Theoretische Astronomie

Klinkerfues, Wilhelm

Braunschweig, 1912

Anhang zu den Leuschner'schen Methoden der Bahnbestimmung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6723

Anhang

zu den

Leuschner'schen Methoden der Bahnbestimmung.

Zusammenstellung der Formeln nebst Rechenbeispielen.

I. Formeln.

A. Die directen Methoden der Bahnbestimmung.

(Die zur vollständigen Elimination der Parallaxe dienenden Formeln sind in den Anmerkungen zusammengestellt.)

Man benutzt die Formelsysteme, wie folgt:

(a) Für Parabeln: Ia, IIa, IIIa, u. s. w.
(b) Für Kreisbahnen: Ib, IIb, IIIb, u. s. w.
(c) Für allgemeine Bahnen: Ic, IIc, IIIc, u. s. w.

I a, b, c.

Es wird angenommen, dass die Bahn aus drei Oertern mit kurzen Zwischenzeiten bestimmt werden soll.

Man reducire die beobachteten Rectascensionen und Declinationen auf den Jahresanfang in der üblichen Weise mit Einschluss der Aberrationsglieder. Es seien die Beobachtungszeiten in Decimalen des Tages und die mittleren Oerter: t_1, α_1, δ_1, t_2, α_2, δ_2, t_3, α_3, δ_3.

Aus einer astronomischen Ephemeride interpolire man für den Jahresanfang die auf den Aequator bezogenen Sonnencoordinaten für die Beobachtungszeiten t_1, $t_2 = t_0$, t_3:

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1, \quad X_2,\ Y_2,\ Z_2, \quad X_3,\ Y_3,\ Z_3.$$

Gleichzeitig berechne man die Geschwindigkeiten X', Y', Z' zur Zeit t_0 nach einer der beiden folgenden Formeln der numerischen Differentiation:

$$k w \frac{df(l)}{dl} = f^{\mathrm{I}}(a + iw) + N_1^3(n) f^{\mathrm{III}}(a + iw) + \cdots n \{f^{\mathrm{II}}(a + iw) + N_1^4(n) f^{\mathrm{IV}}(a + iw) \cdots\}$$

$$l = a + [i + n] w = t_0$$

$$k w \frac{df(l)}{dl} = f^{\mathrm{I}}(a + [i + \tfrac{1}{2}] w) + M_1^3(m) f^{\mathrm{III}}(a + [i + \tfrac{1}{2}] w) \cdots + m \{f^{\mathrm{II}}(a + [i + \tfrac{1}{2}] w) + M_1^4(m) f^{\mathrm{IV}}(a + [i + \tfrac{1}{2}] w) \cdots\}$$

$$l = a + [i + \tfrac{1}{2} + m] w = t_0$$

$$X',\ Y',\ Z' = \frac{df(l)}{dl}\,.$$

Die Differenzen sind der Ephemeride so genau wie möglich zu entnehmen (gewöhnlich inclusive bis zur 7. Decimale). Man benutzt die n- oder m-Formel, je nachdem

$l = t_0$ einem tabulirten Argumente oder der Mitte zweier Argumente am nächsten liegt; m oder n sind dann immer numerisch $< 0{,}25$. Die $M(m)$ und $N(n)$-Coëfficienten sind den Tafeln XIV und XV zu entnehmen. Man kann die Differenzen für einhalb-, ein-, zwei- oder mehrtägige Intervalle entnehmen. Für einhalbtägige Intervalle ist $w = \frac{1}{2}$ und $\log \frac{1}{kw} = 2.065449$. Zur theilweisen Elimination der geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxe ertheile man den Sonnencoordinaten zur Zeit der Epoche t_2 nur die folgenden Correctionen [1]:

$$\partial X_2 = \cos\delta \sin\alpha\, p_\alpha \varrho + \sin\delta \cos\alpha\, p_\delta \varrho;\; \partial Y_2 = -\cos\delta \cos\alpha\, p_\alpha \varrho + \sin\delta \sin\alpha\, p_\delta \varrho;\; \partial Z_2 = -\cos\delta\, p_\delta \varrho,$$

wo hier $p_\alpha \varrho$, $p_\delta \varrho$ die geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxen-Factoren sind.

$$R \cos D \cos A = X_2 \text{ [2]},\quad R \cos D \sin A = Y_2,\quad S = R \cos D,\quad R \sin D = Z_2.$$

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2),\quad \tau_3 = k(t_2 - t_1),\quad \log k = 8.2355814 - 10.$$

IIa, b, c [3].

Die Differenzen der Rectascensionen und Declinationen setzt man am bequemsten in Bogensecunden an. Dann ist, in Einheiten des mittleren Sonnentages:

$$\alpha_3' = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} \text{ [4]},\quad \alpha_1 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{t_3 - t_1};\quad \delta_3' = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1},\quad \delta_1' = \frac{\delta_3 - \delta_2}{t_3 - t_2},$$

und in $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen, sowie in Theilen des Radius:

---

1) Will man aber die geocentrische und barycentrische Parallaxe vollständig eliminiren, so berechne man für die Zeiten t_1, t_2, t_3:

$$\varDelta_1 X = -d_1 \cos\delta_{☾} \cos\alpha_{☾},\quad \varDelta_1 Y = -d_1 \cos\delta_{☾} \sin\alpha_{☾},\quad \varDelta_1 Z = -d_1 \sin\delta_{☾},$$

$$p_\alpha^m \varrho_m = \frac{d_1}{\sin 1''} \frac{\cos\delta_{☾}}{\cos\delta} \sin(\alpha - \alpha_{☾}),\quad p_\delta^m \varrho_m = \frac{d_1}{\sin 1''} \{-\sin\delta_{☾} \cos\delta + \cos\delta_{☾} \sin\delta \cos(\alpha - \alpha_{☾})\},$$

wo $\alpha_{☾}$, $\delta_{☾}$ die Mondcoordinaten, welche für jede der drei Beobachtungszeiten interpolirt werden müssen, darstellen, und $\log d_1 = 5.4943^{-10}$; $\frac{d_1}{\sin 1''} = 6''.4372$ ist. Ferner für alle drei Beobachtungen:

$$p_\alpha \varrho = p_\alpha^g \varrho_g + p_\alpha^m \varrho_m,\quad p_\delta \varrho = p_\delta^g \varrho_g + p_\delta^m \varrho_m,$$

wo $p_\alpha^g \varrho_g$, $p_\delta^g \varrho_g$ die gewöhnlich mit $p_\alpha \varrho$ oder $p_\alpha \varDelta$ etc. bezeichneten geocentrischen Parallaxenfactoren sind und alle Parallaxenfactoren in Bogensecunden angesetzt sind. Und weiter:

$$\varDelta_2 X = [\cos\delta \sin\alpha\, p_\alpha \varrho + \sin\delta \cos\alpha\, p_\delta \varrho] \sin 1'',\quad \varDelta_2 Y = [-\cos\delta \cos\alpha\, p_\alpha \varrho + \sin\delta \sin\alpha\, p_\delta \varrho] \sin 1''$$

$$\varDelta_2 Z = -\cos\delta\, p_\delta \varrho \sin 1''.$$

$$\varDelta X = \varDelta_1 X + \varDelta_2 X,\; \varDelta Y = \varDelta_1 Y + \varDelta_2 Y,\; \varDelta Z = \varDelta_1 Z + \varDelta_2 Z;\; (X) = X + \varDelta X,\; (Y) = Y + \varDelta Y,\; (Z) = Z + \varDelta Z.$$

$$d_x = \frac{\varDelta_2 X_3 (t_0 - t_1) + \varDelta_2 X_1 (t_3 - t_0)}{\varDelta_2 X_2 (t_3 - t_1)} - 1,\; d_y = \frac{\varDelta_2 Y_3 (t_0 - t_1) + \varDelta_2 Y_1 (t_3 - t_0)}{\varDelta_2 Y_2 (t_3 - t_1)} - 1,\; d_z = \frac{\varDelta_2 Z_3 (t_0 - t_1) + \varDelta_2 Z_1 (t_3 - t_0)}{\varDelta_2 Z_2 (t_3 - t_1)} - 1,$$

$$j \cos a = \left[\frac{1}{R^3} + \frac{2\,d_x}{\tau_1 \tau_3}\right] \varDelta_2 X_2,\quad j \sin a = \left[\frac{1}{R^3} + \frac{2\,d_y}{\tau_1 \tau_3}\right] \varDelta_2 Y_2,\quad j \operatorname{tg} d = \left[\frac{1}{R'} + \frac{2\,d_z}{\tau_1 \tau_3}\right] \varDelta_2 Z_2.$$

Endlich nur für allgemeine Bahnen Ic:

$$\varDelta_2 R_2 = \frac{X_2\, \varDelta_2 X_2 + Y_2\, \varDelta_2 Y_2 + Z_2\, \varDelta_2 Z_2}{R_2},$$

wo für R, X, Y, Z die corrigirten oder uncorrigirten Werthe benutzt werden können.

2) Zur vollständigen Elimination der Parallaxe sind $(X)_2$, $(Y)_2$, $(Z)_2$ nach Anmerkung 1 statt X_2, Y_2, Z_2 einzusetzen.

3) Für sehr unregelmässige geocentrische Bewegung beachte man die Anmerkung 1, S. 456. Man kann auch die Curven der beobachteten α und δ zeichnen, dann die α und δ für fünf äquidistante Daten den Curven entnehmen und die Geschwindigkeiten hierauf nach den in Ia, b, c gegebenen Formeln der numerischen Differentiation berechnen, während Formeln für die Beschleunigungen sich durch nochmalige Differentiation der Formeln (9) und (11), S. 453, ergeben.

4) Zur Parallaxenelimination sind $(\varDelta X)'$, $(\varDelta Y)'$, $(\varDelta Z)'$ aus den Werthen $(\varDelta X)_1$, $(\varDelta X)_2$, $(\varDelta X)_3$ etc. in derselben Weise zu berechnen, wie oben α', δ' aus α_1, α_2, α_3 etc.

$$\alpha' = \frac{\sin 1''}{k} \, \frac{(t_3 - t_2)\,\alpha_3' + (t_2 - t_1)\,\alpha_1'}{t_3 - t_1}, \qquad \delta' = \frac{\sin 1''}{k} \, \frac{(t_3 - t_2)\,\delta_3' + (t_2 - t_1)\,\delta_1'}{t_3 - t_1};$$

$$\alpha'' = \frac{2}{k^2} \sin 1'' \frac{\alpha_1' - \alpha_3'}{t_3 - t_1}, \qquad \delta'' = \frac{2}{k^2} \sin 1'' \frac{\delta_1' - \delta_3'}{t_3 - t_1}.$$

$$\log \frac{\sin 1''}{k} = 6.4499934 - 10, \qquad \log \frac{2 \sin 1''}{k^2} = 8.5154420 - 10.$$

$$(tg\,\delta)' = \sec^2\delta\,\delta'; \qquad (tg\,\delta)'' = \sec^2\delta\,[2\,tg\,\delta\,\delta'^2 + \delta''].$$

III a, b, c [1]).

$$n = \alpha'^2\, tg\,\delta + (tg\,\delta)'',$$

$$C_1 = tg\,\delta \cos(A - \alpha) - tg\,D, \qquad C_2 = \sin(A - \alpha), \qquad C_3 = S\cos(A - \alpha),$$

$$c = \cos\psi = \sin\delta\,\sin D + \cos\delta\,\cos D\,\cos(A - \alpha), \qquad s = \sin\psi.$$

C_3 wird nur zur Berechnung von σ'' gebraucht und kann gewöhnlich fortgelassen werden. Da alle Grössen sich auf die Epoche beziehen, ist das Subscript 2 oder 0 auch bei α_2, δ_2 fortgelassen.

$$\Gamma = \frac{C_2}{C_1}, \qquad \Phi = \alpha' + \Gamma\,(tg\,\delta)', \qquad \frac{\lambda}{\varkappa} = -\frac{\alpha'' + \Gamma n}{2\,\Phi}.$$

$$a_x = \cos\alpha\,\frac{\lambda}{\varkappa} - \sin\alpha\,\alpha', \qquad a_y = \sin\alpha\,\frac{\lambda}{\varkappa} + \cos\alpha\,\alpha', \qquad a_z = tg\,\delta\,\frac{\lambda}{\varkappa} + (tg\,\delta)'.$$

Ferner nur für III c allgemeine Bahnen; oder auch für III a, wenn man im Laufe der Rechnung die Zulässigkeit der Annahme einer Parabel prüfen will, was bei sehr kleinen Zwischenzeiten gewöhnlich nicht nöthig ist:

$$N = \alpha'^3\, tg\,\delta - \alpha''\,(tg\,\delta)' + \alpha'\,(tg\,\delta)'', \quad \varkappa = -\frac{S}{N}\{C_1\,\alpha' + C_2\,(tg\,\delta)'\}.$$

IV a, b [2]) [3]).

$$a^2 = [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]\cos^2\delta, \qquad b = [a_x X' + a_y Y' + a_z Z']\cos\delta, \qquad G^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$

$$q'^2 = \frac{a^2 G^2 - b^2}{a^4 R^2}, \quad p' = \frac{b}{a^2 R}, \quad \text{IV a: } h = \frac{2}{a^2 R^3}, \quad \text{IV b: } h = \frac{1}{a^2 R^3}, \quad c' = c - p'.$$

Die geocentrische Distanz $\varrho = Rz$, wobei z sich aus der Lösung der folgenden Gleichungen ergiebt:

$$y' = f(\vartheta) = (\zeta + c')^2 - (\eta - q'^2) = 0, \qquad \zeta = s\,tg\,\vartheta, \qquad \eta = \frac{h}{s}\cos\vartheta.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{IV a:} & \cos\vartheta_m = \dfrac{a^2 q'^2 s}{2} \\ \text{IV b:} & \cos\vartheta_m = a^2 q'^2 s \end{array}\right\} \psi - 90 < \vartheta < \vartheta_m, \qquad z_1 = s\,tg\,\vartheta + c.$$

Anleitungen zur schnellen graphischen Bestimmung von z_1 aus diesen Gleichungen finden sich auf S. 470. Zur Verbesserung von z_1:

---

[1]) Zur Parallaxenelimination ist ausserdem zu berechnen:

$$c_1 = tg\,\delta\cos(a - \alpha) - tg\,d, \quad c_2 = \sin(a - \alpha), \quad c_3 = j\cos(a - \alpha), \quad \gamma = \frac{c_2}{c_1}, \quad \beta = -\frac{j\,c_2}{2}\,\frac{1 - \frac{\Gamma}{\gamma}}{\Phi},$$

$[X]' = X' + (\Delta X)' + \beta \cos\alpha$ anstatt X', $\qquad [Y]' = Y' + (\Delta Y)' + \beta \sin\alpha$ anstatt Y',

$[Z]' = Z' + (\Delta Z)' + \beta\, tg\,\delta$ anstatt Z'.

$$\text{III c:} \quad \Delta\varkappa = -\frac{j}{N}\,[c_1\,\alpha' + c_2\,(tg\,\delta)'].$$

[2]) IV b: Man vergewissere sich über die Möglichkeit einer Lösung. Die Criterien für die Anzahl der Lösungen finden sich in den Anmerkungen 1, S. 468 für die Parabel, S. 472 für den Kreis.

[3]) Zur Parallaxenelimination hat man in G^2 und in b zu setzen: $[X]'$ anstatt X', $[Y]'$ anstatt Y', $[Z]'$ anstatt Z'.

$$\mu_1 = (z_1 - c)^2 + s^2, \qquad M_1 = (z_1 - p')^2 + q'^2 - h\,\mu_1^{-1/2},$$

$$z_2 = z_1 - \frac{M_1}{2\,(z_1 - p') + (h\,\mu_1^{-1/2})\,(z_1 - c)\,\mu_1^{-1}}, \text{ etc.}$$

$$\text{IVa: } m = -\frac{\varkappa}{R^4 \cos\delta}, \qquad z_L = m\,(1 - \mu^{-3/2}).$$

IVa: Aus der Differenz $z - z_L$ entscheidet man, ob eine und, im Falle dreier Lösungen, welche Parabel möglich ist, siehe S. 471. Ist eine Parabel nicht möglich, so geht man zur allgemeinen Bahn nach IVc über.

IVc [1]).

$$m = -\frac{\varkappa}{R^4 \cos\delta},$$

z mit den Argumenten ψ und $\frac{1}{m}$ aus Tafel XVI.

Va, b, c.

$$\varrho = R z, \qquad \sigma = \varrho \cos\delta, \qquad \sigma'' = \sigma\left[\frac{C_3}{\varkappa} + \alpha'^2 - \frac{1}{r^3}\right],$$

wo die Formel für r weiter unten folgt,

$$\varrho_1 = \frac{\sigma}{\cos\delta_1}\left[1 - \frac{\lambda}{\varkappa}\,\tau_3\right] + \frac{\tau_3^2\,\sigma''}{2\cos\delta_1}, \qquad \varrho_3 = \frac{\sigma}{\cos\delta_3}\left[1 + \frac{\lambda}{\varkappa}\,\tau_1\right] + \frac{\tau_1^2\,\sigma''}{2\cos\delta_3}.$$

Die Berechnung von σ'' kann gewöhnlich fortgelassen werden [2]). Dann sind in ϱ_1 und ϱ_3 die mit dem Quadrate der Zwischenzeiten multiplicirten Glieder der Null gleich zu setzen. Mit ϱ_1, $\varrho_2 = \varrho$, ϱ_3 berechnet man jetzt die drei reducirten Beobachtungszeiten nach: Reducirte Beobachtungszeit t = Beobachtungszeit $t - \alpha\varrho$, wo nach S. 118 in Decimalen des Tages $\log\alpha = 7.76112 - 10$ ist (bei Annahme von 498ˢ,65 Lichtzeit: 7,76129 — 10).

$$\tau_1 = k\,(t_3 - t_2), \qquad \tau_3 = k\,(t_2 - t_1), \qquad \log k = 8.2355814 - 10.$$

$$x = \sigma\cos\alpha - X\,{}^{3)}, \qquad y = \sigma \sin\alpha - Y, \qquad z = \sigma \,tg\,\delta - Z, \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ r^2 = R^2\mu \text{ Controlle,} \end{cases}$$

$$x' = a_x\,\sigma - X', \qquad y' = a_y\,\sigma - Y', \qquad z' = a_z\,\sigma - Z', \qquad r\,r' = x\,x' + y\,y' + z\,z'.$$

Um den Charakter der Bahn zu bestimmen, kann man gleich berechnen:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2, \qquad p = r^2\,[g^2 - r'^2], \qquad e^2 = \frac{a - p}{a}.$$

Für die Parabel ist: $p = 2q = 2r - (r\,r')^2$. Als Controlle der Rechnung muss sein: für die Parabel $\frac{1}{a} = 0$; für den Kreis $a = r$.

---

[1]) Zur Parallaxenelimination rechne man noch:

$$(m) = m\left(1 + \frac{3\,\Delta_2 R}{R}\right) + \frac{\Delta\,\varkappa}{R\cos\delta}$$

und dann zur Verbesserung des Tafelwerthes z_1 [wo mit Vernachlässigung der Parallaxe $(m) = m$ ist]

$$\mu_1 = (z_1 - c)^2 + s^2, \qquad (\nu)_1 = z_1 - (m), \qquad \mu_1^3\,(\nu)_1^2 - m^2 = M_1,$$

$$z_2 = z_1 - \frac{M_1}{2\,\mu_1^2\,(\nu)_1\,[\mu_1 + 3\,(\nu)_1\,(z_1 - c)]} \text{ u. s. w.}$$

[2]) Die Berechnung von σ'' ist ausser bei längeren Zwischenzeiten nur angebracht, wenn zwischen der ersten und dritten Beobachtung σ' das Zeichen wechselt, was man aus sehr kleinen Werthen von σ' schliessen kann.

[3]) Ist aber die Parallaxe vollständig eliminirt worden, so setze man (X) anstatt X etc., und $[X]'$ anstatt X', etc.

VI a, b, c.

Nur für VI b:

$$a = r, \quad f_1 = 1 - \frac{\tau_3^2}{2a^3} + \frac{\tau_3^4}{24\,a^6} \cdots \quad g_1 = -\tau_3 + \frac{\tau_3^3}{6a^3} - \frac{\tau_3^5}{120\,a^6} \cdots,$$

$$f_3 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2a^3} + \frac{\tau_1^4}{24\,a^6} \cdots, \quad g_3 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6a^3} + \frac{\tau_1^5}{120\,a^6} \cdots$$

VI a, VI c:

$$f(2) = -\frac{1}{2r^3},\ f(3) = \frac{r'}{2r^4},\ f(4) = \frac{1}{6r^6}\left[1 - \left(\frac{15}{4}\frac{(rr')^2}{r} + \frac{3}{4}\frac{r}{a}\right)\right],\ f(5) = -\frac{r'}{2r^7}\left[1 - \left(\frac{7}{4}\frac{(rr')^2}{r} + \frac{3}{4}\frac{r}{a}\right)\right],$$

$$g(3) = -\frac{1}{6r^3},\ g(4) = \frac{r'}{4r^4},\ g(5) = \frac{1}{12r^6}\left[1 - \left(\frac{9}{2}\frac{(rr')^2}{r} + \frac{9}{10}\frac{r}{a}\right)\right],\ g(6) = -\frac{7}{24}\frac{r'}{r^7}\left[1 - \left(2\frac{(rr')^2}{r} + \frac{6}{7}\frac{r}{a}\right)\right].$$

$$f_1 = 1 + \tau_3^2 f(2) - \tau_3^3 f(3) + \tau_3^4 f(4) - \tau_3^5 f(5) + \cdots \quad g_1 = -\tau_3 - \tau_3^3\, g(3) + \tau_3^4\, g(4) - \tau_3^5\, g(5) + \tau_3^6\, g(6) - \cdots$$

$$f_3 = 1 + \tau_1^2 f(2) + \tau_1^3 f(3) + \tau_1^4 f(4) + \tau_1^5 f(5) + \cdots \quad g_3 = \tau_1 + \tau_1^3\, g(3) + \tau_1^4\, g(4) + \tau_1^5\, g(5) + \tau_1^6\, g(6) + \cdots$$

Für die Parabel verschwinden die durch a dividirten Glieder. Im Allgemeinen genügen die mit $f(1)$, $f(3)$, $g(3)$ multiplicirten Glieder. Man vergewissert sich zunächst durch angenäherte Rechnung der letzten Glieder, ob man mit den Reihen auskommt. Im Nothfalle sind die im II. Abschnitte entwickelten geschlossenen Ausdrücke für f und g zu benutzen, oder man berechnet zunächst die Constanten für den Aequator aus VII, 1a, VII, 1b, VII, 1c.

$$\varrho_1 \cos\delta_1 \cos\alpha_1 = X_1 + f_1 x + g_1 x' = \xi_1, \qquad \varrho_3 \cos\delta_3 \cos\alpha_3 = X_3 + f_3 x + g_3 x' = \xi_3,$$

$$\varrho_1 \cos\delta_1 \sin\alpha_1 = Y_1 + f_1 y + g_1 y' = \eta_1, \qquad \varrho_3 \cos\delta_3 \sin\alpha_3 = Y_3 + f_3 y + g_3 y' = \eta_3,$$

$$\varrho_1 \sin\delta_1 = Z_1 + f_1 z + g_1 z' = \zeta_1, \qquad \varrho_3 \sin\delta_3 = Z_3 + f_3 z + g_3 z' = \zeta_3.$$

Hat man aber die Constanten für den Aequator berechnet, so berechnet man aus diesen die Oerter in der üblichen Weise. Mit den resultirenden Werthen von ϱ_1 und ϱ_3 reducire man den ersten und dritten beobachteten Ort auf das Erdcentrum mit den geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxenfactoren [1]).

Dann bilde man die Unterschiede Beobachtung — Rechnung $\partial,\alpha_1 = \cos\delta_1\ \partial\alpha_1$, $\partial\delta_1$, $\partial,\alpha_3 = \cos\delta_3\ \partial\alpha_3$, $\partial\delta_3$. Sind diese Unterschiede zufriedenstellend, so berechne man die noch fehlenden Elemente nach VII a, b, c. Will man aber die Beobachtungen noch genauer darstellen, so wende man zunächst eine der unter B. zusammengestellten Methoden der Bahnverbesserung an.

VII a, b, c.

Reducirte Zeit der Epoche: $t_2 - \alpha\varrho_2$. ε = mittlere Schiefe der Ekliptik am Jahresanfang.

(a) Parabel: $p = 2q = 2r - (rr')^2$, $e \sin v = r'\sqrt{p}$, $e \cos v = \frac{p}{r} - 1$, $e = 1$, Controlle, oder für v:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}, \text{ Controlle,} \qquad \sin\frac{v}{2} = r'\sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{r'}{g}, \qquad \cos\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{q}{r}},$$

wo v dasselbe Vorzeichen wie r' erhält.

(c) Allgemeine Bahn: $g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $\quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2$, $\quad p = r^2(g^2 - r'^2)$,

$$e \sin v = r'\sqrt{p}, \qquad e\cos v = \frac{p}{r} - 1, \qquad a = \frac{p}{1 - e^2}, \text{ Controlle.}$$

---

[1]) Hat man aber die Parallaxe eliminirt, so setzt man einfach $(X)_1$ anstatt X_1 u. s. w., $(X)_3$ anstatt X_3 u. s. w.

Weiter kann man 1. die Constanten für den Aequator zuerst und aus diesen die ekliptikalen Elemente, oder 2. die äquatorealen Elemente zuerst und aus diesen die Constanten für den Aequator berechnen. Im letzteren Falle sind dann die Elemente noch auf die Ekliptik zu übertragen.

1. (a), (c) Parabel und allgemeine Bahn:

$$\sin a \sin(A'+v) = \frac{x}{r}, \qquad \sin b \sin(B'+v) = \frac{y}{r}, \qquad \sin c \sin(C'+v) = \frac{z}{r},$$

$$\sin a \cos(A'+v) = \frac{r x' - x r'}{\sqrt{p}}, \quad \sin b \cos(B'+v) = \frac{r y' - y r'}{\sqrt{p}}, \quad \sin c \cos(C'+v) = \frac{r z' - z r'}{\sqrt{p}}.$$

$$\frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \cos u = \sin c \cos(C'+v) - \sin b \cos(B'+v) \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$\frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \sin u = \sin c \sin(C'+v) - \sin b \sin(B'+v) \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$\omega = u - v, \qquad A = A' - \omega, \qquad B = B' - \omega, \qquad C = C' - \omega.$$

1. (b) Kreisbahn:

$$p = a = r, \qquad (r' = 0),$$

$$\sin a \sin A' = \frac{x}{a}, \qquad \sin b \sin B' = \frac{y}{a}, \qquad \sin c \sin C' = \frac{z}{a},$$

$$\sin a \cos A' = \sqrt{a}\, x', \qquad \sin b \cos B' = \sqrt{a}\, y', \qquad \sin c \cos C' = \sqrt{a}\, z',$$

$$\frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \cos u = \sin c \cos C' - \sin b \cos B' \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$\frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \sin u = \sin c \sin C' - \sin b \sin B' \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$A = A' - u, \qquad B = B' - u, \qquad C = C' - u.$$

1. (a), (b), (c):

$$\cos i = -\sin a \cos A \operatorname{cosec} \Omega.$$

$$\sin \Omega = \frac{\sin b \sin B}{\cos \varepsilon} = \frac{\sin c \sin C}{\sin \varepsilon}, \quad \text{Controlle.}$$

$$\cos \Omega = \sin a \sin A, \qquad \pi = \omega + \Omega, \qquad \operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin(C - B)}{\sin a \cos A}, \quad \text{Controlle.}$$

Die oben berechneten Elemente beziehen sich auf die Ekliptik.

Oder 2. (a), (b), (c):

$$\text{Aequator} \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{p} \cos(i) = x y' - y x', & r \sin(u) = \dfrac{z}{\sin(i)}, \\ \sqrt{p} \sin(i) \sin(\Omega) = y z' - z y', & r \cos(u) = x \cos(\Omega) + y \sin(\Omega), \\ \sqrt{p} \sin(i) \cos(\Omega) = x z' - z x' & r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{Controlle.} \end{array} \right.$$

$$\sin a \sin(A) = \cos(\Omega), \qquad \sin b \sin(B) = \sin(\Omega), \qquad (C) = 0,$$

$$\sin a \cos(A) = -\sin(\Omega) \cos(i), \quad \sin b \cos(B) = \cos(\Omega) \cos(i), \quad \sin c = \sin(i).$$

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[\Omega + \sigma] &= \sin \tfrac{1}{2}[(i) + \varepsilon] \sin \tfrac{1}{2}(\Omega) \\ \sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[\Omega + \sigma] &= \sin \tfrac{1}{2}[(i) - \varepsilon] \cos \tfrac{1}{2}(\Omega) \\ \cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[\Omega - \sigma] &= \cos \tfrac{1}{2}[(i) + \varepsilon] \sin \tfrac{1}{2}(\Omega) \\ \cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[\Omega - \sigma] &= \cos \tfrac{1}{2}[(i) - \varepsilon] \cos \tfrac{1}{2}(\Omega) \end{aligned}$$

$$(\omega) = (u) - v, \quad \omega = (\omega) - \sigma, \quad \pi = \Omega + \omega, \quad A' = (A) + (\omega), \quad B' = (B) + (\omega), \quad C' = (\omega),$$

wo nun i, Ω, ω, π ebenfalls auf die Ekliptik bezogen sind, und wo für die Kreisbahn ω und π fortzulassen sind, und $A + u$ anstatt $A' + v$ etc. zu setzen ist, wo $A = (A) + \sigma$ etc. ist.

Ellipse:

$$tg\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, tg\frac{v}{2},$$

$$M = E - \frac{e}{\sin 1''}\sin E,$$

$$\mu = k'' a^{-3/2},$$

$$\log k'' = 3.5500066,$$

Epoche $= t_2 - \alpha\varrho_2$.

Parabel:

$$q = \frac{p}{2},$$

Mit v als Argument, M aus der Barkerschen Tafel VI,

$$T = t_2 - \alpha\varrho_2 - M_2 q^{3/2}$$

Hyperbel:

$$tg\frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\, tg\frac{v}{2},$$

$$T = t_2 - \alpha\varrho_2 - \frac{(-a)^{3/2}}{k}\left[e\, tg F - \frac{\log tg\left[45^0 + \frac{F}{2}\right]}{Mod.}\right].$$

Die Ephemeride berechnet man wie gewöhnlich aus den Constanten für den Aequator oder mit Benutzung der Reihen (VI) oder der geschlossenen Ausdrücke (B.) für f und g.

B. Die Methoden der Bahnverbesserung.

α) Verbesserung der directen Lösung mit Beibehaltung der mittleren Beobachtung.

Man setze die Unterschiede $(B-R)$, $\partial,\alpha_1 = \cos\delta_1\,\partial\alpha_1$, $\partial\delta_1$, $\partial,\alpha_3 = \cos\delta_3\,\partial\alpha_3$, $\partial\delta_3$ in Theilen des Radius an. Hat man bei der Berechnung von f_1 und f_3 höchstens noch die mit τ^4 multiplicirten Glieder mitzunehmen brauchen, dann rechne man nach folgenden Formeln:

a) Bahnverbesserung mit Benutzung der Reihen für ∂f und ∂g.

Für eine Parabel oder eine allgemeine Bahn:

$$\cos\beta = \frac{\varrho - R\cos\psi}{r}$$

$$\left.\begin{aligned}
f_{x_1} &= \frac{f_1}{\varrho}\,\xi + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_3^2 x - \tau_3^3\left(x' - \frac{4r'}{r}x\right)\right]; & f_{x_3} &= \frac{f_3}{\varrho}\,\xi + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_1^2 x + \tau_1^3\left(x' - \frac{4r'}{r}x\right)\right]\\
f_{y_1} &= \frac{f_1}{\varrho}\,\eta + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_3^2 y - \tau_3^3\left(y' - \frac{4r'}{r}y\right)\right]; & f_{y_3} &= \frac{f_3}{\varrho}\,\eta + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_1^2 y + \tau_1^3\left(y' - \frac{4r'}{r}y\right)\right]\\
f_{z_1} &= \frac{f_1}{\varrho}\,\zeta + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_3^2 z - \tau_3^3\left(z' - \frac{4r'}{r}z\right)\right]; & f_{z_3} &= \frac{f_3}{\varrho}\,\zeta + \frac{\cos\beta}{2r^4}\left[3\tau_1^2 z + \tau_1^3\left(z' - \frac{4r'}{r}z\right)\right]\\
A_1{}^{1)} &= \frac{1}{\varrho_1}\left[\cos\alpha_1 f_{y_1} - \sin\alpha_1 f_{x_1}\right]; & A_3{}^{1)} &= \frac{1}{\varrho_3}\left[\cos\alpha_3 f_{y_3} - \sin\alpha_3 f_{x_3}\right]\\
B_1{}^{1)} &= -\frac{1}{\varrho_1}\left[\sin\delta_1(\sin\alpha_1 f_{y_1} + \cos\alpha_1 f_{x_1}) - \cos\delta_1 f_{z_1}\right]; & B_3{}^{1)} &= -\frac{1}{\varrho_3}\left[\sin\delta_3(\sin\alpha_3 f_{y_3} + \cos\alpha_3 f_{x_3}) - \cos\delta_3 f_{z_3}\right]\\
C_1 &= \frac{g_1}{\varrho_1}; & C_3 &= \frac{g_3}{\varrho_3}
\end{aligned}\right\}\ \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= \frac{C_3\cos\alpha_3\,\partial,\alpha_1 - C_1\cos\alpha_1\,\partial,\alpha_3}{C_1 C_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; & Q_x &= \frac{A_1 C_3\cos\alpha_3 - A_3 C_1\cos\alpha_1}{C_1 C_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\\
P_y &= \frac{C_3\sin\alpha_3\,\partial,\alpha_1 - C_1\sin\alpha_1\,\partial,\alpha_3}{C_1 C_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; & Q_y &= \frac{A_1 C_3\sin\alpha_3 - A_3 C_1\sin\alpha_1}{C_1 C_3\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\\
P_{z_1} &= \frac{\partial\delta_1 + C_1\sin\delta_1(\cos\alpha_1 P_x + \sin\alpha_1 P_y)}{C_1\cos\delta_1}; & Q_{x_1} &= \frac{B_1 + C_1\sin\delta_1(\cos\alpha_1 Q_x + \sin\alpha_1 Q_y)}{C_1\cos\delta_1}\\
P_{z_3} &= \frac{\partial\delta_3 + C_3\sin\delta_3(\cos\alpha_t P_x + \sin\alpha_3 P_y)}{C_3\cos\delta_3}; & Q_{z_3} &= \frac{B_3 + C_3\sin\delta_3(\cos\alpha_3 Q_x + \sin\alpha_3 Q_y)}{C_3\cos C_3}
\end{aligned}\right\}\ \text{(II)}$$

1) Zur Elimination etwaiger Aenderung der Parallaxencorrectionen sind die Correctionsglieder, Formel 187, S. 490, zu berücksichtigen.

