

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Theoretische Astronomie

Klinkerfues, Wilhelm

Braunschweig, 1912

Achte Abtheilung. Die Berechnung von Doppelsternbahnen

Achte Abtheilung.

Die Berechnung von Doppelsternbahnen.

Hundertundelfte Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

Unter den zahlreichen Entdeckungen des älteren Herschel hat sich keine für die Fixsternastronomie so epochemachend erwiesen, als die Entdeckung der Thatsache, dass ausserordentlich häufig auch selbstleuchtende Körper, wie die Fixsterne, zu zweien, dreien, zuweilen in noch grösserer Anzahl in einem einzigen engeren Systeme vereinigt sind und sich um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systemes bewegen. Die Fortsetzung der Beobachtungen nach Herschel hat zu der Kenntniss einer sehr beträchtlichen Zahl solcher Systeme mit nachweisbarer Bewegung geführt; bei einer Reihe von Doppelsternen ist es sogar gelungen, die Gestalt und Lage der Bahn, sowie die Umlaufzeit mit einiger Sicherheit zu ermitteln; bei einer für jetzt allerdings sehr beschränkten Zahl ist nicht ohne Erfolg der Versuch einer Bestimmung der wahren Dimension der Bahn im Vergleiche zu den Bahnen unseres eigenen Sonnensystemes und der daraus folgenden Vergleichung der Masse des Sternpaares mit dem der Sonne versucht worden. Das Material für solche Untersuchungen wächst, wie an Umfang, so an Interesse; es sollen daher in den folgenden Vorlesungen die wichtigsten Vorschriften zum Ordnen und zur Vorbereitung der durch die Beobachtungen gelieferten Data, sowie eine der sichersten Rechnungsmethoden entwickelt werden.

Ehe wir zeigen, wie die aus der Lehre von der Gravitation verallgemeinerten Kepler'schen Gesetze auf Doppelsterne (für die drei- und mehrfachen Sterne besitzen wir noch keine sicheren Methoden) Anwendung finden, ist es nöthig, zu wissen, in welcher Form das Beobachtungsmaterial gegeben zu werden pflegt. Es kann dies in der Weise geschehen, dass man den Rectascensions- und den Declinationsunterschied der beiden Sterne angiebt; doch ist diese Form kaum mehr im Gebrauche. Die jetzt übliche Angabe bestimmt die gegenseitige Lage der beiden Sterne durch Distanz und Positionswinkel. Die Distanz ist der die beiden Sterne verbindende Bogen eines grössten Kreises, in Secunden ausgedrückt, der Positionswinkel derjenige Winkel, welchen dieser grösste Kreis mit dem durch den helleren Stern gelegten Meridian des Himmels macht. Die Positionswinkel pflegt man durch Ost, Süd und West nach dem nördlichen Theile

des Meridians zurückzuzählen. Mit anderen Worten, bezeichnet man die Differenz, Rectascension des Nebensterne — Rectascension des Hauptsterne mit $\Delta\alpha$, den entsprechenden Declinationsunterschied mit $\Delta\delta$, den Positionswinkel mit p , so liegt p

zwischen	0° und	90° ,	wenn	$\Delta\alpha$	positiv,	$\Delta\delta$	positiv,	
"	90°	"	180° ,	"	"	positiv,	"	negativ,
"	180°	"	270° ,	"	"	negativ,	"	negativ,
"	270°	"	360° ,	"	"	negativ,	"	positiv.

Bezeichnet man die Distanz der Sterne, in Secunden ausgedrückt, mit q , so hat man noch:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \cdot \cos\delta &= q \sin p \\ \Delta\delta &= q \cos p, \end{aligned}$$

wonach sich leicht p und q berechnen lassen, wenn einmal die Beobachtungen in anderer als der gewöhnlichen Form gegeben sein sollten.

Bei ferneren Untersuchungen ist es auch nöthig, zu beachten, dass in Folge der Präcession der durch den Hauptstern gelegte Meridian nicht immer derselbe grösste Kreis der Sphäre bleibt, d. h. dass durch die Präcession eine scheinbare Veränderung des Positionswinkels (offenbar nicht auch der Distanz) hervorgebracht wird. Die deshalb an die Positionswinkel, um diese von dem fremdartigen Einflusse zu befreien, anzubringende Correction findet sich leicht aus der Formel für die jährliche Präcession in Declination:

$$\text{Präcession in Declination} = n \cos\alpha,$$

wobei n für unseren Zweck als eine Constante angesehen werden kann. Stellt $d\Delta\delta$ die sehr kleine Grösse vor, um welche der Declinationsunterschied der beiden Sterne verändert wird, dp den Einfluss der Präcession, so wird:

$$d\Delta\delta = -n \sin\alpha \Delta\alpha,$$

oder, da $\Delta\delta = q \cos p$, $d\Delta\delta = -q \sin p dp$:

$$dp = \frac{n \sin\alpha}{q \sin p} \cdot \Delta\alpha.$$

Da nun:

$$\Delta\alpha = \frac{q \sin p}{\cos\delta}$$

so wird:

$$dp = + \frac{n \sin\alpha}{\cos\delta}.$$

Das ist also der jährliche Zuwachs des Positionswinkels. Will man umgekehrt von p zur Zeit der Beobachtung t auf das Jahr t_0 zurückgehen, so hat man diese Correction mit entgegengesetztem Vorzeichen anzubringen.

Für die numerische Rechnung hat man hiernach die Regel: Um Positionswinkel, welche für das Jahr t gegeben sind, von dem Betrage der Präcession zu befreien und auf das Jahr t_0 zu beziehen, hat man die Correction:

$$- 20'',0548 \sin\alpha \sec\delta (t - t_0)$$

anzubringen. Wir bemerken hier noch gleich, dass man bei den Positionswinkeln die Secunden, wenn sie überhaupt noch berücksichtigt werden, in Bruchtheile von Minuten umzusetzen pflegt.

Hundertundzwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der einleitenden Bemerkungen.

Die Lehre von der Gravitation zeigt, dass zwei sich gegenseitig anziehende Massen m und m' einen Kegelschnitt, speciell, wenn derselbe ein in sich zurücklaufender ist, eine Ellipse um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschreiben. Der Schwerpunkt theilt hiernach die Verbindungslinie zwischen den beiden Componenten eines Sternpaares im umgekehrten Verhältnisse der Massen; der scheinbare Abstand der Masse m vom Schwerpunkte ist daher gleich:

$$\frac{m'}{m + m'} \varrho,$$

der der Masse m' gleich:

$$\frac{m}{m + m'} \varrho.$$

Da man nun aber die Massen nicht kennt, der Ort des Schwerpunktes daher nicht markirt ist und erst auf eine besondere Art, die wir später besprechen werden, ermittelt werden müsste, so betrachtet man den helleren Stern als ruhend und die um diesen von dem schwächeren Sterne (der gleichwohl an Masse der stärkere sein kann) beschriebene Bahn als den Gegenstand der Rechnung. Die letztere Ellipse ist offenbar der um den Schwerpunkt beschriebenen ähnlich.

In einzelnen Fällen, wie z. B. bei dem Doppelsterne γ Virginis, sind die beiden Componenten so nahe von gleicher Helligkeit, dass die verschiedenen Beobachter in der Wahl des Hauptsternes von einander abweichen, wodurch ein Unterschied von 180° in den entsprechenden Beobachtungen hervorgebracht wird.

Die das Auge mit dem helleren Sterne verbindende Gerade nennt man den Visionsradius. Die im Hauptsterne an die Kugel zu legende Berührungsebene, eine Ebene also, zu welcher der Visionsradius senkrecht steht, dient als Fundamentelebene, um die Lage der Bahn anzugeben, ganz ebenso, wie bei den Körpern unseres Sonnensystemes die Ekliptik gebraucht wird. Die Zählung der Längen, wie z. B. der Länge des Knotens Ω , geschieht in demselben Sinne und von demselben Nullpunkte, wie für die Positionswinkel. $\pi - \Omega$ ist wieder der Winkel, welcher in der Ebene der Bahn zwischen Perihel und Knoten liegt. Die Neigung der Bahn, i , ist Null, wenn die wirkliche Bahn mit der scheinbaren Bahn, d. h. mit ihrer Projection auf die obige Berührungsebene zusammenfällt; die scheinbare Bahn nennt man auch die Projectionsellipse. Es ist ohne Weiteres klar, dass nicht entschieden werden kann, ob der Nebensterne sich diesseits oder jenseits der Ebene der Projection befindet, und es fällt daher bei den Doppelsternbahnen der Unterschied zwischen aufsteigenden und niedersteigenden Knoten ganz weg.

Es ist eine ebenso leicht zu erkennende als oft benutzte Eigenschaft der Projectionsellipse oder scheinbaren Bahn, dass sich die in ihr von dem scheinbaren Radius vector beschriebenen Sektoren zu einander wie die in der wahren Bahn, demnach ebenfalls wie die Zeiten, verhalten. Das doppelte Element des Sectors der scheinbaren Bahn, auszudrücken durch:

$$\varrho^2 \frac{d\rho}{dt},$$

wird also eine Constante sein und die Winkelgeschwindigkeit wird dem Quadrate der Distanz umgekehrt proportional sein. Dieser Satz kommt häufig mit Erfolg zur Anwendung, wo es sich darum handelt, den Werth einer Distanz, deren Messung sich Schwierigkeiten entgegengestellt haben, auf rechnendem Wege zu ermitteln.

Die Anzahl der bei einer Doppelsternbahn zu bestimmenden Elemente beläuft sich im Ganzen auf sieben, nämlich auf die folgenden Stücke:

die mittlere Anomalie der Epoche	M
die Länge des Knotens	Ω
die Neigung der Bahn	i
der Winkel zwischen Perihel und Knoten	$\pi - \Omega$
die Excentricität	e
die halbe grosse Axe in Secunden	a
die Umlaufzeit	U

Die Umlaufzeit, deren Angabe auch durch die der mittleren Winkelbewegung ersetzt werden kann, tritt hier als selbständiges Element auf, da die Masse des Systemes nicht bekannt ist. Bei bekannter Masse und Parallaxe Π des Systemes würde die durch die Gravitationstheorie erlangte Verallgemeinerung des dritten Kepler'schen Gesetzes die mittlere jährliche Bewegung μ nach der Formel:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{m + m'}}{a^{3/2} \operatorname{cosec} \Pi^{3/2}},$$

auf die wir später zurückkommen werden, ergeben.

Wir ziehen den Schluss, dass zur Bestimmung der sieben obigen Elemente einer Doppelsternbahn sieben von einander unabhängige Data erforderlich sind. Darunter muss sich aber wenigstens ein Positionswinkel befinden, weil die Bestimmung der Lage und Gestalt der Bahn aus lauter Distanzen offenbar nicht möglich sein würde; dergleichen muss aber auch mindestens eine Distanz gegeben sein, wenn die Dimension der Bahn bestimmt werden soll. Im Allgemeinen ist es vortheilhaft, Gestalt und Lage der Bahn so viel als möglich nur aus Positionswinkeln zu berechnen, da die Beobachtungen der Distanz an grösserer Unsicherheit leiden¹⁾; z. B. können meist sechs Positionswinkel zur Bestimmung von Lage und Gestalt, wonach dann zuletzt die Dimension möglichst gut mit einer Distanz oder mit der Gesamtheit der Distanzen in Uebereinstimmung zu bringen ist, für eine zweckmässige Combination gelten. Zwei Ausnahmen machen sich jedoch in dieser Hinsicht für die Praxis bemerklich. Ist die beobachtete Bahnbewegung nicht bedeutend genug, so werden die zu sechs Epochen beobachteten Positionswinkel, weil die Epochen einander zu nahe rücken, in praktischer Beziehung nicht mehr für ganz unabhängig gelten dürfen; man muss dann von Distanzen Gebrauch machen, um grössere Zeitintervalle zu bekommen. Eine andere Ausnahme zeigt sich, wenn i nahe gleich 90° wird; in diesem Grenzfall hat ja offenbar der Positionswinkel nur zwei von einander verschiedene Werthe, Ω und $180^\circ + \Omega$, die in der Zeit, in welcher der Nebenstern oder die Duplicität verschwindet, in einem grossen Sprunge in einander übergehen (wie z. B. nahe bei α Centauri der Fall ist). Durch diese beiden Positionswinkel werden Ω und i gegeben; es bleiben dann aber noch fünf Elemente übrig, welche in dem strengen Grenzfall nur durch ebenso viele Distanzen bestimmt werden können. Bei einer blossen Annäherung an den Grenzfall wird man

¹⁾ Savary's Methode (siehe die *Connaissance des temps* vom Jahre 1830) und Encke's Methode (siehe das *Berliner Jahrbuch* für 1832) sind trotz aller ihrer Eleganz doch deshalb wenig zur Anwendung gekommen, weil sie vier Distanzen als gegeben betrachten.

wenigstens wohl daran thun, mehr als eine Distanz zu gebrauchen, d. h. die Distanzen nicht lediglich zur Bestimmung der Dimension zu verwenden.

Doppelsternmessungen sind begreiflicher Weise, trotzdem man zu denselben nur die stärksten Vergrößerungen und besten Hilfsmittel verwendet, dennoch wegen der ausserordentlichen Kleinheit der Beobachtungsgrößen verhältnissmässig weit beträchtlicheren Fehlern unterworfen, als die meisten anderen Messungen. Während z. B. eine beobachtete Rectascension oder auch Länge fast immer bis auf wenige Secunden zu verbürgen steht, ist bei einem engen Sternpaare der Positionswinkel aus einem kürzeren Satze von Messungen häufig kaum auf einen ganzen Grad sicher; etwas ungünstiger noch verhalten sich die Distanzen, da deren Bestimmung durch ganz besondere Fehlerquellen, wie persönliche Unterschiede der Beobachter, in höherem Grade, als die der Positionswinkel, beeinflusst wird. Es ergibt sich aus dem eben Gesagten die Nothwendigkeit, bei Untersuchungen von Doppelsternbahnen vorwiegend Normalörter zu gebrauchen, wie sich solche auf bekannte Weise bilden lassen. Wir nehmen weiter unten stillschweigend an, dass das ganze Beobachtungsmaterial in die gerade hinreichende Anzahl von Normaldaten zusammengezogen sei, z. B. in sechs Positionswinkel und eine Distanz.

Für das Ordnen des Materiales der gemessenen Positionswinkel hat Sir John Herschel ein graphisches Verfahren in Aufnahme gebracht, welches überall als eine sehr nützliche Vorarbeit zu statten kommt, auch wenn man bei der darauf folgenden Bahnbestimmung sich einer anderen als der beiden Herschel'schen Methoden bedienen will¹⁾. Das Verfahren besteht darin, dass auf einer Geraden die Zeiten als Abscissen, die Positionswinkel, welche dazu gehören, als Ordinaten aufgetragen werden; zwischen den so erhaltenen Punkten wird darauf möglichst stetig eine Curve hindurchgeführt, um so die unvermeidlichen Sprünge und Unregelmässigkeiten der Messung des Positionswinkels auszugleichen.

Die Berührungslinie an einem Punkte dieser Curve giebt dann durch die Tangente des von ihr mit der Abscissenaxe gebildeten Winkels den Werth von $\frac{dp}{dt}$ oder der scheinbaren Winkelgeschwindigkeit für diesen Punkt der Bahn. Es wird durch dies Verfahren also auch das Verhältniss der Distanzen und der Gestalt der scheinbaren Bahn bekannt. Ueber die Art, wie aus letzterer dann die Elemente der wahren Bahn bestimmt werden, muss hier auf die in der Note citirten Abhandlungen von Sir John Herschel verwiesen werden.

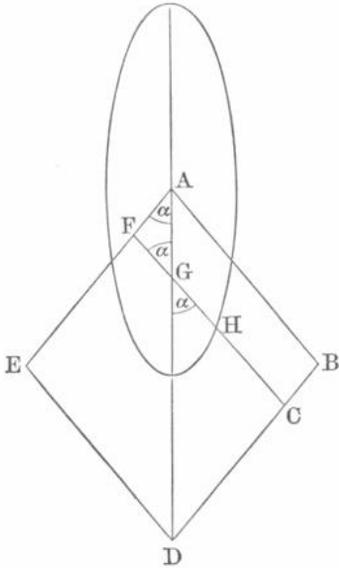
Das eben erwähnte graphische Verfahren lässt oft, besonders aber bei solchen Systemen, wo der Nebenstern durch Jahre hindurch wegen grosser Annäherung an den Hauptstern unsichtbar wird (beispielsweise bei ω Leonis, δ Cygni, γ Coronae) der Willkür im Ziehen der Curve einen beträchtlichen Spielraum. Es ist daher sehr wünschenswerth, leicht prüfen zu können, ob die aus den Winkelgeschwindigkeiten geschlossenen relativen Distanzen, zu ihren Positionswinkeln um einen Punkt herum aufgetragen, auch wirklich nahe in einer Ellipse oder auf einem elliptischen Bogen liegen. In der Praxis der Doppelsternbahnberechnungen kommen Ellipsen von fast jedem möglichen Axenverhältnisse mit ziemlich gleicher Häufigkeit vor, darunter auch solche, welche mit den meisten der üblichen Ellipsographen unbequem zu zeichnen sein würden. Es mag deshalb hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass der zum Copiren von Zeichnungen im verjüngten Maassstabe im Gebrauche befindliche Storchnabel als bequemes Hilfs-

¹⁾ Herschel's erste Methode findet man in den „Memoirs of the Royal Astronomical Society“, Vol. 5, die zweite in Vol. 18 desselben Werkes.

mittel zum Zeichnen von Ellipsen gerade für unseren Zweck Anwendung finden kann. Die Fig. 63 skizzirt einen Storchschnabel von der bekannten Form mit Querleiste.

In A befindet sich der Befestigungsstift, in D der Handstift, mit welchem man in dem gewöhnlichen Gebrauche die Linien der Originalzeichnung verfolgt; G ist der Copirstift, welcher die Zeichnung in dem Verhältnisse von $\overline{BC} : \overline{BD}$ oder $\overline{AF} : \overline{AE}$ verjüngt wiedergiebt, vorausgesetzt, dass auch $\overline{FG} : \overline{FC}$ in dem nämlichen Verhältnisse stehen. Wird der Copirstift in einem anderen Punkte der Querleiste befestigt, z. B.

Fig. 63.



in H , so hört die Aehnlichkeit der Zeichnungen auf, in der Weise, dass, während man mit dem Handstifte in D eine gerade Linie oder einen Kreis beschreibt, vom Copirstifte in H eine andere Curve beschrieben wird. Für uns genügt es, den Handstift eine durch den Punkt A gehende gerade Linie beschreiben zu lassen; die von H gezogene Curve ist dann eine von der grossen Axe begrenzte Ellipsenhälfte. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt in A , die Richtung der grossen Axe fällt mit der durch A gehenden Geraden zusammen; man überzeugt sich durch eine leichte Entwicklung, dass die halbe grosse Axe der Ellipse gleich:

$$\overline{AF} + \overline{FH} \text{ oder } 2\overline{BC} + \overline{GH},$$

die halbe kleine Axe gleich:

$$\overline{GH}$$

wird. Setzt man nämlich:

$$\text{und } \sphericalangle GAF = \sphericalangle AGF = \sphericalangle HGD = \alpha$$

$$\overline{AF} = \overline{FG} = \overline{BC} = m, \quad \overline{GH} = n,$$

so wird:

$$x = (2m + n) \cos \alpha, \quad y = n \sin \alpha,$$

also:

$$\frac{x^2}{(2m + n)^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Man erkennt auf diese Weise leicht, ob die durch das obige graphische Verfahren abgeleiteten Winkelgeschwindigkeiten mit einer Ellipse sich vertragen, oder ob man daran abändern muss. Dadurch wird die erwähnte Willkür schon sehr beschränkt; sie wird es noch mehr, wenn man mit einem Planimeter (am besten mit dem Hansen'schen) prüft, ob nicht bloss (was durch die Herleitungsart der Distanzen verbürgt wird) einige Sektoren der Ellipse, sondern überhaupt irgend zwei Sektoren im Verhältnisse der entsprechenden Zeitintervalle stehen. Dass Letzteres erfüllt, würde nämlich durch jenes graphische Verfahren besonders in dem Falle nicht hinreichend gesichert erscheinen, wo in der Beobachtungsreihe grosse Lücken vorkommen.

Das eben beschriebene graphische Verfahren verhilft nicht bloss zu einem Urtheile darüber, ob das Material für eine Bahnberechnung schon hinreichend ist (wozu, im Gegensatze zu den Planeten- oder Kometenbahnrechnungen, ein beträchtlicher Theil der ganzen Bahn durchlaufen sein muss), sondern auch ausserdem, wenn die Versuche wirklich eine bestimmte Lösung in Aussicht stellen, zu der Kenntniss angenäherter Werthe von gewissen Grössen, die nachher auf rechnerischem Wege in aller Schärfe zu bestimmen sind. Was uns die genannten Versuche in der Beziehung leisten, soll in nächster Vorlesung gezeigt werden.

Hundertunddreizehnte Vorlesung.

Leichte Herleitung verschiedener Elemente der wahren Bahn aus der Projectionseellipse oder Theilen derselben.

Da die Bestimmung der Dimension der Bahn ganz von der der übrigen Elemente getrennt werden kann, indem man nachher an die Distanzen so gut als möglich anschliesst, so können wir von derselben vorläufig ganz absehen und uns nur mit den sechs dann noch übrig bleibenden Elementen der Doppelsternbahn: $\delta, i, \pi - \delta, M_0, \mu, e$ befassen¹⁾. Wie sich zeigen wird, lassen sich aus den Bedingungsgleichungen für die Darstellung der Beobachtungen auf sehr einfache Art die drei Elemente $\delta, i, \pi - \delta$ eliminiren, so dass dann Gleichungen, welche implicite die Unbekannten M_0, μ und e enthalten, zum Vorschein kommen. Nach der Natur der Aufgabe sind die Gleichungen transcendent, daher nur durch Versuche aufzulösen; es ist also vor Allem wünschenswerth, Annäherungen gerade für diese Elemente zu kennen.

Zuweilen ist durch eine Wiederkehr zu demselben Positionswinkel die Umlaufzeit, demnach auch μ gegeben, oder es kommen (wie bei η Coronae borealis) nur zwei verschiedene Werthe der Umlaufzeit in Betracht. In anderen Fällen findet sich in der Beobachtungsreihe ein Perihel und ein Aphel; da diese beiden Epochen auf dem gleich zu zeigenden Wege erkannt werden können, so ist auch bei solcher Gelegenheit μ gegeben. Bei weniger umfassender Beobachtungsreihe ist man, um eine Annäherung für μ zu haben, darauf angewiesen, den in derselben enthaltenen Sector der Projectionseellipse mit der Fläche der ganzen Ellipse zu vergleichen.

Zur Herleitung von M_0 , der mittleren Anomalie einer bestimmten Epoche aus der Projectionseellipse, können folgende Bemerkungen dienen. Offenbar sind die Projectionen dreier in gerader Linie liegender Punkte auf einer Ebene wiederum in gerader Linie. Da nun der Mittelpunkt der wahren Ellipse, die Brennpunkte und das Perihel oder Aphel alle auf einer Geraden liegen, so findet dasselbe auch in Beziehung auf den Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse, den Ort des Hauptsternes und den dem Perihel oder Aphel entsprechenden Orte des Nebensterne statt, d. h. man erhält den Ort des Perihels und des Aphels in der scheinbaren Bahn, wenn man den Mittelpunkt der Projectionseellipse mit dem Orte des Hauptsternes durch eine gerade Linie verbindet und diese zu beiden Seiten bis zur Peripherie der Projectionseellipse verlängert. Der dem Hauptsterne näher gelegene Durchschnitt ist die Projection des Perihels, der entferntere die des Aphels. Die Beobachtungszeit, welche zu den Positionswinkeln der Durchschnitte gehört, ist die des Perihels, beziehungsweise des Aphels.

Man kann nun gleich noch weiter bemerken, dass bei der in Rede stehenden Art von Projection noch ausserdem die Abschnitte einer projecirten Geraden in demselben Verhältnisse bleiben, d. h. auf den gegenwärtigen Fall angewendet, dass das Stück gerader Linie zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt der wahren Ellipse zu der halben grossen Axe derselben in dem nämlichen Verhältnisse steht, wie das Stück zwischen Mittelpunkt und Hauptstern in der Projectionseellipse zu der eben besprochenen Pro-

¹⁾ Es mag hier die nachträgliche Bemerkung Platz finden, dass man der mittleren Bewegung μ das negative Vorzeichen zu geben pflegt, wenn die Positionswinkel mit wachsender Zeit abnehmen; man erspart sich damit eine weitere Angabe über den Sinn der Bewegung.

jection der halben grossen Axe. Die Excentricität e der wahren Bahn ist also gleich dem Verhältnisse:

Abstand des Hauptsternes vom Mittelpunkte der Projectionseellipse zu dem in der Richtung dieses Abstandes genommenen Halbmesser der scheinbaren Ellipse.

Durch die nämliche Betrachtungsweise kann man auch diejenigen um 180° verschiedenen Positionswinkel ermitteln, welche den wahren Anomalien $v = -90^\circ$ und $v = +90^\circ$ entsprechen; man braucht zu dem Zwecke nur zu ermitteln, in welcher Richtung eine Sehne der scheinbaren Ellipse, durch den Hauptstern gelegt, von diesem halbirt wird; die dieser Richtung entsprechenden Positionswinkel sind die gesuchten.

Wenn das Material überhaupt zu einer Bahnbestimmung reif ist, so wird man, seltene Fälle ausgenommen, auf die eine oder andere der vorstehend beschriebenen Arten zu einer angenäherten Kenntniss von M_0 , μ und e , mindestens von einer dieser Grössen gelangen. Nur bei Sternpaaren, die fortwährend den Messungen grosse Schwierigkeiten darbieten, bei denen daher in keinem Theile der Bahn ein einigermaassen zusammenhängendes Material vorliegt und sich wegen der Grösse der Intervalle auch die Herleitung der Winkelgeschwindigkeiten erschwert, ist man genöthigt, M_0 , μ und e selbst ganz aus dem Rohen heraus durch Rechnung zu finden; doch wird auch dann die Bestimmung durch bekannte Hilfsmittel sehr erleichtert.

