe und dem Schutzring gegen α von unbedeutender Grösse, so ist das dritte Glied zu vernachlässigen.

Im allgemeinen wird man den Apparat so justiren, dass B sowohl als z nicht berücksichtigt zu werden brauchen, und dann hat man

b_1) $$A = \frac{\pi}{2}(R^2 + R'^2)$$

und

1_1) $$V = 4D\sqrt{\frac{gW}{R^2 + R'^2}},$$

So kann man selbst eine schwache electromotorische Kraft mit dem Electrometer bestimmen, wenn seine Scheiben in sicher messbarer Entfernung von einander sich befinden. Ist der Abstand der Scheiben von einander bei einer solchen Bestimmung verhältnismässig klein, so bringt schon eine ganz geringe Aenderung desselben, eine beträchtliche Aenderung in der zwischen den Scheiben wirkenden Kraft hervor, da die Kraft umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes variirt. Ein geringer Fehler in der Ablesung der Micrometerschraube verfälscht also das Resultat sehr beträchtlich, wenn nicht der Abstand der Scheiben von einander noch verhältnismässig gross gegen die Fehler der micrometrischen Einstellungen ist.

Die Einwirkungen geringer Unregelmässigkeiten in der Form der Scheibenflächen auf die Messungsresultate nehmen, ebenso wie die einer fehlerhaften Bestimmung des Intervalls zwischen den Scheiben, ab wie der reciproke Wert der dritten und höhern Potenz der Entfernung der Scheiben von einander. Ist der Abstand der Scheiben verhältnismässig gross gegen die Dimensionen der auf ihren Flächen etwa befindlichen Hervorragungen, so wirken die Scheiben aufeinander ebenso wie zwei Ebenen, die in sehr geringen Entfernungen von den Spitzen der bezüglichen Hervorragungen gelegen sind. Wegen näherer Ausführung verweise ich auf die Art. 197, 198, wo von den Kräften, die zwischen gewellten Flächen spielen, die Rede ist.

218b. Der Abstand D der Scheiben von einander bestimmt sich aus der Differenz der Micrometerablesungen, wenn die bewegliche Scheibe auf der festen aufliegt und wenn sie sich in der Visirlage befindet. Da aber einerseits die Bestimmung des Moments des vollen Berührens beider Scheiben mit grosser Unsicherheit behaftet ist, und andererseits selbst ein kleiner Irrtum in der Bestimmung von D bei der Messung geringer Potentialdifferenzen von grosser Bedeutung ist, so zieht Thomson es vor, nicht direct die Potentialdifferenzen der beiden Scheiben zu bestimmen, sondern Differenzen von Potentialdifferenzen zu beobachten.

Sind nämlich D und D' die den Potentialdifferenzen V, V' entsprechenden Scheibenabstände, so hat man

$$3) \qquad V - V' = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}},$$

und $D - D'$ ist von der Lage des Nullpunkts der Micrometerschraube, also von der Ablesung bei der Berührung der beiden Scheiben, unabhängig.

Hat man zum Beispiel die electromotorische Kraft einer galvanischen Batterie zu bestimmen, so ladet man erst die untere Scheibe mit Hilfe eines Condensators, der, wenn nötig, durch einen *Replenisher* auf derselben Höhe seiner Ladung erhalten wird, zu einem Potential V und leitet die obere bewegliche Scheibe zur Erde ab, so dass die Potentialdifferenz zwischen beiden Scheiben V beträgt. Ist D die Entfernung, bis zu der man die feste Scheibe der beweglichen nähern muss, damit diese wieder in die Visirlage gelangt, so haben wir

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Dann setzt man die negative Electrode der Batterie mit der beweglichen Scheibe, deren Verbindung zur Erde man vorher unterbrochen hat, in Contact und leitet ihre positive Electrode zur Erde ab. Ist v die electromotorische Kraft der Batterie, so ist jetzt die Potentialdifferenz zwischen den beiden Scheiben $V + v$. Verschiebt man wieder die untere Scheibe bis zum Abstand D' von der obern, bis letztere sich in die Visirlage einstellt, so hat man

$$V + v = D'\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}},$$

also

$$v = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Man kann sich also mit Hilfe einer zweiten Electricitätsmenge immer ein geeignetes Intervall verschaffen.

Es ist aber dabei notwendig, dass während des Experiments das Potential V, zu welchem die untere Scheibe durch den Condensator geladen ist, constant bleibt. Um sich von dieser Constanz zu versichern, verbindet man die untere Scheibe des Electrometers mit der untern Scheibe eines andern Electrometers, dessen obere Scheibe zur Erde abgeleitet und durch Heraufschrauben der untern Scheibe in die Visirlage gebracht ist. Jede Veränderung in dem Werte von V manifestirt sich dann an dem zweiten Electrometer durch ein Herausgehen des Haares aus der Mitte des Intervalls zwischen den beiden schwarzen Visirpunkten.

Das Hilfselectrometer braucht nicht so sorgfältig gearbeitet zu sein wie das erste zur eigentlichen Messung verwendete, da es nicht zu absoluten Bestimmungen dienen soll, sondern nur um zu constatiren, dass die Hilfsladung vom Potential V sich im Laufe des Versuchs nicht verändert. Man kann es deshalb Prüfelectrometer nennen.

Man bezeichnet die oben auseinandergesetzte Methode, eine electromotorische Kraft unter Zuhilfenahme einer fremden Electricitätsmenge zu messen, als die *Heterostatische Methode* der Electrometrie, im Gegensatz zu der *Idiostatischen*, bei der die ganze Einwirkung lediglich durch die zu messende Electricitätsmenge hervorgebracht wird.

Wenn der Apparat genügend bequem eingerichtet ist, so setzt man ihn in ein Leydener Gefäss, dessen innere geladene Belegung mit der beweglichen Scheibe und dem Schutzring leitend verbunden ist. Die feste Scheibe wird erst zur Erde abgeleitet und dann mit dem Conductor, dessen Potential bestimmt werden soll, verbunden.

219. *Thomsons Quadrantenelectrometer.* Das eben beschriebene Electrometer ist nicht selbstwirkend, sondern ergiebt seine Resultate jedesmal nur unter Beihilfe des Experimentators, der die untere Scheibe durch die Micrometerschraube zu verschieben hat. Es gehört also nicht zu den selbstregistrirenden Instrumenten, deren Eigenschaft eben darin besteht, dass sie von selbst die geeigneten Angaben machen. Das im Folgenden zu beschreibende Thomsonsche *Quadrantenelectrometer* ist dagegen dieser Classe der selbstregistrirenden Instrumente einzureihen.

Der Hauptbestandtheil des Apparates besteht in einer zu einem hohen Potential geladenen beweglichen Scheibe C, welche innerhalb zweier in noch anzugebender Weise geformter Conductoren A, B von gleichem oder verschiedenem Potential so schwingt, dass bald in dem einen, bald in dem andern Conductor sich ein grösseres Stück von ihr befindet.

Dazu benutzt man für A, B, C am besten Teile von Rotationsflächen, die dieselbe Axe haben, und lässt C sich um diese Axe bewegen.