Für eine allgemeine Bahn:

$$\left.\begin{array}{c}\partial\varrho = \dfrac{P_{z_3}-P_{z_1}}{Q_{z_3}-Q_{z_1}};\quad \partial x' = P_x - Q_x\partial\varrho;\quad \partial y' = P_y - Q_y\partial\varrho;\quad \partial z' = P_{z_1} - Q_{z_1}\partial\varrho \\ \text{oder } \partial z' = P_{z_3} - Q_{z_3}\partial\varrho \\ \partial x = \dfrac{\xi}{\varrho}\partial\varrho;\qquad \partial y = \dfrac{\eta}{\varrho}\partial\varrho;\qquad \partial z = \dfrac{\zeta}{\varrho}\partial\varrho\end{array}\right\}\quad \text{(III)}$$

Die sechs Correctionen ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ werden nun an die Anfangswerthe x, y, z, x', y', z' angebracht; mit diesen neuen Werthen werden dann die verbesserten Elemente nach A, VII berechnet.

Für eine Parabel:

$$P = \frac{1}{2a} - [x'P_x + y'P_y + z'P_z];\qquad Q = \frac{\cos\beta}{r^2} - [x'Q_x + y'Q_y + z'Q_z]\qquad \text{(IV)}$$

Je nachdem man δ_1 oder δ_3 genau repräsentiren will, setze man $P_z = P_{z_1}$, $Q_z = Q_{z_1}$; oder $P_z = P_{z_3}$, $Q_z = Q_{z_3}$. Will man aber die schliesslich übrig bleibenden Fehler auf die äusseren Declinationen vertheilen, dann sind Werthe P_z und Q_z anzuwenden, die sowohl von P_{z_1} als P_{z_3}, und Q_{z_1} als Q_{z_3}, respective, abhängen. Will man ferner die Fehler in den äusseren Orten gleich machen, so ertheilt man zur Bestimmung von P_z, Q_z den Coëfficienten P_{z_1}, P_{z_3} und Q_{z_1}, Q_{z_3} Gewichte, die sich direct aus den Zwischenzeiten und dem Gange der Function $\sin\delta$ ergeben.

In der Praxis ist es jedenfalls am besten, $P_z = P_{z_3}$ und $Q_z = Q_{z_3}$ zu setzen.

$$Q\partial\varrho = P - \frac{1}{2}[(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1-3\cos^2\beta}{2r^3}(\partial\varrho)^2 + \frac{3\cos\beta(1-{}^5/_3\cos^2\beta)}{2r^4}(\partial\varrho)^3\cdots\quad \text{(V)}$$

Dies rechnet man nach Annäherungen. In der ersten Annäherung ist:

$$\partial\varrho = \frac{P}{Q};\quad \partial x' = P_x - Q_x\partial\varrho;\quad \partial y' = P_y - Q_y\partial\varrho;\quad \partial z' = P_z - Q_z\partial\varrho\qquad \text{(VI)}$$

Diese Werthe substituirt man in die Glieder rechter Hand der Gleichung (V), und rechnet einen genaueren Werth von $\partial\varrho$, u. s. w. Somit ergeben sich gleichzeitig die endgültigen Werthe der gesuchten Correctionen $\partial\varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$. Des weiteren verfährt man ganz ähnlich wie oben, im Falle der allgemeinen Bahn. Mit den neuen Werthen x, y, z, x', y', z' hat man als Controlle:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}.$$

Wenn $g^2 \neq \frac{2}{r}$, dann besteht entweder ein Irrthum in der Rechnung, oder es waren die von $(\partial\varrho)^4$ und den höheren Potenzen abhängigen Glieder in Gleichung (V) nicht zu vernachlässigen.

Für eine Kreisbahn:

Zur Verbesserung einer Kreisbahn, entweder mit oder ohne Annahme über die Excentricität, verfährt man ganz ähnlich, wie oben im Falle der Parabel. Da aber für den Kreis die geschlossenen Ausdrücke für f und g ebenso bequem sind wie die entsprechenden Reihen, so kann man die Verbesserung einer Kreisbahn stets auf die geschlossenen Ausdrücke für f und g gründen (S. 1009, XV).

b) Bahnverbesserung mit Benutzung der geschlossenen Ausdrücke für ∂f und ∂g.

Können die obigen auf den Reihen für ∂f und ∂g beruhenden Formeln nicht angewandt werden (cf. oben S. 1004, Bα), dann hat man zunächst f_1, f_3, g_1, g_3 aus geschlossenen Formeln, wie folgt, zu ermitteln. Die dabei auftretenden Hülfsgrössen ergeben sich, wenn nicht besonders angegeben (cf. auch A, VII), in der üblichen Weise, je nach der Art der Ausgangsbahn:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Ellipse: } v, E, M, \mu, t;\ E_1, E_3, r_1, r_3;\ 2\overline{g_1} = E_1 - E,\ 2\overline{g_3} = E_3 - E;\ \gamma_1 = \sqrt{2a}\,\sin\overline{g_1};\ \gamma_3 = \sqrt{2a}\,\sin\overline{g_3}\\
&\text{Hyperbel: } F, T;\ F_1, F_3;\ v_1, v_3;\ r_1, r_3;\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{2rr_1}{p}}\sin\frac{1}{2}(v_1 - v);\ \gamma_3 = \sqrt{\frac{2rr_3}{p}}\sin\frac{1}{2}(v_3 - v)\\
&\text{Parabelnahe Bahn}^{1)}\text{: } \theta, P_1, P_3, T;\ \varepsilon, \alpha, \beta;\ M_1, x_1, n_1, v_1, \theta_1, r_1;\ M_3, x_3, n_3, v_3, \theta_3, r_3;\\
&\qquad\qquad \gamma_1 = \sqrt{\frac{2r_1r}{p}}\sin\frac{1}{2}(v_1 - v);\quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{2r_3r}{p}}\sin\frac{1}{2}(v_3 - v)\\
&\text{Parabel: } v, q, T;\ v_1, v_3,\ r_1, r_3;\ \gamma_1 = \sqrt{r_1 - q} - \sqrt{r - q};\ \gamma_3 = \sqrt{r_3 - q} - \sqrt{r - q}\\
&\text{Kreis: } 2\overline{g_1} = -\frac{\tau_3}{a^{3/2}},\ 2\overline{g_3} = \frac{\tau_1}{a^{3/2}};\ f_1 = \cos 2\overline{g_1},\ f_3 = \cos 2\overline{g_3};\ g_1 = a^{3/2}\sin 2\overline{g_1},\ g_3 = a^{3/2}\sin 2\overline{g_3}
\end{aligned}\right\}\ \text{VI}'$$

Dann rechne man für alle Ausgangsbahnen, ausgenommen die Kreisbahn:

$$f_1 = 1 - \frac{\gamma_1^2}{r},\quad f_3 = 1 - \frac{\gamma_3^2}{r};\qquad g_1^2 = [2r_1r - p\gamma_1^2]\gamma_1^2,\ g_3^2 = [2r_3r - p\gamma_3^2]\gamma_3^2\quad .\ .\ \text{VI}''$$

wo γ und g nur für ein der Epoche $t_2 = t_0$ vorangehendes Datum negativ zu nehmen ist. Und weiter im Falle einer elliptischen oder hyperbolischen Ausgangsbahn[2]):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\varrho - R\cos\psi}{r}; & \varphi &= \frac{x'\xi + y'\eta + z'\zeta}{\varrho}\\
\gamma_1^c &= \sqrt{1 - \frac{\gamma_1^2}{2a}}; & \gamma_3^c &= \sqrt{1 - \frac{\gamma_3^2}{2a}}\\
\Phi_1 &= \varphi + \frac{\sqrt{2}\cos\beta\,\gamma_1^c}{\gamma_1}; & \Phi_3 &= \varphi + \frac{\sqrt{2}\cos\beta\,\gamma_3^c}{\gamma_3}\\
M_1 &= -\frac{a\gamma_1}{rr_1}\left[r_1\gamma_1 + \gamma_1^c\left(2r\gamma_1\gamma_1^c + \frac{rr'\gamma_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_3\right)\right]\\
M_3 &= -\frac{a\gamma_3}{rr_3}\left[r_3\gamma_3 + \gamma_3^c\left(2r\gamma_3\gamma_3^c + \frac{rr'\gamma_3^2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_1\right)\right]\\
N_1 &= -a\left[\frac{3}{2}\left(-\tau_3\left\{1 - \frac{\gamma_1^2}{r_1}\right\} - g_1\right) + \frac{\gamma_1^3}{r_1}\left(\sqrt{2}\,r\gamma_1^c + \frac{rr'\gamma_1}{2}\right)\right]\\
N_3 &= -a\left[\frac{3}{2}\left(+\tau_1\left\{1 - \frac{\gamma_3^2}{r_3}\right\} - g_3\right) + \frac{\gamma_3^3}{r_3}\left(\sqrt{2}\,r\gamma_3^c + \frac{rr'\gamma_3}{2}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (\text{VII})$$

---

[1]) Cf. v. Oppolzer, „Lehrbuch der Bahnbestimmung", Vol. I, p. 73, 75.

[2]) Eine nahezu parabolische oder eine nahezu kreisförmige Ausgangsbahn macht man jedoch am besten genau parabolisch oder kreisförmig, und zwar vor der Berechnung der Unterschiede $B - R$, indem man z. B. z' willkürlich ändert, so dass genau $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}$ bezüglich $= \frac{1}{r}$ ist.

$$\left.\begin{array}{ll}
g_{x_1} = \dfrac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[x'\,r\,\gamma_1 + \sqrt{2}\,x\,\gamma_1^c]; & g_{x_3} = \dfrac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[x'\,r\,\gamma_3 + \sqrt{2}\,x\,\gamma_3^c] \\
g_{y_1} = \dfrac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[y'\,r\,\gamma_1 + \sqrt{2}\,y\,\gamma_1^c]; & g_{y_3} = \dfrac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[y'\,r\,\gamma_3 + \sqrt{2}\,y\,\gamma_3^c] \\
g_{z_1} = \dfrac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[z'\,r\,\gamma_1 + \sqrt{2}\,z\,\gamma_1^c]; & g_{z_3} = \dfrac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[z'\,r\,\gamma_3 + \sqrt{2}\,z\,\gamma_3^c] \\
m_{x_1} = x\,M_1 + x'\,N_1; & m_{x_3} = x\,M_3 + x'\,N_3 \\
m_{y_1} = y\,M_1 + y'\,N_1; & m_{y_3} = y\,M_3 + y'\,N_3 \\
m_{z_1} = z\,M_1 + z'\,N_1; & m_{z_3} = z\,M_3 + z'\,N_3 \\
f_{x_1} = f_1\,\dfrac{\xi}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{x_1} + x\gamma_1^2] + g_{x_1}\Phi_1; & f_{x_3} = f_3\,\dfrac{\xi}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{x_3} + x\gamma_3^2] + g_{x_3}\Phi_3 \\
f_{y_1} = f_1\,\dfrac{\eta}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{y_1} + y\gamma_1^2] + g_{y_1}\Phi_1; & f_{y_3} = f_3\,\dfrac{\eta}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{y_3} + y\gamma_3^2] + g_{y_3}\Phi_3 \\
f_{z_1} = f_1\,\dfrac{\zeta}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{z_1} + z\gamma_1^2] + g_{z_1}\Phi_1; & f_{z_3} = f_3\,\dfrac{\zeta}{\varrho} + \dfrac{\cos\beta}{r^2}\,[2\,m_{z_3} + z\gamma_3^2] + g_{z_3}\Phi_3
\end{array}\right\}\ \text{(VIII)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{f_1}{}^{1)} = \dfrac{1}{\varrho_1}\,[\cos\alpha_1\;f_{y_1} - \sin\alpha_1\;f_{x_1}]; & A_{f_3}{}^{1)} = \dfrac{1}{\varrho_3}\,[\cos\alpha_3\;f_{y_3} - \sin\alpha_3\;f_{x_3}] \\
A_{g_1} = \dfrac{1}{\varrho_1}\,[\cos\alpha_1\;g_{y_1} - \sin\alpha_1\;g_{x_1}]; & A_{g_3} = \dfrac{1}{\varrho_3}\,[\cos\alpha_3\;g_{y_3} - \sin\alpha_3\;g_{x_3}] \\
A_{m_1} = \dfrac{1}{\varrho_1}\,[\cos\alpha_1\,m_{y_1} - \sin\alpha_1\,m_{x_1}]; & A_{m_3} = \dfrac{1}{\varrho_3}\,[\cos\alpha_3\,m_{y_3} - \sin\alpha_3\,m_{x_3}]
\end{array}\right\}\ .\ .\ \text{(IX)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
= -\dfrac{1}{\varrho_1}\,[\sin\delta_1\,(\sin\alpha_1\;f_{y_1} + \cos\alpha_1\;f_{x_1}) - \cos\delta_1\;f_{z_1}]; & B_{f_3}{}^{1)} = -\dfrac{1}{\varrho_3}\,[\sin\delta_3\,(\sin\alpha_3\,f_{y_3} + \cos\alpha_3\,f_{x_3}) - \cos\delta_3\,f_{z_3}] \\
= -\dfrac{1}{\varrho_1}\,[\sin\delta_1\,(\sin\alpha_1\;g_{y_1} + \cos\alpha_1\;g_{x_1}) - \cos\delta_1\;g_{z_1}]; & B_{g_3} = -\dfrac{1}{\varrho_3}\,[\sin\delta_3\,(\sin\alpha_3\,g_{y_3} + \cos\alpha_3\,g_{x_3}) - \cos\delta_3\,g_{z_3}] \\
= -\dfrac{1}{\varrho_1}\,[\sin\delta_1\,(\sin\alpha_1\,m_{y_1} + \cos\alpha_1\,m_{x_1}) - \cos\delta_1\,m_{z_1}]; & B_{m_3} = -\dfrac{1}{\varrho_3}\,[\sin\delta_3\,(\sin\alpha_3 m_{y_3} + \cos\alpha_3\,m_{x_3}) - \cos\delta_3 m_{z_3}] \\
= \dfrac{g_1}{\varrho_1}; & C_3 = \dfrac{g_3}{\varrho_3}
\end{array}\right\}\text{(IX)}$$

Dann löse man die vier Gleichungen $a_i\,\partial\varrho + b_i\,\partial x' + c_i\,\partial y' + d_i\,\partial z' = n_i$, wo $i = 1, 2, 3, 4$ zu setzen, nach $\partial\varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$ und $\partial z'$ auf, wobei:

$$\left.\begin{array}{lll}
a_1 = A_{f_1}; & b_1 = -[\sin\alpha_1\,C_1 - x\,A_{g_1} - 2\,x'\,A_{m_1}]; & c_1 = [\cos\alpha_1\,C_1 + y\,A_{g_1} + 2\,y'\,A_{m_1}] \\
a_2 = B_{f_1}; & b_2 = -[\sin\delta_1\cos\alpha_1\,C_1 - x\,B_{g_1} - 2\,x'\,B_{m_1}]; & c_2 = -[\sin\delta_1\sin\alpha_1\,C_1 - y B_{g_1} - 2\,y'\,B_{m_1}] \\
a_3 = A_{f_3}; & b_3 = -[\sin\alpha_3\,C_3 - x\,A_{g_3} - 2\,x'\,A_{m_3}]; & c_3 = [\cos\alpha_3\,C_3 + y\,A_{g_3} + 2\,y'\,A_{m_3}] \\
a_4 = B_{f_3}; & b_4 = -[\sin\delta_3\cos\alpha_3\,C_3 - x\,B\quad - 2\,x'\,B_{m_3}]; & c_4 = -[\sin\delta_3\sin\alpha_3\,C_3 - y\,B_{g_3} - 2\,y'\,B_{m_3}] \\
 & d_1 = [z\,A_{g_1} + 2\,z'\,A_{m_1}]; & n_1 = \partial,\alpha_1 \\
 & d_2 = [\cos\delta_1\,C_1 + z\,B_{g_1} + 2\,z'\,B_{m_1}]; & n_2 = \partial\,\delta_1 \\
 & d_3 = [z\,A_{g_3} + 2\,z'\,A_{m_3}]; & n_3 = \partial,\alpha_3 \\
 & d_4 = [\cos\delta_3\,C_3 + z\,B_{g_3} + 2\,z'\,B_{m_3}]; & n_4 = \partial\,\delta_3
\end{array}\right\}\ \text{(X)}$$

Dann rechnet man ∂x, ∂y, ∂z nach III.

---

[1]) Siehe die Anmerkung S. 1004.

Im Falle einer parabolischen Ausgangsbahn:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\varrho - R\cos\psi}{r}\;; & \varphi &= \frac{x'\xi + y'\eta + z'\zeta}{\varrho} \\
\Phi_1 &= \varphi + \frac{\sqrt{2}\cos\beta}{\gamma_1}\;; & \Phi_3 &= \varphi + \frac{\sqrt{2}\cos\beta}{\gamma_3} \\
g_{x_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[x' r\gamma_1 + \sqrt{2}\,x]\;; & g_{x_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[x' r\gamma_3 + \sqrt{2}\,x] \\
g_{y_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[y' r\gamma_1 + \sqrt{2}\,y]\;; & g_{y_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[y' r\gamma_3 + \sqrt{2}\,y] \\
g_{z_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r\,r_1}\,[z' r\gamma_1 + \sqrt{2}\,z]\;; & g_{z_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r\,r_3}\,[z' r\gamma_3 + \sqrt{2}\,z] \\
f_{x_1} &= f_1\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,x\gamma_1^2 + \Phi_1 g_{x_1}\;; & f_{x_3} &= f_3\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,x\gamma_3^2 + \Phi_3 g_{x_3} \\
f_{y_1} &= f_1\frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,y\gamma_1^2 + \Phi_1 g_{y_1}\;; & f_{y_3} &= f_3\frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,y\gamma_3^2 + \Phi_3 g_{y_3} \\
f_{z_1} &= f_1\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,z\gamma_1^2 + \Phi_1 g_{z_1}\;; & f_{z_3} &= f_3\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\cos\beta}{r^2}\,z\gamma_3^2 + \Phi_3 g_{z_3}
\end{aligned}\right\}\;(\mathrm{XI})$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{f_1}{}^{1)} &= \frac{1}{\varrho_1}[\cos\alpha_1 f_{y_1} - \sin\alpha_1 f_{x_1}]\;; & A_{f_3}{}^{1)} &= \frac{1}{\varrho_3}[\cos\alpha_3 f_{y_3} - \sin\alpha_3 f_{x_3}] \\
A_{g_1} &= \frac{1}{\varrho_1}[\cos\alpha_1 g_{y_1} - \sin\alpha_1 g_{x_1}]\;; & A_{g_3} &= \frac{1}{\varrho_3}[\cos\alpha_3 g_{y_3} - \sin\alpha_3 g_{x_3}] \\
B_{f_1}{}^{1)} &= -\frac{1}{\varrho_1}[\sin\delta_1(\sin\alpha_1 f_{y_1} + \cos\alpha_1 f_{x_1}) - \cos\delta_1 f_{z_1}]\;; & B_{f_3}{}^{1)} &= -\frac{1}{\varrho_3}[\sin\delta_3(\sin\alpha_3 f_{y_3} + \cos\alpha_3 f_{x_3}) - \cos\delta_3 f_{z_3}] \\
B_{g_1} &= -\frac{1}{\varrho_1}[\sin\delta_1(\sin\alpha_1 g_{y_1} + \cos\alpha_1 g_{x_1}) - \cos\delta_1 g_{z_1}]\;; & B_{g_3} &= -\frac{1}{\varrho_3}[\sin\delta_3(\sin\alpha_3 g_{y_3} + \cos\alpha_3 g_{x_3}) - \cos\delta_3 g_{z_3}] \\
C_1 &= \frac{g_1}{\varrho_1}\;; & C_3 &= \frac{g_3}{\varrho_3} \\
&& A &= A_{f_1} A_{g_3} - A_{f_3} A_{g_1}
\end{aligned}\right\}\;(\mathrm{XII})$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \sin\alpha_1 C_1 A_{g_3} - \sin\alpha_3 C_3 A_{g_1}\;; & b_1 &= -[\cos\alpha_1 C_1 A_{g_3} - \cos\alpha_3 C_3 A_{g_1}] \\
a_2 &= \sin\alpha_1 C_1 A_{f_3} - \sin\alpha_3 C_3 A_{f_1} + xA\;; & b_2 &= -[\cos\alpha_1 C_1 A_{f_3} - \cos\alpha_3 C_3 A_{f_1} - yA] \\
a_3 &= \sin\delta_1 \cos\alpha_1 C_1 - xB_{g_1}\;; & b_3 &= \sin\delta_1 \sin\alpha_1 C_1 - yB_{g_1} \\
a_4 &= \sin\delta_3 \cos\alpha_3 C_3 - xB_{g_3}\;; & b_4 &= \sin\delta_3 \sin\alpha_3 C_3 - yB_{g_3} \\
d_1 &= A\;; & e_1 &= A_{g_1}\partial,\alpha_3 - A_{g_3}\partial,\alpha_1 \\
c_2 &= Az\;; & e_2 &= A_{f_1}\partial,\alpha_3 - A_{f_3}\partial,\alpha_1 \\
c_3 &= -[\cos\delta_1 C_1 + zB_{g_1}]\;; \quad d_3 = B_{f_1}\;; & e_3 &= -\partial\delta_1 \\
c_4 &= -[\cos\delta_3 C_3 + zB_{g_3}]\;; \quad d_4 = B_{f_3}: & e_4 &= -\partial\delta_3 \\
a &= a_3 - \frac{c_3}{c_2}a_2 - \frac{d_3}{d_1}a_1\;; \quad b = b_3 - \frac{c_3}{c_2}b_2 - \frac{d_3}{d_1}b_1\;; & e &= e_3 - \frac{c_3}{c_2}e_2 - \frac{d_3}{d_1}e_1
\end{aligned}\right\}\;\cdot\;\cdot\;(\mathrm{XIII})$$

[1]) Siehe die Anmerkung S. 1004.

$$\left.\begin{array}{ll}
P_x = \dfrac{b\,e_1 - b_1\,e}{a_1 b - a b_1}; & Q_x = \dfrac{-b\,d_1}{a_1\,b - a\,b_1} \\[2ex]
P_y = \dfrac{a_1\,e - a\,e_1}{a_1 b - a b_1}; & Q_y = \dfrac{a\,d_1}{a_1\,b - a\,b_1} \\[2ex]
P_{z_1} = \dfrac{e_3 - a_3 P_x - b_3 P_y}{c_3}; & Q_{z_1} = -\dfrac{d_3 + a_3 Q_x + b_3 Q_y}{c_3} \\[2ex]
P_{z_3} = \dfrac{e_4 - a_4 P_x - b_4 P_y}{c_4}; & Q_{z_3} = -\dfrac{d_4 + a_4 Q_x + b_4 Q_y}{c_4} \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\partial\varrho = \dfrac{P_{z_3} - P_{z_1}}{Q_{z_3} - Q_{z_1}}, \text{ für die allgemeine Lösung;}} \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{\text{u. s. w., wie in III.}}
\end{array}\right\} \quad . \; . \; (\mathrm{XIV})$$

Will man die corrigirte Bahn zur Parabel machen, dann verfahre man wie bei den Gleichungen (IV), (V) und (VI), S. 1005.

Im Falle einer kreisförmigen Ausgangsbahn:

$$\left.\begin{array}{lll}
d = \dfrac{3\cos\beta}{2a}; & c_1 = -\dfrac{\tau_3\,g_1}{a^3}; & c_1' = \tau_3 f_1 + g_1 \\[2ex]
 & c_3 = \dfrac{\tau_1\,g_3}{a^3}; & c_3' = -(\tau_1 f_3 - g_3) \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{f_{x_1} = f_1\,\dfrac{\xi}{\varrho} + d\,[c_1\,x + c_1'\,x'];} & f_{x_3} = f_3\,\dfrac{\xi}{\varrho} + d\,[c_3\,x + c_3'\,x'] \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{f_{y_1} = f_1\,\dfrac{\eta}{\varrho} + d\,[c_1\,y + c_1'\,y'];} & f_{y_3} = f_3\,\dfrac{\eta}{\varrho} + d\,[c_3\,y + c_3'\,y'] \\[2ex]
\multicolumn{2}{l}{f_{z_1} = f_1\,\dfrac{\zeta}{\varrho} + d\,[c_1\,z + c_1'\,z'];} & f_{z_3} = f_3\,\dfrac{\zeta}{\varrho} + d\,[c_3\,z + c_3'\,z']
\end{array}\right\} \quad . \; . \; (\mathrm{XV})$$

Mit diesen rechne man A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3, P_x, Q_c, P_y, Q_y, P_{z_1}, P_{z_3}, Q_{z_1} und Q_{z_3}, nach den Gleichungen (I) und (II), S. 1004.

Dann ist:

$$\partial\varrho = \frac{P_{z_3} - P_{z_1}}{Q_{z_3} - Q_{z_1}} \quad \text{für die allgemeine Lösung, u. s. w., wie in III.} \qquad . \; . \; (\mathrm{XVI})$$

War die Ausgangsbahn nicht genau kreisförmig, und man will die corrigirte Bahn zum Kreis machen, so rechne man:

$$\Delta = \frac{1}{a} - \frac{1}{r}$$

$$P = \frac{\Delta}{2} - [x' P_x + y' P_y + z' P_z]; \qquad Q = \frac{\cos\beta}{2\,r^2} - [x' Q_x + y' Q_y + z' Q_z]$$

wo die Werthe von P_z und Q_z wie bei der Parabel auf S. 1005 zu wählen sind. Dann durch Annäherungen:

$$Q\partial\varrho = P - \frac{1}{2}[(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1 - 3\cos^2\beta}{4\,r^3}(\partial\varrho)^2 + \frac{3\cos\beta\,(1 - {}^5\!/_3\cos^2\beta)}{4\,r^4}(\partial\varrho)^3 \ldots \qquad (\mathrm{XVII})$$

$$\partial x' = P_x - Q_x\partial\varrho; \qquad \partial y' = P_y - Q_y\partial\varrho; \qquad \partial z' = P_z - Q_z\partial\varrho$$

dann, wie in III:

$$\partial x = \frac{\xi}{\varrho}\,\partial\varrho; \qquad \partial y = \frac{\eta}{\varrho}\,\partial\varrho; \qquad \partial z = \frac{\zeta}{\varrho}\,\partial\varrho.$$

Zur Controlle, dass die Bahn ein Kreis ist, hat man:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{r}.$$

Für alle Ausgangsbahnen:

Die sechs Correctionen ∂x, ∂y, ∂z, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ bringt man nun an die zu Grunde gelegten Werthe von x, y, z, x', y', z' an und erhält so die corrigirten Werthe, aus denen, nach A, VII, die Elemente gerechnet werden.

β) Die Bahnverbesserung auf Grund einer beliebigen Ausgangsbahn.

Das Verfahren besteht einfach darin, dass man ϱ, x', y', z' für die neue Ausgangsepoche $t_0 = t_2$ aus dem gegebenen Zahlenmaterial, gewöhnlich aus den Elementen und Constanten für den Aequator berechnet, und sodann diese vier Werthe in Verbindung mit der mittleren Rectascension α und Declination δ als fundamentale Ausgangswerthe ansetzt. Mit diesen berechnet man die Unterschiede $(B-R)$ für den ersten und dritten Ort. Des Weiteren gelten die entsprechenden unter α gegebenen Differentialformeln, wobei die Sonnencoordinaten und ψ in der üblichen Weise zu berechnen sind.

Zunächst rechnet man r, v und z für die neue Ausgangsepoche $t_0 = t_2$ aus den gegebenen Elementen und Constanten für den Aequator. Dann ist:

$$\varrho = \frac{z + Z}{\sin\delta}.$$

(Ebenso erhält man ϱ_1 und ϱ_3 zur Berücksichtigung der Aberration und der Parallaxe. Existirt aber eine Ephemeride, dann können ϱ_1, ϱ und ϱ_3 interpolirt werden.)

Die Geschwindigkeiten ergeben sich aus:

Allgemeine Bahn:	Parabel:	Kreis:
$x' = \frac{\sin a}{\sqrt{p}}[\cos(A'+v)+e\cos A']$;	$x' = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin a\cos\left(A'+\frac{1}{2}v\right)\cos\frac{1}{2}v$;	$x' = \frac{\sin a\cos(A'+u)}{a^{1/2}}$
$y' = \frac{\sin b}{\sqrt{p}}[\cos(B'+v)+e\cos B']$;	$y' = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin b\cos\left(B'+\frac{1}{2}v\right)\cos\frac{1}{2}v$;	$y' = \frac{\sin b\cos(B'+u)}{a^{1/2}}$ (XVIII)
$z' = \frac{\sin c}{\sqrt{p}}[\cos(C'+v)+e\cos C']$;	$z' = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin c\cos\left(C'+\frac{1}{2}v\right)\cos\frac{1}{2}v$;	$z' = \frac{\sin c\cos(C'+u)}{a^{1/2}}$

Dann:

$$\sigma = \varrho\cos\delta; \qquad x = \sigma\cos\alpha - X; \qquad y = \sigma\sin\alpha - Y; \qquad z = \sigma\,tg\,\delta - Z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad r' = \frac{1}{r}(xx' + yy' + zz'); \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2.$$

Ist $\frac{1}{a}$ nahezu Null, und man will die Ausgangsbahn zur Parabel machen, dann kann man jetzt willkürlich einen Werth von z' wählen, so dass $g^2 = \frac{2}{r}$ wird. Ist ähnlich a nahezu gleich r, und man will die Ausgangsbahn zum Kreis machen, dann kann man willkürlich einen Werth von z' wählen, so dass $g^2 = \frac{1}{r}$ wird. Hierdurch vermeidet man die Formeln, welche bei einer allgemeinen Ausgangsbahn anzuwenden wären.

Dann rechnet man f_1, g_1, f_3, g_3 mit strenger Berücksichtigung der adoptirten Fundamentalgrössen. Sind die Reihen für f und g anwendbar, dann gelten die entsprechenden Ausdrücke unter A, VI. Ist es aber nothwendig, nach den geschlossenen Ausdrücken für f und g zu rechnen, dann gelten, je nach der Excentricität der Ausgangsbahn, die entsprechenden Formeln B, VI', VII''.

Mit x, y, z, x', y', z' und f_1, f_3, g_1 und g_3 rechnet man die Unterschiede $(B - R)$ für den ersten und dritten Ort, wie unter A, VI. Dann gelten wieder die entsprechenden Differentialformeln[1]) unter α, woraus sich wieder solche Correctionen zu ϱ, x', y' und z' ergeben, dass die Unterschiede Beobachtung — Rechnung beseitigt sind, vorausgesetzt, dass die linearen Beziehungen zwischen den Unterschieden $B - R$ und den Correctionen der Fundamentalgrössen genügen. Sind die nach A, VI berechneten neuen Unterschiede noch nicht befriedigend, so muss die Rechnung wiederholt werden; doch braucht man gewöhnlich nur die von den Unterschieden $B - R$ abhängigen Grössen neu zu rechnen. —

---

[1]) Es sei noch darauf hingewiesen, dass man, dem Sinne der obigen Formeln gemäss, dieselben statt „Differentialformeln" eben so gut auch „differentielle" Formeln oder „Correctionsformeln" nennen könnte.

In der Astronomie ist es eine üblich gewordene, mathematisch genommen nicht ganz correcte Bezeichnungsweise, Differentialformeln da zu gebrauchen, wo es sich um endliche Zuwüchse handelt. Practisch ist dies freilich belanglos. Denn man wendet diese Differentialformeln ja nur da an, wo die Zuwüchse so klein sind, dass man bereits ihre doppelten Producte und Quadrate vernachlässigen kann. Während in den Differentialformeln der reinen Mathematik das Increment Δx zum Differential dx wird durch Grenzübergang, wobei alle höheren Potenzen von Δx in der That verschwinden.

Deshalb kann man (wie Kramer in seiner zweiten Arbeit über den Hecubatypus, cf. S. 10, Anmerkung 3, sowie die Vorbemerkungen S. XXVII des vorliegenden Werkes) solche Correctionsformeln treffend als „Incrementformeln" und diese Art der Berechnung als „Corrections- oder Incrementrechnung" bezeichnen. Das Rechnungsmittel der Incrementrechnung ist dabei der Taylor'sche Satz. Hat man z. B. beim Bahnverbesserungsproblem $\alpha = f(r, w, i, \Omega)$, wie es in einer Phase der Fall ist, so ist, bei Aenderung von α um das Increment $\Delta\alpha$, nach dem Taylor'schen Satz:

$$\begin{aligned}
\alpha + \Delta\alpha = f(r + \Delta r, w + \Delta w, i + \Delta i, \Omega + \Delta\Omega) &= f(r, w, i, \Omega) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial f}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial f}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial f}{\partial \Omega}\Delta\Omega \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\Delta r)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(\Delta w)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial i^2}(\Delta i)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \Omega^2}(\Delta\Omega)^2 \\
&+ 2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial w}\Delta r\Delta w + 2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial i}\Delta r\Delta i + 2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial \Omega}\Delta r\Delta\Omega \\
&+ 2\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial i}\Delta w\Delta i + 2\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \Omega}\Delta w\Delta\Omega + 2\frac{\partial f}{\partial i}\frac{\partial f}{\partial \Omega}\Delta i\Delta\Omega\Big] \\
&+ \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Hier kennt man auch gleich den Fehler der Näherung. Practisch ist es freilich bequemer zu differentiiren. Nur sollte man in solchen Fällen eigentlich nicht das „d"-Zeichen, sondern das „Δ"-Zeichen verwenden. In den oben erwähnten Formeln ist von Leuschner das „∂"-Zeichen des partiellen Differentialquotienten gewählt; Oppolzer bevorzugt in ähnlichen Fällen das Variationszeichen „δ". Im Uebrigen ist es natürlich belanglos, ob man die obigen Formeln (und die entsprechenden der 82. Vorlesung) als „differentielle", oder als „Differential"-Formeln, oder wie sonst bezeichnet, wenn man ihren Sinn festhält. — Anmerkung des Herausgebers der dritten Ausgabe.

II. Beispiele.

Zur Erläuterung der Formeln dienen folgende Beispiele:

Erstes Beispiel.

Als Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung (Formeln *Aa*) möge folgende, von Prof. Crawford durchgeführte Rechnung der Bahn des Kometen *a* 1909 (Daniel) dienen:

Da beabsichtigt ist, eine Parabel zu berechnen, so sind die Formeln Ia, IIa, IIIa u. s. w. anzuwenden. Die Grundlage beruht auf folgenden drei Beobachtungen des Kometen *a* 1909 (Daniel):

1909 Gr. M. Z.	α (app.)	δ (app.)	Beobachter
Juni 16,5306	$1^h 41^m 54^s,1$	$+29^\circ 58' 18''$	Javelle-Nice
Juni 18,9809	1 48 49 ,5	+33 26 15	Campbell-Lick
Juni 21,9659	1 57 51 ,0	+37 25 9	Albrecht-Lick

Ia.