Obleich die im Vorigen angestellten Betrachtungen für unsere Zwecke ausreichen, so mag hier doch noch gezeigt werden, wie auch Ω und i , überhaupt die wahre Ellipse durch ein graphisches Verfahren aus der scheinbaren Ellipse construirt werden kann. Es ist klar, dass durch die Projection nur ein einziger Diameter der wahren Ellipse keine Verkürzung erleidet, derjenige nämlich, welcher der Linie des Ω parallel ist, welchen man aus der scheinbaren dadurch graphisch herleiten kann, dass man von den Punkten der letzteren auf den Diameter Perpendikel fällt und diese dann im Verhältnisse von $\cos i$ zur Einheit vergrössert; der so erhaltene, auf demselben Perpendikel gelegene Punkt der wahren Ellipse ist offenbar dann derjenige, von welchem der Punkt der scheinbaren Ellipse die Projection ist. Der Winkel, welcher am Centrum der Ellipse von dem Radius des so construirten Punktes mit jenem Diameter gebildet wird, ist demjenigen gleich, welcher von demselben centrischen Radius in der wahren Bahn mit der Linie des Ω gebildet wird. Um aber die beschriebene Construction wirklich ausführen zu können, muss man die Knotenlinie und i zuvor kennen, wozu die vorhergehenden Betrachtungen selbst das Mittel geben. Denn aus denselben geht hervor, dass man durch Vergrösserung des Perpendikels für den einen Endpunkt der conjugirten Axe 2α einen Endpunkt der grossen Axe $2a$ erhalten muss, ebenso durch Vergrösserung des Perpendikels für einen Endpunkt der conjugirten Axe 2β einen Endpunkt der kleinen Axe $2b$. Nennen wir demnach A den Positionswinkel zur Zeit des Perihels, der der Axe 2α zukommt, ferner B denjenigen der conjugirten Axe 2β , so haben wir:

$$\alpha^2 \cos(A - \Omega)^2 + \alpha^2 \sin(A - \Omega)^2 \sec^2 i = a^2 \dots \dots (1)$$

$$\beta^2 \cos(B - \Omega)^2 + \beta^2 \sin(B - \Omega)^2 \sec^2 i = b^2 \dots \dots (2)$$

Nun ist aber $a^2 + b^2$ das Quadrat der Sehne, welche in der wahren Ellipse die Endpunkte von grosser und kleiner Axe verbindet. Die vorhergehenden Betrachtungen liefern für dieses Quadrat aber noch den Ausdruck:

$$\{\alpha \cos(A - \Omega) - \beta \cos(B - \Omega)\}^2 + \sec^2 i \{\alpha \sin(A - \Omega) - \beta \sin(B - \Omega)\}^2,$$

welcher in Verbindung mit obigen Gleichungen die bemerkenswerthe Relation:

$$\cos(A - \Omega) \cos(B - \Omega) + \sec i^2 \sin(A - \Omega) \sin(B - \Omega) = 0 \dots (3)$$

ergibt.

Dividirt man die Gleichung (1) und (2) und substituirt für $\sec i^2$ seinen aus (3) folgenden Werth:

$$\sec i^2 = - \cotg(A - \Omega) \cotg(B - \Omega),$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2 \alpha^2}{a^2 \beta^2} &= \frac{\sin(B - \Omega) \cos(B - \Omega)}{\sin(A - \Omega) \cos(A - \Omega)} \times \\ \frac{\sin(A - \Omega) \cos(B - \Omega) - \cos(A - \Omega) \sin(B - \Omega)}{\cos(A - \Omega) \sin(B - \Omega) - \sin(A - \Omega) \cos(B - \Omega)} &= - \frac{\sin 2(B - \Omega)}{\sin 2(A - \Omega)} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist nun Alles bekannt, da ja die Werthe von $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \cos \varphi^2$, ebenso wie die von α und β der Projectionseellipse entnommen werden können. Da in dieser Gleichung 2Ω die Unbekannte ist, so würde man in Beziehung auf Ω selbst zwischen vier Quadranten zu wählen haben, wenn nicht eben noch verlangt werden müsste, dass $\cos i^2$, d. h. nach dem Vorhergehenden das Product:

$$tg(A - \Omega) tg(\Omega - B)$$

positiv und kleiner als die Einheit werde. Nach Berücksichtigung dieses Umstandes bleibt nur noch die Wahl zwischen zwei um 180° verschiedenen Werthen von Ω übrig, in Uebereinstimmung mit der früher gemachten Bemerkung, dass bei einer Doppelsternbahn aufsteigender und niedersteigender Knoten nicht von einander unterschieden werden können.

Will man die Gleichung (4) durch Rechnung auflösen, so setzt man:

$$\frac{b\alpha}{a\beta} = tg \xi,$$

was immer bei reeller Lösung erlaubt; man hat dann:

$$\frac{1 + tg \xi^2}{1 - tg \xi^2} = \frac{\sin 2(A - \Omega) - \sin 2(B - \Omega)}{\sin 2(A - \Omega) + \sin 2(B - \Omega)},$$

d. h.:

$$\cos 2\xi = \cotg(A - B) tg(A + B - 2\Omega) \dots (5)$$

Wenn man dagegen die Gleichung (4) durch Construction auflösen will, so zieht man aus dem Centrum der Projectionseellipse zwei Geraden, den Positionswinkeln oder Richtungen $2B$ und $2A$ entsprechend, und diesen parallel zwei andere Geraden, deren Abstände von jenen sich beziehungsweise wie $b^2 \alpha^2 : a^2 \beta^2$ verhalten; die den Schnittpunkt der letzteren und den Mittelpunkt der Projectionseellipse verbindende Gerade hat, wie leicht zu erkennen, die Richtung oder den Positionswinkel 2Ω . Um auch die Neigung i der wahren Bahn gegen die Ebene der Projectionseellipse durch Construction zu finden, bemerke man, dass nach den obigen Entwicklungen $\cos i$ die mittlere Proportionale zwischen:

$$tg(A - \Omega) \text{ und } tg(\Omega - B),$$

wonach sich dann die fragliche Construction ohne Weiteres ergibt.

Hundertundvierzehnte Vorlesung.

Anwendung des graphischen Verfahrens auf die Bahn von ω Leonis.

Wir wollen versuchen, die folgenden beobachteten Positionswinkel und Distanzen des ebenso schwierigen als interessanten Doppelsternes ω Leonis, dessen Ort am Himmel für die Epoche 1800 für unseren Zweck angenähert genug durch die Rectascension $9^h 20^m,9$ und die Declination $+ 9^\circ 40'$ gegeben wird, an eine den verallgemeinerten Kepler'schen Gesetzen gemäss durchlaufene Bahn anzuschliessen:

Epoche	Positionswinkel	Distanz	Beobachter
1782,87	110° 54'	—	Herschel I.
1804,09	130° 53'	—	"
1825,21	153° 56'	0'',970	W. Struve
32,25	163° 24'	0'',515	"
33,29	172° 48'	0'',447	"
43,408	280° 11'	0'',350	Mädler
56,153	356° 30'	0'',333	Secchi
56,167	359° 12'	0'',36	"
56,186	4° 10'	0'',40	"
56,386	357° 39'	0'',45	"
56,425	0° 59'	0'',358	Mädler
57,342	2° 41'	0'',35	Secchi
57,378	5° 45'	0'',35	"
58,323	0° 47'	—	"
58,367	357° 18'	—	"
58,370	2° 42'	—	"
66,300	32° 54'	0'',3	"
67,346	33° 45'	0'',57	Engelmann.

Die jährliche Präcession im Positionswinkel, zu berechnen nach der früher entwickelten Formel:

$$dp = \frac{n \sin \alpha}{\cos \delta} = 0',34 \sin \alpha \sec \delta$$

beträgt für ω Leonis:

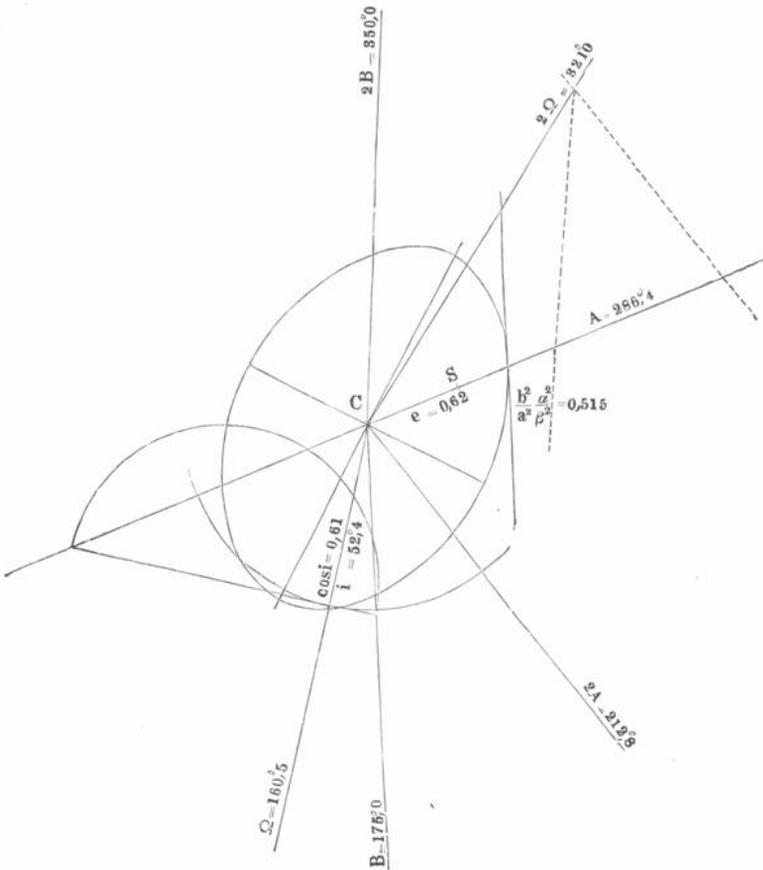
$$0',22.$$

Auf die Epoche oder, wie man auch sagt, den Meridian von 1850 reducirt, werden die obigen Positionswinkel:

1782,87	111° 9'	56,386	357° 38'
1804,09	131° 3'	56,425	0° 58'
25,21	154° 1'	57,342	2° 39'
32,25	163° 28'	57,378	5° 43'
33,29	172° 52'	58,323	0° 45'
43,408	280° 12'	58,367	357° 16'
56,153	356° 29'	58,370	2° 40'
56,167	359° 11'	66,300	32° 50'
56,186	4° 9'	67,346	33° 41'

Diese Positionswinkel wurden in der nachfolgenden Zeichnung (Fig. 64) in der Art eingetragen, dass die Richtung von dem unteren nach dem oberen Ende des Blattes dem Positionswinkel 0° entspricht; über die denselben zugehörigen Distanzen wurden, wie in Vorlesung 112 beschrieben, unter vorzugsweiser Berücksichtigung der Winkelgeschwindigkeiten Ver-

Fig. 64.



suche gemacht, welche mit einem ziemlichen Grade von Sicherheit (d. h. ohne Ellipsen von sehr abweichender Form zuzulassen) die Projectionsellipse der Fig. 64 ergaben. Es war nun zunächst deren Centrum mit dem Orte des Hauptsternes zu verbinden, um A oder den Positionswinkel zur Zeit des wahren Perihels zu ermitteln. Es findet sich:

$$A = 286^{\circ}.4.$$

Aus der dazu gehörigen Distanz, welche zugleich die halbe conjugirte Axe α vorstellt, macht man eine Schätzung der Geschwindigkeit der Aenderung des Positionswinkels in diesem Punkte der Bahn. Diese Geschwindigkeit zu 17° angenommen,

wird, da der Positionswinkel für 1843,408 gleich $280^{\circ}.2$ gefunden wurde, die Epoche des wahren Perihels gleich auf:

$$1843,64$$

fallen. Für die Excentricität e erhält man die Annäherung:

$$e = 0,62$$

auf beschriebene Weise aus der Zeichnung, desgleichen den Werth des Verhältnisses:

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0,515.$$

Zieht man diesem gemäss in den Abständen 0,515 und 1 beziehungsweise parallel den Diametern der Richtungen $2B$ und $2A$ die in der Zeichnung punktirten Geraden, so hat die den Durchschnitt derselben mit dem Centrum der Ellipse verbindende Gerade den Positionswinkel 2Ω , hier gleich $321^{\circ}.0$. $\text{Cos } i$ oder das geometrische Mittel zwischen $\text{tg}(\Omega - A)$ und $\text{tg}(B - \Omega)$ ergibt sich gleich 0,61, d. h. $i = 52^{\circ} 25'$. Den Abstand des Perihels vom Knoten in der Ebene der wahren Bahn findet man sodann aus der Gleichung:

$$tg(A - \Omega) = \cos i \, tg(\pi - \Omega)$$

oder mit Elimination von $\cos i$ durch das Vorhergehende:

$$tg(\pi - \Omega)^2 = \frac{tg(A - \Omega)}{tg(\Omega - B)}$$

Es gilt hier die von den Planetenbahnen her uns bekannte Regel, dass $\pi - \Omega$ und $A - \Omega$ in demselben Quadranten liegen müssen. Die Anwendung auf vorliegenden Fall ergibt:

$$\pi - \Omega = 113^{\circ}41'.$$

Bei der Bestimmung der halben grossen Axen in Bogensekunden muss man sich nach zuverlässigen Messungen der Distanz umsehen; in der Regel wird das Resultat sich vom Beobachter und vom Instrument in der Art abhängig erweisen, dass man bei feineren Rechnungen wohlthut, jeden Beobachter und jedes Instrument abgesondert zu berücksichtigen, welchen Theil der Rechnung man gewöhnlich zuletzt vornimmt.

Unter den obigen Distanzen findet sich nur eine einzige, welche durch ihre Grösse und Zuverlässigkeit zu einer Bestimmung von a geeignet erscheint, die 1825,21 beobachtete: $\varrho = 0'',970$. Sucht man nach bekannter Formel:

$$tg u = tg(v + \pi - \Omega) = \sec i \, tg(p - \Omega)$$

das Argument der Breite u zu dem Positionswinkel $p = 154^{\circ} 1'$, so findet man:

$$u = - 10^{\circ} 33',$$

die Breite selbst nach der Formel:

$$\sin \text{Breite} = \sin i \cdot \sin u$$

gleich $- 8^{\circ} 20'$; folglich ist der zugehörige Radius vector r gleich:

$$0'',970 \cdot \sec \text{Breite} \quad \log r = 9,9914.$$

Ferner ist die wahre Anomalie $v = u - (\pi - \Omega)$ gleich:

$$- 123^{\circ} 57' \quad \text{oder} \quad v = 236^{\circ} 3',$$

und, da:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = 0,936 a,$$

so wird:

$$a = 1'',05.$$

Die äussersten, in Zeit am weitesten von einander abstehenden der obigen Positionswinkel kann man benutzen, nicht bloss die Umlaufszeit zu bestimmen, sondern auch noch einmal die Epoche des wahren Perihels herzuleiten, für welche letztere man, soll die Bahnbestimmung als gelungen gelten, einen dem früheren nahe kommenden Werth erhalten muss. Zu dem Zwecke bestimmen wir die wahren Anomalien der Positionswinkel:

$$111^{\circ} 9' \quad \text{und} \quad 33^{\circ} 15',$$

welche zu den Epochen:

$$1782,87 \quad \text{und} \quad 1866,82$$

gehören und finden dafür:

$$184^{\circ} 14' \quad \text{und} \quad 131^{\circ} 43',$$

daraus ferner die mittleren Anomalien:

$$194^{\circ} 7' \quad \text{und} \quad 59^{\circ} 1',$$

d. h.:

$$194^{\circ} 7' \quad \text{und} \quad 419^{\circ} 1'.$$

1) Will man die Herleitung des Werthes von i auf dem Wege der Construction mit der rein constructiven Bestimmung von $\pi - \Omega$ in einer Regel zusammenfassen, so kann man sagen:

$\cos i$ ist das geometrische Mittel zwischen $tg(A - \Omega)$ und $tg(\Omega - B)$
 $tg(\pi - \Omega)$ " " " " " " $tg(A - \Omega)$ und $cotg(\Omega - B)$.

Hiernach beträgt die Umlaufszeit:

134,3 Jahre.

(Die vorläufigen Versuche unter Anwendung eines Planimeters hatten 138,5 Jahre ergeben.) Die Epoche des Perihels ergibt sich hier auf 1844,8 fallend.

Nehmen wir da, wo zwei verschiedene Bestimmungen vorliegen, das Mittel, so können wir als vorläufiges Elementensystem von ω Leonis, welches nachher durch eine vollkommeneren Methode bestimmt werden soll, annehmen:

Epoche des wahren Perihels $T = 1844,2$

$\Omega = 160^{\circ},5$

$\pi - \Omega = 113^{\circ},4$

$i = 52^{\circ},4$

$e = 0,62$

$a = 1'',05$

Umlaufszeit = 136,4 Jahre.

Hundertundfünfzehnte Vorlesung.

Methode zur Bestimmung einer Doppelsternbahn aus sechs Positionswinkeln.

Zu einer schärferen Berechnung der Elemente gelangt man durch Anschluss an sechs Positionswinkel, am sichersten an sechs Normalörter aus Positionswinkeln. Die dazu dienlichen Formeln erhalten wir durch folgende Betrachtung.

Die Flächen der wahren Bahn stehen zu ihren Projectionen in der scheinbaren Bahn überall im Verhältniss von 1 zu $\cos i$, folglich stehen je zwei Dreiecksflächen der wahren Bahn zu einander in demselben Verhältniss, wie die zwei entsprechenden der scheinbaren Bahn oder wie ihre Projectionen. Man hat daher, wenn v, v', v'', v''' u. s. w. eine Reihe von wahren Anomalien, r, r', r'', r''' u. s. w. die Radienvectoren p, p', p'', p''' u. s. w. die zugehörigen Positionswinkel, q, q', q'', q''' u. s. w. die Distanzen bedeuten:

$$\frac{r r' \sin (v - v')}{r' r'' \sin (v' - v'')} = \frac{q q' \sin (p - p')}{q' q'' \sin (p' - p'')} \dots \dots \dots (1)$$

Desgleichen hat man:

$$\frac{r r'' \sin (v - v'')}{r'' r''' \sin (v'' - v''')} = \frac{q q'' \sin (p - p'')}{q'' q''' \sin (p'' - p''')} \dots \dots \dots (2)$$

und aus der Division beider Gleichungen in einander:

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v'' - v''')}{\sin (v'' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p'' - p''')}{\sin (p'' - p) \sin (p' - p''')} \dots \dots \dots (3)$$

Indem wir noch nach einander v''', p''' und v''', p''' an der Stelle von v'' und p'' in dieser Gleichung einführen, erhalten wir die beiden analogen:

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v''' - v''')}{\sin (v''' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''')}{\sin (p''' - p) \sin (p' - p''')} \dots \dots \dots (4)$$

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v'' - v''')}{\sin (v'' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p'' - p''')}{\sin (p'' - p) \sin (p' - p''')} \dots \dots \dots (5)$$

Die vorhergehenden Gleichungen enthalten auf der zweiten Seite die gemessenen Positionswinkel oder Distanzen, auf der ersten Seite nur wahre Anomalien und Radienvectoren, d. h. lediglich die sogenannten phoronomischen Elemente T , U (Umlaufszeit) und e ¹⁾, für welche man bequemer die mittlere Anomalie M_0 einer gewählten Epoche und die mittlere jährliche Bewegung μ (bei abnehmendem Positionswinkel negativ zu nehmen) substituiren darf. Die geometrischen, d. h. die Elemente der Lage der Bahn und der Dimension erscheinen eliminirt. Halten wir uns zunächst an die Gleichungen (3), (4) und (5), in denen auf der rechten Seite nur Positionswinkel vorkommen, so wird es sich darum handeln, die drei Unbekannten M_0 , μ und e so zu bestimmen, dass jenen drei Gleichungen, mindestens sehr nahe, genügt wird. Folgende Auflösungsweise hat schon bei mancher Gelegenheit gute Dienste geleistet. Man macht in Beziehung auf M_0 und μ eine combinirte Hypothese (mit Benutzung der Annäherungen, welche man durch das graphische Verfahren, überhaupt durch vorläufige Bestimmungen erhalten hat), ermittelt dann durch Versuche denjenigen Werth von e , durch welchen einer der Gleichungen, beispielsweise der Gleichung (3), Genüge geleistet wird, und berechnet die bei (4) und (5) in Beziehung auf den gegebenen Werth der zweiten Seite übrig bleibenden Fehler. Dieselbe Rechnung führt man für zwei andere combinirte Hypothesen von M_0 und μ durch und schliesst dann auf die bekannte Art, die wir bei früheren Gelegenheiten hinreichend erörtert haben, auf die wahren Werthe von M_0 , μ und mittelbar auf e .

Durch die in Abtheilung I. gegebenen Hilfsmittel ist die Bestimmung der wahren Anomalien, welche einer gewissen Hypothese entsprechen, selbst für grosse Excentricitäten, nicht allzu mühselig. Bei dieser Gelegenheit mag jedoch noch kurz eines anderen Hilfsmittels zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung Erwähnung geschehen. Dasselbe beruht auf einer Eigenschaft der Cykloide, welche sich auf folgende Weise aussprechen lässt:

Wenn man einen Kreis vom Radius 1 auf einer Geraden rollen lässt, so dass ein vom Centrum um die Grösse e abstehender Punkt eine verkürzte Cykloide beschreibt, so ist bei passender Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten die Abscisse des bewegten Punktes die mittlere Anomalie, die Ordinate desselben der Radius vector, während die Abscisse des eine Gerade beschreibenden Centrums die excentrische Anomalie vorstellt, dabei die Excentricität gleich e und die halbe grosse Axe gleich 1 gesetzt. Die rechtwinkligen Coordinaten sind so zu wählen, dass für $x = 0$, $y = 1 - e$ wird.

Dieser Bemerkung zufolge, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, wird, sobald man die Cykloide für die Excentricität e construirt und die von dem Centrum des Kreises beschriebene Gerade gezogen hat, die excentrische Anomalie für eine gegebene mittlere Anomalie dadurch gefunden, dass man aus dem Punkte der Cykloide, welcher die mittlere Anomalie zur Abscisse hat, als dem Centrum, mit dem Halbmesser e einen Kreis beschreibt; der Durchschnittspunkt des letzteren mit jener Geraden wird die excentrische Anomalie zur Abscisse haben.

Insofern bei dieser Construction der excentrischen Anomalie ein ganzes System von Cykloiden, etwa für die vollen Zehntel der Excentricität e , gezeichnet werden muss, zwischen denen man nach dem Augenmaass interpolirt, steht dieses Hilfsmittel gegen die in Abtheilung I. gezeigte Sinuscurve etwas zurück. Es hat dagegen vor jenem den nicht zu unterschätzenden Vorzug, dass keine andere Operation als das Messen mit dem Cirkel vorkommt und dass die Ordinate zugleich den Werth des Differentialquotienten:

$$\frac{dM}{dE}$$

¹⁾ Die Excentricität e kann, als in der Keppler'schen Gleichung auftretend, zu den phoronomischen Elementen gerechnet werden.

darstellt, durch welchen man weitere Näherungen auf bekannte Weise mit grösster Leichtigkeit erhalten kann.

Wir wollen hier auch noch kurz eine der merkwürdigeren Umformungen erwähnen, welche die Gleichungen (1) bis (5) zulassen, wenn wir auch kaum Veranlassung nehmen dürfen, davon bei der praktischen Rechnung Gebrauch zu machen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \sqrt{r r'} \sin \frac{1}{2} (v - v') &= a \sqrt{1 - e^2} \sin \frac{1}{2} (E - E') \\ \sqrt{r r'} \cos \frac{1}{2} (v - v') &= a \{ \cos \frac{1}{2} (E - E') - e \cos \frac{1}{2} (E + E') \} \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} r r' \sin (v - v') &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{ \sin (E - E') - e \sin E + e \sin E' \} \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{ \sin (E - E') - (E - M) + (E' - M') \}. \end{aligned}$$

(1) bis (5) kann man demnach in folgender Form schreiben:

$$\frac{\sin (E - E') - (E - M) + (E' - M')}{\sin (E' - E''''') - (E' - M') + (E'''' - M''''')} = \frac{\varrho \varrho' \sin (p - p')}{\varrho' \varrho'''' \sin (p' - p''''')} \dots (6)$$

$$\frac{\sin (E - E'') - (E - M) + (E'' - M'')}{\sin (E'' - E''''') - (E'' - M'') + (E'''' - M''''')} = \frac{\varrho \varrho'' \sin (p - p'')}{\varrho'' \varrho'''' \sin (p'' - p''''')} \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\sin (E' - E) - (E' - M') + (E - M)}{\sin (E'' - E) - (E'' - M'') + (E - M)} \times \\ &\frac{\sin (E'' - E''''') - (E'' - M'') + (E'''' - M''''')} {\sin (E' - E''''') - (E' - M') + (E'''' - M''''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''''')} {\sin (p'' - p) \sin (p' - p''''')} \end{aligned} \right\} (8)$$

u. s. w.

Man erspart hier zwar die Berechnung der wahren Anomalien; dagegen haben die Formeln an Uebersichtlichkeit soviel verloren, dass man wohl den ursprünglichen bei der Rechnung den Vorzug geben wird; doch giebt es einzelne Fälle, wo die Gleichungen (6) bis (8) mit Nutzen in Anwendung gebracht werden können. Der Gebrauch einer Tafel der Function:

$$\sin x - x$$

wird übrigens auch für die Form (6) bis (8) eine grössere Bequemlichkeit herbeiführen; in welcher Weise ist leicht zu erkennen.

Hat man M_0 , μ und e so bestimmt, dass den Grundgleichungen nahezu Genüge geschieht, so werden δ , i und $\pi - \delta$ leicht auf folgende Art gefunden. Man dividire in einander die bekannten Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} tg (p - \delta) &= \cos i tg (v + \pi - \delta) \\ tg (p' - \delta) &= \cos i tg (v' + \pi - \delta) \\ tg (p'' - \delta) &= \cos i tg (v'' + \pi - \delta) \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

wodurch man nach leichter Transformation erhält:

$$\left. \begin{aligned} \sin (p' - p) \sin (v' + v + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v' - v) \sin (p' + p - 2\delta) \\ \sin (p'' - p) \sin (v'' + v + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v'' - v) \sin (p'' + p - 2\delta) \\ \sin (p'' - p') \sin (v'' + v' + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v'' - v') \sin (p'' + p' - 2\delta) \end{aligned} \right\} (II)$$

Multiplirt man die erste dieser Gleichungen mit:

$$\sin (p'' - p) \sin (p'' - p') \sin (v' - v),$$

die zweite mit:

$$- \sin (p' - p) \sin (p'' - p') \sin (v'' - v),$$

die dritte mit:

$$\sin (p' - p) \sin (p'' - p) \sin (v'' - v'),$$

und addirt, so findet man:

$$\left. \begin{aligned}
 & \operatorname{tg} 2 \Omega = \\
 & \frac{\sin(p' + p) \cdot \sin(v' - v)^2 - \sin(p'' + p) \cdot \sin(v'' - v)^2 + \sin(p'' + p') \cdot \sin(v'' - v')^2}{\sin(p' - p) \cdot \sin(v' - v)^2 - \sin(p'' - p) \cdot \sin(v'' - v)^2 + \sin(p'' - p') \cdot \sin(v'' - v')^2} \quad (\text{III}) \\
 & \frac{\cos(p' + p) \cdot \sin(v' - v)^2 - \cos(p'' + p) \cdot \sin(v'' - v)^2 + \cos(p'' + p') \cdot \sin(v'' - v')^2}{\sin(p' - p) \cdot \sin(v' - v)^2 - \sin(p'' - p) \cdot \sin(v'' - v)^2 + \sin(p'' - p') \cdot \sin(v'' - v')^2}
 \end{aligned} \right\}$$

Die Substitution des aus (III) berechneten Werthes von Ω in eine der Gleichungen (II) liefert den Werth von $\pi - \Omega$, und endlich geben beide Werthe, in (I) substituirt, $\cos i$. Die Vierdeutigkeit in der Bestimmung von Ω wird durch den Umstand, dass $\cos i$ reell, positiv und kleiner als die Einheit sich ergeben muss, auf die bekannte Zweideutigkeit beschränkt, nach welcher aufsteigender und niedersteigender Knoten nicht von einander unterschieden werden können.

Ehe wir nach diesen Formeln das oben gewählte Beispiel beendigen, wollen wir auch noch diejenigen Grundformeln entwickeln, welche zu einer ebenso unmittelbaren Anwendung sich eignen, wenn mehr als zwei Distanzen gegeben sind.

