Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus

in zwei Bänden

Maxwell, James Clerk

1883

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6770

Einleitung.

Dimensionen der Grössen.

Messung der Grössen.

1. Jeder Ausdruck für eine Grösse besteht aus zwei Componenten oder Factoren. Der eine bezeichnet eine vorausbestimmte, ein für alle Mal als Vergleichseinheit dienende Quantität der zu messenden Grösse, während der andere angiebt, wie oft die Vergleichseinheit genommen werden muss, bis man den geforderten Betrag der betreffenden Grösse erhält. Man bezeichnet den ersten Factor kurzweg als *Einheit* der Grösse, den zweiten als ihren *Numerischen Betrag*.

Ist mithin jede Grösse mit einer aus Grössen ihrer eigenen Art entnommenen Einheit messbar, so kann man doch in den Zweigen der Wissenschaft, die ihre Grundlagen in der Mechanik finden, alle Grössen durch drei fundamentale oder absolute Einheiten, durch die der Länge, der Zeit und der Masse, bestimmen. Beispielsweise sind die Einheiten von Flächen und Körpern durch Quadrate und Würfel definirt, deren Seiten der Längeneinheit gleich sind.

In der Praxis benutzt man häufig verschiedene Einheiten zur Messung derselben Grösse. So dient in England zur Bestimmung eines Rauminhaltes neben dem Cubikfuss auch noch das Gallon (das Volumen von 10 Pfund Wasser), ein Raummaass, dass sich wol in manchen Fällen empfehlen mag, das aber theoretisch zu verwerfen ist, weil es in keiner rationalen Beziehung zu dem Längenmaass steht.

2. Da es sich für uns um ein mathematisch streng definirtes Maasssystem handelt, so werden wir jene drei fundamentalen obengenannten Einheiten der Länge, Zeit und der Masse zu Grunde zu legen und aus ihnen alle anderen Einheiten in der möglichst einfachen Weise abzuleiten haben. Die Ausdrücke, zu denen wir so gelangen, müssen dann so beschaffen sein, dass sie unabhängig von den in den verschiedenen Ländern gebräuchlichen Einheiten für die fundamentalen Maasse stets zu einem richtigen Resultate führen.

Es ist aber an sich von der grössten Wichtigkeit, wenn man schon andere Einheitssysteme in wissenschaftlichen Untersuchungen verwenden will, nur solche zu wählen, welche genügend definirt und in ihrem Verhältnis zu den absoluten Einheiten gehörig fixirt sind, so dass man mit Sicherheit von einem System zu dem anderen überzugehen vermag.

Am leichtesten lassen sich solche Uebergänge bewerkstelligen, wenn man für jede Grösse die Dimensionen angiebt, in denen die drei fundamentalen Einheiten in ihr vertreten sind.

Eine Grösse ist aber nach einer anderen Grösse von der $n$ten Dimension, wenn diese in ihr in der $n$ten Potenz enthalten ist. So ist die wissenschaftliche Einheit des Volumens der Würfel, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist; variirt diese, so ändert sich der Würfel, wie die dritte Potenz, daher ist die Einheit des Volumens von der dritten Dimension in Bezug auf die Längeneinheit.

Die Kenntnis der Dimensionen der Grössen giebt ein bequemes Mittel die Zulässigkeit von Formeln, die durch längere Rechnung gewonnen sind, zu prüfen. Da nämlich das numerische Endresultat mit Aenderung der Einheiten für die fundamentalen Maasse nicht variiren darf, so müssen alle Glieder einer Gleichung nach derselben Einheit auch von derselben Dimension sein, wenn nicht die Gleichung in verschiedenen Ländern verschiedene Ergebnisse liefern soll.*)

Die drei fundamentalen Einheiten.

3. *Länge.* Als Einheit für die Länge wird bei wissenschaftlichen Untersuchungen in England der Fuss verwendet, der als der dritte Teil eines in den *Exchequer Chambers* aufbewahrten Prototyps für den Yard definirt ist.

In Frankreich, Deutschland, Italien und den anderen Ländern, welche das metrische System adoptirt haben, gilt als solche das *Meter*. Theoretisch sollte dasselbe der zehnmillionste Teil eines vom Pol zum Aequator der Erde führenden Quadranten sein. Tatsächlich ist es aber durch das von Borda angefertigte *mètre des archives*, das mit dem vorher von Delambre bestimmten Urmaasse bei der Temperatur des schmelzenden Eises gleiche Länge haben sollte, definirt. Die Länge des Meters ist auch nicht mit den neueren sichereren Bestimmungen der Dimensionen der Erde in Einklang gebracht worden, man drückt vielmehr umgekehrt die Länge eines Quadranten durch das einmal fixirte Meter aus.

Die Astronomen benutzen häufig die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit.

---

*) Die Theorie der Dimensionen der Grössen ist von Fourier begründet worden. *Théorie de la chaleur § 160.*

Bei dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft wäre die allgemeinste Längeneinheit, die wir annehmen könnten, die Wellenlänge im Vacuum einer bestimmten Lichtart, wie sie von einem weitverbreiteten Körper, etwa Natrium, das gut definirte Linien in seinem Spectrum hat, ausgesandt wird. Eine solche Einheit würde unabhängig von Aenderungen in den Dimensionen der Erde sein, und sollte deshalb von Denen angenommen werden, welche ihren Schriften eine grössere Lebensdauer zusprechen möchten als unserm Planeten.

Im Folgenden soll die Einheit der Länge durch $[L]$ bezeichnet werden. Ist dann l der numerische Betrag einer Länge, die in Einheiten $[L]$ gemessen werden soll, so giebt $l\,[L]$ den explicitern Ausdruck für ihre wirkliche Länge.

4. *Zeit.* Die Einheit der Zeit wird in allen civilisirten Ländern von der Rotationsdauer der Erde um ihre Achse hergeleitet. Der Sterntag oder die wahre Periode für die Umdrehung der Erde kann durch gewöhnliche astronomische Beobachtungen mit grosser Präcision bestimmt werden, und aus diesem lässt sich dann mit Hilfe der Jahreslänge leicht der mittlere Sonnentag berechnen.

Demgemäss wird in allen physikalischen Untersuchungen eine *Secunde* des mittleren Sonnentages als Zeiteinheit angewendet.

In der Astronomie gilt manchmal das Jahr als Zeiteinheit.

Auch hier lässt sich eine allgemeinere Einheit in der Oscillationsdauer der Lichtart angeben, deren Wellenlänge man als Längeneinheit benutzt hat.

Die Zeiteinheit als solche soll durch $[T]$ bezeichnet werden, während t den numerischen Betrag einer Zeitdauer festzusetzen hat.

5. *Masse.* Die Einheit der Masse ist in England das *avoirdupoids-pound*, welches in den *Exchequer Chambers* aufbewahrt wird. Das *Grain*, welches manchmal ebenfalls als Einheit benutzt wird, bildet den 7000sten Teil dieses Pfundes.

Im metrischen System ist das *Gramm* die Masseneinheit. Theoretisch sollte es gleich dem Gewicht eines Cubikcentimeters destillirten Wassers bei der Temperatur seiner grössten Dichte und unter dem Drucke von 760 mm sein, tatsächlich ist es der tausendste Teil eines in Paris aufbewahrten Urkilogramms.

Da die Genauigkeit, mit der Massen durch Wägungen verglichen werden können, verhältnismässig weit grösser ist, als die bei der Vergleichung von Längen erreichbare Präcision, so sollte man alle Massen, wo es nur angeht, direct mit dem Urgewicht vergleichen, statt ihre Beträge aus Experimenten an Wasser abzuleiten.

In der beschreibenden Astronomie setzt man die Einheit gleich der Masse der Sonne oder der Erde, in der theoretischen dagegen leitet man sie aus den Einheiten der Zeit und der Länge unter Zuziehung des allgemeinen Gravitationsgesetzes ab. Die astronomische Einheit für die Masse ist dann diejenige Masse, welche einer anderen Masse durch ihre Anziehung in der Einheit der Entfernung eine Einheit der Beschleunigung erteilt.

Wir können nunmehr bei der Bildung unseres allgemeinen Systems von Einheiten die Einheit der Masse entweder in der oben angegebenen Weise aus den Einheiten für Zeit und Länge ableiten, wie das bis zu einer gewissen rohen Annäherung bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft wirklich möglich ist, oder aber, wenn wir hoffen dürfen bald die Masse eines einzelnen Molekels einer Substanz bestimmen zu können*), so lange warten, bis wir diese als Masseneinheit zu benutzen vermögen.

Die Einheit der Masse als eine der drei fundamentalen Einheiten bezeichnen wir durch $[M]$. Wenn, wie im metrischen System, die Einheit der Masse durch das Gewicht eines bestimmten Volumens einer bestimmten Substanz, Wasser, definirt wird, so ändert sich die Masseneinheit wie die Volumeinheit oder wie $[L^3]$.

In der Astronomie, in der die Masseneinheit im Verhältnis zu der von ihr ausgeübten Attraction definirt wird, sind die Dimensionen von $[M]$ gegeben durch $[L^3 T^{-2}]$.

Wirkt nämlich während einer sehr kurzen Zeit die Attraction einer Masse m auf einen in der Entfernung r ursprünglich in Ruhe befindlichen Körper nach dem Newton'schen Anziehungsgesetz, so ist der Weg s, den der Körper in dieser Zeit t zurücklegt, nach der Galilei'schen Regel

$$s = \frac{1}{2} ft^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{r^2} t^2$$

mithin $m = 2 r^2 s / t^2$. r und s sind beide Längen, t ist eine Zeit, die Dimensionen von m müssen daher, wofern jene Gleichung einen Sinn haben soll, durch $[L^3 T^{-2}]$ gegeben sein. Ganz dasselbe lässt sich aus jeder Gleichung der Astronomie, in der nicht alle Glieder die Masse m enthalten, nachweisen.**)

Abgeleitete Einheiten.