Reducirt auf den Jahresanfang 1909.0, einschliesslich der Aberrationsglieder:

α_1	$25^\circ 28' 38''$	δ_1	$+29^\circ 58' 25''$
α_2	27 12 29	δ_2	+33 26 22
α_3	29 27 51	δ_3	+37 25 17

Die Interpolation der Sonnencoordinaten, auf 1909.0 bezogen, ergiebt aus den American Ephemeris und Nautical Almanac für die drei Beobachtungszeiten:

X_1	+0,085434	Y_1	+0,928875	Z_1	+0,402945
X_2	+0,044042	Y_2	+0,931466	Z_2	+0,404071
X_3	−0,006472	Y_3	+0,932482	Z_3	+0,404513

Die Berechnung der Geschwindigkeiten der Sonnencoordinaten stellt sich wie folgt ($w = 1$):

1909	X	$f^{\rm I}$	$f^{\rm II}$	$f^{\rm III}$	Y	$f^{\rm I}$	$f^{\rm II}$	$f^{\rm III}$	Z	$f^{\rm I}$	$f^{\rm II}$	$f^{\rm III}$
Juni 17,5	+0,0690722				+0,9300897				+0,4034724			
		−0,0168981				+0,0009930				+0,0004316		
18,5	521741		−145		9310827		−2640		4039040		−1147	
		169126		+53		7290		+1		3169		+1
19,5	352615		−92		9318117		−2639		4042209		−1146	
		−0,0169218				+0,0004651				+0,0002023		
20,5	+0,0183397				+0,9322768				+0,4044232			

Epoche 1909, Juni 18.9809		$f(l)$	X	Y	Z
		$f^{\rm I}(a + {}^1/_2\, w)$	−0,0169126	+0,0007290	+0,0003169
		$m f^{\rm II}(a + {}^1/_2\, w)$	+ 2	+ 50	+ 22
$m =$	−0,0191	$M_1^3(m) f^{\rm III}(a + {}^1/_2\, w)$	− 2	0	0
		$k\, df(l)/dl$	−0,0169126	+0,0007340	+0,0003191
(Tafel XV) $M_1^3\ (m) =$	−0,041	$\log k\, df(l)/dl$	8,22821n	6,86570	6,50393
		$\log X'; Y'; Z'$	9,99263n	8,63012	8,26835

Theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe für die Epoche. Die Parallaxenfactoren sind in Bogenmaass angesetzt.

$\log p\alpha\varrho$ . . .	5,5810$_n$	$\log I$ . . .	5,1625$_n$	$\log I$ . . .	5,4515$_n$	$\log I$ . . .	5,0913
$\log p\delta\varrho$ . . .	5,1699	$\log II$ . .	4,8602	$\log II$ . . .	4,5712		
$\sin\alpha$	9,6601	X_2	+ 0,044042	Y_2	+ 0,931466	Z_2	+ 0,404071
$\cos\alpha$	9,9491	I	— 14	$-I$	+ 28	$-I$ . . .	— 12
$\sin\delta$	9,7412	II	+ 7	II	+ 4	Z_2	+ 0,404059
$\cos\delta$	9,9214	X_2	+ 0,044035	Y_2	+ 0,931498		

$R\cos D\cos A$ . .	8,64380	$\sin A$	9,99951	$\log(t_3-t_2)$	0,474944
$R\cos D\sin A$ . .	9,96918	$\cos A$	8,67414	$\log(t_2-t_1)$	0,389219
$tg\,A$	1,32538	$\log S = R\cos D$ . .	9,96966	$\log(t_3-t_1)$	0,735224
A	87,°2934	$R\sin D$	9,60644	$\log\tau_1$	8,7105
$A-\alpha$	60, 0853	$tg\,D$	9,63678	$\log\tau_3$	8,6248
		$\sin D$	9,59942		
		$\cos D$	9,96264		
		$\log R$	0,00702		

IIa.

$\alpha_2-\alpha_1$	+ 6231″	$\delta_2-\delta_1$	+ 12467″		
$\alpha_3-\alpha_2$	+ 8122	$\delta_3-\delta_2$	+ 14335		
$\log(\alpha_2-\alpha_1)$ . . .	3,794558	$\log(\delta_2-\delta_1)$ . . .	4,096110		
$\log(\alpha_3-\alpha_2)$ . . .	3,909663	$\log(\delta_3-\delta_2)$ . . .	4,156398	$\sec^2\delta$	0,157180
$\log\alpha'_3$	3,405339	$\log\delta'_3$	3,706891	$\log(tg\,\delta)'$	0,302780
$\log\alpha'_1$	3,434719	$\log\delta'_1$	3,681454		
Sub.	8,845043	Sub.	8,780467	$\log\delta'^2$	0,291200
$\log(\alpha'_1-\alpha'_3)$ . . .	2,250382	$\log(\delta'_1-\delta'_3)$ . . .	2,461921$_n$	$tg\,\delta$	9,819785
$\log\frac{2}{k^2}\sin 1''$ . . .	8,515442			$\log I$	0,412015
$colog\,(t_3-t_1)$ [1] . .	9,264776			$\log II = \log\delta''$ . .	0,242139$_n$
$\log\alpha''$	0,030600	$\log\delta''$	0,242139$_n$	Add.	9,680050
				$\log[I+II]$ . . .	9,922189
$\log(t_3-t_2)\,\alpha'_3$ . .	3,880283	$\log(t_3-t_2)\,\delta'_3$ . .	4,181835	$\log(tg\,\delta)''$	0,079369
$\log(t_2-t_1)\,\alpha'_1$ . .	3,823938	$\log(t_2-t_1)\,\delta'_1$ . .	4,070673		
Add.	0,273771	Add.	0,248996		
Summe	4,154054	Summe	4,430831		
$colog\,(t_3-t_1)$ . . .	9,264776				
$\log\frac{\sin 1''}{k}$	6,449993				
$\log\alpha'$	9,868823	$\log\delta'$	0,145600		

IIIa.

$\log\alpha'^2$ . . .	9,73765	$\log\alpha'$ . . .	9,86882	$\log\lambda/\varkappa\cos\alpha$.	9,52105$_n$	$\sin\delta$ . . .	9,74120
$tg\,\delta$	9,81978	$\log\Gamma\,(tg\,\delta)'$.	1,22380$_n$	$\log\alpha'\sin\alpha$.	9,52895	$\sin D$ . . .	9,59942
$\log\alpha'^2\,tg\,\delta$.	9,55743	Add.	9,98039	Sub.	0,29710	$\log I$	9,34062
$\log(tg\,\delta)''$.	0,07937	$\log\Phi$ . . .	1,20419$_n$	$\log a_x$ . . .	9,82605$_n$		
Add.	0,11416					$\cos\delta$	9,92141
$\log n$	0,19353	$\log\alpha''$ . . .	0,03060	$\log\lambda/\varkappa\sin\alpha$.	9,23211$_n$	$\cos D$ . . .	9,96264
		$\log\Gamma n$ . . .	1,11455$_n$	$\log\alpha'\cos\alpha$.	9,81789	$\cos(A-\alpha)$.	9,69785
$\cos(A-\alpha)$.	9,69785	Add.	9,96265	Add.	9,86949	$\log II$ . . .	9,58190
$tg\,\delta\cos(A\text{-}\alpha)$	9,51763	Zähler . . .	1,07720$_n$	$\log a_y$ . . .	9,68738	Add.	0,19694
$tg\,D$	9,63678	$\log(-2\,\Phi)$.	1,50522			$\log c$	9,77884
Sub.	9,49925	$\log\lambda/\varkappa$ . . .	9,57198$_n$	$\log\lambda/\varkappa\,tg\,\delta$.	9,39176$_n$		
$\log C_1$ . . .	9,01688$_n$			$\log(tg\,\delta)'$ . .	0,30278	ψ	53°,062
				Add.	9,94313		
$\log C_2$ . . .	9,93790			$\log a_z$ . . .	0,24591	$\log s$	9,90270
$\log\Gamma$ . . .	0,92102$_n$						

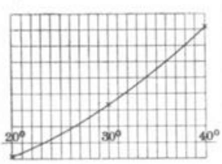
[1] $colog\,x$ bedeutet $\log\frac{1}{x}$.

IVa.

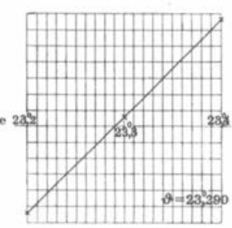
$log\ a_x^2$	9,65210	$log\ X'^2$	9,98526		
$log\ a_y^2$	9,37476	$log\ Y'^2$	7,26024	$log\ 2$	0,30103
Add.	0,18413	Add.	0,00082	$colog\ a^2$	9,57864
Summe	9,83623	Summe	9,98608	$colog\ R^3$	9,97894
$log\ a_z^2$	0,49182	$log\ Z'^2$	6,53670	$log\ h$	9,85861
Add.	0,08672	Add.	0,00015		
$log\ [\ ]$	0,57854	$log\ G^2$	9,98623		
$cos^2 \delta$	9,84282			$log\ c$	9,77884
$log\ a^2$	0,42136			$log\ p'$	9,34559
		$log\ a^2 G^2$	0,40759	Sub.	9,80019
		$log\ b^2$	9,54794	$log\ c'$	9,57903
$log\ a_x X'$	9,81868	Sub.	9,93543		
$log\ a_y Y'$	8,31750	Diff.	0,34302	c'	$+$ 0,37934
Add.	0,01348	$log\ a^4 R^2$	0,85676		
Summe	9,83216	$log\ q'^2$	9,48626		
$log\ a_z Z'$	8,51426	q'^2	$+$ 0,30638	$log\ s$	9,9027
Add.	0,02040			$log\ a^2$	0,4214
$log\ [\ ]$	9,85256			$log\ q'^2$	9,4863
$cos\ \delta$	9,92141	$log\ a^2 R$	0,42838	$colog\ 2$	9,6990
$log\ b$	9,77397	$log\ p'$	9,34559	$cos\ \vartheta_m$	9,5094
				ϑ_m	71°
				$log\ h/s$	9,95591
				h/s	$+$ 0,90346
				s	$+$ 0,79928

Graphische Bestimmung von $z = z_1$.

ϑ	z'^2	y	$f(\vartheta)$
70°	6,7	0,0	$+$ 6,7
40	1,10	0,39	$+$ 0,71
30	0,71	0,48	$+$ 0,23
20	0,45	0,54	$-$ 0,09



ϑ	z'^2	y	$f(\vartheta)$
23,4°	$+$ 0,5261	$+$ 0,5228	$+$ 0,0033
23,3	0,5237	0,5234	$+$ 0,0003
23,2	$+$ 0,5213	$+$ 0,5240	$-$ 0,0027



$tg\ \vartheta$	9,63393
$log\ s\ tg\ \vartheta$	9,53663
$log\ c$	9,77884
Add.	0,19659
$log\ z_1$	9,97543

Verbesserung von z_1.

	I.	II.
$log\ z$	9,97543	9,97548
Sub.	9,88394	9,88396
$log\ (z - p')$	9,85937	9,85944
$log\ I = log\ (z - p')^2$	9,71874	9,71888
Sub.		9,75792
$log\ (z - c)$	9,53663	9,53676
$log\ (z - c)^2$	9,07326	9,07352
Add.	0,07383 —	0,07387 —
$log\ \mu$	9,87923	9,87927
$log\ \mu^{1/2}$	9,93961	9,93963
$log\ III = log\ h\ \mu^{-1/2}$	9,91900	9,91898
I	$+$ 0,52329	$+$ 0,52346
$- III$	$-$ 0,82985	$-$ 0,82982
M	$-$ 0,00018	$+$ 0,00002
$log\ h\ \mu^{-1/2}$	9,9190	
$log\ (z - c)$	9,5366	
$log\ \mu^{-1}$	0,1208	
$log\ II$	9,5764	
$log\ I = 2\ (z - p')$	0,1604	
Add.	0,1006	
Nenner	0,2610	
$log\ (- M)$	6,2553	
$log\ \partial z$	5,9943	
Add.	0,00005	
$log\ z$	9,97548	

Die graphische Lösung hat demnach den Werth von $log\ z$ bis auf eine halbe Einheit der vierten Decimale genau ergeben.

Va.

$\log R$	0,00702	$\log \lambda/\varkappa\tau_3$	8,1968n	$\log \lambda/\varkappa\tau_1$	8,2825n
$\log z$	9,97548	$\log(1-\lambda/\varkappa\tau_3)$	0,0068	$\log(1+\lambda/\varkappa\tau_1)$	9,9916
$\log \varrho$	9,98250	$\sec\delta_1$	0,0624	$\sec\delta_3$	0,1001
		$\log\varrho_1$	9,9731	$\log\varrho_3$	9,9956
$\log\alpha\varrho$	7,7438	$\log\alpha\varrho_1$	7,7344	$\log\alpha\varrho_3$	7,7569
$\alpha\varrho$	0,0055	$\alpha\varrho_1$	0,0054	$\alpha\varrho_3$	0,0057
t_2 (Beob.)	18,9809	t_1 (Beob.)	16,5306	t_3 (Beob.)	21,9659
t_2 (reducirt)	18,9754	t_1	16,5252	t_3	21,9602
		$\log(t_2-t_1)$	0,38920	$\log(t_3-t_2)$	0,47491
		$\log\tau_3$	8,62478	$\log\tau_1$	8,71049
$\cos\delta$	9,92141				
$\log\sigma$	9,90391				
$\cos\alpha$	9,94907				
$\log\sigma\cos\alpha$	9,85298	$\log a_x\sigma$	9,72996n	$\log xx'$	9,47480
$\log X$	8,64380	$\log X'$	9,99263n	$\log yy'$	9,29306n
Sub.	9,97230	Sub.	9,91956	Add.	9,71571
$\log x$	9,82528	$\log x'$	9,64952	Summe	9,00877
				$\log zz'$	9,24177
$\sin\alpha$	9,66013			Add.	0,19997
$\log\sigma\sin\alpha$	9,56404	$\log a_y\sigma$	9,59129	$\log rr'$	9,44174
$\log Y$	9,96918	$\log Y'$	8,63012	$\log r'$	9,49508
Sub.	0,18803	Sub.	9,94970		
$\log y$	9,75207n	$\log y'$	9,54099		
$tg\,\delta$	9,81978				
$\log\sigma\,tg\,\delta$	9,72369	$\log a_z\sigma$	0,14982		
$\log Z$	9,60644	$\log Z'$	8,26835		
Sub.	9,49126	Sub.	9,99425		
$\log z$	9,09770	$\log z'$	0,14407		
$\log x^2$	9,65056	$\log x'^2$	9,29904		
$\log y^2$	9,50414	$\log y'^2$	9,08198		
Add.	0,23396	Add.	0,20592		
Summe	9,88452	Summe	9,50496		
$\log z^2$	8,19540	$\log z'^2$	0,28814		
Add.	0,00880	Add.	0,06623		
$\log r^2$	9,89332	$\log g^2$	0,35437		
$\log r$	9,94666				
		Controlle			
		$\log\frac{2}{r}$	0,35437		
Controlle					
$\log R^2$	0,01404				
$\log\mu$	9,87927				
$\log r^2$	9,89331				

VIa. Darstellung des ersten und dritten Ortes.

$f_i,\quad g_i$	1	3	$\alpha_i,\quad \delta_i$	1	3
$\log\tau$	8,62478	8,71049	$\log f_i x$	9,82471	9,82447
$\log\tau^2$	7,24956	7,42098	$\log f_i y$	9,75150n	9,75126n
$\log\tau^3$	5,8743	6,1315	$\log f_i z$	9,09713	9,09689
$\log\tau^4$	4,499	4,842	$\log g_i x'$	8,27411n	8,35974
			$\log g_i y'$	8,16558n	8,25121
$\log r^3$	9,83998		$\log g_i z'$	8,76866n	8,85429
$\log f(2)$	9,85899n				
			X_i	+ 0,085434	− 0,006472
$\log r'$	9,49508		$f_i x$	+ 0,667900	+ 0,667519
$\log 2r^4$	0,08767		$g_i x'$	− 0,018798	+ 0,022895
$\log f(3)$	9,4074		ξ_i	+ 0,734536	+ 0,683942
$\log(rr')^2$	8,8835		Y_i	+ 0,928875	+ 0,932482
$colog\, r$	0,0533		$f_i y$	− 0,564288	− 0,563975
$\log {}^{15}/_4$	0,5740		$g_i y'$	− 0,014641	+ 0,017832

VIa. Darstellung des ersten und dritten Ortes (Fortsetzung).

$f_i,\ g_i$	1	3
$log\, II$	9,5108	
$log\,(1 - II)$	9,8298	
$log\, 6\, r^6$	0,4581	
$log\, f(4)$	9,372	
$log\, g(3)$	9,3819n	
$log\, 4\, r^4$	0,3887	
$log\, g(4)$	9,106	
$log\, \tau^2 f(2)$	7,10855n	7,27997n
$log\, \tau^3 f(3)$	5,2817	5,5389
$log\, \tau^4 f(4)$	3,871	4,214
$log\, \tau^3 g(3)$	5,2562n	5,5134n
$log\, \tau^4 g(4)$	3,605	3,948
	1,000000	1,000000
$\tau^2 f(2)$	— 1284	— 1905
$+ \tau^3 f(3)$	— 19	+ 35
$\tau^4 f(4)$	+ 1	+ 2
$f_1;\ f_3$	+ 0,998698	+ 0,998132
$log\, f_1;\ log\, f_3$	9,99943	9,99913
$\mp \tau$	— 0,042148	+ 0,051344
$\mp \tau^3 g(3)$	+ 18	— 33
$\tau^4 g(4)$	0	+ 1
$g_1;\ g_3$	— 0,042130	+ 0,051312
$log\, g_1;\ log\, g_3$	8,62459n	8,71022

$\alpha_i,\ \delta_i$	1	3
η_i	+ ,0349946	+ 0,386339
Z_i	+ 0,402945	+ 0,404513
$f_i z$	+ 0,125063	+ 0,124994
$g_i z'$	— 0,058703	+ 0,071497
ζ_i	+ 0,469305	+ 0,601004
$\varrho \cos\delta \cos\alpha$	9,86601	9,83502
$\varrho \cos\delta \sin\alpha$	9,54400	9,58697
$tg\,\alpha$	9,67799	9,75195
α_R	25°,4740	29°,4611
α_B	25,4750	29,4617
$(B - R)\ \partial,\alpha$	+ 0,0010	+ 0,0006
$(B - R)\ \partial,\alpha \cos\delta$	+ 0,0009	+ 0,0005
$\sin\alpha$	9,63357	9,69182
$\cos\alpha$	9,95558	9,93987
$\varrho \cos\delta$	9,91043	9,89515
$\varrho \sin\delta$	9,67145	9,77887
$tg\,\delta$	9,76102	9,88372
δ_R	+ 29°,9761	+ 37°,4200
δ_B	+ 29,9753	+ 37,4222
$(B - R)\, \partial\delta$	— 0,0008	+ 0,0022
$\sin\delta$	9,69866	9,78366
$\cos\delta$	9,93764	9,89993
$log\, \varrho$	9,97279	9,99522
$log\, p_\alpha \varrho$	0,864n	0,932n
$log\, p_\delta \varrho$	0,748	0,493
$log\, p_\alpha$	0,891n	0,937n
$log\, p_\delta$	0,775	0,498
p_α	— 8″	— 9″
p_δ	+ 6	+ 3

VIIa1. Constanten für den Aequator 1909.0 und Elemente.

$d \quad w \quad D'$	$a \quad x \quad A'$	$b \quad y \quad B'$	$c \quad z \quad C'$
$log\, r w'$	9,59618	9,48765	0,09073
$log\, w r'$	9,32036	9,24715n	8,59278
Sub.	9,94802	0,19722	9,98598
$log\,[r w' - w r']$	9,26838	9,68487	0,07671
$\sin d \cos(D' + v)$	9,15413	9,57062	9,96246
$\sin d \sin(D' + v)$	9,87862	9,80541n	9,15104
$tg\,(D' + v)$	9,72449	0,23479n	9,18858
$(D' + v)$	79°,3202	300°,2159	8°,7758
$D' = A';\ B';\ C'$	55,3191	276,2148	344,7747
$\sin(D' + v)$	9,99241	9,93658n	9,18346
$\cos(D' + v)$	9,26792	9,70180	9,99488
$\sin d = \sin a;\ \sin b;\ \sin c$	9,88621	9,86882	9,96758

				A	50°,3324
				B	271,2281
$\log r'$	9,49508	$tg\,\varepsilon$	9,63728	C	339,7880
$\log q$	0,17718				
$\sin {}^1/_2 v$	9,31790	$\log I$	9,96246	$\sin B$	9,99990n
${}^1/_2 v$	12°,0005[6]	$\log II$	9,20790	$\sin b$	9,86882
v	24,0011	Sub.	9,91594	$\sec \varepsilon$	0,03744
$\log M$	1,24892	$\sec \varepsilon \sin i \cos u$ . .	9,87840	$\sin \Omega$	9,90616n
$\log 2r$	0,24769	$\log I$	9,15104	$\sin a$	9,88621
$\log (rr')^2$	8,88348	$\log II$	9,44269n	$\sin A$	9,88635
Sub.	9,98081	Sub.	0,17924	$\cos \Omega$	9,77256
$\log p$	0,22850	$\sec \varepsilon \sin i \sin u$ . .	9,62193	Ω	306°,3220
		$tg\,u$	9,74353		
$\log q$	9,92747	u	28°,9878		
$\log q^{3/2}$	9,89120	ω	4°,9867	$(-\sin a)$	9,88621n
$\log M q^{3/2}$	1,14012	$\sin u$	9,68540	$\cos A$	9,80505
$M q^{3/2}$	13,8077	$\cos u$	9,94187	$cosec\, \Omega$	0,09384n
t_2 Juni	18,9754	$\sec \varepsilon \sin i$	9,93653	$\cos i$	9,78510
T = Juni	5,1677 Gr. M. Z.	$\cos \varepsilon$	9,96256	i	52°,4340
		$\sin i$	9,89909	Controlle	
		Controlle		$\sin c$	9,96758
		$\sin b, \sin c$	9,83640	$\sin C$	9,53844n
		$\sin (C-B)$ . . .	9,96886	$cosec\, \varepsilon$	0,40016
		$cosec\, a$	0,11379	$\sin \Omega$	9,90618n
		$\sec A$	0,19495		
		$tg\, i$	0,11400		

Zusammenstellung der Resultate.

Elemente.

T	1909 Juni	5,1677 Gr. M. Z.
ω	4°,9867	Ekliptik 1909.0
Ω	306,3220	
i	52,4340	
$\log q$	9,92747	

Constanten für den Aequator 1909.0.

$$x = r\,[9{,}88621] \sin\,(55^\circ{,}3191 + v)$$
$$y = r\,[9{,}86882] \sin\,(276{,}2148 + v)$$
$$z = r\,[9{,}96758] \sin\,(344{,}7747 + v)$$

In dem obigen Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung ist die Rechnung ohne Weiteres durchgeführt worden, um den Gang der Rechnung nicht zu unterbrechen. Man wird wie oben verfahren, wenn man entschlossen ist, sich auf jeden Fall mit einer Parabel zu begnügen. Jedoch ist es immer rathsam, folgende Betrachtungen, welche in der That auch in diesem Falle gemacht wurden, anzustellen.

Zunächst vergewissere man sich über die Anzahl der Lösungen durch Anwendung der Kriterien in der Anmerkung 1, S. 468. Da p' und c positiv sind, so sind drei Lösungen nur möglich, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ negativ ist, d. h. wenn p negativ ist, d. h. wenn $9\,(2\,s^2 + q'^2)$ kleiner als $7\,c'^2$ ist. Eine ganz oberflächliche Abschätzung dieser beiden Ausdrücke auf Grund der oben angegebenen Werthe von s, q'^2 und c' zeigt aber sofort, dass $9\,(2\,s^2 + q'^2)$ bedeutend grösser als $7\,c'^2$ und daher nur eine Lösung möglich ist.

Ferner ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob die parabolische Hypothese innerhalb der Unsicherheit der Bahnbestimmung berechtigt war oder ob dieselbe zu verwerfen ist. Zu diesem Zwecke hat man zunächst noch N, $\varkappa$ und $\frac{1}{m}$ nach A, III a und IV a angenähert zu rechnen und die Genauigkeit von $\frac{1}{m}$ abzuschätzen. Es soll hier durch einen Punkt über der letzten verbürgten Zahl angedeutet werden, in wie weit man sich auf die diesbezüglichen Zahlen verlassen kann. Nimmt man an, daß die Beobachtungsfehler nur einige Secunden betragen, so sind die Differenzen in α und δ zu drei bezüglich vier Stellen sicher. Die betreffenden Differenzen und die Intervalle sind:

$$t_2 - t_1 = 2{,}4503, \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = 62\dot{3}1'', \qquad \delta_2 - \delta_1 = 124\dot{6}7''$$
$$t_3 - t_2 = 2{,}9850, \qquad \alpha_3 - \alpha_2 = 81\dot{2}2, \qquad \delta_3 - \delta_2 = 143\dot{3}5$$

Die nicht ganz gleichen Intervalle betragen nahezu drei Tage. Um die Sachlage besser überblicken zu können, sollen die Differenzen in α und δ durchweg durch Proportionalrechnung auf ein dreitägiges Intervall reducirt werden. Man hat dann, da die Differenzen angenähert für das Mittel der Beobachtungszeiten gelten:

	f_α^{I}	Differenz	f_α^{II}	f_δ^{I}	Differenz	f_δ^{II}
Juni 17,7557	$76\dot{2}9''$	$(5\dot{3}4'')$	$5\dot{8}9''$	$152\dot{7}6''$	$(8\dot{7}0'')$	$9\dot{6}0''$
Juni 20,4734	$81\dot{6}3$			$144\dot{0}6$		

Die in Klammern angesetzten Differenzen beziehen sich auf das Intervall von 2,7177 Tagen. Wiederum auf ein dreitägiges Intervall reducirt, ergeben sich die unter f_α^{II}, f_δ^{II} stehenden Werthe. Da α'', δ'' der Hauptsache nach von den f^{II} abhängen, so ersieht man sofort, dass diese Beschleunigungen nur auf zwei Stellen verbürgt sind. Nun hat man aber noch den durch die Vernachlässigung der f^{III} bedingten Fehler abzuschätzen. Die f^{II} betragen in α etwas weniger als ein Zehntel der f^{I}. Nimmt man ein ebensolches weiteres Fallen an, so erhält man:

$$f_\alpha^{\mathrm{III}} = 59'', \qquad f_\delta^{\mathrm{III}} = 96''.$$

Nach den Formeln (5 a), S. 452, oder auch nach S. 454 bis 455 ist aber der Fehler in den Geschwindigkeiten, bezw. Beschleunigungen, $\frac{\tau_1 \tau_3}{6}\alpha'''$ bezüglich $(\tau_3 - \tau_2)\frac{\alpha'''}{3}$; oder, da angenähert $\alpha''' = \frac{f^{\mathrm{III}}}{\tau^3}$, ferner angenähert $\tau_3 - \tau_1 = 0{,}5\,k$, und man sonst $\tau_1 = \tau_3 = \tau = 3\,k$ setzen kann, so sind die Fehler in den Geschwindigkeiten: $\frac{f^{\mathrm{III}}}{6\tau}$ und in den Beschleunigungen: $\frac{0{,}5\,k\,f^{\mathrm{III}}}{3\,\tau^3}$. Für die Geschwindigkeiten ist also $\frac{f^{\mathrm{III}}}{6}$ mit f^{I}, und für die Beschleunigungen $\frac{0{,}5\,f^{\mathrm{III}}}{9}$ mit f^{II} zu vergleichen. Für die $\frac{f^{\mathrm{III}}}{6}$ hat man nach dem Obigen $\frac{59''}{6} = 10''$ in α und $\frac{96''}{6} = 16''$ in δ. Vergleicht man diese Fehler mit den f^{I}, so ergiebt sich, dass die Unsicherheit der Geschwindigkeiten in α bezüglich δ in die dritte bezüglich vierte Stelle durch Vernachlässigung der dritten Differenzen eingedrungen ist.

Für $\frac{0{,}5\,f^{\mathrm{III}}}{9}$ erhält man $\frac{59''}{18}$ in α und $\frac{96''}{18}$ in δ, also etwa $3''+$, bezw. $5''+$. Vergleicht man diese Fehler mit den f^{II}, so überschreiten dieselben, allein genommen, die durch die angenommenen Beobachtungsfehler bedingte Unsicherheit in f^{II} und daher in den Beschleunigungen zwar nicht, vereint mit den Beobachtungsfehlern jedoch (cfr. auch S. 457) kann die Unsicherheit leicht in die zweitletzte Stelle dringen, und da in f^{II} nur drei Stellen vorhanden sind, so kann man sich genau auf nur eine Stelle verlassen. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so sind verbürgt: α' auf zwei Stellen, δ' auf drei Stellen, α'' auf eine Stelle, δ'' auf eine Stelle.

Es ist aber leicht ersichtlich, dass die Verhältnisse für δ'' etwas günstiger liegen als für α''. Aus der Rechnung von $(tg\,\delta)'$ und $(tg\,\delta)''$ folgt, dass diese Werthe von der Ordnung der Genauigkeit von δ' und δ'' sind.

Weiter lässt sich jetzt entscheiden, dass unter den obwaltenden Verhältnissen nichts durch eine vollständige Elimination der Parallaxe zu gewinnen ist; denn die Correctionen für die Parallaxe können kaum je mehr, als die in diesem Falle schon unsichere zweitletzte Stelle schädigen. Die oben durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinaten durchgeführte theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe hat nur den Zweck der späteren genauen Berechnung der Unterschiede $B-R$ für den ersten und dritten Ort, indem durch diese Elimination die geocentrische Parallaxe in den Coordinaten des mittleren Ortes berücksichtigt ist.

Durch genäherte Rechnung findet man jetzt weiter für die drei Glieder der Hülfsgrösse N nach A, III a aus den Zahlen des Beispieles:

$$N = 0{,}267 - 2{,}155 + 0{,}888 = -1{,}000.$$

Da α'' am wenigsten sicher ist, so ist das zweite Glied für die Genauigkeit von N ausschlaggebend. Nach den obigen Betrachtungen beträgt also die Unsicherheit von N einige Einheiten der ersten Decimalstelle. Weiter folgt nach A, III a: $\log \varkappa = 0{,}191$ und nach A, IV a: $\frac{1}{m} = -0{,}57$. Die Werthe von $\varkappa$ und $\frac{1}{m}$ sind von derselben Genauigkeitsordnung wie der Werth von N, was aus den entsprechenden Formeln ersichtlich ist. Schätzt man nach dem Obigen die Unsicherheit von N auf etwa 0,2, also auf etwa den fünften Theil seines Werthes, so wird auch die Unsicherheit von $\frac{1}{m}$ denselben Theil seines Werthes, also etwas mehr als 0,1 betragen. Ferner findet sich für z_L nach A, IV a: $z_L = 0{,}901$ und daher: $z - z_L = 0{,}044$. In dem hier in Betracht kommenden Theile der Tafel XVI entspricht nun eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von etwa 0,03 in $\frac{1}{m}$. Der Unterschied 0,044 zwischen z und z_L entspricht also einer Ungenauigkeit von 0,13 in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth stimmt so nahe mit der oben, ziemlich genau abgeleiteten Unsicherheit von mehr als 0,1 in $\frac{1}{m}$ überein, dass an eine Verwerfung der parabolischen Lösung nicht zu denken ist. Interpolirt man noch zum Ueberfluss den Werth von z für die allgemeine Lösung aus der Tafel XVI mit den Argumenten $\psi = 53^\circ\!,062$ und, etwas genauer als oben, $\frac{1}{m} = -0{,}5739$, so findet sich $z = 0{,}936$. Die Uebereinstimmung dieser allgemeinen Lösung mit der parabolischen Lösung $z = 0{,}945$ bestätigt das soeben abgeleitete Resultat völlig. Aus dem hier gegebenen Beobachtungsmaterial ist also eine allgemeine Bahnbestimmung mit Sicherheit nicht möglich.

Man könnte nun aus der eben angeführten Uebereinstimmung der parabolischen und allgemeinen Werthe von z den Schluss ziehen, dass es praktischer sei, sich eine erste Annäherung des parabolischen Werthes von z aus der Tafel XVI, anstatt auf graphischem Wege zu verschaffen. Dies ist aber nicht der Fall, da man in den meisten Fällen gezwungen sein würde, den Anfangswerth von z mehrfach mit Anwendung der Differentialformel in A, IV a zu verbessern.

Am Schlusse dieses Beispieles mag noch bemerkt werden, dass der geübte Rechner die oben sehr ausführlich dargestellten Betrachtungen in aller Kürze, etwa wie im zweiten Beispiele, erledigen wird.

Ferner sei noch hervorgehoben, dass der grösste Unterschied $B-R$ etwa $8''$ beträgt, und dass eine Verbesserung der parabolischen Bahn wegen der Schwierigkeit der Beobachtung dieses Kometen sich nicht lohnen würde.

Zweites Beispiel.

Als Beispiel zur Anwendung der Formeln für eine directe Bahnbestimmung, ohne Voraussetzung über die Excentricität, mit Benutzung der Tafel XVI, möge eine von Herrn W. F. Meyer und Fräulein Sophia H. Levy durchgeführte Berechnung der Bahn des Kometen e 1910 (Cerulli-Faye) dienen.

In diesem sowie in den folgenden Beispielen sind nur diejenigen Formeln ausführlich durchgerechnet, welche nicht bereits in einem vorhergehenden Beispiele erläutert sind.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang 1910.0, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

Ia.

1910 Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
Nov. 9.3131	54° 38′ 11″	+8° 43′ 3″	Millosevich-Rome
Nov. 11.5801	54 35 57	+8 9 0	Eppes-Washington
Nov. 13.8217	54 32 54	+7 36 17	Young-Lick

Sonnencoordinaten.

X_1	—0,681 211	Y_1	—0,659 264	Z_1	—0,285 987
X_2	—0,651 732	Y_2	—0,683 228	Z_2	—0,296 381
X_3	—0,621 586	Y_3	—0,705 867	Z_3	—0,306 201

Geschwindigkeiten der Sonnencoordinaten zur Zeit der mittleren Beobachtung.

$\log X'$	9,88600	$\log Y'$	$9,77878_n$	$\log Z'$	$9,41602_n$

Um zu entscheiden, ob es in Betracht der geringen Bewegung in α und der Verschiedenheit der Beobachtungsorte nötig sein wird, eine vollständige Elimination der Parallaxe vorzunehmen, sollen die diesbezüglichen Betrachtungen über die Genauigkeit der Bahnbestimmung gleich hier angestellt werden. Es ist

$t_2 - t_1$	2,2670	$\alpha_2 - \alpha_1$	134″	$\delta_2 - \delta_1$	2043″
$t_3 - t_2$	2,2416	$\alpha_3 - \alpha_2$	183	$\delta_3 - \delta_2$	1963

Wegen der Natur des Kometen können die Beobachtungen in diesem Falle als bedeutend genauer betrachtet werden, als im ersten Beispiel. Da die Zwischenzeiten fast gleich sind, so verursacht die Vernachlässigung der f^{III} keinen Fehler in den Beschleunigungen. Ueberschlagsweise auf ein $2\,{}^1/_4$tägiges Intervall reducirt, ergeben die obigen Differenzen:

f^{I}_{α}	f^{II}_{α}	f^{I}_{δ}	f^{II}_{δ}
133″	51″	2028″	58″
184		1970	

Die f^{II} betragen etwa $1/3$ bezw. $1/30$ der f^{I}. Unter der Annahme, dass die f^{III} in demselben Verhältniss weiter fallen, ergiebt sich für f_α^{III} ein Werth von etwa 16″, für f_δ^{III} etwa 2″.