Bei einer solchen Configuration bleibt der Abstand der Flächen von C gegen die Flächen der Conductoren A und B während einer positiven Rotation von C um die Axe der Configuration immer derselbe, während das Flächenstück, das B gegenübersteht, sich zum Beispiel vergrössert und das dem Leiter A zugewandte kleiner wird.

Sind die Potentiale von A und B einander gleich, so existirt keine Kraft, welche C von A nach B oder umgekehrt von B nach A drängen könnte. Ist aber die Potentialdifferenz von C gegen B grösser als die von C gegen A, so hat C das Bestreben, sich so zu bewegen, dass den Flächen des Conductors B ein grösseres Stück seiner Fläche gegenübersteht, als denen des Conductors A.

Man kann nun durch geeignete Anordnung des Apparates bewirken, dass die Kraft, welche eine bestimmte Vergrösserung des einem der Con-

ductoren A oder B gegenüberstehenden Flächenteiles von C hervorbringt, in gewissen Grenzen unabhängig von der Lage ist, die C gegen die festen Conductoren schon einnimmt. Ist dann C an einem Faden aufgehängt, so werden seine Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage näherungsweise proportional dem Producte aus den entsprechenden Potentialdifferenzen zwischen A und B in die Differenz des Potentials von C gegen das Mittel der Potentiale von A und B sein.

Die Methode, deren man sich bei der Messung von Potentialdifferenzen mit diesem Electrometer bedient, ist die heterostatische. Man erhält die Platte C mit Hilfe eines Condensators, der mit einem *Replenisher**) verbunden ist, und durch ein Prüfelectrometer**) controlirt wird, auf einem hohen Potential, während man A und B mit den Conductoren verbindet, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll. Der Apparat ist um so empfindlicher, je höher das Potential von C gegen die Potentialdifferenz von A und B ist, so dass er sich ganz besonders zur Bestimmung kleiner Potentialdifferenzen eignet.

Die Theorie dieses Electrometers ergiebt sich aus der in den Art. 93, 127 auseinandergesetzten allgemeinen Theorie eines Systems von Leitern.

Es seien also A, B, C die bezüglichen Potentiale dreier Conductoren, deren Capacitäten bei ihrer gleichzeitigen Existenz durch a, b, c gegeben sind. p bezeichne den Coefficienten der Induction zwischen B und C, q den zwischen C und A, r den zwischen A und B. Da die Capacitäten und Inductionscoefficienten von der Configuration und Lage der Systeme, für welche sie gelten sollen, abhängen, so werden sie im allgemeinen Functionen der Lage von C gegen A und B sein, und man kann auch die Form dieser Functionen eruiren, wenn man die Bewegung von C so einschränkt, dass seine Kanten nirgends denen von A bezüglich B zu nahe kommen. Bezeichnet ϑ die Ablenkung des Conductors C von A nach B hin, so wird der dem Conductor A gegenüberstehende Flächenteil von C um so kleiner, je grösser ϑ ist. Hat also das Potentialniveau auf A den Wert 1 und auf B und C den Wert Null, so wird die Ladung von A, also die Capacität dieses Conductors bei der betreffenden Lage von C, gleich $a = a_0 - \alpha\vartheta$ sein, wo a_0 die Capacität von A in der Gleichgewichtslage von C bezeichnet, und α eine Constante angiebt. Liegen A und B symmetrisch zu C, wenn dieses sich in der Ruhelage aufhält, so ist gleichzeitig die Capacität von B, also $b = b_0 + \alpha\vartheta$. Die Capacität von C ändert sich natürlich nicht durch seine Bewegung, weil der einzige Effect der Bewegung von C darin besteht, dass die Intervalle zwischen A und B durch immer andere Teile von C ausgefüllt werden. Wir haben also $c = c_0$. Ferner ist die Electricitätsmenge, welche in C in seiner abgelenkten Lage durch eine Steigerung des Potentialniveaus auf B

*) Wiedemann benutzt dafür die Bezeichnung Füllapparat. S. dessen *Lehre von der Electricität* 1882 Bd. I. pag. 168. Andere nennen es Restitutor.

**) So nennt Wiedemann l. c. dieses Controlinstrument, sonst heisst es auch Ladungsmesser (*gauge electrometer*.)

von 0 bis 1 inducirt wird, also der Coefficient der Induction zwischen B und C gleich $p = p_0 - \alpha\vartheta$, wo p_0 den Inductionscoefficienten in der ursprünglichen Lage des C bezeichnet. Entsprechend haben wir $q = q_0 + \alpha\vartheta$ und, weil A und B ihre Lage gegen einander nicht verändern, $r = r_0$.

Die electrische Energie des Systems ist aber

$$1) \qquad W = \frac{1}{2} A^2 a + \frac{1}{2} B^2 b + \frac{1}{2} C^2 c + BCp + CAq + ABr,$$

also das Moment Θ der Kraft, welches ϑ zu vergrössern strebt,

$$2a) \quad \Theta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2} A^2 \frac{\partial a}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial b}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} C^2 \frac{\partial c}{\partial \vartheta} + BC \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + CA \frac{\partial q}{\partial \vartheta} + AB \frac{\partial r}{\partial \vartheta}$$

$$= -\frac{1}{2} A^2 \alpha + \frac{1}{2} B^2 \alpha - BC\alpha + CA\alpha,$$

woraus sich das schon früher ausgesprochene Gesetz

$$2b) \qquad \Theta = \alpha (A - B)\left(C - \frac{1}{2}(A + B)\right)$$

ergiebt.

Gegenwärtig bildet man die Conductoren A, B des Thomsonschen Quadrantenelectrometers dadurch, dass man eine cylindrische Büchse durch zwei zu einander und zu den Grundflächen senkrechte Schnitte in vier von einander vollständig getrennte und isolirte Quadranten zerschneidet. Je zwei diagonal gegenüberstehende Quadranten durch einen Draht verbunden bilden dann den Conductor A bezüglich B.

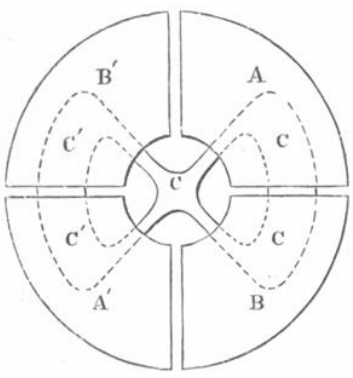


Fig. 20.

Der Conductor C besteht aus zwei flachen Bogenstücken, welche durch die zugehörigen Durchmesser mit einander verbunden sind. Er befindet sich innerhalb der Büchse, aus der die Conductoren A und B gebildet sind, und kann sich um eine zur Büchse senkrechte Axe drehen. In der Gleichgewichtslage von C liegen die Bogenstücke von C zu gleichen Teilen in A und B, so dass die beiden Durchschnitte durch die Büchse den Winkel zwischen den Durchmessern von C halbiren. Ausserdem hängt C genau in der Mitte zwischen den Bodenflächen der Büchse, sodass die Entfernungen zwischen den Kanten der Conductoren möglichst gross sind.

