

# **Universitäts- und Landesbibliothek Tirol**

## **Theoretische Astronomie**

**Klinkerfues, Wilhelm**

**Braunschweig, 1912**

Dritte Abtheilung. Die Bestimmung der parabolischen Bahnen von  
Kometen

## Dritte Abtheilung.

# Die Bestimmung der parabolischen Bahnen von Kometen.

### Dreiundzwanzigste Vorlesung.

#### Einleitende Bemerkungen über die Kometenbahnen. Wiedererkennen früher erschienener Kometen.

Die in der zweiten Abtheilung vorgetragenen Methoden zur Berechnung einer Kreisbahn, welche gelegentlich der Entdeckung neuer Planeten schätzbare Dienste leisten können (obgleich sie im Allgemeinen nicht ermöglichen würden, einen solchen Himmelskörper nach seinem zweiten Stationärwerden und Unsichtbarwerden in der Abenddämmerung in einer nächstfolgenden Erscheinung zwischen unzähligen Sternen desselben Aussehens wieder aufzusuchen), erweisen sich gänzlich unbrauchbar bei den Kometen, einer ihrer physischen Erscheinung nach noch immer sehr räthselhaften Classe von Gestirnen, die nach Kepler's Ausdrucksweise zahlreicher ist, als die Fische im Ocean. Ihre Bahnen vertreten den Grenzfall der Ellipse, wo dieselbe zur Parabel übergeht, so ausserordentlich nahe, dass selbst aus längeren Beobachtungsreihen eine Abweichung nur in den selteneren Fällen festzustellen ist. Es kann daher immer ohne alles Bedenken, bis die Beobachtungen mit Entschiedenheit eine Abweichung von der Parabel und dass der Komet zu den sogenannten periodischen gehört, verrathen, die Excentricität  $e = 1$ , also der Excentricitätswinkel  $\varphi = 90^\circ$  gesetzt werden, womit, wie dem Leser aus der ersten Abtheilung bekannt, die Bewegung in der Parabel ausgedrückt wird. Somit bleiben noch die folgenden fünf Elemente zu bestimmen übrig:

- $T$  die Epoche des Perihels,
- $\pi$  die Länge des Perihels,
- $\Omega$  die Länge des aufsteigenden Knotens,
- $i$  die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik,
- $q$  der Abstand von der Sonne im Perihel;

es sind daher auch fünf von einander unabhängige Data nöthig, wie sie z. B. in zwei vollständigen Beobachtungen und einer unvollständigen, in drei Rectascensionen und zwei Declinationen oder drei Längen und zwei Breiten enthalten sind. Die gebräuchlichste Methode für solche Rechnungen wendet, aus Gründen, welche der Leser weiter unten kennen lernen wird, drei vollständige Beobachtungen, d. h. drei geocentrische Längen und Breiten an, worin nach dem eben Gesagten ein überflüssiges Datum enthalten ist.

Wir haben in den obigen fünf Elementen zwar nur eine einzige Unbekannte mehr als bei der Kreisbahn, aber dieser Umstand war genügend, die Berechnung einer parabolischen Bahn, nicht bloss für das Zeitalter Newton's, welcher zuerst die parabolische Natur der Kometenbahnen verkündete, sondern noch für fast das ganze vorige Jahrhundert zu einer ausserordentlich schwierigen und zeitraubenden Aufgabe zu machen. Als *problema longe difficillimum* bezeichnet sie Newton, und obgleich er selbst und seine Nachfolger, die grossen Mathematiker des 18. Jahrhunderts, unter Anderen A. Lambert, Euler, Legendre, Laplace, Lösungen des Problems gegeben haben, so genügte doch keine darunter dem praktischen Bedürfniss. Erst die im Jahre 1796 von Olbers erfundene Methode, deren Darstellung einen wichtigen Theil dieses Werkes bilden wird, besiegte auf überraschend einfache Art alle Schwierigkeiten. Bevor wir zur Auseinandersetzung von Principien übergehen, welche mit besonderer Leichtigkeit auf die Olbers'sche Methode führen, erscheint es zweckmässig, noch Einiges über das praktische Bedürfniss, welchem die Kometenberechnung zu genügen hat, zu sagen.