Der Fehler $\frac{f^{III}}{6}$ in den Geschwindigkeiten beläuft sich also in α auf weniger als 3″, in δ auf weniger als 1″. Diese Fehler sind nicht grösser, als die relativen Beobachtungsfehler und können die durch die Beobachtungsfehler bedingte Genauigkeitsgrenze nicht erheblich schädigen.

Zur Beurteilung des Einflusses der allgemeinen Parallaxe berechne man zunächst die geocentrischen und barycentrischen Parallaxenfactoren, sowie deren Summe, auf welche es hier ankommt, nach Anmerkung 1, S. 999 des Anhanges[1]). Man erhält:

	I	II	III		I	II	III
$p_\alpha^g \varrho_g$	$-5''82$	$-5''49$	$-0''97$	$p_\delta^g \varrho_g$	$+5''30$	$+4''85$	$+4''35$
$p_\alpha^m \varrho_m$	$+5,95$	$+5,97$	$+4,27$	$p_\delta^m \varrho_m$	$+2,28$	$+1,61$	$+0,38$
$p_\alpha \varrho$	$+0,13$	$+0,48$	$+3,30$	$p_\delta \varrho$	$+7,58$	$+6,46$	$+4,73$

Die grösste Differenz der allgemeinen Parallaxenfactoren ist 3″. Dieser Werth kann daher, ebensowenig wie die f^{III}, die Genauigkeit weiter schädigen, speciell da die Bewegung des Kometen eine grosse Erdnähe nicht vermuthen lässt. Man kann sich daher mit der theilweisen Elimination der Parallaxe, auf Grund der allgemeinen Factoren durch Anbringung der Correctionen $\varDelta X = \varDelta_1 X + \varDelta_2 X$ an die mittleren Sonnencoordinaten, ähnlich wie im ersten Beispiele, begnügen. Dann erhält man für die corrigirten Sonnencoordinaten:

$$X \; -0{,}651\,757, \qquad Y \; -0{,}683\,218, \qquad Z \; -0{,}296\,406$$

und aus diesen:

A . . . . $226^0\,21'\,0''$, $\quad log\,sin\,D$ $9{,}476\,400_n$, $\quad log\,cos\,D$ $9{,}979\,592$, $\quad log\,R$ $9{,}995\,487$

ψ . . . . $167^0\,43'\,36''$, $\quad log\,c$ $9{,}989\,959_n$, $\quad log\,s$ $9{,}327\,514$.

A IIa.

$log\,\alpha''$	$9{,}21670_n$	$log\,\delta''$	$9{,}26776$	$log\,(tg\,\delta)'$	$9{,}40741_n$
$log\,\alpha'$	$8{,}29767_n$	$log\,\delta'$	$9{,}39859_n$	$log\,(tg\,\delta)''$	$9{,}31676$

A IIIa.

$log\,n$	$9{,}31688$	$log\,\Phi$	$9{,}36691_n$	$log\,a_x$	$8{,}42032$
$log\,C_1$	$9{,}23599$	$log\,\lambda/\varkappa$	$8{,}24336$	$log\,a_y$	$7{,}44387$
$log\,C_2$	$9{,}15699$			$log\,a_z$	$9{,}40313_n$

A IVa.

$log\,a^2$	$8{,}80217$	q'^2	$+14{,}6555$	c'	$-2{,}3102$
$log\,b$	$8{,}92252$	$log\,p'$	$0{,}12486$	s	$+0{,}2126$
$log\,G^2$	$0{,}00884$	$log\,h$	$1{,}51240$	h/s	$153{,}069$

Gemäss der Anmerkung 1, S. 468, ist nur eine parabolische Lösung möglich, denn es ist: $p' > 0$, $c < 0$, $\psi > 125^0\,16'$. Die graphische Lösung ergiebt: $log\,z = 0{,}090\,37$. Zur Probe auf die Richtigkeit der parabolischen Hypothese sind noch N und $\varkappa$ nach A III a, sowie m und z_L zu berechnen. Diese Rechnung folgt ausführlich, zumal weil sie sonst, nach Verwerfung der Parabel, wiederholt werden müsste.

---

[1]) Eine ausführliche Berechnung von Parallaxenfactoren etc. findet sich im fünften Beispiel.

$\log \alpha'^3$	$4{,}89301_n$	$\log C_1$	$9{,}23599$	$\log \mu$	$0{,}692$
$tg\, \delta$	$9{,}15598$	$\log I$	$7{,}53366_n$	$\log \mu^{3/2}$	$1{,}038$
$\log I$	$4{,}04899_n$			$colog\, \mu^{3/2}$	$8{,}962$
		$\log C_2$	$9{,}15679$	Sub.	$9{,}958$
$\log \alpha''$	$9{,}21670_n$	$\log II$	$8{,}56420_n$	$\log (1-\mu^{-3/2})$	$9{,}958$
$\log (tg\, \delta)'$	$9{,}40741_n$	Add.	$0{,}03870$	$\log z_L$	$9{,}894$
$\log II$	$8{,}62411$	$\log \{\ \}$	$8{,}60290_n$		
		$\log R \cos D$	$9{,}97508$	$\log z$	$0{,}090$
$\log \alpha'$	$8{,}29767_n$	$colog\, N$	$1{,}33536_n$	Sub.	$9{,}757$
$\log (tg\, \delta)''$	$9{,}31676$	$\log \varkappa$	$9{,}91334_n$	$\log (z-z_L)$	$9{,}651$
$\log III$	$7{,}61443_n$			$(z-z_L)$	$0{,}448$
		$\log R^4$	$9{,}98195$		
I	$-0{,}000001$	$\log \cos \delta$	$9{,}99559$		
$-II$	$-0{,}042083$	$\log$ Nenner	$9{,}97754$		
$+III$	$-0{,}004116$	$\log m$	$9{,}93580$		
N	$-0{,}046200$				
$\log N$	$8{,}66464_n$				

Für die Genauigkeit von N ist hier wieder das zweite von α'', d. h. von f_a^{II} abhängige Glied ausschlaggebend. Da nach dem Obigen fast nur die Beobachtungsfehler in Betracht kommen, so soll der Fehler in f_a^{II} auf $5''$, also etwa auf den zehnten Theil seines Werthes angenommen werden. Daher kann die Unsicherheit von N und sodann von $\frac{1}{m} = 1{,}15932$ auf denselben Bruchtheil seines Werthes, also auf etwa 0,12, angenommen werden. In dem in Betracht kommenden Theile der Tafel XVI entspricht nun eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von 0,0115 in $\frac{1}{m}$. Dem Unterschiede $z - z_L = 0{,}448$ entspräche daher eine Unsicherheit von 0,515 in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth ist aber mehr als das Vierfache der oben abgeleiteten Unsicherheit von $\frac{1}{m}$. Man ist daher berechtigt, die Richtigkeit der parabolischen Hypothese zu bezweifeln. Interpolirt man jetzt also genau den Werth von z für die allgemeine Lösung mit den Argumenten $\frac{1}{m}$ und ψ aus der Tafel XVI, so findet sich $\log z = 9{,}830230$ oder angenähert $z = 0{,}676$. Die Thatsache, dass dieser Werth ausserhalb des Bereiches zwischen dem parabolischen $z = 1{,}231$ und $z_L = 0{,}784$ fällt, bestätigt die Unhaltbarkeit der parabolischen Hypothese.

Der Sicherheit halber sollen jetzt aber noch die Unterschiede $B - R$ für die parabolische Hypothese direkt, wie im ersten Beispiel, berechnet werden.

A Va.

$\log \varrho$	$0{,}08586$	$\log x'$	$9{,}86769_n$	$\log r'$	$7{,}65131_n$
$\log x$	$0{,}13052$	$\log y'$	$9{,}78120$	Controlle	
$\log y$	$0{,}22181$	$\log z'$	$8{,}64902_n$	$\log g^2$	$9{,}95943$
$\log z$	$9{,}67132$			$\log 2/r$	$9{,}95944$
$\log r$	$0{,}34159$				

A VIa.

i	1	3
$\log f_i$	$9{,}99997$	$9{,}99997$
$\log g_i$	$8{,}59102_n$	$8{,}58613$
$(B-R)\ \partial, \alpha_i$	$-0{,}^s0023$	$-0{,}^s0019$
$(B-R)\ \partial\, \delta_i$	$+0{,}0041$	$+0{,}0030$
$\log \varrho_i$	$0{,}08641$	$0{,}08579$

Die parabolische Hypothese könnte also nur unter der Annahme von grösseren Beobachtungsfehlern, etwa z. B. 13″ in der mittleren Declination, welche Annahme indess bei diesem Kometen unzulässig ist, beibehalten werden. Da, wie zuvor gezeigt wurde, die vernachlässigten f''' und die Unterschiede der Parallaxenfactoren nicht für die obigen Unterschiede $B - R$ verantwortlich sind, so ist auch kein besseres Resultat durch Verbesserung der ersten Annäherung unter Beibehaltung der parabolischen Hypothese zu erwarten. Dagegen würde eine Verbesserung der obigen parabolischen Bahn, ohne Voraussetzung über die Excentricität, zu einer ausgesprochenen Ellipse führen. Diese unnöthige Rechnung ist hier unterlassen, zumal die Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung in den folgenden Beispielen ausführlich erläutert ist.

Man kann die Rechnung A V a zunächst und die Berechnung von z_L ganz vermeiden, wenn man in A III a gleich N und K und in A IV a gleich m bei der parabolischen Lösung mitbestimmt, dann z für die allgemeine Lösung angenähert aus der Tafel XVI interpolirt und endlich, wie oben, auf Grund der Unsicherheit von $\frac{1}{m}$ entscheidet, ob die parabolische Hypothese zu verwerfen ist.

Da nun in diesem Falle die parabolische Lösung zu verwerfen ist, so ist die Berechnung der Bahn nach den Formeln A V c, A VI c, A VII c abzuschliessen.

A V c.

$log\, z$	9,83023	$log\, \tau_1$	8,58614	$log\, x'$	9,87604n
$log\, \varrho$	9,82572	$log\, \tau_3$	8,59103	$log\, y'$	9,78011
$log\, \sigma$	9,82131	$log\, x$	0,01521	$log\, z'$	8,96830
$log\, \varrho_1$	9,82606	$log\, y$	0,08756	$log\, r'$	7,46052n
$log\, \varrho_3$	9,82543	$log\, z$	9,59252	$log\, g^2$	9,97171
		$log\, r$	0,21747	$log\, 1/a$	9,43966
		$log\, r^2$	0,43494	$log\, p$	0,40664
		Controlle		e	0,54590
		$log\, R^2$	9,99097		
		$log\, \mu$	0,44397	$log\, a^{3/2} = log\, P$ (in Jahren)	0,84045
		$log\, r^2$	0,43494		
				P	6,9255 Jahre

A VI c.

i	1	3
$log\, f_i$	9,99993	9,99993
$log\, g_i$	8,59101n	8,58611
$log\, \xi_i$	9,58384	9,58535
$log\, \eta_i$	9,73272	9,73284
$log\, \zeta_i$	9,00704	8,94758
$(B - R)$ $\partial \alpha_i$	$+ 0{,}^\circ0002$	$+ 0{,}^\circ0005$
$(B - R)$ $\partial \delta_i$	$+ 0{,}0005$	$- 0{,}0007$
$log\, \varrho_i$	9,82636	9,82574

Der grösste Unterschied $B - R$ für die directe allgemeine Lösung ist $\partial \delta_3 = - 2'',5$. Die beiden Unterschiede in δ könnten leicht, da dieselben entgegengesetztes Zeichen haben, durch eine willkürliche Aenderung von z' fortgeschafft werden.

Aus den obigen Erörterungen geht hervor, dass die Bahn etwas über die erste Ziffer, z. B. in der Excentricität, Periode etc. verbürgt ist. Die obigen Elemente, zusammen mit den weiter unten folgenden, führten daher auf Grund vorliegender Bahnbestimmung zur Identificirung dieses im November 1910 von Cerulli entdeckten Kometen mit dem berühmten, in der vorhergehenden Erscheinung nicht wiedergefundenen Fayeschen Kometen.

Es sollen nun weiter diesmal zunächst die auf den **Aequator** bezogenen Elemente (i), (Ω), (ω), sodann die Constanten in Bezug auf den Aequator und endlich die auf die Ekliptik bezogenen Elemente i, Ω, ω nach VII 2c berechnet werden:

VII c.

$log\, r'$	$7{,}46052_n$	$log\, xy'$	$9{,}79532$	$log\, z$	$9{,}59252$
$log \sqrt{p}$	$0{,}20332$	$log\, yx'$	$9{,}96360_n$	$sin\,(i)$	$9{,}40847$
$log\, e\, sin\, v$	$7{,}66384_n$	Sub.	$0{,}22499$	$log\, r\, sin\,(u)$	$0{,}18405$
		$log \sqrt{p}\, cos\,(i)$	$0{,}18859$		
$log\, p/r$	$0{,}18917$			$log\, x\, cos\,(\Omega)$	$9{,}99494$
Sub.	$9{,}73709$	$log\, yz'$	$9{,}05586$	$log\, y\, sin\,(\Omega)$	$9{,}56253_n$
$log\, e\, cos\, v$	$9{,}73709$	$log\, zy'$	$9{,}37263$	Add.	$9{,}79970$
$tg\, v$	$7{,}92675_n$	Sub.	$0{,}03092$	$log\, r\, cos\,(u)$	$9{,}79464$
v	$-0^\circ{,}4840$	$log \sqrt{p}\, sin(i) sin(\Omega)$	$9{,}08678_n$	$tg\,(u)$	$0{,}38941$
				(u)	$67^\circ{,}8077$
$sin\, v$	$7{,}92624_n$	$log\, xz'$	$8{,}98351$	v	$359{,}5160$
$cos\, v$	$9{,}99998$	$log\, zx'$	$9{,}46856_n$	(w)	$68{,}2917$
$log\, e$	$9{,}73711$	Sub.	$0{,}12297$	(Controlle)	
e	$0{,}54590$	$log \sqrt{p}\, sin(i) cos(\Omega)$	$9{,}59153$	$sin\,(u)$	$9{,}96657$
		$tg\,(\Omega)$	$9{,}49525_n$	$cos\,(u)$	$9{,}57716$
Controlle		(Ω)	$342^\circ{,}6311$	$log\, r$	$0{,}21748$
$log\, e^2$	$9{,}47422$	$sin\,(\Omega)$	$9{,}47497_n$		
Sub.	$9{,}84634$	$cos\,(\Omega)$	$9{,}97973$		
$log\,(1-e^2)$	$9{,}84634$	$log \sqrt{p}\, sin\,(i)$	$9{,}61180$		
$log\, a$	$0{,}56030$	$tg\,(i)$	$9{,}42321$		
		(i)	$14^\circ{,}8410$		

$sin\,(\Omega)$	$9{,}47497_n$	$sin\, \tfrac{1}{2}[(i)+\varepsilon]$	$9{,}51584$	Ω	$205^\circ{,}4848$
$cos\,(i)$	$9{,}98527$	$sin\, \tfrac{1}{2}(\Omega)$	$9{,}17895$	σ	$221{,}9528$
$sin\, a\, cos\,(A)$	$9{,}46024$	$cos\, \tfrac{1}{2}[(i)+\varepsilon]$	$9{,}97529$	(ω)	$68{,}2917$
$sin\, a\, sin\,(A)$	$9{,}97973$	$sin\, \tfrac{1}{2}[(i)-\varepsilon]$	$8{,}87544_n$	ω	$206{,}3389$
$tg\,(A)$	$0{,}51949$	$cos\, \tfrac{1}{2}(\Omega)$	$9{,}99497_n$	π	$51{,}8237$
(A)	$73^\circ{,}1774$	$cos\, \tfrac{1}{2}[(i)-\varepsilon]$	$9{,}99878$	$\tfrac{1}{2} v$	$-0{,}2420$
(ω)	$68{,}2917$	$sin\, \tfrac{1}{2} i$	$8{,}95040$	$tg\, \tfrac{1}{2} v$	$7{,}62560_n$
A'	$141{,}4691$	$cos\, \tfrac{1}{2} i$	$9{,}99825$	$log \sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$	$9{,}73398$
$sin\,(A)$	$9{,}98100$	$tg\, \tfrac{1}{2} i$	$8{,}95215$		
$cos\,(A)$	$9{,}46151$	$\tfrac{1}{2} i$	$5^\circ{,}1182$	$tg\, \tfrac{1}{2} E$	$7{,}35958_n$
$log\, sin\, a$	$9{,}99873$	i	$10{,}2364$	$\tfrac{1}{2} E$	$-0^\circ{,}1311$
$cos\,(\Omega)$	$9{,}97973$	$sin \tfrac{1}{2} i\, sin \tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$8{,}69479$	E	$-0{,}2622$
$cos\,(i)$	$9{,}98527$	$cos\, \tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$9{,}92001$	$sin\, E$	$7{,}66054_n$
$sin\, b\, cos(B)$	$9{,}96500$	$sin\, \tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$9{,}74438$	$log\, e$	$9{,}73711$
$sin\, b\, sin(B)$	$9{,}47497_n$	$sin \tfrac{1}{2} i\, cos \tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$8{,}87041$	$colog\, sin\, 1''$	$5{,}31442$
$tg(B)$	$9{,}50997_n$	$tg\, \tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$9{,}82438$	$log\, II$	$2{,}71207_n$
(B)	$-17^\circ{,}9300$	$\tfrac{1}{2}[\Omega+\sigma]$	$33^\circ{,}7188$	II	$-515'',31$
B'	$50{,}3617$	$cos \tfrac{1}{2} i\, sin \tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$9{,}15424$	$(E-II)=M$	$-428{,}69$
$sin\,(B)$	$9{,}48835_n$	$sin\, \tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$9{,}15599$	$log - k''$	$3{,}55001$
$cos\,(B)$	$9{,}97838$	$cos\, \tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$9{,}99550_n$	$colog\, a^{3/2}$	$9{,}15955$
$log\, sin\, b$	$9{,}98662$	$cos \tfrac{1}{2} i\, cos \tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$9{,}99375_n$	$log\, \mu$	$2{,}70956$
$(\omega) = C'$	$68^\circ{,}2917$	$tg\, \tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$9{,}16049_n$	μ	$512'',34$
$sin\,(i) = sin\, c$	$9{,}40847$	$\tfrac{1}{2}[\Omega-\sigma]$	$171^\circ{,}7660$	$log\, M$	$2{,}63214_n$
ε	$23^\circ{,}4508$			$log \dfrac{M}{\mu} = log(t_2 - T)$	$9{,}92258_n$
$\tfrac{1}{2}[(i)+\varepsilon]$	$19{,}1416$			$t_2 - T =$	$-0{,}8367$
$\tfrac{1}{2}[(i)-\varepsilon]$	$-4{,}3050$			$t_2 =$ Nov.	$11{,}5762$
$\tfrac{1}{2}(\Omega)$	$171{,}3157$			$T =$ 1910 Nov.	$12{,}4129$

Drittes Beispiel.

Als weiteres Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung, sowie als Beispiel dafür, wenn bei der Verbesserung einer beliebigen parabolischen Ausgangsbahn (Formeln B β), wegen kleiner heliocentrischen Distanz, sowie verhältnissmässig langer Intervalle die Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für f, g, ∂f, ∂g erforderlich wird, möge folgende, von Herrn Meyer und Fräulein Levy durchgeführte Rechnung von Bahnen des Kometen a 1910 dienen. Hier repräsentirte die erste Bahnbestimmung einen aussergewöhnlichen Fall, für welchen die Leuschner'sche Methode wie gewöhnlich eine directe Lösung ohne irgend welche vorherige Annahme ergab.

A I a.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden photographischen Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

1910, Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
Febr. 1.6153	324° 43′ 13″	+ 3° 19′ 40″	Curtis-Lick
Febr. 2.6111	325 15 6	+ 3 57 8	Curtis-Lick
Febr. 5.6146	326 40 39	+ 5 35 5	Curtis-Lick

Die Sonnencoordinaten, sowie deren Geschwindigkeiten, wurden aus den American Ephemeris and Nautical Almanac ganz wie in den beiden ersten Beispielen interpolirt.

	X	Y	Z
I	+ 0,664607	— 0,667684	— 0,289639
II	+ 0,677441	— 0,656936	— 0,284977
III	+ 0,714883	— 0,623306	— 0,270390

$log\ X'$ . . . 9,871123 $log\ Y'$ . . . 9,801678 $log\ Z'$ . . . 9,438913

Die theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinaten ergiebt:

X	+ 0,677423	Y	— 0,656965	Z	— 0,285003
A	315°,8803	D	343°,1961	$log\ R$	9,993766

$log\ \tau_1$ . . . . 8,713209 $log\ \tau_3$ 8,233753

A II a.

$log\ \alpha''$	0,239928$_n$	$log\ \delta''$	0,391686$_n$	$log\ (tg\ \delta)'$	9,791034
$log\ \alpha'$	9,721432	$log\ \delta'$	9,788966	$log\ (tg\ \delta)''$	0,384441$_n$

Wegen der Unsicherheit der Beobachtungen dieses Kometen, der Unregelmässigkeit seiner Bewegung, und der Ungleichheit der Intervalle soll hier ohne Weiteres eine parabolische Lösung durchgeführt werden.

A III a.

$log\ n$	0,38100$_n$	$log\ \lambda/\varkappa$	0,12542	$log\ a_x$	0,14516
$log\ C_1$	9,56839	ψ	22°,727	$log\ a_y$	9,51610$_n$
$log\ C_2$	9,21172$_n$	$log\ c$	9,96490	$log\ a_z$	9,85143
$log\ \Phi$	9,40597	$log\ s$	9,58698		

A IV a.

$\log a^2$	0,40677	q'^2	$+0,24961$	c'	$+0,51558$
$\log b$	0,00990	$\log p'$	9,60936	s	$+0,38635$
$\log G^2$	0,01244	$\log h$	9,91296	h/s	$+2,11825$

Da $9\,(2s^2 + q'^2) > c'^2$, so ist nach Anmerkung 1, S. 468, nur **eine** Lösung möglich. Es findet sich durch die graphische Lösung: $\log z = 0,15419$.

A V a.

		$\log \varrho$	0,14796		
$\log x$	9,67671	$\log y$	$9,15371_n$	$\log z$	9,58196
$\log x'$	0,08494	$\log y'$	$0,03890_n$	$\log z'$	9,85823
$\log r$	9,79653	$\log r'$	0,20736	$\log g^2$	0,50453

A VII a.

$\log q$	9,06780	v	$128^\circ 47' 30''$	$T =$ Jan.	16,7938 Gr. M. Z.
$\sin a$	9,88021	$\sin b$	9,98588	$\sin c$	9,84392
A'	$321^\circ{,}9211$	B'	$64^\circ{,}8574$	C'	$350^\circ{,}2816$

Darstellung des ersten und dritten Ortes mit Anwendung der **geschlossenen** Ausdrücke für f und g:

B VI'.

i	1	3
$\log\,(t_i - T)$	1,19903	1,29693
$\log M_i$	2,59733	2,69523
v_i	$127^\circ 31' 28''$	$132^\circ 1' 17''$
$^1/_2\, v_i$	63 45 44	66 0 38
$\sec^2 {}^1/_2\, v_i$	0,70896	0,78174
$\log r_i$	9,77676	9,84954
Sub.	9,90555	9,92153
$\log\,(r_i - q)$	9,68231	9,77107
$\log I$	9,84116	9,88554
$\log\,(II = \sqrt{r-q})$	9,85338	
Sub.	8,45533	8,88571
$\log \gamma_i$	$8,29648^5_n$	$8,73908^5$

B VI''.

i	1	3
$\log \gamma_i^2$	6,59297	7,47817
$\log \gamma_i^2/r$	6,79644	7,68164
$\log f_i$	9,99973	9,99791
$\log r\, r_i$	9,57329	9,64607
$\log 2\, r\, r_i$	9,87432	9,94710
$\log p\, \gamma_i^2$	5,96180	6,84700
Sub.	9,99995	9,99965
$\log$ [ ]	9,87427	9,94675
$\log g^2$	6,46724	7,42492
$\log g$	$8,23362_n$	8,71246
$\log f_i\, x$	9,67644	9,67462
$\log f_i\, y$	$9,15344_n$	$9,15162_n$
$\log f_i\, z$	9,58169	9,57987
$\log g_i\, x'$	$8,31856_n$	8,79740
$\log g_i\, y'$	8,27252	$8,75136_n$
$\log g_i\, z'$	$8,09185_n$	8,57069

A VI a.

i	1	3
X_i	$+0,664607$	$+0,714883$
$f_i\, x$	$+0,474722$	$+0,472733$
$g_i\, x'$	$-0,020824$	$+0,062719$
ξ_i	$+1,118505$	$+1,250335$
Y_i	$-0,667684$	$-0,623306$
$f_i\, y$	$-0,142377$	$-0,141781$
$g_i\, y'$	$+0,018729$	$-0,056410$
η_i	$-0,791332$	$-0,821497$
Z_i	$-0,289639$	$-0,270390$
$f_i\, z$	$+0,381673$	$+0,380075$
$g_i\, z'$	$-0,012355$	$+0,037212$
ζ_i	$+0,079679$	$+0,146897$
$\log \varrho \cos \delta \cos \alpha$	0,04864	0,09703
$\log \varrho \cos \delta \sin \alpha$	$9,89836_n$	$9,91461_n$
$\log tg\, \alpha$	$9,84972_n$	$9,81758_n$
α_R	$324^\circ{,}7212$	$326^\circ{,}6941$
α_B	324,7217	326,6789
$(B-R)$ $\Delta \alpha$	$+0,0005$	$-0,0152$
$(B-R)$ $\Delta \alpha \cos \delta$	$+0,0005$	$-0,0152$
$\log \sin \alpha$	$9,76160_n$	$9,73966_n$
$\log \cos \alpha$	9,91188	9,92208
$\log \varrho \cos \delta$	0,13676	0,17495
$\log \varrho \sin \delta$	8,90134	9,16701
$\log tg\, \delta$	8,76458	8,99206
δ_R	$+3^\circ{,}3283$	$+5^\circ{,}6078$
δ_B	$+3,3289$	$+5,5858$
$(B-R)$ $\Delta \delta$	$+0,0006$	$-0,0220$
$\log \sin \delta$	8,76385	8,98998
$\log \cos \delta$	9,99927	9,99791
$\log \varrho$	0,13749	0,17703
$\log p_\alpha\, \varrho$	0,846	0,848
$\log p_\delta\, \varrho$	0,723	0,723
$\log p_\alpha$	0,709	0,671
$\log p_\delta$	0,586	0,546
p_α	$+5''$	$+5''$
p_δ	$+4$	$+4$

Der grösste Unterschied $B - R$ ist $0{,}^{\circ}022 = 1{,}'3$. Die Unterschiede $B - R$ könnten leicht durch eine einmalige Verbesserung der Bahn fortgeschafft werden. Jedenfalls hat auch hier die angewandte Methode sich vollständig bewährt, indem die directe Lösung in der ersten Annäherung eine verhältnissmässig genaue Darstellung der Beobachtungen ergeben hat. Anstatt nun aber die vorliegende, auf kurzen Intervallen beruhende Bahn auf Grund der obigen Unterschiede $B - R$ zu verbessern, soll diese erste Bahnbestimmung als beliebige Ausgangsbahn betrachtet werden und auf Grund eines verhältnissmässig langen geocentrischen Bogens verbessert werden. Es sollen zu diesem Zwecke die folgenden Beobachtungen dienen, deren zweite nahe an der dritten der ersten Bahnbestimmung liegt, so dass verschiedene für dieses Datum bei der Bahnverbesserung nothwendige Zahlen der ersten Rechnung direct entnommen werden können, wobei zu bemerken ist, dass mit noch längeren Intervallen der Gang der Rechnung derselbe sein würde:

Bβ.

1910, Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
I Jan. 18.1287	$303^{\circ}32'51{,}''9$	$-20^{\circ}53'27{,}''0$	Zappa-Rome
II Febr. 5.6211	326 41 0,4	+ 5 35 18,6	Aitken-Lick
III März 13.0440	336 11 15,4	+ 15 38 53,9	Aitken-Lick

Coordinaten der Sonne.

	X	Y	Z
I	$+0{,}4570857$	$-0{,}7993384$	$-0{,}3467534$
II	$+0{,}7149615$	$-0{,}6232309$	$-0{,}2703578$
III.	$+0{,}9847873$	$-0{,}1255285$	$-0{,}0544576$

Die theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinaten ergiebt:

X . . $+0{,}7149449$, Y . . $-0{,}6232607$, Z . . $-0{,}2703833$, $\log R$ . . $9{,}993992$.

XVIII.

Aus der ersten Bahnbestimmung wurde $\log \varrho = 0{,}17717$ für die Zeit der mittleren Beobachtung als Ausgangswerth interpolirt. Ausserdem ergeben sich die Ausgangswerthe, x', y', z', wie folgt, aus den Constanten für den Aequator. Mit dem angenommenen Werthe von ϱ und den genauen Werthen von α_2 und δ_2 sind sodann die Ausgangswerthe x, y, z genau zu berechnen. Man erhält somit eine intermediäre Ausgangsbahn, worin ϱ, x', y', z' dieselben Werthe wie in der ersten Bahnbestimmung haben und die beiden fehlenden Constanten durch die genauen Werthe von α_2, δ_2 gegeben sind:

t	5,6211	$\cos \frac{1}{2}v$	9,609078	$\log x'^2$	0,104200
Aberr.	$-0{,}0087$	$\log \sqrt{2/q}$	0,616615	$\log y'^2$	0,053904
t (reducirt) Febr.	5,6124	$\sin a$	9,880210	Add.	0,276610
T (Jan.)	16,7938	$\cos(A' + \frac{1}{2}v)$ . .	9,946197	Summe	0,380810
$t - T$	19,8186	$\log x'$	0,052100	$\log z'^2$	9,627672
$\log(t - T)$ . . .	$1{,}29707^3$			Add.	0,070609
$\log q^{3/2}$	8,60170			$\log g^2$	0,451419
$\log M$	$2{,}69537^3$	$\sin b$	9,985880		
		$\cos(B' + \frac{1}{2}v)$ . .	9,815379n		
v	$132^{\circ}\ 1'\ 39{,}''4$	$\log y'$	0,026952n		
$\frac{1}{2}v$	66 0 49,7				
$(A' + \frac{1}{2}v)$ . . .	$27^{\circ}56'\ 5{,}''7$	$\sin c$	9,843920	$\log \varrho$	0,17717
$(B' + \frac{1}{2}v)$ . . .	130 49 16,3	$\cos(C' + \frac{1}{2}v)$ . .	9,744223	$\cos \delta$	9,997931
$(C' + \frac{1}{2}v)$ . . .	56 17 43,5	$\log z'$	9,813836	$\log \sigma$	0,175101

$\cos \alpha$	9,922024	$\log x^2$	9,457802	$\log x x'$	9,781001
$\log (I = \xi)$	0,097125	$\log y^2$	8,596663	$\log y y'$	9,325284
$\log (X)$	9,854273	Add.	0,056019	Add.	0,130390
Sub.	9,874628	Summe	9,513821	Summe	9,911391
$\log x$	9,728901	$\log z^2$	9,239900	$\log z z'$	9,433786
		Add.	0,185317	Add.	0,124818
$\sin \alpha$	$9,739782_n$	$\log r^2$	9,699138	$\log r r'$	0,036209
$\log (I = \eta)$	$9,914883_n$	$\log r$	9,849569	$\log r$	9,849569
$\log (Y)$	$9,794669_n$			$\log r'$	0,186640
Sub.	9,503662			$\log r'^2$	0,373280
$\log y$	$9,298332_n$				
		$\log 2/r$	0,451461		
		$\log g^2$	0,451419		
		Sub.	5,99		
		$\log 1/a$	6,44		
$tg\, \delta$	8,990553				
$\log (I = \zeta)$	9,165654				
$\log (Z)$	$9,431980_n$				
Sub.	0,187970				
$\log z$	9,619950				

Da $\log 1/a = 6{,}44$ ist, so ist die intermediäre Ausgangsbahn nicht genau parabolisch. Anstatt dieselbe jedoch genau parabolisch zu machen, etwa durch willkürliche Aenderung von z', soll $1/a$ bei der Berechnung von $\partial \varrho$ nach IV und V fortgeschafft werden. Die Ausgangsbahn soll zum Zwecke der Berechnung aller Hülfsgrössen als parabolisch betrachtet werden, zumal da die grossen Unterschiede $B - R$, deren Ableitung direct folgt, durch nur einmalige Anwendung der linearen Beziehungen zwischen diesen Unterschieden und den gesuchten Correctionen $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ kaum fortzuschaffen sein werden.

A VIIa.

$\log q \ldots 9{,}066382$, $\quad v = 132^\circ 6' 23{,}''1$, $\quad T =$ Jan. 16,80804 Gr. M. Z.

VI′, VI″, A VI.

i	1	3
v_i	$41^\circ 58' 33{,}''4$	$147^\circ 29' 52{,}''7$
$\log r_i$	9,126008	0,172542
$\log \gamma_i$	$9,804577_n$	9,604685
$\log f_i$	9,628501	9,887065
$\log g_i$	$9,291870_n$	9,762326
$(B - R)$ ∂, α_i	$-52' 54{,}''6$	$-14' \ 3{,}''8$
$(B - R)$ $\partial \delta_i$	$-57 \ 36{,}4$	$-24 \ 29{,}4$
$\log \varrho_i$	9,940365	0,366882

Wäre die erste aus kurzen Zwischenzeiten berechnete Bahn verbessert worden, so wären die obigen Unterschiede $B - R$ kleiner ausgefallen. Diese Verbesserung wurde aber absichtlich unterlassen, um diese zweite Bahnbestimmung aus längeren Intervallen auf eine weniger genaue Bahn zu basiren. Die Convergenz der hier zur Anwendung kommenden Methode der Bahnverbesserung wird dadurch besonders zu Tage gefördert, zumal da die fortzuschaffenden Unterschiede $B - R$ sehr gross sind, und die heliocentrische Distanz zur Zeit der ersten Beobachtung sehr klein ist.

A IIIa.

$\log \cos \psi \ldots 9{,}96456$, $\quad \log R \cos \psi \ldots 9{,}95856$.

XI.

