Theoretische Astronomie

Klinkerfues, Wilhelm

Braunschweig, 1912

Fünfte Abtheilung. Berechnung einer elliptischen Bahn aus vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind

urn:nbn:at:at-ubi:2-6723

Fünfte Abtheilung.

Berechnung einer elliptischen Bahn aus vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

Dreiundachtzigste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

Die Nothwendigkeit, zur ersten Berechnung der elliptischen Bahn zuweilen vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind, anzuwenden, haben wir schon früher erwähnt. Man erkennt sie leicht aus der schon in der 47. Vorlesung angestellten Betrachtung. Von derselben Nothwendigkeit können wir uns noch aus einem anderen Gesichtspunkte überzeugen; wir haben in der vierten Abtheilung gesehen, dass die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unsicher wird bei solcher Beschaffenheit des Materials, dass der mittlere Sonnenort sehr nahe in dem durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreise liegt; es wurde in solchem Falle gerathen, Beobachtungen von anderer Lage zu wählen. Wenn nun $i = 0$ wird, ist es offenbar unmöglich, günstigeres Material in drei Beobachtungen zu finden; man wird also dann jene Methoden nicht anwenden dürfen. Auch bei den Methoden der dritten Abtheilung für die parabolischen Bahnen haben wir einen ganz analogen Fall, den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode, kennen gelernt; der Nothwendigkeit, eine vierte Länge zu Hülfe zu nehmen, wurden wir dadurch enthoben, dass bei der Parabel e gegeben ist, das zu Hülfe zu ziehende weitere Datum also in den drei gegebenen Längen schon enthalten ist. Wenn wir diese nahe Verwandtschaft zwischen dem Ausnahmefalle der Olbers'schen Methode für die Parabel und dem der Gauss'schen für die Ellipse uns nicht entgehen lassen, so zeigt sich uns zugleich ein Verfahren, welches die uns hier vorliegende Aufgabe löst, sowohl für den Fall, dass die vollständigen Beobachtungen die äusseren, als für den Fall, dass sie die mittleren sind. Eine dem ersteren Falle entsprechende Auswahl der Beobachtungen wird in Betreff der Bestimmung von i und Ω etwas grössere Genauigkeit versprechen, für die übrigen Elemente indessen ohne Einfluss sein; in der Theoria motus c. c. hat Gauss deshalb nur den zweiten Fall behandelt, weil er etwas angenehmere Rechnungsformen gestattet.

Die Auswahl der Beobachtungen für die Bestimmung der Bahn aus vier Oertern muss mit einer ganz besonderen Sorgfalt geschehen, wenigstens mit einer viel grösseren, als man für gewöhnlich bei drei Oertern nöthig hat, wenn der Erfolg der ganzen Rechnung nicht in hohem Grade gefährdet werden soll. Man muss nämlich ebenso sehr zu vermeiden suchen, dass die drei Zeitintervalle sehr ungleich, als auch, dass zwei der geocentrischen Längen einander nahezu gleich werden, weil sonst, wie wir später deutlich erkennen werden, schon ein kleiner und unvermeidlicher Beobachtungsfehler einen ausserordentlich bedeutenden Einfluss auf alle bei der Rechnung zum Vorschein kommenden Zahlen ausüben wird. Ein kleiner Planet wird selten lange vor seiner Opposition entdeckt, und es wird demnach zwischen der Epoche der Entdeckung und dem zweiten Stationärwerden, wo die Abnahme der Längen in eine Zunahme übergeht und der Planet auf die durchlaufenen Längen und sehr nahe auf die schon vorher von ihm eingenommenen Oerter zurückkommt, kein grosses Intervall liegen; wenn man ohne besondere Aufmerksamkeit die Beobachtungen aussucht, etwa bloss mit der Rücksicht auf die Zwischenzeiten, so wird man beinahe immer auf Beobachtungen treffen, deren Längen zu wenig verschieden sind. Für so kleine Zeiträume, wie sie bei hinreichend grosser Neigung der Bahn statthaft sind, darf man sich hier bei der Methode aus vier Beobachtungen keinen Erfolg versprechen, da für solche eine genügende Längenbewegung nicht zu erwarten ist.

Vierundachtzigste Vorlesung.

Grundformeln für die Bestimmung der Distanzen aus vier Beobachtungen, von denen nur die äusseren vollständig sind.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\frac{r' r''' \sin(v''' - v')}{r r''' \sin(v''' - v)} = \frac{n_,}{n'} = c_,$$

$$\frac{r r' \sin(v' - v)}{r r''' \sin(v''' - v)} = \frac{n_,''}{n'} = c_,''$$

$$\frac{r'' r''' \sin(v''' - v'')}{r r''' \sin(v''' - v)} = \frac{n_{,,}}{n'} = c_{,,}$$

$$\frac{r r'' \sin(v' - v)}{r r''' \sin(v''' - v)} = \frac{n_{,,}''}{n'} = c_{,,}'',$$

so bestehen für die heliocentrischen Coordinaten aller vier Oerter die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_, x + c_,'' x''' \\ y' &= c_, y + c_,'' y''' \\ z' &= c_, z + c_,'' z''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= c_{,,} x + c_{,,}'' x''' \\ y'' &= c_{,,} y + c_{,,}'' y''' \\ z'' &= c_{,,} z + c_{,,}'' z''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wie schon in der vierten Abtheilung bemerkt wurde, kann man für jedes dieser beiden Systeme die z-Coordinate auf drei verschiedene, beliebig zu wählende Fundamentalebenen bezogen denken, wodurch in die Grundformeln die Winkelabstände der geocentrischen Oerter und der Sonnenörter von den jenen Fundamentalebenen entsprechenden grössten Kreisen der Sphäre zum Vorschein kommen. Den ersten der grössten Kreise legen wir durch den ersten geocentrischen Ort und den Pol der Ekliptik; bezeichnen wir die geocentrischen z-Coordinaten der vier Planetenörter, bezogen auf die dem grössten Kreise entsprechende Ebene, d. h. die Projectionen der vier Abstände von der Erde $\varDelta$, $\varDelta'$, $\varDelta''$, $\varDelta'''$ auf eine zu jener Ebene senkrechte Axe mit ζ, ζ', ζ'', ζ''', denselben Theil der Sonnencoordinaten mit Z, Z', Z'', Z''', so haben wir, da $z = \zeta - Z$, $z' = \zeta' - Z'$ u. s. w.:

$$\begin{aligned} \zeta' - Z' &= c\,(\zeta - Z) + c''_{,}\,(\zeta''' - Z'''), \\ \zeta'' - Z'' &= c_{,,}(\zeta - Z) + c''_{,,}\,(\zeta''' - Z'''). \end{aligned}$$

Bedeuten ferner w, w', w'', w''' die Winkelabstände der vier geocentrischen Oerter von dem durch den ersten Ort und den Pol der Ekliptik gelegten grössten Kreise, wobei dann:

$$\begin{aligned} \zeta &= \varDelta \ \sin w = 0 \\ \zeta' &= \varDelta' \ \sin w' \\ \zeta'' &= \varDelta'' \sin w'' \\ \zeta''' &= \varDelta''' \sin w''' \end{aligned}$$

die Winkelabstände der Sonnenörter von demselben grössten Kreise mit W, W', W'', W''', so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta' \sin w' - R' \sin W' &= - c_{,} R \sin W + c''_{,}\,(\varDelta''' \sin w''' - R''' \sin W''') \\ \varDelta'' \sin w'' - R'' \sin W'' &= - c_{,,} R \sin W + c''_{,,}\,(\varDelta''' \sin w''' - R''' \sin W''') \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Werden ferner mit $w_{,}$, $w'_{,}$, $w''_{,}$, $w'''_{,}$, $W_{,}$, $W'_{,}$, $W''_{,}$, $W'''_{,}$ die Abstände der vier geocentrischen Oerter und der vier Sonnenörter von einem durch den vierten Ort und den Pol gelegten grössten Kreise bezeichnet, so haben wir auch:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta' \sin w'_{,} - R' \sin W'_{,} &= c_{,}\,(\varDelta \sin w_{,} - R \sin W_{,}) - c''_{,} R''' \sin W'''_{,} \\ \varDelta'' \sin w''_{,} - R'' \sin W''_{,} &= c_{,,}(\varDelta \sin w_{,} - R \sin W_{,}) - c''_{,,} R''' \sin W'''_{,} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Sind noch λ, λ', λ'', λ''' die vier geocentrischen Längen des Planeten, β, β''' die Breiten der beiden vollständigen Oerter, $\odot$, $\odot'$, $\odot''$, $\odot'''$, wie gewöhnlich, die Längen der Sonne, so wird offenbar:

$$\begin{aligned} \frac{\sin w'}{\sin w'_{,}} &= \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda''' - \lambda')} \\ \frac{\sin w''}{\sin w''_{,}} &= \frac{\sin(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda''' - \lambda'')} \\ \sin w''' &= \cos\beta''' \sin(\lambda''' - \lambda) \\ \sin w_{,} &= \cos\beta \ \sin(\lambda''' - \lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \odot - \lambda, & W_{,} &= \lambda''' - \odot \\ W' &= \odot' - \lambda, & W'_{,} &= \lambda''' - \odot' \\ W'' &= \odot'' - \lambda, & W''_{,} &= \lambda''' - \odot'' \\ W''' &= \odot''' - \lambda, & W'''_{,} &= \lambda''' - \odot'''. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir, wenn wir die erste und zweite der Gleichungen (4) in die erste und zweite der Gleichungen (3) dividiren, um $\varDelta'$ und $\varDelta''$ zu eliminiren:

$$\begin{aligned} & R' \sin(\lambda''' - \odot') \sin(\lambda' - \lambda) - R' \sin(\odot' - \lambda) \sin(\lambda''' - \lambda') \\ = & - c_{,}\,\varDelta \cos\beta \sin(\lambda''' - \lambda) \sin(\lambda' - \lambda) + c''_{,}\,\varDelta''' \cos\beta''' \sin(\lambda''' - \lambda) \sin(\lambda''' - \lambda') \\ & + c_{,}\,R \sin(\lambda''' - \odot) \sin(\lambda' - \lambda) - c_{,}\,R \sin(\odot - \lambda) \sin(\lambda''' - \lambda') \\ & + c''_{,}\,R''' \sin(\lambda''' - \odot''') \sin(\lambda' - \lambda) - c'_{,}\,R''' \sin(\odot''' - \lambda) \sin(\lambda''' - \lambda') \end{aligned}$$

oder nach einigen leichten Reductionen:

$$\begin{aligned} R' \sin(\lambda' - \odot') = & - c_{,}\,\{\varDelta \cos\beta \sin(\lambda' - \lambda) - R \sin(\lambda' - \odot)\} \\ & + c''_{,}\,\{\varDelta''' \cos\beta''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \sin(\lambda' - \odot''')\} \end{aligned}$$

oder wenn wir die curtirten Distanzen ϱ und ϱ''' einführen:

$$\left.\begin{aligned} R' \sin(\lambda' - \odot') = & \ c_{,}\,\{R \sin(\lambda' - \odot) - \varrho \sin(\lambda' - \lambda)\} \\ & + c''_{,}\,\{R''' \sin(\lambda' - \odot''') - \varrho''' \sin(\lambda' - \lambda''')\} \end{aligned}\right\} \ \ldots \ldots \quad (5)$$

Auf völlig analogem Wege erhält man noch die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} R'' \sin(\lambda'' - \odot'') = c_{,,}\{R \sin(\lambda'' - \odot) - \varrho \sin(\lambda'' - \lambda)\} \\ - c''_{,,}\{R''' \sin(\lambda'' - \odot''') - \varrho''' \sin(\lambda'' - \lambda''')\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (6)$$

Um hieraus die Unbekannten ϱ und ϱ''' zu bestimmen, bedürfte es der Kenntniss der Werthe von $c_{,}$, $c''_{,}$, $c_{,,}$ und $c''_{,,}$; diese Kenntniss kann man sich successive sehr leicht verschaffen, indem man von geschätzten Werthen dieser Grössen ausgeht. Angenähert ist nämlich, wenn t, t', t'', t''' die vier Beobachtungszeiten, r' und r'' die Radienvectoren des zweiten und dritten Ortes vorstellen [1]):

$$c_{,} = \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2 (t' - t)(t''' - t')}{2 r'^3}\right)$$

$$c''_{,} = \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2 (t' - t)(t''' - t')}{2 r'^3}\right)$$

$$c_{,,} = \frac{t''' - t''}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2 (t'' - t)(t''' - t'')}{2 r''^3}\right)$$

$$c''_{,,} = \frac{t'' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2 (t'' - t)(t''' - t'')}{2 r''^3}\right).$$

Hier wird für r' und r'' immer eine Schätzung zur Hand sein mit vollkommen hinreichender Sicherheit für den schliesslichen Erfolg, z. B. einer vorhergegangenen Berechnung einer Kreisbahn zu entnehmen. Substituirt man die entsprechenden Werthe in (5) und (6), so erhält man eine Näherung für ϱ und ϱ''' und die heliocentrischen Coordinaten x, y, z, x''', y''', z'''. Aus diesen letzteren bestimmen sich mit gesteigerter Genauigkeit neue Werthe von r' und r'', da:

$$r'^2 = (c_{,} x + c''_{,} x''')^2 + (c_{,} y + c''_{,} y''')^2 + (c_{,} z + c''_{,} z''')^2$$

$$r''^2 = (c_{,,} x + c''_{,,} x''')^2 + (c_{,,} y + c''_{,,} y''')^2 + (c_{,,} z + c''_{,,} z''')^2.$$

Macht man diese neue Substitution in den obigen Ausdrücken für c, c'', $c_{,,}$ und $c''_{,,}$ und darauf in (5) und (6), so werden wiederum genauere Werthe von ϱ und ϱ''' und der Coordinaten gefunden werden; die Fortsetzung dieses Verfahrens pflegt in den praktischen Fällen bald dahin zu führen, dass sich in den erhaltenen Zahlen nichts mehr ändert, womit die Durchrechnung der ersten Hypothese erledigt ist.