Ein nächstliegender Zweck bei solcher Bahnbestimmung ist, wie bei allen anderen Untersuchungen dieser Art, die Ableitung einer Ephemeride, durch welche man den Lauf des Kometen und seine Helligkeit (soweit dieselbe von reflectirtem Sonnenlicht herrührt und sich nach bekannten Gesetzen richtet) in den Hauptzügen für den ganzen Verlauf der Erscheinung voraussehen kann. Es ist dies um so wünschenswerther, als gerade der geocentrische Lauf der Kometen viel zu verwickelt und reich an Wendungen ist, als dass man ihn ohne Ephemeride auch nur einigermaassen beurtheilen könnte<sup>1)</sup>.

Es ist gar nicht selten, dass ein Komet gegen die Zeit seines Perihels durch die Annäherung an die Sonne und weil er nur bei Tage über dem Horizont ist, unsichtbar wird, nach dem Perihel aber mit zuweilen gänzlich verändertem Glanze und Aussehen wieder auftaucht, wie dies unter vielen bei den berühmten Kometen der Jahre 1770 und 1811 der Fall war.

Ein anderes wichtiges Interesse bietet die Vergleichung der Elemente eines neu erscheinenden Kometen mit denen früher berechneter, weil sie den besten Anhalt bei der Beantwortung der Frage liefert, ob der neue Komet mit einem anderen identisch sei. Ein Verzeichniss der Bahnelemente aller bekannten Kometen, bis in die neueste Zeit fortgeführt, findet man in mehreren Büchern, die sich mit den Kometen näher beschäftigten<sup>2)</sup>.

Je grösser die Uebereinstimmung von zwei Elementensystemen ist (wobei natürlich das Element  $T$  oder die Perihelzeit nicht in Betracht kommt), desto grösser ist auch die Wahrscheinlichkeit der Identität der Kometen. Hier wird also die Berechnung des ganzen Elementensystems erfordert. Wenn es hingegen nur darauf ankommt, zu wissen,

<sup>1)</sup> Gauss sagt daher in der Stelle der Vorrede der *Theoria motus corporum coelestium*, wo Newton's Entdeckung, dass die Kometen sich in Parabeln bewegen, besprochen wird: *Cometaeque usque ad illum diem semper indomiti, vel si devicti videbantur mox seditiosi et rebelles, frena sibi injici passi, atque ex hostibus hospites redditi, iter suum in tramitibus a calculo delineatis prosequuti sunt etc. etc.*

<sup>2)</sup> So in der dritten Ausgabe der hier schon oft citirten Olbers'schen Abhandlung: „Dr. Wilhelm Olbers' Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen. Mit Berichtigung und Erweiterung der Tafeln im Jahre 1847 von Neuem herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Dritte Ausgabe, vermehrt mit einem Anhang, die Fortsetzung und Ergänzung des Kometenverzeichnisses bis zum Jahre 1864 enthaltend. Von Dr. J. G. Galle, Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Breslau. Mit dem Bildnisse von Olbers und einer Figurentafel. Leipzig, Voigt u. Günther 1864. Schliesslich: „Verzeichniss der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen nebst Anmerkungen und Literaturnachweisen, neu bearbeitet, ergänzt und fortgesetzt bis zum Jahre 1894 von Dr. J. G. Galle, Geh. Regierungsrath Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Breslau. Verlag von Wilhelm Engelmann.