$\log \varrho$	0,17717
$\log R \cos \psi$	9,95856
Sub.	9,81577
$\log r \cos \beta$	9,77433
$\log \cos \beta$	9,92476
$\log x' \xi$	0,14922
$\log y' \eta$	9,94184
Add.	0,20961
Summe	0,35883
$\log z' \zeta$	8,97949
Add.	0,01777
$\log \varrho \varphi$	0,37660
$\log \varphi$	0,19943

i	1	3
$\log \sqrt{2} \cos \beta$	0,07528	0,07528
$\log \gamma_i$	9,80457^{7}n	9,60468^5
$\log II$	0,27070n	0,47060
$\log (I = \varphi)$	0,19943	
Add.	9,25127	0,18627
$\log \varphi_i$	9,45070n	0,65687
$\log x' r \gamma_i$	9,70625n	9,50635
$\log \sqrt{2} x$	9,87942	9,87942
Add.	9,69015	0,15338
$\log [\ ]$	9,39640	0,03280
$\log \gamma_i^3$	9,41373n	8,81405
$\operatorname{colog} r r_i$	1,02442	9,97789
$\log g_{x_i}$	9,83455n	8,82474

i	1	3
$\log y' r \gamma_i$	9,68110	9,48120n
$\log \sqrt{2} y$	9,44885n	9.44885n
Add.	9,84946	0,28515
$\log [\ ]$	9,29831	9,76635n
$\log \gamma_i^3 / r r_i$	0,43815n	8,79194
$\log g_{y_i}$	9,73646n	8,55829n
$\log z' r \gamma_i$	9,46799n	9,26809
$\log \sqrt{2} z$	9,77046	9,77046
Add.	0,00288	0,11876
$\log [\ ]$	9,47087	9,88922
$\log \gamma_i^3 / r r_i$	0,43815n	8,79194
$\log g_{z_i}$	9,90902n	8,68116
$\log (I = f_i \xi / \varrho)$	9,54846	9,80702
$\log II$	9,56367	9,16389
$\log III$	9,28525	9,48161
I	+ 0,35356	+ 0,64124
II	+ 0,36616	+ 0,14584
III	+ 0,19286	+ 0,30311
f_{x_i}	+ 0,91258	+ 1,09019
$\log f_{x_i}$	9,96027	0,03750
$\log (I = f_i \eta / \varrho)$	9,36621n	9,62477n
$\log II$	9,13310n	8,73332n
$\log III$	9,18716	9,21516n
I	− 0,23238	− 0,42147
II	− 0,13586	− 0,05411
III	+ 0,15387	− 0,16412
f_{y_i}	− 0,21437	− 0,63970
$\log f_{y_i}$	9,33116n	9,80598n

i	1	3
$\log (I = f_i \xi / \varrho)$	8,61698	8,87554
$\log II$	9,45472	9,05494
$\log III$	9,35972	9,33803
I	+ 0,04140	+ 0,07508^3
II	+ 0,28492	+ 0,11348^5
III	+ 0,22894	+ 0,21778^5
f_{z_i}	+ 0,55526	+ 0,40635
$\log f_{z_i}$	9,74450	9,60890

XII.

i	1	3
$\log f_{y_i} \cos \alpha_i$	9,08415n	9,76815n
$\log f_{x_i} \sin \alpha_i$	9,87633n	9,63941n
Sub.	9,92357	9,53788
$\log [\ ]$	9,79990	9,17729n
$\log \frac{1}{\varrho_i} [\ ]$	9,85954	8,81041n
$\log \cos \delta_i \frac{(p_a \varrho)}{\varrho_i^2}$ [1])	5,523	4,796n
Add.	0,00002	0,00004
$\log A_{f_i}$	9,85956	8,81045n
$\log g_{y_i} \cos \alpha_i$	9,48945n	8,52046n
$\log g_{x_i} \sin \alpha_i$	9,75061	8,42665n
Sub.	0,18979	9,38221
$\log [\ ]$	9,94040n	7,80886n
$\operatorname{colog} \varrho_i$	0,05964	9,63312
$\log A_{g_i}$	0,00004n	7,44198n

[1]) Correctionsglied zur Berücksichtigung einer etwaigen Aenderung der Parallaxe (cf. 82. Vorlesung, S. 490).

XII (Fortsetzung).

i	1	3	i	1	3
$\log f_{y_i} \sin \alpha_i$	9.24722	9,40789	$\log g_{y_i} \sin \alpha_i$	9,65252	8,16020
$\log f_{x_i} \cos \alpha_i$	9,71326	9,99967	$\log g_{x_i} \cos \alpha_i$	9,58754n	8,78691
Add.	0,12774	0,09898	Add.	9,20786	0,09210
$\log(\;)$	9,84100	0,09865	$\log(\;)$	8,79540	8,87901
$\sin \delta_i$	9,53256n	9,44184	$\sin \delta_i$	9,53256n	9,44184
$\log I$	9,37356n	9,54049	$\log I$	8,32796n	8,32085
$\log(II = f_{z_i} \cos \delta_i)$	9,71768	9,59162	$\log(II = g_{z_i} \cos \delta_i)$	9,88220n	8,66388
Sub.	0,16220	9,09673	Sub.	9,98771	0,08029
$\log[\;]$	9,87988n	8,63722n	$\log[\;]$	9,86991	8,40114n
$\log \frac{1}{\varrho_i}[\;]$	9,93952	8,27034	$\log B_{g_i}$	9,92955n	8,03426
$\log \frac{(p_\delta \varrho)}{\varrho^2}$ ¹)	5,643	4,665	$\log g_i$	9,29187n	9,76233
Add.	0,00002	0,00011	$\log \varrho_i$	9,94036	0,36688
$\log B_{f_i}$	9,93954	8,27045	$\log C_i$	9,35151n	9,39545

XIII.

$\log A_{f_1} A_{g_3}$	7,30154n
$\log A_{f_3} A_{g_1}$	8,81049
Sub.	0,01325
$\log A$	8,82374n
$\log I$	6,70955n
$\log II$	8,99740
Sub.	0,00223
$\log a_1$	8,99963n
$\log I$	8,07802n
$\log II$	8,85692n
$\log III$	8,55264n
I	$-$0,011968
$-II$	$+$0,071932
$+III$	$-$0,035698
a_2	$+$0,024266
$\log a_2$	8,38500
$\log I$	8,63706
$\log II$	9,65845n
Sub.	0,03949
$\log a_3$	9,69794
$\log I$	8,79946
$\log II$	7,76316
Sub.	9,95809
$\log a_4$	8,75755
$\log I$	6,54648
$\log II$	9,35766n
Sub.	0,00067
$\log b_1$	9,35833n
$\log I$	7,91495
$\log II$	9,21718
$\log III$	8,12207
I	$+0{,}008221^5$
$-II$	$-$0,164885
$-III$	$-0{,}013245^5$
$-b_2$	$-$0,169909
$\log b_2$	9,23021

$\log I$	8,80013n
$\log II$	9,22788
Sub.	0,13782
$\log b_3$	9,36570n
$\log I$	8,43920n
$\log II$	7,33259n
Sub.	9,96462
$\log b_4$	8,40382n
$\log A$	8,82374n
$\log z$	9,61995
$\log c_2$	8,44369n
$\log\left(II = \frac{c_3}{c_2} a_2\right)$	9,69382n
$\log\left(III = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_1\right)$	0,11543
$I = a_3$	$+$0,49881
$-II$	$+$0,49411
$-III$	$-$1,30445
a	$-$0,31153
$\log a$	9,49350n
$\log II$	0,53903n
$\log III$	0,47413
$I = b_3$	$-$0,23211
$-II$	$+$3,45962
$-III$	$-$2,97940
b	$+$0,24811
$\log a_1 e$	7,03793
$\log a e_1$	7,10080n
Sub.	0,27073
Zähler	7,37153
$\log P_y$	8,38978n
$\log(-b\,d_1)$	8,21839
$\log Q_x$	9,23664n

$\log a\,d_1$	8,31724
$\log Q_y$	9,33549n
$\log(II = a_3 P_x)$	7,88878
$\log III$	7,75548
$\log I$	9,32469n
$\log II$	9,54950n
Add.	0,20301
$\log c_3$	9,75251
$\log I$	9,37817
$\log II$	7,65421
Add.	0,00812
$\log c_4$	9,38629n
$\log \partial, \alpha_1$	8,18726n
$\log \partial, \alpha_3$	7,61180n
$\log I$	7,61184
$\log II$	5,62924
Sub.	9,99546
$\log e_1$	7,60730
$\log I$	7,47136n
$\log II$	6,99771
Sub.	0,12581
$\log e_2$	7,59717n
$\log e_3$	8,22420
$\log e_4$	7,85272
$\log b$	9,39465
$\log II$	8,90599
$\log III$	8,72310n
$I = e_3$	$+0{,}01675^7$
$-II$	$-0{,}08053^6$
$-III$	$+0{,}05285^7$
e	$-0{,}01092^2$
$\log e$	8,03830n

¹) Siehe die Anmerkung, S. 1029.

XIV.

$log\ b\ e_1$	7,00195	$log\ (II = a_4\ P_x)$	6,94839	$-c_3\ Q_{z_1}$	+0,83428
$log\ b_1\ e$	7,39663	$log\ III$	6,79360	$log\ c_3\ Q_{z_1}$	9,92131
Sub.	0,17064			$log\ Q_{z_1}$	0,16880n
Zähler	7,17259n	$I = e_4$	+0,007124		
		$-II$	−0,000888	$log\ (II = a_4\ Q_x)$	7,99419n
$log\ a_1\ b$	8,39428n	$-III$	−0,000622	$log\ III$	7,73931
$log\ a\ b_1$	8,85183	$c_4\ P_{z_3}$	+0,005614		
Sub.	0,12992	$log\ c_4\ P_{z_3}$	7,74927	$I = d_4$	+0,018640
Nenner	8,98175n	$log\ P_{z_3}$	8,36298n	II	−0,009867
$log\ P_x$	8,19084			III	+0,005487
				$-c_4\ Q_{z_3}$	+0,014260
$I = e_3$	+0,016757^{8}	$log\ (II = a_3\ Q_x)$	8,93458n	$log\ c_4\ Q_{z_3}$	8,15412
$-II$	−0,007740^{7}	$log\ III$	8,70119	$log\ Q_{z_3}$	8,76783
$-III$	−0,005694^{9}				
$c_3\ P_{z_1}$	+0,0033217	$I = d_3$	+0,870040		
$log\ c_3\ P_{z_1}$	7,52136	II	−0,086016		
$log\ P_{z_1}$	7,76885	III	+0,050256		

Da der Unterschied $B - R$ in der Declination des ersten Ortes sehr gross ist, soll $P_z = P_{z_1}$ und $Q_z = Q_{z_1}$ angenommen werden.

IV.

$log\left(I = \frac{1}{2\,a}\right)$	6,14	$log\left(I = \frac{cos\,\beta}{r^2}\right)$	0,22562
$log\ (II = x'\ P_x)$	8,24294	$log\ (II = x'\ Q_x)$	9,28874n
$log\ III$	8,41673	$log\ III$	9,36244
$log\ IV$	7,58269	$log\ IV$	9,98264n
I	+0,000138	I	+1,68119
$-II$	−0,017496	$-II$	+0,19442
$-III$	−0,026105	$-III$	−0,23038
$-IV$	−0,003825^{5}	$-IV$	+0,96082
P	−0,047288	Q	+2,60605
$log\ P$	8,67475n	$log\ Q$	0,41598

VI.

$log\left(\partial\,\varrho = \frac{P}{Q}\right)$	8,25877n

V, VI.

	1. Versuch	2. Versuch		1. Versuch	2. Versuch
$log\ \partial\,\varrho_a$	8,25877n	8,26036n	$log\ (1 - 3\ cos^2\beta)/2\,r^3$	0,20005n	0,20005n
$log\ Q_x\ \partial\,\varrho_a$	7,49541	7,49700	$log\ (\partial\,\varrho)^2$	6,51754	6,52072
$log\ P_x$	8,19084	8,19084	$log\ V$	6,71759n	6,72077n
Sub.	9,90202	9,90180			
$log\ \partial\,x'$	8,09304	8,09264	$log\,(1 - {}^5/_3\ cos^2\beta)$	9,2519n	9,2519n
			log Zähler	9,6538n	9,6538
			$colog\ 2\,r^4$	0,3007	0,3007
$log\ Q_y\ \partial\,\varrho_a$	7,59426	7,59585	$log\ (\partial\,\varrho)^3$	4,7763n	4,7811n
$log\ P_y$	8,38978n	8,38978n	$log\ VI$	4,7308	4,7356
Sub.	0,06451	0,06473			
$log\ \partial\,y'$	8,45429n	8,45451n	P	−0,047288^{5}	−0,047288^{5}
			$-{}^1/_2\,(\partial\,x')^2$	−0, 76^{7}	−0, 76^{6}
			$-{}^1/_2\,(\partial\,y')^2$	−0, 405^{1}	−0, 405^{5}
$log\ Q_z\ \partial\,\varrho_a$	8,42757	8,42916	$-{}^1/_2\,(\partial\,z')^2$	−0, 218^{2}	−0, 220^{3}
$log\ P_z$	7,76885	7,76885	$-V$	+0, 521^{9}	+0, 525^{7}
Sub.	9,88242	9,89287	VI	5^{4}	5^{4}
$log\ \partial\,z'$	8,31999n	8,32203n	$Q\ \partial\,\varrho$	−0,047461^{2}	−0,047459^{8}
$log\ (\partial\,x')^2$	6,18608	6,18528	$log\ Q\ \partial\,\varrho$	8,67634n	8,67633n
$log\ (\partial\,y')^2$	6,90858	6,90902	$log\ Q$	0,41598	0,41598
$log\ (\partial\,z')^2$	6,63998	6,64406	$log\ \partial\,\varrho_e$	8,26036n	8,26035n

$\log \partial \varrho_e$	8,26035n	$\log x'$	0,052100
$\log \xi/\varrho$	9,91996	$\log \partial x'$	8,09264
$\log \partial x$	8,18031n	Add.	0,004742
$\log x$	9,728901	$\log x'$	0,056842
Add.	9,987543		
$\log x$	9,716444	$\log y'$	0,026952n
		$\log \partial y'$	8,45451n
		Add.	0,011471
$\log \eta/\varrho$	9,73771n	$\log y'$	0,038423n
$\log \partial y$	7,99806		
$\log y$	9,298332n	$\log z'$	9,813836
Add.	9,977683	$\log \partial z'$	8,32203n
$\log y$	9,276015n	Add.	9,985775
		$\log z'$	9,799611
$\log \zeta/\varrho$	8,98848		
$\log \partial z$	7,24883n	$\log \varrho$	0,177170
$\log z$	9,619950	$\log \partial \varrho$	8,26035n
Add.	9,998148	Add.	9,994708
$\log z$	9,618098	$\log \varrho$	0,171878

A V.

$\log x^2$	9,432888	
$\log y^2$	8,552030	
Add.	0,053680	
Summe	9,486568	
$\log z^2$	9,236196	
Add.	0,193642	
$\log r^2$	9,680210	
$\log r$	9,840105	
$\log x'^2$	0,113684	
$\log y'^2$	0,076846	
Add.	0,283002	
Summe	0,396686	
$\log z'^2$	9,599222	
Add.	0,064240	
$\log g^2$	0,46926	Controlle
$\log 2/r$	0,460925	

$\log x x'$	9,773266
$\log y y'$	9,314438
Add.	0,129580
Summe	9,902866
$\log z z'$	9,417709
Add.	0,122944
$\log r r'$	0,025810
$\log r'$	0,185705

Die durch diese erste Bahnverbesserung resultirenden Unterschiede $B-R$ berechnen sich genau wie die ursprünglichen Unterschiede, welche fortzuschaffen waren.

A VII a.

$\log q$ . . . 9,110227, v . . . 128° 51′ 51,″4, T . . . Jan. 17,08123 Gr. M. Z.

VI′, VI″, A VI.

i	1	3
v_i	29° 58′ 5,″7	145° 34′ 43,″8
$\log r_i$	9,140275	0,167983
$\log \gamma_i$	9,815785n	9,611329
$\log f_i$	9,581291	9,880072
$\log g_i$	9,269496n	9,761252
$(B-R)$ ∂, α_i	— 1′ 42,″4	+ 0′ 4,″0
$(B-R)$ $\partial \delta_i$	— 1 13,0	— 0 31,2
$\log \varrho_i$	9,933627	0,364169

Die erste[1]) Verbesserung der beliebigen Ausgangsbahn hat die Unterschiede $B-R$ ganz bedeutend herabgedrückt, indem jetzt der grösste Unterschied nur $1' 42''$ im Vergleich zu $57' 36''$ ist. Wären die linearen Differentialformeln ausreichend gewesen, was in diesem Falle wegen der sehr grossen Unterschiede $B-R$ natürlich nicht zu erwarten war, so würde die verbesserte Bahn nur einen Unterschied in δ_3 übrig gelassen haben, dessen Grösse durch die Beobachtungsfehler und durch eine etwaige Abweichung von der Parabel abhängig gewesen sein würde. Es ist daher auch nicht zu erwarten, dass die Beobachtungen ausser δ_3 jetzt dadurch genau dargestellt werden können, dass man die Verbesserung unter Beibehaltung aller Hülfsgrössen, abgesehen von den von den neuen Unterschieden $B-R$ abhängigen, d. h. unter Beibehaltung der numerischen Werthe der Differentialquotienten der ersten Bahnverbesserung, wiederholt; vielmehr sollte jetzt die Rechnung durch eine zweite Bahnverbesserung mit neugerechneten Hülfsgrössen abgeschlossen werden. Zum Beweis des Gesagten sollen trotzdem die Unterschiede $B-R$ zunächst dadurch weiter herabgedrückt werden, dass von den in der ersten Bahnverbesserung gebrauchten Hülfsgrössen nur diejenigen neu berechnet werden, welche von den Unterschieden $B-R$ abhängen. Man erhält dann zunächst:

i	1	3
$(B-R)\ \partial_\prime \alpha_i$	$-4{,}''8$	$-0{,}''3$
$(B-R)\ \partial \delta_i$	$-2{,}4$	$+14{,}9$

Wegen der Unsicherheit der Beobachtungen dieses Kometen dürfte man sich auch mit dieser Darstellung zufrieden geben. Inwieweit die aus der ersten Verbesserung erzielten Unterschiede durch die parabolische Hypothese durch eine zweite Verbesserung, mit Neuberechnung aller Hülfsgrössen, herabgedrückt werden können, zeigt sich, wie folgt:

$\log \partial \varrho$	$6{,}61734_n$	$\log x'$	$0{,}057116$	Controlle:	
$\log \partial x'$	$6{,}85757$	$\log y'$	$0{,}038560_n$	$\log g^2$	$0{,}461142$
$\log \partial y'$	$6{,}53814_n$	$\log z'$	$9{,}799089$	$\log 2/r$	$0{,}461142$
$\log \partial z'$	$6{,}87963_n$	$\log r'$	$0{,}185700$	$\log q$	$9{,}111002$
$\log \partial x$	$6{,}53729_n$	$\log x$	$9{,}716156$	v	$128^\circ 48' 6{,}''0$
$\log \partial y$	$6{,}35505$	$\log y$	$9{,}275494_n$	$T =$ Jan. 17,08880 Gr. M. Z.	
$\log \partial z$	$5{,}60582_n$	$\log z$	$9{,}618056$		
		$\log r$	$9{,}839888$		

i	1	3
v_i	$29^\circ 41' 46{,}''2$	$145^\circ 32' 35{,}''0$
$\log r_i$	$9{,}140502$	$0{,}167882$
$\log \gamma_i$	$9{,}816079_n$	$9{,}611476$
$\log f_i$	$9{,}579983$	$9{,}879909$
$\log g_i$	$9{,}268867_n$	$9{,}761224$
$(B-R)\ \partial_\prime \alpha_i$	$-0{,}''9$	$-0{,}''3$
$(B-R)\ \partial \delta_i$	$-1{,}0$	$+19{,}7$

Da alle Unterschiede $B-R$, ausser δ_3, jetzt innerhalb der Unsicherheit der Rechnung fortgeschafft sind, so ist eine weitere Verbesserung unter Beibehaltung der parabolischen Hypothese nicht möglich. Der Unterschied $\partial \delta_3 = +19{,}''7$ deutet auch hier auf eine Abweichung von der Parabel. Die allgemeinen Elemente sind aber wegen der Unsicherheit der Beobachtungen aus dem gegebenen geocentrischen Bogen unbestimmbar.

[1]) Wegen eines Rechenfehlers stimmt das in Lick Observatory Bull. Nr. 179 ursprünglich veröffentlichte Resultat der ersten Bahnverbesserung etc. mit den hier abgeleiteten Resultaten nicht überein. Der Unterschied in den Endresultaten rührt jedoch nur daher, dass in L. O. Bull. Nr. 179 die nicht ganz fortzuschaffenden Unterschiede $B-R$ auf den ersten und dritten Ort vertheilt, während sie hier in δ_3 vereint sind. Spätere Beobachtungen werden daher durch die Bahn in L. O. Bull. Nr. 179 etwas besser dargestellt.

Für die übrigen Elemente und für die Constanten für den Aequator erhält man nach A VII a:

Elemente.

$$
\begin{aligned}
T &= 1910 \text{ Jan. } 17{,}08880 \text{ Gr. M. Z.} \\
\omega &= 320^0\,57'\,51{,}''4 \\
\Omega &= 88\;\,49\;\,28{,}8 \\
i &= 138\;\,46\;\,42{,}5 \\
\log q &= 9{,}111002
\end{aligned}
\left.\vphantom{\begin{aligned}\omega\\ \Omega\\ i\end{aligned}}\right\}\; 1910{,}0
$$

Constanten für den Aequator.

$$
\begin{aligned}
x &= r\,[9{,}876385]\,\sin\,(322^0\,31'\,36{,}''1 + v) \\
y &= r\,[9{,}981342]\,\sin\,(67\;\,44\;\;\,3{,}9 + v) \\
z &= r\,[9{,}856490]\,\sin\,(354\;\,35\;\;\,3{,}1 + v)
\end{aligned}
$$

Viertes Beispiel.

Als Beispiel der Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für f, g, ∂f, ∂g bei der Bahnverbesserung im Falle einer nahezu parabolischen Bahn mit sehr langem Bogen (Formeln B b) möge folgende, von Prof. Crawford und Herrn Meyer durchgeführte Rechnung der Bahn des Kometen *c* 1909 (Halley) dienen. Es ist zu bemerken, dass diese Bahn nur auf drei Oertern während der letzten Erscheinung beruht und daher nicht mit Bahnen, welche aus mehreren Erscheinungen abgeleitet sind, vergleichbar ist.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen. Dabei sind die Beobachtungszeiten bereits für planetarische Aberration und die Coordinaten für Parallaxe corrigirt. Der mittlere Ort ist ein aus vier Beobachtungen abgeleiteter Normalort.

Gr. M. Z. 1909	α (1909.0)	δ (1909.0)	Beobachter
Jan. 260,85720	$94^0\,44'\,51{,}''6$	$+17^0\;\,8'\,59{,}''2$	Barnard-Yerkes
„ 350,77347	49 56 33,7	+13 59 51,8	Aitken-Lick
„ 424,63910	8 32 55,9	+ 7 53 50,0	Aitken-Lick

Coordinaten der Sonne:

	X	Y	Z
I	— 1,0003516	+ 0,0839090	+ 0,0364017
II	— 0,0908435	— 0,8988308	— 0,3899142
III	+ 0,9293000	— 0,3157650	— 0,1369780

Aus einer genäherten Bahn wurden folgende Ausgangswerthe und Hülfsgrössen, ganz wie beim dritten Beispiele, berechnet:

$\log \varrho$	0,1324984	$\log a$	1,2458366
$\log x'$	8,9623567	$\log r$	0,3507902
$\log y'$	$9{,}9489304_n$	$\log x$	9,9722279
$\log z'$	$9{,}2789578_n$	$\log y$	0,2802252
$\log r'$	$9{,}8911119_n$	$\log z$	9,8561779
$\log \gamma_1$	$9{,}5954958_n$	$\log \gamma_3$	9,7321664
$\log f_1$	9,9688493	$\log f_3$	9,9395791
$\log g_1$	$0{,}1812382_n$	$\log g_3$	0,0778568
$\log r_1$	0,5248727	$\log r_3$	0,0682889
$\log \xi$	9,9279914	$\log R$	9,99298
$\log \eta$	0,0032959	$\cos \psi$	$9{,}92008_n$
$\log \zeta$	9,5161043		

Aus diesen Werthen ergeben sich die folgenden Coordinaten und Unterschiede $B-R$ für den ersten und dritten Ort:

A VI.

$\log \varrho_1$	0,5274637	$\log \varrho_3$	0,2774120
α_1	$94^0\,44'\,50'',8$	α_3	$8^0\,33'\,57'',9$
δ_1	$+17\;\;8\;58,4$	δ_3	$+7\;54\;10,2$
$(B-R)\left\{\begin{array}{l}\partial,\alpha_1\\ \partial\,\delta_1\end{array}\right.$	$+\,0'',8$ $+\,0,8$	∂,α_3 $\partial\,\delta_3$	$-\,62'',0$ $-\,20,2$

B α.

VII.

$\log \varrho$	0,13250
$\log R \cos \psi$	9,91306n
Sub.	0,20502
$\log r \cos \beta$	0,33752
$\cos \beta$	9,98673
$\log x' \xi$	8,89035
$\log y' \eta$	9,95223n
Add.	9,96061
Summe	9,91284n
$\log z' \zeta$	8,79506n
Add.	0,03192
$\log \varrho\, \varphi$	9,94476n
$\log \varphi$	9,81226n

p	1	3
$\log (t_p - t_0)$	1,95384n	1,86844
$\log \tau_3;\ \log \tau_1$	0,18942	0,10402
$\log \dfrac{\gamma_p^2}{2\,a}$	7,64412	7,91747
Sub.		
$\log (\gamma_p^c)^2$	9,99808	9,99639
$\log \gamma_p^c$	9,99904	9,99820
$\log \sqrt{2}\ \dfrac{\cos \beta}{\gamma_p}$	0.54175n	0,40508
$\log II$	0,54079n	0,40328
$\log (I = \varphi)$	9,81226n	9,81226n
Add.	0,07440	9,87132
$\log \Phi_p$	0,61519n	0,27460
$\log (I = r_p\, \gamma_p)$	0,12037n	9,80046
$\log 2\, r\, \gamma_p$	0,24732n	0,38399
$\log (\gamma_p^c)^2$	9,99808	9,99640
$\log II$	0,24540n	0,38039
$\log \gamma_p^2$	9,19099	9,46433
$\log r\, r'/\sqrt{2}$	0,09139n	
$\log \gamma_p^c$	9,99904	9,99820
$\log III$	9,28142n	9,55392n
$\log IV$	0,51507	0,42883
$+\,I$	$-\,1,31939$	$+\,0,63163$
$+\,II$	$-\,1,75954$	$+\,2,40100$
$+\,III$	$-\,0,19117$	$-\,0,35803$
$+\,IV;\ -\,IV$	$+\,3,27392$	$-\,2,68431$
[ ]	$+\,0,00382$	$-\,0,00971$
$\log$ [ ]	7,58206	7,98722n
$\log \gamma_p$	9,59550n	9,73217
$\operatorname{colog} r_p$	9,47513	9,93171
$\log M_p$	7,54774	8,54615

p	1	3
$\log -\tau_3 f_1;\ \log \tau_1 f_3$	0,16880n	9,97972
$\log g_p$	0,18124n	0,07786
Sub.	8,46333	9,40405
$\log$ ( )	8,63213	9,38377n
$\log I$	8,80822	9,55986n
$\log \sqrt{2}\ r\, \gamma_p^c$	0,50035	0,49951
$\log {}^1/_2\, r\, r'\, \gamma_p$	9,53637	9,67304n
Add.	0,04479	9,92987
$\log$ ( )	0,54514	0,42938
$\log \gamma_p^3$	8,78649n	9,19650
$\operatorname{colog} r_p$	9,47513	9,93171
$\log II$	8,80676n	9,55759
Add.	7,52667	7,72000
$\log [I + II]$	6,33343	7,27759n
$\log N_p$	7.57927n	8,52343

VIII.

$\log (I = x'\, r\, \gamma_p)$	8,90865n	9,04532
$\log II$	0,12179	0,12095
Add.	9,97257	0,03504
$\log$ [ ]	0,09436	0,15599
$\log \gamma_p^3 / r\, r_p$	7,91083n	8,77742
$\log g x_p$	8,00519n	8,93341
$\log I$	9,89522	0,03189n
$\log II$	0,42979	0,42895
Add.	0,11127	0,17462
$\log$ [ ]	0,54106	0,20651
$\log g y_p$	8,45189n	8,98393
$\log I$	9,22525	9,36192n
$\log II$	0,00574	0,00490
Add.	0,06661	9,88788
$\log$ [ ]	0,07235	9,89278
$\log g z_p$	7,98318n	8,67020
$\log x\, M_p$	7,51997	8,51838
$\log x'\, N_p$	6,54163n	7,48579
Add.	9,95177	0,03853
$\log m x_p$	7,47174	8,55691
$\log y\, M_p$	7,82797	8,82638
$\log y'\, N_p$	7,52820	8,47236n
Add.	0,17651	0,10021
$\log m y_p$	8,00448	8,57257
$\log z\, M_p$	7,40392	8,40233
$\log z'\, N_p$	6,85823	7,80239n
Add.	0,10879	9,87435
$\log m z_p$	7,51271	8,27668
$\log 2\, m x_p$	7,77277	8,85794
$\log x\, \gamma_p^2$	9,16322	9,43656

p	1	3
Add.	0,01732	0,10170
log [ ]	9,18054	9,53826
$log\ cos\,\beta/r^2$	9,28515	
$log\ II$	8,46569	8,82341
$log\ (I = f_p\,\xi/\varrho)$	9,76434	9,73507
$log\,(III = g_{x_p}\,\Phi_p)$	8,62038	9,20801
I	+ 0,58121	+ 0,54334
II	+ 0,02922	+ 0,06659
III	+ 0,04172	+ 0,16144
f_{x_p}	+ 0,65215	+ 0,77137
$log\,f_{x_p}$	9,81434	9,88726
$log\ 2\,m_{y_p}$	8,30551	8,87360
$log\,y\,\gamma_p^2$	9,47122	9,74456
Add.	0,02869	0,05484
log [ ]	9,49991	9,79940
$log\ II$	8,78506	9,08455
$log\,I$	9,83965	9,81038
$log\ III$	9,06708	9,25853
I	+ 0,69127	+ 0,64622
II	+ 0,06096	+ 0,12149
III	+ 0,11670	+ 0,18135
f_{y_p}	+ 0,86893	+ 0,94906
$log\,f_{y_p}$	9,93898	9,97729
$log\ 2\,m_{z_p}$	7,81374	8,57771
$log\,z\,\gamma_p^2$	9,04717	9,32051
Add.	0,02466	0,07218
log [ ]	9,07183	9,39269
$log\ II$	8,35698	8,67784
$log\,I$	9,35246	9,32319
$log\ III$	8,59837	8,94480
I	+ 0,225142	+ 0,210470
II	+ 0,022750	+ 0,047626
III	+ 0,039662	+ 0,088064
f_{z_p}	+ 0,287554	+ 0,346160
$log\,f_{z_p}$	9,45872	9,53928

IX.

p	1	3
$log\,f_y\,cos\,\alpha$	$8,85682_n$	9,97242
$log\,f_x\,sin\,\alpha$	9,81285	9,06030
Sub.	0,04558	9,94329
log [ ]	$9,85843_n$	9,91571
$log\ \varrho_p$	0,52746	0,27741
$log\ A_{f_p}$	$9,33097_n$	9,63830
$log\,I$	7,36973	8,97906
$log\ II$	$8,00370_n$	8,10645
Sub.	0,09072	9,93747
log [ ]	8,09442	8.91653
$log\ A_{g_p}$	7,56696	8,63912
$log\,I$	$6,92232_n$	8,56770
$log\ II$	7,47025	7,72995
Sub.	0,10829	9,93182
log [ ]	$7,57854_n$	8,49952
$log\ A_{m_p}$	$7,05108_n$	8,22211
$log\,f_y\,sin\,\alpha$	9,93749	9,15033
$log\,f_x\,cos\,\alpha$	$8,73218_n$	9,88239
Add.	9,97205	0,07384
log ( )	9,90954	9,95623
$sin\ \delta_p$	9,46963	9,13828
$log\ I$	9,37917	9,09451
$log\,(II = cos\,\delta_p\,f_{z_p})$	9,43897	9,53514
Sub.	9,16915	9,80445
log [ ]	$8,54832_n$	$9,33959_n$
$log\ B_{f_p}$	8,02086	9,06218
$log\,g_y\,sin\,\alpha$	$8,45040_n$	8,15697
$log\,g_x\,cos\,\alpha$	6,92303	8,92854
Add.	9,98691	0,06789
log ( )	$8,43731_n$	8,99643
$log\,I$	$7,90694_n$	8,13471
$log\ II$	$7,96343_n$	8,66606
Sub.	9,14275	9,84868
log [ ]	7,04969	$8,51474_n$
$log\ B_{g_p}$	$6,52223_n$	8,23733
$log\ m_y\ sin\,\alpha$	8,00299	7,74561
$log\ m_x\ cos\,\alpha$	$6,38958_n$	8,55204
Add.	9,98929	0,06302
log ( )	7,99228	8,61506
$log\,I$	7,46191	7,75334
$log\ II$	7,49296	8,27254
Sub.	8,86986	9,84352
log [ ]	$6,33177_n$	$8,11606_n$
$log\ B_{m_p}$	5,80431	7,83865
$log\ g_p$	$0,18124_n$	0,07786
$log\ C_p$	$9,65378_n$	9,80045

X.

p	1	3
$log\,(I = C_p\,sin\,\alpha_p)$	$9,65229_n$	8,97349
$log\,(II = x\,A_{g_p})$	7,53919	8,61135
$log\,(III = 2\,x'\,A_{m_p})$	$6,31447_n$	7,48550
I	− 0,44904	+ 0,094078
$-II$	− 0,00346	− 0,040865
$-III$	+ 0,00021	− 0,003058
$-b_1;\ -b_3$	− 0,45229	+ 0,050155
$log\,b_1;\ log\,b_3$	9,65542	$8,70032_n$
$log\,I$	8,04125	8,93386
$log\ II$	$6,49446_n$	8,20956
$log\ III$	5,06770	7,10204
I	+ 0,0109964	+ 0,085874
$-II$	+ 0,0003122	− 0,016202
$-III$	− 0,0000117	− 0,001265
$-b_2;\ -b_4$	+ 0,0112969	+ 0,068407
$log\,b_2;\ log\,b_4$	$8,05296_n$	$8,83510_n$
$log\,(I = C_p\,cos\,\alpha_p)$	8,57162	9,79558
$log\ II$	7,84719	8,91935
$log\ III$	7,30104	$8,47207_n$
I	+ 0,0372925	+ 0,62457
II	+ 0,0070338	+ 0,08305
III	+ 0,0020000	− 0,02965
$c_1;\ c_3$	+ 0,0463263	+ 0,67797
$log\,c_1;\ log\,c_3$	8,66583	9,83121

p	1	3	p	1	3
$log\ I$	$9{,}12192_n$	8,11177	$log\ (I = C_p \cos \delta_p)$	$9{,}63403_n$	9,79631
$log\ II$	$6{,}80246_n$	8,51756	$log\ II$	$6{,}37841_n$	8,09351
$log\ III$	$6{,}05427_n$	$8{,}08861_n$	$log\ III$	$5{,}38430_n$	$7{,}41864_n$
			I	— 0,43056	+ 0,62561
I	— 0,132409	+ 0,0129351	II	— 0,00024	+ 0,01240
$-II$	+ 0,000635	— 0,0329277	III	— 0,00002	— 0,00262
$-III$	+ 0,000113	+ 0,0122634	$d_2;\ d_4$	— 0,43082	+ 0,63539
$-c_2;\ -c_4$	— 0,131661	— 0,0077292	$log\ d_2;\ log\ d_4$ . . .	$9{,}63430_n$	9,80304
$log\ c_2;\ log\ c_4$ . . .	9,11946	7,88813	$log\ \partial \alpha_p$	9,90849	$1{,}79232_n$
			$\cos \delta_p$	9,98025	9,99586
$log\ (I = z\, A_{g_p})$ . .	7,42314	8,49530	$log\ \sin 1''$	4,68558	
$log\ II$	6,63107	$7{,}80210_n$	$log\ n_1;\ log\ n_3$ . . .	4,57432	$6{,}47376_n$
Add.	0,06499	9,90163	$log\ \partial \delta_p$	9,92428	$1{,}30643_n$
$log\ d_1;\ log\ d_3$ . . .	7,48813	8,39693	$log\ n_2;\ log\ n_4$ . . .	4,60986	$5{,}99201_n$

Man hat also folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten, wobei die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind:

$$(9{,}33097_n)\ \partial\varrho + (9{,}65542)\ \partial x' + (8{,}66583)\ \partial y' + (7{,}48813)\ \partial z' = (4{,}57432)$$
$$(8{,}02086)\ \partial\varrho + (8{,}05296_n)\ \partial x' + (9{,}11946)\ \partial y' + (9{,}63430_n)\ \partial z' = (4{,}60986)$$
$$(9{,}63830)\ \partial\varrho + (8{,}70032_n)\ \partial x' + (9{,}83121)\ \partial y' + (8{,}39693)\ \partial z' = (6{,}47376_n)$$
$$(9{,}06218)\ \partial\varrho + (8{,}83510_n)\ \partial x' + (7{,}88813)\ \theta y' + (9{,}80304)\ \partial z' = (5{,}99201_n)$$

Die Auflösung ergiebt:

$log\ \partial\varrho$ . . 5,37967 $\quad$ $log\ \partial x'$ . . 5,82046 $\quad$ $log\ \partial y'$ . . $6{,}64756_n$ $\quad$ $log\ \partial z'$ . . $6{,}16537_n$

und daher:

$log\ \partial x$ . . . 5,17516 $\quad$ $log\ \partial y$ . . . 5,25047 $\quad$ $log\ \partial z$ . . . 4,76328

Rechnet man nun mit den verbesserten heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten noch r, r' nach A IV, die nöthigen Elemente nach A VII, und endlich f_1, f_3, g_1, g_3 nach B VI′, B VI″, so ergeben sich die folgenden Unterschiede $B - R$ aus A VI:

		1	3
$(B - R)$	$\partial\alpha$	0″,0	— 0″,1
	$\partial\delta$	0,0	0,0

Da es hier nur darauf ankommt, den Gang der Bahnverbesserung zu erläutern, so kann die Ableitung der verbesserten Elemente und der Constanten für den Aequator, die ganz wie in den vorhergehenden Beispielen vor sich geht, unterlassen werden.