Der Conductor C wird mit der innern Belegung einer Leydener Flasche verbunden, die gleichzeitig als Gehäuse für den Apparat benutzt wird und so zu einem hohen Potential geladen.

Die Conductoren B und A werden mit den Körpern verbunden, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll; handelt es sich also um Bestimmung des Potentials eines Körpers, so verbindet man B mit der Erde und A mit jenem Körper.

Ist das Potential des Körpers, also auch das des Conductors A, gleich Null und der Apparat sonst in Ordnung, so darf keine Kraft auftreten, die C zu bewegen strebt. Ist das Potential auf A von demselben Zeichen wie das auf C, so dreht sich C mit nahezu gleichförmiger Kraft so lange von A nach B hin, bis die Torsionselasticität des Fadens, an dem C hängt, ein dem electrischen Moment gleiches Torsionsmoment wachruft. Die Ablenkung D von C aus der ursprünglichen Lage ist dann, wie wir gesehen haben, innerhalb gewisser Grenzen proportional dem Product

$$3) \qquad D = (A - B)\,[C - \tfrac{1}{2}(A + B)].$$

Indem man C beträchtlich anwachsen lässt, kann man die Empfindlichkeit des Instruments so lange, als es die Bedingungen, welche den Ausschlag des Conductors C einschränken, gestatten, beliebig steigern. Ist das Potential von C sehr gross gegen das mittlere Potential von A und B, so wird die Ablenkung von C proportional der Grösse

$$3_1) \qquad D = C(A - B)$$

sein, oder, wenn B zur Erde abgeleitet ist, proportional

$$3_2) \qquad D = CA.$$

Da die Electricität des Körpers, dessen Potential bestimmt werden soll, bei seiner Verbindung mit dem Conductor A sich auf diesem mit verbreitet, so ist A als das Potential von A nicht direct das zu messende Potential des Körpers, sondern sein Potential nach seiner Verbindung mit A. Ist aber K die Capacität des betreffenden Körpers, K' die des Conductors A, V das Potential des Körpers vor seiner Verbindung mit A und V' das Potential von A vor der Verbindung mit dem Körper, so ist das Potential A nach Herstellung der Verbindung

$$A = \frac{KV + K'V'}{K + K'},$$

also das zu messende Potential des Körpers

$$4) \qquad V = A + \frac{K'}{K}(A - V').$$

Man sieht, dass $V = A$ ist, wenn der Körper sehr gross gegen den Conductor A ist, so dass auch K sehr gross gegen K' wird, oder wenn der Betrag von A sich nur wenig von dem von V' unterscheidet.

Da eine directe Bestimmung der Capacitäten sich nur schwer bewerkstelligen lässt, so tut man gut, den letztern Fall möglichst zu realisiren.

Man misst daher zunächst das Potential des Körpers näherungsweise und ladet die Electrode A durch einen *Replenisher* möglichst zu dem Potential A, welches A nach seiner Verbindung mit dem Körper annehmen wird, so dass $A - V'$ nur einen geringen Betrag erreicht und das von K'/K abhängige Glied in der Formel 4) fortgelassen werden darf. Damit bekommt man einen zweiten Näherungswert für das Potential, mit dessen Hilfe man die Ladung der Electrode A corrigirt, um einen dritten Näherungswert zu erlangen. So kann man selbst ohne Kenntnis der Capacitäten mit dem Quadrantenelectrometer das Potential auch für Körper, deren Capacität klein gegen die der benutzten Electrode A des Electrometers ist, bestimmen.

220. Zur Graduirung des Quadrantenelectrometers verwendet man am besten ein Scheibenelectrometer, welches Potentiale in absolutem Maasse zu bestimmen gestattet, indem man Potentiale von Conductoren, die sich auf dem Scheibenelectrometer mit genügender Sicherheit messen lassen, die also nicht zu klein sind, erst mit diesem und dann mit dem Quadrantenelectrometer bestimmt. Man erhält so eine Reihe von Scalenablesungen, welche bestimmten Potentialen entsprechen, und durch deren Ausgleichung sich die Proportionalitätsconstante des betreffenden Electrometers berechnen lässt. Der Wert, welchen das Quadrantenelectrometer dann für ein Potential ergiebt, hängt noch von dem Torsionscoefficienten des Drahtes, an dem C aufgehängt ist, und von dem als constant betrachteten Potential dieses Conductors ab.

Messung des Potentials an einem frei gelegenen Punkt.

221. *Erste Methode*: Man bringt eine Kugel, deren Radius klein gegen ihren Abstand von dem nächsten electrischen Körper ist, in den Punkt, wo das Potential gemessen werden soll, verbindet sie zunächst mit der Erde, isolirt sie dann und bestimmt ihr Potential an einem genügend weit entfernten Electrometer.

Ist V das Potential in dem betreffenden Punkte, a der Radius der benutzten Kugel, V' das Potential der Kugel, gemessen an einem durch ein Metallgehäuse, das zur Erde abgeleitet ist, gegen alle Influenzeinwirkungen geschützten Electrometer und Q die Electricitätsmenge der Kugel, so haben wir einerseits

$$Q = - Va$$

und andererseits auch

$$Q = + V'a,$$

demnach

$$V = - V'.$$

Das gesuchte Potential in dem betreffenden Punkte ist also entgegengesetzt gleich dem der kleinen Kugel, wenn letztere an den Ort des Punktes

gebracht, dort zur Erde abgeleitet, dann isolirt und ihr Potential in einem gegen Influenzeinwirkungen geschützten Raum gemessen wird.

Es ist dies die Methode, deren sich Dellmann aus Kreuznach bei seinen Bestimmungen des Potentials in gewissen Höhen über der Erdoberfläche bedient hat.

Zweite Methode. Man befreit zunächst die Kugel vollständig von aller Electricität, indem man sie in ein rings geschlossenes Metallgefäss einsenkt und mit der Innenfläche des Gefässes in Berührung bringt. Dann legt man sie an den Ort, wo das Potential bestimmt werden soll, und verbindet sie durch einen feinen Draht mit einer Electrode eines entfernt aufgestellten Electrometers. Das Potential dieser Electrode wird sich dann in seiner Grösse etwas dem an der Stelle, wo die Kugel sich befindet, herrschenden Potential nähern. Man löst die Verbindung der Kugel mit der Electrode, entladet sie möglichst vollständig und stellt jene Verbindung wieder her, das Potential der Electrode nähert sich dann noch mehr dem zu messenden. So fährt man mit Lösen, Entladen und Verbinden fort, bis das Potential der Electrode sich nicht mehr merklich ändert, und erhält in diesem schliesslichen Wert des Potentials der Electrode das Potential an der Stelle, wo die Kugel sich befindet.

Dritte Methode. Diese Methode ist im Princip dieselbe, wie die zweite, sie beruht darauf, dass man eine Reihe von kleinen Körperchen zwingt, sich in dem betreffenden Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, von der Electrode des Electrometers abzulösen. Man verbindet zu dem Behufe die Electrode mit einem Trichter oder einer Röhre, durch die man Schrotkörner oder Feilspäne oder Wasser fliessen lässt und regulirt die ganze Einrichtung so, dass der Strom von Körperchen in dem Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, discontinuirlich wird. Das Potential der Electrode wird dann mit der Zeit gleich dem an der betreffenden Stelle herrschenden Potential.