Hundertundsechszehnte Vorlesung.

Grundformeln für Berechnung einer Doppelsternbahn, wenn ausser vier Positionswinkeln noch wenigstens drei Distanzen gegeben sind.

Die Methode der Bestimmung aus sechs Positionswinkeln wird unbrauchbar, wenn $i = 90^\circ$ wird, weil dann jeder Positionswinkel, von den Beobachtungsfehlern natürlich abgesehen, gleich Ω oder gleich $180^\circ + \Omega$ sein muss. Es versagen die Formeln (3) bis (5) vollständig ihren Dienst. Je näher i der genannten Grenze kommt, desto mehr wird man genöthigt sein, auch schon bei der Bestimmung von M, μ, e Distanzen zu Hülfe zu ziehen. Die folgende Methode ist sowohl für die Combination:

Vier Positionswinkel und drei Distanzen

als auch für:

Drei Positionswinkel und vier Distanzen

von grosser Bequemlichkeit; denn sie gewährt die besondere Annehmlichkeit, dass die Versuche zur Auflösung der Grundgleichungen in aller Strenge sich nur auf zwei Unbekannte, statt wie oben auf M, μ und e zu erstrecken haben.

Denken wir uns in der Ebene der Projectionsellipse durch den Hauptstern als Nullpunkt ein schiefwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen X -Axe mit der Projection der grossen Axe $2a$ zusammenfällt, während die Y -Axe der Projection der kleinen Axe $2b$ parallel sein soll; es seien auch wieder A und B beziehungsweise die Positionswinkel der Richtungen dieser Axen, von denen wir schon in Vorlesung 109 Gebrauch gemacht haben.

Stellt c den vorläufig allerdings unbekanntem Cosinus der Projectionswinkel für b und die mit ihm parallelen Sehnen der wahren Bahn vor, so haben wir die y sämmtlich unter der Form:

$$c \sin E,$$

wo wieder E die excentrische Anomalie bedeutet. Ferner ist aber auch:

$$\frac{y}{\varrho} = \frac{\sin(p - A)}{\sin(B - A)},$$

und wir haben daher aus drei Positionswinkeln p, p', p'' und den zugehörigen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} c \sin E &= \varrho \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p - A) \\ c \sin E' &= \varrho' \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p' - A) \\ c \sin E'' &= \varrho'' \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p'' - A) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

und durch deren Division in einander:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin E'}{\sin E} &= \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \frac{\sin(p' - A)}{\sin(p - A)} \\ \frac{\sin E''}{\sin E} &= \frac{\varrho''}{\varrho} \cdot \frac{\sin(p'' - A)}{\sin(p - A)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

Bedeutet t, t', t'', t''' die Beobachtungszeiten, so besteht zwischen E, E' und E'' die Bedingungsleichung:

$$\frac{E' - E - c(\sin E' - \sin E)}{E'' - E' - c(\sin E'' - \sin E')} = \frac{t' - t}{t'' - t'} \dots \dots \dots (C)$$

Ausserdem fanden wir in Vorlesung 115:

$$\frac{\sin(E' - E) - e(\sin E' - \sin E)}{\sin(E'' - E') - e(\sin E'' - \sin E')} = \frac{\varrho \sin(p' - p)}{\varrho'' \sin(p'' - p')} \dots \dots \dots (D)$$

Aus Gleichung (C) ergibt sich:

$$e = \frac{(t'' - t')(E' - E) - (t' - t)(E'' - E')}{(t'' - t)(\sin E' - \sin E) - (t' - t)(\sin E'' - \sin E')} \dots \dots \dots (E)$$

aus (D) folgt:

$$e = \frac{\varrho'' \sin(p'' - p') \sin(E' - E) - \varrho \sin(p' - p) \sin(E'' - E')}{\varrho'' \sin(p'' - p') (\sin E' - \sin E) - \varrho \sin(p' - p) (\sin E'' - \sin E')} \dots \dots (F)$$

Es empfiehlt sich nun folgende indirecte Bestimmungsweise. Man macht in Betreff der beiden Unbekannten A und E eine Hypothese und berechnet mittelst der Gleichungen (B) die excentrischen Anomalien E' und E'' . Man hat sodann für die Richtigkeit der beiden Werthe von A und E die beiden Bedingungen, dass die Werthe von e aus (E) und (F) übereinstimmen müssen, und ausserdem, wenn ein vierter Positionswinkel p''' gegeben ist, nach Vorlesung 114 die Gleichung:

$$\frac{\sin(v' - v) \sin(v''' - v'')}{\sin(v'' - v) \sin(v''' - v')} = \frac{\sin(p' - p) \sin(p''' - p'')}{\sin(p'' - p) \sin(p''' - p')} \dots \dots \dots (G)$$

Sollte sich zeigen, dass die Positionswinkel sich sehr nahe nur zwischen zwei um 180° verschiedenen Werthen bewegen, oder durch eine sehr rasche Winkelveränderung von dem einen zum anderen übergehen, so würde man vorziehen, eine vierte Distanz darzustellen, da der Positionswinkel dann für die Bestimmung kein Gewicht hat.

Man könnte diese Prüfung durch Vergleichung des aus E, E', E'' abzuleitenden Werthes der Distanz ϱ''' mit dem beobachteten in der Weise ausführen, dass man nach den Formeln (I) bis (III) der 115. Vorlesung aus v, v', v'', p, p', p'' die Elemente $\Omega, \pi - \Omega$ und i bestimmte, wonach man dann unter Anwendung von Grundgleichungen aus Abtheilung I. haben wird:

$$\begin{aligned} \varrho \cos(p - \Omega) &= r \cos(v + \pi - \Omega) \\ \varrho \sin(p - \Omega) &= r \cos i \sin(v + \pi - \Omega). \end{aligned}$$

Um jedoch nicht bei jedem Versuche bis zu der Bestimmung der Elemente Ω , $\pi - \Omega$ und i zurückgehen zu müssen, kann man auch so verfahren, dass man zuerst p''' der Bedingung (G) genügend bestimmt. Setzt man zur Abkürzung:

$$tg \xi = \frac{\sin(v - v'')}{\sin(v'' - v')} \cdot \frac{\sin(v''' - v')}{\sin(v''' - v)} \cdot \frac{\sin(p'' - p')}{\sin(p - p'')},$$

so wird die Gleichung:

$$tg^{1/2}(p' + p - 2p''') = tg(45^\circ + \xi) tg^{1/2}(p - p')$$

einen solchen Werth von p''' liefern, und dieser Werth wird immer alle zu erlangende Schärfe besitzen, gerade um so sicherer, je mehr die Gleichung (G) zur Bestimmung der Elemente unbrauchbar werden würde. Fügt man nun noch den Gleichungen (B) die folgende hinzu:

$$\frac{\sin E'''}{\sin E} = \frac{\varrho'''}{\varrho} \cdot \frac{\sin(p''' - A)}{\sin(p - A)},$$

so lässt sich, nachdem man E''' auf gewöhnliche Art berechnet hat, sogleich ϱ''' ohne Kenntniss von Ω , $\pi - \Omega$ und i ermitteln.

Für beide oben erwähnte Combinationen¹⁾ hat man, wenn die über A und E gemachte Hypothese nicht beiden Prüfungen genügt, eine zweite und dritte Hypothese durchzurechnen und dann auf von früher her schon bekannte Weise die wahren Werthe zu interpoliren.

Hundertundsiebenezehnte Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Methode der Vorlesung 115.

Wir wollen jetzt die Vorschriften der Vorlesung 110 auf folgende sechs Positionswinkel von ω Leonis, in denen so ziemlich das ganze bis jetzt vorhandene Beobachtungsmaterial der Positionswinkel vertreten ist, zur Anwendung bringen:

1782,87	$p = 111^\circ 9'$
1804,09	$p' = 131^\circ 3'$
32,23	$p'' = 166^\circ 58'$
43,41	$p''' = 280^\circ 20'$
50,28	$p'''' = 344^\circ 25'$
66,03	$p''''' = 25^\circ 33'$

Es werden:

$$\frac{\sin(p' - p) \sin(p'' - p''''')}{\sin(p'' - p) \sin(p' - p''''')} = 0,2663$$

$$\frac{\sin(p' - p) \sin(p''' - p''''')}{\sin(p''' - p) \sin(p' - p''''')} = -1,8162$$

$$\frac{\sin(p' - p) \sin(p'''' - p''''')}{\sin(p'''' - p) \sin(p' - p''''')} = 0,2899$$

¹⁾ Auf beide lässt sich auch die in Nr. 990 der Astronom. Nachrichten gegebene Methode mit gutem Erfolg anwenden.

Zur Abkürzung für das Folgende schreiben wir die aufzulösenden Grundgleichungen (3), (4) und (5) in der Form:

$$\alpha = 0,2663 \qquad \beta = -1,8162 \qquad \gamma = 0,2899$$

Das Aufsuchen der Werthe von M_0 , μ und e oder der Zeit des Perihels, der Umlaufszeit und der Excentricität der wahren Bahn, welche jene Gleichungen befriedigen, können wir uns, wenn wir von den durch das graphische Verfahren erhaltenen Annäherungen ausgehen, die Bestimmung der drei Unbekannten wesentlich erleichtern. In der Regel werden wir nämlich in solchem Falle, wo das Resultat eines graphischen Verfahrens zu verbessern ist, schon mit vier Hypothesen zum Ziele kommen. In der ersten Hypothese legen wir die erhaltenen Annäherungen, im gegenwärtigen Falle beispielsweise die Werthe¹⁾:

$$\begin{aligned} T &= 1843,8 \\ U &= 142,0 \text{ Jahr} \\ e &= 0,62 \end{aligned}$$

zu Grunde, um zu prüfen, welche Unterschiede in Darstellung von α , β , γ übrig bleiben. In der zweiten Hypothese werden die mittleren Anomalien sämmtlich um eine gewisse Grösse, hier beispielsweise um 1^0 vermehrt, und die erwähnte Prüfung vorgenommen; in der dritten Hypothese wird versucht, welchen Effect es hervorbringt, wenn bloss die Umlaufszeit oder μ geändert wird, beispielsweise hier die mittleren Anomalien mit 1,01 multiplicirt werden; in der vierten Hypothese endlich ist lediglich mit e eine Aenderung vorgenommen, im gegenwärtigen Falle durch Vermehrung des obigen Werthes auf 0,63. Dividirt man mit der Aenderung von M in der zweiten gegen die erste Hypothese in die entsprechenden Aenderungen von α , β und γ , so sind die Quotienten sehr angenähert als die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{d\alpha}{dM}, \qquad \frac{d\beta}{dM}, \qquad \frac{d\gamma}{dM}$$

zu betrachten. Die Vergleichung der dritten Hypothese mit der ersten liefert ebenso die Differentialquotienten:

$$\frac{d\alpha}{d\mu}, \qquad \frac{d\beta}{d\mu}, \qquad \frac{d\gamma}{d\mu};$$

aus der Combination der vierten mit der ersten Hypothese ergeben sich:

$$\frac{d\alpha}{de}, \qquad \frac{d\beta}{de}, \qquad \frac{d\gamma}{de}.$$

Bezeichnet man die Werthe von α , β , γ der ersten Hypothese mit α_0 , β_0 , γ_0 , so darf nach dem Taylor'schen Lehrsatzes gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dM} \Delta M + \frac{d\alpha}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\alpha}{de} \Delta e &= \alpha \\ \beta_0 + \frac{d\beta}{dM} \Delta M + \frac{d\beta}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\beta}{de} \Delta e &= \beta \\ \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dM} \Delta M + \frac{d\gamma}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\gamma}{de} \Delta e &= \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

in welchen Gleichungen ΔM , $\Delta \mu$, Δe die gesuchten Verbesserungen von M , μ und e bedeuten.

¹⁾ Es sind hier zu grösserer Sicherheit nicht die Resultate aus einer ersten Anwendung des graphischen Verfahrens, sondern aus dessen Wiederholung zum Ausgangspunkte gemacht.

Was nun aber das Durchrechnen der einzelnen Hypothesen anlangt, so merken wir hier die Gelegenheit zu den bedeutendsten Abkürzungen und Erleichterungen. Die excentrischen Anomalien der zweiten Hypothese erhält man nämlich aus denen der ersten E, E', E'', E''' u. s. w., indem man die an M angebrachte Aenderung beziehungsweise mit:

$$\frac{1}{1 - e \cos E} \quad \frac{1}{1 - e \cos E'} \quad \frac{1}{1 - e \cos E''} \quad \frac{1}{1 - e \cos E'''} \text{ u. s. w.}$$

multiplcirt. Die excentrischen Anomalien der dritten Hypothese werden erhalten, indem man dieselben Factoren mit dem entsprechenden Increment der mittleren Anomalie multiplcirt und das Product zu E, E', E'', E''' addirt. Da der Differentialquotient von E nach e gleich:

$$\frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

ist, so hat man die in der vierten Hypothese vorgenommene Aenderung von e der Reihe nach mit:

$$\frac{\sin E}{1 - e \cos E} \quad \frac{\sin E'}{1 - e \cos E'} \quad \frac{\sin E''}{1 - e \cos E''} \quad \frac{\sin E'''}{1 - e \cos E'''} \text{ u. s. w.}$$

zu multipliciren, um die entsprechenden Aenderungen der excentrischen Anomalien zu haben.

Unter Anwendung der eben angegebenen ungemein grossen Erleichterungen wurden die folgenden Rechnungen geführt. Die sechs mittleren Anomalien der Hypothese I. findet man:

$$\begin{array}{ll} - 154^{\circ} 28' & - 0^{\circ} 59' \\ - 100^{\circ} 40' & + 16^{\circ} 26' \\ - 29^{\circ} 20' & + 56^{\circ} 22', \end{array}$$

woraus die excentrischen Anomalien der vier Hypothesen, wie folgt, hervorgehen:

Hypothese I. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,62$)	Hypothese II. (M für 1843,8 = 1°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,62$)	Hypothese III. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 140,58 J., $e = 0,62$)	Hypothese IV. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,63$)
— 164° 10'	— 163° 32'	— 165° 8'	— 164° 16'
— 128 29	— 127 45	— 129 12	— 128 48
— 60 9	— 58 41	— 60 35	— 60 52
— 2 35	+ 0 3	— 2 37	— 2 39
+ 38 36	+ 40 31	+ 38 55	+ 39 18
+ 91 52	+ 92 51	+ 92 25	+ 92 26

Nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$$

sind dann weiter die wahren Anomalien v, v', v'', v''' u. s. w. der vier Hypothesen berechnet worden. Die folgende Zusammenstellung enthält diese Werthe sowie die von α, β, γ in den vier Hypothesen:

I.	II.	III.	IV.
— 172° 17'	— 171° 59'	— 172° 46'	— 172° 28'
— 153 41	— 153 17	— 154 6	— 154 17
— 100 11	— 98 30	— 100 41	— 101 55
— 5 20	+ 0 6	— 5 24	— 5 34
+ 71 44	+ 74 37	+ 72 13	+ 73 42
+ 129 46	+ 130 31	+ 130 12	+ 130 55

	I.	II.	III.	IV.
$\alpha =$	0,2638	0,2599	0,2693	0,2733
$\beta =$	— 1,0252	— 1,8249	— 1,0208	— 0,9824
$\gamma =$	0,3095	0,2979	0,2995	0,2972

Durch Vergleichung der Hypothesen erhält man:

$\frac{d\alpha}{dM} =$	— 0,0039	$\frac{d\alpha}{d\mu} =$	0,0055	$\frac{d\alpha}{de} =$	0,0095
$\frac{d\beta}{dM} =$	— 0,7997	$\frac{d\beta}{d\mu} =$	0,0044	$\frac{d\beta}{de} =$	0,0428
$\frac{d\gamma}{dM} =$	— 0,0116	$\frac{d\gamma}{d\mu} =$	— 0,0100	$\frac{d\gamma}{de} =$	— 0,0123

wobei der Kürze halber die Incremente von M , μ und e , nämlich 1° , $0^{\circ},0254$ und $0,01$ beziehungsweise als Einheiten für die betreffenden Correctionen gewählt sind. Die Bedingungsgleichungen (A) werden somit:

$$\begin{aligned} - 0,0039 \Delta M + 0,0055 \Delta \mu + 0,0095 \Delta e &= 0,0025 \\ - 0,7997 \Delta M + 0,0044 \Delta \mu + 0,0428 \Delta e &= - 0,7910 \\ - 0,0116 \Delta M - 0,0100 \Delta \mu - 0,0123 \Delta e &= - 0,0196 \end{aligned}$$

Die Auflösung derselben ergibt:

$$\Delta M = 1^{\circ},033 \quad \Delta \mu = - 0,29 \times 0,0254 \quad \Delta e = 0,86 \times 0,01$$

oder:

$$\begin{aligned} T &= 1843,391 \\ U &= 142,413 \text{ Jahr} \\ e &= 0,6286 \end{aligned}$$

Mit diesen verbesserten Werthen ergeben sich die wahren Anomalien:

$$\begin{aligned} v &= - 171^{\circ} 47' & v''' &= + 0^{\circ} 17' \\ v' &= - 153^{\circ} 21' & v'''' &= + 76^{\circ} 16' \\ v'' &= - 99^{\circ} 48' & v''''' &= + 131^{\circ} 24' \end{aligned}$$

und:

$$\alpha = 0,2674 \quad \beta = - 1,7804 \quad \gamma = 0,2886$$

Die hier sich zeigenden Ungenauigkeiten der Darstellung entsprechen so geringen Differenzen im Positionswinkel, dass sie sich durchaus der praktischen Wahrnehmung entziehen. Drei von den sechs Normalörtern, z. B. den ersten, vierten und sechsten, können wir scharf darstellen, wenn wir die Formeln (I) bis (III) der Vorlesung 115 darauf zur Anwendung bringen. Diese Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \Omega &= 161^{\circ} 58' \\ \pi - \Omega &= 107^{\circ} 9' \\ i &= 54^{\circ} 25' \end{aligned}$$

Im Mittel geben diese Elemente die sechs Positionswinkel um $15'$ zu klein; wir fügen deshalb zur besseren Darstellung diese $15'$ zu Ω hinzu und haben dann folgende Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung:

	Rechn. — Beob.		Rechn. — Beob.
1782,87	+ 15'	1843,41	+ 15'
1804,09	— 4'	1850,28	— 12'
1832,23	— 27'	1866,03	+ 15'

Was die Kritik dieser Abweichungen betrifft, so sei hier nur bemerkt, dass die Distanz für 1832,23 nur $0''{,}5$ beträgt und dass die grösste obiger Differenzen, wenn man sie hiernach auf den grössten Kreis reducirt, einem Beobachtungsfehler von nur $0''{,}004$ entspricht.

Der Vollständigkeit halber bestimmen wir auch noch die halbe grosse Axe der wahren Bahn aus der beobachteten Distanz von 1825,21. Setzen wir $a = 1$, so würde nach den Formeln:

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)} \cdot \sin \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cdot \cos \frac{1}{2} E$$

für jene Epoche $v = -122^\circ 6'$, $\log r = 9,97908$, und nach den Formeln:

$$\varrho \cos(p - \Omega) = r \cos(v + \pi - \Omega)$$

$$\varrho \sin(p - \Omega) = r \cos i \sin(v + \pi - \Omega)$$

der Positionswinkel $= 153^\circ 21'$, $\log \varrho$ aber gleich $9,94843$ sich ergeben, während letzterer nach der Beobachtung gleich $9,98677$ ist. Die Differenz beider Logarithmen, d. h.:

$$0,03834$$

ist gleich $\log a$.

Stellen wir noch einmal sämtliche Elemente von ω Leonis zusammen:

$$T = 1843,391$$

$$i = 54^\circ 25'$$

$$U = 142,414 \text{ Jahr}$$

$$e = 0,6286$$

$$\Omega = 162^\circ 13'$$

$$a = 1''{,}092.$$

$$\pi - \Omega = 107^\circ 9'$$

Hundertundachtzehnte Vorlesung.

Einige Anwendungen der Doppelsternbahn-Methoden auf andere Theile der Fixsternastronomie. Berechnung der hypothetischen Parallaxe. Massenbestimmungen.

Zu den interessantesten Resultaten, welche durch Berechnung der Elemente einer Doppelsternbahn erlangt werden können, gehört die Aufstellung der Relation zwischen der Masse des Sternpaares und seiner Parallaxe. Wie schon in Vorlesung 111 erwähnt wurde, geht der uns geläufige Ausdruck für eine mittlere jährliche Bewegung unseres Sonnensystems:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{1+m'}}{a^{3/2}}$$

bei einem Doppelsystem über in:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{m+m'}}{a^{3/2} \operatorname{cosec} \Pi^{3/2}},$$

wenn in letzterer Gleichung m und m' die Massen beider Sterne, die Masse der Sonne als Einheit genommen, Π die Parallaxe des Sternpaares und a die halbe grosse Axe in Secunden ausgedrückt vorstellt. Die Grösse:

$$a \operatorname{cosec} \Pi$$

ist dabei offenbar nichts Anderes als die halbe grosse Axe der wirklichen Bahn, wenn die der Erdbahn als Einheit genommen wird. Unter Vernachlässigung der Masse der Erde, welche bei diesen Vergleichungen gar nicht in Betracht kommt, wird:

$$365,26 k = 360^\circ = 2\pi = 1 \text{ Umlauf};$$

da der Umlauf, dividirt durch μ , gleich der Umlaufszeit U , so haben wir:

$$a^{3/2} \operatorname{cosec} \Pi^{3/2} = U \cdot \sqrt{m + m'},$$

oder wegen der Kleinheit von Π , welche erlaubt, den Sinus mit dem Bogen zu identificiren:

$$\frac{a}{\Pi} = U^{2/3} (m + m')^{1/3}.$$

Man nennt die Grösse $\frac{a}{U^{2/3}}$, d. h. den Werth, welcher für Π als Werth der Parallaxe in Bogensekunden erhalten wird, wenn a , wie oben, in Bogensekunden ausgedrückt wird, und die Masse $m + m'$ des Sternpaares der Sonnenmasse oder richtiger der Masse der Sonne und Erde gleich angenommen wird, die hypothetische Parallaxe des Doppelsternes.

Die Folgen der Willkür einer solchen Annahme werden dadurch gemildert, dass nach der eben angeführten Gleichung aus $m + m'$ die Cubikwurzel zu ziehen wäre. Ausserdem haben die allerdings bis jetzt nicht zahlreichen Erfahrungen durch wirklich ausgeführte Parallaxenmessungen wahrscheinlich gemacht, dass unter den Fixsternen sehr grosse Verschiedenheiten der Masse selten sind und selbst in solchen Fällen sich nicht bestätigen, wo man nach den ausserordentlich grossen Verschiedenheiten der Helligkeit solche erwarten sollte.

Berechnen wir, um ein Beispiel der Anwendung der obigen Gleichung zu geben, die hypothetische Parallaxe von ω Leonis, wie sie den gefundenen Elementen entspricht, so erhalten wir:

$$\Pi = \frac{a}{U^{2/3}} = \frac{1'',092}{27,271} = 0'',040.$$

Es entspricht diese Parallaxe einer Entfernung von:

$$5,156\,000$$

Halbmessern der Erdbahn oder etwas über 100 Billionen Meilen, welche das Licht in 80 Jahren durchläuft.

Es ist klar, dass, wenn, wie bis jetzt in einigen wenigen Fällen bei Doppelsternen geschehen, die Parallaxe gemessen worden ist, durch obige Relation die Masse des Sternpaares gefunden wird. Die Bestimmung der einzelnen Massen m und m' selbst wird möglich, wenn man den Schwerpunkt des Systemes bestimmen kann, weil bekanntlich die Abstände der Componenten vom Schwerpunkte des Systemes den Massen umgekehrt proportional sind.

Die Kenntniss des Schwerpunktes wird erhalten durch eine sehr genaue Untersuchung der sogenannten Eigenbewegung des Sternpaares. Unter Eigenbewegung eines Fixsternes versteht man die Winkelgrösse, um welche derselbe, abgesehen von der Präcession, Nutation und Aberration, am Himmel seinen Ort, also seine Rectascension und Declination ändert. Diese kleine, aber mit der Zeit sehr merklich hervortretende Ortsveränderung ist die Folge der Bewegung der Fixsterne und unseres Sonnensystemes im Raume, einer Bewegung, welche bei den verschiedenen Fixsternen von sehr verschiedener Grösse und wegen der grossen Räume, durch welche die Fixsterne von einander getrennt sind, eine nicht merklich beschleunigte, d. h. eine geradlinige mit constanter Geschwindig-

Mittelst dieser Gleichung kann also leicht das Verhältniss der Masse m' des Nebensterne zu der Gesamtmasse bestimmt werden, da Positionswinkel und Distanzen durch die Bestimmung der Bahn des Systemes, die Rectascensionen und Declinationen des Hauptsterne durch Meridianbeobachtungen gegeben sind. Es existirt aber noch eine zweite Bedingung für obiges Verhältniss, indem verlangt wird, dass die Bögen des vom Schwerpunkte durchlaufenen grössten Kreises sich verhalten wie die zugehörigen Zeitintervalle.

Die strenge Formel für letztere Bedingung ist aus den Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie leicht herzuleiten.

In der Regel darf man sich, wie oben bemerkt, erlauben, statt der Bögen jenes grössten Kreises die Aenderung der Rectascensionen und Declinationen des Schwerpunktes der Zeit proportional zu setzen. Es wird dann verlangt, dass:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\alpha' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha' - \Delta \alpha)}{\alpha'' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha'' - \Delta \alpha)} \\
 & \frac{\delta' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta' - \Delta \delta)}{\delta'' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta'' - \Delta \delta)} = \frac{t' - t}{t'' - t}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)$$

werde.

Drei vollständige Bestimmungen des mittleren Ortes des Hauptsterne liefern zwei Gleichungen, überhaupt aber n Bestimmungen der Rectascension oder der Declination $n - 2$ Gleichungen, also n vollständige Bestimmungen des mittleren Ortes des Hauptsterne $2(n - 2)$ Gleichungen zur Ermittlung von $\frac{m'}{m + m'}$ und lassen unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate das wahrscheinlichste Resultat finden.

Hundertundneunzehnte Vorlesung.

Ueber die Berechnung einer Doppelsternebahn, wenn die eine Componente unsichtbar ist.

Bestimmungen mittlerer Oerter von Fixsterne von solcher Genauigkeit, dass sie zur Herleitung der Eigenbewegung herangezogen werden können, reichen nicht vor Bradley und Tobias Mayer zurück. So kurz der Zeitraum, den diese noch dazu nicht mit dem Mikrometer allein ausführbaren Beobachtungen umfassen, mit Fixsterneperioden im Allgemeinen verglichen, auch ist, so sind doch schon zwei der hellsten Sterne des Himmels, Sirius und Procyon, durch die Discussion ihrer Eigenbewegungen als Doppelsterne erkannt worden. Bessel fand bei seinen für die praktische Astronomie so epochemachend gewordenen Untersuchungen und Beobachtungen von mittleren Oertern und Eigenbewegungen die des Sirius und des Procyon veränderlich und zog daraus den vor wenigen Jahrzehnten noch als sehr kühn geltenden Schluss, dass die Erklärung für diese Veränderlichkeit in unsichtbaren Begleitern zu finden sei. In mathematischer Ein-

kleidung dieses Schlusses kann man sagen: wenn in Beziehung auf die Rectascensionen und die Declinationen des Sternes die Doppelgleichung (C) nicht so zu erfüllen steht, dass:

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'' - \alpha} = \frac{\delta' - \delta}{\delta'' - \delta} = \frac{t' - t}{t'' - t},$$

also die Eigenbewegungen veränderlich werden, kann im nächst einfachsten Falle nur durch die mit $\frac{m'}{m + m'}$ multiplicirten Glieder der obigen Gleichung die Erfüllung der Bedingung herbeigeführt werden. C. A. F. Peters hat in einer Abhandlung, die immer denkwürdig bleiben wird, zunächst bei dem Sirius das genannte Indicium weiter verfolgt und zum ersten Male die Bahn des damals unsichtbaren Begleiters bestimmt. Das Resultat dieser Rechnung ist seitdem durch die wirkliche Entdeckung dieses Körpers glänzend bestätigt worden.