Fünftes Beispiel.

Als Beispiele der vollständigen Parallaxenelimination bei erster Bahnbestimmung, sowie der Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für f, g, ∂f, ∂g bei der Bahnverbesserung auf Grund eines längeren Bogens (Formeln Bβ), im Falle einer Ausgangsellipse von mässiger Excentricität, möge folgende, von den Herren S. Einarsson und R. Young durchgeführte Rechnung von Bahnen des Kometen e 1909 (Daniel) dienen:

A I.

Die erste Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen von Aitken auf der Lickssternwarte, welche bereits auf den Jahresanfang einschliesslich der Aberrationsglieder reducirt sind:

1909, Gr. M. Z.	α (1909.0)	δ (1909.0)
Dec. 11.74000	94° 23′ 43″,3	+ 38° 06′ 15″,2
Dec. 15.70788	94 29 59, 2	+ 41 12 20, 6
Dec. 18.75589	94 30 46, 4	+ 43 25 59, 3

Coordinaten der Sonne.

	X	Y	Z
I	— 0,1780529	— 0,8882410	— 0,3853174
II	— 0,1093873	— 0,8971793	— 0,3891974
III	— 0,0562684	— 0,9010569	— 0,3908799

Geschwindigkeit der Sonnencoordinaten.

$\log X'$ . . . 0,004615 $\qquad \log Y'$ . . . $8{,}994638_n$ $\qquad \log Z'$ . . . $8{,}632210_n$

Da die Beobachtungen als verhältnissmässig genau betrachtet werden können, so sollen die Beobachtungsfehler ganz ausser Acht gelassen und sofort die in den α', δ', α'', δ'' durch Vernachlässigung der f^{III} verursachten Fehler abgeschätzt werden. Die Zwischenzeiten und die Differenzen in α und δ sind:

$t_2 - t_1$	3,9679	$\alpha_2 - \alpha_1$	375″,9	$\delta_2 - \delta_1$	11165″,4
$t_3 - t_2$	3,0480	$\alpha_3 - \alpha_2$	47, 2	$\delta_3 - \delta_2$	8018, 7

Ueberschlagsweise, auf ein constantes Intervall von 3,5 Tagen reducirt, ergiebt sich folgendes Differenzenschema:

f^{I}_α	f^{II}_α	f^{I}_δ	f^{II}_δ
331″,6		9208″,6	
	— 276″,8		638″,8
54, 2		9848, 8	
193		9529	

Unter den f^{I}_α und f^{I}_δ sind gleich die Durchschnittswerthe, von denen α', δ' der Hauptsache nach abhängen, angesetzt. Das Verhältniss der f^{II} zu den f^{I} ist dann in α und δ, 1,4, bezüglich 0,07. Nimmt man ein gleiches Verhältniss der f^{III} zu den f^{II} an, so ergiebt sich $f^{\mathrm{III}}_\alpha = 393''$; $f^{\mathrm{III}}_\delta = 43''$. Es leuchtet sofort ein, dass δ', δ'' viel genauer mit Vernachlässigung der f^{III} bestimmt werden können als α', α''. Um den Fehler in α' abzuschätzen, hat man $\frac{f^{\mathrm{III}}_\alpha}{6} = 66''$ mit $f^{\mathrm{I}}_\alpha = 193''$ zu vergleichen. Es ist also der Fehler in α' etwa gleich $^1/_3\,\alpha'$. Um den Fehler in α'' abzuschätzen, hat man

$$\frac{\tau_3 - \tau_1}{3}\,\frac{f^{\mathrm{III}}_\alpha}{\tau} = \frac{0{,}92}{3}\,\frac{f^{\mathrm{III}}_\alpha}{3{,}5} = 36'' \text{ mit } f^{\mathrm{II}}_\alpha = 277''$$

zu vergleichen. Es ist also der Fehler in α'' etwa gleich $^1/_8\,\alpha''$. Ganz ebenso findet sich, dass der Fehler in δ' nur etwa gleich $^1/_{1360}\,\delta'$ und derjenige in δ'' nur $^1/_{160}\,\delta''$ ist.

Wegen des grossen Fehlers in α' könnte man nun schliessen, dass es nicht der Mühe werth sein wird, eine vollständige Elimination der Parallaxe vorzunehmen. Ueberhaupt wird zum Zwecke der Darstellung der Beobachtungen eine solche Elimination nur äusserst selten angebracht sein, wie auch an diesem Beispiele noch besonders klar gemacht werden wird. Bedenkt man jedoch, dass die f^{I}_{α} ziemlich klein sind und dass für f^{III}_{α} ein verhältnissmässig sehr grosser Werth angenommen wurde, so ist es nicht ausgeschlossen, dass die Genauigkeit der Bahn doch durch die Parallaxenelimination erhöht werden kann, obwohl ein derartiges Resultat bei ersten Bahnbestimmungen wegen der erforderlichen Mehrarbeit fast ausschliesslich von theoretischer und nicht von praktischer Wichtigkeit ist. Es wird aber hier ausserdem bezweckt, die Methode der Parallaxenelimination ausführlich zu erläutern, und es sollen daher zunächst die allgemeinen Parallaxenfactoren nach der Anmerkung 1, S. 999 berechnet werden. Die dabei erforderlichen Mondcoordinaten sind den American Ephemeris und Nautical Almanac entnommen worden.

Berechnung der barycentrischen Parallaxenfactoren, sowie der Reductionen $\Delta_1 X$, $\Delta_1 Y$, $\Delta_1 Z$ der Sonnencoordinaten auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems:

	1	2	3
Gr. M. Z.	$17^h 46^m$	$16^h 59^m$	$18^h 08^m$
α	$94^0 24'$	$94^0 30'$	$94^0 31'$
$\alpha_{☾}$	251 14	307 33	348 59
δ	$+38^0 06'$	$+41^0 12'$	$+43^0 26'$
$\delta_{☾}$	-22 49	-23 31	-10 24
$\alpha - \alpha_{☾}$	$203^0 10'$	$146^0 57'$	$105^0 32'$
$\cos\delta_{☾}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\cos\alpha_{☾}$	9,5075n	9,7849	9,9919
$\log \Delta_1 X$	4,9664	5,2415n	5,4790n
$\cos\delta_{☾}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin\alpha_{☾}$	9,9763n	9,8992n	9,2812n
$\log \Delta_1 Y$	5,4352	5,3558	4,7683
$\sin\delta_{☾}$	9,5886n	9,6010n	9,2565n
$\log \Delta_1 Z$	5,0829	5,0953	4,7508
$\operatorname{colog}\cos\delta$	0,1041	0,1235	0,1390
$\cos\delta_{☾}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin(\alpha - \alpha_{☾})$	9,5948n	9,7367	9,9838
$\log p^m_\alpha \varrho_m$	0,4722n	0,6312	0,9243
$\sin\delta_{☾}$	9,5886n	9,6010n	9,2565n
$\cos\delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\log I$	9,4845n	9,4775n	9,1175n
$\cos\delta_{☾}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin\delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\cos(\alpha - \alpha_{☾})$	9,9635n	9,9233n	9,4278n
$\log II$	9,7184n	9,7043n	9,2579n
Sub.	9,8535	9,8362	9,5817
$\log\{\cdots\}$	9,3380n	9,3137n	8,6992n
$\log p^m_\delta \varrho_m$	0,1467n	0,1224n	9,5079n

Die geocentrischen Parallaxenfactoren wurden direct aus der „Table of the Sun's Parallax in R. A. and Declination", Publications of the Lick Observatory, vol. I, S. 262, mit den Argumenten „Stundenwinkel" und „Declination" entnommen. Es sollen nun die geocentrischen, die barycentrischen und deren Summe, die allgemeinen Parallaxenfactoren, übersichtlich zusammengestellt werden:

	1	2	3
$p^g_\alpha \varrho_g$	$-6''{,}81$	$-7''{,}86$	$-5''{,}82$
$p^m_\alpha \varrho_m$	$-2{,}97$	$+4{,}28$	$+8{,}40$
$p_\alpha \varrho$	$-9{,}78$	$-3{,}58$	$+2{,}58$
$p^g_\delta \varrho_g$	$+1{,}37$	$+1{,}50$	$+0{,}00$
$p^m_\delta \varrho_m$	$-1{,}40$	$-1{,}33$	$-0{,}32$
$p_\delta \varrho$	$-0{,}03$	$+0{,}17$	$-0{,}32$

Wären jetzt die geocentrischen Distanzen des Kometen bekannt, so würde naturgemäss der Parallaxe dadurch vollständig Rechnung getragen werden können, dass man mit Hülfe der obigen allgemeinen Parallaxenfactoren die Beobachtungen auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems reducirt, sowie gleichzeitig die Sonnencoordinaten durch Anbringung der oben berechneten Correctionen $\varDelta_1 X$ etc. und die Geschwindigkeiten der Sonnencoordinaten durch Anbringung der Geschwindigkeiten $(\varDelta_1 X)'$ auf denselben Schwerpunkt bezieht. Dieses Verfahren würde zu denselben Resultaten führen, wie die hier vorzunehmende vollständige Elimination der Parallaxe.

Nun ist aber sofort ersichtlich, dass selbst für kleine geocentrische Distanzen die p_δ die Beobachtungsfehler an Grösse nicht übersteigen. Man könnte daher, ohne die Genauigkeit zu schädigen, in den folgenden Rechnungen der Parallaxenelimination die $p_\delta \varrho$ kurzweg der Null gleichsetzen. Ausserdem sind hier auch die Unterschiede der $p_\alpha \varrho$ constant, nämlich gleich $6'',2$. Daher könnte man alle von den zweiten Differenzen der $p_\alpha \varrho$ abhängigen Glieder in der Parallaxenelimination ebenfalls der Null gleichsetzen. Diese Abkürzungen sind aber im Folgenden unterlassen, da, wie oben bereits bemerkt wurde, hier bezweckt wird, den Rechenmechanismus der vollständigen Parallaxenelimination ausführlich zu erläutern.

Vorerst aber soll noch der Einfluss der Parallaxe auf die Genauigkeit von z abgeschätzt werden. Zu diesem Zwecke berechne man gleich jetzt die unter A II angegebenen Werthe von α', δ', α'', δ'', sowie den unter A III angegebenen Werth von N. Die drei Glieder von N sind:

$$N = 0{,}0000 + 0{,}4995 + 0{,}0041.$$

Ausschlaggebend für die Genauigkeit von N, und daher von $\frac{1}{m}$, ist also wieder das zweite, von α'' abhängige Glied. Da nun aber, wie oben gezeigt wurde, die zweiten Differenzen der $p_\alpha \varrho$ gleich Null sind, so würde die Genauigkeit von z nicht beeinflusst werden, wenn die vollständige Elimination der Parallaxe unterlassen würde. Da der Fehler in α'' etwa gleich $^1/_8\,\alpha''$ ist, so wird also der Fehler von N ebenfalls etwa $^1/_8\,N$ sein, worauf wir später noch zurückkommen werden.

Die weitere Rechnung nach Anmerkung 1, Seite 999, stellt sich wie folgt:

	1	2	3
$\cos\delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\sin\alpha$	9,9987	9,9987	9,9986
$\log I$	$5{,}5703_n$	$5{,}1150_n$	4,9571
$\sin\delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\cos\alpha$	$8{,}8849_n$	$8{,}8946_n$	$8{,}8962_n$
$\log II$	1,8645	$2{,}6406_n$	2,9270
Add.	9,9999	0,0015	0,0040
$\log \varDelta_2 X$	$5{,}5703_n$	$5{,}1165_n$	4,9611

	1	2	3
$\cos\delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\cos\alpha$	8,8849n	8,8946n	8,8962n
$\log I$	4,4565	4,0109	3,8547
$\sin\delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\sin\alpha$	9,9987	9,9987	9,9986
$\log II$	2,9783n	3,7447	4,0294n
Sub.	142	9,9273	9,695
$\log \Delta_2 Y$	4,4707n	3,6720n	3,5497n
$\log \Delta_2 Z$	3,0852	3,8038n	4,0545
$\log \Delta_1 X$	4,9664	5,2415n	5,4790n
$\log \Delta_2 X$	5,5703n	5,1165n	4,9611
Add.	9,8757	2430	9,8430
$\log \Delta X$	5,4460n	5,4845n	5,3220n
$\log \Delta_1 Y$	5,4352	5,3558	4,7683
$\log \Delta_2 Y$	4,4707n	3,6720n	3,4597n
Add.	9,9501	9,9909	9,9781
$\log \Delta Y$	5,3853	5,3467	4,7464
$\log \Delta_1 Z$	5,0829	5,0953	4,7508
$\log \Delta_2 Z$	3,0852	3,8038n	4,0545
Add.	43	9,9772	796
$\log \Delta Z$	5,0872	5,0725	4,8304

$P = X, Y, Z;\ p = x, y, z$	d_x	d_y	d_z
$\log \Delta_2 P_3$	4,9611	3,5497n	4,0545
$\log I$	5,5597	4,1483n	4,6531
$\log \Delta_2 P_1$	5,5703n	4,4707n	3,0852
$\log II$	6,0543n	4,9547n	3,5692
Add.	9,8324	0,0630	0,0345
$\log$ Zähler	5,8867n	5,0177n	4,6876
$\log \Delta_2 P_2$	5,1165n	3,6720n	3,8038n
$\log$ Nenner	5,9626n	4,5181n	4,6499n
$\log (d_p + 1)$	9,9241	0,4996	0,0377n
Sub.	9,2810	9,8347	0,2825
$\log d_p$	9,2051n	0,3343	0,3202n

$\log 2d_x$	9,5061n	$\log \Delta_2 Y_2$	3,6720n	$\log (X_2)$	9,0391n
$\log 2d_y$	0,6353	$\log j \sin a$	6,7540n	$\log \Delta_2 X_2$	5,1165n
$\log 2d_z$	0,6212n	$tg\, a$	9,6902n	$\log I$	4,1556
$\log I = \log 1/(R)^3$	0,0210	a	333° 54′	$\log (Y_2)$	9,9529n
$\log \tau_1 \tau_3$	7,5537	$\sin a$	9,6434n	$\log \Delta_2 Y_2$	3,6720n
$\log II$	1,9524n	$\cos a$	9,9533	$\log II$	3,6249
Add.	9,9949	$\log j$	7,1106	Add.	0,1121
$\log$ [ ]	1,9473n	$\log II$	3,0675n	$\log$ Summe	4,2677
$\log \Delta_2 X_2$	5,1165n	Add.	9,9996	$\log (Z_2)$	9,5902n
$\log j \cos a$	7,0638	$\log$ [ ]	3,0671n	$\log \Delta_2 Z_2$	3,8038n
$\log II$	3,0816	$\log \Delta_2 Z_2$	3,8038n	$\log III$	3,3940
Add.	0,0004	$\log j\, tg\, d$	6,8709	Add.	0,0545
$\log$ [ ]	3,0820	$tg\, d$	9,7603	$\log$ Zähler	4,3222
				$\log (R)$	9,9930
				$\log \Delta_2 R_2$	4,3292

Nach Anmerkung 2, S. 999:

i	1	2	3
X	— 0,1780529	— 0,1093873	— 0,0562684
ΔX	— 0279	— 0305	— 0210
(X)	— 0,1780808	— 0,1094178	— 0,0562894
Y	— 0,8882410	— 0,8971793	— 0,9010569
ΔY	+ 0243	+ 0222	+ 056
(Y)	— 0,8882167	— 0,8971571	— 0,9010513
Z	— 0,3853174	— 0,3891974	— 0,3908799
ΔZ	+ 0122	+ 0118	+ 068
(Z)	— 0,3853052	— 0,3891856	— 0,3908731

A . . . 263° 02′ 47″,5 D . . . — 23° 17′ 49″,5 $(R) = 0{,}984038$

A II a.

$\log \alpha'$	8,148227	$\log \delta'$	9,883022	$\log (tg\,\delta)'$	0,130182
$\log \alpha''$	9,568359n	$\log \delta''$	9,932162n	$\log (tg\,\delta)''$	9,468466

Nach Anmerkung 4, S. 999 ($P = X, Y, Z$):

$(\Delta P)'$	$(\Delta X)'$	$(\Delta Y)'$	$(\Delta Z)'$
$(\Delta P)_3$	— 0,0000210	+ 0,0000055	+ 0,0000068
$(\Delta P)_2$	— 0305	+ 0222	+ 0118
$(\Delta P)_1$	— 0279	+ 0243	+ 0122
$(\Delta P)_3 - (\Delta P)_2$	+ 0,0000095	— 0,0000167	— 0,0000050
$(\Delta P)_2 - (\Delta P)_1$	— 026	— 021	— 04
$\log [(\Delta P)_3 - (\Delta P)_2]$	4,9777	5,2227n	4,6990n
$\log [(\Delta P)_2 - (\Delta P)_1]$	4,4150n	4,3222n	3,6021n
$\log (\Delta P)'_1$	4,4937	4,7387n	4,2150n
$\log (\Delta P)'_3$	3,8164n	3,7236n	3,0035n
$\log (t_3 - t_2)$	0,4840	0,4840	0,4840
$\log I$	4,3004n	4,2076n	3,4875n
$\log (t_2 - t_1)$	0,5986	0,5986	0,5986
$\log II$	5,0923	5,3373n	4,8136n
Add.	9,9235	0,0311	0,0200
log Nenner	5,0158	5,3684n	4,8336n
$\log (\Delta P)'$	5,9341	6,2867n	5,7519n

A III a, c.

$\log n$	9,468722	$\log s$	9,540590	$\log N$	9,702125
$\log C_1$	9,631002n	$\log \Gamma$	9,666908n	$\log \varkappa$	9,672183n
$\log C_2$	9,297910	$\log \Phi$	9,787231n	$\log a_x$	8,265375
$\log c$	9,972105n			$\log a_y$	9,616387n
ψ	159° 41′ 0,″0	$\log \frac{\lambda}{\varkappa}$	9,616567n	$\log a_z$	9,994487

Nach Anmerkung 1, S. 1000:

$a - \alpha$	239° 24′	$\log \Gamma$	9,6669n	$\log I$	8,1575n
$\log c_1$	0,0093n	$colog\, \gamma$	0,0744	$\log c_2$	9,9349n
$\log c_2$	9,9349n	$\log \frac{\Gamma}{\gamma}$	9,7413	$\log (tg\,\delta)'$	0,1302
				$\log II$	0,0651n
$\log j$	7,1106n	*log* Zähler	0,1907	Add.	0,0053
$\log j c_2$	7,0455n	$colog\, \Phi$	0,2128n	$\log [\ ]$	0,0704n
$colog\, 2$	9,6990	$\log \beta$	7,1480n	$\log j/N$	7,4084
log Summe	6,7445n	$\log \alpha'$	8,1482	$\log \Delta\varkappa$	7,4788

$[P]'$	$[X]'$	$[Y]'$	$[Z]'$
$\log P'$	0,004615	8,994638n	8,632210n
$\log (\Delta P)'$	5,9341	6,2867n	5,7519n
Add.	037	0850	0572
log Summe	0,004652	8,995488n	8,632782n
$\log III$	6,0426	7,1467n	7,0903n
Add.	048	0,006109	0,012278
$\log [P]'$	0,004700	9,001597n	8,645060n

A IV a.

$\log a^2$	9,812094	q'^2	1,64537	h	+ 3,23519
$\log b$	8,094215	p'	+ 0,019458	c'	— 0,957246
$\log G^2$	0,014480				

Da $p' > 0$, $c < 0$, und $\psi > 125^0\,16'$ ist, so ist, nach Anmerkung 1, S. 468, nur eine parabolische Lösung möglich. Die graphische Lösung ergiebt $z = 0{,}628992$. Mit dem oben bereits angegebenen Werthe von $\varkappa$ findet sich $\frac{1}{m} = 1{,}50067$ und somit $z_L = 0{,}5051$. Es entspricht nun in der Tafel XVI eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von 0,015 in $\frac{1}{m}$. Dem Unterschiede $z - z_L = 0{,}124$ entspricht also eine Unsicherheit von 0,19. Es wurde aber oben gefunden, dass die Unsicherheit in N gleich $\frac{1}{8}N$ ist, und da $\frac{1}{m}$ dem Werthe von N proportional ist und keine weitere Unsicherheit in der Berechnung von $\frac{1}{m}$ eintritt, so ist die durch Vernachlässigung der f^{III} in $\frac{1}{m}$ verursachte Unsicherheit etwa $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m}$, also etwa $= 0{,}19$. Die parabolische Lösung fällt also noch gerade auf die, durch die Vernachlässigung der f_a^{III} gesetzte Sicherheitsgrenze, und es ist kein Grund vorhanden, an dieser Stelle die parabolische Lösung zu verwerfen. Interpolirt man aber den Werth von z für die allgemeine Lösung aus der Tafel XVI, so erhält man $z = 0{,}4283$. Der Unterschied zwischen der parabolischen und allgemeinen Lösung erfordert also eine Unsicherheit von 0,30 in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth, welcher die Grenze 0,19 weit übersteigt, könnte nur dadurch berechtigt sein, dass der für f_a^{III} sehr gross angenommene Werth dennoch zu klein wäre. Man wäre also jetzt berechtigt, die Parabel zu verwerfen. Anstatt dies jedoch zu thun, sollen beide Lösungen, die parabolische, und die allgemeine durchgeführt werden. Zu diesem Zwecke ist nach der Anmerkung 1, S. 1001, noch (m) zu berechnen, und der der Tafel entnommene Werth von z mit Anwendung der Differentialformel, Anmerkung 1), S. 1001, zu verbessern. Man erhält dann

$$\log(m) = 9{,}826358, \qquad \frac{1}{(m)} = 1{,}49156, \qquad z = 0{,}436426.$$

V a, c.

	Parabel	Ellipse		Parabel	Ellipse
$\log \varrho$	9,791391	9,632923	$\log x'$	0,001001n	0,002135n
$\log \sigma$	9,667811	9,509343	$\log y'$	8,963922n	8,521245n
$\log \varrho_1$	9,7840	9,6255	$\log z'$	9,702152	9,560137
$\log \varrho_3$	9,7973	9,6388	$\log r$	0,198329	0,144504
$\log \tau_1$	8,719590	8,719593	$\log r'$	9,109027	8,931513
$\log \tau_3$	8,834133	8,834135	$\log g^2$	0,102701	0,058005
$\log x$	8,862764	8,924634	$\log 1/a$	—	9,463940
$\log y$	0,133892	0,086099	$\log p$	0,493657	0,344233
$\log z$	9,901284	9,827434	$\log e^2$	0,000000	9,552737

VI a, c.

	Parabel	Ellipse		Parabel	Ellipse
$\log f_1$	9,999742	9,999625	$\log g_1$	8,834047n	8,834012n
$\log f_3$	9,999849	9,999781	$\log g_3$	8,719540	8,719520

$(O-C)$ Parabel[1]). $(O-C)$ Ellipse[1]).

	1	3		1	3
∂, α	$-21''\!,6$	$-27''\!,7$	∂, α	$+12''\!,7$	$-6''\!,6$
$\partial \delta$	$-01'\,15{,}0$	$-12{,}1$	$\partial \delta$	$-37{,}8$	$+15{,}3$

[1]) Wegen eines Fehlers in der im Lick Observatory Bulletin Nr. 179 veröffentlichten Originalrechnung ist diese Darstellung der Beobachtungen eine bedeutend bessere.

Wie oben bereits im Voraus entschieden wurde, ist die Darstellung der Beobachtungen durch die Ellipse (allgemeine Lösung) bedeutend besser als durch die Parabel. Da die Unterschiede $B - R$ für die Ellipse für den ersten und dritten Ort durchweg entgegengesetztes Zeichen haben, so können diese Unterschiede der Hauptsache nach durch willkürliche Aenderung von x', y', z' entfernt werden, so dass man die Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung in diesem Falle gänzlich vermeiden kann. Es soll diese einfache Verbesserung jedoch hier nicht vorgenommen werden, sondern die unverbesserte Bahn soll weiter unten als Ausgangsbahn für eine zweite Bahnbestimmung aus längerem geocentrischen Bogen dienen.

Um näher zu erläutern, was nun in diesem Beispiele durch die Parallaxenelimination erreicht worden ist, sollen die obigen Resultate mit denjenigen verglichen werden, welche man erhalten hätte: 1. mit vollständiger Vernachlässigung der Parallaxe; 2. wenn die Beobachtungen etc., wie oben angedeutet wurde, im Voraus durch Anbringung der allgemeinen Parallaxe auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems reducirt worden wären. Im letzteren Falle sollten die Resultate mit den durch die Elimination der Parallaxe abgeleiteten innerhalb der durch die Stellenzahl der Differenzen der α und δ gesetzten Sicherheitsgrenze übereinstimmen. Im ersteren Falle ist ein Unterschied zu erwarten: a) in z (und daher in x, y, z) wegen der durch Anbringung der Correctionen ΔX_2 etc. an die mittleren Sonnencoordinaten bewirkten Elimination der Parallaxe (während die, von den $p_\delta \varrho$ und von den zweiten Differenzen der $p_\alpha \varrho$ abhängigen Glieder, wie oben im Voraus gezeigt wurde, ohne Einfluss sind); b) in x', y', z' wegen der Elimination der ersten Differenzen in $p_\alpha \varrho$, welche constant $= 6''2$ waren. Beide Unterschiede können aber keinen merklichen Einfluss auf die Darstellung der Beobachtungen haben, da der mittlere Ort stets genau repräsentirt ist, selbst mit fehlerhafter geocentrischer Distanz, und da weiter, bei der Darstellung der beiden äusseren Oerter, die Geschwindigkeiten mit den Zwischenzeiten multiplicirt werden. Kleine Aenderungen der Geschwindigkeiten können daher nur bei langen Zwischenzeiten Unterschiede in der Darstellung der Beobachtungen hervorbringen. Stellt man nun die entsprechenden Resultate für die drei Arten der Bahnbestimmung zusammen, so wird man die eben gezogenen Schlüsse vollständig bestätigt finden, wobei zu bemerken ist, dass wir es hier immer noch mit unverbesserten Bahnen, d. h. directen Lösungen, zu thun haben, und dass die absolute Grösse der Unterschiede $B - R$ nicht in Betracht kommt.

	(a) Parallaxe vernachlässigt	(b) Parallaxe eliminirt	(c) Parallaxe im Voraus angebracht
z	0,4283	0,4364	0,4371

Die beiden letzteren Werthe von z stimmen miteinander vollständig innerhalb der unvermeidlichen Unsicherheit der Lösungen überein, wogegen bei Vernachlässigung der Parallaxe z um 0,0084 von dem Mittel der beiden anderen Lösungen abweicht. Auch dieser Unterschied ist unbedeutend, würde aber grösser gewesen sein, wenn hier nicht zufällig die ersten Differenzen der $p_\alpha \varrho$ konstant und die $p_\delta \varrho$ nicht sehr klein gewesen wären.

$O - C$	(a)	(b)	(c)
$\cos\delta_1\, \alpha_1$	$+ 11''$	$+ 13''$	$+ 12''$
δ_1	$- 36$	$- 38$	$- 38$
$\cos\delta_3\, \alpha_3$	$- 8$	$- 7$	$- 6$
δ_3	$+ 17$	$+ 15$	$+ 14$

Die Darstellung der Beobachtungen ist also wegen der kurzen Zwischenzeiten, wie oben vorausbestimmt wurde, fast die gleiche in den drei Fällen; vergleicht man aber die Bahnen mit der folgenden späteren Beobachtung, deren Abstand mehr als $2^1/_2$ Monate von der Epoche beträgt:

1910 März 3,47726 α (app.) $111^0 15' 51''$ δ (app.) $+ 52^0 54' 42''$ (Rambaud-Algier),

so erhält man folgende Unterschiede, $B - R$:

	(a)	(b)	(c)
∂, α	$-9{,}'8$	$-5{,}'4$	$-5{,}'0$
$\partial\,\delta$	$+6{,}5$	$-2{,}0$	$-2{,}'7$

Die Unterschiede (b) und (c) stimmen innerhalb der Unsicherheit der aus kurzen Intervallen berechneten Bahnen miteinander überein und sind bedeutend kleiner als diejenigen, welche unter (a) bei Vernachlässigung der Parallaxe erzielt wurden.

Mit der vollständigen Parallaxenelimination erzielt man also auf jeden Fall eine genauere Ephemeride. Da aber jede erste Bahnbestimmung mehr oder weniger unsicher ist, und man stets eine solche Bahn auf Grund längerer Intervalle verbessern wird, so ist dieser Vortheil hauptsächlich von theoretischem Interesse, und ist demselben nicht zu viel Gewicht beizulegen.

Die zweite Bahnbestimmung (Bahnverbesserung) beruht auf den folgenden Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

Gr. M. Z.	α (1909.0)	δ (1909.0)	Beobachter
1909 Dec. 7.66050	$94^0 09' 31{,}''4$	$+34^0 44' 21{,}''5$	Barnard-Yerkes
1909 Dec. 18.75589	94 30 46, 4	+43 25 59, 3	Aitken-Lick
1910 März 3.47726	111 14 26, 1	+52 54 37, 2	Rambaud-Algier

Der mittlere Ort stimmt mit dem dritten Ort der ersten Bahnbestimmung überein, so dass verschiedene, zur Bahnverbesserung notwendige Werthe direct der ersten Bahnbestimmung entnommen werden können.

Coordinaten der Sonne (1909.0):

	X	Y	Z
I	$-0{,}2477340$	$-0{,}8745100$	$-0{,}3793587$
II	$-0{,}0562684$	$-0{,}9010569$	$-0{,}3908799$
III	$+0{,}9458691$	$-0{,}2734153$	$-0{,}1186087$

Nach theilweiser Elimination der geocentrischen Parallaxe erhält man folgende Werthe für die

Coordinaten der Sonne (1909.0):

	X	Y	Z
I	$-0{,}2477581$	$-0{,}8745050$	$-0{,}3793684$
II	$-0{,}0562888$	$-0{,}9010553$	$-0{,}3908799$
III	$+0{,}9458926$	$-0{,}2734097$	$-0{,}1186062$

Ganz wie im dritten Beispiele ist ein Ausgangswerth für $\log \varrho$ der ersten Bahn zu entnehmen und Ausgangswerthe für $x'\, y'\, z'$ aus den Constanten für den Aequator zu berechnen, und zwar ist es ganz einerlei für die vorliegenden Zwecke, welche der obigen drei Bahnen für die Ausgangswerthe herangezogen wird. Wie im dritten Beispiele hat man:

$log\,\varrho$	9,651336	$log\,x'$	0,002608$_n$	v	$+15^0\,35'\,48'',4$
$log\,x$	8,486963	$log\,y'$	8,732781$_n$	E	$+07\;31\;30,6$
$log\,y$	0,088284	$log\,z'$	9,561878	M	$+02\;50\;00,9$
$log\,z$	9,844430	$log\,r'$	9,048453	μ	$496'',138$
$log\,r$	0,149544				

VI′.

E_1	$03^0\,28'\,38'',4$	$2\,g_1$	$-04^0\,02'\,52'',2$
E_3	$32\;14\;38,1$	$2\,g_3$	$+24\;43\;07,5$
$log\,r_1$	0,144677	$log\,\gamma_1$	8,983296$_n$
$log\,r_3$	0,242785	$log\,\gamma_3$	9,765817

VI″.

$log\,f_1$	9,997141
$log\,f_3$	9,880218
$log\,g_1$	9,279764$_n$
$log\,g_3$	0,075722

$(O - C)$.

	1	3
$\partial_\prime\,\alpha$	$-01'',5$	$+319'',4$
$\partial\,\delta$	$+09,3$	$-735,8$

Diese Unterschiede entsprechen also wieder einer intermediären Ausgangsbahn, deren Constanten α_2, δ_2 und die obigen, auf Grund der ersten Bahnbestimmung angenommenen Werthe von ϱ, x', y', z' sind.

VII.