Man kann auch an die Electrode einen feinen Schwefelfaden binden, den man an dem freien Ende anzündet, das Electrometer giebt dann sehr bald das Potential an der jeweilig brennenden Stelle.

Ist die Potentialdifferenz zwischen der Electrode des Electrometers und dem Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, sehr beträchtlich, so kann man auch so verfahren, dass man in diesen Punkt eine feine Spitze anbringt, die mit der Electrode verbunden ist. Es tritt dann mit Hilfe der umgebenden Luftpartikel eine Entladung ein. Wo die Potentialdifferenz nicht genügend gross ist, da muss man schon von den andern Methoden Gebrauch machen.

Will man nur das Zeichen der Differenz der an zwei verschiedenen Stellen herrschenden Potentiale, nicht ihren numerischen Betrag kennen, so führt man von dem einen Orte zu dem andern eine Metallröhre und lässt durch diese Wasser oder Feilicht in ein isolirtes Metallgefäss laufen. Jeder

Tropfen, der in das Gefäss gelangt, bringt dann eine gewisse Electricitätsmenge mit sich, die er dem Gefäss abgiebt, so dass die Ladung des letztern sich fortdauernd vergrössert und schliesslich selbst durch rohe Methoden bestimmt werden kann. Das Potential des Gefässes ist positiv, wenn das der Röhre gegen die umgebende Luft positiv ist.

222. Man kann eine der angegebenen Methoden zur Bestimmung des Potentials in Punkten eines electrischen Feldes auch dazu verwenden, um das Potential auf Conductoren zu messen, ohne sie dabei zu berühren. Man bestimmt dazu das Potential in Punkten in der Nachbarschaft des Conductors, aus dem sich dann das Potential des Conductors leicht berechnen lässt. Jene Methoden sind namentlich dann, wenn der betreffende Körper einen nahezu abgeschlossenen Hohlraum enthält, anwendbar, denn da in einem solchen Hohlraum das Potential fast constant und beinahe genau gleich dem Potential des Conductors ist, so hat man nur das Potential in einem Punkte der Höhlung, der möglichst entfernt von der Oeffnung derselben sich befindet, zu messen.

In dieser Weise hat W. Thomson die Tatsache constatirt, dass das Potential in den Punkten eines von einem Zinkconductor umgebenen Hohlraumes positiv ist gegen das Potential in den Punkten eines von einem Kupferconductor umgebenen Hohlraumes, wenn beide Conductoren miteinander leitend verbunden sind.

Messung der electrischen Flächendichte.

Theorie der Prüfungskörper.

223. Will man die mathematische Theorie der electrischen Verteilung auf Conductoren verificiren, so muss man ein Mittel besitzen, die Flächendichte der Electricität in den verschiedenen Punkten der Oberfläche eines Conductors zu messen. Coulomb bediente sich zu solchen Dichtebestimmungen einer Scheibe von Rauschgold, welche an einem isolirenden Schellackstäbchen befestigt war. Er legte die Scheibe so eng als möglich an die betreffende Stelle des Conductors an, entfernte sie mit der isolirenden Handhabe und bestimmte dann ihre Ladung an seinem Electrometer.

Da die Oberfläche der Scheibe möglichst der Conductorfläche angeschmiegt wurde, so schloss er, dass die Flächendichte der Electricität auf der Aussenseite dieser Scheibe sehr nahe der auf der betreffenden Stelle der Conductorfläche herrschenden gleich sei, und dass die Ladung der Scheibe, nach ihrer Entfernung vom Conductor, sehr nahe dieselbe Grösse habe, wie das von der Scheibe bedeckte und ihr an Flächeninhalt gleiche Stück der Conductorfläche.

Man nennt seither eine zu derartigen Messungen verwendete Scheibe eine *Probe-* oder *Prüfungsscheibe*. Da aber gegen Coulombs Art der Verwendung der Probescheibe Einwürfe erhoben worden sind, so lasse ich einige Bemerkungen über die Theorie derartiger Untersuchungen folgen.

Das Charakteristische an derartigen Experimenten ist, dass man einen kleinen leitenden Körper in Berührung mit der Stelle eines Conductors bringt, wo die Dichte gemessen werden soll, ihn dann entfernt und aus seiner Ladung auf die Flächendichte der Electricität an der betreffenden Stelle des Conductors schliesst.

Ich habe daher zunächst zu zeigen, dass der kleine Körper bei seiner Berührung mit dem Conductor sich mit einer Electricitätsmenge ladet, welche der an der Berührungsstelle vor der Berührung herrschenden Flächendichte der Electricität wirklich proportional ist.

Ich setze voraus, dass alle Dimensionen des Prüfungskörpers, und namentlich die in Richtung der Normale zur Conductorfläche fallende, verhältnismässig klein gegen die Krümmungsradien der Conductorfläche an der Berührungsstelle sind. Erfüllt der kleine Körper diese Bedingung, so kann man von der Variation der electrischen Kraft vom Conductor bis zu seinem am weitesten abgelegenen Punkt abstrahiren, und den kleinen Körper als kleine plane Fläche betrachten.

Die Ladung, welche eine solche kleine Fläche bei der Berührung mit einem Conductor in sich aufnimmt, ist aber proportional der an der Berührungsstelle, in Richtung der Normale wirkenden Kraft, also auch proportional der dort herrschenden Flächendichte.

Es könnten noch Zweifel bestehen, ob der kleine Körper auch seine Ladung bei seiner Entfernung von dem Conductor mit sich zu nehmen im Stande ist, ob er sie nicht dem Conductor durch Funkenentladung zurückgiebt. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass in der Tat keine solche Funken von ihm zum Conductor überspringen können.

Wenn der Prüfungskörper sich mit dem Conductor in Berührung befindet, so ist sein Potential ebenso gross und von demselben Zeichen, wie das des Conductors, also die Dichte in den der Prüfungsstelle nächsten Stellen sehr gering. Wird dann der kleine Körper eine kurze Strecke vom Conductor, den wir uns als positiv geladen vorstellen, entfernt, so ist zwar die an der ihm gegenüberstehenden Stelle des Conductors herrschende Dichte nicht mehr gleich Null, sondern positiv, da aber die Ladung des kleinen Körpers ebenfalls positiv ist, so wird die Flächendichte der Electricität in diesem dem kleinen Körper gegenüberstehenden Punkt kleiner als in den benachbarten Punkten sein. Nun hängt der Uebergang eines Funkens im allgemeinen von der Grösse der electrischen Kraft, also von der der Dichte ab, und da wir uns den Conductor nicht so stark electrisirt denken, dass etwa Entladungen an einzelnen Stellen desselben Platz greifen könnten, so wird auch von ihm kein Funke auf den kleinen Körper von

einer Stelle überzuspringen vermögen, die, wie wir gesehen haben, weniger Electricität als die benachbarten Stellen enthält.