6. Ein Körper besitzt die Einheit der *Geschwindigkeit*, wenn er in der Zeiteinheit sich um eine Längeneinheit fortbewegt. Die Dimensionen der Geschwindigkeitseinheit sind mithin $[L T^{-1}]$.

---

*) J. Loschmidt, *Zur Grösse der Luftmolekel.* Berichte der Wiener Academie 1865 Oct. 12; G. J. Stoney, *The Internal Motions of Gases.* Phil. Mag. 1868 Aug.; W. Thomson, *The Size of Atoms.* Nature 1870 März 31.

**) Benutzt man Centimeter und Sekunde als Einheiten für Länge und Zeit, so ergiebt sich die astronomische Masseneinheit aus den Dimensionen der Erde, ihrer Dichte und der Intensität der Schwere auf ihrer Oberfläche zu $1{,}537 \times 10^7$ Gramm. Dabei ist für die Dichte der Erde die von Bailey aus allen seinen Bestimmungen deducirte Zahl 5,6604 angenommen worden.

Uebrigens würde die Einheit der Geschwindigkeit, wenn wir unsere Einheiten für Länge und Zeit von den Lichtvibrationen ableiten, gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes sein.

Die Einheit der *Beschleunigung* ist diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt. Ihre Dimensionen sind also $[LT^{-2}]$.

Die Einheit der *Dichte* ist die Dichte einer Substanz, von der in der Volumeneinheit die Masseneinheit enthalten ist. Die Dimensionen sind $[ML^{-3}]$.

Die Einheit des *Moments* giebt das Moment einer Masseneinheit, die sich mit der Geschwindigkeitseinheit fortbewegt. Die Dimensionen sind $[MLT^{-1}]$.

Die Einheit der *Kraft* erteilt einem Körper in der Zeiteinheit die Momenteinheit und hat die Dimensionen $[MLT^{-2}]$.

Dies ist die absolute Krafteinheit, wie sie durch jede Gleichung der Dynamik definirt ist. In manchen Lehrbüchern wird aber eine andere Einheit, nämlich das Gewicht der gerade gebräuchlichen Masseneinheit benutzt. Um dann den Gleichungen der Dynamik gerecht zu werden, wird diese Einheit wieder verlassen und eine künstliche dadurch eingeführt, dass man jene Einheit noch durch die Schwerkraft an dem betreffenden Orte dividirt. Dadurch wird aber sowohl die Masseneinheit als die Krafteinheit in Abhängigkeit von der Schwerkraft gebracht, und da diese von Ort zu Ort wechselt, so sind auch jene Einheiten immer an den Ort gebunden, an welchem sie bestimmt sind. Beziehungen, in denen sie vertreten sind, leiden also solange an Unvollständigkeit als nicht angegeben ist, an welchem Orte sie als richtig befunden worden sind.

Doch ist diese Art die Krafteinheit zu fixiren seit der Zeit, da man durch Gauss zunächst die magnetischen Kräfte in allen Ländern, in denen die Schwerkraft selbst verschieden ist, nach einer und derselben allgemeinen Methode zu messen gelernt hat, so ziemlich geschwunden. Man bestimmt jetzt in der Tat alle Kräfte nach jener streng dynamischen Definition, welche an allen Orten dieselben numerischen Resultate finden lässt.

Die Einheit der *Arbeit* ist gleich dem Producte aus der Krafteinheit in die in Richtung der Wirkung der Kraft genommenen Längeneinheit. Die Dimensionen sind $[ML^2T^{-2}]$.

Da die *Energie* eines Systems von Körpern gleich der in demselben aufgehäuften potentiellen Arbeit ist, so wird sie durch die Arbeitsmenge gemessen, die das System bis zur vollständigen Erschöpfung seines Energieinhalts leisten kann.

Von andern Grössen sollen die Definitionen und Dimensionen bei passender Gelegenheit angegeben werden.

Will man die Werte von physikalischen Grössen, die in einer Einheit ausgedrückt sind, auf eine andere Einheit beziehen, so darf man sich nur erinnern, dass jeder Ausdruck für eine Grösse aus zwei Componenten besteht, aus der Einheit und aus einem Zahlenfactor, welcher angiebt, wie oft diese Einheit genommen werden soll. Der Zahlenfactor ändert sich daher umgekehrt wie die Einheit, er muss also den verschiedenen Potenzen der Fundamentaleinheiten, die in der abgeleiteten Einheit vertreten sind, umgekehrt proportional sein.

Mathematische Definitionen und Lehrsätze.

Physikalischer Begriff der Continuität und Discontinuität.

7. Eine Grösse ändert sich continuirlich, wenn sie bei dem Uebergange von einem Werte zu einem andern alle Zwischenwerte nacheinander annimmt.

Man kann sich den Begriff der Continuität unter Zuhilfenahme der Existenz eines Körperpartikels in Zeit und Raum klar machen. In der Tat kann ein solches Partikel nicht von einem Orte zu einem andern gelangen, ohne einen ununterbrochenen Weg im Raume zu beschreiben, und die Coordinaten seiner aufeinanderfolgenden Positionen müssen continuirliche Functionen der Zeit sein.

So drückt denn auch die sogenannte Continuitätsgleichung der Hydrodynamik nichts anderes aus, als dass Materie in keinem Volumenelement erscheinen und aus keinem verschwinden kann, ohne durch die Oberfläche desselben gegangen zu sein.

Eine Grösse ist eine continuirliche Function ihrer Variabeln, wenn sie bei continuirlicher Aenderung dieser Variabeln selbst continuirlich variirt.

Ist also u eine Function von x, welche während x von x_0 bis x_1 continuirlich abändert ohne Unterbrechung von u_0 zu u_1 übergeht, dagegen bei einer Aenderung des x von x_1 bis x_2 von u_1' bis u_2 gelangt, wo u_1' von u_1 verschieden ist, so hat u an der Stelle $x = x_1$ eine Discontinuität, weil es hier plötzlich vom Werte u_1 zu dem u_1' übergeht, ohne dass x selbst eine Aenderung erleidet.

Betrachtet man den Betrag des Differentialquotienten von u nach x für $x = x_1$ als den Grenzwert des Bruches $(u_2 - u_0)/(x_2 - x_0)$, wenn x_2 sowohl als x_0 ohne Ende dem x_1 genähert werden, dann ist, wenn x_2 und x_0 den Wert x_1 unendlich nahe einschliessen, der Wert des Zählers $u_1' - u_1$, und der des Nenners gleich Null. Ist u eine physikalisch continuirliche Grösse, so kann die Discontinuität nur in Bezug auf die besondere Variabele x stattfinden, und die Grösse hat dann bei $x = x_1$ einen unendlich grossen Differentialquotienten. Ihre Differentiation ist aber überhaupt sinnlos, wenn sie auch physikalisch nicht continuirlich ist.

Man kann sich in physikalischen Fragen zunächst von der Berücksichtigung der Discontinuität befreien, ohne deshalb die Bedingungen eines vorliegenden Falles ändern zu müssen. Man nimmt erst x_0 nur sehr wenig kleiner und x_2 nur sehr wenig grösser als x_1, so dass u_0 sehr nahe gleich u_1 und u_2 sehr nahe gleich u_1' wird, dann setzt man voraus, dass u in dem Bereiche $x_0 - x_2$ zwar beliebig, aber continuirlich von u_0 zu u_2 übergeht und untersucht, zu welchem Resultat man gelangt, wenn man das Unstetigkeitsgebiet immer enger macht bis x_0 und x_2 mit x_1 zusammenfallen. Findet sich das Resultat unabhängig von dem Wege, auf dem man die Function u von dem Werte u_0 zu dem u_2 übergeführt hat, so darf man schliessen, dass es auch noch richtig ist, wenn u discontinuirlich ist.

8. Wenn wir in einer Function F von mehreren Variabeln $x, y, z, \ldots$ zunächst x allein als Veränderliche betrachten, $y, z \ldots$ aber als Constanten ansehen, so kann F für gewisse Werte von x discontinuirlich werden. Indem wir uns diese Werte von x mit denen der andern Variabeln durch eine Gleichung

$$\Phi = \Phi\,(x, y, z, \ldots) = 0$$

verbunden denken, wird also die Function F dann unstetig werden, wenn $\Phi = 0$ ist. Ihre Werte F_2, F_1 für positive bezüglich negative Beträge von Φ brauchen in keiner Weise mit einander zusammenzuhängen. Man kann diese Art der Discontinuität leicht durch mathematische Symbole fixiren, indem man eine Function herstellt, die für positive Φ nahe gleich F_2 und für negative nahe gleich F_1 ist. Dazu kann z. B. die folgende dienen

$$F = \frac{F_1 + e^{n\Phi} F_2}{1 + e^{n\Phi}},$$

in der man sich die Variabele x durch Φ, y, z ersetzt zu denken hat. Solange n endlich bleibt, mag es auch noch so gross genommen werden, ist F stetig, sowie aber n positiv unendlich ist, hat F für positive Φ den Wert F_2, für negative den Wert F_1.

Discontinuität der Derivirten einer continuirlichen Function.