Der zweite Stern, welcher zu einer Untersuchung dieser Art glückliche Gelegenheit bot, ist Procyon; nach den mit ausserordentlicher Sorgfalt ausgeführten Arbeiten von Auwers kennen wir die Bahn des Procyonbegleiters mit nicht geringerer Sicherheit als die des Siriusbegleiters; aber erst im Jahre 1896 wurde der Procyonbegleiter von Schaeberle auf der Licksternwarte entdeckt.

Wegen des ungemeinen Interesses solcher Untersuchungen auf das Vorhandensein dunkler Massen und deren Bahnbestimmungen wollen wir im Folgenden noch den Weg angeben, wie das Problem auf das der Bestimmung einer Doppelsternbahn der gewöhnlichen Art reducirt werden kann.

Es erscheint hier in noch höherem Grade, als bei dem leichteren Falle, gerathen, sich die erste Annäherung mit Zuziehung eines graphischen Verfahrens zu verschaffen. Wenn man das eine Mal den Betrag der Eigenbewegung in Rectascensionen, das andere Mal die Declinationsveränderungen dieser Art als Ordinaten der als Abscissen betrachteten Zeiten aufgetragen hat, so wird sich in praktischen Fällen beinahe immer sogleich eine Schätzung der Umlaufszeit und des mittleren Werthes der Eigenbewegung erlangen lassen. Nehmen wir zunächst der Einfachheit halber an, die Beobachtungen umfassen mindestens einen Umlauf (was auch mit Rücksicht auf den praktischen Erfolg der Rechnung gegenwärtig noch immer sehr wünschenswerth bleibt), so wird man leicht diejenigen Punkte der Rectascensionencurve und ebenso der Declinationencurve erkennen, die um einen Umlauf von einander abstehen; denn in diesen Punkten werden bei gleichem Sinne der Aenderung die Tangenten parallele Richtung haben müssen. Wenn man die zwischen je zwei solchen Punkten vorkommende Eigenbewegung, also die Differenz der Ordinaten, durch die Differenz der Abscissen dividirt, so erhält man die mittlere jährliche Eigenbewegung. Es sei letztere gleich n für die Rectascensionen, gleich q für die Declinationen, so wird man unter Zuziehung von anderen Punkten der Curve eine Reihe von Gleichungen folgender Form erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) &= n (t' - t) \\ \alpha'' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha'' - \Delta \alpha) &= n (t'' - t) \\ \alpha''' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha''' - \Delta \alpha) &= n (t''' - t), \end{aligned}$$

desgleichen für die Declination:

$$\delta' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta' - \Delta \delta) = q (t' - t)$$

$$\delta'' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta'' - \Delta \delta) = q (t'' - t)$$

$$\delta''' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta''' - \Delta \delta) = q (t''' - t).$$

Man erkennt sofort, dass es nur noch der Kenntniss von zweien der Grössen:

$$\begin{array}{cccc} \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha'' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha''' \\ \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta'' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta''' \end{array}$$

bedarf, um die übrigen und dann die vier Positionswinkel und $\frac{m'}{m + m'}$ -fache der Distanzen abzuleiten. Für den Fall, dass die Umlaufszeit gegeben ist, würden sogar zwei dieser abgeleiteten Grössen für die Bestimmung der Bahn überflüssig sein; daher man, wie folgt, verfahren kann. Man entwirft für:

$$\frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta$$

eine Hypothese, und leitet, wie eben gezeigt, daraus:

$$p, p', p'', \quad \frac{m'}{m + m'} q \quad \frac{m'}{m + m'} q' \quad \frac{m'}{m + m'} q''$$

ab. Durch das Auftragen dieser Coordinaten um den Ort des Hauptsternes als Nullpunkt herum werden drei Punkte der hypothetischen scheinbaren Bahn erhalten, welche der Doppelbedingung genügen müssen, dass die Sektoren einer durch diese Punkte gelegten Ellipse zwischen dem ersten und zweiten, zwischen dem ersten und dritten und der Inhalt der ganzen Ellipse sich so verhalten, wie es die Zeitintervalle und die Umlaufszeit verlangen. Ist dem genügt, so lässt sich die Bahn nach den bekannten Vorschriften finden, wenigstens der Form und Lage nach, von der scheinbaren Dimension der Bahn aber nur die Entfernung des Sternes vom Schwerpunkte, d. h. analog unserer früheren Bezeichnung die Grösse:

$$\frac{m'}{m + m'} a.$$

Kann die Umlaufszeit nicht als gegeben angesehen werden, so muss die combinirte Hypothese über:

$$\frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta$$

auch noch auf die mittlere Bewegung ausgedehnt werden. Es genügen aber alsdann aus bekannten Gründen nicht drei Epochen, sondern es muss eine vierte zugezogen werden, um drei Sektoren in Beziehung auf ihre Fläche vergleichbar zu machen und so die Fehler der Hypothese ermitteln zu können. Die Versuche im Rohen sind natürlich auch hier wieder durch das graphische Verfahren sehr zu erleichtern. —

Ehe wir nun zum Schluss zu einigen interessanten Anwendungen übergehen, mögen des grossen Interesses wegen, welches sie beanspruchen, hier noch die von H. Seeliger gegebenen Ausführungen über Doppelsterne Platz finden. —

Hundertundzwanzigste Vorlesung.

Ueber Doppelsterne (nach Seeliger)¹⁾.

Einen physischen Doppelstern bilden zwei Sterne, wenn ihre gegenseitige Entfernung so klein ist, dass die Einwirkung der übrigen Fixsterne auf ihre relative Bewegung vernachlässigt oder wenigstens als nebensächlich betrachtet werden darf. Stehen zwei Sterne nur scheinbar in grosser Nähe bei einander, so entsteht ein optischer Doppelstern. Das Vorkommen eines solchen ist den Gesetzen des Zufalles unterworfen, und es ist deshalb eine wohl definirte mathematische Aufgabe, die zu erwartende Anzahl optischer Doppelsterne von gegebenem scheinbaren Abstände zu berechnen, wenn Anzahl und Vertheilung der Sterne im Raume bekannt sind. Da eine strenge Lösung dieser Aufgabe nicht vorliegt, entbehren die gewöhnlich angeführten Angaben über die zu erwartende Anzahl von optischen Doppelsternen der genügend sicheren Grundlage. Leicht kann man sich aber davon überzeugen, dass die Anzahl hellerer optischer Doppelsterne von kleiner Distanz nicht bedeutend sein kann, und in diesem Sinne kann man in der That behaupten, dass die Componenten der überwiegenden Mehrzahl der vielen bekannten Doppelsterne nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit physisch mit einander verbunden sein werden. Man hat, zum Theil aus äusserlichen Gründen, nach dem Vorgange von W. Struve, als Maximaldistanz eines Doppelsternes im engeren Sinne 32" festgesetzt. In der That werden der Hauptsache nach die Systeme mit schnellerer Revolutionsbewegung hierdurch umgrenzt.

Dass die Entdeckung zahlreicher engerer Doppelsterne einer mit optischen Hilfsmitteln besser ausgerüsteten Zeit vorbehalten bleiben musste, ist selbstverständlich. Indessen sind vereinzelt schon sehr frühe Doppelsterne aufgefunden worden. So z. B. α Centauri von Feuillée im Jahre 1709, γ Virginis, Castor, 61 Cygni von Bradley etc. Dass dies aber nicht vereinzelte Fälle seien, dass vielmehr eine grössere Anzahl von Doppelsternen am Himmel existiren, hat zuerst Christian Mayer, Hofastronom in Mannheim, gezeigt. Er suchte nicht nur nach solchen Objecten, sondern bestimmte auch die Rectascensions- und Declinationsdifferenzen der beiden Componenten mit einem achtfüssigen Bird'schen Mauerquadranten. Diese Thatsache kann nicht verdunkelt werden durch die nicht ganz einwandfreien Bemerkungen, welche die erste Publication Mayer's²⁾ über diesen Gegenstand enthält und die zu Missverständnissen Anlass gebende von ihm gebrauchte Bezeichnung „Fixsterntabanten“. Die Astronomen standen übrigens den Mayer'schen Entdeckungen nicht gleichgültig gegenüber, was aus dem Umstande hervorgeht, dass im Berliner Jahrbuche für 1784, das im Jahre 1781 erschien, ein „Verzeichniss aller bisher entdeckten Doppelsterne“, die „fast alle von Herrn Hofastronom Mayer auf der Churfürstlichen Sternwarte zu Mannheim zuerst beobachtet worden sind“, abgedruckt ist. Dieses Verzeichniss enthält 79 Doppelsterne, und zwar zum grössten Theile begreiflicherweise sehr weite (bis 72" Distanz). Es scheint sowohl Mayer, als auch dem Herausgeber des Jahrbuches Bode sehr fern gelegen zu haben, diese oder auch

¹⁾ Mit Genehmigung des Herrn Verfassers aus dem Handwörterbuche der Astronomie, herausgegeben von W. Valentiner, Bd. I, S. 671 bis 696, abgedruckt.

²⁾ Gründliche Vertheidigung neuer Beobachtungen von Fixsterntabanten etc. 8^o. Mannheim 1778.

nur einen Theil dieser Doppelsterne als physische zu betrachten, denn es wird das astronomische Interesse an solchen Systemen ausdrücklich darin gefunden, dass die fortschreitende relative Eigenbewegung der beiden Fixsterne in Folge ihres scheinbaren Nebeneinanderstehens leichter bemerkt und genauer bestimmt werden könne, was offenbar nur bei optischen Doppelsternen einen Sinn hat. Von nicht wesentlich anderen Gedanken wurde W. Herschel bei seinen ersten Forschungen über Doppelsterne geleitet. Auch er dachte nur an optische Systeme und suchte nach solchen, ohne Mayer's Bemühungen zu kennen. Nun sollten enge Doppelsterne die Messung der jährlichen parallaktischen Verschiebungen erleichtern und also die Auffindung der ersten Werthe von Fixsternparallaxen ermöglichen. Von allem Anfange an waren seine Nachforschungen nach Doppelsternen sehr ergiebig, und bereits am 10. Januar 1782 konnte er der Royal Society einen Katalog von 269 Doppelsternen vorlegen. Die eigentliche Bedeutung der Herschel'schen Entdeckungen erkannte aber erst Michell¹⁾, der das Vorkommen so vieler scheinbar nahe bei einander stehender Sterne als mit den Gesetzen des Zufalles unvereinbar erklärte und betonte, dass die meisten dieser Doppelsterne thatsächlich nahe bei einander stehende Weltkörper seien, die sich nach den Gesetzen der Gravitation um einander bewegen müssen. Diese Ansicht wurde durch die ferneren Arbeiten W. Herschel's bestätigt, die in Folge dessen in dem Gebiete der Doppelsternastronomie von grundlegender Bedeutung sind. Herschel begnügte sich in der Folgezeit nicht damit, neue Doppelsterne zu entdecken. Vielmehr suchte er nach Verlauf eines angemessenen Zeitraumes die ihm bekannt gewordenen Doppelsterne wieder auf und konnte in mehreren Fällen eine Veränderung in der gegenseitigen Stellung beider Sterne nachweisen. Allerdings hätte diese auch eine Folge der als geradlinig anzusehenden Eigenbewegungen sein können, aber es waren so die Grundlagen gegeben, um (wenigstens theoretisch) durch eine dritte Messung auch den letzten Zweifel an dem Vorhandensein wirklicher Doppelsterne zu zerstören.

Endlich gebührt W. Herschel das Verdienst, zuerst in klarer Weise erkannt zu haben, welcher Art die Beobachtungen sein müssen, um als Grundlage für Betrachtungen über etwaige Revolutionsbewegungen dienen zu können. Mayer hatte, ähnlich wie es durch die jetzt üblichen Meridianbeobachtungen geschieht, die Rectascension und Declination der beiden Componenten bestimmt, ein Verfahren, das nicht die nöthige Genauigkeit gewähren konnte, bei engen Doppelsternen überdies kaum anwendbar ist. W. Herschel dagegen bestimmte die gegenseitige Stellung beider Sterne mit Hülfe von Mikrometermessungen, und zwar in einer Weise, welche auch die Folgezeit als die zweckmässigste anerkennen musste. Der hellere der beiden Sterne wurde als Hauptstern und als das Bezugsobject für die Angaben des Ortes des schwächeren betrachtet. Die letzteren enthielten die beiden Polarcoordinaten: Distanz und Positionswinkel. Distanz ist der scheinbare Abstand beider Sterne, und Positionswinkel der Winkel, den die Distanz mit einem festen, durch den Hauptstern gehenden grössten Kreis bildet. Den Positionswinkel hat W. Herschel nicht immer von derselben Nullrichtung an gezählt und durch Angabe des Quadranten jeden Zweifel zu beheben gesucht. Die Folgezeit hat in dieser an sich ohne Frage nebensächlichen Angelegenheit ein vereinfachtes und allgemein angenommenes Verfahren ausgebildet. Man zählt seit W. Struve den Positionswinkel vom nördlichen Theile des Stundenkreises in der Richtung Ost, Süd, West, Nord. Steht also der Begleiter genau nördlich über dem Hauptsterne, so ist der Positionswinkel 0° zu notiren.

¹⁾ Michell, On the means of discovering the distance, magnitude etc. of the Fixed Stars etc. Philosophical Transact. 1783, Nov. 27.

Die Resultate seiner Entdeckungen und Messungen hat W. Herschel in den Jahren 1782, 1785 und 1804 zusammengestellt. Diese enthalten Angaben über etwa 700 Doppel- und mehrfache Sterne; eine sehr schätzbare Zusammenstellung dieser Resultate verdankt man J. Herschel¹⁾.

Wie in vielen anderen Gebieten der Astronomie, setzte auch hier der Sohn die grossartige Thätigkeit des Vaters fort. John Herschel hat nicht nur den nördlichen Himmel in dieser Richtung, in der ersten Zeit in Gemeinschaft mit South, auf das Eifrigste durchforscht, sondern die Gelegenheit, welche ihm sein so reich gesegneter Aufenthalt am Cap der guten Hoffnung darbot, auch für die Doppelsterne in der ergiebigsten Weise ausgenutzt. Die verschiedenen von ihm publicirten Zusammenstellungen beziehen sich auf etwa 6000 Doppelsterne, von denen etwa 2000 der südlichen Halbkugel angehören²⁾.

Am meisten und nachdrücklichsten aber wurde nach W. Herschel die Kenntniss der Doppelsterne gefördert durch W. Struve. Seine Bemühungen, durch Aufsuchen neuer Systeme und Bestimmung ihrer Positionen das Fundament für eine Astronomie der vielfachen Sterne zu legen, beginnen bereits um das Jahr 1813. In der ersten Zeit mit sehr beschränkten Hilfsmitteln arbeitend, konnte er seine weitreichenden Absichten erst voll ins Werk setzen, als er in Fraunhofer's berühmtem Refractor von 9 Zoll Oeffnung ein ausgezeichnetes, für die damalige Zeit sogar unvergleichliches Hilfsmittel erhielt. Der Plan, welcher im Laufe der folgenden Jahre wirklich zur Ausführung kam, erstreckte sich auf folgende Aufgaben:

1. Möglichst alle vielfachen Sterne zwischen dem Nordpole und -15° Declination, deren Distanz kleiner als $32''$ und deren schwächster Stern nicht schwächer als von der neunten Grösse ist, aufzusuchen und zu katalogisiren.

2. Die gefundenen Systeme mikrometrisch so genau und so oft als möglich auszumessen und hierbei Notirungen über das Aussehen der Sterne, namentlich ihrer Farbe zu machen.

3. Die mittleren Orte aller dieser vielfachen Sterne mit dem Meridiankreise zu bestimmen.

Die zwei ersten Aufgaben hat Struve ganz allein mit grosser Energie durchgeführt, wie die berühmten Publicationen³⁾ der gewonnenen Resultate zeigen. Bei der dritten Aufgabe musste er bald, von den beiden ersten völlig in Anspruch genommen, auf die Mitarbeiterschaft von Preuss, später auch Döllen rechnen. Für den vorliegenden Gegenstand bieten selbstverständlich die „Mensurae microm.“ das grösste Interesse, es wird deshalb wohl angebracht sein, einige Einzelheiten über dieses Werk, wenn auch nur in grösster Kürze, zu erwähnen.

Struve hat die gefundenen Doppelsterne nach zwei Gesichtspunkten in Gruppen eingetheilt: erstens nach der Grösse der Distanz, indem er acht Classen in gleich zu erwähnender Weise unterschied, zweitens nach der Helligkeit der beiden Componenten. Er nennt die Doppelsterne entweder „lucidae“ oder „reliquae“, je nachdem keiner der beiden Sterne schwächer als achter Grösse oder dies wenigstens bei einem der Fall ist. Die Mens. micr. enthalten nun folgende Anzahlen von Doppelsternsystemen:

¹⁾ A Synopsis of all Sir William Herschel's micrometrical Measurements etc. Memoirs of the R. Astr. Society London, Vol. 35.

²⁾ In vielen Bänden der Memoirs of the R. Astr. Society, London. Dann auch in dem grossen Werke: „Results of Astronomical Observations of the Cape of Good Hope“ 1847.

³⁾ Catalogus novus stellarum duplicium etc. Dorpat 1827. Mensurae micrometricae stellarum etc. St. Petersburg 1837.

Classe	Distanz	lucidae	reliquae
1 . . .	0" — 1"	62	29
2 . . .	1" — 2"	116	198
3 . . .	2" — 4"	133	402
4 . . .	4" — 8"	130	452
5 . . .	8" — 12"	54	298
6 . . .	12" — 16"	52	179
7 . . .	16" — 24"	54	429
8 . . .	24" — 32"	52	
Summa		653	1987

Hierzu kommen noch 72 Paare, welche, obwohl ausserhalb des Arbeitsprogrammes liegend, gemessen worden sind, nämlich 28, bei denen der Begleiter schwächer als neunter Grösse ist, und 44 von einer Distanz $> 32''$. Diese 2712 Paare sind aber nur 2641 von einander verschiedene Systeme, weil die mehrfachen Sterne bei der vorgenommenen Classification zugleich in mehreren Classen erscheinen. Die ganze Eintheilung Struve's ist übrigens willkürlich und dürfte wohl kaum als praktisch anerkannt werden, sie wird auch in der neueren Zeit nicht mehr gebraucht.

Durch W. Struve's¹⁾ Arbeiten wurden die Doppelsterne in den Vordergrund des astronomischen Interesses gerückt und eine grössere Anzahl von Beobachtern widmet seither diesem Gebiete ihre Kräfte. Zuerst ist Otto Struve²⁾ zu erwähnen, welcher seit 1840 bis vor kurzer Zeit die Doppelsternwelt durchforschte und hierin seine Lebensaufgabe fand. Ihm schliessen sich in würdiger Weise an: Dawes³⁾, Dembowski⁴⁾, Dunér⁵⁾ und in neuester Zeit Schiaparelli⁶⁾, A. Hall und H. Struve. Ferner sind noch als verdiente Doppelsternbeobachter u. A. zu erwähnen: Mädler, Kaiser, Secchi, Fletcher, Engelmann, Jedrzejewicz, Glasenapp, Lewis, Seabroke, Gledhill, Wilson, die Beobachter der englischen Privatsternwarten von Barclay, Bishop und Lord Wrottesly u. s. f.

Trotz so vielfacher Bethheiligung war aber die Anzahl bekannter Doppelsterne in den letzten Jahrzehnten verhältnissmässig wenig grösser geworden. Es musste deshalb nicht geringes Aufsehen machen, als Burnham⁷⁾ in den siebziger Jahren mit vergleichsweise geringen optischen Hilfsmitteln eine grössere Anzahl neuer, zum Theil sehr enger und lichtschwacher Doppelsterne auffand. Nicht selten waren es Struve'sche Doppelsterne, die sich durch Auffindung eines nahen oder lichtschwachen Begleiters als mehrfach erwiesen. Diese Entdeckungen, die sich später sehr vermehrten, als Burnham in dem 36zölligen Refractor der Licksternwarte ein überaus mächtiges Hilfsmittel erhielt, versprachen für die Zukunft eine reiche Ausbeute an schnell bewegten Doppelsternsystemen, haben in den letzten Jahren auch schon zur Kenntniss sehr interessanter Objecte geführt. Burnham's verschiedene Kataloge enthalten bis jetzt etwa

¹⁾ Stellarum fixarum imprimis duplicium etc. positiones mediae 1852.

²⁾ Zahlreiche kleinere Arbeiten und Mittheilungen Otto Struve's über Doppelsterne finden sich in den Schriften der Petersburger Akademie. Die zahlreichen Messungen engerer Doppelsterne sind zusammengestellt und eingehend bearbeitet in „Observations de Poulcova, Tome IX“.

³⁾ Die Beobachtungen von Dawes sind gesammelt in Memoirs of the R. Astr. Society, London, Bd. 35.

⁴⁾ Misure micrometriche di stelle doppie etc. Roma 1883 und 1884.

⁵⁾ Mésures micrométriques d'étoiles doubles. Lond. 1876.

⁶⁾ Osservazioni sulle stelle doppie. Pubblicazioni del reale Osservatorio di Brera in Milano, No. XXXIII, 1888.

⁷⁾ Memoirs of the R. Astr. Society, London. Bd. XLVII.

1300 neue Objecte¹⁾. Im Ganzen werden gegenwärtig an 12000 mehrfache Sterne bekannt sein, von denen etwa 10 Proc. mehr oder weniger deutliche Revolutionsbewegungen aufweisen. Diese Abschätzung beruht auf folgenden Angaben: J. Herschel²⁾ hat ein Verzeichniss der ihm bekannten mehrfachen Sterne hinterlassen, welches 10300 Objecte enthält. Nicht inbegriffen sind die Burnham'schen Sterne, sowie die, allerdings nicht zahlreichen, in den letzten Jahren von anderen Astronomen gefundenen. Noch mag erwähnt werden, dass man die Doppelsterne mit Vorliebe nach den von den um diesen Zweig der Astronomie verdientesten Astronomen bezeichnet, indem die Nummern der von ihnen herausgegebenen Kataloge citirt werden. Es ist üblich, W. Struve mit Σ , Otto Struve mit $O\Sigma$, Dawes mit D , Dembowski mit \mathcal{A} , Dunér mit Du , Burnham mit β , Schiaparelli mit Sp zu bezeichnen. So wird z. B. ξ Cancri auch Σ 1196 benannt.

Viel ist, namentlich in früherer Zeit, über die Farben der Doppelsterne geschrieben worden. W. Struve hat, wie schon erwähnt, die Untersuchung dieses Gegenstandes in sein Arbeitsprogramm aufgenommen. Im Ganzen hat er unter 596 Systemen gefunden: 375 Paare von gleicher Farbe, 101 Paare von wenig verschiedener Färbung und 120 Paare, deren Componenten sehr verschieden gefärbt sind. Diese Aufzählung dürfte jedenfalls der vielfach ausgesprochenen Meinung entgegnetreten, dass sehr verschiedene Färbung beider Componenten, namentlich in complementärem Sinne, das gewöhnliche Vorkommniss sei. Doppler³⁾ hat in Verfolgung dieser Ansicht die Meinung ausgesprochen, dass bei Doppelsternen mit schneller Revolutionsbewegung die Neigung zu complementärer Färbung sich aus den Gesetzen der Wellenbewegung des Lichtes ableiten lasse. Wenngleich die Folgezeit diese Meinung als irrig erkannt und das dem erwähnten Gedanken zu Grunde liegende „Doppler'sche Princip“ in einigen, allerdings nicht wesentlichen Punkten modificirt hat, so bildet dasselbe doch ein überaus wichtiges Fundament, welches in den letzten Jahren zu wichtigen und interessanten Ergebnissen und Entdeckungen geführt hat. — Zur Erklärung der Farbenverschiedenheit der beiden Componenten eines Doppelsternes dürfte es oftmals ausreichen, in Erinnerung zu behalten, dass an sich geringe Farbenunterschiede sehr nahe bei einander stehender Objecte leichter bemerkbar werden. Während allerdings einerseits durch Versuche an besonders auffällig gefärbten Sternpaaren gezeigt worden ist, dass die Contrastwirkung nicht Alles zu erklären vermag, muss andererseits hervorgehoben werden, wie unsicher bisher alle Angaben, welche sich auf die Sternfarben beziehen, sind. Der Fall kommt nicht selten vor, dass ein Beobachter sehr intensive Farben wahrzunehmen glaubt, die ein anderer nicht oder wenigstens nicht mit Sicherheit wahrnehmen kann. So hat sich ein so erfahrener Beobachter wie J. Herschel stets sehr skeptisch gegenüber der ganzen Angelegenheit verhalten. Seiner Meinung nach kommen überhaupt nur Färbungen aus dem weniger brechbaren Theile des Spectrums (roth, gelb) bei Sternen in ausgesprochenem Grade vor, und blaue Sternfarben seien stets nur Folge der Contrastwirkung naher röthlicher Sterne. Die Anwendung der Spectralanalyse wird auch in dieser Frage mit der Zeit Klarheit schaffen, da die Feststellung der für die Gesamtfarbe maassgebenden Zusammensetzung des Spectrums nicht subjectivem Urtheile preisgegeben ist. An sich ist nicht unwahrscheinlich, dass die Componenten der Doppelsterne sich häufig in sehr

¹⁾ Eine Uebersicht über Burnham's Arbeiten giebt der zweite Band der „Publications of the Lick Observatory“, Sacramento 1894.

²⁾ A Catalogue of 10300 multiple and double Stars. Memoirs of the R. Astr. Society, London, Vol. 40.

³⁾ Ueber das farbige Licht der Doppelsterne etc. Prag 1842.

verschiedenen Stadien der Abkühlung befinden müssen. Dann werden ihre Spectren verschieden sein und in Folge dessen auch ihre Färbung.