Bei der zweiten Hypothese berechnet man $c_{,}$, $c''_{,}$, $c_{,,}$ und $c''_{,,}$ nach strengeren Formeln, recht bequem z. B. mittelst der am Schlusse der vierten Abtheilung gezeigten Methode, welche sich auf den Lambert'schen Satz über die Bewegung in Kegelschnitten gründet. Werden die so zu erhaltenden Werthe der Verhältnisse zwischen den Dreiecksflächen in (5) und (6) eingesetzt, so bekommt man eine weitere Näherung für ϱ und ϱ''', eine Näherung, über die man in der Praxis selten hinauszugehen braucht. Für eine etwaige dritte und jede weitere Hypothese würden alle Operationen der zweiten zu wiederholen sein.

Die obigen Formeln können, statt auf Längen und Breiten, auch auf Rectascensionen und Declinationen mit der ganz geringfügigen Modification angewandt werden, dass für R, R', R'', R''' die Projectionen des Radius vector der Sonne auf den Aequator,

---

[1]) Genauer ist nach den Entwickelungen der vierten Abtheilung:

$$c_{,} = \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{k^2 . [(t''' - t)^2 - (t''' - t')^2]}{6 r'^3}\right\}$$

$$c''_{,} = \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{k^2 . [(t''' - t)^2 - (t' - t)^2]}{6 r'^3}\right\}$$

als erste Annäherung, und analoge Werthe für $c_{,,}$ und $c''_{,,}$ zu setzen.

für $\odot$, $\odot'$, $\odot''$, $\odot'''$ die Rectascensionen der Sonne gesetzt werden. Diese Anwendbarkeit der Formeln ist nicht ohne Bedeutung und Nutzen, ausser früher angeführten Gründen schon deshalb nicht, weil bei dem zweiten und dritten Orte die Declination missglückt sein darf, ohne dass sie unbrauchbar werden. Bekanntlich werden die Declinationen häufiger unsicher, und es wird, wenn man in solchem Falle Längen und Breiten einführt, die Unsicherheit zu einem Theile auf die Längen mit übertragen; diesem Uebelstande wird zuweilen durch Anwendung der Rectascensionen abzuhelfen sein.

Fünfundachtzigste Vorlesung.

Andere Art der Entwickelung der Grundformeln.

Um die Elimination von Δ' oder von ϱ' noch einfacher zu bewirken, mache man die XZ-Ebene des Coordinatensystems demjenigen grössten Kreise entsprechend, welcher durch den zweiten geocentrischen Ort und den Pol der Ekliptik geht. Die Projectionen der vier Distanzen Δ, Δ', Δ'', Δ''' auf die Y-Axe des Systems werden dann der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
&\Delta \cos\beta \sin(\lambda - \lambda') \\
&\Delta' \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda') \text{ oder } 0 \\
&\Delta'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda') \\
&\Delta''' \cos\beta''' \sin(\lambda''' - \lambda').
\end{aligned}$$

Dieses sind also die geocentrischen Y-Coordinaten; zieht man von ihnen die auf dieselbe Axe bezogenen Sonnencoordinaten:

$$\begin{aligned}
&R \cos B \sin(\odot - \lambda') \\
&R' \cos B' \sin(\odot' - \lambda') \\
&R'' \cos B'' \sin(\odot'' - \lambda') \\
&R''' \cos B''' \sin(\odot''' - \lambda'),
\end{aligned}$$

in denen B, B', B'', B''' die vier Breiten (beziehungsweise Declinationen) der Sonne vorstellen, ab, so erhält man die vier heliocentrischen Y-Coordinaten des Planeten:

$$\begin{aligned}
y &= \Delta \cos\beta \sin(\lambda - \lambda') - R \cos B \sin(\odot - \lambda') \\
y' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - R' \cos B' \sin(\odot' - \lambda') \\
y'' &= \Delta'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda') - R'' \cos B'' \sin(\odot'' - \lambda') \\
y''' &= \Delta''' \cos\beta''' \sin(\lambda''' - \lambda') - R''' \cos B''' \sin(\odot''' - \lambda').
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir zu besserer Uebersicht die doppelte Dreiecksfläche zwischen den Radienvectoren r und r' mit $[r r']$, die zwischen r und r'' mit $[r r'']$, und so weiter die übrigen, so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}
R' \cos B' \sin(\lambda' - \odot') = \frac{[r' r'']}{[r r'']} &\{\varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot)\} \\
+ \frac{[r r']}{[r r'']} &\{\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin(\lambda' - \odot'')\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
R' \cos B' \sin(\lambda' - \odot') = \frac{[r' r''']}{[r r''']} &\{\varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot)\} \\
+ \frac{[r r']}{[r r''']} &\{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''')\}
\end{aligned}$$

$$\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin(\lambda' - \odot'')$$
$$= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''')\},$$

und nach Analogie, wenn die XZ-Ebene durch den dritten geocentrischen Ort gelegt wird:

$$\varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot')$$
$$= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''')\}$$

$$R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') = \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''')\}$$

$$R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') = \frac{[r'' r''']}{[r' r''']} \{\varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot')\}$$
$$+ \frac{[r' r'']}{[r' r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''')\}.$$

Man hat hier sechs Gleichungen zwischen vier Distanzen; die darin vorkommenden Verhältnisse der Dreiecksflächen können, wenigstens in der ersten Hypothese, als gegebene Functionen von r'^3 und r''^3 betrachtet werden. Wird statt r' und r'' R' und R'' eingesetzt, so muss sehr nahe die Erdbahn als Lösung, d. h. $\varrho = \varrho' = \varrho'' = \varrho''' = 0$ erhalten werden. Hierin liegt der Grund, der verbietet, r' und r'' aus den obigen sechs Grundgleichungen zu eliminiren, und auf diese Weise vier Gleichungen zwischen den vier Unbekannten ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' herzustellen. Denn in solchen Gleichungen würde, da sie vom ersten Grade sind, jeder Unterschied zwischen der Lösung für die Erde und die für den Planeten hinwegfallen; mit anderen Worten, sie würden Grössen der nullten Ordnung vernachlässigen.

Wollte man dagegen aus den sechs Gleichungen ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' eliminiren, um zwei Gleichungen r'^3 und r''^3 übrig zu behalten, so würde sich eine ähnliche Unzulässigkeit zeigen; man würde für r' und r'' nur eine einzige reelle Lösung erhalten, während doch in den Gleichungen auch die Lösung $r' = R'$, $r'' = R''$ mit enthalten sein muss. Also auch hier würden Grössen der nullten Ordnung vernachlässigt werden[1]). Der in voriger Vorlesung angegebenen Art der Auflösung, bei welcher die Dreiecksflächenverhältnisse zuerst mit geschätzten und später mit den aus ϱ und ϱ''' zu bestimmenden Werthen berechnet werden, kann man den Vorwurf der Vernachlässigung von Grössen der nullten Ordnung nicht mehr machen, da für die Erde und für den Planeten eine verschiedene Lösung erhalten wird.

Nach diesen Betrachtungen werden wir für den hier betrachteten Fall, dass die erste und vierte Beobachtung vollständig sind, zur Bestimmung von Δ und Δ''' oder ϱ' und ϱ''' uns der beiden Gleichungen:

---

[1]) Es ist, wie uns schon die Grundformel der Olbers'schen Methode lehrt, keineswegs immer unmöglich, gewisse Bestimmungsstücke in der Bahnberechnung als Wurzeln von Gleichungen sehr niedrigen Grades, ja sogar ersten Grades, auf brauchbare Weise auszudrücken; aber es bleibt diese Möglichkeit doch immer auf solche Stücke beschränkt, welche ihrer Natur nach für die Erde unbestimmt werden, wie eben das Olbers'sche Verhältniss:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = M.$$

$$R' \cos B' \sin(\lambda' - \odot') = \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''')\}$$
$$R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') = \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''')\}$$

bedienen. Die Grössen ϱ' und ϱ'' können, wenn man ϱ und ϱ''' auf die oben-angegebene Weise gefunden hat, der zu berücksichtigenden Aberration wegen aus den Gleichungen:

$$\varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot')$$
$$= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''')\}$$
$$\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin(\lambda' - \odot'')$$
$$= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot)\}$$
$$+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''')\}$$

berechnet werden. Bei der Verbesserung der beiden Zeiten t' und t'' wegen Aberration würden nun zwar nicht ϱ' und ϱ'', sondern vielmehr $\varrho' \sec\beta'$, $\varrho'' \sec\beta''$ bekannt sein müssen. In der Wirklichkeit wird die angenommene Unkenntniss genauer Breitenwerthe, abgesehen davon, dass sie für die Breiten fast niemals statthaben wird, der Berücksichtigung der Aberration und anderer kleiner Correctionen, welche von der Breite abhängen, nicht hinderlich sein können.

Sechsundachtzigste Vorlesung.

Grundformeln für die Berechnung der Distanzen aus vier Beobachtungen, deren äussere unvollständig sind.

Die Bestimmung der Distanzen aus den Grundgleichungen fällt etwas bequemer aus, wenn statt der äusseren die beiden mittleren Oerter als vollständige gebraucht werden, da in diesem Falle ϱ' durch r', ϱ'' durch r'' und lauter bekannte Grössen ausgedrückt werden können. Es wird sich deshalb bei erstlichen Anwendungen empfehlen, bei der ersten Hypothese die zweite und dritte Beobachtung vollständig zu gebrauchen, damit die ersten Schritte zur Näherung möglichst bequem ausfallen, bei den weiteren Hypothesen aber die Rechnung auf vollständige Darstellung der äusseren Oerter zu führen.

Eliminirt man zu dem Zwecke aus den allgemeinen Grundgleichungen (1) und (2), der 84. Vorlesung, einmal ϱ, indem man die XZ-Ebene durch den ersten Ort und den Pol legt, darauf durch analoges Verfahren ϱ''', so wird nach der Bezeichnung der vorigen Vorlesung:

$$\begin{aligned}
\varrho' \sin(\lambda' - \lambda) &+ R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \\
&= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\
&+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda) + R''' \cos B''' \sin(\lambda - \odot''')\} \\
\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) &+ R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') \\
&= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\
&+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda) + R''' \cos B''' \sin(\lambda - \odot''')\} \\
\varrho' \sin(\lambda' - \lambda''') &+ R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') \\
&= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda''') + R \cos B \sin(\lambda''' - \odot)\} \\
&+ \frac{[r r']}{[r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \\
\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') &+ R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'') \\
&= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{\varrho \sin(\lambda - \lambda''') + R \cos B \sin(\lambda''' - \odot)\} \\
&+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''').
\end{aligned}$$

Durch Elimination von ϱ''' und ϱ erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{[r r'']}{[r r''']} \{\varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot')\} \\
-&\frac{[r r']}{[r r''']} \{\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'')\} \\
=&\frac{[r r''][r' r'''] - [r r'][r'' r''']}{[r r'''][r r''']} R \cos B \sin(\lambda - \odot)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{[r'' r''']}{[r r''')} \{\varrho' \sin(\lambda' - \lambda''') + R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot')\} \\
-&\frac{[r' r''']}{[r r''']} \{\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'')\} \\
=&\frac{[r r'][r'' r'''] - [r r''][r' r''']}{[r r'''][r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''')\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wird dann ferner gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[r r']}{[r r''']} &= \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q'}{2 r'^3}\right\} \\
\frac{[r r'']}{[r r''']} &= \frac{t'' - t}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q''}{2 r''^3}\right\} \\
\frac{[r' r''']}{[r r''']} &= \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q'_{'''}}{2 r'^3}\right\} \\
\frac{[r'' r''']}{[r r''']} &= \frac{t''' - t''}{t''' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q''_{'''}}{2 r''^3}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

so bietet sich für die Berechnung von ϱ' und ϱ'' aus den Gleichungen (1) und (2) folgendes Verfahren dar. Man berechnet, von Schätzungswerthen der Grössen r' und r'' ausgehend, nach den Gleichungen (3) die vorläufigen Werthe von $\frac{[r r']}{[r r''']}$, $\frac{[r r'']}{[r r''']}$ u. s. w. wobei angenähert:

$$Q' = Q'_{'''} = k^2 (t' - t)(t''' - t')$$
$$Q'' = Q''_{'''} = k^2 (t'' - t)(t''' - t'') \text{ [1]}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) liefern dann genäherte Werthe von ϱ' und ϱ'', aus denen wiederum r' und r'' und genauere Werthe der Dreiecksflächenverhältnisse abzuleiten sind. Die wiederholte Substitution derselben in (1) und (2) wird endlich keine merklichen Aenderungen mehr in den zu findenden Zahlen herbeiführen.