224. *Eine Kugel als Prüfungskörper.* Ich werde jetzt die Ladung des kleinen Körpers unter der Annahme bestimmter Formen für ihn und für den Conductor berechnen. Der Conductor soll eine verhältnismässig grosse Kugel sein, und der kleine Körper von der Conductorfläche aus einer kleinen Kugel ausgeschnitten werden, deren Mittelpunkt auf dem Conductor liegt, die also den Conductor orthogonal schneidet. Wir haben dann ein Problem vor uns, dessen exacte Lösung wir in Art. 166, 168 schon kennen gelernt haben.

Sind also A und B die Centren zweier Kugeln, die sich senkrecht schneiden, α und β ihre Radien, DD' der Durchmesser und C der Mittelpunkt ihres Schnittkreises, endlich V das Potential eines Conductors, der von den beiden Stücken der Kugelflächen begrenzt ist, so haben wir für die Ladung auf dem Teile der Kugel (A)

1′) $$(A) = \tfrac{1}{2} V (AD + BD + AC - CD - BC)$$

oder

1) $$(A) = \tfrac{1}{2} V \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right),$$

und für die Ladung auf dem Teile der Kugel (B)

2′) $$(B) = \tfrac{1}{2} V (AD + BD + BC - CD - AC)$$

oder

2) $$(B) = \tfrac{1}{2} V \left(\alpha + \beta + \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right).$$

Die gesammte Ladung beider Segmente wird

3′) $$(A) + (B) = V (AD + BD - CD)$$

oder

3) $$(A) + (B) = V \left(\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Das Verhältnis der Ladung von (B) zu der von (A) ist also, wenn α relativ gross gegen β ist,

$$\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots\right) : 1.$$

Bezeichnet weiter σ die gleichförmige Flächendichte, mit der die Electricität sich auf (A) ausbreiten würde, wenn (B) entfernt wäre, so ist die Ladung, die die Vollkugel (A) dann besitzen würde, gleich

$$(A) = 4\pi\alpha^2\sigma$$

und wir haben für die Ladung auf (B)

$$2a) \qquad (B) = 3\pi\beta^2\sigma\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots\right).$$

Ist also β sehr klein gegen α, so wird die Ladung von (B)

$$2_1) \qquad (B)_1 = 3\pi\beta^2\sigma,$$

also dreimal so gross, wie die Ladung ihres Aequators, wenn dieser gleichförmig mit Electricität von der Dichte σ belegt wäre.

Wenn die Prüfungskugel voll ist, so wird die mittlere Dichte der Electricität, welche sie nach ihrer Berührung mit der Conductorkugel und Entfernung von derselben behalten hat, wie man aus Art. 175, 7) ersieht, gleich $\pi^2/6$, d. h. das 1,645fache von der im Berührungspunkte auf der Conductorkugel herrschenden Dichte der Electricität.

225. *Ein Scheibchen als Prüfungskörper.* Die geeignetste Form für den Prüfungskörper ist die einer ebenen, kreisförmigen Scheibe. Ich zeige daher auch noch, wie man die Electricitätsmenge, die eine solche Scheibe enthält, nachdem man sie auf einen Conductor gelegt und von ihm wieder entfernt hat, berechnen kann.

Die Lösung wird so durchgeführt, dass ein Potential aufgesucht wird, welches eine äquipotentielle Fläche aufweist, auf der sich eine kreisförmige breitgeschlagene Protuberanz befindet, die in der allgemeinen Form einer einer Ebene aufliegenden Scheibe ähnelt.

Bezeichnet σ die Flächendichte auf einer gleichförmig electrisirten Ebene, die wir zur Ebene der xy machen, so ist das Potential auf einen um z von dieser Ebene entfernten Punkt

$$V = -4\pi\sigma z.$$

Wir electrisiren zwei Scheiben von gleichem Radius a mit gleichen und entgegengesetzten Electricitätsmengen, deren Dichten $-\sigma'$ bezüglich $+\sigma'$ sind, derartig, dass sich die Electricitäten auf ihnen nicht bewegen können, und legen die erste auf die Ebene der xy, so dass ihr Mittelpunkt mit dem Coordinatenursprung zusammenfällt, und die zweite parallel zu ihr in einem sehr kleinen Abstand c.

Das Potential einer solchen Scheibencombination ist, wie wir noch in der Theorie des Magnetismus zu sehen Gelegenheit haben werden, in einem Punkte, dessen zu dem Rande einer der Scheiben führende Vectoren eine Kegelecke ω einhüllen, gleich $\sigma' c\omega$. Daher haben wir für das Gesammt-Potential der Ebene und der beiden Scheiben den Wert

$$1) \qquad V = -4\pi\sigma z + \sigma' c\omega.$$

Die Figur auf der linken Seite der Tafel XX. am Ende des zweiten Bandes giebt eine Vorstellung von den diesem Falle entsprechenden Niveauflächen und Kraftlinien.

Die Kegelecke ω wird durch den Inhalt des von dem Kegelmantel auf einer um die Kegelspitze mit dem Radius 1 gelegten Kugel ausgeschnittenen Flächenstückes gemessen. Zu ihrer Berechnung setzen wir den Abstand des Punktes, in dem V das Potential sein soll, von der z Axe gleich r und haben dann, wenn r sowohl als z klein gegen den Radius a der Scheibchen sind,

$$\omega = 2\pi - 2\pi\frac{z}{a} + \cdots,$$

also

$$1_1) \qquad V = -4\pi\sigma z + \sigma' c\left(2\pi - 2\pi\frac{z}{a} + \cdots\right).$$

Daher ist $V = 0$ für

$$2) \qquad z_0 = \frac{\sigma' c}{2\sigma + \sigma'\dfrac{c}{a}},$$

und hieraus ergiebt sich, dass die äquipotentielle Fläche $V = 0$ in der Nähe der z Axe nahezu flach verläuft.

Für Punkte, die ausserhalb der Scheibenränder, wo also $r > a$ ist, gelegen sind, verschwindet ω nur, wenn z verschwindet, es gehört also die xy Ebene bis auf das von den Kreisscheiben geschützte Stück mit zur äquipotentiellen Fläche $V = 0$; die ganze äquipotentielle Fläche

$$-4\pi\sigma z + \sigma' c\omega = 0$$

sieht also so aus wie eine Ebene, die an einer Stelle eine Protuberanz von der nahezu gleichförmigen Dicke

$$z_0 = \frac{\sigma' c}{2\sigma + \sigma'\dfrac{c}{a}}.$$

besitzt.

Die Breite dieser Protuberanz finden wir, indem wir die Stellen aufsuchen, wo der zuerst behandelte Teil der äquipotentiellen Fläche $V = 0$ die xy Ebene schneidet, das heisst, wo $\partial V/\partial z = 0$ wird.