Von der grössten Bedeutung für die Astronomie wurden die Doppelsternmessungen, als sie anfangen, deutlich Revolutionsbewegungen zu enthüllen, und als es mit ihrer Hilfe gelang, die Einsicht zu erlangen, dass diese, ebenso wie alle Bewegungen im Planetensysteme, durch die Folgerungen des allgemeinen Attractionsgesetzes dargestellt werden können. Die Aufgabe, aus den gemessenen Positionswinkeln und Distanzen die Elemente einer Doppelsternbahn abzuleiten, wurde auf Anregung von Seite Arago's zuerst von dem leider früh verstorbenen Felix Savary¹⁾, und zwar in durchaus correcter Weise gelöst. Denselben Gegenstand hat später Encke²⁾ behandelt, ohne indessen, ausser in weniger belangreichen Dingen, die Savary'sche Lösung zu überholen. Von den zum Theil primitiven graphischen Methoden J. Herschel's³⁾ und den Vorschriften, welche Y. Villarceau⁴⁾ im Anschlusse an die in der Mécanique céleste zur Berechnung einer Planetenbahn gegebenen entwickelt hat, darf wohl behauptet werden, dass sie einen Fortschritt in dem vorliegenden Thema nicht gebildet haben. Dagegen hat J. Herschel⁵⁾ und unabhängig von ihm, wenn auch Jahrzehnte später, Villarceau⁶⁾ eine Methode entwickelt, die in den meisten Fällen in grosser Kürze und mit Sicherheit die Berechnung einer Doppelsternbahn auszuführen erlaubt. Der Grundgedanke dieser Methode kommt im Folgenden zu kurzer Auseinandersetzung und führt in der elementarsten und einfachsten Weise zu äusserst leicht ausführbaren Rechenvorschriften. In neuerer Zeit hat das Problem durch Klinkerfues⁷⁾ und Thiele⁸⁾ beachtenswerthe Lösungen erfahren, die auch in der Praxis von Wichtigkeit werden können.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob die beobachteten Bahnbewegungen der Doppelsterne einen directen Beweis für die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes auch in jenen abgelegenen Fixsternräumen enthalten. Dass letzteres den Beobachtungen genügt, ist schon oben als bestätigt erwähnt worden. Die Untersuchung, ob kein anderes Gesetz dieselbe scheinbare Wirkung hat, gestaltet sich ganz anders, als bei den Planetenbewegungen, weil hier die Beobachtungen nur über die Ortsveränderungen in der auf der Gesichtslinie senkrechten Ebene Aufschluss geben und über die Bewegung im Visionsradius gar nichts aussagen. Die Aufgabe führt auf ein interessantes mathematisches Problem. Dasselbe, von Bertrand⁹⁾ zuerst formulirt, wurde vollkommen gelöst von Darboux und Halphén¹⁰⁾ und im Anschlusse an den letzteren in sehr eleganter Weise von Tisserand¹¹⁾. Nach diesen Arbeiten ist allerdings, wenn nur gewisse höchst plausible Annahmen hinzugezogen werden, nur das Newton'sche Gesetz im Stande, die beobachteten Doppelsternbewegungen zu erklären. Ganz anders gestaltet sich aber die Sachlage, wenn man auf den Umstand Rücksicht nimmt, dass die zu Grunde liegenden Messungen vermöge der bedeutenden Ungenauigkeiten, welche ihnen anhaften, durchaus nicht eine bestimmte Bewegungsform mathematisch genau definiren, vielmehr nur gewisse Grenzen anzugeben im Stande sind, innerhalb welcher

¹⁾ *Connaissance des temps* für 1830 addit.

²⁾ *Berliner Astronomisches Jahrbuch* für 1832.

³⁾ *Memoirs of the R. Astr. Society*, London, Bd. 5.

⁴⁾ *Connaiss. d. t.* für 1852 add.

⁵⁾ *Memoirs of the R. Astr. Society*, London, Bd. 18.

⁶⁾ *Connaiss. d. t.* für 1877 add.

⁷⁾ *Theoretische Astronomie*, Braunschweig 1877. Auch *Astr. Nachr.* Nr. 990.

⁸⁾ *Astr. Nachr.*, Bd. 104.

⁹⁾ *Compt. rend.*, Bd. 84.

¹⁰⁾ *Ebenda.*

¹¹⁾ *Bulletin astronomique*, Tome IV, 1887.

die Abweichungen von der Theorie liegen müssen. Diese Grenzen sind aber ziemlich weite, weil bei engeren Doppelsternen z. B. Fehler in Distanz von 5 bis 10 Proc. und darüber durchaus nicht selten vorkommen. Da man ferner etwaige Zweifel an der Allgemeingültigkeit des Newton'schen Gesetzes doch nur auf kleinere Abweichungen desselben von der Wahrheit beziehen wird, so muss man zugeben, dass die bisher berechneten Doppelsternbahnen durchaus nicht im Stande sind, in der besprochenen Frage beweiskräftig zu wirken. Im Folgenden wird ein hierher gehöriges Beispiel erwähnt werden. Der vielfache Stern ξ Cancri zeigt zum Theil Bewegungen, die, trotzdem dieselben in Wahrheit sehr verwickelte Störungsbewegungen sind, doch durch die Kepler'schen Gesetze, wenigstens innerhalb längerer Zeiträume, genügend dargestellt werden können.

Ehe man dazu schreiten kann, die vorhandenen Messungen eines Doppelsternes zu einer Bahnbestimmung heranzuziehen, muss überlegt werden, welche Correctionen man an sie anzubringen hat, um ein homogenes Material zu erlangen. Refraction, Aberration, Nutation haben auf die Messungen der engen Doppelsterne, welche hier in Frage kommen, nur einen verschwindend kleinen Einfluss. Ebenso kann in den meisten Fällen die Einwirkung der Präcession auf den Positionswinkel unbedenklich vernachlässigt werden. Dieselbe ist indessen so einfach zu berechnen, dass man die damit verbundene Mühe nicht scheuen wird. Bezeichnen p_0 und p die zu den Zeiten t_0 und t gehörigen Positionswinkel, α und δ Rectascension und Declination des Doppelsternes, so hat man nämlich:

$$p = p_0 + 0^{\circ},0056 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0).$$

Ganz anders verhält es sich mit gewissen Messungsfehlern, die, in systematischer Weise auftretend, der Person des Beobachters eigenthümlich sind und deshalb persönliche Fehler genannt werden. Es ist das Verdienst Bessel's und W. Struve's, auf das Vorkommen solcher Fehler hingewiesen zu haben, als sie ihre gleichzeitigen Messungen gemeinsam beobachteter Objecte verglichen. Dann aber hat besonders O. Struve, die Wichtigkeit des Gegenstandes erkennend, zuerst eingehende Untersuchungen über die persönlichen Fehler, mit denen seine eigenen Beobachtungen in hohem Grade behaftet sind, angestellt. Es hat sich gezeigt, dass verschiedene Umstände, wie die Stellung des Sternpaares gegen die Verticale, die Grösse der Distanz, vielleicht auch die Helligkeit der Sterne maassgebend auf die Messung einwirken. Ferner hat sich die sehr unangenehme Thatsache herausgestellt, dass zeitliche Aenderungen in den persönlichen Fehlern nicht selten sind und manchmal in sehr merkbarem Betrage zum Vorschein kommen. Thiele¹⁾ konnte das bei mehreren Beobachtern in unzweideutiger Weise nachweisen. Es ist begreiflich, dass unter solchen Umständen die persönlichen Beobachtungsfehler, die z. B. bei O. Struve den Positionswinkel unter Umständen um mehrere Grade verfälschen, genaueren Untersuchungen über die Bewegungen der Doppelsterne grosse Schwierigkeiten bereiten und dass der Berechner niemals unterlassen darf, auf sie gehörig Rücksicht zu nehmen. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit derselben sind solche Untersuchungen aber mit grossen Unsicherheiten behaftet, die nur durch vielfache Vergleichen der Resultate verschiedener Beobachter verringert werden können. Solche Vergleichen wurden in neuerer Zeit in der That angestellt, noch ist aber manche Lücke in dieser Beziehung auszufüllen.

¹⁾ Castor, Calcul du mouvement relatif etc. Kopenhagen 1879.

Wie schon erwähnt, wird bei der Bahnrechnung eines Doppelsternes die unbedingte Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes vorausgesetzt. Wir haben also anzunehmen, dass die beiden Componenten eines Doppelsternes sich nach den Kepler'schen Gesetzen um einander bewegen. Diese Annahme können wir, da nur geschlossene Bahnen in Betracht gezogen werden sollen, so formuliren: der eine Stern beschreibt um den anderen (den Hauptstern) eine Ellipse und hält hierbei das Gesetz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit ein. Diese Bewegung wird von dem sehr weit entfernten Beobachter betrachtet und es werden demzufolge nur die Veränderungen in der gegenseitigen Stellung der Projectionen der beiden Sterne in einer Ebene bemerkbar sein, welche senkrecht zur Gesichtslinie steht. Es ist leicht zu sehen, wie sich diese scheinbare Bewegung gestaltet. Die scheinbare Bahn wird wieder eine Ellipse sein; der Hauptstern wird aber nicht in ihrem Brennpunkt, sondern irgendwo im Inneren stehen. Das Gesetz der Flächen aber wird bekanntlich nach wie vor gelten. Die Kenntniss der scheinbaren Bewegung genügt indess, wie wir sehen werden, vollständig zur Bestimmung der wahren Bewegung.

Wir haben zunächst festzusetzen, wie viele und welche Bestimmungsstücke die wahre Bewegung bestimmen. Grösse und Gestalt der wahren Ellipsen sind gegeben durch die grosse Halbaxe a und die Excentricität e . Die Lage der Bahnebene wird bestimmt durch die Neigung i gegen die Projectionsebene und die Länge des Knotens Ω auf letzterer. Wir wollen Ω von demselben Anfange und in derselben Richtung wie die Positionswinkel zählen. Es mag gleich hier bemerkt werden, dass, falls i stets positiv und kleiner als 90° angenommen wird, Ω nicht eindeutig bestimmt werden kann. Da offenbar die scheinbare Bewegung entstehen kann durch eine wahre in einer Ebene mit der Neigung $=i$ oder auch $-i$, so ist es erlaubt, nach Belieben den Werth von Ω um 180° zu ändern. Man hat sich aber für einen der beiden gleichberechtigten Werthe von Ω zu entschliessen, alles Andere ist dadurch unzweideutig gegeben. Die Lage der wahren Ellipsen in ihrer Ebene wird durch den Winkel λ bestimmt, welchen die grosse Axe mit der Knotenlinie bildet, und der Ort des Sternes in der Bahn durch die wahre oder mittlere Anomalie zu einer bestimmten Zeit. Man kann auch, und das soll im Folgenden geschehen, die Zeit τ angeben, zu welcher die beiden Sterne die kleinste Entfernung von einander haben. τ ist also die Zeit des Passirens des Periastrons. λ wird dann den Winkel zwischen Periastron und Knoten, vom Hauptsterné gesehen, darstellen. Schliesslich muss noch die Umlaufszeit T bekannt sein, weil diese, wie wir sehen werden, nicht durch a , wie im Planetensysteme, gegeben ist.

Zwischen den angeführten Grössen, der Zeit t , der wahren Anomalie v , der mittleren M und der excentrischen E finden die bekannten Beziehungen statt, die durch die Kepler'schen Gesetze gegeben sind. Wir wollen eine dieser Gleichungen näher betrachten. Es seien m und m_1 die Massen der beiden Sterne, k die Anziehungsconstante, dann ist bekanntlich:

$$T = \frac{2 \pi a^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{m + m_1}} \dots \dots \dots (1)$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$a = \left(\frac{T k \sqrt{m + m_1}}{2 \pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Die Constante k ist hier natürlich in denselben Einheiten auszudrücken, wie die anderen vorkommenden Grössen. Ob bei den Doppelsternen k denselben Werth hat wie in unserem Planetensysteme, ist eine Frage, die wohl discutirt werden kann und in der That discutirt worden ist. Ernstliche Zweifel dagegen hat man aber nicht vor-

bringen können. Dann gilt aber (1) auch z. B. für die Bewegung der Erde um die Sonne. Setzt man also die Sonnenmasse bezw. Erdmasse gleich 1 bezw. ν , die Umlaufzeit der Erde = 1, so ist:

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\nu}},$$

wobei noch mit jedenfalls hinreichender Genauigkeit ν einfach fortgelassen werden kann. Man hat jetzt einfach:

$$a = T^{\frac{2}{3}} (m + m_1)^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (2)$$

Hier ist also T in Jahren, m und m_1 in Sonnenmassen und a in mittleren Entfernungen Sonne — Erde auszudrücken. Nennt man p die Parallaxe des Fixsternes, a'' den scheinbaren Winkelwerth von a , so hat man in Folge von:

$$a'' = ap$$

die Gleichung:

$$p = \frac{a''}{[(m + m_1) T^2]^{\frac{1}{3}}} \dots \dots \dots (3)$$

Da nun eine Doppelsternbahnberechnung nur a'' angeben kann, so enthält die Gleichung (3) eine Beziehung zwischen p und $m + m_1$, wenn auch noch T bekannt ist. Diese Gleichung ist demnach bei jenen Doppelsternen von besonderem Interesse, für welche Parallaxenbestimmungen vorliegen, denn sie gestattet die Bestimmung von Fixsternmassen. Als Beispiel mag hierfür der Doppelstern 70 Ophiuchi angeführt werden. Nimmt man — es sei dahingestellt, ob dies die beste Annahme ist — an:

$$T = 95,97 \quad a'' = 4'',958 \quad p = 0'',162,$$

so ergiebt Formel (3) $m + m_1 = 3,11$. Die Gesamtmasse des Systemes ist also etwa drei Sonnenmassen gleich.

Nach dem Früheren wird also eine Doppelsternbahn durch sieben Elemente bestimmt. Als solche kann man die Grössen:

$$a, e, \Omega, i, \lambda, T, \tau,$$

oder Combinationen aus ihnen wählen. Sind diese Elemente bekannt, so ist es eine sehr leichte Aufgabe, hieraus für eine gegebene Zeit t Positionswinkel p und Distanz ϱ zu berechnen. Hält man die früher angeführten Bezeichnungen fest, so hat man zunächst die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\pi}{T} (t - \tau) \\ E - e \sin E &= M \\ tg \frac{1}{2} v &= tg \frac{1}{2} E \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{aligned}$$

anzuwenden. Hieraus ergiebt sich die wahre Distanz r der beiden Sterne:

$$r = a (1 - e \cos E)$$

und entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} tg(p - \Omega) &= \cos i \, tg(\lambda + v) \\ \varrho &= r \cdot \frac{\cos(\lambda + v)}{\cos(p - \Omega)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

wozu noch zu bemerken ist, dass $p - \Omega$ und $\lambda + v$ in demselben Quadranten liegen.

Die umgekehrte Aufgabe, aus gegebenen p und ϱ die sieben Bahnelemente zu bestimmen, ist natürlich viel complicirter. Offenbar muss im Allgemeinen aus sieben Daten eine Bahnbestimmung möglich sein. Man sieht aber sofort ein, dass Positions-

winkel oder Distanzen allein hierzu nicht ausreichend sind, denn nach (4) ist p unabhängig von a , während q nicht von δ abhängt. Sonst können die Daten in ganz beliebiger Weise combinirt werden. Es sind auch für einige dieser Combinationen Methoden, die wegen der transcendenten Form einiger der auftretenden Gleichungen Näherungsmethoden sein müssen, aufgestellt worden. Dieselben sind dem Wunsche entsprungen, die Lösung des Problems aus der gerade hinreichenden Anzahl von Daten zu erlangen, welcher Wunsch in rein theoretischer Hinsicht durchaus berechtigt ist. In der Praxis liegt die Sache anders. Bahnbestimmungen solcher Doppelsterne, deren Stellung nur durch wenige Positionswinkel und Distanzen festgelegt erscheint, haben meistens kein Interesse und können bei den bekannten Ungenauigkeiten der beobachteten Coordinaten auf irgend welche Zuverlässigkeit keinen Anspruch machen. Man wird deshalb wohl in allen Fällen, die eine Bahnberechnung überhaupt verdienen, annehmen dürfen, dass eine grössere Anzahl von Messungen vorliegt. Es soll nun für das Folgende nur angenommen werden, dass entweder fünf zusammengehörige Positionswinkel und Distanzen direct gegeben seien oder wenn es, was bei engeren Doppelsternen vorkommen kann, an letzteren fehlt, eine fortlaufende Reihe von Positionswinkeln gegeben sei, die erlaubt, für fünf Zeiten den Betrag des Differentialquotienten $\frac{d p}{d t}$ zu berechnen. Da nämlich der Flächensatz:

$$q^2 \frac{d p}{d t} = const.$$

gilt, so kann man jetzt für die fünf gegebenen Zeiten die zugehörigen q ableiten, wenn das einem und zwar unter den gegebenen beliebig ausgewählten Zeitmomente zukommende q gegeben ist, oder auch ganz beliebig angenommen wird. Man erhält in letzterem Falle die Dimensionen der wahren Ellipse natürlich in diesem willkürlichen Maassstabe ausgedrückt, sonst aber selbstverständlich alles Andere ebenso richtig, als wenn die eine erwähnte Distanz bekannt wäre. Durch die fünf Paare p und q sind auch die fünf Paare rechtwinkliger Coordinaten:

$$x = q \cos p \qquad y = q \sin p$$

gegeben. Diese aber müssen der Gleichung der scheinbaren Ellipse genügen, die sich den oben gemachten Bemerkungen gemäss in der allgemeinsten Form:

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2 \delta x y + 2 \varepsilon x + 2 \zeta y - 1 = 0 \dots \dots \dots (5)$$

darstellt. Da (5) eine Ellipse darstellen soll, so muss bekanntlich sein:

$$\beta > 0 \qquad \gamma > 0 \qquad \beta \gamma - \delta^2 > 0 \dots \dots \dots (5a)$$

Zur Bestimmung der fünf Constanten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ reichen fünf gegebene x und y aus. Man wird indessen niemals versäumen, etwa mehr vorhandene Daten mit zu benutzen und so viele Gleichungen anzusetzen, als zusammengehörige x und y vorhanden sind. Aus allen wird man, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Werthe der β, γ etc. berechnen.

Ist dies geschehen, so lässt sich leicht die wahre Ellipse bestimmen. Die rechtwinklige Projection dieser letzteren ist die Ellipse (5) und der Coordinatenanfang, welcher mit dem Hauptsterne zusammenfällt, ist der Brennpunkt der wahren Ellipse. Diese geometrischen Bedingungen, in passender Weise durch Formeln ausgedrückt, geben die einfache Lösung des Problemes.

(5) kann auch als Gleichung eines geraden Cylinders angesehen werden, dessen Axe mit der Z-Axe des Coordinatensystemes, also mit der auf der Projectionsebene senkrechten Gesichtslinie zusammenfällt. Wir beziehen nun diesen Cylinder auf ein in

demselben Anfange gelegenes Coordinatensystem der x'', y'', z'' . Die x'' -Axe soll in der Knotenlinie der wahren Ellipse liegen, die y'' -Axe senkrecht darauf im Sinne der Bewegungsrichtung des Sternes um den Hauptstern. Dann hat man in sofort ersichtlicher Weise für die Transformation beider Coordinatensysteme:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i + z'' \sin \Omega \sin i \\ y &= x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i - z'' \cos \Omega \sin i \\ z &= \quad \quad + y'' \sin i \quad \quad + z'' \cos i. \end{aligned}$$

Führt man dies in (5) ein und setzt $z'' = 0$, so erhält man den Durchschnitt des erwähnten Cylinders mit der wahren Bahnebene, also die wahre Ellipse. Ihre Gleichung ist also:

$$\left. \begin{aligned} &\beta (x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)^2 + \gamma (x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i)^2 \\ &+ 2 \delta (x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) (x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) \\ &+ 2 \varepsilon (x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) + 2 \xi (x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

Andererseits ist aber die Gleichung der wahren Ellipse auf dieselben Axen bezogen:

$$\frac{(ae + x'' \cos \lambda + y'' \sin \lambda)^2}{a^2} + \frac{(-x'' \sin \lambda + y'' \cos \lambda)^2}{b^2} - 1 = 0 \dots (II)$$

wenn die kleine Halbaxe mit b bezeichnet wird. Die Gleichungen (I) und (II) müssen identisch für alle Coordinatenwerthe mit einander übereinstimmen. Es müssen demzufolge die Coefficienten gleicher Potenzen der Coordinaten gleich sein. Bezeichnet deshalb v einen zu bestimmenden Factor, so findet sich sofort:

$$v \left(\frac{\cos \lambda^2}{a^2} + \frac{\sin \lambda^2}{b^2} \right) = \beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + 2 \delta \sin \Omega \cos \Omega \dots (6)$$

$$v \left(\frac{\sin \lambda^2}{a^2} + \frac{\cos \lambda^2}{b^2} \right) = (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - 2 \delta \sin \Omega \cos \Omega) \cos i^2 \dots (7)$$

$$v \sin 2 \lambda \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = (-\beta \sin 2 \Omega + \gamma \sin 2 \Omega + 2 \delta \cos 2 \Omega) \cos i \dots (8)$$

$$v \frac{e}{a} \cos \lambda = \varepsilon \cos \Omega + \xi \sin \Omega \dots (9)$$

$$v \frac{e}{a} \sin \lambda = (-\varepsilon \sin \Omega + \xi \cos \Omega) \cos i \dots (10)$$

$$v (e^2 - 1) = -1 \dots (11)$$

Aus (11) folgt $v = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$. Führt man noch den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ ein, so kann man (8) und (9) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{p} \cos \lambda &= \varepsilon \cos \Omega + \xi \sin \Omega \\ \frac{e}{p} \sin \lambda &= (-\varepsilon \sin \Omega + \xi \cos \Omega) \cos i \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Das doppelte Product dieser Gleichungen ist:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = (-\varepsilon^2 \sin 2 \Omega + \xi^2 \sin 2 \Omega - 2 \varepsilon \xi \cos 2 \Omega) \cos i,$$

während (8) die Gestalt annimmt:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = (\beta \sin 2 \Omega - \gamma \sin 2 \Omega + 2 \delta \cos 2 \Omega) \cos i.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\operatorname{tg} 2 \Omega = \frac{2(\delta + \xi \varepsilon)}{\beta + \varepsilon^2 - \gamma - \xi^2} \dots \dots \dots (13)$$

Diese Gleichung giebt bereits ein Element, nämlich Ω . Die bestehende Vieldeutigkeit soll später erörtert werden. Die Differenz der Gleichungen (6) und (7):

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{p^2} \cos 2 \lambda &= (\beta \cos \Omega^2 + \gamma \sin \Omega^2 + 2 \delta \sin \Omega \cos \Omega) \\ &\quad - (\beta \sin \Omega^2 + \gamma \cos \Omega^2 - 2 \delta \sin \Omega \cos \Omega) \cos i^2 \end{aligned}$$

verglichen mit der Differenz der Quadrate der Gleichungen (12):

$$\frac{e^2}{p^2} \cos 2 \lambda = (\varepsilon \cos \Omega + \xi \sin \Omega)^2 - (-\varepsilon \sin \Omega + \xi \cos \Omega)^2 \cos i^2$$

giebt sofort:

$$\cos i^2 = \frac{(\beta + \varepsilon^2) \cos \Omega^2 + (\gamma + \xi^2) \sin \Omega^2 + 2(\delta + \xi \varepsilon) \sin \Omega \cos \Omega}{(\beta + \varepsilon^2) \cos \Omega^2 + (\gamma + \xi^2) \cos \Omega^2 - 2(\delta + \xi \varepsilon) \sin \Omega \cos \Omega} \dots (14)$$

Addirt man schliesslich zu (7) das Quadrat der zweiten Gleichung (12), so findet man:

$$\frac{1}{p^2 \cos i^2} = (\beta + \varepsilon^2) \sin \Omega^2 + (\gamma + \xi^2) \cos \Omega^2 - 2(\delta + \xi \varepsilon) \sin \Omega \cos \Omega \dots (15)$$

Hiermit ist die wahre Ellipse vollständig bestimmt und es erübrigt nur noch, die Rechenvorschriften durch Einführung von Hülfsgrössen zu vereinfachen. Setzt man:

$$\begin{aligned} \mu &= \gamma + \xi^2 \\ \nu &= \beta + \varepsilon^2 \\ \varrho &= \delta + \xi \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \mu \sin \Omega^2 + \nu \cos \Omega^2 + 2 \varrho \sin \Omega \cos \Omega \\ B &= \mu \cos \Omega^2 + \nu \sin \Omega^2 - 2 \varrho \sin \Omega \cos \Omega, \end{aligned}$$

also:

$$A + B = \mu + \nu,$$

so werden die Gleichungen (13), (14) und (15):

$$\operatorname{tg} 2 \Omega = \frac{-2 \varrho}{\mu - \nu} \quad \cos i^2 = \frac{A}{B} \quad \frac{1}{p^2 \cos i^2} = B.$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$\frac{1}{p^2} = A \quad \operatorname{tg}^2 i = \frac{B - A}{A} = (\mu + \nu) p^2 - 2.$$

Für A kann man noch etwas bequemer schreiben:

$$A = \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2} \cos 2 \Omega + \varrho \sin 2 \Omega.$$

Ehe wir die gewonnenen Formeln endgültig zusammenstellen, müssen wir noch auf die Vieldeutigkeit in der Bestimmung von Ω zurückkommen. Soll Gleichung (14) einen reellen Werth für i ergeben, so muss ihre rechte Seite stets positiv und kleiner als 1 sein. Aus den Bedingungen (5a) folgt aber sofort, dass in der That sowohl Zähler als auch Nenner des Bruches (15) positiv sind. Es muss also der Nenner grösser als der Zähler sein, d. h.:

$$(\delta + \xi \varepsilon) \sin 2 \Omega < 0$$

oder $\sin 2 \Omega$ muss das Zeichen von $-\varrho$, also $\cos 2 \Omega$ das Zeichen von $(\mu - \nu)$ haben. Hierdurch erscheint 2Ω eindeutig bestimmt. Ω selbst ist es aber nicht, indem man

es nach Belieben um 180° vergrössern darf oder nicht. Diese übrigbleibende Zweideutigkeit liegt aber, wie bereits oben auseinandergesetzt wurde, in der Natur der Sache und kann nicht gehoben werden. Man muss sich also für ein bestimmtes Ω entscheiden, weil dann erst Ω unzweideutig bestimmt ist.

Wir stellen nun alle Formeln zusammen, die, nach Ermittlung der Coëfficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$, zur Bestimmung der wahren Bahnellipse zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}\mu &= \gamma + \xi^2 \\ \nu &= \beta + \varepsilon^2 \\ \varrho &= \delta + \xi \varepsilon \\ \operatorname{tg} 2 \Omega &= \frac{-2 \varrho}{\mu - \nu};\end{aligned}$$

$\cos 2 \Omega$ hat das Vorzeichen von $(\mu - \nu)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2} &= \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2} \cos 2 \Omega + \varrho \sin 2 \Omega \\ \operatorname{tg} i^2 &= (\mu + \nu) p^2 - 2 \\ \frac{e}{p} \sin \lambda &= (-\varepsilon \sin \Omega + \xi \cos \Omega) \cos i \\ \frac{e}{p} \cos \lambda &= \varepsilon \cos \Omega + \xi \sin \Omega.\end{aligned}$$

Will man für die Berechnung dieser höchst einfachen Formeln eine Controle haben, so findet man eine solche u. a. in der oben vorkommenden Formel:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = \cos i [(\beta - \gamma) \sin 2 \Omega - 2 \delta \cos 2 \Omega].$$

Es mag noch erwähnt werden, dass man die Gleichungen für p^2 und $\operatorname{tg} i^2$ auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}\frac{2}{p^2} &= (\mu + \nu) - \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4 \varrho^2} \\ \operatorname{tg} i^2 &= p^2 \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4 \varrho^2}.\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass, wie es nach den getroffenen Festsetzungen auch sein muss, $\operatorname{tg} i$ immer reell wird, wenn es p ist. Dieses wird imaginär, wenn:

$$\varrho^2 > \mu \nu.$$

Das ist aber, wie man leicht einsieht, die Bedingung dafür, dass der Coordinatenanfang ausserhalb der scheinbaren Ellipse sich befindet, welcher Fall nicht eintreten kann, weil der Coordinatenanfang die Projection des Brennpunktes der wahren Ellipse sein muss.