Siebenundachtzigste Vorlesung.

Weitere Vereinfachung der Bedingungsgleichungen für ϱ' und ϱ''.

Die Formeln der vorigen Vorlesung können in denjenigen Fällen mit Nutzen gebraucht werden, in denen das mittlere der drei Zeitintervalle, $t'' - t'$, bedeutend gegen die äusseren an Grösse zurücksteht, weil dann jene Formeln etwas grössere Convergenz versprechen, als die folgenden, im Uebrigen bequemeren.

Aus den Grundgleichungen (1) und (2) der 84. Vorlesung folgt nämlich auch, wenn man den ersten Längenmeridian, von welchem alle Längen gerechnet werden sollen, durch den ersten geocentrischen Ort legt:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \\ &= \frac{[r'r'']}{[r'r''']} R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\ &+ \frac{[rr']}{[rr'']} \{\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'')\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Wird der erste Längenmeridian durch den vierten geocentrischen Ort gelegt, so ergiebt sich die der vorigen analoge Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'') \\ &= \frac{[r'r'']}{[rr'']} R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\ &+ \frac{[r''r''']}{[r'r''']} \{\varrho' \sin(\lambda' - \lambda''') + R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot')\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Es sei:

$$\frac{[rr']}{[rr'']} = \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q}{2r'^3}\right\}$$
$$\frac{[r'r'']}{[r'r''']} = \frac{t'' - t'}{t''' - t'} \cdot \left\{1 + \frac{Q'}{2r''^3}\right\}$$
$$\frac{[r'r'']}{[rr'']} = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \left\{1 + \frac{Q''}{2r'^3}\right\}$$
$$\frac{[r''r''']}{[r'r''']} = \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \cdot \left\{1 + \frac{Q'''}{2r''^3}\right\},$$

[1]) Oder besser:

$$Q' = \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t' - t)^2]$$
$$Q'' = \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t'' - t)^2]$$
$$Q'_{'''} = \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t''' - t')^2]$$
$$Q''_{'''} = \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t''' - t'')^2].$$

wobei in der ersten Hypothese gesetzt werden kann:

$$
\begin{aligned}
Q &= k^2 (t' - t)\ (t'' - t') \\
Q' &= k^2 (t'' - t')\ (t''' - t'') \\
Q'' &= k^2 (t' - t)\ (t'' - t') \\
Q''' &= k^2 (t'' - t')\ (t''' - t'').
\end{aligned}
$$

(In der ersten Hypothese ist demnach $Q = Q''$, $Q' = Q'''$.[1])

Die Gleichungen (1) und (2) nehmen nach Einführung von Q, Q', Q'', Q''' folgende Form an:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \\
&\quad = \frac{t'' - t'}{t'' - t}\, R \cos B \sin(\lambda - \odot) \,.\left(1 + \frac{Q''}{2 r'^3}\right) \\
&\quad + \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \{R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') + \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda)\}\left(1 + \frac{Q}{2 r'^3}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot'') \\
&\quad = \frac{t'' - t'}{t''' - t'}\, R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \,.\left(1 + \frac{Q'}{2 r''^3}\right) \\
&\quad + \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \cdot \{R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') + \varrho' \sin(\lambda' - \lambda''')\}\left(1 + \frac{Q'''}{2 r''^3}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

Diese Gleichungen (3) und (4) haben vor den Gleichungen (1) und (2) den grossen Vorzug, dass darin r und r'' nicht gleichzeitig auftreten, und dass man sie daher durch reine Hypothesen über ϱ' auflösen kann. Denn zu jedem Werthe von ϱ' bestimmt sich r' nach der Formel:

$$r'^2 = R'^2 + \varrho'^2 \sec \beta'^2 + 2 R' \varrho' \sec \beta' \cos \chi';$$

die Gleichung (3) liefert also einen bestimmten Werth von ϱ'', durch welchen dann auch die Gleichung (4) befriedigt werden muss.

Mit Vortheil kann man hier, ähnlich wie bei der Gauss'schen Form der Olbers'schen Methode für Kometen, ϱ' und ϱ'' durch zwei andere Grössen ersetzen. Es wird:

$$
\begin{aligned}
r'^2 &= (\varrho' \sec \beta' + R' \cos \chi')^2 + R'^2 \sin \chi'^2 \\
r''^2 &= (\varrho'' \sec \beta'' + R'' \cos \chi'')^2 + R''^2 \sin \chi''^2.
\end{aligned}
$$

Setzt man daher:

$$
\begin{aligned}
\varrho' \sec \beta' + R' \cos \chi' &= u' \\
\varrho'' \sec \beta'' + R'' \cos \chi'' &= u'' \\
R' \sin \chi' &= C' \\
R'' \sin \chi'' &= C'',
\end{aligned}
$$

so gehen (3) und (4) über in:

$$
\left.
\begin{aligned}
&u' \cos \beta' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') - R' \cos \chi' \cos \beta' \sin(\lambda' - \lambda) \\
&\quad = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \cdot \left(1 + \frac{Q''}{2 (u'^2 + C'^2)^{3/2}}\right) \\
&\quad + \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \{R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') - R'' \cos \chi'' \cos \beta'' \sin(\lambda'' - \lambda) \\
&\quad + u'' \cos \beta'' \sin(\lambda'' - \lambda)\}\left(1 + \frac{Q}{2 (u'^2 + C'^2)^{3/2}}\right)
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

---

[1]) Genauer ist auch hier:

$$
\begin{aligned}
Q &= \tfrac{1}{3} k^2 [(t'' - t)^2 - (t' - t)^2] \\
Q' &= \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t')^2 - (t'' - t')^2] \\
Q'' &= \tfrac{1}{3} k^2 [(t'' - t)^2 - (t'' - t')^2] \\
Q''' &= \tfrac{1}{3} k^2 [(t''' - t')^2 - (t''' - t'')^2].
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&u'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'') - R'' \cos\chi'' \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda''') \\
&\quad = \frac{t'' - t'}{t''' - t'} R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \left(1 + \frac{Q'}{2(u'' + C'')^{3/2}}\right) \\
&\quad + \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \{R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') - R' \cos\chi' \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda''') \\
&\quad + u' \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda''')\} \left(1 + \frac{Q'''}{2(u'' + C'')^{3/2}}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Achtundachtzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwickelungen der 87. Vorlesung.

Die Glieder der Gleichungen (5) und (6) haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung, deren Erkenntniss uns erlauben wird, dieselben noch mehr zusammenzuziehen und in möglichst reducirter Form zu schreiben.

Sehr leicht erkennt man, dass u' nichts Anderes ist als die rechtwinklige Projection des Radius vectors der zweiten Beobachtung auf die Richtung der Verbindungslinie zwischen Planet und Erde, oder das Stück dieser Linie, welches zwischen dem Planeten und dem Fusspunkte eines von der Sonne gefällten Perpendikels liegt. Die Grösse:

$$\cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda)$$

ist der Cosinus des Winkels, welchen die Verbindungslinie Erde-Planet in der zweiten Beobachtung mit einer Richtung macht, deren Länge (Rectascension) gleich $90^0 + \lambda$, und deren Breite (Declination) gleich Null ist. Die Grösse:

$$(u' - R' \cos\chi') \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda)$$

ist demnach die Projection der Distanz $\varDelta'$ auf die genannte Richtung; ebenso zeigt sich, dass:

$$R' \cos B' \sin(\odot' - \lambda)$$

die Projection von R' auf dieselbe Richtung ist. Die erste oder linke Seite der Gleichung (5) ist offenbar nichts Anderes, als die Projection des Radius vectors des Planeten auf eine X-Axe, welche auf den Punkt der Sphäre von der Länge (Rectascension) $90^0 + \lambda$, und der Breite (Declination) 0^0 zielt. Werden überhaupt alle x-Coordinaten des Planeten auf diese Axe bezogen und mit x_λ, x'_λ, x''_λ, x'''_λ bezeichnet, ebenso die Sonnencoordinaten in Beziehung auf die genannte Axe mit X_λ, X'_λ, X''_λ, X'''_λ, so lässt sich die Gleichung (5) schreiben:

$$x'_\lambda = \left\{\frac{t'' - t'}{t'' - t} x_\lambda + \frac{t' - t}{t'' - t} x''_\lambda\right\} + {}^1/_2 \left\{\frac{t'' - t'}{t'' - t} Q'' x_\lambda + \frac{t' - t}{t'' - t} Q x''_\lambda\right\} \frac{1}{(C'^2 + u'^2)^{3/2}} \quad (1)$$

wobei für die Rechnung die x_λ, x'_λ, x''_λ durch die Relationen:

$$\begin{aligned}
x_\lambda &= - X_\lambda \\
x'_\lambda &= (u' - R' \cos\chi') \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda) - X'_\lambda \\
x''_\lambda &= (u'' - R'' \cos\chi'') \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda) - X''_\lambda
\end{aligned}$$

gegeben werden. Die Grössen der Gleichung (6) sind die x-Coordinaten des Planeten, bezogen auf eine andere Axe, deren Richtung der Länge (Rectascension) $90^0 + \lambda'''$ und der Breite (Declination) 0° entspricht. Nach Analogie mit dem Vorhergehenden können wir schreiben:

$$x''_\lambda = \left\{\frac{t'' - t'}{t''' - t'}\, x'''_{\lambda'''} + \frac{t''' - t''}{t''' - t'}\, x'_{\lambda'''}\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{t'' - t'}{t''' - t'}\, Q' x'''_{\lambda'''} + \frac{t''' - t''}{t''' - t'}\, Q''' x'''_{\lambda'''}\right\}\{C''^2 + u''^2\}^{-3/2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wobei die Relationen:

$$x'_{\lambda'''} = (u' - R' \cos\chi') \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda''') - X'_{\lambda'''}$$
$$x''_{\lambda'''} = (u'' - R'' \cos\chi'') \cos\beta'' \sin(\lambda'' - \lambda''') - X''_{\lambda'''}$$
$$x'''_{\lambda'''} = - X'''_{\lambda'''}$$

zuzuziehen sind.

Die Form der Gleichungen (1) und (2) ist recht übersichtlich, da die darin vorkommenden Grössen beinahe unmittelbar durch die Data des Materials ausgedrückt werden, daher die Vorbereitungsrechnungen sich auf ein Minimum reduciren.

Wenn es darauf ankommt, jene Gleichungen auf möglichst kurze Weise ohne Rücksicht auf andere Beziehungen abzuleiten, so kann das durch folgende Bemerkungen geschehen.

Jede heliocentrische Coordinate lässt sich ausdrücken als die Differenz: geocentrische Coordinate weniger Sonnencoordinate. Soll nun aus der allgemeineren Fundamentalgleichung:

$$x' = \frac{[r' r'']}{[r r'']}\, x + \frac{[r r']}{[r r'']}\, x''$$

die Distanz $\varDelta$ der ersten Beobachtung durch eine bestimmte Wahl des Coordinatensystems eliminirt werden, so genügt es, für die X-Axe eine Richtung zu suchen, von der man trotz der Unvollständigkeit der ersten Beobachtung sagen kann, dass sie mit der Richtung von $\varDelta$ einen Winkel von 90° bildet, damit die geocentrische Coordinate verschwinde. Solche Richtung hat aber offenbar der Pol des durch den ersten geocentrischen Ort gelegten Längen- (beziehungsweise Rectascensions-) Meridians. Dieselbe Betrachtung wiederholt sich für die Gleichung:

$$x'' = \frac{[r'' r''']}{[r' r''']}\, x' + \frac{[r' r'']}{[r' r''']}\, x''',$$

hier muss die X-Axe so gewählt werden, dass sie von dem unvollständigen Orte der vierten Beobachtung 90° absteht und die geocentrische Coordinate mit $\varDelta'''$ oder ϱ''' verschwindet.

Leicht kann man nach derselben Betrachtungsweise auch denjenigen Gleichungen, welche dazu dienen, um aus ϱ' und ϱ'' die Grössen ϱ und ϱ''' zu finden, die einfachste Gestalt geben. Man braucht zu dem Zweck nur aus der allgemeinen Gleichung zwischen x, x' und x'' einmal die Distanz $\varDelta''$ zu eliminiren, was einfach dadurch erreicht wird, dass eine von $\varDelta''$ um 90° abstehende X-Axe gewählt wird; das andere Mal bringt man in der Gleichung zwischen x', x'', x''' nach derselben Methode den Coëfficienten von $\varDelta'$ zum Verschwinden. Auf solche Weise wird man zwei Gleichungen, die eine zwischen $\varDelta$ und $\varDelta''$, die andere zwischen $\varDelta'$ und $\varDelta'''$ bekommen, in welchen nun auch die Verhältnisse zwischen den Dreiecksflächen nicht mehr ganz unbekannt sind.