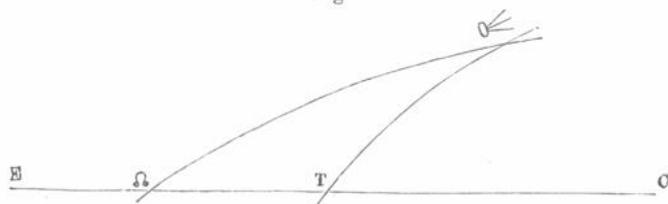
ob ein eben entdeckter Komet mit einem, dessen Wiederkehr ins Perihel ungefähr um dieselbe Zeit erwartet wird, identisch sein könne, so reicht dazu schon eine einzige vollständige Beobachtung und das Verfahren der folgenden Vorlesung aus. Es versteht sich übrigens noch von selbst, dass die Bahn eines Kometen, welcher von Zeit zu Zeit in sein Perihel zurückkehrt, elliptisch sein müsse, wie denn ja der Satz, dass die Kometenbahnen Parabeln seien, nicht in aller Strenge gelten kann.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Kriterium aus einer vollständigen Beobachtung eines neu erschienenen Kometen, ob derselbe mit einem erwarteten identisch sein kann.

Jede vollständige Beobachtung liefert auch die Lage einer geraden Linie, in welcher der Himmelskörper zur Zeit der Beobachtung sich befinden muss, vollständig; die Lage der Bahnebene eines erwarteten Kometen ist gleichfalls durch dessen Knoten und Neigung gegeben, also auch der Punkt des Raumes, in welchem jene Gesichtslinie die Bahnebene schneidet. Soll nun die Vermuthung, dass die Beobachtung dem erwarteten Kometen angehört, einige Festigkeit erhalten und nicht gleich ganz zu widerlegen sein, so ist vor allen Dingen nöthig, dass der genannte Schnittpunkt nicht bloss in die Bahnebene, sondern auch in die Bahnlinie des erwarteten Körpers falle. Hierin besteht das

Fig. 47.



einfache Princip des Kriteriums, welchem sich nun leicht die folgende Formel geben lässt.

Es sei wieder, in Erinnerung der einundzwanzigsten Vorlesung der zweiten Abtheilung in Fig. 47  $EC$

die Ekliptik,  $\Omega$  der aufsteigende Knoten der Bahn des erwarteten Kometen,  $T$  der Ort der Erde,  $T \sphericalangle$  der Winkel, welchen der Radius vector  $R$  der Erde mit dem Radius vector  $r$  des Kometen macht, ferner wieder der sphärische Winkel  $\sphericalangle TC = \gamma$ , wie in der genannten Vorlesung. Bedeutet auch  $\lambda$  die geocentrische Länge,  $\beta$  die Breite, welche die Beobachtung ergeben hat,  $L$  die Länge der Erde, so ist, wie früher:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\lambda - L)}$$

$$\sin \chi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

und:

$$\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L).$$

Der sphärische Winkel  $\sphericalangle \Omega T$  ist offenbar gleich  $i$ ; wir haben demnach durch Auflösen des Dreiecks  $\sphericalangle \Omega T$  nach den Gauss'schen Formeln, wenn  $\sphericalangle \sphericalangle = u =$  Argument der Breite,  $T \sphericalangle = \chi - z$ , Winkel  $\sphericalangle \sphericalangle T = \eta$  gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin^{1/2} \eta \sin^{1/2} (u + \chi - z) &= \sin^{1/2} (L - \Omega) \sin^{1/2} (\gamma + i) \\ \sin^{1/2} \eta \cos^{1/2} (u + \chi - z) &= \cos^{1/2} (L - \Omega) \sin^{1/2} (\gamma - i) \\ \cos^{1/2} \eta \sin^{1/2} [u - (\chi - z)] &= \sin^{1/2} (L - \Omega) \cos^{1/2} (\gamma + i) \\ \cos^{1/2} \eta \cos^{1/2} [u - (\chi - z)] &= \cos^{1/2} (L - \Omega) \cos^{1/2} (\gamma - i) \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Nachdem aus diesen Formeln die Grössen  $u$  und  $z$ , d. h. das Argument der Breite und derjenige Winkel, welcher am Kometen von den Richtungen nach der Sonne und nach der Erde gebildet, bestimmt worden, ergiebt sich die wahre Anomalie  $v$  des Kometen auf doppelte Weise, denn einmal ist:

$$r = \frac{q}{\cos^{1/2} v^2} = \frac{R \sin \chi}{\sin z}$$

oder:

$$\cos^{1/2} v^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi},$$

wenn  $q$  den bekannten Perihelabstand des erwarteten Kometen vorstellt, anderentheils aber auch:

$$\pi - \Omega + v = u$$

oder:

$$v = u - (\pi - \Omega),$$

wobei  $\pi - \Omega$  dem Elementensystem desselben Gestirnes zu entnehmen ist. Beide Werthe von  $v$  müssen übereinstimmen, es muss also die Gleichung:

$$\cos^{1/2} [u - (\pi - \Omega)]^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi}$$

ganz oder doch sehr nahe erfüllt sein, wenn die Möglichkeit und sogar Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung dem erwarteten Kometen angehöre, bestehen bleiben soll.

Bei Bahnen von kürzerer Umlaufszeit kann es zuweilen erforderlich sein, den Ausdruck von  $r$  in der Ellipse zu wählen. Man berechnet in solchem Falle:

$$\operatorname{tg}^{1/2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}^{1/2} [u - (\pi - \Omega)]$$

und es muss dann:

$$\cos^{1/2} [u - (\pi - \Omega)]^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi} \cos^{1/2} E^2 . . . . . (B)$$

sein.

### Erstes Rechnungsbeispiel.

Man erwartete im Jahre 1835 den Halley'schen Kometen zurück; gesetzt, man wäre über die Zeit seines Periheldurchganges sehr unsicher gewesen, so wäre die Frage aufzuwerfen und zu beantworten gewesen, ob folgende von Bessel in Königsberg angestellte Beobachtung:

Aug. 25:  $14^h 44' 19''$  mittl. Zeit Rectasc. =  $86^{\circ} 17' 7'',7$  Decl. =  $+ 24^{\circ} 2' 56'',8$

sich auf den Halley'schen Kometen beziehen kann.

Verwandelt man den Ort in Länge und Breite und auf Berliner Zeit, indem man den Meridianunterschied zwischen der Königsberger und der Berliner Sternwarte:  $0^h 28' 24''$  von der Beobachtungszeit subtrahirt, so wird der zu prüfende Ort:

Aug. 25:  $14^h 15' 55''$  oder Aug. 25,594387:  $\lambda = 86^{\circ} 36' 30'',6$ ,  $\beta = + 0^{\circ} 37' 51'',6$ .

Für diese Zeit findet man die (mit Aberration behaftete) Länge der Sonne aus dem Berliner Jahrbuche für 1835 gleich  $152^{\circ} 4' 36'',4$ , also die Länge der Erde:

$$L = 332^{\circ} 4' 36'',4, \log R = 0,004406.$$

Den Einfluss der Aberration können wir noch bei einer Rechnung, wie die gegenwärtige, vernachlässigen, zumal der Einfluss der durch die Planeten erlittenen Störungen viel bedeutender ist.

Die weitere Rechnung ergiebt:

$$\begin{aligned} \gamma &= 0^{\circ} 41' 36'',9 \\ \chi &= 114^{\circ} 31' 28'' . 0. \end{aligned}$$

Nach der sehr sorgfältigen Bahnbestimmung von Rosenberger war für die Erscheinung des Halley'schen Kometen in 1759  $\Omega = 53^{\circ} 50' 27''$   $\pi - \Omega = 110^{\circ} 39' 59''$   $i = 162^{\circ} 36' 52''$ , wobei zu berücksichtigen, dass das Aequinoctium das mittlere vom 13. März 1759 ist. Für die Erscheinung von 1835 (genauer für die Zeit des Perihels und das mittlere Aequinoctium des 7. November) giebt Rosenberger jene Grössen wie folgt an:

$$\begin{aligned}\Omega &= 55^{\circ} 11' 21'',4 \\ \pi - \Omega &= 110 40 22 7 \\ i &= 162 16 35 5,\end{aligned}$$

und diese Werthe wollen wir daher bei Beantwortung der uns gestellten Frage zu Grunde legen.