$log\,\varrho$	9,651336	Add.	9,67128	$log\,\xi$	8,40826$_n$
$log\,R\cos\psi$ . . .	9,962755$_n$	log Summe . . .	7,91509	$log\,\eta$	9,51103
Sub.	0,172656	$log\,z'\zeta$	9,05049	$log\,\zeta$	9,48861
log Zähler . . .	0,135411	Add.	0,03069		
$log\,r$	0,149544	log Zähler . . .	9,08118	$log\,\xi/\varrho$	8,75692$_n$
$\cos\beta$	9,985867	$log\,\varrho$	9,65134	$log\,\eta/\varrho$	9,85969
$log\,x'\,\xi$	8,41087	$log\,\Phi$	9,42984	$log\,\zeta/\varrho$	9,83727
$log\,y'\,\eta$	8,24381$_n$				

i	1	3
$log\,\gamma_i^2$	7,96659	9,53163
$log\,\gamma_i^2/2\,a$	7,09596	8,66100
Sub.	9,99946	9,97963
$log\,\gamma_i^c$	9,99973	9,98982
$log\sqrt{2}\,\cos\beta\,\gamma_i^c$	0,13611	0,12620
$log\,\dfrac{\sqrt{2}}{\gamma_i}\,\cos\beta\,\gamma_i^c$ . . .	1,15281$_n$	0,36038
Add.	9,99170	0,04819
$log\,\Phi_i$	1,14451$_n$	0,40857
$log\,2\,r\,\gamma_i\gamma_i^c$	9,43360$_n$	0,20621
$log\,\dfrac{r\,r'\,\gamma_i^2}{\sqrt{2}}$	7,01407	8,57911
Add.	9,99835	0,01013
log Summe	9,43195$_n$	0,21634
$log\,\tau_i\,\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	9,60732	0,43560
Add., Sub.	9,69679	9,81741
log ( )	9,12874	0,03375$_n$
$log\,\gamma_i^c$ ( )	9,12847	0,02357$_n$
$log\,r_i\,\gamma_i$	9,12798$_n$	0,00860
Add.	7,05000	8,54500
log [ ]	6,17798	8,55360$_n$
$colog\,r_i\,r$	9,70578	9,60768

i	1	3
$log\,a\,\gamma_i$	9,55290$_n$	0,33542
$log\,M_i$	5,43666	8,49670
$log\,\dfrac{r\,r'}{2}\,\gamma_i$	7,88027$_n$	8,66279
$log\sqrt{2}\,r\,\gamma_i^c$	0,29979	0,28988
Add.	9,99835	0,01013
log ( )	0,29814	0,30001
$log\,\gamma_i^3$	6,94990$_n$	9,29746
$colog\,r_i$	9,85532	9,75722
$log\,\gamma_i^3/r_i$ ( )	7,10336$_n$	9,35469
$log\,\gamma_i^2$	7,96659	9,53163
$log\,\gamma_i^2/r_i$	7,82191	9,28885
$log\,(1-\gamma_i^2/r_i)$	9,99711	9,90609
$log\,\tau_i$	9,28072	0,10900
$log\mp\tau_i\,(1-\gamma_i^2/r_i)$ . .	9,27783$_n$	0,01509
$log\,g_i$	9,27976$_n$	0,07572
Sub.	7,64800	9,17554
log ( )	6,92583	9,19063$_n$
$log\,3/2$ ( )	7,10192	9,36672$_n$
Add.	7,52000	8,44850
log [ ]	4,62192$_n$	7,80319$_n$
$log\,N_i$	5,19152	8,37279

VIII.

$p = x, y, z$	g_{x_1}	g_{y_1}	g_{z_1}	g_{x_3}	g_{y_3}	g_{z_3}
$\log p' r \gamma_i$	9,13545	7,86562	8,69472n	9,91797n	8,64814n	9,47724
$\log \sqrt{2}\, p \gamma_i^c$	8,63721	0,23853	9,99468	8,62730	0,22862	9,98477
Add.	0,11975	0,00184	9,97767	9,97717	9,98843	0,11753
$\log$ [ ]	9,25520	0,24037	9,97235	9,89514n	0,21705	0,10230
$\log \gamma_i^3$	6,94990n	6,94990n	6,94990n	9,29746	9,29746	9,29746
$\operatorname{colog} r_i r$	9,70578	9,70578	9,70518	9,60768	9,60768	9,60768
$\log g_{p_i}$	5,91088n	6,89605n	6,62803	8,80028n	9,12219	9,00744
	m_{x_1}	m_{y_1}	m_{z_1}	m_{x_3}	m_{y_3}	m_{z_3}
$\log p M_i$	3,92362	5,52494	5,28109	6,98366	8,58498	8,34113
$\log p' N_i$	5,19413n	3,92430n	4,75340	8,37540n	7,10557n	7,93467
Add..	9,97606	9,98897	0,11284	9,98201	9,98536	0,14371
$\log m_{p_i}$	5,17019n	5,51391	5,39393	8,35741n	8,57034	8,48484
	f_{x_1}	f_{y_1}	f_{z_1}	f_{x_3}	f_{y_3}	f_{z_3}
$\log I$	8,75406n	9,85683	9,83441	8,63714n	9,73991	9,71749
$\log 2\, m_{p_i}$	5,47122n	5,81494	5,69496	8,65844n	8,87137	8,78587
$\log p \gamma_i^2$	6,45355	8,05487	7,81102	8,01859	9,61991	9,37606
$\log II$	5,15800n	5,50172	5,38174	8,34522n	8,55815	8,47265
$\log III$.	6,14033	7,74165	7,49780	7,70537	9,30669	9,06284
$\log IV$	7,055 9	8,04056	7,77254	9,20885n	9,53076	9,41601
$+ I$	− 0,0567625	+ 0,719167	+ 0,682983	− 0,0433650	+ 0,549425	+ 0,521788
$+ II$	− 0144	+ 032	+ 024	− ,0221421	+ ,036154	+ ,029692
$+ III$	+ 01381	+ 05516	+ 03146	+ 050742	+ 0,202624	+ 0,115568
$+ IV$	+ 011360	+ ,010979	+ 05923	− 0,1617520	+ 0,339438	+ 0,260624
f_{p_i}	− 0,0555028	+ 0,735694	+ 0,692076	− 0,222185	+ 1,127641	+ 0,927672
$\log f_{p_i}$	8,74431n	9,86670	9,84016	9,34671n	0,05217	9,96740

IX.

i	1	3
$\log \sin \alpha$	9,99886	9,96945
$\cos \alpha$	8,86051n	9,55905n
$\sin \delta$	9,75573	9,90184
$\cos \delta$	9,91476	9,78037
$\log \cos \alpha\, f_{y_i}$	8,72721n	9,61122n
$\log \sin \alpha\, f_{x_i}$	8,74317n	9,31616n
Sub.	8,57325	9,98798
$\log$ [ ]	7,30046	9,30414n
$\log I = \log 1/\varrho_i$ [ ] .	7,66609	9,27979n
$\log \varrho_i$	9,63437	0,02435
$\log \varrho_i^2$	9,26874	0,04870
$\log p_\alpha \varrho_i$	5,4589n	5,5990
$\operatorname{colog} \varrho_i^2$	0,73126	9,95130
$\log II$[1])	6,10492n	5,33067
Add..	9,98791	9,99995
$\log A_{f_i}$	7,65400	9,27974n
$\log \cos \alpha \,.\, g_{y_i}$	5,75656	8,68124n
$\log \sin \alpha \,.\, g_{x_i}$	5,90974n	8,76973n
Sub.	0,23116	9,35411

i	1	3
$\log$ [ ]	6,14090	8,03535
$\log A_{g_i}$	6,50653	8,01100
$\log \cos \alpha \,.\, m_{y_i}$	4,37442n	8,12939n
$\log \sin \alpha \,.\, m_{x_i}$	5,16905n	8,32686n
Sub.	9,92404	9,76019
$\log$ [ ]	5,09309	7,88958
$\log A_{m_i}$	5,45872	7,86523
$\log \sin \alpha \,.\, f_{y_i}$	9,86556	0,02162
$\log \cos \alpha \,.\, f_{x_i}$	7,60482	8,90576
Add..	0,00238	0,03205
$\log$ ( )	9,86794	0,05367
$\log \sin \delta$ ( )	9,62367	9,95551
$\log \cos \delta\, f_{z_i}$	9,75492	9,74777
Sub.	9,54758	9,78774
$\log$ [ ]	9,17125n	9,53551
$\log I = \log 1/\varrho_i$ [ ] .	9,53688	9,51116n
$\log p_\delta \varrho_i$	5,0705	4,6184n
$\log II$[1]) $= \log p_\delta \varrho_i/\varrho_i^2$	5,80176	4,5697n
Add..	0,00008	0,00001
$\log B_{f_i}$	9,53696	9,51117n

[1]) cf. die Anmerkung S. 1029.

IX (Fortsetzung).

	1	3		1	3
$log\ sin\ \alpha\ gy_i$	6,89491n	9,09164	$log\ cos\ \alpha\ .\ mx_i$	4,03070	7,91646
$log\ cos\ \alpha\ .\ gx_i$	4,77139	8,35933	Add.	0,01408	0,09274
Add.	9,99672	0,07380	log ( )	5,52685	8,63253
log ( )	6,89163n	9,16544	$log\ sin\ \delta$ ( )	5,28258	8,53437
$log\ sin\ \delta$ ( )	6,64736n	9,06728	$log\ cos\ \delta\ .\ mz_i$	5,30869	8,26521
$log\ cos\ \delta\ gz_i$	6,54279n	8,78781	Sub.	8,79217	9,93374
Sub.	9,43495	9,95575	log [ ]	4,07475n	8,19895
log [ ]	5,97774n	8,74356	$log\ B_{m_i}$	4,44038	8,17460n
$log\ B_{g_i}$	6,34337	8,71921n	$log\ g_i$	9,27976n	0,07572
$log\ sin\ \alpha\ my_i$	5,51277	8,53979	$log\ C_i$	9,64539n	0,05137

X.

Es ergeben sich also die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $\partial\varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, wobei die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind:

$$(7{,}65400)\ \partial\varrho + (9{,}64421)\ \partial x' + (8{,}51116)\ \partial y' + (6{,}38976)\ \partial z' = 4{,}85560n$$
$$(9{,}53696)\ \partial\varrho + (8{,}26160n)\ \partial x' + (9{,}40045)\ \partial y' + (9{,}55997n)\ \partial z' = 5{,}65405$$
$$(9{,}27974n)\ \partial\varrho + (0{,}02675n)\ \partial x' + (9{,}59770n)\ \partial y' + (8{,}09747)\ \partial z' = 7{,}18989$$
$$(9{,}51117n)\ \partial\varrho + (9{,}54871)\ \partial x' + (9{,}95398n)\ \partial y' + (9{,}80023)\ \partial z' = 7{,}55233n$$

Die Auflösung ergiebt:

$log\ \partial\varrho$ . . 8,04315n, $log\ \partial x'$ . . 5,44027, $log\ \partial y'$ . . 7,0605, $log\ \partial z'$ . . 7,99555n

und somit ferner:

$log\ x$	8,495803	$log\ y$	0,085441	$log\ z$	9,839687
$log\ x'$	0,002596n	$log\ y'$	8,724556n	$log\ z'$	9,549926

und weiter nach A Vc, B VI', VI'', A VIc:

	1	3
$(B-R)\ \partial,\alpha$	$-0{,}''7$	$+\ 1{,}''4$
$(B-R)\ \partial\delta$	$-1{,}2$	$-12{,}6$

Die Neuberechnung der absoluten Glieder der obigen Gleichungen mit diesen neuen Unterschieden, und die Auflösung der Gleichungen ergiebt weitere Correctionen $\partial\varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ und daher von ∂x, ∂y, ∂z, nach deren Anbringung an die obigen Werthe von x, y, z, x', y', z' man folgende endgültige Werthe erhält:

$log\ x$	8,495919	$log\ x'$	0,002600n
$log\ y$	0,085404	$log\ y'$	8,724205n
$log\ z$	9,839623	$log\ z'$	9,549805

Die Darstellung des ersten und dritten Ortes ergiebt:

	1	3
$(B-R)\ \partial,\alpha$	$+0{,}''8$	$-0{,}''2$
$(B-R)\ \partial\delta$	$+0{,}2$	$+0{,}5$

Die Elemente und Constanten für den Aequator können in ähnlicher Weise wie in den vorangehenden Beispielen nach A VII berechnet werden.

Sechstes Beispiel.

Im Falle, wo gemäss den, in der Anmerkung 1, S. 468 enthaltenen Kriterien eine dreifache parabolische Lösung zum Vorschein kommt, lässt sich, ganz wie in den obigen Beispielen, mit Hülfe der Tafel XVI entscheiden, ob alle drei zu verwerfen sind, oder ob eine derselben mit der allgemeinen Lösung übereinstimmt und daher zu adoptiren ist.

Die grösste Anzahl der bei einer Kometenbahn in Betracht kommenden Lösungen ist fünf, nämlich drei mit und zwei ohne Voraussetzung über die Excentricität. Damit aber eine parabolische Lösung auch eine physische Bedeutung habe, muss dieselbe innerhalb der Sicherheit der Rechnung mit einer allgemeinen Lösung übereinstimmen. Dadurch reducirt sich aber die Anzahl der möglichen parabolischen Lösungen zunächst auf zwei. Somit können **drei** parabolische Lösungen überhaupt nicht in Betracht kommen. Da aber immer nur entweder eine, oder drei parabolische Lösungen in Betracht kommen, kann daher höchstens eine als von physischer Bedeutung übrig bleiben, nämlich diejenige, welche mit einer der allgemeinen Lösungen übereinstimmt.

Stimmt nun aber keine der drei mathematischen parabolischen Lösungen mit einer der beiden allgemeinen Lösungen überein, so ist die Parabel überhaupt zu verwerfen und die allgemeine Lösung durchzuführen. Da nun $\varrho = Rz$ und $r^2 = \varrho^2 - 2\varrho R \cos\psi + R^2$ ist, so berechne man zunächst die beiden Werthe r_1 und r_2, welche den Tafelwerthen z_1 und z_2 (allgemeinen Lösungen) entsprechen. Ist dann eine der heliocentrischen Distanzen r_1, r_2 grösser, die andere kleiner als R, dann kann nur eine derselben die Gleichung $\sigma = \varrho \cos\delta = \varkappa \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$ befriedigen und ist als die allein mögliche allgemeine Lösung beizubehalten. Sind aber r_1 sowohl als r_2, entweder beide $> R$, oder beide $< R$: dann und nur dann müssen, bei dem gegenwärtigen Stande der Untersuchungen über dies Problem, die beiden allgemeinen Lösungen bis zur Darstellung der Beobachtungen durchgeführt und die Entscheidung über die physisch richtige der beiden mathematischen allgemeinen Lösungen muss auf Grund der Unterschiede $B - R$ getroffen werden. Werden die Beobachtungen durch beide Lösungen dargestellt, eventuell nach Verbesserung der ersten Annäherungen, so muss eine vierte Beobachtung zur Entscheidung herangezogen werden.

In jedem Falle ist es gerathen, vor der Darstellung der Beobachtungen die halbe grosse Axe a aus $\frac{1}{a} = g^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2$ zu berechnen. Man dürfte sich dann wohl berechtigt betrachten, etwaige hyperbolische Lösungen, sowie elliptische mit sehr kleiner Periode (etwa kleiner als zwei Jahre) von vornherein als unwahrscheinlich zu verwerfen.

Als Beispiel, wie im Falle von drei mathematischen parabolischen Lösungen die physisch richtige Lösung festzustellen ist, möge folgende von Frl. Levy ausgeführte Bahnbestimmung des Kometen a 1910 aus kurzen Zwischenzeiten dienen.

Wie in den vorhergehenden Beispielen sind die Beobachtungen bereits auf den Jahresanfang 1910.0, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt.

1910, Gr M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachtungsort
Jan. 18,1287	303° 32′ 52″	— 20° 53′ 27″	Rom
Jan. 19,0166	307 1 0	— 17 43 31	Algier
Jan. 20,0266	310 11 24	— 14 25 38	Algier

Wie im ersten Beispiele ergeben sich die folgenden Hülfsgrössen:

A I.

X	+ 0,470804	$log\ X'$	9,951520	$log\ R$	9,992992
Y	— 0,792680	$log\ Y'$	9,645695	A	300° 42′ 28″
Z	— 0,343865	$log\ Z'$	9,283051	D	339 32 45
ψ	6° 33′ 20″	$log\ c$	9,997151	$log\ s$	9,057539

A II.

$log\ \alpha'$	0,557023	$log\ \delta'$	0,541683	$log\ (tg\ \delta)'$	0,583929
$log\ \alpha''$	1,670860n	$log\ \delta''$	1,252009n	$log\ (tg\ \delta)''$	1,450666n

A III.

$log\ n$	1,51032n	$log\ \Phi$	0,60412n	$log\ N$	1,79951
$log\ C_1$	8,74264	$log\ \lambda/\varkappa$	0,33778	$log\ \varkappa$	7,51196
$log\ C_2$	9,04095n				
$log\ a_x$	0,62217	$log\ a_y$	9,63653	$log\ a_z$	0,49703

A IV.

$log\ a^2$	1,39873	q'^2	+ 0,01176	c'	+ 0,81794
$log\ b$	0,63606	$log\ p'$	9,24434	h/s	+ 0,73413
$log\ G^2$	0,01382	$log\ h$	8,92332	$1/m$	— 274,72

Da $p' > 0$ und $c > 0$, so sind nach Anmerkung 1, S. 468, drei parabolische Lösungen möglich, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ negativ ist. Die Rechnung ergiebt:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\ 0{,}00006.$$

Es kommen also drei parabolische Lösungen in Betracht; und zwar findet man, unter Anwendung der graphischen Methode, ganz wie im ersten Beispiele, als

Parabolische Lösungen:

z_1^p . . . 1,0167, z_2^p . . . 0.8643, z_3^p . . . 0,6348.

Da die Tafel XVI die Werthe von $1/m$ für $\psi < 10^0$ nicht enthält und da in diesem Falle $\psi = 6{,}^\circ 56$ ist, so sind die den allgemeinen Lösungen entsprechenden Werthe von z durch Auflösung der Gleichung (91) auf S. 473, unter Benutzung der, in der Anmerkung 1, S. 1001, gegebenen Differentialformel zu bestimmen. Man erhält dann als

Allgemeine Lösungen:

z_1^a . . . . 1,0899, z_2^a . . . . 0,8810.

Es ist also festzustellen, ob eine und zwar welche der drei parabolischen Lösungen innerhalb der Unsicherheit der Lösungen mit einer allgemeinen Lösung übereinstimmt. Auf den ersten Blick ersieht man, dass die beste Uebereinstimmung zwischen z_2^p und z_2^a besteht. Die dem Werthe von z_2^p entsprechende Parabel ist also die vorläufige Bahn, vorausgesetzt, dass die sofort näher zu untersuchende Unsicherheit von z_2^a nicht bedeutend kleiner ist, als der Unterschied zwischen z_2^p und z_2^a, so dass die Parabel überhaupt zu verwerfen wäre; oder dass etwa gar der nächst in Betracht kommende Unterschied zwischen z_1^p und z_1^a kleiner als die Unsicherheit von z_1^a wäre, in welchem Falle natürlich eine Entscheidung überhaupt nicht möglich wäre. Eine derartige Unsicherheit ist indess, gemäss den Erörterungen in der 82. Vorlesung, ausgeschlossen.

Die Unsicherheit der Lösungen hängt von den Beobachtungsfehlern, der in diesem Falle vernachlässigten Parallaxe, und den, bei der Bestimmung von α', δ', α'', δ'' vernachlässigten dritten und höheren Differenzen der geocentrischen Bewegung ab.

Wegen der verhältnissmässig grossen Schwierigkeit der Beobachtung dieses Kometen sollen die durch Vernachlässigung der geocentrischen und barycentrischen Parallaxe den Beobachtungen anhaftenden Fehler mit den Beobachtungsfehlern vereint gedacht und die letzteren genügend gross, und zwar auf 15″, angesetzt werden.

Reducirt man die Differenzen der beobachteten α und δ auf eintägige Intervalle und schreibt die Differenzen wie im fünften Beispiel, S. 1038, nieder, so erhält man:

$f_\alpha^{\rm I}$	$f_\alpha^{\rm II}$	$f_\delta^{\rm I}$	$f_\delta^{\rm II}$
14064″,7		12834″,7	
	2860″,5		1090″,3
11355,8		11802″,2	
12710		12318	

Bezeichnet man die Beobachtungsfehler mit e_1, e_2, e_3, so ist der Fehler des Mittelwerthes $f^{\rm I}$ offenbar gleich $\frac{e_3 - e_1}{2}$ und der Fehler von $f^{\rm II} = e_3 - 2e_2 + e_1$ (cfr. auch S. 457). Unter der obigen Annahme von $e = e_1 = e_2 = e_3 = \pm 15''$ und indem man die Vorzeichen so wählt, dass die Fehler sich nicht aufheben, sondern numerisch vollauf zählen, erhält man also als Maximalfehler von $f_\alpha^{\rm I}$ und $f_\delta^{\rm I}$ den Werth $e = 15''$ und als Maximalfehler von $f_\alpha^{\rm II}$ und $f_\delta^{\rm II}$ den Werth $4e = 60''$.

Es erübrigt, die durch die vernachlässigten dritten Differenzen $f_\alpha^{\rm III}$, $f_\delta^{\rm III}$ verursachten Fehler abzuschätzen. Das Verhältniss der $f^{\rm II}$ zu den $f^{\rm I}$ in α und δ ist 0,225, bezüglich 0,888. Nimmt man wieder ein gleiches Verhältniss der $f^{\rm III}$ zu den $f^{\rm II}$ an, so ergiebt sich $f_\alpha^{\rm III} = 644''$ und $f_\delta^{\rm III} = 91''$, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Es ist also jetzt $\frac{f_\alpha^{\rm III}}{6} + e = 122''$ mit $f_\alpha^{\rm I} = 12710''$ und $\frac{f_\delta^{\rm III}}{6} + e = 30''$ mit $f_\delta^{\rm I} = 12318''$ zu vergleichen, um das Verhältniss des Fehlers $\partial\alpha'$ zu α', bezüglich $\partial\delta'$ zu δ', zu ermitteln. Es ergibt sich sodann $\partial\alpha' = \frac{1}{104}\alpha'$ und $\partial\delta' = \frac{1}{411}\delta'$.

Um den Fehler in α'' abzuschätzen, hat man $\frac{\tau_3 - \tau_1}{3}\frac{f_\alpha^{\rm III}}{\tau} + 4e = \frac{0{,}12\,k}{3}\frac{644''}{k} + 60'' = 85''$ mit $f_\alpha^{\rm II} = 2860''$ zu vergleichen. Es ist also der Fehler $\partial\alpha'' = \frac{1}{33}\alpha''$. Ganz ebenso findet sich der Fehler $\partial\delta'' = \frac{1}{17}\delta''$.

Die Rechnung ergab ferner:

$$N = \alpha'^3 tg\,\delta - \alpha''(tg\,\delta)' + \alpha'(tg\,\delta)'' = -14{,}987 + 179{,}800 - 101{,}786 = 63{,}027.$$

Ausschlaggebend für die Genauigkeit von N sind also der Hauptsache nach die beiden letzten Glieder. Am wenigsten genau in diesen beiden Gliedern sind aber α'' und δ''. Die Ungenauigkeit des zweiten Gliedes ist daher der Hauptsache nach gleich $^1/_{33}$ seines Werthes, also etwas mehr als 5 Einheiten. In ähnlicher Weise hat man für die Ungenauigkeit des letzten Gliedes $^1/_{17}$ seines Werthes, also etwa 6 Einheiten. Die Maximalungenauigkeit in N ist daher auf etwa 11 Einheiten, also auf 0,17 seines Werthes anzunehmen. Für $\frac{1}{m}$ ergab die Rechnung den Werth $-274{,}72$ und für $\psi = 6{,}^\circ 56$. Da N und $\frac{1}{m}$ einander proportional sind, so ist die Maximalungenauigkeit von $\frac{1}{m}$ gleich $\pm 0{,}17\ (274{,}72) = 47$ Einheiten.

Da nun die Tafel XVI die Werthe von $\frac{1}{m}$ für $\psi < 10^0$ nicht enthält, so kann man in diesem Falle aus derselben auch nicht den angenäherten Differentialquotienten $\frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z}$ direct (nämlich durch Division der entsprechenden Differenzen) entnehmen. Man kann sich aber dadurch helfen, dass man diesen Differentialquotienten durch Differentiation der Gleichung (91) auf S. 473 ableitet und erhält sodann, wenn man noch zur Abkürzung $z^2 - 2cz + 1 = \frac{r^2}{R^2} = u^2$ setzt:

$$\frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z} = \frac{1}{z}\left[\frac{3(z-c)}{u^5} - \frac{1}{m}\right].$$

Für die den beiden allgemeinen Lösungen entsprechenden Werthe von z, nämlich $z_1^a = 1{,}0899$ und $z_2^a = 0{,}8810$, für welche $\log r_1^a = 9{,}16743$ und $\log r_2^a = 9{,}19766$ sind, erhält man dann, wenn $\partial z_1 = \partial z_2 = 0{,}01$ gesetzt wird:

$$1.\quad \partial\frac{1}{m} = 38{,}15; \qquad\qquad 2.\quad \partial\frac{1}{m} = -33{,}16.$$

Das Vorzeichen von $\partial\frac{1}{m}$ ist natürlich nicht von Belang. Da nun die oben abgeleitete ungefähre Unsicherheit $\Delta\frac{1}{m} = 47$ ist, so ergiebt sich also für die Unsicherheit der beiden allgemeinen Werthe von z:

$$\Delta z_1^a = 0{,}0123; \qquad\qquad \Delta z_2^a = 0{,}0142.$$

Es stimmt daher nur die **zweite parabolische** Lösung, für welche $z_2^p = 0{,}8643$ ist, mit der **zweiten allgemeinen** Lösung, für welche $z_2^a = 0{,}8810$ ist, hinsichtlich der Unsicherheit der Lösungen überein, denn es ist die Differenz $z_2^a - z_2^p = 0{,}0167$ nur um Weniges grösser als die Unsicherheit $\Delta z_2^a = 0{,}0142$. Die beiden anderen parabolischen Lösungen sind daher zu verwerfen.

Die parabolische Lösung z_2^p liegt zwar etwas ausserhalb der Uebereinstimmungsgrenze mit der allgemeinen Lösung z_2^a; da aber die Unsicherheit einer allgemeinen Lösung immer nur angenähert, wie oben, bestimmt werden kann, so ist kein Grund vorhanden, die einzig in Betracht kommende parabolische Lösung zu verwerfen.

Dem in der Astronomie gegenwärtig bestehenden Gebrauche gemäss, wonach die Parabel als Lösung zu betrachten ist, wenn auch die Beobachtungen durch eine solche dargestellt werden können, wäre also die Rechnung mit dem Werthe z_2^p, genau wie im ersten Beispiele, fortzusetzen.

Wenn statt der geschlossenen Ausdrücke, wie sie in den Beispielen 3, 4 und 5 angewandt wurden, die Reihen für f, g, ∂f, ∂g genügen, so rechnet man ohne Unterschied der Excentricität der Ausgangsbahn nach den Formeln $B\alpha$, $I — VI$. Wegen der Einfachheit der Rechnung kann ein Beispiel hierfür übergangen werden.

Die directe Berechnung einer Kreisbahn unterscheidet sich so wenig von derjenigen einer Parabel, dass auch hierfür ein Beispiel unnöthig erscheint.

III. Die Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen.

Bei der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen handelt es sich um die Berechnung von genäherten osculirenden Elementen in dem gewöhnlichen Sinne und um deren Verbesserung auf differentiellem Wege, auf Grund der Beobachtungen. Es ist also beabsichtigt, ausser der Anziehung des Centralkörpers auch derjenigen der störenden Körper von vornherein Rechnung zu tragen. Dabei sollen alle Körper als Massenpunkte betrachtet werden. Der Einfachheit halber soll hier auch nur der Fall, dass ein störender Körper in Betracht kommt, behandelt werden. Der Fall, dass mehrere störende Körper oder Störungen durch Abplattung zu berücksichtigen sind, lässt sich in ganz ähnlicher Weise bearbeiten.

Die hier vorgeschlagene Methode kann zunächst auf Trabanten, welche zur Zeit der Entdeckung starken Störungen, wie z. B. von der Sonne, ausgesetzt sind, angewandt werden. Doch dürfte sie auch bei kleinen Planeten und bei Kometen, welche von einem der grossen Planeten beträchtlich gestört werden, zur Bahnbestimmung dienen.

Den Anlass zur Aufstellung der Methode boten die Schwierigkeiten, welche die Berechnung der Bahnen von Monden bereitet, welche vom Centralkörper weit entfernt und starken Störungen unterworfen sind.

Zunächst sollen zur Zeit einer, nahe der Mitte der Beobachtungszeiten gewählten Epoche t, zu welcher die Beobachtung α, δ gehören soll, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen α', δ', α'', δ'' ermittelt werden. Sind diese einmal bekannt, so kann das Problem in ähnlicher Weise gelöst werden, wie die in der 82. Vorlesung entwickelten directen Methoden der Bahnbestimmung. Man wird sich vorerst graphisch vergewissern, dass die geocentrische Bewegung des gestörten Körpers nicht all zu unregelmässig ist. Dann benutzt man fünf, sieben oder eventuell mehr Oerter, und verfährt wie in der Anmerkung 1, S. 456. Es ist aber zu beachten, dass man nach den Entwickelungen des I. Abschnittes oft aus einem kürzeren Bogen genauere Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ermitteln kann, als aus einem längeren. Es sind nur genäherte Werthe erforderlich, da man doch stets zur Darstellung des ganzen gegebenen Materiales eine Bahnverbesserung, eventuell mit Anwendung der im II. Abschnitte von Vorlesung 82 gegebenen geschlossenen Formeln unternehmen wird. Die Verhältnisse lassen sich leicht durch einen Blick auf die Curven der beobachteten Rectascensionen und Declinationen entscheiden. Liegen die Verhältnisse sehr ungünstig, das heisst, ist die geocentrische Bewegung sehr unregelmässig, so ist es geraten, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Positionswinkels und der Distanz in Bezug auf den Centralkörper zuerst zu ermitteln, und diese dann in α', δ', α'', δ'' zu verwandeln.

Wir wollen also jetzt annehmen, dass zur Zeit t_0 die Grössen α, δ, α', δ', α'', δ'' des Massenpunktes mit unbekannter Bahn gegeben sind und nun die Lösung der zweiten Aufgabe vornehmen. Dabei soll hier nur, wie bereits oben festgesetzt wurde, ein einfacher Fall behandelt werden, und zwar der Fall, dass die Bahn eines von der Sonne stark gestörten Trabanten aus den Beobachtungen zu bestimmen ist.

Die Lösung kann in verschiedener Weise vorgenommen werden, je nach der Wahl der Coordinaten. Sehr bequem gestaltet sie sich, wenn man das Problem als die Umkehrung der Encke'schen Methode der speciellen Störungsrechnung auffasst. Bei der Rechnung der speciellen Störungen handelt es sich ja darum, aus osculirenden Elementen die gestörten Coordinaten zu ermitteln, während im Vorliegenden erstrebt wird, aus den Beobachtungen (gestörten Orten) osculirende Elemente zu bestimmen.

Gemäss unseren bisherigen Voraussetzungen nennen wir die drei in Betracht kommenden Körper „Trabant“, „Planet“ und „Sonne“. Wir nehmen an, dass die Masse des Trabanten der Null gleichgesetzt werden kann und bezeichnen mit m die Masse des Planeten, in Einheiten der Sonnenmasse.

Es seien ferner zur Zeit t_0:

$\alpha,\ \delta,\ \varrho,\ \sigma = \varrho \cos\delta,\quad \xi,\ \eta,\ \zeta$

Coordinaten des Trabanten in Bezug auf die Erde,

$a,\ d,\ r,\ s = r\cos d,\quad x,\ y,\ z$

Coordinaten des Trabanten in Bezug auf den Planeten,

$[a],\ [d],\ [r],\ [s] = [r]\cos[d],\ [x],\ [y],\ [z]$

Coordinaten des Trabanten in Bezug auf die Sonne,

$(\alpha),\ (\delta),\ (\varrho),\ (\sigma) = (\varrho)\cos(\delta),\ (\xi),\ (\eta),\ (\zeta)$

Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Erde,

$(a),\ (d),\ (r),\ (s) = (r)\cos(d),\ (x),\ (y),\ (z)$

Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne,

$A,\ D,\ R,\ S = R\cos D,\quad X,\ Y,\ Z$

Coordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde.

Dann sind die Bewegungsgleichungen des Trabanten in Bezug auf den Planeten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + mk^2\frac{x}{r^3} &= -k^2\left\{\frac{(x)+x}{[r]^3} - \frac{(x)}{(r)^3}\right\}\\
\frac{d^2y}{dt^2} + mk^2\frac{y}{r^3} &= -k^2\left\{\frac{(y)+y}{[r]^3} - \frac{(y)}{(r)^3}\right\}\\
\frac{d^2z}{dt^2} + mk^2\frac{z}{r^3} &= -k^2\left\{\frac{(z)+z}{[r]^3} - \frac{(z)}{(r)^3}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man:

$$mk^2 = (k)^2;\quad \frac{k^2}{(k)^2} = \frac{1}{m} = \gamma;\quad \frac{1}{(k)^2}\frac{d^2x}{dt^2} = x'';\quad \frac{1}{(k)^2}\frac{d^2y}{dt^2} = y'';\quad \frac{1}{(k)^2}\frac{d^2z}{dt^2} = z'',\quad (2)$$

wobei also die Zeiteinheit gleich $\frac{1}{(k)}$ mittleren Sonnentagen angenommen ist, so erhält man aus den Gleichungen (1) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
x'' &= -x\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] - \gamma\frac{(x)}{[r]^3} + \gamma\frac{(x)}{(r)^3}\\
y'' &= -y\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] - \gamma\frac{(y)}{[r]^3} + \gamma\frac{(y)}{(r)^3}\\
z'' &= -z\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] - \gamma\frac{(z)}{[r]^3} + \gamma\frac{(z)}{(r)^3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Beachtet man, dass

$$\left.\begin{array}{lll} x = \xi - (\xi), & y = \eta - (\eta), & z = \zeta - (\zeta) \\ x'' = \xi'' - (\xi)'', & y'' = \eta'' - (\eta)'', & z'' = \zeta'' - (\zeta)'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und dass

$$(\xi) - (x) = X, \quad (\eta) - (y) = Y, \quad (\zeta) - (z) = Z, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

so kann man die Gleichungen (3), wie folgt, schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \xi'' + \xi\left[\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{\gamma}{[r]^3}\right] = \dfrac{(\xi)}{r^3} + \gamma\dfrac{X}{[r]^3} + \gamma\dfrac{(x)}{(r)^3} + (\xi)'' \\ \eta'' + \eta\left[\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{\gamma}{[r]^3}\right] = \dfrac{(\eta)}{r^3} + \gamma\dfrac{Y}{[r]^3} + \gamma\dfrac{(y)}{(r)^3} + (\eta)'' \\ \zeta'' + \zeta\left[\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{\gamma}{[r]^3}\right] = \dfrac{(\zeta)}{r^3} + \gamma\dfrac{Z}{[r]^3} + \gamma\dfrac{(z)}{(r)^3} + (\zeta)'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Mit Vernachlässigung der Erdmasse, sowie der Störungen des Planeten und der Erde lassen sich die Beschleunigungen $(\xi)''$, $(\eta)''$, $(\zeta)''$ des Planeten mit Hülfe der Bewegungsgleichungen des Planeten und der Erde in Bezug auf die Sonne bequem eliminiren. Zunächst hat man:

$$(\xi)'' = (x)'' + X'', \quad (\eta)'' = (y)'' + Y'', \quad (\zeta)'' = (z)'' + Z'' \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

und dann, gemäss der Bewegung um die Sonne:

$$\left.\begin{array}{l} (x)'' = -\gamma\dfrac{(x)\,(1+m)}{(r)^3}, \quad (y)'' = -\gamma\dfrac{(y)\,(1+m)}{(r)^3}, \quad (z)'' = -\gamma\dfrac{(z)\,(1+m)}{(r)^3} \\ X'' = -\gamma\dfrac{X}{R^3}, \quad Y'' = -\gamma\dfrac{Y}{R^3}, \quad Z'' = -\gamma\dfrac{Z}{R^3} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Es können jedoch auch genaue Ausdrücke für die Beschleunigungen $(\xi)''$, $(\eta)''$ $(\zeta)''$ aufgestellt werden. Doch soll auf dieselben hier nicht weiter eingegangen werden.