Wenn r nahezu gleich a ist, so wird das von dem Kegelmantel auf der Einheitskugel ausgeschnittene Flächenstück

$$\omega = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{r-a},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi\sigma + \frac{2\sigma' c}{r-a}$$

$\partial V/\partial z$ ist demnach gleich Null, wenn

$$3) \qquad r_0 = a + \frac{\sigma' c}{2\pi\sigma}$$

oder näherungsweise

$$3_1) \qquad r_0 = a + \frac{z_0}{\pi}$$

wird. Die Protuberanz der Ebene xy hat also einen Durchmesser von der Grösse $2\ (a + z_0/\pi)$.

Das Flächenintegral über die Protuberanz giebt die auf ihr ausgebreitete Electricitätsmenge Q, und lässt sich wie im Falle eines Kreisstromes, Art. 704, auswerten. Man erhält

$$4) \qquad Q = 4\pi a\sigma' c\left(\log\frac{8a}{r_0 - a} - 2\right) + \pi\sigma r_0^2$$

oder näherungsweise

$$4_1) \qquad Q = \pi\sigma r_0^2\left\{8\frac{z_0}{r_0}\left(\log\frac{8\pi r_0}{z_0} - 2\right) + 1\right\},$$

$$4_2) \qquad Q = \pi\sigma r_0^2\left\{8\frac{z_0}{r_0}\log\frac{8\pi r_0}{z_0} + 1\right\}.$$

Wäre die Dicke der Protuberanz gleich Null, gehörte sie also der xy Ebene selbst an, so würde ihre Ladung $\pi\sigma r_0^2$ sein, das erste Glied in Q entspricht demnach der Correction, die man für die Dicke der Protuberanz anzubringen hat.

Denkt man sich die Protuberanz von der Dicke z und dem Radius r von der xy Ebene losgelöst und als Probescheibchen verwendet, so nimmt sie von der auf dem Berührungsteil der xy Ebene und in der Nähe desselben vorhandenen Electricität sehr näherungsweise das

$$1 + 8\frac{z}{r}\log\frac{8\pi r}{z}\text{fache}$$

mit sich.

Electrische Accumulatoren.

226. Ein electrischer *Accumulator* oder *Condensator* besteht aus zwei durch ein isolirendes dielectrisches Medium getrennten leitenden Flächen.

So ist die Leydener Flasche in ihrer jetzigen Gestalt ein Accumulator, der dadurch gebildet wird, dass eine Glasflasche innen und aussen bis zu einer gewissen Entfernung von der Flaschenmündung mit Zinnfolie belegt wird. Früher goss man in die Flasche Wasser hinein und hielt sie bei Experi-

menten in der Hand. Das Wasser war dann der eine, die Hand der andere Conductor.

Allgemein kann man die äussere Fläche irgend eines Conductors als einem Accumulator angehörig betrachten, dessen andere Conductorfläche durch die Erde oder die Wände des Raumes, in dem der Conductor sich befindet, gebildet wird, während die Luft das isolirende Zwischenmedium darstellt.

Die Capacität eines Accumulators ist diejenige Electricitätsmenge, mit der man die innere Conductorfläche laden muss, bis die Differenz ihres Potentials gegen das Potential der andern, äussern, Conductorfläche gleich der Einheit wird. Sie ist, wie schon in Art. 88 auseinandergesetzt ist, electrostatisch gemessen von den Dimensionen einer Linie, so dass die für sie in speciellen Fällen gemachten Zahlenangaben sich auf die in dem betreffenden Lande übliche Längeneinheit beziehen. Die Accumulatoren werden in electrischen Untersuchungen hauptsächlich nach zwei Richtungen hin verwendet.

Einmal sollen sie eine grosse Menge von Electricität in sich aufnehmen und auch zurückhalten, dann aber dienen sie zur Messung von Electricitätsmengen, indem man das Potential bestimmt, zu dem sie durch diese erhoben werden.

Für den ersten Zweck hat sich bis jetzt noch keine Einrichtung so gut bewährt, wie die in der Leydener Flasche getroffene, wenngleich auch in dieser die Electricität sich nicht dauernd aufbewahren lässt. Der grösste Teil des Verlustes an Electricität, den eine Leydener Flasche erleidet, rührt davon her, dass die Electricitäten beider Belegungen längs den, meist feuchten, unbelegten Teilen der Flasche einander entgegen kriechen und sich dann neutralisiren. Man trocknet deshalb die Flasche im Innern möglichst sorgfältig und überzieht die nicht belegten Teile derselben mit einem Firnis. Dadurch wird der Verlust ziemlich stark reducirt. In W. Thomsons Electroskopen ist denn auch der tägliche procentische Verlust an Electricität äusserst gering, und ich glaube, dass selbst dieser Verlust weder der Leitung durch die Luft noch der durch das Glas zugeschrieben werden darf, sondern dass er durch die Leitung längs den Flächen der isolirenden Stäbe und freien Glasteile jener Apparate verursacht wird.

In der Tat hat auch Thomson, als er Schwefelsäure in einen Kolben mit langem Halse einfüllte, mit Electricität lud und dann hermetisch durch Zuschmelzen des Kolbenhalses absperrte, noch nach Jahren die Ladung in ihrer Stärke unverändert gefunden.

Doch isolirt Glas nur bei niederen Temperaturen, in höheren wird es leitend und lässt schon bei weniger als 100° die ganze Electricitätsmenge entschlüpfen.

Will man Accumulatoren von grosser Capacität und verhältnismässig kleinem Umfang construiren, so verwendet man als isolirendes Zwischenmedium Kautschuk, Glimmer oder mit Paraffin getränktes Papier.

227. Bei Accumulatoren, die zur Messung von Electricitätsmengen dienen sollen, kann man feste Dielectrica wegen ihrer als electrische Absorption bezeichneten Eigenschaft nur unter grossen Vorsichtsmassregeln als Zwischenmedien verwenden.

Für solche Accumulatoren ist die Luft das einzig geeignete Dielectricum. Doch bietet auch sie wegen der Leichtigkeit, mit der sich fremde leitende Körper durch sie verbreiten, manche Unzuträglichkeiten. So können zum Beispiel Feuchtigkeits- und Staubteilchen in den engen Raum zwischen den beiden Conductoren, wo nur Luft vorhanden sein sollte, gelangen, wodurch nicht blos die Dicke der trennenden Luftschicht alterirt wird, sondern auch Leitungsbrücken zwischen beiden Conductoren hergestellt werden können, durch die sich ihre Electricitäten ausgleichen.

Die Capacität eines Accumulators wird in absolutem Maasse, das heisst in Einheiten der Länge, entweder durch Rechnung bestimmt, indem man seine Form und die Lage seiner einzelnen Teile gegen einander mathematisch fixirt und dann für ihn das Problem der Verteilung der Electricität löst, oder durch Vergleichung mit der Capacität eines andern Accumulators, für den alle Daten schon vorliegen, gemessen.

Die erste Methode ist meist äusserst schwierig durchzuführen, man benutzt daher am besten die zweite, indem man sich als Standard einen Accumulator verschafft, für den sich das Problem der Verteilung der Electricität exact lösen lässt. Dazu kann man zum Beispiel eine isolirte, in einem sehr ausgedehnten electrischen Felde befindliche, leitende Kugel verwenden, deren Capacität bekanntlich gleich ihrem Radius ist.