Es mögen die Werte der Variabeln $x, y, z, \ldots$, für welche in den ersten Derivirten einer Function F derselben Discontinuitäten auftreten sollen, mit einander durch eine Gleichung

$$\Phi\,(x, y, z, \ldots) = 0$$

verbunden sein. Drückt man die Werte der Function F für positive bezüglich negative Werte von Φ, also nach unserer frühern Bezeichnung F_2 und F_1, durch Φ und $n-1$ andere Variabeln, etwa $y, z, \ldots$ aus, so muss, da F continuirlich sein sollte, $F_2 = F_1$ sein, wenn Φ verschwindet. Daraus aber ergiebt sich, dass für $\Phi = 0$ wohl die Derivirten nach Φ, nämlich $\partial F_2/\partial\Phi$ und $\partial F_1/\partial\Phi$ von einander verschieden sein können, nicht aber die nach einer andern Variabeln, wie $\partial F_2/\partial y$ und $\partial F_1/\partial y$. Es kann also nur die Derivirte nach Φ unstetig werden, während die Derivirten nach allen andern Variabeln stetig bleiben müssen.

Periodische und vielfache Functionen.

9. Hat eine Function u von x für alle Werte ihrer Variabeln, die sich um eine und dieselbe Grösse a von einander unterscheiden, also für x, $x+a$, $x+2a, \ldots x+pa \ldots$, denselben numerischen Betrag, so heisst sie periodisch in Bezug auf diese Variabele x und hat a zur Periode. Daraus ersieht man, dass umgekehrt x für einen bestimmten Wert von u unendlich viele um Vielfache von a differirende Werte haben muss; x wird deshalb eine vielfache Function von u genannt und hat a zur cyclischen Zahl. Der Differentialquotient dx/du hat nur eine begrenzte Anzahl von Werten für ein und dasselbe u.

Ueber die Beziehung von physikalischen Grössen zu den Richtungen im Raume.

10. Es war einer der grössten Fortschritte in der Mathematik als Des Cartes durch die Einführung der Coordinaten die analytische Geometrie begründete und so an Stelle der gewöhnlichen geometrischen Methoden rein rechnerische Operationen setzte. Er machte die Lage eines Punktes im Raume von der Länge dreier Geraden abhängig, welche in bestimmte Richtungen verliefen, und liess jede Linie zwischen zwei Punkten als die Resultante dreier Strecken erscheinen.

Für die Physik hat sich die Des Cartes'sche analytische Methode, so namentlich zur Unterscheidung der einzelnen physikalischen Grössen von einander, von einer nicht hoch genug zu schätzenden Bedeutung erwiesen. Für manche Untersuchungen, die sich ziemlich scharf von den eigentlichen Rechnungen trennen, ist es aber von Vorteil, sich von den Cartesischen Coordinaten frei zu machen, also direct einen Punkt selbst anstatt seiner drei Coordinaten oder eine Kraft und ihre Richtung statt ihrer drei Componenten in Betracht zu ziehen. In der Tat ist auch diese letztere Art geometrische und physikalische Grössen so zu sagen in ihrer Totalität aufzufassen das Ursprünglichere und Natürlichere. Doch hat sie ihre eigentliche Ausbildung erst durch Hamiltons Erfindung des Quaternionen-Calculs, die die zweite Etappe in der Erforschung räumlicher Beziehungen bezeichnet, erhalten.

Da aber die Des Cartes'sche Methode einerseits den der Wissenschaft beflissenen weit geläufiger ist als die Hamiltonsche und andererseits bei Rechnungen weitaus die grössten Vorteile bietet, so sollen in der Folge alle Resultate nach ihren Vorschriften gegeben werden. Ich hege jedoch die Ueberzeugung, dass die Einführung der Begriffe und Operationen der Quaternionenrechnung auf vielen Gebieten unserer Aufgabe für uns von bedeutendem Nutzen sein wird. Es gilt das namentlich für die Electrodynamik, wo wir mit einer grossen Anzahl von physikalischen Grössen zu tun haben, deren Beziehungen zu einander sich nach keiner anderen Methode so kurz und so klar auseinander setzen lassen, als nach der Hamiltonschen. Ich lasse daher zunächst einiges aus den Grundlagen des Quaternionen-Calculs folgen.

11. Charakteristisch und von der grössten Bedeutung für die Hamiltonsche Methode ist die Einteilung aller Grössen in Zahlen- und Richtungsgrössen, in Scalaren und Vectoren.

Ein *Scalar* ist vollständig durch eine einzige numerische Angabe definirt, und sein Wert hängt in keiner Weise von den Richtungen etwaiger Coordinatenaxen ab.

Ein *Vector* dagegen bedarf als Richtungsgrösse zu seiner völligen Festsetzung dreier numerischer Angaben, die man zu den Richtungen der Coordinatenachsen in Beziehung setzen mag.

Scalaren haben also nichts mit Richtungen zu schaffen.

Der Inhalt einer geometrischen Figur, die Masse und Energie eines Körpers, der hydrostatische Druck in einem Punkte einer Flüssigkeit, das Potential an einer Stelle im Raume sind Beispiele für Scalaren.

Vectoren haben sowohl Richtung als Grösse und wechseln ihr Zeichen, so oft ihre Richtung umgekehrt wird. Die Lagenänderung eines Punktes gemessen durch eine gerade Linie von der Anfangs- bis zur Endlage kann als Typus eines Vectors betrachtet werden, da ihr der Name Vector entlehnt ist. Die Geschwindigkeit eines Körpers, das Moment desselben, die dabei wirkende Kraft, der electrische Strom, die Magnetisirung eines Eisenstückchens geben Beispiele für Vectoren ab.

Andere physikalische Grössen werden zwar auch auf Richtungen im Raume bezogen, sind aber doch keine Vectoren.

Dahin gehören Druck und Zug in festen Körpern und manche Eigenschaften der Körper, die in der Theorie der Elasticität und Doppelbrechung behandelt werden.

Grössen dieser Art verlangen zu ihrer gehörigen Festsetzung neun Bestimmungen. In der Sprache der Quaternionen heissen sie lineare Vectorfunctionen eines Vectors.

Zwei Vectoren derselben Art werden genau so addirt, wie in der Statik Kräfte summirt werden. In der Tat ist der Beweis, den Poisson für das Parallelogramm der Kräfte giebt, für die Zusammensetzung aller Grössen anwendbar, bei denen eine Zeichenänderung mit einer Drehung um 180° gleichbedeutend ist.

Wenn wir einen Vector durch ein einziges Symbol bezeichnen und namentlich darauf aufmerksam machen wollen, dass wir es eben mit einem Vector zu tun haben, demnach Richtung sowohl als Grösse beachten müssen, so werden wir die grossen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, . . . benutzen.

In der Methode der Quaternionen wird die Lage eines Punktes im Raume dadurch fixirt, dass man von einem festen Punkte aus bis zu ihm einen Vector zieht. Haben wir nun an der Stelle dieses Punktes im Raume eine physikalische Grösse zu betrachten, welche von der Lage dieses Punktes abhängt, dann behandeln wir sie als Function des vom fixen Punkte gezogenen Vectors. Die Function kann dabei ein Scalar oder ein Vector sein. Die Dichtigkeit eines Körpers, seine Temperatur, sein hydrostatischer Druck, sein Potential in einem bestimmten Punkte sind scalare Functionen. Dagegen sind die resultirende Kraft in einem Punkte, die Geschwindigkeit eines Stromes, die Rotationsgeschwindigkeit eines Elementes und das die Rotation hervorbringende Kräftepaar Vectorfunctionen.

12. Man kann die physikalischen Vector-Grössen in zwei Klassen einteilen, je nachdem sie zu Linien oder zu Flächen in Beziehung gebracht werden.

So lässt sich die Grösse einer in bestimmter Richtung wirkenden Anziehungskraft durch das Verhältnis ihrer Arbeitsleistung, während sie einen Körper in ihrer Wirkungsrichtung verschiebt, zu der Grösse der Verschiebung messen. Die attrahirende Kraft ist dann zu einer Linie in Beziehung gebracht. Andererseits definirt man die Intensität eines in einem Körper in bestimmter Richtung verlaufenden Wärmestroms als das Verhältnis der Wärmemenge, welche durch eine zum Wärmestrom senkrechte kleine Fläche in der Zeiteinheit durchgeht, zu der Grösse dieser Fläche. Hier ist also die Strömung unter Zuhilfenahme einer Fläche gemessen.

Doch giebt es Fälle, in denen eine Quantität sowohl auf eine Linie als auf eine Fläche bezogen werden kann. So wird man bei der Betrachtung der elastischen Verschiebung in einem Körper entweder seine Aufmerksamkeit auf die ursprüngliche und nachherige Lage eines Partikels richten, also die Verschiebung durch die Länge der Strecke von der ersten zur zweiten Lage des Teilchens messen; oder man wird untersuchen, welche Summe von Partikelchen des Körpers während der Dauer der Verschiebung durch eine bestimmte Fläche hindurchgeht.

Ebenso mag man die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsbewegung dadurch bestimmen, dass man die Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen in ihren Bahnen untersucht, oder die Flüssigkeitsmenge eruirt, welche während einer bestimmten Zeit durch eine bestimmte Fläche strömt.

Die erste Methode haben wir anzuwenden, wenn wir sowohl die Dichtigkeit eines Körpers als auch die in ihm stattfindenden Verschiebungen und auftretenden Geschwindigkeiten der Partikel kennen lernen wollen, die zweite dagegen, wenn es sich um eine moleculare Theorie der Bewegungen handelt.