Substituirt man nun für $(\xi)''$, $(\eta)''$, $(\zeta)''$ die Ausdrücke (7) und (8) in die Gleichungen (6), so hat man zunächst für die Summe der drei letzten Glieder rechter Hand der ersten Gleichung:

$$\gamma\frac{X}{[r]^3} + \gamma\frac{(x)}{(r)^3} + (\xi)'' = \gamma X\left(\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{(x)}{(r)^3} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

und analoge Ausdrücke für die beiden letzten Gleichungen.

Die Gleichungen (6) sollen dazu dienen, die geocentrische Distanz ϱ, deren Geschwindigkeit ϱ' und deren Beschleunigung ϱ'', oder auch $\sigma = \varrho\cos\delta$, σ' und σ'' aus α, δ, α', δ', α'', δ'' zur Zeit t_0 zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sind durchweg Polarcoordinaten in die Gleichungen (6) einzuführen.

Durch zweifache Differentiation der Ausdrücke:

$$\xi = \sigma\cos\alpha, \quad \eta = \sigma\sin\alpha, \quad \zeta = \sigma\,tg\,\delta \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

erhält man mit Rücksicht auf die angenommene Zeiteinheit von $\dfrac{1}{(k)}$ mittleren Sonnentagen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi'' = \sigma''\cos\alpha - 2\sigma'\sin\alpha\alpha' - \sigma\sin\alpha\alpha'' - \sigma\cos\alpha(\alpha')^2 \\ \eta'' = \sigma''\sin\alpha + 2\sigma'\cos\alpha\alpha' - \sigma\cos\alpha\alpha'' - \sigma\sin\alpha(\alpha')^2 \\ \zeta'' = \sigma''\,tg\,\delta + 2\sigma'(tg\,\delta)' + \sigma(tg\,\delta)'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Ausserdem hat man zur weiteren Einführung von Polarcoordinaten:

$$\left.\begin{array}{lll} (\xi) = (\sigma)\cos(\alpha), & (\eta) = (\sigma)\sin(\alpha), & (\zeta) = (\sigma)\,tg\,(\delta) \\ (x) = (s)\cos(a), & (y) = (s)\sin(a), & (z) = (s)\,tg\,(d) \\ X = S\cos A, & Y = S\sin A, & Z = S\,tg\,D \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Setzt man nun der Reihe nach die Relation (9), (10), (11) und (12) in die Gleichungen (6) ein, so entstehen die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von σ, σ' und σ'':

$$\left.\begin{aligned}\sigma'' \cos\alpha &- 2\,\sigma' \sin\alpha\alpha' - \sigma \sin\alpha\alpha'' - \sigma\cos\alpha\,(\alpha')^2\\ &+ \sigma\cos\alpha\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] = \frac{(\sigma)\cos(\alpha)}{r^3}\\ &+ \gamma\,S\cos A\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right] - \frac{(s)\cos(a)}{(r)^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (13\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma'' \sin\alpha &+ 2\,\sigma' \cos\alpha\alpha' + \sigma \cos\alpha\alpha'' - \sigma\sin\alpha\,(\alpha')^2\\ &+ \sigma\sin\alpha\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] = \frac{(\sigma)\sin(\alpha)}{r^3}\\ &+ \gamma\,S\sin A\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right] - \frac{(s)\sin(a)}{(r)^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (13\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma''\,tg\,\delta &+ 2\,\sigma'(tg\,\delta)' + \sigma(tg\,\delta)''\\ &+ \sigma\,tg\,\delta\left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3}\right] = \frac{(\sigma)\,tg\,(\delta)}{r^3}\\ &+ \gamma\,S\,tg\,D\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right] - \frac{(s)\,tg\,(d)}{(r)^3}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (13\,\mathrm{c})$$

Addirt man die Gleichungen (13a) und (13b), einerseits nachdem die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$, anderseits nachdem die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt worden ist, und behält die Gleichung (13c) unverändert bei, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\sigma'' + \sigma\left[\frac{1}{r^3} - (\alpha)'^2 + \gamma\frac{1}{[r]^3}\right] &= \frac{(\sigma)}{r^3}\cos[(\alpha)-\alpha]\\ + \gamma S\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right]\cos[A-\alpha] &- \frac{(s)}{(r)^3}\cos[(a)-\alpha]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (14\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned}2\,\sigma'\alpha' + \sigma\alpha'' &= \frac{(\sigma)}{r^3}\sin[(\alpha)-\alpha]\\ &+ \gamma S\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right]\sin[A-\alpha] - \frac{(s)}{(r)^3}\sin[(a)-\alpha]\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (14\,\mathrm{b})$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma''\,tg\,\delta &+ 2\,\sigma'(tg\,\delta)' + \sigma\left[\frac{tg\,\delta}{r^3} + (tg\,\delta)'' + \gamma\frac{tg\,\delta}{[r]^3}\right]\\ &= \frac{(\sigma)}{r^3}\,tg\,(\delta) + \gamma S\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right]tg\,D - \frac{(s)}{(r)^3}\,tg\,(d)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (14\,\mathrm{c})$$

In diesen Gleichungen sind γ, α, δ, α', δ', α'', δ'', (σ), (α), (δ), (r), (a), (d), (s), R, A, D, S bekannte Grössen, $(tg\,\delta)'$ und $(tg\,\delta)''$ ergeben sich aus:

$$\left.\begin{aligned}(tg\,\delta)' &= sec^2\,\delta\,\delta';\\ (tg\,\delta)'' &= sec^2\,\delta\,[2\,tg\,\delta\,(\delta')^2 + \delta'']\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (15)$$

Als Unbekannte erscheinen σ, σ', σ'', r und $[r]$.

Durch Auflösung der Gleichungen (14) lassen sich σ, σ', und σ'' als Functionen der Unbekannten r und $[r]$ und bekannter Grössen darstellen. In der ersten und dritten der Gleichungen (14) enthalten die Coëfficienten von σ zwar die Unbekannten r und $[r]$, aber die Determinante der Coëfficienten von σ, σ' und σ'' ist von denselben unabhängig. Diese Determinante, welche also nur bekannte Grössen enthält, soll mit $2\,\Delta$ bezeichnet werden. Substituirt man nun die Ausdrücke rechter Hand der Gleichungen (14) an Stelle der Coëfficienten von σ in 2Δ, so erkennt man sofort, dass die so entstehende neue Determinante sich als die Summe von drei Determinanten schreiben lässt, von denen die erste den Factor $\frac{1}{r^3}$, die zweite den Factor $\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right]$ und die dritte den Factor $\frac{1}{(r)^3}$ enthält.

Setzt man also, weil:

$$\Delta = (\alpha')^3\, tg\,\delta - \alpha''\,(tg\,\delta)' + \alpha'\,(tg\,\delta)'', \qquad (16a)$$

noch:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varkappa &= -\,S\;\;\{(tg\,\delta\cos[A-\alpha] - tg\,D)\,\alpha' + \sin[A-\alpha]\,(tg\,\delta)'\} \\ \Delta(\varkappa) &= -\,(\sigma)\;\{(tg\,\delta\cos[(\alpha)-\alpha] - tg\,(\delta))\,\alpha' + \sin[(\alpha)-\alpha]\,(tg\,\delta)'\} \\ \Delta[\varkappa] &= -\,(s)\;\{(tg\,\delta\cos[(a)-\alpha] - tg\,(d))\,\alpha' + \sin[(a)-\alpha]\,(tg\,\delta)'\} \end{aligned}\right\} \cdot \; (16b)$$

so ist:

$$\sigma = \frac{(\varkappa)}{r^3} + \gamma\varkappa\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right] - \left.\frac{[\varkappa]}{(r)^3}\right\} \;\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

oder auch, wenn man die Hülfsgrössen

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\varkappa}{\cos\delta}; \qquad F = \frac{\gamma\varkappa}{\cos\delta}; \\ G &= -\frac{\gamma}{\cos\delta}\left[\frac{\varkappa}{R^3} + \frac{m[\varkappa]}{(r)^3}\right] = -F\left[\frac{1}{R^3} + \frac{m[\varkappa]}{\varkappa(r)^3}\right] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (18)$$

einführt:

$$\varrho = \frac{E}{r^3} + \frac{F}{[r]^3} + G \;\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

in welcher Gleichung E, F und G vollständig bekannte Grössen sind.

Zur Bestimmung von ϱ, r und $[r]$ sind noch zwei weitere Gleichungen nothwendig. Diese Gleichungen erhält man aus den beiden Dreiecken, welche von Erde, Trabant, Planet und von Erde, Trabant, Sonne gebildet werden. Bezeichnet man nämlich den bekannten Winkel an der Erde in dem einen Dreieck mit ψ, in dem anderen mit $[\psi]$, so bestehen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= (\varrho)^2 + \varrho^2 - 2\,(\varrho)\,\varrho\cos\psi \\ [r]^2 &= R^2 \;\;+ \varrho^2 - 2\,R\,\varrho\cos[\psi] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

welche in Verbindung mit (19) die Bestimmung von ϱ, r und $[r]$ gestatten. Es möge hier noch angedeutet werden, dass die Auflösung der Gleichungen (19) und (20) sich in verhältnissmässig einfacher Weise durchführen lässt.

Sind jetzt einmal die Distanzen des Trabanten vom Planeten und von der Sonne bestimmt, so kann man auch den Centralkörper bestimmen.

Wir wollen jetzt den Fall setzen, dass es von vornherein ausgeschlossen sei, eine sichere Annahme über die Natur des neu entdeckten Körpers zu machen, wie dies z. B. bei dem achten Jupitermonde der Fall gewesen ist. Dann ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, ob der in Frage stehende Körper ein Trabant oder ein kleiner Planet ist. Die Lösung der Aufgabe aber bleibt ganz dieselbe.

Somit ermöglicht das hier angegebene Verfahren nicht nur eine Bahnbestimmung, sondern es giebt auch Aufschluss über die Natur des Körpers.

Nachdem σ ermittelt worden ist, ergiebt die Gleichung (14b) noch σ'. Ausserdem erhält man σ'' aus (14a) oder (14c).

Im Weiteren verfährt man ganz ähnlich wie in den directen Methoden des I. Abschnittes der 82. Vorlesung.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, enthält die vorliegende Methode eine Verallgemeinerung der soeben citirten Methoden der Vorlesung 82. Vernachlässigt man in den vorangehenden Formeln die von der Sonnenmasse abhängigen Glieder, so entsteht eine Methode, eine ungestörte Mondbahn zu berechnen.

Zur Berechnung der Elemente dienen die Coordinaten x, y, z und die Geschwindigkeiten x', y', z'. Die ersteren erhält man aus den Gleichungen (4), erste Zeile, und die letzteren aus:

$$x' = \xi' - (\xi)'; \quad y' = \eta' - (\eta)'; \quad z' = \zeta' - (\zeta)',$$

wobei ξ', η', ζ' sich aus σ', α', $(tg\,\delta)'$, wie im I. Abschnitte der 82. Vorlesung berechnen, und $(\xi)'$, $(\eta)'$, $(\zeta)'$ sich aus den Planetenephemeriden der astronomischen Jahrbücher durch numerische Differentiation ermitteln lassen.

Die Bahnverbesserung gestaltet sich ganz ebenso, wie in der 82. Vorlesung, nur sind bei der Berechnung der Unterschiede $(B - R)$ die durch die in Betracht gezogenen störenden Körper verursachten Störungen zu berücksichtigen. Am besten berechnet man diese Störungen nach Art der Encke'schen Methode.

Siebentes Beispiel.

Beispiel der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen.

Als Beispiel dieser Methode möge folgende, von Herrn Prof. Crawford, unter Mitwirkung des Herrn A. J. Champreux durchgeführte Rechnung der durch die Sonne gestörten Bahn des siebenten Jupitertrabanten aus folgenden Beobachtungen, welche dem Lick Observatory Bulletin Nr. 78 entnommen sind, dienen, wobei zu bemerken ist, dass die Beobachtungen bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind, sowie, dass dieselben auf das Erdcentrum mit der Parallaxe Jupiters reducirt sind:

	Gr. M. Z.	α (1905.0)	δ (1905.0)
I 1905, Jan. 3.	$15^h\ 12^m\ 0^s$	$1^h\ 16^m\ 23^s{,}68$	$+\ 7^\circ\ 13'\ 57''{,}2$
II 1905, Jan. 28.	14 58 0	1 27 44,32	+ 8 18 10,7
III 1905, Febr. 8.	15 10 0	1 34 40,59	+ 8 55 18,0
IV 1905, Febr. 21.	15 25 0	1 44 2,98	+ 9 43 51,6
V 1905, März 6.	15 40 0	1 54 24,15	+ 10 35 49,9

Als Epoche wurde das Datum der dritten Beobachtung gewählt. Unter Annahme von Newcomb's Werthe der Jupitermasse erhält man aus Formel (2):

$log\,(k)$ . . . . . . 6,7255344, $\quad log\,\gamma$ . . . . 3,020094.

Aus den obigen fünf Beobachtungen wurden die geocentrischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach den Formeln der Anmerkung 1), Seite 456, abgeleitet, wobei die Zeiteinheit gleich $1/(k)$ mittlere Sonnentage ist.

$log\,\alpha'$	0,743547	$log\,(tg\,\delta)'$	0,299872
$log\,\alpha''$	2,069686	$log\,(tg\,\delta)''$	1,523510

Aus der Gleichung (16a) erhält man:

$log\,\Delta$ . . . . $1{,}352830_n$.

Den American Ephemeris und Nautical Almanac für 1905 entnimmt man die heliocentrischen Jupitercoordinaten für die Epoche:

(l)	$35^\circ\ 28'\ 34''{,}6$	1905,0
(b)	$-1\ 10\ 36{,}0$	1905,0
$log\,(r)$.	0,696347	

Diese auf den Aequator transformirt, werden:

(a)	$33^\circ\ 34'\ 39''{,}6$
$log\,tg\,(d)$	9,336497

Die Coordinaten der Sonne für die Epoche sind:

X	$+0{,}7529310$
Y	$-0{,}5851685$
Z	$-0{,}2538530$
$\log R$	$9{,}9942280$
A	$322^\circ 8' 45{,}''9$
$\log tg\, D$	$9{,}425222_n$

Wiederum aus den American Ephemeris und Nautical erhält man für die geocentrischen Jupitercoordinaten zur Zeit der Epoche:

(α)	$1^h\, 34^m\, 34{,}^s14$
(δ)	$+8^\circ 41' 1{,}''8$
$\log(\varrho)$	$0{,}724258$

Aus den geocentrischen Coordinaten des Trabanten, Jupiters und der Sonne, ergiebt sich:

$\sin\psi$	$7{,}621288$		
$\cos\psi$	$9{,}999996$	$\cos[\psi]$	$9{,}618345$

Die Formeln (16b) ergeben nach der Division durch Δ:

$\log \varkappa$	$7{,}761025$
$\log [\varkappa]$	$6{,}704818_n$
$\log (\varkappa)$	$7{,}721069$

Aus den Formeln (18) erhält man:

$\log E$	$7{,}726356$
$\log F$	$0{,}786406$
$\log G$	$0{,}803722_n$

und somit für (19), (Coefficienten logarithmisch):

$$\varrho = [7{,}726356]\, r^{-3} + [0{,}786406]\,[r]^{-3} + [0{,}803722_n].$$

Aus dieser Gleichung müssen nun, in Verbindung mit den Gleichungen (20), die unbekannten Grössen ϱ, r und $[r]$ bestimmt werden. Die Auflösung der drei Gleichungen kann in verschiedener Weise vorgenommen werden. Es soll hier eine Gleichung für die verhältnissmässig kleine Grösse r aufgestellt werden. Setzt man in der Gleichung (19) $H = \dfrac{F}{[r]^3} + G$ und eliminirt dann ϱ und $[r]$ aus den Gleichungen (19) und (20), so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von r:

$$r^8 - \{[(\varrho)\cos\psi - H]^2 + (\varrho)^2 \sin^2\psi\}\, r^6 + 2E[(\varrho)\cos\psi - H]\, r^3 - E^2 = 0,$$

oder, indem man nach r^3 auflöst:

$$r^3 = \frac{E \pm r^3\sqrt{r^2 - (\varrho)^2 \sin^2\psi}}{(\varrho)\cos\psi - H},$$

worin also noch H eine von der Unbekannten $[r]$ abhängige Hülfsgrösse ist. Die Gleichung für r^3 kann durch Versuche gelöst werden, indem man im ersten Versuche in dem Ausdrucke für H die heliocentrische Distanz $[r]$ des Trabanten gleich der heliocentrischen Distanz des Jupiters setzt, und indem man ferner zunächst in dem Ausdrucke für r^3 auf der rechten Seite das mit der Quadratwurzel multiplicirte Glied vernachlässigt, so dass:

$$r^3 = \frac{E}{(\varrho)\cos\psi - H}.$$

Weiter kann man:

1. den soeben berechneten Werth von r in das mit der Quadratwurzel multiplicirte Glied einsetzen, während der erste Werth von H noch beibehalten werden kann. Man erhält dann zwei Werthe von r aus der Gleichung für r^3, von denen der eine dem positiven, der andere dem negativen Vorzeichen der Quadratwurzel entspricht. Mit diesen beiden Werthen von r wird die Berechnung von r aus der Gleichung für r^3 fortgesetzt, indem man für jeden der beiden Werthe von r das entsprechende Vorzeichen der Quadratwurzel beibehält, und zwar so lange, bis keine weitere Aenderung der beiden Werthe für r eintritt. Es muss aber jetzt noch die erste Annahme für H verbessert werden; zu diesem Zwecke berechne man zunächst $\varrho = \frac{E}{r^3} + H$ aus (19), und zwar für beide Werthe von r, und dann $[r]$ aus der zweiten der Gleichungen (20) für beide Werthe von ϱ. Mit den beiden Werthen von $[r]$ berechne man für jede der beiden Lösungen eine zweite Annäherung für H, und wiederhole dann die Berechnung von r aus der Gleichung für r^3. Dabei wird man aber sofort in dem mit der Quadratwurzel multiplicirten Gliede die letzten aus der ersten Annäherung von H erhaltenen Werthe von r einsetzen. Diese versuchsweise Bestimmung von r für beide Lösungen wird nun fortgesetzt, einerseits für einen bestimmten Werth von H, andererseits indem man mit dem letzten Werthe von r die Werthe von ϱ, $[r]$ und H neu bestimmt, und zwar so lange, bis Aenderungen nicht mehr eintreten.

Oder man bestimmt:

2. die successiven Annäherungen von r durch folgende, leicht abzuleitende Differentialformel, einmal, indem man den ersten Werth für H beibehält, und dann wieder mit dem in derselben Weise wie oben verbesserten Werthe von H:

$$\partial r = \frac{-M}{3r^2\left\{1 \mp \frac{[4r^2 - 3(\varrho)^2 \sin^2\psi]}{3K\sqrt{r^2 - (\varrho)^2\sin^2\psi)}}\right\}},$$

wo

$$M = r^3 - \frac{E \pm r^3\sqrt{r^2 - (\varrho)^2\sin^2\psi}}{K}$$

und

$$K = (\varrho)\cos\psi - H,$$

worin das obere Zeichen im Nenner des Ausdruckes für ∂r dem oberen Zeichen in dem Ausdrucke für r^3 entspricht, so dass also wiederum zwei Lösungen erfolgen. Es ist am besten, in jedem einzelnen Falle die Art der Auflösung den gegebenen Verhältnissen anzupassen. Im vorliegenden Beispiel wurde das erste Verfahren angewandt, während bei der Berechnung der gestörten Bahn des achten Jupitertrabanten sich das zweite Verfahren bewährt hat. In anderen Fällen wiederum dürften andere Verfahren der Auflösung der Gleichungen (19) und (20) vortheilhafter sein.

In der nun folgenden Bestimmung von r soll der in der Gleichung für r^3 dem $+$-Zeichen entsprechende Werth von r mit r_1, der dem $-$-Zeichen entsprechende Werth mit r_2 bezeichnet werden. Die successiven Annäherungen für r_1 und r_2 sind mit römischen Ziffern bezeichnet.

Erste Annäherung für H:

	I
$log\ F$	0,786406
$colog\ (r)^3$	7,910959
$log\ I$	8,697365
$log\ (II = G)$	0,803722n
Add.	9,996587
$log\ H$	0,800309n
$log\ (\varrho)\ cos\ \psi$	0,724254
Sub.	0,264665
log Nenner	1,064974
$log\ E$	7,726356
$log\ r^3$	6,661382
$log\ r$	8,887127

	II	III, r_1	III, r_2
$log\ r^2$	7,774254	7,776090	7,772408
$(\varrho)^2\ sin^2\ \psi$	6,691092	6,691092	6,691092
Sub.	9,962572	9,962737	9,962405
log Diff.	7,736826	7,738827	7,734813
$log\ \sqrt{\text{Diff.}}$	8,868413	8,869414	8,867406
$log\ r^3$	6,661382	6,664135	6,658612
$log\ r^3\ \sqrt{\text{Diff.}}$	5,529795	5,533549	5,526018
$log\ E$	7,726356		
Add.	0,002753	0,002777	
Summe	7,729109	7,729133	
$log\ r_1^3$	6,664135	6,664159	
$log\ r_1$	8,888045	8,888053	
Sub.	9,997230		9,997253
Diff.	7,723586		7,723609
$log\ r_2^3$	6,658612		6,658635
$log\ r_2$	8,886204		8,886212

Zweite Annäherung für H:

	r_1	r_2
$log\ r^3$	6,664159	6,658635
$log\ E$	7,726356	7,726356
$log\ E\ r^{-3}$	1,062197	1,067721
$log\ H$	0,800309n	0,800309n
Add.	9,917836	9,929941
$log\ \varrho$	0.718145	0,730250
$log\ \varrho^2$	1,436290	1,460500
$log\ 2\ R$	0,295258	0,295258
$log\ cos\ [\psi]$	9,618345	9,618345
$log\ (III = 2\ \varrho\ R\ cos\ [\psi]$	0,631748	0,643853
$log\ (I = R^2)$	9,988456	
I	+ 0,97377	+ 0,97377
II	+ 27,30800	+ 28,87353
$-III$	— 4,28300	— 4,40406
$[r]^2$	+ 23,99877	+ 25,44324
$log\ [r]^2$	1,380189	1,405572
$log\ [r]$	0,690094	0,702786

	r_1	r_2
$log\ F$	0,786406	0,786406
$log\ [r]^3$	2,070283	2,108358
$log\ F\ [r]^{-3}$	8,716123	8,678048
$log\ G$	0,803722n	0,803722n
Add.	9,996436	9,996736
$log\ H$	0,800158n	0,800458n
$log\ (\varrho)\ cos\ \psi$	0,724254	0,724254
Sub.	0,264734	0,264597
$log\ [(\varrho)\ cos\ \psi - H]$	1,064892	1,065055

	IV, r_1	IV, r_2
$log\ r^2$	7,776106	7,772424
$(\varrho)^2\ sin^2\ \psi$	6,691092	6,691092
Sub.	9,962738	9,962407
log Diff.	7,738844	7,734831
$log\ \sqrt{\text{Diff.}}$	8,869422	8,867415
$log\ r^3$	6,664159	6,658635
$log\ r^3\ \sqrt{\text{Diff.}}$	5,533581	5,526050
Add.	0,002777	
Summe	7,729133	
Nenner	1,064892	
$log\ r_1^3$	6,664241	
log_1	8,888080	
Sub.		9,997253
Diff.		7,723609
Nenner		1,065055
$log\ r_2^3$		6,658554
$log\ r_2$		8,886185

Dritte Annäherung für H:

	r_1	r_3
$\log r^3$	6,664241	6,658554
$\log I$	1,062115	1,067802
$\log (II = H)$	0,800158$_n$	0,800458$_n$
Add.	9,917989	9,929793
$\log \varrho$	0,718147	0,730251
$\log \varrho^2$	1,436294	1,460502
$\log III$	0,631750	0,643854
I	+ 0,97377	+ 0,97377
II	+ 27,30825	+ 28,87367
$-III$	− 4,28302	− 4,40407
$[r]^2$	+ 23,99900	+ 25,44337
$\log [r]^2$	1,380193	1,405574
$\log [r]$	0,690096	0,702787

Diese Werthe von $[r]$ stimmen so nahe mit den aus der zweiten Annäherung für H berechneten überein, dass die zweite Annäherung für H sich als genügend erweist. Somit sind also auch die vierten Annäherungen von r_1 und r_2 als endgültig zu betrachten. Im Weiteren soll die dem Werthe von r_1 entsprechende Lösung als erste Lösung, die dem Werthe von r_2 entsprechende als zweite Lösung bezeichnet werden.

Berechnung von σ und σ':

	Erste Lösung	Zweite Lösung
$\log \varrho$	0,718147	0,730251
$\cos \delta$	9,994713	
$\log \sigma$	0,712860	0,724964
Nach Gleichung (14b):		
$\log \alpha''$	2,069686	
$\log (I = \sigma \alpha'')$	2,782546	2,794650
$colog\, r^3$	3,335759	3,341446
$\log (\sigma)$	0,719250	0,719250
$\sin [(\alpha) - \alpha]$	6,675247$_n$	6,675247$_n$
$\log II$	0,730256$_n$	0,735943$_n$
$colog\, [r]^3$	7,929712	7,891639
$colog\, R^3$	0,017316	0,017316
Sub.	9,996436	9,996736
$\log [\ ]$	0,013752$_n$	0,014052$_n$
$\sin (A - \alpha)$	9,943994$_n$	9,943994$_n$
$\log S$	9,979360	9,979360
$\log \gamma$	3,020094	3,020094
$\log III$	2,957200	2,957500
$\log (s)$	0,686353	
$colog\, (r)^3$	7,910959	
$\sin [(a) - \alpha]$	9,235709	
$\log IV$	7,833021	
$-I$	− 606,1029	− 623,2329
$+II$	− 5,3735	− 5,4443
$+III$	+ 906,1500	+ 906,7760
$-IV$	− 0,0068	− 0,0068
$2\,\alpha' \sigma'$	+ 294,6668	+ 278,0920
$\log 2\,\alpha' \sigma'$	2,469331	2,444188
$\log 2\,\alpha'$	1,044577	
$\log \sigma'$	1,424754	1,399611

Die jovicentrischen Coordinaten x, y, z, r und Geschwindigkeiten x', y', z', r' erhält man jetzt aus den Formeln *A V*, indem die geocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter an Stelle derjenigen der Sonne treten. Die hier angegebenen geocentrischen Geschwindigkeiten des Jupiter wurden nach den Formeln der numerischen Differentiation aus den geocentrischen Coordinaten des Jupiter für Februar 1,0, 5,0, 9,0, 13,0 und 17,0 berechnet, während diese letzteren geocentrischen Coordinaten aus den entsprechenden Werthen von (α), (δ), (ϱ), welche den American Ephemeris und Nautical Almanac für 1905 entnommen werden können, durch Transformation abzuleiten sind. Die Zeiteinheit ist wiederum $1/(k)$ mittlere Sonnentage. Man erhält dann:

$log\,(\xi)'$	1,115899
$log\,(\eta)'$	1,530699
$log\,(\zeta)'$	1,172561

Für die Werthe der jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten ergiebt sich sodann:

	Erste Lösung	Zweite Lösung
$log\,x$	$8{,}85176_n$	8,79625
$log\,y$	$8{,}45400_n$	8,47899
$log\,z$	8,01177	8,52087
$log\,x'$	$9{,}27024_n$	$0{,}27435_n$
$log\,y'$	0,46734	0,48758
$log\,z'$	$9{,}60898_n$	$9{,}54432_n$
$log\,r'$	$9{,}98330_n$	$9{,}67826_n$

Als Elemente erhält man aus *A VII 2*:

i	170° 26′ 58″	25° 39′ 42″	Aequator, 1905.0
☊	328 54 25	289 47 45	
ω	278 40 44	189 15 19	
φ	26 21 10	7 34 56	
$log\,a$	8,76743	8,88988	
μ	2°,15044	1°,40879	
P, in mittl. Sonnentagen	167,4073	255,5376	
Epoche Febr.	8,60178	8,60093	
M	241° 26′ 13″	281° 13′ 48″	

Um zu entscheiden, welche von den beiden Bahnen die physisch richtige ist, sind die Unterschiede $B - R$ aus beiden Bahnen entweder für einige, nicht zur Bahnbestimmung herangezogene Beobachtungen, welche innerhalb des Intervalles zwischen der ersten und letzten Beobachtung liegen, oder für eine spätere Beobachtung zu berechnen. Im vorliegenden Falle wird sich finden, dass die hier als zweite Lösung bezeichnete Bahn sich den Beobachtungen anschliesst, während die erste Lösung zu verwerfen ist.

Wäre man im vorliegenden Falle nicht berechtigt gewesen, anzunehmen, dass das Object, dessen Bahn zu bestimmen war, ein Trabant sei, sondern wäre die Identität des Objectes, ob Trabant oder kleiner Planet, aus der Rechnung selbst zu entscheiden gewesen, so hätte man nach *A V*, aus beiden Werthen von σ und σ', ausser den jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten auch die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten, und, nach *A VII*, die dazu gehörigen beiden Elementensysteme ableiten müssen. Die Entscheidung, welche von den vier Bahnen die physisch richtige ist, lässt sich dann wieder durch die Unterschiede $B - R$ treffen, wenn man nicht etwa gleich von vornherein alle hyperbolischen Lösungen verwerfen will.

Berechnet man mit den als zweite Lösung bezeichneten Elementen die speciellen Störungen, so finden sich die folgenden Unterschiede $B - R$ für die vier äusseren Oerter:

	Jan. 3.	Jan. 28.	Febr. 21.	März 6.
$(B - R)$ $\Delta\alpha$	$-9''\!,6$	$-2''\!,3$	$+2''\!,6$	$+1''\!,0$
$(B - R)$ $\Delta\delta$	$+23,9$	$-0,4$	$-0,6$	$-11,3$

Eine einmalige Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung, und zwar auf Grund der Reihen für $f, g, \partial f, \partial g$ (Formeln B, I—III) ergiebt schliesslich

Epoche	1905, Febr. 8.6009, Gr. M. Z.	
M	$283^\circ\ 4'\ 4''$	
i	25 39 24	Aequator, 1905.0
☊	288 19 59	Aequator, 1905.0
ω	187 29 41	Aequator, 1905.0
φ	6 58 47	
$\log a$	8,89372	
μ	$1^\circ\!,39027$	
P	258,9424 Tage	

Mit dem obigen Beispiele ist der numerische Beweis geliefert, dass man: 1. die Identität eines unbekannten Körpers entscheiden kann und: 2. die Bahn des Körpers mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen durch eine **directe** Methode, ohne irgend welche der sonst üblichen Annahmen über Excentricität oder Umlaufszeit oder Neigung der Bahn etc. bestimmen kann.

Vergleicht man nun die obigen Resultate mit anderen bisher bekannt gewordenen Bahnbestimmungen dieses Trabanten, so tritt der Vorzug der hier zur Anwendung gebrachten Methode deutlich hervor. Es folgen drei Elementensysteme, welche bezw. mit 1, 2, 3 bezeichnet sind. Zur Bestimmung der beiden ersten Systeme waren 24 Beobachtungen zwischen Januar 2. und März 6. gegeben, für das dritte System die Beobachtungen zweier Oppositionen.

	1	2	3
☊	$275^\circ\!,8$	$281^\circ\!,1$	$291^\circ\!,5$
ω	188,1	50,2	182,8
i	26,3	26,2	25,3
e	0,24	0,025	0,208
μ	$1^\circ\!,800$	$1^\circ\!,358$	$1^\circ\!,380$
$\log a$	8,8198	8,9004	8,8946
Periode	200 Tage	265,0 Tage	260,6 Tage

Das erste System wurde von Perrine berechnet (Lick Observatory Bulletin Nr. 78). Perrine bemerkt dazu, dass die Darstellung der Beobachtungen unter Annahme einer Kreisbahn weder für directe noch retrograde Bewegung befriedigend war. Es wurde daher der Werth $e = 0,24$ angenommen, und dieser Werth gab eine bessere Darstellung für die retrograde, als für die directe Bewegung. Er entschied sich daher für die retrograde Bewegung, berechnete aber beide Bahnen, von denen nur die der directen Bewegung zugehörige oben, unten (1) wiedergegeben ist. Ein Versuch, die retrograde Bahn unter Anwendung von Differentialformeln zu verbessern, blieb ohne Erfolg. Die Bahnbestimmung war demnach mit grossen Schwierigkeiten verbunden.

Das zweite und dritte System wurde von F. E. Ross berechnet (Lick Observatory Bulletin Nr. 82 und A. N. Nr. 4175). Zu dem zweiten System bemerkt Ross, dass acht Beobachtungen zwischen dem 3. Januar und 6. März ihm zur Verfügung standen, und dass schliesslich die Methode der willkürlichen Variation der Bahnebene auf die Beobachtungen von 3. Januar, 8. Februar und 6. März angewandt wurde. Die Unterschiede $B - R$ erklärt er durch die grossen Sonnenstörungen. In A. N. Nr. 4175 fügt Ross noch hinzu, dass diese Bahnbestimmung wegen der grossen Aenderung der Sonnenstörungen zwischen dem 3. Januar und 6. März fast unmöglich war.

Das dritte, ebenfalls von Ross herrührende System beruht auf zwölf vom 3. Januar 1905 bis 25. September 1906 gleichmässig vertheilten Beobachtungen, mit Einschluss der hauptsächlichen Störungen. Dies aus zwei Oppositionen abgeleitete System ist also als das beste der bekannten Systeme zu betrachten.

Ein Vergleich des im obigen Beispiel mit sofortiger Berücksichtigung der Sonnenstörungen abgeleiteten Systems, sowie des Perrine'schen (1) und des ersten Ross'schen Systems (2) mit dem zweiten Ross'schen System (3), zeigt auf den ersten Blick, dass das nach der hier vorgeschlagenen Methode berechnete System mit dem zweiten Ross'schen (3) am besten übereinstimmt, mit etwaiger Ausnahme der Excentricität, die aber überhaupt vielleicht noch als unsicher zu betrachten ist.

Bedenkt man nun, dass bei der Bestimmung des (1) und (2) Systemes Annahmen über die Excentricität, bezw. Bahnlage gemacht werden mussten, und dass selbst dann die Bahnbestimmung mit grossen Schwierigkeiten verbunden, ja wegen der grossen Aenderung der unbekannten Störungen fast unmöglich war, während bei der Methode der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen keinerlei Annahmen gemacht zu werden brauchen, und die Lösung direct von Statten geht, so scheint diese letztere Methode allen Anforderungen der Bahnbestimmung gestörter Körper zu genügen.