Die Coëfficienten, welche in allen diesen Gleichungen vorkommen, Cosinus des Abstandes zweier gegebenen Punkte der Sphäre von einander, berechnen sich nach der bekannten Cosinusformel der sphärischen Trigonometrie auf so einfache Art, dass ihre besondere Ausführung hier nicht nöthig scheint.

Neunundachtzigste Vorlesung.

Modification in der Bildung der ersten Hypothese zur Erzielung einer grösseren Genauigkeit bei derselben.

Die einfache Form der aufzulösenden Gleichungen erlaubt es, die erste Hypothese noch um ein Erhebliches genauer zu bilden, als wir bis dahin gethan haben. Wir fanden nach den Reihenentwickelungen der Abtheilung IV, für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, wenn zur Abkürzung:

$$k\,(t' - t) = \vartheta'', \quad k\,(t'' - t) = \vartheta', \quad k\,(t'' - t') = \vartheta,$$
$$k\,(t_{,}'' - t') = \vartheta_{,}'', \quad k\,(t''' - t') = \vartheta_{,}', \quad k\,(t''' - t'') = \vartheta_{,},$$

gesetzt wird (wobei $\vartheta = \vartheta_{,}''$),

$$\frac{[r'\,r'']}{[r\,r'']} = \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left\{1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6\,r'^3} + \frac{\vartheta''\,(\vartheta''^2 + \vartheta\,\vartheta'' - \vartheta^2)}{4\,r'^4}\,\frac{d\,r'}{k\,d\,t} + \cdots\right\}$$
$$\frac{[r\,r']}{[r\,r'']} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left\{1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6\,r'^3} - \frac{\vartheta\,(\vartheta^2 + \vartheta\,\vartheta'' - \vartheta''^2)}{4\,r'^4}\,\frac{d\,r'}{k\,d\,t} + \cdots\right\}$$
$$\frac{[r''\,r''']}{[r'\,r''']} = \frac{\vartheta_{,}}{\vartheta_{,}'}\left\{1 + \frac{\vartheta_{,}'^2 - \vartheta_{,}^2}{6\,r''^3} + \frac{\vartheta_{,}''\,(\vartheta_{,}''^2 + \vartheta_{,}\,\vartheta_{,}'' - \vartheta_{,}^2)}{4\,r''^4}\,\frac{d\,r''}{k\,d\,t} + \cdots\right\}$$
$$\frac{[r'\,r'']}{[r'\,r''']} = \frac{\vartheta_{,}''}{\vartheta_{,}'}\left\{1 + \frac{\vartheta_{,}'^2 - \vartheta_{,}''^2}{6\,r''^3} - \frac{\vartheta_{,}\,(\vartheta_{,}^2 + \vartheta_{,}\,\vartheta_{,}'' - \vartheta_{,}^2)}{4\,r''^4}\,\frac{d\,r''}{k\,d\,t} + \cdots\right\}.$$

Nun ist offenbar sehr nahe:

$$\frac{d\,r'}{k\,d\,t} = \frac{r'' - r'}{\vartheta} = -\,\frac{r' - r''}{\vartheta_{,}''},$$

ebenso:

$$\frac{d\,r''}{k\,d\,t} = \frac{r'' - r'}{\vartheta_{,}''} = -\,\frac{r' - r''}{\vartheta}.$$

Bei Einführung dieser Werthe in die Gleichungen (1) und (2) der 88. Vorlesung würden wiederholt die Unbekannten r' und r'' gleichzeitig auftreten; man braucht aber die Glieder mit $r'' - r'$ erst dann bei der Rechnung heranzuziehen, wenn man der Lösung mit Berücksichtigung der vorhergehenden Glieder schon ganz nahe gekommen ist, und kann jene Glieder dann als eine bekannte Grösse behandeln.

Mit nicht allzu viel Complication kann man sogar in der Genauigkeit noch einen Schritt weiter gehen. Unter Anwendung des Taylor'schen Satzes hat man:

$$r - r' = \frac{d\,r'}{d\,t}\cdot(t - t') + \frac{d^2\,r'}{2\,d\,t^2}\cdot(t - t')^2 + \cdots$$
$$r'' - r' = \frac{d\,r'}{d\,t}\cdot(t'' - t') + \frac{d^2\,r'}{2\,d\,t^2}\cdot(t'' - t')^2 + \cdots$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse $\frac{d^2\,r'}{2\,d\,t^2}$, so lässt sich $\frac{d\,r'}{d\,t}$ durch r, r' und r'' ausdrücken; es wird nämlich:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{(t'-t)^2 (r''-r') + (t''-t')^2 (r'-r)}{(t'-t)(t''-t)(t''-t')}$$

oder:

$$\frac{dr'}{k\,dt} = \frac{\vartheta''^2 (r''-r') + \vartheta^2 (r'-r)}{\vartheta \vartheta' \vartheta''}.$$

Durch Analogie erhält man:

$$\frac{dr''}{dt} = \frac{(t''-t)^2 (r'''-r'') + (t'''-t'')^2 (r''-r')}{(t''-t')(t'''-t')(t'''-t'')}$$

oder:

$$\frac{dr''}{k\,dt} = \frac{\vartheta_{,}''^2 (r'''-r'') + \vartheta_{,}^2 (r''-r')}{\vartheta_{,} \vartheta_{,}' \vartheta_{,}''}.$$

Diese Ausdrücke werden, nach Substitution in den Reihenentwickelungen, drei Unbekannte gleichzeitig auftreten lassen, nämlich in der Gleichung (1) der 88. Vorlesung die Grössen r, r', r'', in (2) die Grössen r', r'', r'''. Da nun aber nach dem mehrfach beschriebenen Verfahren r und r''' leicht aus r' und r'' berechnet werden können, so wird auch diese viel genauere Lösung nicht sehr umständlich, wenn man sich nur bei den ersten Versuchen auf die Glieder niederer Ordnung beschränkt.

Man kann alles eben Gesagte endlich noch in der Ausdehnung zur Anwendung bringen, dass man in den Finalgleichungen die vier Unbekannten r, r', r'', r''' auftreten lässt, wobei es dann möglich wird, in der ersten Hypothese die Näherung bis zu den Gliedern achter Ordnung inclusive zu treiben.

Neunzigste Vorlesung.

Die Gauss'sche Form der Berechnung der Bahn aus vier Beobachtungen.

Um den Leser endlich noch mit derjenigen Form bekannt zu machen, welche Gauss in der Theoria motus c. c. seiner Methode der Bahnberechnung aus vier Beobachtungen, von denen die mittleren vollständig sind, gegeben hat, machen wir von der Darstellungsweise Gebrauch, welche Bruhns in seiner Abhandlung: „De planetis minoribus inter Martem et Jovem circa Solem versantibus" gewählt hat, wobei wir zugleich die dortige Bezeichnungsweise beibehalten wollen.

Es seien:

t, t', t'', t''' die Beobachtungszeiten,
α, α', α'', α''' die geocentrischen Längen,
β', β'' die geocentrischen Breiten zur Zeit t' und t'',
L, L', L'', L''' die Längen der Erde,
R, R', R'', R''' die Radienvectoren der Erde,
r, r', r'', r''' die Abstände des Planeten,
ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' die curtirten Distanzen des Planeten von der Erde,
v, v', v'', v''' die wahren Anomalien des Planeten,
E, E', E'', E''' die excentrischen Anomalien,
M, M', M'', M''' die mittleren Anomalien;

ferner sei zur Abkürzung wieder:

$$\begin{aligned} r\, r'\ \sin(v' - v) &= [r\, r'] \\ r\, r''\ \sin(v'' - v) &= [r\, r''] \\ r'\, r''\ \sin(v'' - v') &= [r'\, r''] \\ r'\, r'''\ \sin(v''' - v') &= [r'\, r'''] \\ r''\, r'''\ \sin(v''' - v'') &= [r''\, r'''] \end{aligned}$$

$$\frac{[r'\, r'']}{[r\, r'']} = n$$

$$\frac{[r''\, r''']}{[r'\, r''']} = n'$$

$$\frac{[r\, r']}{[r\, r'']} = n''$$

$$\frac{[r'\, r'']}{[r'\, r''']} = n'''.$$

Bekanntlich ist nun:

$$\begin{aligned} [r'\, r'']\, x - [r\, r'']\, x' + [r\, r']\, x'' &= 0 \\ [r'\, r'']\, y - [r\, r'']\, y' + [r\, r']\, y'' &= 0 \\ [r''\, r''']\, x' - [r'\, r''']\, x'' + [r'\, r'']\, x''' &= 0 \\ [r''\, r''']\, y' - [r'\, r''']\, y'' + [r'\, r'']\, y''' &= 0, \end{aligned}$$

wenn wieder x, y, x', y' u. s. w. die heliocentrischen Coordinaten des Planeten vorstellen. Für letztere hat man aber auch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\ \cos\alpha + R\ \cos L \\ y &= \varrho\ \sin\alpha + R\ \sin L \\ x' &= \varrho'\ \cos\alpha' + R'\ \cos L' \\ y' &= \varrho'\ \sin\alpha' + R'\ \sin L' \\ z' &= \varrho'\ tg\,\beta' \\ x'' &= \varrho''\ \cos\alpha'' + R''\ \cos L'' \\ y'' &= \varrho''\ \sin\alpha'' + R''\ \sin L'' \\ z'' &= \varrho''\ tg\,\beta'' \\ x''' &= \varrho'''\cos\alpha''' + R'''\cos L''' \\ y''' &= \varrho'''\sin\alpha''' + R'''\sin L''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

demnach, wenn man hierauf in den obigen Grundgleichungen Rücksicht nimmt:

$$\begin{aligned} n\,(\varrho\ \cos\alpha + R\ \cos L) - (\varrho'\ \cos\alpha' + R'\ \cos L') + n''\,(\varrho''\ \cos\alpha'' + R''\ \cos L'') &= 0 \\ n\,(\varrho\ \sin\alpha + R\ \sin L) - (\varrho'\ \sin\alpha' + R'\ \sin L') + n''\,(\varrho''\ \sin\alpha'' + R''\ \sin L'') &= 0 \\ n'\,(\varrho'\cos\alpha' + R'\cos L') - (\varrho''\cos\alpha'' + R''\cos L'') + n'''\,(\varrho'''\cos\alpha''' + R'''\cos L''') &= 0 \\ n'\,(\varrho'\sin\alpha' + R'\sin L') - (\varrho''\sin\alpha'' + R''\sin L'') + n'''\,(\varrho'''\sin\alpha''' + R'''\sin L''') &= 0. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit $\sin\alpha$ multiplicirt, die zweite mit $-\cos\alpha$ und addirt, werden ferner die dritte und vierte nach Multiplication mit beziehungsweise $\sin\alpha'''$ und $\cos\alpha'''$ addirt, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &n\ R\ \sin(\alpha - L) - \{\varrho'\ \sin(\alpha - \alpha') + R'\ \sin(\alpha - L')\} \\ &\qquad + n''\ \{\varrho''\sin(\alpha - \alpha'') + R''\sin(\alpha - L'')\} = 0 \\ &n'\ \{\varrho'\sin(\alpha''' - \alpha') + R'\ \sin(\alpha''' - L')\} \\ &- \{\varrho''\sin(\alpha''' - \alpha'') + R''\sin(\alpha''' - L'')\} + n'''\,R'''\ \sin(\alpha''' - L''') = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Es sei ferner:

$$P' = \frac{n}{n''}, \qquad P'' = \frac{n'''}{n'}, \qquad Q' = (n + n'' - 1)\, r'^3, \qquad Q'' = (n' + n''' - 1)\, r''^3,$$

so dass:

$$1 + P' = \frac{n + n''}{n''} \qquad\qquad 1 + P'' = \frac{n' + n'''}{n'}$$

$$1 + \frac{Q'}{r'^3} = n + n'' \qquad\qquad 1 + \frac{Q''}{r''^3} = n' + n'''$$

$$\frac{1}{n''} = \frac{1 + P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} \qquad\qquad \frac{1}{n'} = \frac{1 + P''}{1 + \frac{Q''}{r''^3}}.$$

Diese Ausdrücke für n, n', n'', n''' sind in (2) zu substituiren; man erhält dadurch:

$$\left.\begin{aligned}
&P' R \sin(\alpha - L) - \frac{1 + P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} \{R' \sin(\alpha - L') + \varrho' \sin(\alpha - \alpha')\} \\
&\qquad + R'' \sin(\alpha - L'') + \varrho'' \sin(\alpha - \alpha'') = 0 \\
&P'' R''' \sin(\alpha''' - L''') - \frac{1 + P''}{1 + \frac{Q''}{r''^3}} \{R'' \sin(\alpha''' - L'') + \varrho'' \sin(\alpha''' - \alpha'')\} \\
&\qquad + R' \sin(\alpha''' - L') + \varrho' \sin(\alpha''' - \alpha') = 0
\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

Die vier Unbekannten ϱ', r', ϱ'' und r'' werden auf zwei reducirt, wenn man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho'}{\cos\beta'} &= - R' \cos\delta' + \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin\delta'^2} \\
\frac{\varrho''}{\cos\beta''} &= - R'' \cos\delta'' \pm \sqrt{r''^2 - R''^2 \sin\delta''^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

heranzieht, worin δ' und δ'' die durch die Formeln:

$$\cos\delta' = \cos\beta' \cos(\alpha' - L')$$
$$\cos\delta'' = \cos\beta'' \cos(\alpha'' - L'')$$

zu bestimmenden äusseren Winkel an der Erde in der zweiten und dritten Beobachtung vorstellen.