In der Tat haben auch Kohlrausch und Weber mit einer solchen Kugel, die in ihrem Laboratorium aufgehängt war, als absolutem Standard, die Capacitäten anderer Conductoren bestimmt.

Inzwischen ist die Capacität einer Kugel von mässiger Grösse so klein im Verhältnis zu der Capacität der gebräuchlichen Accumulatoren, dass eine Kugel sich nicht wohl zu solchen Vergleichungen eignen dürfte.

Eine beträchtliche Vergrösserung erfährt die Capacität einer Kugel, wenn man sie mit einer ihr concentrischen Kugelschale von etwas grösserem Radius umgiebt. Die Capacität der Kugel wird dann die vierte Proportionale zur Dicke der Luftschicht, welche die Kugel von der Schale trennt, und zu den Radien der Kugel und der innern Schalenfläche.

Ein so construirter Accumulator ist beispielsweise von W. Thomson als Standard benutzt worden, doch ist es sehr schwer, die Conductoren vollkommen kugelförmig herzustellen, sie concentrisch anzuordnen und ihre Radien zu bestimmen.

Man wird daher am besten zur absoluten Messung von Capacitäten einen Accumulator verwenden, dessen Conductoren durch parallel sich gegenüberstehende Ebenen gebildet werden.

Die Planität der Flächen kann ziemlich leicht untersucht werden und ihr Abstand lässt sich mit genügender Genauigkeit durch eine Micrometerschraube messen. Ausserdem kann dieser Abstand beliebig verändert werden. Jede Messung lässt sich also mehrmals unter verschiedenen Umständen ausführen.

Eine Schwierigkeit bleibt aber auch bei einem so construirten Accumulator bestehen, die nämlich, dass man die ebenen Conductoren notwendig begrenzen muss, während man die Verteilung der Electricität in der Nähe der Kanten nicht streng zu berechnen vermag. Nimmt man zu Conductoren Kreisscheiben, deren Radien gross gegen ihren Abstand von einander sind, so kann man zwar nach der in Art. 202 auseinandergesetzten Helmholtzschen Methode, indem man die Kanten der Scheiben als gerade Linien betrachtet, die Verteilung der Electricität auf ihnen berechnen. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass bei jenen Rechnungen vorausgesetzt ist, dass ausser den beiden einander zugewandten ebenen Flächen weiter keine electrischen Körper mehr vorhanden sind, während in unserm Falle, wie das bei begrenzten Instrumenten nicht zu umgehen ist, sicher ein Teil der Electricität auch auf den von einander abgewandten Seiten der Scheiben sich verteilen wird.*)

228. Ich ziehe deshalb das folgende, als Accumulator mit Schutzring zu bezeichnende und von W. Thomson angegebene Arrangement vor, welches die Electricitätsmenge auf einer isolirten Scheibe durch ihr Potentialniveau exact zu bestimmen gestaltet.

Accumulator mit Schutzring. Bb ist ein cylindrisches Gefäss aus leitendem Material, dessen obere Fläche möglichst eben geschliffen ist und aus zwei Teilen, einer Scheibe A und einem diese umgebenden breiten Ring BB besteht. Scheibe und Ring hängen nirgend zusammen und das Intervall zwischen ihnen ist gerade so breit, dass kein Funke unter gewöhnlichen Verhältnissen es zu überspringen vermag. Die Scheibe wird von zwei isolirenden Füssen GG getragen, und ihre obere Ebene muss möglichst genau in die Ebene des Ringes fallen. Weiter ist C eine Metallscheibe, deren untere Fläche eben ge-

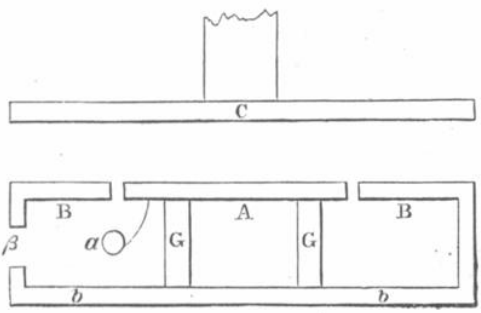


Fig. 21.

*) Die allgemeine Theorie des Condensators (auch die des im Folgenden beschriebenen Thomsonschen) nebst den Literaturnachweisen findet der Leser in Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen* pag. 101 ff.

schliffen ist und parallel BB verläuft. Sie ist beträchtlich grösser gehalten als die Scheibe A und kann durch eine Micrometerschraube, die in der Figur nicht weiter angegeben ist, gegen BB um sicher zu messende Intervalle, verstellt werden.

Die Messungen werden mit diesem Accumulator so ausgeführt.

Hat die Scheibe C das Potential Null, während die Scheibe A und das ganze Gefäss Bb das Potential V besitzen, so kann auf der Rückseite von A keine Electricität vorhanden sein, weil A einem nahezu überall geschlossenen leitenden Gefässe angehört und mit diesem Gefäss sich auf demselben Potential befindet. Ferner wird auch auf der Kante der Scheibe A, weil die ihr gegenüberstehende Kante dasselbe Potential hat, nur wenig Electricität existiren. Auf der Fläche der Scheibe A wird die Electricität nahezu gleichförmig verteilt sein, und deshalb wird ihre Electricitätsmenge sehr genähert durch das Product aus ihrem Flächeninhalt in die nach Art. 124 für eine Ebene zu bestimmende Flächendichte sein.

Nach den Untersuchungen in Art. 201 ist tatsächlich die Ladung der Scheibe

$$Q = V\left\{\frac{R^2 + R'^2}{8A} + \frac{R^2 - R'^2}{8A}\,\frac{\alpha}{A+\alpha}\right\},$$

wo R den Radius der Scheibe, R' den der Oeffnung im Schutzring, A den Abstand zwischen A und C und α eine Grösse bezeichnet, die an der angeführten Stelle definirt ist und den Betrag $(R' - R)(\log 2)/\pi$ nicht überschreitet.

Wenn die Grösse $R' - R$, die Breite der Furche, welche die Scheibe von dem Schutzring trennt, klein gegen den Abstand der Scheibe A von der Scheibe C ist, so wird diese Ladung der Scheibe A einfacher

$$Q = V\,\frac{R^2 + R'^2}{8A}.$$

Verbindet man nunmehr das Gefäss Bb mit der Erde, so sinkt sein Potential auf Null und da das Potential von A nicht mehr gleich dem des Gefässes ist, so wird die Electricität auf A sich in anderer, nicht mehr gleichförmiger Weise anordnen. Die auf A befindliche Electricitätsmenge wird dadurch aber nicht alterirt; entladet man also A, so bekommt man eine Electricitätsmenge, die sich durch die ursprüngliche, gemessene Potentialdifferenz zwischen A und C und durch die Constanten R, R' und A des Apparates berechnen lässt.

Vergleichung der Capacitäten von Accumulatoren.