Bei einem electrischen Strome wissen wir weder etwas von der Dichte der Electricität, noch von der Geschwindigkeit, mit der die Strömung vor sich geht, wir kennen einzig den Wert einer Grösse, welcher in der Hydrodynamik das Product aus der Dichte und Geschwindigkeit entsprechen würde. Hier haben wir also die allgemeinere Methode der Messung der Stromstärke unter Zuhilfenahme einer Fläche anzuwenden.

Electromotorische und magnetische Kräfte gehören, weil man sie auf Linien bezieht, zu der ersten Klasse von Vectoren; so oft wir auf diese Tatsache namentlich aufmerksam zu machen haben, werden wir sie Kraftintensitäten nennen.

Andererseits definirt man die Stärke der electrischen und magnetischen Induction ebenso wie die des galvanischen Stromes unter Zuhilfenahme von Flächen, man hat sie also zur zweiten Klasse der Vectoren zu rechnen. Wir werden sie deshalb zu den Stromgrössen zählen.

Jede jener Kraftintensitäten ist bestrebt, eine ihr entsprechende strömende Bewegung hervorzubringen, oder bringt wirklich eine solche zu Stande. Electromotorische Kräfte zum Beispiel setzen die Electricität in Leitern in Bewegung und suchen sie in Fluss zu bringen in dielectrischen Medien. Sie verursachen eine electrische Induction in Dielectricis und wahrscheinlich auch in Conductoren; in demselben Sinne bringen auch magnetische Kräfte magnetische Induction hervor.

13. In manchen Fällen ist eine Strömung proportional der sie verursachenden Kraft und findet auch in Richtung dieser statt, häufig aber weiss man nur, dass sie in Grösse und Richtung von Grösse und Richtung der Kraft abhängt.

In dem Capitel über die Bewegungsgleichungen der Electricität in Leitern, Art. 296, werden wir den Fall betrachten, wo die Stromcomponenten lineare Functionen der Kraftcomponenten sind, und dabei finden, dass im allgemeinen neun Constanten erforderlich und hinreichend zur Herstellung der Beziehungen zwischen den Componenten der Strömung und denen der Kraft sind. In gewissen Fällen kann man vermuten, dass sechs jener Constanten sich paarweise gleich sind; dann ist die Beziehung zwischen der Richtung der Kraft und der einer zur Stromrichtung senkrechten Ebene dieselbe, wie die zwischen der Richtung eines Durchmessers eines Ellipsoids und der Richtung der ihm conjugirten Diametralebene. In der Ausdrucksweise des Quaternionencalculs sagt man, dass der eine Vector eine lineare Vectorfunction des andern ist, und zwar eine selbstconjugirte Function, wenn eben der Fall eintritt, dass sechs Coefficienten zu drei Paaren zusammenfallen.

Bei der magnetischen Induction in Eisen ist die Strömung, d. h. die Magnetisirung des Eisens, keine lineare Function der magnetisirenden Kraft. Doch ist in allen Fällen das wissenschaftlich wichtige Product aus der Kraft und der in ihrer Richtung genommenen Stromcomponente eine scalare Grösse.

14. Jene beiden Klassen von Vectoren sind auch durch besondere mathematische Operationen charakterisirt, die bei ihrer Behandlung häufig auftreten.

Bei Kräften haben wir meist das Integral längs einer Linie von dem Product eines Elements dieser Linie und der in Richtung dieses Elements fallenden Kraftcomponente zu nehmen. Das Resultat dieser Operation nenne ich das *Linienintegral* der Kraft. Es repräsentirt die Arbeit, welche bei der Bewegung eines Körpers auf dieser Linie geleistet wird. Hängt dasselbe nicht von der Gestalt der Linie selbst ab, sondern nur von der Lage der beiden Endpunkte derselben, so wird das Linienintegral als *Potential* bezeichnet.

Bei Strömungen tritt uns ein Integral über eine Fläche von dem Product eines Elements derselben und der normal zu ihr auftretenden Stromcomponente entgegen. Wir erhalten durch dieses Integral, das *Flächenintegral*, die Menge eines Agens, welche durch die Fläche in bestimmter Zeit hindurchgeht.

Es giebt Flächen, durch welche hindurch keine Strömung stattfindet. Schneiden sich zwei solche Flächen, so bildet ihr Durchschnitt eine Stromlinie, welche auch als Kraftlinie bezeichnet wird, wenn die Strömung in Richtung der Kraft verläuft.

Man tut aber gut in der Lehre von der statischen Electricität und vom Magnetismus die Bezeichnung Inductionslinien festzuhalten und den Namen Stromlinien für die Electrokinematik zu reserviren.

15. Ein anderes Unterscheidungsmerkmal zwischen Vectoren, nämlich ein aus den Eigenschaften einer translatorischen im Gegensatz zu einer rotatorischen Bewegung abgeleitetes, ist für die Physik zwar in mancher Hinsicht sehr wichtig, hat aber keine besondere Bedeutung bei mathematischen Untersuchungen.

Gehen wir auch hierauf mit einigen Worten ein, so kann die Richtung und Grösse einer Quantität von irgend einer Action oder Wirkung, die ganz längs einer gewissen Linie sich manifestirt, abhängen, oder sie kann durch irgend etwas bestimmt sein, was eine Rotation um diese Linie als Achse charakterisirt. Die Composition von Vectoren geschieht stets nach denselben Gesetzen, mögen sie translatorischer oder rotatorischer Natur sein, so dass in der mathematischen Behandlung beider Klassen sich kein Unterschied geltend machen kann. Bei physikalischen Untersuchungen verraten aber gewisse Umstände die Klasse, zu der wir eine Grösse zu rechnen haben. So besteht die Electrolyse in dem Transport zweier Substanzen auf Linien nach entgegengesetzten Richtungen, und das charakterisirt ein translatorisches

Phänomen, so dass offenbar keine rotatorische Wirkung um die Kraftrichtung in Action tritt. Daraus müssen wir schliessen, dass der electrische Strom, welcher Electrolysen verursacht oder begleitet, ein translatorisches Phänomen ist, kein rotatorisches.

Andererseits unterscheiden sich Nord- und Südende einer Magnetnadel nicht wie Sauerstoff und Wasserstoff, welche bei der Electrolyse an entgegengesetzten Stellen erscheinen, so dass wir daraus translatorische Eigenschaften des Magnetismus nicht entnehmen können. Im Gegenteil zeigt die Tatsache, dass der Magnetismus die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen im Stande ist, dass wir es bei ihm mit einem rotatorischen Phänomen zu tun haben.

Das Linienintegral.

16. Im Anschluss an die früheren Bemerkungen über die bei Rechnung mit Vectoren namentlich auftretenden mathematischen Operationen lasse ich nunmehr einige Bemerkungen zunächst über die in der Physik eine grosse Rolle spielenden Linienintegrale folgen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes P auf einer Linie, und s die Länge dieser Linie von einem fixen Punkte A bis zu diesem Punkte P. Weiter sei R der Wert eines Vectors im Punkte P und ε der Winkel, den die Richtung dieses Vectors mit der Tangente der Linie s in P bildet. $R \cos \varepsilon$ giebt dann die Componente des Vectors längs der Linie s im Punkte P, und

$$1_a) \qquad L = \int_0^s R \cos \varepsilon \, ds$$

das *Linienintegral* des Vectors.

Betrachtet man die Coordinaten x, y, z als Functionen der Variabeln s, so geht das Linienintegral nach bekannter Transformation über in

$$1_b) \qquad L = \int_0^s \left\{ X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right\} ds,$$

wo X, Y, Z die Componenten von R nach den Coordinatenaxen angeben.

Im allgemeinen hängt dieses Integral von der Form der Linie zwischen A und P, längs welcher integrirt werden soll, ab. Es kann aber vorkommen, dass in gewissen Bezirken der Factor von ds in unserm Linienintegral ein vollständiger Differentialquotient ist, so dass

$$X dx + Y dy + Z dz = - d\Psi$$

wird, dann haben wir

$$1_c) \qquad L = \Psi_A - \Psi_P,$$

auf welchem Wege wir auch von dem Punkte A zu dem Punkte P übergehen mögen, vorausgesetzt dass der Integrationsweg die Grenzen unseres Bezirkes nicht überschreitet.

Potential.

Die Grösse Ψ ist eine scalare Function der Lage des Punktes P, also unabhängig von etwaigen Richtungen und heisst das *Potential* in diesem Punkte. Ein Vector R hat ein Potential, wenn seine Componenten X, Y, Z Differentialquotienten ein und derselben Function sind, so dass

$$1)\qquad X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird. Existirt ein solches Potential, so heissen Flächen, in denen dasselbe constant bleibt, *Aequipotentielle* oder *Niveauflächen*. Sie haben die Eigenschaft, dass ihre Normalen n die Richtungen des Vectors R anzeigen, und dass in ihren Punkten

$$2)\qquad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

wird.

Laplace ist der Erfinder dieser Methode, Vectorcomponenten als erste Derivirte einer gewissen Function zu betrachten.*) Doch stammt der Name Potential von Green her, der diese Function zur Grundlage seiner Electricitätstheorie gemacht hat.**) Greens Arbeiten blieben aber bis zum Jahre 1846 unbeachtet, so dass inzwischen die meisten seiner Resultate von Gauss, Chasles, Sturm und Thomson neu entdeckt wurden***).

In der Gravitationstheorie wird dem Potential das entgegengesetzte Zeichen von dem hier benutzten gegeben, und die Kraft in einer Richtung durch die in dieser Richtung für die Längeneinheit stattfindende Zunahme der Potentialfunction gemessen. Bei electrischen und magnetischen Untersuchungen setzt man dagegen die Kraft gleich der Abnahme des Potentials für die Längeneinheit in Richtung ihrer Wirkung. Dadurch kommt das Zeichen des Potentials in Uebereinstimmung mit dem der potentiellen Energie, welch letztere stets abnimmt, wenn ein Körper in Richtung der ihn angreifenden Kraft bewegt wird.