Führt man noch die Winkel am Planeten ein, z' und z'', und setzt zur Abkürzung:

$$\sqrt{r'^2 - R'^2 \sin\delta'^2} = x' \qquad\qquad \sqrt{r''^2 - R''^2 \sin\delta''^2} = x'',$$

so wird:

$$\operatorname{cotg} z' = \frac{x'}{R' \sin\delta'} \qquad\qquad \operatorname{cotg} z'' = \frac{x''}{R'' \sin\delta''}$$

$$r' = \frac{R' \sin\delta'}{\sin z'} \qquad\qquad r'' = \frac{R'' \sin\delta''}{\sin z''}$$

$$\varrho' = \frac{R' \sin(\delta' - z')}{\sin z'} \cos\beta' \qquad\qquad \varrho'' = \frac{R'' \sin(\delta'' - z'')}{\sin z''} \cos\beta''.$$

Die Gleichungen (3) gehen über in:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1 + P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} \{R' \sin(\alpha - L') + \cos\beta' \sin(\alpha - \alpha')\, x' - \cos\beta' \sin(\alpha - \alpha')\, R' \cos\delta'\} \\
&= P' R \sin(\alpha - L) + R'' \sin(\alpha - L'') + \cos\beta'' \sin(\alpha - \alpha'')\, x'' - \cos\beta'' \sin(\alpha - \alpha'')\, R'' \cos\delta' \\
&\frac{1 + P''}{1 + \frac{Q'}{r''^3}} \{R'' \sin(\alpha''' - L'') + \cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')\, x'' - \cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'')\, R'' \cos\delta''\}' \\
&= P'' R''' \sin(\alpha''' - L''') + R' \sin(\alpha''' - L') + \cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha')\, x' - \cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha')\, R' \cos\delta'
\end{aligned}\right\} (5)$$

Setzt man noch:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\beta' \sin(\alpha - \alpha') = A; \quad \cos\beta'' \sin(\alpha - \alpha'') = B \\
\cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') = C; \quad \cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha') = D \\
\dfrac{R' \sin(\alpha - L')}{A} - R' \cos\delta' = b' \\
\dfrac{R'' \sin(\alpha''' - L'')}{C} - R'' \cos\delta'' = b'' \\
\dfrac{R' \sin(\alpha''' - L')}{D} - R' \cos\delta' = \varkappa' \\
\dfrac{R'' \sin(\alpha - L'')}{B} - R'' \cos\delta' = \varkappa'' \\
\dfrac{R \sin(\alpha - L)}{B} = \lambda \\
\dfrac{R''' \sin(\alpha''' - L''')}{D} = \lambda''' \\
\dfrac{A}{B} = \mu' \\
\dfrac{C}{D} = \mu''
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\mu' (1 + P')(x' + b')}{1 + \dfrac{Q'}{(x'^2 + R' \sin\delta'^2)^{3/2}}} = x'' + \varkappa'' + \lambda P' \\
\dfrac{\mu'' (1 + P'')(x'' + b'')}{1 + \dfrac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin\delta''^2)^{3/2}}} = x' + \varkappa' + \lambda''' P'
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

oder, wenn zu grösserer Bequemlichkeit:

$$\begin{array}{ll}
- \varkappa'' - \lambda P' = c' & \qquad - \varkappa' - \lambda''' P''' = c'' \\
\mu' (1 + P') = d' & \qquad \mu'' (1 + P'') = d''
\end{array}$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l}
x'' = c' + \dfrac{d' (x' + b')}{1 + \dfrac{Q'}{(x'^2 + R'^2 \sin\delta'^2)^{3/2}}} \\
x' = c'' + \dfrac{d'' (x'' + b'')}{1 + \dfrac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin\delta''^2)^{3/2}}}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

Es sei:

$$k(t' - t) = \tau'' \qquad k(t'' - t) = \tau' \qquad k(t'' - t') = \tau$$
$$k(t''' - t'') = \tau''' \qquad k(t''' - t') = \tau'_0,$$

so wird nach den Entwickelungen der Abtheilung IV:

$$\left.\begin{array}{l}
n = \dfrac{\tau}{\tau'} \left\{1 + {}^1/_6 \, \dfrac{\tau'' (\tau' + \tau)}{r'^3} + {}^1/_4 \, \dfrac{\tau'' (\tau''^2 + \tau\tau'' - \tau^2)}{r'^4} \, \dfrac{d r'}{k\, d t} + \cdots\right\} \\
n'' = \dfrac{\tau''}{\tau'} \left\{1 + {}^1/_6 \, \dfrac{\tau (\tau' + \tau'')}{r'^3} - {}^1/_4 \, \dfrac{\tau (\tau^2 + \tau\tau'' - \tau''^2)}{r'^4} \, \dfrac{d r'}{k\, d t} + \cdots\right\} \\
n' = \dfrac{\tau'''}{\tau'_0} \left\{1 + {}^1/_6 \, \dfrac{\tau (\tau'_0 + \tau''')}{r''^3} + {}^1/_4 \, \dfrac{\tau (\tau^2 + \tau\tau''' - \tau'''^2)}{r''^4} \, \dfrac{d r''}{k\, d t} + \cdots\right\} \\
n''' = \dfrac{\tau}{\tau'_0} \left\{1 + {}^1/_6 \, \dfrac{\tau''' (\tau'_0 + \tau)}{r''^3} - {}^1/_4 \, \dfrac{\tau''' (\tau'''^2 + \tau'''\tau - \tau^2)}{r''^4} \, \dfrac{d r''}{k\, d t} + \cdots\right\}
\end{array}\right\} \ldots (9)$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung setzt Gauss in der ersten Annäherung:

$$P' = \frac{n}{n''} = \frac{\tau}{\tau''} \qquad P'' = \frac{n'''}{n'} = \frac{\tau}{\tau'''}$$

$$Q' = (n + n'' - 1)\, r'^3 = {}^1\!/_2\, \tau\tau'' \qquad Q'' = (n' + n'' - 1)\, r''^3 = {}^1\!/_2\, \tau\tau'''.$$

Einundneunzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwickelungen der vorhergehenden Vorlesung.

Bruhns macht hier den Vorschlag, die erste Hypothese auf etwas andere Art als die eben angegebene zu bilden, um durchschnittlich, besonders aber bei sehr ungleichen Zeitintervallen, eine grössere Genauigkeit zu erreichen. Es verdient diese Modification um so mehr Beachtung, als gerade bei der Berechnung einer Bahn aus vier Oertern bei dem Aussuchen des Materials eine ziemlich grosse Ungleichheit der Zwischenzeiten gar nicht zu vermeiden ist, wenn man nicht das viel grössere Uebel haben will, dass zwei von den vier geocentrischen Längen einander sehr nahe gleich werden.

Die Gleichungen (2) der 90. Vorlesung werden unter Zuziehung von (4) und (6) sich schreiben lassen:

$$\begin{aligned} n\lambda \quad &- \mu' x' - \mu' b' + n'' x'' + n'' \varkappa'' = 0 \\ n'''\lambda''' &- \mu'' x'' - \mu'' b'' + n' x' + n' \varkappa' = 0. \end{aligned}$$

Werden darin für n, n', n'' und n''' noch diejenigen Glieder der Entwickelung berücksichtigt, welche $\frac{1}{r'^3}$ und $\frac{1}{r''^3}$ enthalten, dividirt man ferner die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\frac{\tau}{\tau'}$, die zweite mit $\frac{\tau}{\tau'_0}$ und setzt:

$$P' = \frac{\tau}{\tau''} \qquad P'' = \frac{\tau}{\tau'''},$$

so wird man haben:

$$\mu'(1 + P')(x' + b') = (x'' + \varkappa'' + \lambda P') \cdot \left\{ 1 + \frac{{}^1\!/_6 [\tau(\tau' + \tau'')] + {}^1\!/_6 \dfrac{\tau'(\tau'' - \tau) P'\lambda'}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}}{r'^3} \right\}$$

$$\mu''(1 + P'')(x'' + b'') = (x' + \varkappa' + \lambda''' P''') \cdot \left\{ 1 + \frac{{}^1\!/_6 [\tau(\tau'_0 + \tau''')] + {}^1\!/_6 \dfrac{\tau'_0(\tau''' - \tau') P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}}{r''^3} \right\}$$

Sollen nun diese Gleichungen auf dieselbe Form, wie in (8) der 90. Vorlesung zurückgebracht werden, so braucht man nur zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} Q' &= {}^1\!/_6\, \tau(\tau' + \tau'') + {}^1\!/_6 \frac{\tau'(\tau'' - \tau) P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''} \\ &= {}^1\!/_6\, \tau^2 \left(\frac{2 + P'}{P'}\right) + {}^1\!/_6 \frac{\tau\tau'(1 - P')\lambda}{x'' - c'} \\ Q'' &= {}^1\!/_6\, \tau(\tau'_0 + \tau''') + {}^1\!/_6 \frac{\tau'_0(\tau''' - \tau) P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'} \\ &= {}^1\!/_6\, \tau^2 \left(\frac{2 + P''}{P''}\right) + {}^1\!/_6 \frac{\tau\tau'_0(1 - P'')\lambda'''}{x' - c''} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In diesen Ausdrücken kommen auch die unbekannten Grössen x' und x'' vor, für welche die aus den Versuchen selbst hervorgehenden Näherungen eingesetzt werden. Bei der Auflösung der Gleichungen (8) der 90. Vorlesung geht man von derjenigen Annäherung aus, welche sich ergiebt, wenn $Q' = Q'' = 0$ gesetzt wird, d. h. von den Werthen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{c'' + d''(b'' + c') + d' d'' b'}{1 - d' d''} \\ x'' &= \frac{c' + d'(b' + c'') + d' d'' b''}{1 - d' d''} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Verbesserungen aber kann man auf folgende Art erhalten. Mit einem genäherten Werthe von x', welchen wir durch ξ' bezeichnen wollen, bestimmt man aus der ersteren der Gleichungen (8) den Näherungswerth ξ'', und darauf mit diesem letzteren aus der zweiten jener Gleichungen den Werth von x', welchen wir X' nennen wollen. Es sei nun der Versuchswerth von x' überhaupt gleich $\xi' + \varDelta\xi'$, der nach der ersten der Gleichungen (8) dazu gehörende Werth von x'' gleich $\xi'' + \varDelta\xi''$ und der darauf aus der zweiten Gleichung folgende Werth von x' gleich $X' + \varDelta X'$, so wird man sehr angenähert die Proportion haben:

$$\varDelta\xi' : \varDelta X' = x' - \xi' : x' - X'$$

oder:

$$(x' - X')\,\varDelta\xi' = \varDelta X'\,(x' - \xi'),$$

also auch:

$$x' = \frac{X'\varDelta\xi' - \xi'\varDelta X'}{\varDelta\xi' - \varDelta X'} = \xi' + \frac{(\xi' - X')\,\varDelta\xi'}{\varDelta X' - \varDelta\xi'}.$$

Für x'' erhält man auf demselben Wege:

$$x'' = \xi'' + \frac{(\xi'' - X')\,\varDelta\xi''}{\varDelta X' - \varDelta\xi''}.$$

Aus x' und x'' findet man r', r'', ϱ', ϱ'' mit Hülfe der oben angegebenen Relationen, und dann ferner auf bekannte Weise die heliocentrischen Coordinaten.