229. Die Form des Accumulators, die aus der Gestalt und den Dimensionen seiner Teile die sicherste Bestimmung seiner Capacität gestattet, eignet sich im allgemeinen nicht sehr zu experimentellen Untersuchungen. Für praktische Arbeiten ist es wünschenswert, möglichst einfach construirte Instrumente

zu verwenden, also solche, die nicht mehr als die nötigen zwei Conductoren besitzen, deren einer den andern so vollständig als möglich umgiebt. Der eben beschriebene Accumulator mit Schutzring hat aber drei von einander unabhängige Conductoren, die in bestimmter Ordnung zu laden und zu entladen sind. Man wird ihn daher nur als Standard zur Herstellung secundärer Vergleichsapparate von einfacherer Gestalt und Handhabung benutzen. Ich werde deshalb noch darlegen, wie man Accumulatoren mit einander vergleicht, und als typisches Beispiel zeigen, in welcher Weise zwei Accumulatoren mit Schutzring auf die Gleichheit ihrer Capacitäten geprüft werden können.

Es sei also A die Scheibe, B der Schutzring zusammen mit den übrigen Teilen des Gefässes und C die grosse verschiebbare Scheibe eines Accumulators, während A', B', C' die entsprechenden Stücke in einem zweiten Accumulator bezeichnen.

Ist einer der beiden Accumulatoren von einfacherer Construction, so hat man B oder B' zu unterdrücken und unter A die innere, unter C die äussere A umgebende Leiterfläche zu verstehen.

Bei einer Vergleichung der beiden Accumulatoren erhält man die Schutzringe derselben in steter Verbindung mit den gegenseitigen grossen Scheiben, man zieht also Drähte von B nach C' und von B' nach C. Alsdann führt man die folgenden Operationen aus.

1) Man verbindet A mit B, mit C' und mit einer Electrode J einer Leydener Flasche, deren andere Electrode zur Erde abgeleitet ist, ferner A' mit B', mit C und mit der Erde.

2) Man trennt A, B und C' von der Electrode J der Leydener Flasche.

3) Man hebt die Verbindung von A mit B und C' und die von A' mit B' und C auf.

4) Man verbindet B und C' mit B' und C und mit der Erde.

5) Man verbindet A mit A'.

6) Man verbindet A und A' mit einem Electroskop E.

Die folgende symbolische Zusammenstellung gewährt einen Ueberblick über den Zustand, in dem sich die einzelnen Teile der beiden Apparate bei jeder Operation befinden. Dabei soll ein Gleichheitszeichen zwischen zwei Buchstaben bezeichnen, dass die durch sie gekennzeichneten Teile mit einander verbunden sind, während ein senkrechter Strich angiebt, dass die Teile von einander isolirt sind.

Darnach haben wir

$$
\begin{array}{lll}
1) & 0 = C = B' = A' & | \quad A = B = C' = J. \\
2) & 0 = C = B' = A' & | \quad A = B = C' \mid J. \\
3) & 0 = C = B' \mid A' & | \quad A \mid B = C'. \\
4) & 0 = C = B' \mid A' & | \quad A \mid B = C' = 0. \\
5) & 0 = C = B' \mid A' & = \quad A \mid B = C' = 0. \\
6) & 0 = C = B' \mid A' = E = A & \mid B = C' = 0.
\end{array}
$$

unter 0 die Erde verstanden.

Bei der Operation 1) sind beide Accumulatoren entgegengesetzt geladen, A positiv und A' negativ. Dabei sind die Electricitäten auf den obern Flächen dieser Scheiben nahezu gleichförmig verteilt.

Die Operation 2) bewirkt nur die Entfernung der ladenden Flasche, während die unter 3) die Ladungen der Scheiben A, A' isolirt.

Bei der Operation 4) werden die Schutzringe mit den zugehörigen grossen Scheiben C, C' verbunden, so dass die Ladungen der Scheiben A, A', ohne ihre Grössen zu ändern, sich auf diesen Scheiben ungleichförmig verteilen.

Bei der Operation 5) ist A mit A' verbunden. Sind die Capacitäten beider Accumulatoren einander gleich, so bewirkt diese Operation eine vollständige Vernichtung der freien Electricitäten auf den Scheiben A und A'. Ob eine solche vollständige Vernichtung wirklich stattgefunden hat, also ob die Accumulatoren wirklich gleiche Capacität besitzen, lehrt dann die Operation unter 6), wo die Scheiben mit einem Electroskop verbunden werden, welches, je nachdem A oder A' die grössere Capacität besitzt, eine positive oder negative Electricitätsmenge zur Anzeige bringt.

So weitläufig auch diese ganze Prüfungsmethode erscheint, so können doch alle Operationen mit Hilfe eines geeigneten Stromschlüssels in wenigen Augenblicken ausgeführt werden.

Ergiebt die Vergleichung der beiden Accumulatoren eine Verschiedenheit ihrer Capacitäten, so kann man sie durch die Verschiebung ihrer grossen Scheiben so lange justiren, bis sie dieselbe Capacität besitzen. Man kann auch in derselben Weise die Capacität eines Accumulators gleich der Capacität einer ganzen Reihe mit einander verbundener Accumulatoren machen. Ueberhaupt vermag man so mit Hilfe eines Standard-Accumulators die Capacitäten irgendwie gestalteter, aber für experimentelle Untersuchungen geeigneterer Accumulatoren in absolutem Maass, das heisst in Längeneinheiten, zu bestimmen, so dass sie nunmehr ihrerseits zu weiteren Vergleichungen dienen können.

In dieser Weise kann man sich für Accumulatoren ebenso Normale herstellen, wie für Gewichte, Längen und die andern in der Metronomie gebräuchlichen Maasse.

Die oben auseinandergesetzte Vergleichsmethode dürfte auch sehr geeignet sein zur Bestimmung der specifischen inductiven Capacität von Dielectricis. Bringt man nämlich eine Scheibe eines Dielectricums, dessen specifische inductive Capacität K verschieden von der der Luft ist, welche sich zwischen den Scheiben A und C eines Accumulators befindet, und sorgt dafür, dass sie die Scheibe A überall beträchtlich überragt, so ändert sich die Capacität des Accumulators, wie wenn die Scheibe C der Scheibe A genähert worden wäre.

Verschiebt man die Scheibe C so lange bis die Capacität des Accumulators nach Zwischenbringung der dielectrischen Platte gleich der ohne diese Platte ist, bezeichnet mit x den Abstand zwischen C und A, wenn die

Platte eingeführt ist, und mit x' den, wenn sie fehlt, so hat man die specifische inductive Capacität

$$K = \frac{a}{a + x' - x},$$

wo a die Dicke der dielectrischen Platte angiebt.

W. Thomson hat noch einen andern Accumulator aus den drei in Art. 127 beschriebenen Cylindern construirt, dessen Capacität messbar verändert werden kann.

Eine Verwendung hat dieser Accumulator in den Untersuchungen von Gibson und Barclay (*Proc. R. S.* 1871, Febr. 2 und *Phil. Trans.* 1871 p. 573) gefunden, aus denen die genannten Physiker geschlossen haben, dass die specifische inductive Capacität des Paraffins 1.975 mal so gross als die der Luft ist.