Hat man auf diese Weise Grösse, Form und Lage der wahren Ellipse berechnet, so kann man aus jedem Positionswinkel p und der zugehörigen Zeit die mittlere Anomalie M berechnen, denn es ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(v + \lambda) &= \sec i \operatorname{tg}(p - \Omega) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \\ M &= E - e \sin E.\end{aligned}$$

Da aber andererseits:

$$M = \frac{360^\circ}{T} (t - \tau)$$

ist, so giebt jedes M eine lineare Gleichung zwischen den beiden Unbekannten:

$$\frac{360^0}{T} = n \quad \text{und} \quad n\tau = -\varepsilon,$$

nämlich:

$$M = nt + \varepsilon.$$

Aus der Gesamtheit der vorliegenden Werthe für M ergeben sich dann, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die gesuchten Unbekannten.

Auf die angegebene Weise wird man in den allermeisten Fällen eine Bahnbestimmung erhalten, die sich dem verfügbaren Beobachtungsmateriale so weit anschmiegen wird, dass man sie zum Ausgangspunkte für eine consequente Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate wählen können wird. Zu diesem Zwecke wird man, ganz ähnlich wie bei Kometen- und Planetenbahnen die Beziehungen aufzustellen haben, welche zwischen kleinen Aenderungen der Bahnelemente und den zugehörigen Aenderungen der Beobachtungsgrössen bestehen. Hier sind also die kleinen Zunahmen dp und dq durch die Differentiale der sieben Bahnelemente auszudrücken. In Folge der grossen Einfachheit der auszuführenden Operationen wird es wohl ausreichend sein, wenn nur das Resultat angeführt wird. Die benutzte Bezeichnung ist dieselbe wie früher, nur ist noch der Einfachheit wegen der Excentricitätswinkel φ , wo $\sin \varphi = e$, eingeführt worden.

Man findet nun:

$$dE = \frac{a}{r} (t - \tau) dn - \frac{an}{r} d\tau + \frac{a}{r} \sin E \cos \varphi d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi [(t - \tau) dn - n d\tau] + \frac{a^2}{r^2} \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{a^2}{r} \sin \varphi \sin E [(t - \tau) dn - n d\tau] + \frac{a^2 (e - \cos E)}{r} \cos \varphi d\varphi$$

und hiermit:

$$\left. \begin{aligned} dp &= d\delta - \frac{r}{\rho} \sin(\lambda + v) \cos(p - \delta) \sin i di + \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \cos i d\lambda \\ &+ \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \cos \varphi \cos i [(t - \tau) dn - n d\tau] + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \cos i \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$m = \frac{1}{2} \frac{\sin i^2}{\cos i} \sin 2(p - \delta),$$

so wird die gesuchte Differentialgleichung für die Distanz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{da}{a} - m d\lambda + \left(\frac{a}{r} \right)^2 (e \sin E - m \cos \varphi) [(t - \tau) dn - n d\tau] \\ &- tg i \sin(p - \delta)^2 di - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\cos \varphi (\cos E - e) + m \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) \right] d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Diese beiden Gleichungen ermöglichen sofort die Aufstellung der Bedingungs-
gleichungen. Die Bildung der Normalgleichungen hängt von dem Gesetze ab, nach
welchem die Beobachtungsfehler dp und dq von der Distanz ρ abhängen. Dass eine
solche Abhängigkeit stattfindet, ersieht man aus dem Umstande, dass die Genauigkeit
der Beobachtung der p schnell mit der Distanz ρ abnimmt. Man wird im Allgemeinen
sagen können, dass beide Coordinaten gleich genau gemessen sind, wenn ρdp und dq
gleich gross sind. Trifft letzteres zu, so müsste man die Normalgleichungen nach der
Bedingung:

$$\Sigma \varrho^2 dp^2 + \Sigma d\varrho^2 = \text{Minim.}$$

bilden. Dies ist aber nicht, wenigstens nicht bei allen Beobachtern, der Fall und scheint namentlich bei kleinen Distanzen ($< 1''$) nicht zuzutreffen. Man wird, da die Sache namentlich mit Berücksichtigung der systematischen Fehler, die hier wie zufällige Fehler angesehen werden, bisher nicht genügend untersucht ist, vielleicht am besten thun, bei mässigen Distanzen die obige Minimumsbedingung festzuhalten, für ganz kleine Distanzen aber:

$$\Sigma \varrho^2 dp^2 = \text{Minim.}$$

zu setzen und die beobachteten Distanzen nur zur Ableitung der Dimensionen der wahren Ellipse, also zur Bestimmung von a zu benutzen. — Die auseinandergesetzte Methode reicht nicht aus, wenn i nahezu 90° ist. Ein Beispiel für diesen Fall bietet der enge Doppelstern 42 Comae, bei welchem die Annahme $i = 90^\circ$ den Beobachtungen am besten zu genügen scheint. Hier hat man die Bahnbestimmung allein auf die Distanzmessungen zu gründen und der unveränderliche Positionswinkel bestimmt für sich die Knotenlänge der Bahn. Auf die Behandlung dieser Ausnahmefälle kann hier nicht näher eingegangen werden.

Die zu ferneren Untersuchungen über Bahnbewegungen tauglichen Doppelsternmessungen gehen bis auf W. Struve zurück. Die ersten Beobachtungen dieses Astronomen sind indessen mit grösseren und weniger gut ermittelten systematischen Fehlern behaftet, so dass man bei ihrer Benutzung öfters auf Schwierigkeiten stösst. Mit Sicherheit darf man sich aber der von 1828 an von $W\Sigma$ gelieferten Messungen bedienen, und man darf sie den besten neueren Beobachtungen an die Seite stellen. Die Beobachtungen W. Herschel's, so überaus werthvoll wegen ihres Alters, dürfen nur mit grösster Vorsicht verwerthet werden. Die Angaben der Positionswinkel sind nicht selten durch grobe Versehen, z. B. falsche Angabe des Quadranten, entstellt, die Distanzen sind, wenn überhaupt angegeben, sehr wenig sicher. Aus diesen Gründen wird man diese Messungen nicht mit Vortheil in die Ausgleichsrechnung einbeziehen, dagegen wird ihre Vergleichung mit dem Resultate der Bahnbestimmung unter Umständen sehr werthvoll sein zur Beurtheilung der Sicherheit der erhaltenen Umlaufszeit, und man wird deshalb gut thun, diese Vergleichung nicht zu unterlassen. — Aus der verhältnissmässig kurzen Zeit, über welche sich die verfügbaren Messungen erstrecken, folgt von selbst, dass die Bahnen von mehreren Jahrhunderten Umlaufszeit auf Sicherheit keinen Anspruch machen können. Eine vollständige Uebersicht über die bisher berechneten Doppelsternbahnen soll hier nicht gegeben werden, eine solche würde auch bei der raschen Entwicklung unserer Kenntnisse in dieser Richtung schnell veralten.

Man findet u. a. eine solche Zusammenstellung neuesten Datums im „Annuaire pour l'an 1896“, während der Stand der Kenntnisse in dieser Richtung vor 20 Jahren in einem Werke von Flammarion¹⁾ und dem bekannten Handbuche von Crossley, Gledhill und Wilson²⁾ dargestellt ist. In der folgenden Tabelle sind jene 38 Doppelsternbahnen nach dem „Annuaire“ angeführt, die Umlaufzeiten unter 100 Jahren haben. Ausser der Umlaufszeit werden noch die Helligkeiten der Componenten und die ein allgemeines Interesse darbietenden Elemente i , e und a angegeben.

¹⁾ C. Flammarion, Catalogue des étoiles doubles et multiples, Paris 1878.

²⁾ A Handbook of double Stars, by Crossley, Gledhill and Wilson, London 1879.

	Grösse	T	i	e	a
α Pegasi	4,3— 5,0	11 ^j ,4	81°,2	0,49	0'',42
δ Equul.	4,5— 5,0	11,5	79,0	0,14	0,45
β 883	7,0— 9,0	16,4	28,5	0,48	0,24
85 Pegas.	6,0— 9,0	17,5	66,7	0,16	0,80
ζ Sagitta	3,5— 4,0	18,7	58,8	0,17	0,53
20 Pers.	6,0— 7,0	20,8	73,6	0,48	0,25
9 Argus	6,0— 7,0	22,0	77,7	0,70	0,65
42 Com. Ber.	6,0— 6,0	25,7	90,0	0,48	0,66
β 416	7,0— 9,0	27,7	59,8	0,44	2,04
β 612	6,0— 6,0	30,0	23,0	0,13	0,28
β Delph.	3,5— 4,5	30,9	59,3	0,34	0,52
Σ 3121	7,5— 7,8	34,0	75,0	0,33	0,67
ζ Herc.	3,0— 6,5	35,0	44,9	0,46	1,31
τ Cygn.	5,6— 7,9	36,5	44,7	0,24	1,19
Procyon	1,0—	40,0	—	—	—
η Coron. Bor.	5,8— 6,2	41,3	59,6	0,25	0,87
Σ 2173	6,0— 6,0	45,4	80,7	0,13	1,00
μ^2 Herc.	9,5—10,5	45,4	67,0	0,21	1,37
$O. \Sigma$ 269	6,8— 7,3	47,7	82,8	0,06	0,58
Sirius	> 1,0—10,0	49,4	42,4	0,63	7,57
99 Herc.	6,0—11,5	53,5	38,6	0,79	1,12
γ Androm.	4,5— 6,0	54,8	78,9	0,88	0,37
ζ Cancri	5,0— 5,7	59,1	11,1	0,38	0,86
ξ Urs. maj.	4,0— 5,0	60,6	55,9	0,39	2,59
γ Cent.	4,0— 4,0	61,9	84,1	0,63	1,50
$O. \Sigma$ 234	7,0— 7,4	63,5	47,4	0,36	0,34
$O. \Sigma$ 298	7,0— 7,3	65,2	57,6	0,53	0,86
α Cent.	1,0— 2,0	81,8	79,7	0,52	17,71
$O. \Sigma$ 149	6,5— 9,0	85,9	31,1	0,46	0,50
70 Ophiuch.	4,1— 6,1	88,4	60,1	0,48	4,60
Σ 228	6,7— 7,6	88,7	71,0	0,53	0,98
γ Cor. Bor.	4,0— 7,0	90,4	83,4	0,35	0,66
φ Urs. maj.	5,0— 5,6	91,9	34,7	0,45	0,29
λ Cygn.	5,0— 6,3	93,4	58,8	0,60	0,51
8 Sext.	5,0— 6,0	93,9	31,8	0,47	0,52
$O. \Sigma$ 235	6,0— 7,3	94,4	54,5	0,50	0,98
ξ Scorp.	4,9— 5,2	95,9	68,7	0,08	1,26
$O. \Sigma$ 224	7,2— 9,2	96,1	49,8	0,58	0,42

Besondere Beachtung verdienen die mehrfachen Sternsysteme, von denen die beiden interessantesten ζ Cancri und ξ Scorpium in obiger Zusammenstellung vorkommen. Die Bewegungen in dem ersteren Systeme, welches aus drei nahezu gleich hellen und aus einem vierten bisher noch nicht gesehenen Sterne besteht, sind in neuerer Zeit eingehend¹⁾

¹⁾ H. Seeliger, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ Cancri, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 44, 1881. — Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der Münchener Akademie, Bd. 17, 1889. — Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri, Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1894.

studirt worden und haben zu Resultaten geführt, die hier ganz kurz, ohne näheren Nachweis, erwähnt werden sollen.

Von den drei sichtbaren Sternen *A*, *B*, *C* stehen zwei, *A* und *B*, in grosser Nähe bei einander. Sie beschreiben in etwa 60 Jahren einen vollen Umkreis um einander und halten hierbei eine Distanz von $0'',6$ bis $1'',1$ ein. Der Stern *C* dagegen beschreibt um die Mitte von *A* und *B* jährlich im Durchschnitt $0'',5$ im Positionswinkel bei einer nahezu constanten Distanz von $5\frac{1}{2}''$. Sowohl die Prüfung der Flächensätze, als auch die Berechnung einer elliptischen Bahn ergaben, dass man den Beobachtungen von *A* und *B* beinahe vollständig genügen kann, ohne auf eine Einwirkung des dritten Sternes Rücksicht zu nehmen. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dass der dritte Stern *C* keinen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung von *B* um *A* ausübt. Vielmehr hat sich ergeben, dass man für den Stern *C* sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden und dass man ziemlich bedeutende Massenwerthe annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten.

Die Beobachtungen des Sternes *C* zeigen Anomalien höchst merkwürdiger Art. C. Flammarion und Otto Struve haben vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass die Messungen mit grosser Deutlichkeit eine periodische Veränderung im Positionswinkel und Distanz ergeben, die beinahe vollkommen durch die Annahme fortgeschafft werden konnte, der Stern *C* bewege sich in etwa 18 Jahren in einer Kreisbahn vom Radius $0'',2$ um einen Punkt, der wieder in einer Kreisbahn langsam um die Mitte von *A* und *B* fortrückt. In der That ist die durch diese Hypothese erzielte Uebereinstimmung so auffällig, dass an ihrer Berechtigung schon damals kaum zu zweifeln war. Indessen war doch eine erneute Prüfung aus verschiedenen, hier nicht näher zu erörternden Gründen nöthig. Namentlich musste untersucht werden, ob die Annahme eines dunklen vierten Sternes nothwendig sei und die beobachtete Anomalie nicht durch eine andere Annahme ebenfalls erklärt werden könne. Die dahin gerichtete Prüfung hat nun eine vollständige Bestätigung der gemachten Annahme geliefert und es kann als eine bewiesene Thatsache angesehen werden, dass sich in grosser Nähe des Sternes *C* ein vierter Stern befindet.

Diese Untersuchungen über ξ Cancri führen uns auf den Fall eines Doppelsternes, bei dem nur die eine Componente sichtbar ist. Ein solcher Stern wird, also im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fixsternen eine Eigenbewegung zeigen, die ausser einem mit der Zeit proportionalen Fortschreiten am Himmel eine periodische Veränderlichkeit aufweist. Man sagt deshalb, ein solcher Stern habe eine veränderliche Eigenbewegung. Das Vorkommniss dunkler Fixsternbegleiter darf an sich nicht verwundern. Schon Bessel sprach die Meinung aus, dass die Leuchtkraft nicht nothwendiges Attribut stellarer Massen sei. Diese an sich unzweifelhaft richtige Ansicht hat den grossen Astronomen zu der epochemachenden Entdeckung eines solchen Falles geführt, indem er aus den periodischen Veränderungen der Rectascension des Sirius die wahre Sachlage erkannte¹⁾. Ihm war es nicht vergönnt, den Gegenstand weiter zu verfolgen und die Bahn, welche Sirius um den Schwerpunkt seiner und des Begleiters Masse beschreibt, abzuleiten. Diese Aufgabe hat später C. A. F. Peters²⁾ in mustergültiger Weise gelöst. Darauf behandelte Auwers³⁾ dasselbe Problem sehr eingehend, indem er nicht nur die Rectascensionen, sondern auch die Declinationen in den Bereich seiner Betrachtungen zog.

¹⁾ Astr. Nachr., Bd. 22, Nr. 514 bis 516, Abhandlungen Bd. 2.

²⁾ Ebenda, Bd. 32, Nr. 745 bis 748.

³⁾ Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen. 1. Theil, Königsberg 1862; 2. Theil, Leipzig 1868.

Diese umfangreiche Arbeit hat den unwiderleglichen Beweis für die Richtigkeit der Bessel'schen Anschauungen erbracht. Noch war dieselbe aber nicht in die Oeffentlichkeit getreten, als es A. Clarke am 31. Januar 1862 gelang, den genannten Begleiter wirklich zu sehen, und zwar sehr nahe an dem Orte, welchen ihm die Theorie zugewiesen hatte. Die von Auwers gefundenen Elemente sind:

$$\begin{aligned} \tau &= 1843,28 \\ \Omega &= 61^{\circ},97 \\ \lambda &= 18,92 \\ i &= 47,15 \\ e &= 0,615 \\ a &= 2'',33, T = 49,4. \end{aligned}$$

Diese beziehen sich auf die Bewegung des Sirius um den Schwerpunkt des Systemes. Sobald aber nur eine Beobachtung des Begleiters bekannt ist, kann man hieraus das Verhältniss beider Massen bestimmen. Auwers hat aus den ersten bekannt gewordenen Beobachtungen gefunden, dass die Masse des Sirius 2,05 mal so gross ist, wie die des Begleiters. Daraus folgt die Halbaxe der Bahn, welche Sirius um den Begleiter beschreibt, gleich $7'',1$. Da nun weiter die Parallaxe des Sirius zu etwa $\frac{1}{5}''$ angenommen werden darf, so folgt aus den oben mitgetheilten Formeln für die Masse des Sirius und des Begleiters zwölf resp. sechs Sonnenmassen. Bringt man hiermit in Verbindung, dass der Begleiter als ein Sternchen von höchstens neunter Grösse erscheint, so liegt in der That ein auffälliges Beispiel dafür vor, wie wenig in speciellen Fällen die Grösse einer stellaren Masse mit ihrer Leuchtkraft zusammenhängt. Denn die Lichtquantität des Begleiters verhält sich zu der des Sirius wie 1:16000, während das Massenverhältniss beider nur 1:2 ist. Dieser Berechnung liegt nach Seidel die Annahme zu Grunde, dass Sirius uns etwa 10mal soviel Licht zusendet, wie ein typischer Stern erster Grösse und dass sich die Helligkeit eines Sternes der m ten Grösse zu der eines Sternes von der $(m+1)$ ten Grösse verhält wie 2,5:1. Letztere Annahme ist gewiss nahezu richtig, die angegebene Helligkeit des Sirius vielleicht etwas zu gross, wogegen der Begleiter vielleicht zu hell angesetzt worden ist. — Bald nach seiner Entdeckung wurde der Siriusbegleiter ein verhältnissmässig leicht zu beobachtendes Object und blieb es bis vor wenigen Jahren. Gegenwärtig (1896) steht er dem Hauptsterne noch sehr nahe, die Entfernung vergrössert sich aber wieder, so dass er wahrscheinlich für die grossen Fernrohre bald erreichbar werden wird. — Die zahlreichen mikrometrischen Messungen, welche über die Stellung des Begleiters vorliegen, gestatten den Versuch einer Bahnbestimmung, dies allerdings nur mit bedingter Zuverlässigkeit, da sich der Positionswinkel seit der Entdeckung bis 1890 nur um etwa 80 Grad verändert hat. In Anbetracht der schwierigen Umstände ist die Uebereinstimmung der Bahn mit der aus den Meridianbeobachtungen abgeleiteten recht befriedigend. Auwers¹⁾ fand nämlich aus den Beobachtungen zwischen 1862 und 1890, bei angenommener Umlaufzeit, für die Bahn des Begleiters um den Hauptstern:

$$\begin{aligned} \tau &= 1844,22 \\ \Omega &= 37,51 \\ \lambda &= 39,94 \\ i &= 42,43 \\ e &= 0,629 \\ T &= 49,4. \end{aligned}$$

¹⁾ Auwers, Beiträge zur Kenntniss des Siriussystemes. Astr. Nachr., Bd. 129.

Wie schon erwähnt, ist die Bahn des Sirius am Himmel nicht das Stück eines grössten Kreises, sondern eine gewisse verschlungene cykloidische Curve, welche zu definiren zufolge der obigen Auseinandersetzungen leicht ist. Der Schwerpunkt des Sirius-systemes bewegt sich nach den mechanischen Grundsätzen in einer Geraden. Die scheinbare Bahncurve desselben Punktes ist also ein grösster Kreis, der mit gleichbleibender Geschwindigkeit beschrieben wird. Bezeichnet A_0 und D_0 Rectascension und Declination des Schwerpunktes zur Zeit t_0 und A'_0 , D'_0 die Eigenbewegungen in diesen beiden Coordinaten, so wird die Rectascension und Declination desselben Punktes zur Zeit t sein:

$$A_0 + A'_0 (t - t_0)$$

und:

$$D_0 + D'_0 (t - t_0).$$

Bedeutet p und q Positionswinkel und Distanz des Sirius gegen den Schwerpunkt und setzt man:

$$\xi = q \cos p$$

$$\eta = q \sin p,$$

so wird die Rectascension A und die Declination D des Sirius durch die Formeln gegeben sein:

$$A = A_0 + A'_0 (t - t_0) + \eta \sec D_0$$

$$D = D_0 + D'_0 (t - t_0) + \xi.$$

Nun genügen aber ξ und η der Gleichung der scheinbaren Ellipse. Man hat daher, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$A_0 + A'_0 (t - t_0) = l \sec D_0$$

$$D_0 + D'_0 (t - t_0) = m$$

$$\gamma (A \cos D_0 - l)^2 + \beta (D - m)^2 + 2\delta (D - m) (A \cos D_0 - l) + 2\varepsilon (D - m) + 2\xi (A \cos D_0 - l) - 1 = 0.$$

In dieser Gleichung sind als Unbekannte die Grössen β , γ , δ , ε , ξ , l und m anzusehen, wobei sich die letzteren zwei aus vier zu bestimmenden Grössen zusammensetzen. Man wird diese Unbekannten durch ein Näherungsverfahren bestimmen, indem für l und m gute Näherungswerthe verhältnissmässig leicht zu erreichen sind. Aus letzteren folgen aber strenge durch Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen die anderen Unbekannten. Sind schliesslich die Versuche zu Ende geführt, so kann die wahre Bahnellipse und die Bewegung in ihr nach den oben gegebenen Formeln ins Werk gesetzt werden.

Ausser bei Sirius hat Bessel¹⁾ noch in den Declinationen des Procyon eine veränderliche Eigenbewegung constatirt, was ebenfalls die späteren Untersuchungen von Auwers²⁾ bestätigt haben. Die von Letzterem berechnete Kreisbahn war:

Epoche des Min. in <i>A. R.</i>	1795,568
Umlaufszeit	39',97
Radius	1'',053

Die Auffindung des gesuchten Begleiters ist bisher nicht gelungen. Noch bei einigen anderen Sternen (β Orionis, α Hydr., α Virg.) hat man einen dunklen Begleiter vermuthet, spätere eingehendere Untersuchungen haben aber diese Vermuthung nicht bestätigt, so dass wir dieses interessante Vorkommniss nur bei den drei Sternen, Sirius, Procyon und ξ Cancri als erwiesen betrachten können. —

¹⁾ Astr. Nachr., Bd. 22.

²⁾ Ebenda, Nr. 1371 u. 1373.

Hatte man schon durch die Burnham'schen Doppelsterne äusserst enge Systeme kennen gelernt, die in einigen Jahren einen vollen Umkreis um einander beschreiben, so hat die Anwendung der neueren spectralanalytischen Messungen zur Kenntniss des Vorhandenseins so nahe bei einander stehender Weltkörper geführt, dass ihre optische Trennung wohl niemals durch das Fernrohr erfolgen kann. Die Umlaufzeiten, die bei diesen Systemen auftreten, berechnen sich nach Tagen und zum Theil nach wenigen Stunden. Schon seit längerer Zeit war man geneigt, die veränderlichen Sterne vom Algoltypus als solche überaus enge Doppelsterne zu betrachten, bei denen die eine Komponente gegenüber der anderen wenig hell sein muss. Diese Hypothese ist für Algol selbst zur Gewissheit geworden, nachdem es H. C. Vogel gelungen ist, in den photographischen Spectraufnahmen mit Sicherheit jene Linienverschiebungen nachzuweisen, welche in Folge des Doppler'schen Principes mit der Bahnbewegung verbunden sein müssen. Aehnliche Verschiebungen der Spectrallinien wurden später auch bei nicht veränderlichen Sternen, z. B. bei α Virginis gefunden. Diese Verschiebungen ergeben die in der Richtung des Visionsradius liegende Componente der Geschwindigkeit des leuchtenden Sternes um den Schwerpunkt des Systemes, und hieraus kann man die hauptsächlichsten Elemente dieser Bewegung ableiten, was gleich gezeigt werden soll.

Aber auch, wenn beide Componenten des sehr engen Doppelsternes leuchtend sind, giebt die Spectralanalyse unter Umständen die Mittel an die Hand, eine Bahnbewegung zu constatiren. Es hat wohl zuerst Edward C. Pickering die Bemerkung gemacht, dass die Spectren einiger Sterne innerhalb kurzer Zeiträume Veränderungen aufweisen, indem gewisse Spectrallinien bald doppelt, bald einfach erscheinen. Dass diese Erscheinung zufolge des Doppler'schen Principes durch eine periodische Bewegung zweier Sterne um einander erklärt werden könne, war von Anfang an klar. Misst man nun zu verschiedenen Zeiten die Entfernungen der verdoppelten Linien von einander, so erhält man die im Visionsradius liegende Componente der relativen Geschwindigkeit der beiden Sterne des Systemes gegen einander. Solche Beobachtungen waren bisher mit Erfolg möglich u. a. bei den Sternen β Aurig. und ξ Urs. maj., und es ist kaum zu bezweifeln, dass sich die Anzahl solcher Objecte in der nächsten Zeit schnell vermehren wird.

Der Zusammenhang zwischen den spectroscopischen Verschiebungen, welche in Kilometern ausgedrückte Geschwindigkeiten im Visionsradius angeben und den Bahnelementen ist sehr leicht aufzustellen. Nach Abzug des bekannten Einflusses der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Verschiebung der Spectrallinien giebt die Beobachtung im ersten der beiden betrachteten Fälle (Algol) die Geschwindigkeitscomponente des hellen Sternes gegen die Sonne. Legt man also die z -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfang in der Sonne liegt, in die Fortsetzung des Visionsradius, nennt m und ξ die Masse und die ξ -Coordinate des hellen Sternes, m' und ξ' die analogen Grössen für den dunklen Körper und setzt $z = \xi - \xi'$, so giebt die spectroscopische Messung:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Gamma + \frac{m'}{m + m'} \frac{dz}{dt} \dots \dots \dots (19)$$

Hierin bedeutet Γ die relative Geschwindigkeitscomponente im Visionsradius des Schwerpunktes des Doppelsternsystemes gegen die Sonne.

Im zweiten Falle (β Aurig. etc.) giebt die spectroscopische Beobachtung direct $\frac{dz}{dt} = z'$. Mit den oben gebrauchten Bezeichnungen hat man:

$$z = r \sin(v + \lambda) \sin i$$

und mit Hülfe der Gleichungen:

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{na(1 + e \cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = na \cdot \frac{e \sin v}{\sqrt{1 - e^2}}$$

erhält man sofort:

$$z = \frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)].$$

Bezeichnet man mit a_1 die grosse Halbaxe der Bahn, welche m um den Schwerpunkt von m und m' beschreibt, so ist:

$$(m + m')a_1 = m'a,$$

d. h.:

$$z'_1 = \frac{m}{m + m_1} \frac{dz}{dt} = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)] \dots \dots (20)$$

Da die Bahnen, welche m und m' einerseits und um den Schwerpunkt von m und m' andererseits beschreibt, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen sind, so erhält man z_1 einfach aus z' , wenn man die Elemente der ersten Bahnbewegung durch die der zweiten ersetzt oder, was dasselbe ist, wenn man im Ausdrucke für z' an Stelle von a , a_1 setzt.