Um die heliocentrischen Bogen zwischen den äusseren Oertern, also $v''' - v$ auf bequeme Art zu finden, bemerke man, dass:

$$r r' \sin(v' - v) = \frac{n''}{n}\, r' r'' \sin(v'' - v') \text{ u. s. w.,}$$

also:

$$r \sin(v' - v) = \frac{n''}{n}\, r'' \sin(v'' - v') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

desgleichen:

$$r \sin(v' - v + v'' - v') = \frac{1}{n}\, r' \sin(v'' - v') \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$r''' \sin(v''' - v'') = \frac{n'}{n'''}\, r' \sin(v'' - v') \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$r''' \sin(v''' - v'' + v'' - v') = \frac{1}{n'''}\, r'' \sin(v'' - v') \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Werden (3) und (4) sowie auch nachher (5) und (6) einmal addirt, das andere Mal von einander subtrahirt, so erhält man die Gleichungen:

$$r \; sin\,\{(v' - v) + {}^1/_2\,(v'' - v')\} = \frac{r' + n''\,r''}{n} \, sin\,{}^1/_2\,(v'' - v')$$

$$r \; cos\,\{(v' - v) + {}^1/_2\,(v'' - v')\} = \frac{r' - n''\,r''}{n} \, cos\,{}^1/_2\,(v'' - v')$$

$$r'''\,sin\,\{(v''' - v'') + {}^1/_2\,(v'' - v')\} = \frac{r'' + n'\,r'}{n'''} \, sin\,{}^1/_2\,(v'' - v')$$

$$r'''\,cos\,\{(v''' - v'') + {}^1/_2\,(v'' - v')\} = \frac{r'' - n'\,r'}{n'''} \, cos\,{}^1/_2\,(v'' - v').$$

Zweiundneunzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln und Rechnungsbeispiel.

Bruhns wählt in der genannten Schrift folgende Beobachtungen des Planeten Bellona, um daran den Gang der numerischen Rechnung zu zeigen:

t, t', t'', t'''	1854 März 4,5	März 17,5	März 47,5	März 86,5
$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$	$177^0\ 50'\ 48'',8$	$174^0\ 53'\ 27'',7$	$169^0\ 32'\ 23'',9$	$170^0\ 55'\ 44'',6$
$(\beta), \beta', \beta'', (\beta''')$	$(+\,7^0\ 13'\ 56'',9)$	$+\,8^0\ \ 6'\ 39'',2$	$+\,9^0\ \ 1'\ 30'',3$	$(+\,8^0\ 39'\ 19'',4)$
L, L', L'', L'''	$164^0\ \ 5'\ 58'',1$	$177^0\ \ 3'\ 37'',0$	$206^0\ 36'\ 54'',4$	$244^0\ 20'\ 46'',2$
$log\ R$, $log\ R'$, $log\ R''$, $log\ R'''$	9,996668	9,998194	0,001910	0,005815.

Die vorstehenden Zahlen sind von dem Einflusse der Parallaxe, der Nutation und der Fixsternaberration befreit, auf das mittlere Aequinoctium der Epoche 1855,0 bezogen worden.

1. Kommen die folgenden Formeln zur Anwendung:

$$\tau'' = k\,(t' - t) \qquad \tau' = k\,(t'' - t)$$
$$\tau = k\,(t'' - t') \qquad \tau'_0 = k\,(t''' - t')$$
$$\tau''' = k\,(t''' - t'')$$

wobei $log\,k = 8{,}2355814$, ferner:

$$tg\,w' = \frac{tg\,\beta'}{sin\,(\alpha' - L')} \qquad tg\,\delta' = \frac{tg\,(\alpha' - L')}{cos\,w'},$$

$$tg\,w'' = \frac{tg\,\beta''}{sin\,(\alpha'' - L'')} \qquad tg\,\delta'' = \frac{tg\,(\alpha'' - L'')}{cos\,w''};$$

δ und δ'', die äusseren Winkel an der Erde in der zweiten und dritten Beobachtung, sind stets kleiner als 180^0, und da in den Gleichungen $cos\,\delta' = cos\,\beta'\,cos\,(\alpha' - L')$, $cos\,\delta'' = cos\,\beta'''\,cos\,(\alpha'' - L'')$, $cos\,\beta'$ und $cos\,\beta''$ positive Grössen sind, so zu wählen, dass $cos\,\delta'$ mit $cos\,(\alpha' - L')$, $cos\,\delta''$ mit $cos\,(\alpha'' - L'')$ gleiches Vorzeichen hat.

In diesem Falle ergiebt sich:

$$log\,\tau'' = 9{,}349524 \qquad log\,\tau' = 9{,}869049$$
$$log\,\tau = 9{,}712702$$
$$log\,\tau''' = 9{,}826646 \qquad log\,\tau'_0 = 0{,}074430$$
$$\delta' = 8^0\ 23'\ 38'',7 \qquad \delta'' = 38^0\ 0'\ 14'',3$$
$$log\,R'\,sin\,\delta' = 9{,}162490 \qquad log\,R''\,sin\,\delta'' = 9{,}791291$$
$$log\,R'\,cos\,\delta' = 9{,}993516 \qquad log\,R''\,cos\,\delta'' = 9{,}898419.$$

Sodann kommen 2. die Formeln:

$$\cos\beta' \sin(\alpha - \alpha') = A \qquad \cos\beta'' \sin(\alpha - \alpha'') = B$$
$$\cos\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') = C \qquad \cos\beta' \sin(\alpha''' - \alpha') = D$$

$$\frac{R' \sin(\alpha - L')}{A} - R' \cos\delta' = b' \qquad \frac{R \sin(\alpha - L)}{B} = \lambda$$
$$\frac{R'' \sin(\alpha''' - L'')}{C} - R'' \cos\delta'' = b'' \qquad \frac{R''' \sin(\alpha''' - L''')}{D} = \lambda'''$$
$$\frac{R' \sin(\alpha''' - L')}{D} - R' \cos\delta' = \varkappa' \qquad \frac{A}{B} = \mu'$$
$$\frac{R'' \sin(\alpha - L'')}{B} - R'' \cos\delta'' = \varkappa'' \qquad \frac{C}{D} = \mu''$$

an die Reihe. Man erhält dadurch:

$$\begin{array}{ll}
\log A = 8{,}708003 & \log C = 8{,}379153 \\
\log B = 9{,}154385 & \log D = 8{,}835077_n \\
\log b' = 9{,}855749_n & \log b'' = 1{,}402504_n \\
\log \varkappa' = 9{,}755687 & \log \varkappa'' = 0{,}621092_n \\
\log \lambda = 0{,}218206 & \log \lambda''' = 1{,}152288 \\
\log \mu' = 9{,}553618 & \log \mu'' = 9{,}544076_n
\end{array}$$

3. Wird nun zur Bildung der ersten Hypothese geschritten, wobei:

$$P' = \frac{\tau}{\tau''} \qquad P'' = \frac{\tau}{\tau'''},$$

und Q', Q'' entweder nach Gauss:

$$Q' = \tfrac{1}{2}\tau\tau'' \qquad Q'' = \tfrac{1}{2}\tau\tau''' \quad \text{. . . . . (1)}$$

oder mit der Bruhns'schen Verbesserung:

$$\left.\begin{array}{l}
Q' = \tfrac{1}{6}\left\{\tau^2 \dfrac{2 + P'}{P'} + \tau\tau' \dfrac{(1 - P')\lambda}{x' - c'}\right\} \\[2ex]
Q'' = \tfrac{1}{6}\left\{\tau^2 \dfrac{2 + P''}{P''} + \tau\tau'_0 \dfrac{(1 - P'')\lambda'''}{x'' - c''}\right\}
\end{array}\right| \quad \text{. . . . . . . (2)}$$

Zur Abkürzung sei:

$$c' = -\varkappa'' - \lambda P' \qquad d' = \mu'(1 + P')$$
$$c'' = -\varkappa' - \lambda''' P'' \qquad d'' = \mu''(1 + P'').$$

Man erhält hier:

$$\log c' = 9{,}562483 \qquad \log c'' = 1{,}060426_n$$
$$\log d' = 0{,}073143 \qquad \log d'' = 9{,}791860_n.$$

Es sind sodann auf irgend einem indirecten Wege, z. B. dem in voriger Vorlesung beschriebenen [1]), die Gleichungen:

$$x'' = c' + \frac{d'(x' + b')}{1 + \dfrac{Q'}{(x'^2 + R'^2 \sin\delta'^2)^{3/2}}} \quad \text{. . . . . (I)}$$

---

[1]) Eine bequeme Auflösungsart besteht darin, dass man in den Annäherungsformeln (2) der Vorlesung 91 anstatt d' die Grösse $d' : \left\{1 + \dfrac{Q'}{(x'^2 + R'^2 \sin\delta'^2)^{3/2}}\right\}$ und anstatt d'' die Grösse $d'' : \left\{1 + \dfrac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin\delta''^2)^{3/2}}\right\}$ einsetzt, indem man die Werthe von Q' und Q'' successive verbessert.

$$x' = c'' + \frac{d''(x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin \delta''^2)^{3/2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

aufzulösen.

Die Bruhns'sche Hypothesenbildung von Q' und Q'' nach (2) kann offenbar erst angewandt werden, wenn x' und x'' schon nahe bekannt sind. Zuerst erhält man:

$$log\, P' = 0{,}363\,178 \qquad log\, P'' = 9{,}886\,056$$

und wenn (1) zu Grunde gelegt wird:

$$log\, Q' = 8{,}761\,196 \qquad log\, Q'' = 9{,}238\,318.$$

Von den Annäherungsformeln:

$$x' = \frac{c'' + d''(b'' + c') + d'\,d''\,b'}{1 - d'\,d''}$$

$$x'' = \frac{c' + d'(b' + c'') + d'\,d''\,b''}{1 - d'\,d''}$$

ausgehend, welche $log\, x' = 0{,}409\,737$, $log\, x'' = 0{,}407\,602$ als erste Werthe bieten, findet sich:

$$log\, x' = 0{,}395\,328$$
$$log\, x'' = 0{,}389\,030,$$

wenn die Hypothese nach (1) gebildet wird; nach (2) dagegen, wenn die Näherungswerthe $log\, x' = 0{,}409\,737$, $log\, x'' = 0{,}407\,602$ zu Grunde gelegt werden, ergiebt sich:

$$log\, Q' = 8{,}303\,187 \qquad log\, Q'' = 9{,}263\,833$$
$$log\, x' = 0{,}394\,034 \qquad log\, x'' = 0{,}388\,375.$$

Mit letzterer Lösung wird dann aus (2) die noch genauere:

$$log\, Q' = 8{,}224\,279 \qquad log\, Q'' = 9{,}264\,200$$
$$log\, x' = 0{,}393\,996 \qquad log\, x'' = 0{,}388\,409$$

gefunden.

4. Kommt die Reihe an die Formeln:

$$cotg\, z' = \frac{x'}{R' \sin \delta'} \qquad cotg\, z'' = \frac{x''}{R'' \sin \delta''}$$

$$r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z'} \qquad r'' = \frac{R'' \sin \delta''}{\sin z''}$$

$$\varrho' = \frac{R' \sin(\delta' - z')}{\sin z'} \cos \beta' \qquad \varrho'' = \frac{R'' \sin(\delta'' - z'')}{\sin z''} \cos \beta''$$

$$\left.\begin{aligned} n'' &= \left(1 + \frac{Q'}{r'^3}\right) \frac{1}{1 + P'} \\ n &= n''\,P' \\ n' &= \left(1 + \frac{Q''}{r^3}\right) \frac{1}{1 + P''} \\ n''' &= n'\,P' \end{aligned}\right\} \text{wenn } Q' \text{ und } Q'' \text{ aus (1) berechnet sind,}$$

$$\left.\begin{aligned} n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left(1 + \frac{\tau\,\tau''}{2\,r'^3} \cdot \frac{2 + P'}{3}\right) \\ n &= \frac{\tau}{\tau'} \left(1 + \frac{\tau\,\tau''}{2\,r'^3} \cdot \frac{1 + 2\,P'}{3\,P'}\right) \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left(1 + \frac{\tau\,\tau'''}{2\,r''^3} \cdot \frac{2 + P''}{3}\right) \\ n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0} \left(1 + \frac{\tau\,\tau'''}{2\,r''^3} \cdot \frac{1 + 2\,P''}{3\,P''}\right) \end{aligned}\right\} \text{wenn } Q' \text{ und } Q'' \text{ aus (2) berechnet sind.}$$

In dem gegenwärtigen Beispiele würde aus (1) folgen:

$$\begin{array}{llll} z' = 3^0\,20'\,52'',9 & & z'' = 14^0\,10'\,15'',5 \\ \log r' = 0{,}396069 & & \log r'' = 0{,}402451 \\ \log \varrho' = 0{,}171675 & & \log \varrho'' = 0{,}214119 \\ \log n'' = 9{,}482097 & & \log n = 9{,}756855 \\ \log n' = 9{,}845275 & & \log n''' = 9{,}642911 \end{array}$$

dagegen aus (2):

$$\begin{array}{llll} z' = 3^0\,21'\,29'',9 & & z'' = 14^0\,11'\,25'',4 \\ \log r' = 0{,}394743 & & \log r'' = 0{,}401868 \\ \log \varrho' = 0{,}169465 & & \log \varrho'' = 0{,}213203 \\ \log n'' = 9{,}482823 & & \log n' = 9{,}844981 \\ \log n = 9{,}756517 & & \log n''' = 9{,}643393 \end{array}$$