Es wird demnach  $\frac{1}{2}(\gamma + i) = 81^{\circ} 29' 6'',2$ ,  $\frac{1}{2}(\gamma - i) = -80^{\circ} 47' 29'',3$ ,  $\frac{1}{2}(L - \Omega) = 138^{\circ} 26' 37'',5$  und die Gleichungen (A) ergeben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[u + (\chi - z)] &= 221^{\circ} 36' 5'',6 \\ \frac{1}{2}[u - (\chi - z)] &= 140 38 26'',3 \\ u &= 2 14 31'',9 \\ \chi - z &= 80 57 39'',3 \\ z &= 33 33 48'',7.\end{aligned}$$

Den Gleichungen (A) genügen zwar auch Werthe von  $u$  und  $(\chi - z)$ , welche um  $180^{\circ}$  grösser sind; diese letzteren werden indessen durch die Betrachtung ausgeschlossen, dass der Komet nothwendig bei nördlicher geocentrischer Breite auch nördliche heliocentrische Breite gehabt haben, mit anderen Worten: dass  $u < 180^{\circ}$  gewesen sein muss; desgleichen ist  $\chi - z$  als Winkel in einem ebenen Dreieck in diese Grenzen  $0^{\circ} - 180^{\circ}$  eingeschlossen, und es bleibt somit nur die angegebene Lösung übrig. Bei dem Halley'schen Kometen ist noch ferner:

$$\begin{aligned}e &= 0,967684 \\ \log q &= 9,766799,\end{aligned}$$

und da nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{2}[u - (\pi - \Omega)] = \frac{1}{2}v = -53^{\circ} 42' 55'',4,$$

so wird:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E &= 9^{\circ} 54' 6'',0 \\ \log \cos \frac{1}{2}[u - (\pi - \Omega)]^2 &= 9,544344 \\ \log \frac{q \sin z}{R \sin \chi} \cos \frac{1}{2}E^2 &= 9,533034.\end{aligned}$$

Bei dieser Uebereinstimmung der rechten und linken Seite der Gleichung (B) konnte die Identität des von Bessel beobachteten Kometen mit dem Halley'schen schon nach der einen Beobachtung als sehr wahrscheinlich gelten.

### Zweites Rechnungsbeispiel.

Die Bahnen der Kometen von 1264 und 1556 zeigen einige Aehnlichkeit mit einander; man hat aus den allerdings nicht sehr sicheren Beobachtungen gefunden, für den Kometen von 1264:

$$\pi - \Omega = 275^{\circ} 45' 0'', \Omega = 178^{\circ} 45' 0'', i = 30^{\circ} 25' 0'', \log q = 9,61364,$$

bezogen auf das mittlere Aequinoctium von 1264,0 und für den von 1556:

$$\pi - \Omega = 262^{\circ} 49' 6'', \Omega = 176^{\circ} 29' 6'', i = 36' 39' 12'', \log q = 9,78254,$$

bezogen auf das mittlere Aequinoctium von 1556,0.

Waren die beiden Kometen identisch, so durfte man die Wiederkehr im Jahre 1848, und mit Berücksichtigung des Umstandes, dass im gegenwärtigen Falle die von den grossen Planeten verursachten Störungen die Wiederkehr um einige Jahre verzögern mussten, gegen Mitte der 50er Jahre dieses Jahrhunderts erwarten. Konnte nach einer einzigen, und zwar der folgenden Beobachtung: 1855, Juni 4,  $10^h 30'$  mittlerer Göttinger Zeit, Rectasc. =  $104^{\circ} 20'$ , Decl.  $36^{\circ} 30'$  zu urtheilen, ein am 3. Juni 1855 von Donati zu Florenz entdeckter Komet wohl der erwartete sein?