17. Viel Licht wird auf das Verhältnis der Kraft als Vector- zur Potentialfunction als Scalarengrösse durch die Hamiltonsche Entdeckung der formalen Operation, mit Hilfe deren jene aus dieser abgeleitet wird, geworfen.

Wir haben nämlich gesehen, dass die Componente des Vectors nach einer bestimmten Richtung gleich dem negativen Differentialquotienten der Potentialfunction nach der Coordinate, die in jener Richtung verläuft, ist. Sind also i, j, k drei zu einander senkrechte Vectoreinheiten, und X, Y, Z die Componenten eines Vectors $\mathfrak{F}$ nach jenen drei Vectoren, dann ist

$$\mathfrak{F} = iX + jY + kZ;$$

*) *Méc. Cél. liv. III.*

**) *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Nottingham 1828. In Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 39, 44, 47 von Thomson mitgeteilt.

***) Thomson u. Tait: *Theoretische Physik* § 483.

mithin, wenn Ψ das Potential bezeichnet,

$$\mathfrak{F} = -\left\{ i\frac{\partial \Psi}{\partial x} + j\frac{\partial \Psi}{\partial y} + k\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}.$$

Benutzt man für die Operation

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

das Symbol ∇, so wird

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi.$$

Das Operationszeichen ∇ weist uns also an, zunächst das Anwachsen von Ψ für die Längeneinheit in drei zu einander senkrechten Richtungen zu bestimmen, und dann die so eruirten Verhältnisse wie Vectoren zu einem einzigen zusammenzuziehen. Man kann aber auch die durch ∇ bezeichnete Operation so auffassen, dass erst die Richtung eruirt werden soll, in der Ψ am raschesten anwächst, und dass dann nach dieser Richtung ein Vector zu ziehen ist, der den Betrag, um den Ψ für die Längeneinheit zunimmt, repräsentirt.

Lamé bezeichnet in seinem *Traité des fonctions inverses* den Betrag dieses grössten Anwuchses als Differential-Parameter, doch giebt weder diese Bezeichnung selbst noch auch die Art und Weise, wie Lamé von ihr Gebrauch macht, von der Tatsache Rechenschaft, dass es sich hier um Grössen handelt, die neben Quantität auch Richtung haben.

In den seltenen Fällen, in denen jene Beziehung in rein geometrischem Sinne zu berücksichtigen sein wird, werde ich den Vector $\mathfrak{F}$ als die *Raum-Variation* der scalaren Function Ψ bezeichnen, um auszudrücken, dass es sich sowohl um die Grösse als um die Richtung der raschesten Abnahme von Ψ handelt.

18. In gewissen Fällen sind die Bedingungen dafür, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, also die Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$

in einem bestimmten Raumbezirk erfüllt, ohne dass die Integration von A bis P auf zwei verschiedenen in diesem Bezirke liegenden Wegen zu demselben Resultate führt. Das trifft z. B. bei einem ringförmigen Integrationsgebiet ein, wenn die Integrationswege durch entgegengesetzte Segmente gehen. Charakteristisch für diesen Fall ist dann, dass man die Integrationswege nicht in einander überführen kann, ohne durch einen Raum zu gelangen, der nicht mehr zum Integrationsgebiet gehört. Wir kommen so zu Betrachtungen, die der Geometrie der Lage angehören, deren Wichtigkeit durch Leibniz und namentlich Gauss oft genug betont worden ist, bis sie in der neuern Zeit durch Listing eine ziemlich erschöpfende Bearbeitung gefunden haben.*)

*) *Der Census räumlicher Complexe.* Gött. Abh. Bd. X. S. 97 (1861).

Zusammenhängende Flächen und Räume.

Werden im Raume p Punkte durch l Linien so verbunden, dass kein Punkt ausgelassen ist und keine zwei Linien sich gegenseitig schneiden, so soll die dadurch entstehende Figur als *Diagramm* bezeichnet werden. Es genügen nun zunächst $p-1$ Linien, um die Punkte mit einander vollständig zu verbinden und jede neu hinzukommende Linie vervollständigt einen in sich zurücklaufenden Weg, den wir *Cykel* nennen können. Die Anzahl der Cykeln in dem Diagramm beträgt $l-p+1$. Jeder geschlossene Weg in dem Diagramm setzt sich aus diesen von einander unabhängigen Cykeln zusammen, von denen jeder beliebig oft und in beliebiger Richtung durchlaufen werden kann.

Die Existenz der Cykeln bezeichnen wir als *Cyklose* und die Anzahl derselben in einem Diagramm als die *Cyklomatische Zahl* des Diagramms.

Flächen sind entweder geschlossen oder begrenzt und die geschlossenen können unendlich oder endlich sein. Die unvollständigen Flächen werden durch eine oder mehrere geschlossene Linien begrenzt und sie umfassen auch die unendlichen und geschlossenen Flächen insofern, als bei jenen die Grenzlinien unendlich lang werden, bei diesen zu Punkten zusammenschrumpfen.

Ein endliches Stück des Raumes wird durch eine oder mehrere geschlossene Flächen begrenzt. Eine dieser Flächen kann als äussere Oberfläche betrachtet werden, während die andern Flächen sich gegenseitig ausschliessen und die inneren Begrenzungsflächen bilden.

Hat ein Raum nur eine begrenzende Fläche, so kann man diese beliebig zusammenziehen ohne ihre Continuität zu gefährden. Ist derselbe auch noch einfach zusammenhängend, *Acyklisch*, wie eine Kugel, so geht die Fläche schliesslich in einen Punkt über, ist er zweifach zusammenhängend, wie etwa ein Ring, so wird die Fläche bei fortdauernder Contraction zur geschlossenen Curve, ist er endlich mehrfach zusammenhängend, *Cyklisch*, so entsteht schliesslich ein Diagramm, dessen cyklomatische Zahl gleich der des Raumes, also um eine Einheit kleiner als seine Zusammenhangszahl ist. Der vom zusammenhängenden Gebiet ausgeschlossene Raum hat dieselbe cyklomatische Zahl wie das Gebiet selbst, und hieraus folgt, dass, wenn das zusammenhängende Gebiet durch innere und äussere Flächen begrenzt wird, seine cyklomatische Zahl gleich der Summe der Zahlen ist, wie er sie den einzelnen Flächen verdankt.

Schliesst eine Region mehrere andere Gebiete ein, so heisst sie mehrfach oder *Periphractisch*. Die periphractische Zahl ist gleich der Anzahl der begrenzenden Flächen, sie wird gleich 1 bei acyklischen Flächen.

Die cyklomatische Zahl einer geschlossenen Fläche ist doppelt so gross als die des Raumes, welchen sie begrenzt. Um die cyklomatische Zahl einer begrenzten Fläche zu erhalten, denkt man sich alle Begrenzungen ohne Unterbrechung der Continuität so lange gegen einander nach Innen zusammengezogen bis sie sich schneiden. Die Fläche wird dann zum Punkt, wenn sie acyklisch und zum linearen Diagramm, wenn sie cyklisch ist. Die cyklomatische Zahl des Diagramms ist gleichzeitig die der Fläche.

Nach diesen Auseinandersetzungen über das Zusammenhängen von Flächen und Räumen beweisen wir noch einige wichtige Sätze über das Linienintegral.

19. I.) *Wenn in einem einfach zusammenhängenden Raume*

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Psi$$

ist, so ergiebt die Integration dieses Ausdrucks zwischen zwei Punkten längs allen Linien, die ganz in dem bezeichneten Raume liegen, denselben Wert.

Wir beweisen zunächst, dass man bei der Integration stets Null erhält, wenn der Integrationsweg in sich zurückläuft.

Denken wir uns nämlich die äquipotentiellen Flächen gezogen, so werden sie entweder alle geschlossen sein, oder von der Oberfläche unseres Raumes vollständig begrenzt werden. Jede geschlossene Linie in unserem Raume, die eine dieser Flächen beim Durchgehen schneidet, muss sie daher bei der Rückkehr an einer andern Stelle in entgegengesetzter Richtung treffen. Da das für alle noch so nahe aneinander gezogenen äquipotentiellen Flächen gilt, so werden sich immer zwei Elemente des Linienintegrals gleich und entgegengesetzt sein, so dass die Summe aller Elemente, also das ganze Integral, verschwindet.

Sind demnach AQP und $AQ'P$ zwei Integrationswege von A nach P, so ist das Linienintegral auf dem geschlossenen Wege $AQPQ'A$ gleich Null, daher das längs AQP gleich und entgegengesetzt dem längs $PQ'A$ oder gleich dem längs $AQ'P$.

Es ergiebt sich hieraus, dass wenn das Potential in einem einfach zusammenhängenden Raume für einen Punkt gegeben ist, dass es dadurch für jeden andern Punkt des Raumes unzweideutig bestimmt ist.

20. II.) *In jedem mehrfach zusammenhängenden Raum, in welchem die Beziehung*

$$Xdx + Xdy + Zdz = -d\Psi$$

überall erfüllt wird, ist der Wert des Linienintegrals zwischen A und P im allgemeinen erst bestimmt, wenn der Verlauf des Integrationsweges näher angegeben ist.