5. Kommt die Ableitung der heliocentrischen Längen und Breiten, und, wenn die Verbesserung weit genug getrieben ist, des Knotens, der Neigung und der Argumente der Breite u, u', u'', u'''. Es dienen dazu die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} r' \cos b' \sin(l' - L') &= \varrho' \sin(\alpha' - L') \\ r' \cos b' \cos(l' - L') &= \varrho' \cos(\alpha' - L') + R' \\ r' \sin b' &= \varrho' \operatorname{tg} \beta' \\ r'' \cos b'' \sin(l'' - L'') &= \varrho'' \sin(\alpha'' - L'') \\ r'' \cos b'' \cos(l'' - L'') &= \varrho'' \cos(\alpha'' - L') + R'' \\ r'' \sin b'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta'', \end{aligned}$$

wenn l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen, b, b', b'', b''' die heliocentrischen Breiten des Planeten vorstellen. Zur partiellen Prüfung der Rechnung dient, dass ϱ', ϱ'', r' und r'' mit den vorhin gefundenen Werthen übereinstimmen müssen. Zur Berechnung von ☊, i, u', u'' hat man dann weiter:

$$\begin{aligned} \sin[{}^1/_2(l'' + l') - ☊] \operatorname{tg} i &= {}^1/_2(\operatorname{tg} b'' + \operatorname{tg} b') \sec {}^1/_2(l'' - l') \\ \cos[{}^1/_2(l'' + l') - ☊] \operatorname{tg} i &= {}^1/_2(\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b') \operatorname{cosec} {}^1/_2(l'' - l') \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} u' = \operatorname{tg}(l' - ☊) \sec i, \qquad \operatorname{tg} u'' = \operatorname{tg}(l'' - ☊) \sec i.$$

Die numerischen Werthe sind hier, wenn Q' und Q'' aus (1) gebildet werden:

$$\begin{array}{rlrl} \log r' = & 0{,}396069 & \log r'' = & 0{,}402451 \text{ (also wie oben)} \\ l' = & 175^0\,45'\,42'',6 & l'' = & 183^0\,29'\,4'',9 \\ \log \operatorname{tg} b' = & 8{,}931042 & \log \operatorname{tg} b'' = & 9{,}014923 \\ ☊ = & 144^0\,42'\,20'',5 & i = & 9^0\,23'\,10'',9 \\ u' = & 31^0\,23'\,54'',7 & u'' = & 39^0\,9'\,23'',7. \end{array}$$

Wird die Hypothese nach (2) gebildet, so erhält man die Zahlen:

$$\begin{array}{rlrl} \log r' = & 0{,}394742 & \log r'' = & 0{,}401868 \\ l' = & 175^0\,45'\,52'',2 & l'' = & 183^0\,30'\,13'',4 \\ \log \operatorname{tg} b' = & 8{,}930153 & \log \operatorname{tg} b'' = & 9{,}014586 \\ ☊ = & 144^0\,43'\,4'',8 & i = & 9^0\,22'\,28'',3 \\ u' = & 31^0\,23'\,16'',6 & u'' = & 39^0\,9'\,44'',7. \end{array}$$

6. Sind die heliocentrischen Coordinaten der äusseren Oerter zu suchen nach den Formeln:

$$r \sin[{}^1/_2(u'' - u') + (u' - u)] = \frac{r' + n'' r''}{n} \sin {}^1/_2(u'' - u')$$

$$r \cos[{}^1/_2(u'' - u') + (u' - u)] = \frac{r' - n'' r''}{n} \cos {}^1/_2(u'' - u')$$

$$r''' \sin\left[\tfrac{1}{2}(u''-u')+(u'''-u'')\right]=\frac{r''+n'r'}{n'''}\sin\tfrac{1}{2}(u''-u')$$
$$r''' \cos\left[\tfrac{1}{2}(u''-u')+(u'''-u'')\right]=\frac{r''-n'r'}{n'''}\cos\tfrac{1}{2}(u''-u').$$

Für Bellona wird hier nach der Hypothesenbildung aus (1) gefunden:

$$\log r = 0{,}393473 \qquad \log r''' = 0{,}411478$$
$$u = 27^0\,58'\,29'',7 \qquad u''' = 48^0\,54'\,28'',1,$$

nach (2) aber:

$$\log r = 0{,}391813 \qquad \log r''' = 0{,}411750$$
$$u = 27^0\,56'\,25'',8 \qquad u''' = 48^0\,52'\,46'',3.$$

Wie in praktischen Fällen überhaupt, ist es nun sehr zweckmässig, eine vollständige Prüfung der bis hierher gefundenen Werthe vorzunehmen. Man berechnet zu dem Ende l, l''', b und b''' aus u und u''' und dann weiter α, α''', β, β''', ϱ, ϱ'''; es müssen dann, auf welche der beiden Arten die Hypothese für Q' und Q'' auch gebildet sein möge, α und α''' genau, β und β''' nahe mit den Beobachtungen übereinstimmen. Man kann sich folgender Formeln bedienen:

$$tg(l-\Omega)=tg\,u\cos i, \qquad tg(l'''-\Omega)=tg\,u'''\cos i$$
$$\sin b=\sin u\sin i \qquad \sin b'''=\sin u'''\sin i$$

$$\begin{aligned}
r\cos b\sin(l-L) &= \varrho\sin(\alpha-L)\\
r\cos b\cos(l-L)-R &= \varrho\cos(\alpha-L)\\
r\sin b &= \varrho\,tg\,\beta\\
r'''\cos b'''\sin(l'''-L''') &= \varrho'''\sin(\alpha'''-L''')\\
r'''\cos b'''\cos(l'''-L''')-R''' &= \varrho'''\cos(\alpha'''-L''')\\
r'''\sin b''' &= \varrho'''\,tg\,\beta'''.
\end{aligned}$$

Bei Hypothesenbildung nach (1) wird gefunden:

$$\begin{aligned}
l &= 172^0\,21'\,42'',7 & l''' &= 193^0\,13'\,50'',3\\
\log\sin b &= 8{,}883683 & \log\sin b''' &= 9{,}089603\\
\alpha &= 177^0\,50'\,48'',8 & \alpha''' &= 170^0\,55'\,44'',4\\
\beta &= 7^0\,13'\,52'',4 & \beta''' &= 8^0\,40'\,13'',3\\
\log\varrho &= 0{,}173753 & \log\varrho''' &= 0{,}317833.
\end{aligned}$$

Bei der Hypothesenbildung aus (2) erhält man:

$$\begin{aligned}
l &= 172^0\,20'\,27'',1 & l''' &= 193^0\,12'\,56'',0\\
\log\sin b &= 8{,}882648 & \log\sin b''' &= 9{,}088872\\
\alpha &= 177^0\,50'\,48'',9 & \alpha''' &= 170^0\,55'\,44'',7\\
\beta &= 7^0\,13'\,55'',9 & \beta''' &= 8^0\,39'\,14'',3\\
\log\varrho &= 0{,}170998 & \log\varrho''' &= 0{,}318209.
\end{aligned}$$

Nach S. 479 aber soll sein: $\beta''' = 8^0\,39'\,19'',4$. Die Prüfung fällt demnach befriedigend aus.

Dreiundneunzigste Vorlesung.

Fortsetzung des Rechnungsbeispiels. Zweite Hypothese.

Es müssen jetzt nach den eben gefundenen Zahlen P' und P'', Q' und Q'' verbessert werden, für welches Geschäft eine Reihe von Methoden zu Gebote stehen.

Bezeichnet man das Verhältniss $\frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}}$ für die Intervalle $t' - t$, $t'' - t'$, $t''' - t''$ beziehungsweise mit y, y', y'', so wird man nach den früher gegebenen Entwickelungen haben:

$$P' = \frac{\tau}{\tau''} \cdot \frac{y}{y'} \qquad P'' = \frac{\tau}{\tau'''} \cdot \frac{y''}{y'}$$

$$Q' = {}^1/_2\, \tau\tau'' \frac{r' r'}{r\, r''} \frac{1}{y y' \cos {}^1/_2 (u' - u) \cos {}^1/_2 (u'' - u) \cos {}^1/_2 (u'' - u')}$$

$$Q'' = {}^1/_2\, \tau\tau''' \frac{r'' r''}{r' r'''} \frac{1}{y' y'' \cos {}^1/_2 (u'' - u') \cos {}^1/_2 (u''' - u') \cos {}^1/_2 (u''' - u'')}.$$

Hansen's Kettenbruch oder auch die Encke'sche Reihenentwickelung oder die Tafeln der Theoria motus (siehe Tafel XII und XIII im beifolgenden Tafelanhang) liefern für das vorliegende Beispiel, wenn die erste Hypothese für Q' und Q'' nach (1) der 92. Vorlesung gebildet war:

$\log y = 0{,}000237$	
$\log y' = 0{,}001224$	
$\log y'' = 0{,}001965$	
$\log P' = 0{,}362191$	$\log P'' = 9{,}886797$
$\log Q' = 8{,}759209$	$\log Q'' = 9{,}240136$,

für Q' und Q'' aus (2) der 92. Vorlesung:

$\log y = 0{,}000239$	
$\log y' = 0{,}001232$	
$\log y'' = 0{,}001964$	
$\log P' = 0{,}362185$	$\log P'' = 9{,}886788$
$\log Q' = 8{,}758811$	$\log Q'' = 9{,}240008$.

Für den Fall der ersten Hypothese aus (1) der 92. Vorlesung ergiebt dann die zweite Hypothese die folgenden Zahlen:

$\log c' = 9{,}572660$	$\log d' = 0{,}072455$
$\log c'' = 1{,}061130_n$	$\log d'' = 9{,}792182_n$
$\log x' = 0{,}394030$	$\log x'' = 0{,}388426$
$z' = 3^0 21' 28'',9$	$z'' = 14^0 11' 23'',6$
$\log r' = 0{,}394777$	$\log r'' = 0{,}401883$
$\log \varrho' = 0{,}169523$	$\log \varrho'' = 0{,}213226$
$\log n'' = 9{,}482792$	$\log n = 9{,}844983$
$\log n' = 9{,}756571$	$\log n''' = 9{,}643368$
$l' = 175^0 45' 51'',9$	$l'' = 183^0 30' 11'',5$
☊ $= 144^0 42' 53'',5$	$i = 9^0 22' 27'',1$
$u' = 31^0 23' 27'',7$	$u'' = 39^0\ 9' 51'',0$
$\log r = 0{,}391866$	$\log r''' = 0{,}411701$
$u = 27^0 56' 39'',7$	$u''' = 48^0 53'\ 6'',7$
$l = 172^0 20' 29'',6$	$l''' = 193^0 13'\ 5'',2$
$\alpha = 177^0 50' 48'',9$	$\alpha''' = 170^0 55' 44'',4$
$\beta = 7^0 13' 56'',0$	$\beta''' = 8^0 39' 17'',0$,

für Q' und Q'' aus (2) der 92. Vorlesung liefert die zweite Hypothese:

$\log c' = 9{,}572721$	$\log d' = 0{,}072451$
$\log c'' = 1{,}061122_n$	$\log d'' = 9{,}792179_n$
$\log x' = 0{,}394046$	$\log x'' = 0{,}388452$
$z' = 3^0 21' 28'',5$	$z'' = 14^0 11' 20'',7$

$\log r' = 0{,}394793$	$\log r'' = 0{,}401907$
$\log \varrho' = 0{,}169549$	$\log \varrho'' = 0{,}213264$
$\log n'' = 9{,}482794$	$\log n = 9{,}844979$
$\log n' = 9{,}756571$	$\log n''' = 9{,}643359$
$l' = 175^0 45' 51'',8$	$l'' = 183^0 30' 8'',7$
$\Omega = 144^0 43' 5'',6$	$i = 9^0 22' 31'',2$
$u' = 31^0 23' 15'',5$	$u'' = 39^0 9' 39'',1$
$\log r = 0{,}391882$	$\log r''' = 0{,}411741$
$u = 27^0 56' 28'',3$	$u''' = 48^0 52' 47'',2$
$l = 172^0 20' 30'',1$	$l''' = 193^0 12' 57'',5$
$\alpha = 177^0 50' 48'',8$	$\alpha''' = 170^0 55' 44'',6$
$\beta = 7^0 13' 56'',0$	$\beta''' = 8^0 39' 17'',3.$

Wird aus diesen Zahlen die dritte Hypothese gebildet, so ergiebt die Fortsetzung von (1) der 92. Vorlesung:

$$\log y = 0{,}000239$$
$$\log y' = 0{,}001232$$
$$\log y'' = 0{,}001964$$

$$\log P' = 0{,}362185 \qquad \log P'' = 9{,}886788$$
$$\log Q' = 8{,}758812 \qquad \log Q'' = 9{,}240035,$$

von (2) der 92. Vorlesung:

$$\log y = 0{,}000239$$
$$\log y' = 0{,}001232$$
$$\log y'' = 0{,}001964$$
$$\log P' = 0{,}362185 \qquad \log P'' = 9{,}886788$$
$$\log Q' = 8{,}758804 \qquad \log Q'' = 9{,}240026.$$

Die Fortsetzung von (1) der 92. Vorlesung würde das Durchrechnen einer dritten Hypothese verlangen, wenn scharfe Uebereinstimmung erzielt werden soll; bei (2) der 92. Vorlesung hingegen stimmen die $\log P'$, $\log P''$ der dritten Hypothese vollständig, die eine weniger wichtige Rolle spielenden $\log Q'$ und $\log Q''$ aber so nahe mit den Zahlen der zweiten Hypothese, dass hier die weitere Berechnung der dritten Hypothese erspart wird.