Es ist deshalb unnöthig, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob nämlich z' oder $\frac{d\xi}{dt}$ durch die Beobachtungen gegeben ist. Ist das letztere der Fall, so nimmt man, worüber das Nähere weiter unten folgt, den rein periodischen Theil z'_1 von $\frac{d\xi}{dt}$, welcher in Formel (20) genau in derselben Verbindung mit den Bahnelementen vorkommt, wie z' in der unmittelbar vorhergehenden Formel.

Die rechte Seite von (20) lässt sich durch die fünf Bahnelemente:

$$a_1 \sin i, n, e, \tau, \lambda$$

ausdrücken. Man kann also aus spectrokopischen Messungen nur diese fünf Elemente bestimmen. a_1 kann nicht von i getrennt werden und die Knotenlänge ist, wie von vornherein klar, gänzlich unbestimmt.

Liegen also zu fünf verschiedenen Zeiten gemessene z'_1 vor, so kann man aus diesen die genannten fünf Bahnelemente ableiten. In dieser Allgemeinheit wird indessen die Lösung der Aufgabe von der Praxis wohl kaum jemals gefordert werden. Schon in Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Messungen wird es sich fast stets darum handeln, aus bereits als periodisch erkannten Veränderungen der Spectrallinien weitere Schlüsse zu ziehen, und man wird deshalb annehmen dürfen, dass aus zahlreich vorliegenden Beobachtungen n oder die Umlaufszeit mit genügender Sicherheit bereits festgestellt ist. Ist aber n bekannt, dann wird sich die Bestimmung der übrigen Bahnelemente sehr einfach vollziehen, wie die Untersuchungen von A. Rambaut¹⁾ und R. Lehmann-Filhés²⁾ gezeigt haben. Der letzteren Arbeit folgen die weiteren Auseinandersetzungen, unter Hinweis auf sie in Bezug auf Einzelheiten, die hier nicht besprochen werden können.

Die beobachteten Werthe $\frac{d\xi}{dt}$ in Formel (19) stelle man graphisch als Ordinaten dar, die zu den zugehörigen Zeitangaben als Abscissen gehören. Die Verbindung der

¹⁾ A. Rambaut, Monthly Notices, Bd. 51, S. 316 ff.

²⁾ Lehmann-Filhés, Ueber die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spectrokopischen Messungen etc. Astr. Nachr., Nr. 3242.

einzelnen Punkte in möglichst gleichförmiger Weise ergibt eine Curve. Von der Sicherheit, mit welcher diese Curve gezeichnet werden kann, hängt die Sicherheit der Bahnbestimmung ab, und es ist kaum zu bezweifeln, dass eine Bahnrechnung nur dann

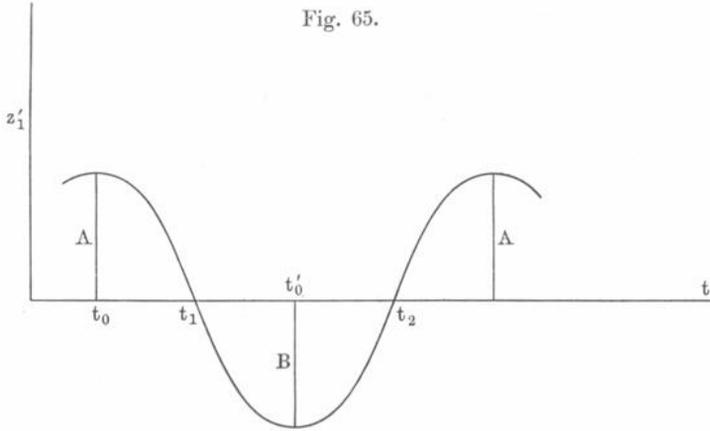


Fig. 65.

Aussicht auf Erfolg hat, wenn sich die genannte Curve mit einiger Sicherheit herstellen lässt. Zunächst wird der Curvenzug T oder n erkennen lassen, darauf wird man die Beobachtungen, welche zu Zeiten gehören, die sich um Vielfache der Umlaufzeit T unterscheiden, zusammenziehen und so die Sicherheit des Curvenzuges zwischen zwei

Zeiten $t = t_0$ und $t = t_0 + T$ beträchtlich erhöhen. Mit Hilfe eines Planimeters oder ähnlicher Hilfsmittel kann dann sofort die Fläche angegeben werden, die zwischen der Curve und zwei beliebigen Ordinaten liegt. Da nun $\frac{dz}{dt}$ eine rein periodische Function von A mit der Periode T ist, so ergibt sich aus (19):

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\xi}{dt} \cdot dt.$$

Mit diesem Γ ergeben sich die periodischen Theile z'_1 von $\frac{d\xi}{dt}$ durch Subtraction, was übrigens nichts Anderes aussagt, als dass nunmehr die Abscissenaxe in der Zeichnung so gelegt ist, dass die Ordinaten die periodischen Theile z'_1 bedeuten. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$C = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1-e^2}},$$

so wird also:

$$z'_1 = C[e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)] \dots \dots \dots (21)$$

Aus der Curve (Fig. 65) kann man leicht den grössten positiven Werth A und den absolut grössten negativen Werth $-B$ von z'_1 , welche den Zeiten t_0 und t'_0 entsprechen sollen, entnehmen. Man hat also:

$$\begin{aligned} A &= C(e \cos \lambda + 1) \\ -B &= C(e \cos \lambda - 1), \end{aligned}$$

woraus:

$$2C = A + B, \quad A - B = 2C e \cos \lambda \dots \dots \dots (22)$$

und die Gleichung (21) kann man jetzt schreiben:

$$z'_1 = \frac{A - B}{2} + \frac{A + B}{2} \cos(v + \lambda).$$

Aus der Zeichnung nimmt man weiter die beiden auf einander folgenden Zeiten t_1 und t_2 , für welche $z'_1 = 0$. Die diesen Zeiten entsprechenden wahren Anomalien seien: $v = v_1$ und $v = v_2$. Es wird also:

$$\cos(v_1 + \lambda) = \cos(v_2 + \lambda) = -e \cos \lambda = -\frac{A - B}{A + B} \dots \dots \dots (23)$$

Die Anwendung eines Planimeters erlaubt die Grössen:

$$\int_{t_0}^{t_1} z'_1 dt = z_1 \qquad \int_{t'_0}^{t_2} z'_1 dt = z_2$$

anzugeben. Zwischen t_0 und t_1 ist z'_1 positiv, d. h. die z -Coordinate nimmt zu. t_0 entspricht also der Zeit des Durchganges durch den aufsteigenden Knoten, t'_1 dem absteigenden Knoten. Es ist demnach $\sin(v_1 + \lambda)$ positiv und $\sin(v_2 + \lambda)$ negativ anzusetzen. Daraus folgt also:

$$\left. \begin{aligned} \cos(v_1 + \lambda) &= -\frac{A-B}{A+B} & \cos(v_2 + \lambda) &= -\frac{A-B}{A+B} = \cos(v_1 + \lambda) \\ \sin(v_1 + \lambda) &= +2\frac{\sqrt{AB}}{A+B} & \sin(v_2 + \lambda) &= -2\frac{\sqrt{AB}}{A-B} = -\sin(v_1 + \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Da nun:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \sin(v_1 + \lambda) \sin i \\ z_2 &= r_2 \sin(v_2 + \lambda) \sin i, \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + e \cos v_2}{1 + e \cos v_1} = \frac{\sin(v_1 + \lambda) - e \sin \lambda}{\sin(v_1 + \lambda) + e \sin \lambda}$$

und hieraus:

$$e \sin \lambda = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \cdot \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} \dots \dots \dots (25)$$

Dadurch sind die Grössen C , e und λ eindeutig bestimmt. τ kann man der Zeichnung entnehmen. Für $t = \tau$ wird $v = 0$, d. h.:

$$z'_1 = C(1 + e) \cos \lambda.$$

Man sucht also die diesem z'_1 entsprechende Zeit auf. Unter Umständen, nämlich in der Nähe von t_0 und t'_0 , wird dieses Verfahren aber ungenau. Es ist dann besser, t_1 zu nehmen, für welches $z'_1 = 0$ wird. Man kennt dann nach (24) $v_1 + \lambda$ und, da λ bekannt ist, ist es auch v_1 . Man hat nun noch die Formeln anzuwenden:

$$\left. \begin{aligned} tg \frac{1}{2} E_1 &= tg \frac{v_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \\ t_1 - \tau &= \frac{1}{n} (E_1 - e \sin E_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Auf diese Weise sind alle überhaupt bestimmbaren Elemente berechnet. Die weitere Verbesserung erfolgt nach bekannten Methoden, etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Aufstellung der Differentialformeln macht nicht die geringsten Schwierigkeiten, und es wird deshalb genügen, diese Formel einfach anzuführen:

$$\left. \begin{aligned} dz'_1 &= \frac{z'_1}{C} \cdot dC - C[e \sin \lambda + \sin(v + \lambda)] \cdot d\lambda \\ &+ \left[\cos \lambda - \frac{\sin v \sin(v + \lambda)}{1 - e^2} (2 + e \cos v) \right] C \cdot de \\ &+ \frac{\sin(v + \lambda) \cdot (1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} C [n d\tau - (t - \tau) dn] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Die spectrokopischen Messungen erlauben also nur die Bestimmung von fünf Bahnelementen. Andererseits aber ergänzen sie in zwei Richtungen die Bahnbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen. Zuerst ist klar, dass man durch die Angabe der Grösse von $\frac{dz}{dt}$ die Zweideutigkeit in der Bestimmung der Knotenlänge heben kann;

hierzu genügen spectroscopische Beobachtungen, die nur eine solche Genauigkeit besitzen, dass sie über das Vorzeichen von $\frac{dz}{dt}$ eine Entscheidung treffen. Zweitens liefern aber die spectroscopischen Messungen dadurch eine neue Beziehung, dass sie die Geschwindigkeiten in absolutem Maasse (Kilometern) angeben. Hat man aus Mikrometerbeobachtungen die Doppelsternbahn abgeleitet, so geben in Verbindung mit ihnen die spectroscopischen Messungen die Parallaxe des Doppelsternes und die Summe beider Massen. Denn die ersteren geben a in Bogensekunden = a'' , C dagegen bestimmt dieselbe Grösse in Kilometern. Die Parallaxe des Sternes in Secunden p'' ist dann:

$$p'' = \frac{a''}{a} \cdot R,$$

wo R , die Entfernung Erde-Sonne, sowie a in Kilometern angesetzt ist. Die Gesamtmasse ist gegeben durch die Formel:

$$m + m' = \frac{n^2 a^3}{k^2}.$$

Wenn nur die Verschiebungen der Spectrallinien des einen Sternes beobachtet sind, so ist durch C und n nicht a , sondern nur:

$$a_1 \sin i$$

gegeben, und man kann weitere Beziehungen nicht aufstellen, da auch die relative Stellung der beiden Weltkörper gegen einander der Beobachtung nicht zugänglich ist. Bei den Veränderlichen vom Algoltypus geben aber die photometrischen Beobachtungen, d. h. die Verfolgung der Lichtvariation, weitere Daten. So sind aus diesen Beobachtungen für Algol bestimmbar die Verhältnisse: $a : \varrho : \varrho'$, wo ϱ und ϱ' die Radien der beiden als Kugeln betrachteten Massen m und m' bedeuten; hierbei ist allerdings noch vorausgesetzt, dass die Masse m' ganz dunkel ist und die Masse m sich als eine überall gleich helle Scheibe darstellt. Als bekannt dürfen also angenommen werden:

$$\lambda = \frac{\varrho'}{\varrho} \quad \text{und} \quad a = \frac{a}{\varrho}.$$

Die beiden Gleichungen:

$$n^2 a^3 = k^2 (m + m_1) \quad a_1 = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot a$$

kann man dann auch so schreiben:

Es bezeichne v die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne, \mathcal{A} die Entfernung Sonne—Erde, R den Sonnenradius und die Dichtigkeit der Sonne werde = 1 gesetzt. Ist weiter D die mittlere Dichtigkeit der beiden Massen m und m' , deren Dichtigkeiten δ und δ' sind, so giebt die erste der beiden genannten Gleichungen:

$$D = \frac{\left(\frac{n}{v}\right)^2 \cdot R^3}{\mathcal{A}^3 (1 + \lambda^3)} \cdot \alpha^3$$

die Dichtigkeit D und die zweite:

$$a = a_1 \left(1 + \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Nimmt man z. B. in ganz roher Annäherung als Resultate der photometrischen Beobachtungen für Algol an: $\alpha = 6$, $\lambda^3 = \frac{1}{2}$, $\frac{n}{v} = 127,4$, so ergeben diese für sich:

$$D = 0,237.$$

Die spectroscopischen Messungen ergeben unter Voraussetzung einer Kreisbahn und für $i = 90^\circ$: $n a_1 = 42$ km in der Secunde, also:

$$a = 1656000 \text{ km} \left(1 + 2 \frac{\delta}{\delta'} \right).$$

Die weitere Annahme jedoch $\delta = \delta_1$, die oft gemacht wird, ist jedenfalls sehr gewagt; man kann freilich diese oder ähnliche Hypothesen bei völliger Unkenntniss über die wahre Sachlage kaum entbehren.

So enge Doppelsterne, wie Algol, werden sich nicht mehr in aller Strenge nach den einfachen Kepler'schen Gesetzen um einander bewegen können. Da man diesen Weltkörpern einen Aggregatzustand zuschreiben muss, der jedenfalls von dem der völligen Starrheit verschieden ist, oder wenigstens in früheren Zeiten davon verschieden gewesen sein muss, so werden sie nicht unbeträchtliche Abweichungen von der Kugel-form zeigen, und diese in Verbindung mit der Fluthreibung wird auf die Revolutionsbewegung einwirken müssen. Selbst wenn diese Einwirkungen an sich klein sind, werden dieselben mit der Zeit, nach Art säcularer Störungen, beträchtliche Veränderungen der Bahnen erzeugen können. So ist leicht einzusehen, dass unter Umständen bemerkbare säculare Bewegungen des Periastrons eintreten müssen, wie sich auch bei einigen Veränderlichen vom Algoltypus zu zeigen scheint. Es ist gegenwärtig nicht möglich, zu sagen, wie sich diese Bahnveränderungen in unbeschränkt langer Zeit gestalten, ob die augenblicklich stattfindenden Bahnen dauernd umgestaltet, oder in langen Perioden früheren Bewegungszuständen wieder näher gebracht werden. Die Beantwortung dieser Fragen hängt wesentlich davon ab, wie man die fortschreitende Abkühlung der betreffenden Weltkörper vor sich gehen lässt, und schon hieraus lassen sich die grossen Schwierigkeiten abschätzen, welche hier zu überwinden sind. Man muss also die schwierige Frage nach der „Stabilität“ solcher Systeme vor der Hand gänzlich offen lassen, und wenn man diese dadurch zu beantworten glaubte, dass man einfach die durch die allerelementarsten und bekanntesten Rechnungen darstellbare Thatsache, dass die Deformationen, welche die beiden Himmelskörper gegenseitig auf einander hervor-rufen, klein seien, wenn man die Massen als homogen annimmt und die höheren Potenzen der deformirenden Kräfte vernachlässigt, so beweist ein solches Verfahren sehr wenig Einsicht und Verständniss. Leicht kann man dagegen zeigen, dass in solchen engen Doppelsternsystemen, wenn nur die Fluthreibung eine gewisse Grenze nicht überschreitet und die Excentricität der Bahn nicht gross ist, die Umlaufszeit sich vergrössern muss, und dass dasselbe auch mit der mittleren Entfernung beider Sterne von einander und der Excentricität der relativen Bahn geschieht. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Dinge näher einzugehen.

Zum Schlusse mag noch auf gewisse Betrachtungen hingewiesen werden, die zuerst von Savary angeregt worden sind. Die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bewirkt, sobald nur die wahre Doppelsternbahn nicht zufällig genau senkrecht auf dem Visionsradius steht, dass die scheinbare gegenseitige Stellung beider Componenten nicht der wahren zu irgend einer Zeit entspricht, vielmehr gehört der beobachtete Ort eines jeden der beiden Sterne einer anderen Zeit an, die man erhält, wenn man von der Beobachtungszeit die Lichtzeit abzieht. Diese ist aber für beide Sterne verschieden, weil ihre Entfernungen vom Beobachter ungleich sind. Letztere ändern sich aber periodisch, und wenn die Grösse dieses hierdurch entstehenden periodischen Einflusses durch die Beobachtungen festzustellen möglich wäre, so könnte man die Dimensionen der

Doppelsternbahn in Lichtzeit angeben und hierdurch die Parallaxe des Doppelsternes finden, wie auch die Zweideutigkeit in der Knotenlängenbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen heben. Dieser auf den ersten Blick sehr bestechende Gedanke kann aber in Wirklichkeit nicht realisirt werden, wie die Untersuchungen von Villarceau¹⁾, Birkmajer²⁾ und H. Seeliger³⁾ dargethan haben. Savary hat nämlich bei seinem Vorschlage übersehen, dass nicht der Hauptstern, in Bezug auf welchen die Bewegung des zweiten Sternes angegeben wird, sondern der Schwerpunkt des ganzen Systemes sich gleichförmig im Raume bewegt. Hierdurch tritt eine neue Unbekannte, nämlich das Verhältniss der beiden Massen auf, und die Dimension der Bahn kann nicht mehr für sich bestimmt werden.

Noch mag erwähnt werden, dass man die Möglichkeit erwogen hat, ob nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Helligkeit der Lichtquelle abhängt. Solche Einflüsse sind, wenn auch nicht gerade besonders wahrscheinlich, so doch denkbar, allerdings können sie nur in sehr kleinem Maassstabe vorkommen, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte physikalische Messungen ergeben haben. In der Bewegung der Doppelsterne würden sich dadurch, dass die beiden Componenten sehr oft an Helligkeit überaus verschieden sind, sehr merkwürdige Unregelmässigkeiten bemerkbar machen, welche H. Seeliger an anderen Orten näher untersucht hat.

Hundertundeinundzwanzigste Vorlesung.

Anhang zu der Berechnung der Doppelsterne. Grundzüge der Theorie des Saturnringes.

Der Planet Saturn ist bekanntlich ausser seinem Reichthum an Satelliten noch dadurch vor den anderen Planeten unseres Systemes ausgezeichnet, dass ihn mehrere concentrische, in der Richtung seiner Rotationsaxe ungemein abgeplattete Ringe umgeben. Wir wollen hier wenigstens die Grundzüge der Theorie der Erscheinungen, welche die Gesamtheit dieser Ringe bietet, vom Standpunkte dieses Buches behandeln. Wir schliessen also diejenigen Fragen aus, die nur durch die schwierigeren Theile der Gravitationslehre theoretisch beantwortet werden können, wie die Störungen, welche der Ring erleidet und ausübt. Unter Anderem nehmen wir ohne weitere Discussion als Thatsache hin, dass die Ringe (der Kürze halber wird im Folgenden stets von einem einzigen Ringe gesprochen werden), kleine Abnormitäten ausgenommen, überall von dem Saturnsphäroid gleich weit abstehen und ein zu der Rotationsaxe des Saturn symmetrisches System bilden. Die Beobachtungen stehen mit dieser Annahme in keinem nachweisbaren Widerspruch; es scheint unter allen Verhältnissen der Mittelpunkt der Scheibe des Saturn mit dem Mittelpunkte der Ellipse, als welche der Ring sich uns präsentirt, zusammenzufallen.

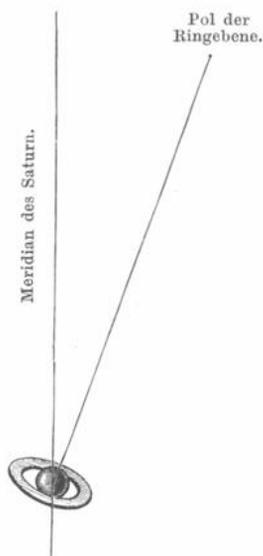
¹⁾ *Connaissance des temps* für 1878 add.

²⁾ L. Birkmajer, Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten etc. *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, II. Abth., Bd. 93, 1886.

³⁾ H. Seeliger, Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. *Sitzungsberichte der Münchener Akademie* 1889, S. 19 ff.

Wenn man sich die Erscheinung des Ringes durch die einer grossen Zahl von Trabanten ersetzt denkt¹⁾, welche hinter und neben einander kreisförmige Bahnen durchlaufen, so ist die Bestimmung einer solchen Bahn auf einen sehr leichten Fall einer Doppelsternbahn zurückgeführt. Denn die Projectionseellipse ist bei jeder Beobachtung unmittelbar vollständig gegeben, e ist gleich 0, die Zeit des Perihels also beliebig; die Umlaufzeit übt auf die Erscheinung des Ringes keinen leicht zu bemerkenden Einfluss aus und muss aus der Verfolgung von auffallenden Punkten des Ringes mittelst sehr starker Fernröhre bestimmt werden. Die Knotenlinie der Ringebene fällt bei obiger Behandlung mit der Richtung der grossen Axe der Ringellipse zusammen. Der Quotient aus der Division der grossen Axe in die kleine ist der Cosinus der Neigung. Endlich ist $\pi - \Omega$ beliebig, wenn es nur der über T , die Zeit des Perisaturniums gemachten

Fig. 66.



Annahme entspricht. Nun wünscht man allerdings diese Elemente nicht in Beziehung auf die im Grossen nach der Stellung von Saturn und Erde veränderliche Ebene der Projectionseellipse zu wissen, sondern in Beziehung auf den Aequator oder auf die Ekliptik. Dazu gelangt man durch folgende einfache Betrachtung. Offenbar hängt die Oeffnung des Saturnringes oder seine Neigung gegen die Ebene der Projectionseellipse davon ab, welchen Winkel die Verbindungslinie Saturn-Erde mit der Ringebene bildet, mit anderen Worten, von der chronocentrischen Breite der Erde, aber auf die Ringebene als die Fundamentebene bezogen. Die Neigung der Ebene der Projectionseellipse ist nichts Anderes als der Abstand des chronocentrischen Ortes der Erde vom Pole des grössten Kreises der Sphäre, welcher der Ringebene entspricht.

Den Pol des grössten Kreises, welcher der Ebene des Ringes entspricht, findet man hiernach, da der chronocentrische Ort der Erde dem geocentrischen Orte des Saturn diametral entgegengesetzt ist, durch ein

sehr einfaches Verfahren. Sind a und b die halbe grosse und die halbe kleine Axe des Ringes, wie sie die Messungen unmittelbar ergeben, so wird der Abstand des geocentrischen Ortes des Saturn von jenem Pole durch die Gleichung:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

gefunden; man gelangt daher zu jenem Pole, wenn man den Bogen i in der Richtung der kleinen Axe, und zwar nach derjenigen Seite der Ringebene hin, welche der Erde zugekehrt ist, aufträgt (siehe Fig. 66).

Dieselbe Betrachtungsweise, welche auf diese Construction geführt hat, liefert uns ohne Weiteres die Formeln zur Berechnung des Positionswinkels p der Richtung der kleinen Axe, wenn der Pol der Ringebene einmal bekannt geworden ist, und das Verhältniss der Axen. Die letzteren werden auch ihrer Grösse nach bekannt, wenn man eine von ihnen bei bekannter Entfernung des Saturn vom Auge einmal

¹⁾ Empirisch bestätigt wurde diese Anschauung durch die berühmten zu Ende der achtziger Jahre gemachten Barnard'schen Beobachtungen. Siehe deren theoretische Discussion: „Ueber die Japetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem vom Jahre 1889“. *Astronom. Nachrichten*, Bd. 137, Nr. 3280. — Anmerkung des Herausgebers der 2. Auflage.

gemessen hat. Es seien α und δ die geocentrische Rectascension und Declination des Saturn, A und D beziehungsweise dieselben Coordinaten für den mit der Erde auf gleicher Seite gelegenen Pol, so wird nach der bekanntesten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos i = -\frac{b}{a} = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)^1) (1)$$

Ferner ergibt sich für den Positionswinkel der nördlichen Hälfte der kleinen Axe:

$$\frac{\sin p}{\sin(\alpha - A)} = -\frac{\cos D}{\sin i} (2)$$

Ist c der Halbmesser des Ringes in Theilen der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde, A die Entfernung des Saturn von der Erde, so ist die halbe grosse Axe der Ringellipse in Bogensekunden:

$$a = \frac{c}{A} (3)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man Lage und Aussehen des Saturnringes für irgend eine Zeit, wenn die Grössen A , D und c abgeleitet sind. Wenn man auf die obige Construction noch einmal die erwähnte Grundformel anwendet, jedoch so, dass i aus dem gemessenen Axenverhältniss und ausserdem δ und p als bekannt gelten, so ergibt sich:

$$\sin D = \sin \delta \cos i + \cos \delta \sin i \cos p (4)$$

wonach dann weiter unter Zuziehung von (2) auch A bekannt wird. Aus einem gemessenen a folgt endlich $c = \alpha A$.

Rechnungsbeispiele. Am 31. December 1849 war die Südseite des Ringes sichtbar und der Positionswinkel des nördlichen Theiles der kleinen Axe $p = 3^\circ 52',1$, ferner $b = -1''57$, $a = 19''68$, $\alpha = 0^\circ 42',7$, $\delta = -1^\circ 27',7$, $\log A = 0,97906$. Hieraus sollen A , D und c bestimmt werden. Nach Gleichung (4) ergibt sich, da hier $i = 85^\circ 25',2$,

$$D = 82^\circ 50',0$$

als Declination des Nordpols der Ringebene. Nach Gleichung (2) wird:

$$\alpha - A = -32^\circ 37',1, \text{ also } A = 33^\circ 19',8$$

als Rectascension des genannten Poles; endlich wird:

$$\log c = 2,27309.$$

Wollten wir aus diesen Werthen umgekehrt die Erscheinung des Saturn für den 1. Januar 1860 herleiten, wobei wir zur Berücksichtigung der Präcession des Ringpols, aber in Vernachlässigung anderer kleiner, hier nicht zu behandelnder Correctionen:

$$\begin{aligned} A &= 33^\circ 42',1 \\ D &= 82^\circ 52',8 \end{aligned}$$

setzen, so bekommen wir, da für jene Zeit die geocentrische Rectascension des Saturn $\alpha = 148^\circ 13',4$, die Declination $\delta = +14^\circ 15',3$ ist:

$$\begin{aligned} \log A &= 0,92814 \text{ nach Formel (1)} \\ i &= 78^\circ 47',4, \end{aligned}$$

¹⁾ Hierbei ist b negativ zu nehmen, wenn die verdeckte Hälfte der kleinen Axe die südliche ist. Nach dieser Bestimmung über die Vorzeichen, und wenn A und D sich auf den Nordpol der Ringebene beziehen sollen, wird der Abstand i des Saturnortes von jenem Pole ein stumpfer Winkel, wenn $\frac{a}{b}$ positiv ist, d. h. die nördliche Fläche des Ringes uns zugekehrt ist.

und daraus weiter:

$$p = - 6^{\circ} 38',7,$$

endlich:

$$a = 22'',13, \text{ die grosse Axe} = 44'',26,$$

$$b = - 4'',30, \text{ die kleine Axe} = - 8'',60.$$

Der südliche Theil der kleinen Axe wird durch die Scheibe des Saturn verdeckt.

Es mag hier noch angegeben werden, dass nach Bessel die Länge L des Nordpols der Ringebene auf die bei den Beobachtungen übliche bewegliche Ekliptik bezogen, d. h. mit Rücksicht auf die Säcularstörungen, nach der Formel:

$$L = 76^{\circ} 53' 8'',9 + 46'',462 (t - 1800)$$

die Breite B nach den folgenden:

$$B = 61^{\circ} 49' 44'',7 + 0'',350 (t - 1800)$$

zu berechnen ist.