Ist der betrachtete Raum $k+1$fach zusammenhängend, so kann man ihn durch k Schnitte oder Diaphragmen in einen einfach zusammenhängenden verwandeln ohne seine Continuität zu zerstören. Solange der Integrationsweg von A nach P keines der Diaphragmen durchschneidet, ist der Wert des Linienintegrals von seinem besondern Verlauf unabhängig. Es mögen nun die beiden Punkte A und P einander unendlich nahe zu entgegengesetzten Seiten eines Diaphragmas liegen und dasselbe möge von zwei andern Punkten A', P' gelten, von denen A' dem A und P' dem P unendlich nahe liegt.

Das Linienintegral über $APP'A'A$ muss dann verschwinden, und weil die Wege PP' und $A'A$ sich gleich und entgegengesetzt sind, haben die beiden Integrale über AP und $A'P'$ ebenfalls gleiche Werte. Hieraus folgt, dass das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve stets denselben Wert hat, wo auch die Curve das Diaphragma schneiden mag.

Ist dieser Wert bei einem einmaligen Durchschneiden des Diaphragmas gleich K_1, und geht die Curve p mal in positiver und p_1 mal in negativer Richtung durch das Diaphragma, so ist der Wert des Linienintegrals gleich $(p - p_1) K_1 = n_1 K_1$. Aehnliche Betrachtungen ergeben, dass, wenn der Integrationsweg l Diaphragmen durchschneidet, das Linienintegral längs demselben gleich

$$n_1 K_1 + n_2 K_2 + \dots + n_l K_l$$

sein muss, wo n_i den Ueberschuss der positiven Durchgänge durch das $i$te Diaphragma über die der negativen angiebt.

Zwei Curven, die in einander continuirlich übergeführt werden können, ohne jemals das Gebiet, in welchem ein Potential existirt, zu verlassen, sind einander äquivalent *).

Die Bedingung der Existenz eines Potentials, also die, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, tritt in vielen physikalischen Untersuchungen und namentlich da auf, wo das Potential zu andern physikalischen Deutungen führt als die aus ihm abgeleitete Vectorgrösse.

Betrachtet man bei rein kinematischen Fragen X, Y, Z als Componenten der Verschiebung eines Partikels in einem continuirlichen Körper, so sagt jene Bedingung aus, dass diese Verschiebung eine rotationslose Deformation hervorbringen soll **).

Entsprechend geschieht auch die Bewegung einer Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitscomponenten ein Potential haben, ohne Rotation.

Handelt es sich um Kräfte, so drückt jene Bedingung die Tatsache aus, dass die Arbeit, die bei der Ueberführung eines Körperpartikels von einer Position in eine andere geleistet werden muss, gleich der Differenz der Potentiale in den beiden Endpositionen ist, und für alle äquivalenten Wege einen und denselben Wert hat.

Das Flächenintegral.

21. Bezeichnet dS das Element einer Fläche S und ε den Winkel der nach dem Innern von S gezogenen Normale mit der Richtung der Vectorgrösse R, so nennt man $\iint R \cos\varepsilon\, dS$ das *Flächenintegral* von R über S. Es seien wie bisher X, Y, Z die Componenten von R und l, m, n die Rich-

*) W. Thomson, *On Vortex Motion.* Trans. R. S. Edinb. 1867–1868.

**) Thomson u. Tait, Theoret. Physik, § 190 *i*.

tungscosinusse der Normale zu S, dann giebt die Zerlegung des Flächenintegrals

$$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \iint X l \, dS + \iint Y m \, dS + \iint Z n \, dS$$
$$= \iint X \, dy \, dz + \iint Y \, dx \, dz + \iint Z \, dx \, dy,$$

wo die Integrationen sich auf die Fläche S beziehen.

Ist die Fläche geschlossen, so hat die Coordinate x für jedes Wertepaar der y und z eine gerade Anzahl von Werten, weil jede der xAxe parallele Linie ebenso oft aus dem von S umschlossenen Raum austreten muss, als sie in denselben eintritt. Bezeichnen demnach $x_1, x_3, x_5 \ldots$ die Eintrittspunkte und $x_2, x_4, x_6, \ldots$ die Austrittspunkte für eine solche unendlich lange Grade, so ist an den Stellen x_{2i+1} das Element $l dS$ positiv und an den x_{2i} negativ zu nehmen, also wird

$$\iint X \, dy \, dz = \iint \{(X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \ldots\} \, dy \, dz.$$

Ich füge noch die Bedingung hinzu, dass die Vectorcomponente X in dem von der Fläche eingeschlossenen Raume endlich ist und stetig verläuft. Man darf dann

$$X_{i+1} - X_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial X}{\partial x} \, dx$$

setzen, und erhält

$$\iint X \, dy \, dz = - \iiint \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

wo die dreifache Integration sich auf den ganzen von der Fläche S umspannten Raum erstreckt.

Sind demnach überhaupt X, Y, Z in dem Raume endlich und stetig, so ist das Flächenintegral

$$\text{III}_1) \qquad \iint R \cos\varepsilon \, dS = - \iiint \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right\} dx \, dy \, dz.$$

Trifft die Bedingung der Stetigkeit nicht zu, weil die Componenten X, Y, Z beim Durchgang von der negativen zur positiven Seite einer innerhalb S liegenden Fläche $F(x, y, z) = 0$ plötzlich von den Werten X, Y, Z auf die X', Y', Z' springen, so ist, wenn F zwischen x_{i+1} und x_i liegt,

$$X_{i+1} - X_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial X}{\partial x} dx + (X' - X)$$

mithin

$$\text{III)} \qquad \iint R\cos\varepsilon\, dS = -\iiint\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+\iint (X'-X)\, dy\, dz + \iint (Y'-Y)\, dz\, dx + \iint (Z'-Z)\, dx\, dy,$$

oder, wenn l', m', n' die Richtungscosinusse der positiven Normale der Discontinuitätsfläche S' angeben,

$$\text{III)} \qquad \iint R\cos\varepsilon\, dS = -\iiint\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+\iint\left\{(X'-X)\, l' + (Y'-Y)\, m' + (Z'-Z)\, n'\right\} dS',$$

wo das Doppelintegral sich auf die Discontinuitätsfläche bezieht.

Findet für jeden Punkt des Raumes die Gleichung

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

statt und gilt für jeden Punkt der Discontinuitätsfläche die Beziehung

$$\text{b)} \qquad X'l' + Y'm' + Z'n' = Xl' + Ym' + Zn',$$

so verschwindet das Flächenintegral ganz.

Die Vectorgrösse ist dann auf dünnen Cylindern oder Röhren verteilt, und deshalb wird die Gleichung a) als allgemeine, die Gleichung b) als superficielle *Sphondyloidale Bedingung* bezeichnet werden.

22. Wir verfolgen den Fall, dass für jeden Punkt innerhalb der Fläche S die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

erfüllt ist. Wenn keine Discontinuitätsflächen vorhanden sind, ist das Flächenintegral gleich Null, wie auch die geschlossene Fläche sonst beschaffen sein mag. Nun möge S aus 3 Teilen S_1, S_0, S_2 bestehen. S_1 sei ganz beliebig geformt und werde durch eine geschlossene Curve L_1 begrenzt, S_0 entstehe dadurch, dass von allen Punkten von L_1 Linien gezogen werden, deren Tangenten überall mit den Richtungen der Vectoren R zusammenfallen, endlich sei S_2 eine beliebige durch ihre Schnittcurve L_2 mit S_0 begrenzte Fläche. Unser Flächenintegral zerfällt entsprechend den drei Teilflächen in drei Teile Q_1, Q_0, Q_2, und es wird

$$Q = Q_1 + Q_0 + Q_2 = 0.$$

Da aber zufolge der Definition von S_0

$$R\cos\varepsilon = Xl + Ym + Zn$$

für alle Punkte dieser Fläche verschwinden muss, so ist Q_0 für sich schon gleich Null und deshalb

$$\text{III}_2) \qquad \begin{aligned} Q_0 &= 0, \\ Q_2 &= -Q_1. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral über Q_2 ist also entgegengesetzt gleich dem über Q_1 wie auch S_2 und S_1 sonst beschaffen sein mögen, wenn nur die Verbindungsfläche S_0 keine andern Linien zu Tangenten hat als die Richtungen der Vectoren R.

Je kleiner die durch die geschlossene Linie L_1 begrenzte Fläche ist, desto mehr entspricht die Fläche S_0 einem dünnen Cylinder oder einer Röhre, und wir können uns den ganzen Raum als aus solchen Röhren zusammengesetzt denken. Für jede solche Röhre hat das Flächenintegral über alle vollständigen Querschnitte, wenn die Gleichung a) erfüllt ist, einen und denselben Betrag, und daraus erhellt, weshalb ich

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

als *sphondyloidale Bedingung**) bezeichnet habe.

Stromlinien und Stromfäden.

Man kann sich den Raum auch noch specieller derartig in sehr dünne Röhren oder Fäden zerteilt denken, dass das Flächenintegral für den Querschnitt einer jeden solchen Röhre der Einheit gleich ist.

Das Flächenintegral bezogen auf irgend eine endliche durch eine geschlossene Linie L begrenzte Fläche S ist dann gleich der Anzahl derjenigen Röhren, welche in positiver Richtung durch die Fläche gehen, oder, was dasselbe ist, gleich der Anzahl derjenigen, welche die Grenzlinie L treffen.

Das Flächenintegral hängt also nicht von der Form der Fläche, sondern nur von der ihrer Begrenzung ab.

Flächenintegrale in mehrfachen Gebieten.