Auf bekanntem Wege ergeben sich dann aus den heliocentrischen Coordinaten der äusseren Oerter die folgenden Elemente der Bellona:

Epoche 1855, März 0,0.

$$M = 36^0\ 44'\ 13'',8$$
$$\left.\begin{aligned} \pi &= 122^0\ 17'\ 6'',3 \\ \Omega &= 144^0\ 43'\ 5'',6 \\ i &= 9^0\ 22'\ 31'',2 \end{aligned}\right\} \text{Mittleres Aequinoctium von 1855,0}$$
$$\varphi = 8^0\ 54'\ 3'',9$$
$$\log a = 0{,}443278$$
$$\mu = 767'',520,$$

wobei M die mittlere Anomalie der Epoche bedeutet.

Vierundneunzigste Vorlesung.

Hypothesenbildung (1) und (2).

Die vorhergehenden Rechnungen haben gezeigt, wie sehr die von Bruhns vorgeschlagene Hypothesenbildung (2) der älteren (1) der 92. Vorlesung an Genauigkeit überlegen ist. Wir wollen hier deren zwei andere hinzufügen, durch welche die Genauigkeit der ersten Hypothese noch weiter erheblich gesteigert werden kann.

Sehen wir uns nämlich die Gleichungen (9) der 90. und (1) der 91. Vorlesung etwas genauer an; der Kürze halber seien n, n', n'', n''' unter der Form:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{\tau}{\tau'}\left(1+\frac{q}{r'^3}\right) & q &= \frac{1}{6}\,\tau''\,(\tau'+\tau)\\
n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0}\left(1+\frac{q'}{r''^3}\right) & q' &= \frac{1}{6}\,\tau\,(\tau'_0+\tau''')\\
n'' &= \frac{\tau''}{\tau'}\left(1+\frac{q''}{r'^3}\right) \quad \text{wo} & q'' &= \frac{1}{6}\,\tau\,(\tau'+\tau'')\\
n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0}\left(1+\frac{q'''}{r''^3}\right) & q''' &= \frac{1}{6}\,\tau'''\,(\tau'_0+\tau)
\end{aligned}$$

enthalten, so gehen die Gleichungen (1) der 91. Vorlesung über in:

$$\begin{aligned}
Q' &= q'' + \frac{(q-q'')\,P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\\
Q'' &= q' - \frac{(q'''-q')\,P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'},
\end{aligned}$$

während noch immer $P' = \frac{\tau}{\tau''}$, $P'' = \frac{\tau}{\tau'''}$ gesetzt wird. In der vorstehenden Form können Q' und Q'' auch dann noch enthalten gedacht werden, wenn in den Reihenentwickelungen für n, n', n'', n''' Glieder von noch höherer Ordnung berücksichtigt werden sollen.

Sollen die Glieder mit $\frac{dr'}{k\,dt}$ und $\frac{dr''}{k\,dt}$ zugezogen werden, so hat man:

$$\begin{aligned}
q &= {}^1/_6\,\tau''\,(\tau'+\tau) + {}^1/_4\,\tau''\,(\tau''\,\tau' - \tau^2)\,\frac{dr'}{r'k\,dt}\\
q'' &= {}^1/_6\,\tau\,(\tau'+\tau'') - {}^1/_4\,\tau\,(\tau\,\tau' - \tau''^2)\,\frac{dr'}{r'k\,dt}\\
q' &= {}^1/_6\,\tau\,(\tau'_0+\tau''') + {}^1/_4\,\tau\,(\tau\,\tau'_0 - \tau'''^2)\,\frac{dr''}{r''k\,dt}\\
q''' &= {}^1/_6\,\tau'''\,(\tau'_0+\tau) - {}^1/_4\,\tau'''\,(\tau'''\,\tau'_0 - \tau^2)\,\frac{dr''}{r''k\,dt}\\
q - q'' &= {}^1/_6\,(\tau''^2 - \tau^2) + {}^1/_4\,(\tau''^3 + \tau^3)\,\frac{dr'}{r'k\,dt}\\
q''' - q' &= {}^1/_6\,(\tau'''^2 - \tau^2) - {}^1/_4\,(\tau^3 + \tau'''^3)\,\frac{dr''}{r''k\,dt},
\end{aligned}$$

demnach:

$$Q' = {}^1/_6 \left\{\tau(\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2)\, P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right\}$$
$$- {}^1/_4 \left\{\tau(\tau\tau' - \tau''^2) - \frac{(\tau^3 + \tau''^3)\, P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right\} \frac{dr'}{r' k dt}$$
$$Q'' = {}^1/_6 \left\{\tau(\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau'''^2 - \tau^2)\, P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\}$$
$$+ {}^1/_4 \left\{\tau(\tau\tau'_0 - \tau'''^2) - \frac{(\tau^3 + \tau'''^3)\, P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\} \frac{dr''}{r'' k dt}.$$

Setzt man hier nach Vorlesung 89, aber unter Annahme der Bruhns'schen Bezeichnung:

$$\frac{dr'}{r' k dt} = \frac{r'' - r'}{r'\tau}$$
$$\frac{dr''}{r'' k dt} = \frac{r'' - r'}{r''\tau},$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
Q' &= {}^1/_6 \left\{\tau(\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2)\, P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right\} \\
&\quad + {}^1/_4 \left\{\tau\tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa}\right\} \frac{r' - r''}{r'} \\
Q'' &= {}^1/_6 \left\{\tau(\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau'''^2 - \tau^2)\, P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\} \\
&\quad + {}^1/_4 \left\{\tau\tau'_0 - \tau'''^2 - \frac{\tau^3 + \tau'''^3}{\tau} \cdot \frac{P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\} \frac{r'' - r'}{r''}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

wobei, wie früher bei Bruhns' Bildung der ersten Hypothese, die Grössen P' und P'' als Abkürzungen für $\frac{\tau}{\tau''}$ und $\frac{\tau}{\tau'''}$ betrachtet werden müssen. In den folgenden Hypothesen dagegen stellen P' und P'' wieder die Verhältnisse $\frac{n}{n''}$ und $\frac{n'''}{n}$ vor.

Noch erheblich weitere Annäherung an die wahren Werthe erhält man gleich in der ersten Hypothese, wenn nach Vorlesung 89:

$$\frac{dr'}{kdt} = \frac{\tau^2(r' - r) + \tau''^2(r'' - r')}{\tau\tau'\tau''}$$
$$\frac{dr''}{kdt} = \frac{\tau'^2(r''' - r'') + \tau'''^2(r'' - r')}{\tau\tau'_0\tau'''}$$

gesetzt wird; es ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
Q' &= {}^1/_6 \left\{\tau(\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2)\, P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right\} \\
&\quad + {}^1/_4 \left\{\tau\tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \frac{P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right\} \cdot \frac{\tau^2(r - r') + \tau''^2(r' - r'')}{\tau'\tau'' r'} \\
Q'' &= {}^1/_6 \left\{\tau(\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau'''^2 - \tau^2)\, P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\} \\
&\quad + {}^1/_4 \left\{\tau\tau'_0 - \tau'''^2 - \frac{\tau^3 + \tau'''^3}{\tau} \frac{P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right\} \cdot \frac{\tau'^2(r''' - r'') + \tau'''^2(r'' - r')}{\tau'_0\tau''' r''}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Ausdrücke für n'', n, n', n''' werden bei der Hypothese nach (1):

$$n'' = \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 + \frac{\tau\tau''}{2r'^3}\,\frac{2+P'}{3} + \frac{\tau\tau' - \tau''^2}{4}\cdot\frac{r'-r''}{r'^4}\right\}$$

$$n = \frac{\tau}{\tau'}\left\{1 + \frac{\tau\tau''}{2r'^3}\,\frac{1+2P'}{3P'} + \frac{\tau''\tau' - \tau^2}{4P'}\cdot\frac{r''-r'}{r'^4}\right\}$$

$$n' = \frac{\tau'''}{\tau'_0}\left\{1 + \frac{\tau\tau'''}{2r''^3}\,\frac{2+P''}{3} + \frac{\tau\tau'_0 - \tau'''^2}{4}\cdot\frac{r''-r'}{r''^4}\right\}$$

$$n''' = \frac{\tau}{\tau'_0}\left\{1 + \frac{\tau\tau'''}{2r''^3}\,\frac{1+2P''}{3P''} + \frac{\tau'''\tau'_0 - \tau''^2}{4P''}\cdot\frac{r'-r''}{r''^4}\right\},$$

bei der Hypothese nach (2):

$$n'' = \frac{\tau''}{\tau'}\left\{1 + \frac{\tau\tau''}{2r'^3}\,\frac{2+P'}{3} + \frac{\tau\tau' - \tau''^2}{4}\cdot\frac{\tau^2(r-r') + \tau''^2(r'-r'')}{\tau'\tau''r'^4}\right\}$$

$$n = \frac{\tau}{\tau'}\left\{1 + \frac{\tau\tau''}{2r'^3}\,\frac{1+2P'}{3P'} + \frac{\tau''\tau' - \tau^2}{4P'}\cdot\frac{\tau^2(r'-r) + \tau''^2(r''-r')}{\tau'\tau''r'^4}\right\}$$

$$n' = \frac{\tau'''}{\tau'_0}\left\{1 + \frac{\tau\tau'''}{2r''^3}\,\frac{2+P''}{3} + \frac{\tau\tau'_0 - \tau'''^2}{4}\cdot\frac{\tau'^2(r'''-r'') + \tau'''^2(r''-r')}{\tau'_0\tau'''r''^4}\right\}$$

$$n''' = \frac{\tau}{\tau'_0}\left\{1 + \frac{\tau\tau'''}{2r''^3}\,\frac{1+2P''}{3P''} + \frac{\tau'''\tau'_0 - \tau''^2}{4P''}\cdot\frac{\tau'^2(r''-r''') + \tau'''^2(r'-r'')}{\tau'_0\tau'''r''^4}\right\}.$$

In den Formeln (1) und (2) sind die ersten Glieder offenbar mit denen der Bruhns'schen Formeln identisch. Die Zusatzglieder zu berücksichtigen, bietet sich bei den praktischen Rechnungen die beste Gelegenheit, nämlich da, wo die Zeiten wegen der Aberration zu corrigiren sind und deshalb schon aus diesem Grunde die Auflösung der Finalgleichungen noch einmal vorgenommen werden muss.

Das oben behandelte Beispiel für Bellona kann hier auch gleich dazu dienen, die Anwendung der Hypothese (1) und (2) zu zeigen, indem wir die aus (2) der 92. Vorlesung in der ersten Hypothese folgenden Werthe benutzen.

Wir erhalten:

$$^1/_4\left(\tau\tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3+\tau''^3}{\tau}\cdot\frac{P'\lambda}{P'\lambda + x'' + \varkappa''}\right) = -\ 0{,}049083$$

$$^1/_4\left(\tau\tau'_0 - \tau'''^2 - \frac{\tau^3+\tau'''^3}{\tau}\cdot\frac{P''\lambda'''}{P''\lambda''' + x' + \varkappa'}\right) = -\ 0{,}125807$$

$$\frac{r'-r''}{r'} = -\ 0{,}016541$$

$$\frac{r''-r'}{r''} = +\ 0{,}016272,$$

also $\log Q' = 8{,}244821$, $\log Q'' = 9{,}259334$. Lösen wir nach diesen Werthen die Finalgleichungen (I) und (II) der 92. Vorlesung von Neuem auf, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \log x' &= 0{,}394201 & \log x'' &= 0{,}388641 \\ \log r' &= 0{,}394946 & \log r'' &= 0{,}402085 \\ \log n'' &= 9{,}482781 & \log n &= 9{,}844974 \\ \log n''' &= 9{,}643279 & \log n' &= 9{,}756528. \end{aligned}$$

Rechnet man nach Hypothese (2), so erhält man $\log Q' = 8{,}243955$, $\log Q'' = 9{,}259147$, daraus im Uebrigen sehr nahe dieselbe Lösung. Den Grad ihrer Annäherung zu beurtheilen, braucht man nur die Werthe von n, n', n'', n''' mit den in der 93. Vorlesung gefundenen zu vergleichen, da von der Darstellung dieser Verhältnisse der Dreiecke auch die der geocentrischen Oerter vorzugsweise abhängig ist. Man hat nämlich:

	92. Vorlesung		94. Vorlesung	
	Hypothese nach (1)	nach (2)	nach (1)	definitive Werthe
$\log n$ =	9,844974	9,844981	9,845275	9,844979
$\log n'$ =	9,756855	9,756517	9,756528	9,756571
$\log n''$ =	9,482097	9,482823	9,482781	9,482794
$\log n'''$ =	9,642911	9,643393	9,643338	9,643359.