Hundertundzweiundzwanzigste Vorlesung.

Kriterium für die Sichtbarkeit des Saturnringes.

Der Ring des Saturn bleibt nicht immer sichtbar. Seiner schon erwähnten, ungemein starken Abplattung wegen bietet der Ring den erleuchtenden Strahlen der Sonne fast gar keine Fläche dar, wenn die Sonne sich in der Ebene des Ringes befindet; die Ringellipse reducirt sich dann auf eine äusserst feine helle Linie, welche aber nur in stärkeren Fernröhren noch wahrgenommen werden kann. Beleuchtet die Sonne die uns entgegengesetzte Seite des Ringes, so wird der Ring für uns ganz verschwinden und sein Schlagschatten auf der Scheibe des Planeten bemerkbar werden. Zu gewissen anderen Zeiten sind Ring und Schatten gleichzeitig zu sehen. Das Sichtbarwerden des Ringes geht in der Weise vor sich, dass zuerst einzelne Punkte am äussersten Rande hervortreten; in umgekehrter Reihenfolge verschwinden solche Punkte bei dem Unsichtbarwerden.

Wir wollen nun im Folgenden die Grundbedingungen für die genannten Erscheinungen und ein Kriterium dafür, ob der Ring sichtbar sei oder nicht, zu entwickeln suchen.

Zunächst ist einleuchtend, dass die Zeiten des Durchganges der Sonne durch die Ringebene zusammenfallen werden mit den Zeiten, wo der heliocentrische Ort des Saturn, am Himmel einen grössten Kreis durchwandernd, den die Ringebene repräsentirenden grössten Kreis passirt, mit anderen Worten, wo der heliocentrische Ort des Saturn um 90° von jenem Pole des Ringes, dessen Rectascension und Declination mit A und D bezeichnet wurde, entfernt ist. Verstehen wir daher unter (a) und (d) beziehungsweise die heliocentrische Rectascension und Declination des Planeten, so wird sich die Beleuchtung auf die blosse Ringkante beschränken, wenn:

$$\sin(d) \sin D + \cos(d) \cos D \cos[(a) - A] = 0 \dots\dots (1)$$

da die erste Seite dieser Gleichung den Cosinus des Abstandes des heliocentrischen Ortes von dem Pole der Ringebene vorstellt. Ist derselbe Cosinus positiv, so wird die Südseite des Ringes beleuchtet sein, wenn negativ, die Nordseite. Die Beleuchtung der einen oder anderen wird um so intensiver sein, je mehr der Cosinus von Null verschieden.

Ob die beleuchtete Seite uns zugekehrt ist oder die dunkle, wird davon abhängen, ob der heliocentrische und der geocentrische Ort des Planeten auf gleiche oder entgegengesetzte Seiten des der Ringebene entsprechenden grössten Kreises der Sphäre fallen, d. h. also davon, ob die linke Seite von (1) und der Ausdruck:

$$\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A),$$

welcher den Cosinus des Abstandes des geocentrischen Ortes vom Ringpol vorstellt, gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die Frage, ob der Ring sichtbar sei, ist demnach zu bejahen, so oft der Ausdruck:

$$\frac{\sin \delta \cdot \sin D + \cos \delta \cdot \cos D \cos(\alpha - A)}{\sin(d) \sin D + \cos(d) \cos D \cos[(a) - A]}$$

positiv, zu verneinen, so oft derselbe negativ wird.

In Anbetracht aber, dass die Division des Ausdruckes durch $\frac{\cos \delta}{\cos(d)}$, d. h. durch eine stets positive Grösse, keine Aenderung des Vorzeichens hervorbringt, kann man noch einfacher sagen:

Die Frage, ob der Ring des Saturn sichtbar sei, ist zu bejahen, wenn der numerische Werth von:

$$\frac{\text{tg } \delta \cdot \text{tg } D + \cos(\alpha - A)}{\text{tg}(d) \text{tg } D + \cos[(a) - A]}$$

ein bejahendes Vorzeichen bekommt, im anderen Falle zu verneinen.

Das Verschwinden des Zählers vorgenannten Ausdruckes deutet an, dass die Erde, dasjenige des Nenners, dass die Sonne sich in der Ringebene befindet.

Rechnungsbeispiel. Es wird gefragt, ob der Saturnring für die Mitternacht des 1. Sept. 1847 Berl. Zeit sichtbar war. Der heliocentrische Ort des Saturn war um jene Zeit:

$$(a) = 341^{\circ} 45',1 \qquad (d) = - 9^{\circ} 42',7$$

der geocentrische:

$$\alpha = 431^{\circ} 55',0 \qquad \delta = - 9^{\circ} 52',5.$$

Nehmen wir, wie in Vorlesung 121, $A = 33^{\circ} 19',8$, $D = 82^{\circ} 50',0$ an, so finden wir den Zähler des obigen Ausdruckes gleich $- 0,7607$, den Nenner gleich $- 0,7397$; folglich war der Ring sichtbar, und zwar seine Nordseite erleuchtet.

Im Laufe des 21. April des folgenden Jahres wechselte der Zähler, durch Null hindurchgehend, das Vorzeichen, der Ring verschwand daher bis zum 3. September desselben Jahres, wo der Nenner ebenfalls das Vorzeichen wechselte. Am 12. September, wo der Zähler von Neuem das Zeichen wechselt, verschwindet der Ring wiederum bis zum 19. Januar 1849, wo dann eine lange Periode der Sichtbarkeit beginnt. Mit Hilfe des obigen Kriteriums kann man jeden solchen Wechsel mit Leichtigkeit finden.

Eine längere Dauer der Sichtbarkeit des Ringes wird immer eintreten, wenn sich der heliocentrische Ort des Planeten so weit vom grössten Kreise der Ringebene entfernt, dass ein Hinübertreten des geocentrischen Ortes auf die andere Seite nicht mehr möglich ist. Besonders in den Oppositionen des Saturn wird ein Unsichtbarsein des Ringes zu den Seltenheiten gehören, da bei der geringen Neigung aller Bahnen der grossen Planeten, so auch des Saturn, gegen die Ekliptik in der Opposition der geocentrische Ort dem heliocentrischen ungemein nahe liegt. Nach derselben Betrachtung kann man, wenn man bemerkt, dass die Neigung der Ringebene gegen den Erdäquator nur etwa 7° beträgt, auch leicht übersehen, dass ein Verschwinden des Ringes nicht vorkommen wird, so lange der geocentrische Ort des Saturn weit von den Aequinoctien entfernt ist.

Hundertunddreiundzwanzigste Vorlesung.

Berechnung der Satellitenbahnen durch Zurückführung auf die
Berechnung einer Doppelsternbahn.

Bekanntlich sind die grösseren Planeten unseres Systemes, mit Ausnahme von Mercur und Venus, von Satelliten begleitet. Auf diese Körper kann man mit besonderem Vortheil die im „Anhang“ des vorliegenden Werkes angegebene Leuschner'sche Methode der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen als erste nunmehr vorliegende directe Methode der Bahnbestimmung für Satelliten anwenden (vergleiche auch die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe, S. XXIV).

Man könnte das Problem auch auf die für Planetenbahnen gegebenen Vorschriften zurückführen, oder auf diejenigen für Doppelsterne. Im ersteren Falle würden wir die Beobachtungen als aus dem jedesmaligen Durchschnittspunkte des Visionsradius mit einer durch den Hauptkörper des Satelliten gelegten, dem Erdäquator oder der Ekliptik parallelen Ebene geschehen betrachten, dabei die Coordinaten auf den Hauptkörper als Nullpunkt bezogen. Hierbei tritt uns indessen der Uebelstand entgegen, dass die Formeln Grössen verschiedener Ordnung gleichzeitig enthalten; die Trennung ist nicht ganz einfach und überhaupt dieser Weg nicht zu empfehlen. Auch muss bei solcher Behandlung des Problems der Satellitenbahnen entweder die Masse des Hauptkörpers oder die Umlaufzeit des Satelliten als bekannt angesehen werden.

In praktischer Hinsicht ist einer solchen Bestimmungsweise vorzuziehen die Zurückführung der Bahnbestimmung auf die einer Doppelsternbahn. Wir erreichen dies durch ganz ähnliche Betrachtungen wie bei dem Saturnringe, den wir als eine sichtbare Trabantenbahn betrachteten. Dort allerdings hatten wir zwei Erleichterungen, auf welche wir hier verzichten müssen; es wird uns für eine bestimmte Zeit immer nur ein einziger Punkt der Projectionsellipse, nicht werden sie alle auf einmal gegeben; ferner dürfen wir die Excentricitäten der Bahn hier nicht gleich Null setzen.

Aber auch hier lassen sich wieder durch den Mittelpunkt der Scheibe des Hauptkörpers zwei um 90° in Position verschiedene Richtungen oder Axen von solcher Beschaffenheit auffinden, dass die scheinbaren Abstände des Trabanten von der einen gerade so geschehen werden, als beobachtete man aus der Richtung des Pols der Bahnebene des Trabanten, d. h. also ohne perspectivische Verkürzung, die Abstände von der anderen aber mit perspectivischer Verkürzung. Die scheinbaren Dimensionen der Bahn können der Entfernung des Hauptkörpers von der Erde umgekehrt proportional gesetzt werden. Die bei dem Saturnring angestellten Betrachtungen zeigen, dass die perspectivischen Verkürzungen, wenn sich das Auge vom Pole der Trabantenbahn entfernt, parallel dem durch den Hauptkörper und den Pol gelegten grössten Kreise, welcher perspectivisch durch eine Gerade vorgestellt wird, stattfinden; senkrecht zu dieser Geraden werden die Abstände nicht geändert. Nennen wir also ψ den Positionswinkel des nach dem Nordpol der Trabantenbahn gerichteten grössten Kreises, A und D beziehungsweise die Rectascension und Declination des Nordpols, α und δ die des geocentrischen Ortes des Hauptkörpers, Δ dessen Entfernung, p und q beziehungsweise den Positionswinkel und die Distanz des Satelliten, so haben die Grössen $q \sin(p - \psi)$ gar keine Verkürzung durch geänderte Richtung der Gesichtslinie, die $q \cos(p - \psi)$ dagegen eine solche im Verhältniss von 1 zu $\cos \gamma$ erlitten, wenn nämlich γ den Abstand des geocentrischen Ortes vom erwähnten Pole vorstellt. Gesetzt, es seien A und D bekannt, so hat man

also die $\varrho \sin(p - \psi)$ mit \mathcal{A} , die $\varrho \cos(p - \psi)$ dagegen mit $\frac{\mathcal{A}}{\cos \gamma}$, d. h. mit:

$$\frac{\mathcal{A}}{[\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)]}$$

zu multipliciren, um diese Grössen so zu haben, wie sie aus einer zur Trabantenbahnebene senkrechten, durch den Hauptkörper gelegten Geraden und zwar aus der Einheit der Entfernung würden beobachtet worden sein.

Man hat nun, was die Bestimmung der Elemente betrifft, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Umlaufzeit oder auch die Masse des Systemes bekannt ist, oder ob dieselbe ebenfalls erst aus den Beobachtungen hergeleitet werden soll. In dem ersteren Falle genügen, wie wir sogleich sehen werden, drei vollständige Beobachtungen des Satelliten mit den Positionswinkeln p, p', p'' und den Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$. Denn es werden dadurch, immer vorausgesetzt, dass A und D bekannt seien, drei Punkte der Bahn und die Lage des Brennpunktes, d. h. die ganze Ellipse gegeben. Es existiren dann zur Prüfung der Richtigkeit der Werthe von A und D die beiden von einander unabhängigen Bedingungen, dass jeder Sector zu der ganzen Ellipse seinem Flächeninhalte nach in dem Verhältniss stehen soll, wie es die Zeitintervalle verlangen. Hiernach kann man also leicht A und D , für die meist sogar Annäherungen bekannt sind, auf indirectem Wege bestimmen. Mit Rücksicht auf die hier etwas geänderte Bezeichnung hat man unter Anwendung der Gleichung (2) der Vorlesung 121:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \psi}{\sin(A - \alpha)} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma} \\ \frac{\sin \psi'}{\sin(A - \alpha')} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma'} \\ \frac{\sin \psi''}{\sin(A - \alpha'')} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

wobei die Accente zur Unterscheidung der zu den drei Zeiten t, t', t'' gehörenden Beobachtungen gebraucht worden sind. Die Reduction der Positionswinkel und Distanzen auf die aus der Entfernung 1) ohne Verkürzung gesehene Bahn geschieht nun nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} R \sin(P - \psi) &= \varrho \sin(p - \psi) \cdot \mathcal{A} \\ R \cos(P - \psi) &= \varrho \frac{\cos(p - \psi)}{\cos \gamma} \cdot \mathcal{A} \\ R' \sin(P' - \psi') &= \varrho' \sin(p' - \psi') \cdot \mathcal{A}' \\ R' \cos(P' - \psi') &= \varrho' \frac{\cos(p' - \psi')}{\cos \gamma'} \cdot \mathcal{A}' \\ R'' \sin(P'' - \psi'') &= \varrho'' \sin(p'' - \psi'') \cdot \mathcal{A}'' \\ R'' \cos(P'' - \psi'') &= \varrho'' \frac{\cos(p'' - \psi'')}{\cos \gamma''} \cdot \mathcal{A}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

wobei P, P', P'' die drei reducirten Positionswinkel, R, R', R'' die zugehörigen reducirten Distanzen vorstellen. Ehe wir jedoch mit diesen Positionswinkeln und Distanzen weiter operiren, müssen wir die ersteren noch auf einen und denselben Meridian der Sphäre, auf einen gewissen ersten Meridian reduciren, wie es früher nöthig war, die Doppelsternbahnmessungen von dem Einflusse der Präcession zu befreien. Die im Vorhergehenden erhaltenen Positionswinkel beziehen sich auf den jedesmaligen Meridian des Jupiterortes. Es mag hier einfach darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese Reduction bei den P der folgenden Gleichungen als ausgeführt vorausgesetzt wird,

weil wir in nächster Vorlesung einen directen Weg zu allen diesen Reductionen werden kennen lernen. Es mag ausserdem bemerkt werden, dass die Distanzen besonders bei den Satelliten des Jupiter bedeutende Grösse erlangen können. In solchem Falle muss man berücksichtigen, dass die Dimensionen in der Bahn, welche wir bei Doppelsternen unbedenklich mit $\varrho, \varrho', \varrho''$ identificiren, genau genommen die Tangenten der durch $\varrho, \varrho', \varrho''$ in Secunden gegebenen Schinkel sind; man muss deshalb bei grösserer Strenge statt $\varrho, \varrho', \varrho''$ setzen: $206\,264,8 \text{ tg } \varrho, 206\,264,8 \text{ tg } \varrho', 206\,264,8 \text{ tg } \varrho''$, ebenso bei den R, R', R'' $206\,264,8 \text{ tg } R, 206\,264,8 \text{ tg } R', 206\,264,8 \text{ tg } R''$. Im Folgenden vernachlässigen wir dies der Kürze halber. Zwischen dem Semiparameter der Bahn $a(1 - e^2)$, den Radien-vectoren R, R', R'' und den wahren Anomalien v, v', v'' bestehen nun bekanntlich die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 1 + e \cos v &= \frac{a(1 - e^2)}{R} \\ 1 + e \cos v' &= \frac{a(1 - e^2)}{R'} \\ 1 + e \cos v'' &= \frac{a(1 - e^2)}{R''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ (III)}$$

welche nach einer am Schlusse der Vorlesung 75 gezeigten Umformung ergeben:

$$a(1 - e^2) = \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(v' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v')}{R R' \sin(v' - v) - R R'' \sin(v'' - v) + R' R'' \sin(v'' - v')},$$

oder da offenbar:

$$v' - v = P' - P, \quad v'' - v = P'' - P, \quad v'' - v' = P'' - P',$$

$$a(1 - e^2) = \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P')}{R R' \sin(P' - P) - R R'' \sin(P'' - P) + R' R'' \sin(P'' - P')} \text{ (IV)}$$

Aus den Gleichungen (III) ergibt sich dann:

$$\left. \begin{aligned} 2 e \cos \frac{1}{2}(v'' + v) \cos \frac{1}{2}(P'' - P) &= a(1 - e^2) \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{R''} \right\} - 2 \\ 2 e \sin \frac{1}{2}(v'' + v) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) &= a(1 - e^2) \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R''} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{ (V)}$$

d. h. die Excentricität e und $v'' + v$, welches mit der bekannten Differenz $v'' - v$ oder $P'' - P$ verbunden die wahren Anomalien liefert. Auch findet man, wenn π den reducirten Positionswinkel des Perihels vorstellt:

$$\pi = P - v = P' - v' = P'' - v''.$$

v' folgt aus der zweiten der Gleichungen (III). Berechnet man auch noch die mittleren Anomalien, so ist man vollkommen im Stande, eine in Beziehung auf A und D gemachte Hypothese zu prüfen, eventuell zu verbessern.

Sehr abgekürzt wird die Rechnung, wenn man eine vierte vollständige Beobachtung zuzieht. Es muss dann die doppelte Bedingung erfüllt sein, dass:

$$\begin{aligned} a(1 - e^2) &= \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P''' - P')}{R R' \sin(P' - P) - R R'' \sin(P'' - P) + R' R'' \sin(P'' - P')} \\ &= \frac{4 R R' R''' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P''' - P) \sin \frac{1}{2}(P'''' - P'')}{R R' \sin(P' - P) - R R''' \sin(P''' - P) + R' R''' \sin(P''' - P')} \\ &= \frac{4 R R'' R''' \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P'''' - P) \sin \frac{1}{2}(P'''' - P'')}{R R'' \sin(P'' - P) - R R''' \sin(P'''' - P) + R'' R''' \sin(P'''' - P'')} \end{aligned}$$

oder es muss, in das Geometrische übertragen, von den drei Ellipsen mit gegebenem Brennpunkte, welche man durch je drei der vier Punkte ziehen kann, jede der anderen congruent werden. Man kann also auch hier zum Zwecke der ersten Versuche für A und B von einem graphischen Verfahren mit Vortheil Gebrauch machen.

Hundertundvierundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Untersuchungen zur Berechnung einer Satellitenbahn.

Bei den Satelliten des Jupiter durchaus (auch bei den helleren des Saturn, obgleich bei diesen schon die optischen Mittel gesteigert werden müssen) bietet die Bestimmung der Umlaufszeit durch Beobachtungen der Wiederkehr zu gleicher Stellung gegen den Jupiter keine sehr grossen Schwierigkeiten dar. Man darf dabei nur nicht vergessen, die geocentrische Bewegung des Hauptplaneten zu berücksichtigen. In anderen Fällen ist die Bestimmungsweise mit der Gefahr, Irrthümer und Verwechslungen zu begehen, verbunden, z. B. in besonders hohem Grade bei den Trabanten des Uranus. Diese lichtschwachen Objecte können bekanntlich nur mit den stärksten Schmitteln beobachtet werden; solche Fernrohre zeigen nun eben vermöge ihrer ausserordentlichen optischen Kraft meistens auch Fixsterne im Hintergrunde, ein Umstand, welcher ungemein erschwerend wirkt, wenn der Planet gerade Theile der Milchstrasse oder andere sternreiche Gegenden durchwandert. Hier ist es sehr wünschenswerth, ein anderes Verfahren, welches von der Kenntniss der Umlaufszeit des Satelliten gar nicht abhängt, einschlagen zu können. Dasjenige, welches wir nun im Folgenden kennen lernen wollen, gewährt einen so gut wie vollständigen Schutz dagegen, dass ein Fixstern für einen Satelliten genommen werde. Um es in der Praxis zur Anwendung zu bringen, ist es nur nöthig, von den kleinen Sternen in der Umgebung des Planeten so viele nach Positionswinkel und Distanz aufzunehmen, als man in der Zeit von einigen Stunden auszuführen vermag; bei grossem Sternenreichthume kann auch ein Netzmikrometer gute Dienste thun.

Wir wollen nun jetzt diese Messungen von dem Einflusse der geocentrischen Bewegung des Planeten auf eine solche Art befreien, dass eine Sichtung der Fixsterne von den Monden und die Reduction der Bahnbestimmung dieser letzteren auf die einer Doppelsternbahn erlangt wird.

Es sei wie früher:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos p \\ y &= \rho \sin p \end{aligned}$$

und z die in den jedesmaligen Visionsradius fallende Componente. Ist α die Rectascension, δ die Declination des Planeten zur Zeit der Beobachtung, so zielt offenbar die X -Axe des Coordinatensystemes nach einem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension durch $180^\circ + \alpha$ und dessen Declination durch $90^\circ - \delta$ ausgedrückt wird.

Die Y -Axe zielt nach einem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension offenbar gleich $90^\circ + \alpha$, dessen Declination gleich Null ist.

Stellen x_0 und y_0 die Coordinaten derselben gemessenen Oerter, wie oben, aber bezogen auf ein System vor, dessen X -Axe nach einem Punkte von der Rectascension $180^\circ + \alpha_0$, der Declination $90^\circ - \delta_0$, dessen Y -Axe einen Ort von der Rectascension $90^\circ + \alpha_0$, der Declination Null zum Zielpunkte hat, so haben wir, um die x_0 und y_0 durch die x , y und z auszudrücken, Gleichungen von der bekannten Form:

$$\begin{aligned} x_0 &= (X_0 X) x + (X_0 Y) y + (X_0 Z) z \} \dots \dots \dots (I) \\ y_0 &= (Y_0 X) x + (Y_0 Y) y + (Y_0 Z) z \} \end{aligned}$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} (X_0 X) &= \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (X_0 Y) &= \sin \delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \\ (X_0 Z) &= \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 X) &= -\sin \delta \sin(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 Y) &= \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 Z) &= +\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Wir können es nun bei Saturn, Uranus, Neptun, auf die es hier fast allein ankommt, ihrer langsamen geocentrischen Bewegung halber stets so einrichten, dass für eine lange Reihe von Beobachtungen die Coëfficienten $(X_0 Z)$ und $(Y_0 Z)$ sehr klein werden. Wir setzen z. B. α_0 gleich dem Mittel aus den Rectascensionen der ersten und letzten Rectascension, ebenso δ_0 gleich der halben Summe der entsprechenden Declinationen; es werden dann bei der ersten Annäherung jene Coëfficienten ganz und gar zu vernachlässigen sein. Ebenso wird man sich erlauben dürfen, $\cos(\alpha - \alpha_0) = 1$, d. h.

$$(X_0 X) = \cos(\delta - \delta_0), \quad (X_0 Y) = 0, \quad (Y_0 X) = 0, \quad (Y_0 Y) = 1$$

zu setzen. Zur Reduction der Distanzen und Positionswinkel, welche dem Visionsradius der Messung entsprechen, auf einen gewählten festen Visionsradius von der Rectascension α_0 und der Declination δ_0 und zugleich auf dessen Meridian, haben wir daher:

$$\left. \begin{aligned} q_0 \cos p_0 &= q \cos(\delta - \delta_0) \cos p \\ q_0 \sin p_0 &= q \sin p \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

Bedeutet (a) die halbe grosse Axe oder mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne und \mathcal{A} den jedesmaligen Abstand von der Erde, so hat man noch die nach (III) zu findenden p_0 und q_0 durch Multiplication mit $\frac{\mathcal{A}}{(a)}$ auf mittlere Entfernung zu reduciren.

Hiermit ist die Zurückführung auf eine Doppelsternbahn vollendet. Wenn man mit den beobachteten Objecten in der Nachbarschaft des Planeten die angegebenen leichten Reductionen vornimmt und die Oerter aufträgt, so wird sich ziemlich bald ergeben müssen, welche darunter einer Projectionsellipse angehören, und ferner, ob die beschriebenen Sektoren den Zwischenzeiten proportional sind. Mit demjenigen Materiale, welches diese sichtende Prüfung besteht, wird darauf eine Doppelsternbahnbestimmung vorgenommen. Die Unterscheidung des auf- und des niedersteigenden Knotens würde auch hier zwar nicht, wie bei einer Doppelsternbahn, unmöglich, so doch zuweilen schwierig werden, wenn nicht andere Kriterien, darunter die Verfinsterungen und Bedeckungen der Monde durch den Planeten, zu Hülfe gezogen werden könnten. Indessen ist eine Entscheidung darüber auch noch auf folgendem anderen Wege zu erlangen, welchen einzuschlagen die Kenntniss der Parallaxe möglich macht.

Die Neigung i der Bahn gegen die Ebene der Projectionsellipse, senkrecht zur Knotenlinie, und zwar nach der uns zugewandten Seite der wirklichen Bahn als Bogen eines grössten Kreises von dem geocentrischen Orte α_0, δ_0 , auf den man reducirt hat, an aufgetragen, führt in dem anderen Endpunkte dieses Bogens auf den Pol der von uns abgewandten Seite der Bahnebene. Bei obiger Formel wird es sich daher darum handeln, nach welcher Seite hin man den Bogen i aufzutragen hat, und welcher von den beiden um $2i$ von einander abstehenden Punkten der Sphäre die Eigenschaften jenes Poles wirklich besitzt. Zu diesen gehört offenbar, dass, wenn sich der geocentrische Ort vom Pole entfernt, die in den grössten Kreis, welcher beide verbindet, fallende Ver-

kürzung der Radienvectoren eine grössere wird. Wenn nicht gerade i den Grenzwert 90° annimmt, wobei dann Verfinsterungen und Bedeckungen die Beantwortung der Frage ermöglichen, so wird nur einer der beiden durch Auftragen des Bogens i nach beiden Seiten erlangten Punkte hierin Genüge leisten. Kürzer aber ist das folgende Kriterium: Transformirt man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 auf ein System, dessen Z -Axe nach dem Pole der Bahnebene mit der Rectascension A , der Declination D zielt, so muss in Folge der Wahl des Vorzeichens von z_0 die transformirte Z -Coordinate verschwinden, d. h. es muss die Bedingung:

$\{ \sin D \cos \delta_0 - \cos D \sin \delta_0 \cos(\alpha_0 - A) \} x_0 - \cos D \sin(\alpha_0 - A) y_0 + \cos i \cdot z_0 = 0$
erfüllt sein.

Um die zweite Näherung durchzuführen, berechnet man aus dem so für jede Zeit bekannt gewordenen z_0 die z für die ursprünglichen Oerter nach der Formel:

$$z = \{ \sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha) \} x_0 - \cos \delta \sin(\alpha_0 - \alpha) y_0 \\ + \{ \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha) \} z_0$$

und bringt darauf die Gleichungen (I), (II) und (III) von Neuem zur Anwendung. Darauf folgt wieder die Berechnung der Bahn als die einer Doppelsternbahn. Die Entscheidung des Vorzeichens von z_0 wird man in der Regel nicht zu wiederholen haben.

Wir schliessen die Untersuchungen über Satellitenbahnen, nicht ohne den Leser, welcher sich vollständiger über dieses Thema zu unterrichten wünscht, auf die in Schumacher's Astronomischen Nachrichten in einer Reihe von Aufsätzen niedergelegten Arbeiten Bessel's über das Saturnsystem zu verweisen.

Was Doppelsternbahnen betrifft, so sei hier am Schlusse der Abtheilung VIII. noch das Buch: „Undersogelse af Omløbsbevaegelsen i Dobbeltstjernesystemet ‚Gamma Virginis‘ udført tildels efter nye Methoder af Th. N. Thiele, Cand. magist. Kjøbenhavn.“ empfohlen.