Allgemein gilt die Behauptung, dass das Flächenintegral in einem Raume, in welchem die Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

erfüllt ist, für jede geschlossene Fläche verschwindet und für jede begrenzte Fläche nur von der Form der Begrenzungslinie abhängt, dann, wenn dieser Raum nur von einer Fläche begrenzt ist. Sobald das nicht der Fall ist, kann das Gebiet S andere Gebiete $S_1, S_2, S_3 \ldots$ in sich fassen, für welche die sphondyloidale Bedingung nicht erfüllt ist, und für diese verschwinden die Flächenintegrale $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ nicht mehr. Der obige Satz gilt dann nur für die Flächen S' des Gebietes S, welche alle Gebiete $S_1, S_2 \ldots$, in denen die sphondyloidale Bedingung nicht erfüllt ist, ausschliessen. Für Flächen, welche

*) Maxwell benutzt das Wort *solenoidal*, da aber bei uns *Solenoid* schon eine ganz feste Bedeutung hat, so habe ich die ursprüngliche Faraday'sche Bezeichnung wieder hergestellt.

einzelne der Gebiete $S_1, S_2 \ldots$ umfassen, ist das Flächenintegral gleich der Summe der Flächenintegrale für die Begrenzungsflächen der bezeichneten Gebiete. Daraus folgt auch, dass es für zwei durch ein und dieselbe geschlossene Linie begrenzte Flächen nur dann denselben Wert hat, wenn diese continuirlich, das heisst lediglich durch Biegung und Dehnung ohne Ueberschreitung der hervorgehobenen Gebiete in einander übergeführt werden können.

So oft wir es aber mit einem mehrfachen Gebiete zu tun haben, müssen wir dasselbe durch Linien, welche die verschiedenen innern Begrenzungsflächen mit der äussern in Verbindung setzen, in ein einfaches Gebiet verwandeln. Jede solche Linie, die zwei sonst ganz getrennt liegende Flächen verbindet, reducirt die Anzahl der unabhängigen Gebiete um eins, so dass die Zahl der zu ziehenden Linien der periphraktischen Zahl des ganzen Gebietes oder der Anzahl der inneren Begrenzungsflächen gleich wird.

Wir gewinnen nunmehr die präcisere Behauptung:

III) *Das Flächenintegral verschwindet in dem Gebiete S, wo die sphondyloidale Bedingung erfüllt ist, für jede geschlossene Fläche, welche die Verbindungslinien der Partialgebiete mit der äussern Grenzfläche gar nicht, oder eine gerade Anzahl Mal durchschneidet. Hat die Fläche mit der Verbindungslinie eines Partialgebietes zur äussern Grenzfläche eine ungerade Anzahl von Durchschnittspunkten, so ist ihr Flächenintegral gleich dem der Grenzfläche des betreffenden Partialgebietes.*

Das bekannteste Beispiel eines mehrfachen Gebietes, in welchem die sphondyloidale Bedingung erfüllt ist, bietet die Region, welche einen Massenpunkt umgiebt, der eine Attraction oder Repulsion im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung ausübt.

Man hat für diesen Fall

$$X = m\frac{x}{r^3},\ Y = m\frac{y}{r^3},\ Z = m\frac{z}{r^3},$$

wo m die im Coordinatenursprung concentrirt gedachte Masse angiebt.

Für jedes endliche r ist daher

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Im Massenpunkt selbst aber werden die Componenten und ihre Derivirten unendlich. Demgemäss ist das Flächenintegral gleich Null, wenn die Fläche, um die es sich handelt, den Massenpunkt nicht miteinschliesst, und, wie eine weitere analytische Behandlung ergiebt, gleich $4\pi m$, wenn der Massenpunkt innerhalb der Integrationsfläche liegt.

Wollen wir das Gebiet um den Massenpunkt wie ein einfaches behandeln, so haben wir von diesem aus eine Linie bis in die Unendlichkeit zu ziehen, und bei Auswertung des Flächenintegrals jedesmal $4\pi m$ zu addiren, wenn diese Linie von der negativen zur positiven Seite der Integrationsfläche übergeht.

Rechts und Links im Raume.

23. Alle Translationsbewegungen längs einer Axe und alle Rotationsbewegungen um diese Axe sollen in diesem Werke als gleichsinnig angesehen werden, wenn ihre Richtungen mit denen der Translation bezüglich Rotation einer rechts drehenden Schraube übereinstimmen*). Nimmt man zum Beispiel die Rotationsbewegung der Erde, welche von Westen nach Osten vor sich geht, als positiv an, so muss man sich ihre Axe von Süden nach Norden gerichtet denken. Für Jeden, der nach Norden, also nach der positiven Richtung sieht, findet dann die Rotation vom Kopfe zur rechten Hand zu den Füssen zur linken Hand statt.

Befinden wir uns auf der positiven Seite einer Oberfläche, so läuft die positive Richtung ihrer Grenzlinie entgegen dem Zeiger einer Uhr, die uns ihr Zifferblatt zuwendet.

Dieses Rechts-System ist von Thomson und Tait in ihrer Theoretischen Physik § 243 adoptirt, das Links-System dagegen ist in Hamiltons Quaterniontheorie massgebend. Listing bezeichnet den Uebergang von dem einen zum andern System als Perversion. Als typisches Beispiel für einen solchen Uebergang kann die Reflexion eines Gegenstandes von einem Spiegel gelten.

Entsprechend dem von uns adoptirten System werden wir also bei Benutzung von Cartesischen Coordinaten x, y, z die Axen stets so uns gelegt denken, dass die übliche cyklische Folge der Symbole für die Coordinaten zu einem Rechts-System im Raume führt. Ist also die x Axe nach Osten, die y Axe nach Norden gezogen, so muss die z Axe nach dem Zenith gehen. Den Inhalt einer Fläche werden wir als positiv bezeichnen, wenn die Ordnung der auszuführenden Integrationen der cyklischen Folge der Coordinatenzeichen sich anschliesst. Daher ist der Inhalt eines von einer geschlossenen Curve begrenzten Stückes der xy-Ebene

$$\text{entweder} \int x\,dy \text{ oder} -\int y\,dx,$$

*) Eine bessere Versinnbildlichung als durch Worte gewinnt man für die Bewegung einer rechtsdrehenden Schraube, wenn man die Hand nach vorwärts stösst und sie gleichzeitig um das Gelenk so dreht, dass die Handfläche von unten nach oben zu liegen kommt. Ein gewöhnlicher Pfropfenzieher kann mit demselben Vorteil benutzt werden, um dem Gedächtnis den Lauf einer Rechtsschraube einzuprägen.

Prof. W. H. Miller teilt mir mit, dass die schraubenartigen Ranken beim Wein rechts, die beim Hopfen links gedreht sind, und so kann man wol die beiden bezeichneten Systeme in Beziehung zum Wein und zum Hopfen bringen.

Das System, das wir beim Wein antreffen, ist mit Ausnahme von Japan in allen civilisirten Ländern beim Schneiden von Schrauben adoptirt. De Candolle bezeichnete übrigens die Hopfenranken als rechtsgedreht, und darin sind ihm Listing und alle, die über die Circular-Polarisation des Lichtes geschrieben haben, gefolgt. Schrauben nach Art der Hopfenranken werden zur Kuppelung der Eisenbahnwagen und zur Befestigung der Räder der linken Seiten gewöhnlicher Wagen verwendet. Sie werden aber auch stets von ihren Verfertigern selbst als links gedrehte Schrauben bezeichnet.

da in dem ersten Ausdrucke die Integration über x, in dem zweiten dagegen die über y zuerst ausgeführt worden ist.

Diese Beziehung zwischen den beiden Producten $dx\,dy$ und $dy\,dx$ entspricht dem Verhältnis zwischen den Producten zweier zu einander senkrechter Vectoren in der Quaternionentheorie, wo das Zeichen ebenfalls von der Ordnung, in der sich die Operationen folgen, abhängt. Aehnlich ändert auch eine Determinante ihr Zeichen, wenn zwei parallele Reihen mit einander vertauscht werden.

Ein Volumintegral ist positiv, wenn die Integrationenfolge der Folge der Coordinaten entspricht, und negativ, wenn sie dieser entgegengesetzt ist.

Beziehung zwischen Flächen- und Linienintegralen.

Wir lassen nunmehr den Beweis eines Satzes folgen, der sich deshalb als sehr nützlich herausgestellt hat, weil er eine Beziehung zwischen dem Integral über eine endliche Fläche und dem über die Begrenzungslinie der Fläche festsetzt.

24. IV.) *Das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve kann durch ein Flächenintegral über eine Fläche ersetzt werden, welche von dieser Curve begrenzt ist.*

Es seien X, Y, Z die Componenten einer Vectorgrösse $\mathfrak{A}$, deren Linienintegral längs der geschlossenen Curve s genommen werden soll, und es bezeichne S eine durch die Curve vollständig begrenzte Fläche. Das Flächenintegral soll sich auf eine andere Vectorgrösse $\mathfrak{B}$ beziehen, deren Componenten ξ, η, ζ mit denen des Vectors $\mathfrak{A}$ durch die Gleichungen

1) $$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

verbunden sind.

Aus der Definition der ξ, η, ζ erhellt, dass sie der sphondyloidalen Bedingung

2) $$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

genügen.

Sind l, m, n die Richtungscosinusse der zu dem Elemente dS der Fläche S gezogenen positiven Normale, so kann das Flächenintegral von $\mathfrak{B}$ geschrieben werden

3) $$\iint (\xi l + \eta m + \zeta n)\, dS$$

oder, indem man ξ, η, ζ durch ihre Werte ersetzt

3_1) $$\iiint \left(m \frac{\partial X}{\partial z} - n \frac{\partial X}{\partial y} + n \frac{\partial Y}{\partial x} - l \frac{\partial Y}{\partial z} + l \frac{\partial Z}{\partial y} - m \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dS.$$

Wir transformiren dieses Integral dadurch, dass wir für das Flächenelement andere Ausdrücke einführen. Es seien die Coordinaten x, y, z für jeden Punkt der Fläche S Functionen zweier von einander unabhängiger Variabeln α, β. Ist β constant und α variabel, so beschreibt der Punkt (x, y, z) eine Curve auf der Fläche, zu einer Reihe von Werten des β gehört also eine Reihe von Curven (α), die alle auf der Fläche S liegen. Ganz ebenso gehört zu einer Reihe von Werten des α eine Reihe von Curven (β), die sich ebenfalls auf der Fläche S befinden. Indem sich die Curven (α) und (β) schneiden, zertheilen sie die Fläche S in einzelne Elemente, die wir beliebig klein halten und für unsere dS substituiren können. Die Projection eines solchen Elements auf die Ebene der y, z, also ldS, ist aber nach bekannten Regeln

a) $$ldS = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta,$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für mdS und ndS durch cyklische Vertauschung der x, y, z.

Wir haben daher für den Teil unseres Flächenintegrals, der von X abhängt

$$\iint \left\{\frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right\} d\alpha\, d\beta,$$

oder nach Addition und Subtraction von $\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}$

$$\iint \left\{\frac{\partial x}{\partial \beta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)\right\} d\alpha\, d\beta$$

b) $$= \iint \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta.$$

Wir setzen nunmehr voraus, dass die Curven (β) eine Reihe von geschlossenen Linien bilden, deren letzte unsere Grenzlinie s, für welche α den Wert α_1 haben soll, ist, und welche den Punkt der Oberfläche einschliessen, in dem α seinen kleinsten Wert α_0 erreicht. Die Curven (α) ziehen wir dann von dem Punkte $\alpha = \alpha_0$ zu unserer Grenzlinie s, so dass die erste β_0 und die letzte β_1 zusammenfallen. Integrirt man in dem Ausdruck b) das erste Glied partiell nach α, das zweite partiell nach β, so heben sich zunächst die dabei auftretenden Doppelintegrale auf. Da ferner die Curve $\alpha = \alpha_0$ nur in einem Punkte besteht, wo X nur einen Wert haben kann, so muss

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} \left(X \frac{\partial x}{\partial \beta}\right)_{\alpha = \alpha_0} d\beta$$

verschwinden. Endlich fällt der Punkt (α, β_1) mit dem (α, β_0) zusammen und deshalb heben sich die beiden Integrale

$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_{\beta=\beta_1} d\alpha \text{ und } \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)_{\beta=\beta_0} d\alpha$$

auf und es bleibt für den Ausdruck unter b) nur

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)_{\alpha=\alpha_1} d\beta$$

übrig. Hier ist aber α_1 der Wert von α für unsere Grenzcurve, somit wird aus dem Ausdruck unter b)

b$_1$)
$$\int X\frac{\partial x}{\partial s} ds,$$

wo die Integration längs der Grenzlinie s auszuführen ist. In ganz derselben Weise können wir auch die andern von Y bezüglich Z abhängigen Teile unseres Flächenintegrals behandeln und erhalten schliesslich

IV)
$$\iint(\xi l + \eta m + \zeta n)\, dS = \int\left(X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} + Z\frac{\partial z}{\partial s}\right) ds.$$

Das Integral links ist auf die Fläche S, das rechts auf die Grenzlinie s zu beziehen.*)

Ueber die Operation ∇ an einer Vectorfunction.

25. Wir haben an einer andern Stelle gesehen, dass die Operation ∇ an einem Potential ausgeführt, einen Vector kennen lehrt. Man kann aber auch dieselbe Operation auf Vectorfunctionen, wie namentlich Tait**) gezeigt hat, ausdehnen und gelangt dann zu Resultaten, die mit den Theoremen unter III und IV in Verbindung stehen.

Es sei σ eine Vectorfunction von ρ, dem Vector eines variabeln Punktes. Wie üblich schreiben wir

$$\rho = ix + jy + kz,$$
$$\sigma = iX + jY + kZ,$$

wo X, Y, Z die Componenten von σ sind.

Führen wir an σ die Operation ∇ aus und beachten die bekannten Regeln***) für die Multiplication der Grössen i, j, k miteinander, so erhalten wir für $\nabla\sigma$ zwei Teile, einen Scalar $S\nabla\sigma$ und einen Vector $V\nabla\sigma$.

---

*) Der gegebene Satz rührt von Stokes her. Smith's Price Examination. 1854. *Question* 8. Den Beweis findet man in Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 190 (j).

**) Proc. R. S. Edin. 1862 April 28. Sehr bemerkenswert ist die Abhandlung *On Green's and other allied Theorems* in den Trans. R. S. Edin. 1869—70 und *On some Quaternion Integrals* Proc. R. S. Edin. 1870—71.

***) $i.j = k,\ j.k = i,\ k.i = j;\ j.i = -k,\ k.j = -i,\ i.k = -j;\ i.i = j.j = k.k = -1.$

Der erstere ist
$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$
der zweite
$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$
oder, indem wir die in dem Theorem IV definirten Grössen ξ, η, ζ einführen,
$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta.$$

Es erhellt hieraus, dass die Functionen, welche in den Theoremen III und IV eine so grosse Rolle spielten, gleichzeitig durch die Operation ∇ an dem Vector mit den Componenten X, Y, Z erhalten werden. Jene Theoreme lassen sich aber nunmehr kurz ausdrücken durch

$$\text{III}_1) \qquad \iiint S\nabla\sigma\, d\tau = \iint S\,.\,\sigma\, U\nu\, ds,$$

$$\text{IV}) \qquad \int S\sigma\, d\rho = \iint S\,.\nabla\sigma\, U\nu\, ds,$$

wo $d\tau$ ein Volum-, ds ein Flächen- und $d\rho$ ein Linienelement angiebt, $U\nu$ aber die Einheit eines Vectors in Richtung der Normale bezeichnet.

Die folgende Bemerkung wird die Bedeutung dieser beiden Functionen eines Vectors dem Verständnis näher bringen. Legt man um einen Punkt P, in welchem σ den Wert σ_0 hat, eine geschlossene Fläche und rechnet bei der Bildung des Flächenintegrals von σ die Normale nach dem Innern der Fläche als positiv, so ist $S\nabla\sigma$ positiv. Der Vector $\sigma - \sigma_0$ muss dann in der Nähe von P überall nach diesem Punkte hin gerichtet sein, wie die nebenstehende Fig. 1 versinnbildlichen soll.

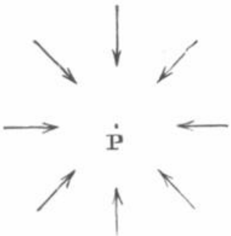

Fig. 1.

Ich schlage daher vor, den Scalar-Teil von $\nabla\sigma$ die *Convergenz* von σ nach dem Punkte P zu nennen.

Um in ähnlicher Weise den Vectorteil zu deuten, stellen wir uns vor, dass wir in Richtung des Vectors sehen, dessen Componenten ξ, η, ζ sind. Wir bemerken dann, dass die Vectoren $\sigma - \sigma_0$ in der Nähe von P tangential angeordnet sind und entgegengesetzt laufen wie der Zeiger einer Uhr, wie die Fig. 2 andeutet.

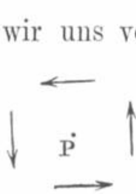

Fig. 2.

Ich schlage deshalb (freilich mit geringer Zuversicht) vor, diesen Teil von $\nabla\sigma$ die *Rotation* des σ um den Punkt P zu nennen.

Die Fig. 3 stellt die Verbindung einer Rotation mit einer Convergenz dar.


Fig. 3.

Verschwindet der Vectorteil der Operation ∇, ist also
$$V\nabla\sigma = 0$$

so heisst das, dass $\nabla\sigma$ ein Scalar oder dass σ die Raumvariation einer scalaren Function Ψ sein soll.

26. Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der Operation ∇ besteht darin, dass ihre Wiederholung zu der so wichtigen Operation

$$\nabla^2 = \Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

führt, die in fast allen Zweigen der Physik ausgeführt werden muss, und die man wol passend als die Laplacesche Operation bezeichnen kann.

Die Operation ∇^2 ist an sich eine scalare und ihr Resultat ist ein Scalar bezüglich Vector, je nachdem sie an einer Scalar- oder Vectorfunction ausgeführt wird.

Bezeichnet q_0 den Wert einer Grösse q in einem Punkt P und $\bar{q}$ den Mittelwert derselben Grösse innerhalb einer sehr kleinen um P mit dem Radius r geschlagenen Kugel, so ist

$$q_0 - \bar{q} = \tfrac{1}{10} r^2 \nabla^2 q,$$

so dass der Wert des q im Centrum ein wenig grösser oder kleiner ist als der Mittelwert $\bar{q}$ innerhalb der Kugel, je nachdem $\nabla^2 q$ positiv oder negativ ist. Die Operation $\nabla^2 q$ bestimmt also den Ueberschuss des Wertes von q in einem Punkte über den Mittelwert dieser Grösse für die ihm benachbarten Punkte, sie zeigt also gewissermassen an, dass die Grösse q sich in dem Punkte P *concentrirt.* Für eine Scalarfunction ist die Bildung des Mittelwerts bekannt genug. Bei einer Vectorfunction gelangt man zu demselben mit Hilfe der für die Integration von Vectorfunctionen geltenden Regeln. Das Resultat ist natürlich ein Vector.