Durch eine Transformation, wie die frühere, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Juni 4: } 10^h 43' 49'' \text{ mittlerer Berliner Zeit} &= \text{Juni } 4,4471 \lambda = 78^{\circ} 11' 6'' \\ \beta &= + 13^{\circ} 37' 37''. \end{aligned}$$

Zur selbigen Zeit ist die Länge der Erde  $L = 253^{\circ} 38' 30''$  und  $\log R = 0,00642$ . Die Berechnung von  $\gamma$  und  $\chi$  ergiebt:

$$\begin{aligned} \gamma &= 108^{\circ} 5' 42'' \\ \chi &= 165^{\circ} 38' 58''. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Quadranten, in welchen  $\gamma$  und  $\chi$  liegen, trägt auch hier die Bemerkung bei, dass nicht nur  $\chi < 180^{\circ}$  werden muss, sondern auch die Gleichung  $\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L)$  erfüllt sein, also da  $\cos \beta$  nothwendig positiv ist,  $\cos \chi$  mit  $\cos(\lambda - L)$  gleiches Vorzeichen haben muss. Die Formeln (A) rechnen wir mit den Elementen von 1556 als den wahrscheinlich sicherer bestimmten, wobei wir indessen nicht vergessen dürfen, dass wir auf das Aequinoctium der Beobachtung angenähert reduciren müssen. Durch die Präcession seit 1556 wächst  $\Omega$  um  $4^{\circ} 10' 30''$ ; es ist also das reducirte  $\Omega = 180^{\circ} 39' 36''$ ; die sehr viel kleineren Aenderungen, welche auch  $\pi - \Omega$  und  $i$  durch die Präcession erfahren, können wir hier, ebenso wie die Nutation, vernachlässigen. Wir setzen demnach  $L - \Omega = 72^{\circ} 58' 54''$ ,  $\gamma + i = 144^{\circ} 44' 54''$ ,  $\gamma - i = 71^{\circ} 26' 30''$ ,  $\frac{1}{2}(L - \Omega) = 36^{\circ} 29' 27''$ ;  $\frac{1}{2}(\gamma + i) = 72^{\circ} 22' 27''$ ,  $\frac{1}{2}(\gamma - i) = 35^{\circ} 43' 15''$ , und erhalten dann aus den Formeln (A):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[u + (\chi - z)] &= 50^{\circ} 22' 12'' \\ \frac{1}{2}[u - (\chi - z)] &= 15 25 24 \\ u &= 65 47 36 \\ \chi - z &= 34 56 48 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} z &= 130 42 10 \\ u - (\pi - \Omega) &= 162 58 30 \\ \frac{1}{2}[u - (\pi - \Omega)] &= 81 29 15 \\ \log \cos \frac{1}{2} v^2 &= 8,34068 \\ \log \frac{q \sin z}{R \sin \chi} &= 0,26165. \end{aligned}$$

In diesem Falle zeigen sich die Zahlen, auf deren Vergleichung es ankommt, gänzlich verschieden; die Gleichung (B) ist nicht erfüllt und es konnte deshalb die Identität des neu entdeckten Kometen mit dem von 1556 entschieden verneint werden.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Vorbereitende Bemerkungen zu der Methode von Olbers.

Für das Problem der Bahnbestimmung von Kometen, nicht weniger auch für die Planeten, ist die Bemerkung von der grössten Wichtigkeit, dass der Aufgabe alle ihre Schwierigkeiten genommen sind, sobald man für zwei in Zeit hinreichend verschiedene Beobachtungen die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde kennt. Denn aus diesen Grössen, für die wir mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung wieder  $\varrho$  und  $\varrho''$  setzen, ergeben sich, wie schon in der zweiten Abtheilung ausführlich gezeigt wurde, die beiden zugehörigen Radienvectoren  $r$  und  $r''$ , die heliocentrischen Längen und Breiten  $l, b, l'', b''$ , und der durch die heliocentrische Bewegung in dem Zeitintervall  $t'' - t$  zurückgelegte Bogen, d. h. die Differenz der wahren Anomalien  $v'' - v$ . Nun haben wir aber für die Parabel nach der fünften Vorlesung:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v'' = \frac{1}{\sqrt{r''}}$$

oder, wenn wir diese Gleichungen einmal zu einander addiren, das andere Mal von einander subtrahiren:

$$\frac{2}{\sqrt{q}} \cdot \cos \frac{1}{4}(v'' + v) \cos \frac{1}{4}(v'' - v) = \frac{1}{\sqrt{r''}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{q}} \cdot \sin \frac{1}{4}(v'' + v) \sin \frac{1}{4}(v'' - v) = \frac{1}{\sqrt{r''}} - \frac{1}{\sqrt{r}},$$

dennach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sin \frac{1}{4}(v'' + v) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{4}(v'' - v) \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos \frac{1}{4}(v'' + v) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \sec \frac{1}{4}(v'' - v) \end{aligned} \right\} \dots \dots (I)$$

Diese Gleichungen liefern den Perihelabstand  $q$  und die halbe Summe der wahren Anomalien  $\frac{1}{2}(v'' + v)$ , welche letztere mit der schon bekannten Differenz  $\frac{1}{2}(v'' - v)$  verbunden, die beiden wahren Anomalien selbst giebt. Aus  $v$  folgt mittelst der Barker'schen Tafel das zugehörige  $M$ , also auch der zeitliche Abstand der ersteren Beobachtung vom Perihel; auf dieselbe Art ergiebt  $v''$  die Epoche des Perihels.

Was die Elemente  $\varnothing, \pi - \varnothing, i$  betrifft, so hat man schon nach dem Früheren:

$$\sin b = \sin i \sin (v + \pi - \varnothing)$$

$$\sin b'' = \sin i \sin (v'' + \pi - \varnothing),$$

welche Gleichungen, addirt und subtrahirt,  $i$  und  $\pi - \varnothing$  finden lassen. Für die Berechnung von  $\varnothing$  hat man:

$$\operatorname{tg}(l - \varnothing) = \cos i \operatorname{tg}(v + \pi - \varnothing)$$

und auch:

$$\operatorname{tg}(l'' - \varnothing) = \cos i \operatorname{tg}(v'' + \pi - \varnothing).$$

Man ersieht hieraus, wie in Wirklichkeit die ganze Aufgabe, die fünf Bahnelemente eines Kometen zu finden, darauf zurückgeführt werden kann, die zwei Unbekannten  $\varrho$

und  $\varrho''$  zu bestimmen, ganz ähnlich, wie bei der Kreisbahn die in ihr vorkommenden vier Elemente leicht zu berechnen waren, sobald man  $\varrho$  kannte. Im gegenwärtigen Falle haben wir eine Unbekannte mehr, als bei der Kreisbahn, und entsprechend auch eine Bedingungsgleichung mehr. Denn während bei der Kreisbahn für das den beiden Beobachtungen geometrisch genügende  $r$  die Bewegungsbedingung, oder, wie man zu sagen pflegt, die phoronomische Bedingung  $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = v' - v$  zu erfüllen war, haben wir bei der Parabel erstlich der phoronomischen Bedingung für die Parabel aus der achten Vorlesung:

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 6k(t' - t),$$

worin  $\kappa$  die beide Radienvectoren verbindende Sehne bedeutet, zu genügen, zweitens aber auch noch von einer weiteren Beobachtung die eine Coordinate darzustellen. Die eben angeführte Gleichung ist uns schon unter dem Namen der Lambert'schen bekannt.

Es stände uns somit der Weg offen, die beiden Abstände von der Erde  $\varrho$  und  $\varrho''$  durch Versuche so zu bestimmen, dass sowohl der Lambert'schen Gleichung, als auch der einen Coordinate der Rectascension oder Declination, der Länge oder der Breite einer, am besten in die Mitte der Epochen  $t$  und  $t'$  fallenden Beobachtung genügt wird. Es ist dies auch in Wirklichkeit eine der empfehlenswerthesten Methoden für die Verbesserung eines schon nahe bekannten Elementensystems; für den Fall jedoch, welchen wir hier zu behandeln haben, in welchem wir gänzliche Unkenntniss aller Bestimmungsstücke der Bahn voraussetzen, würde ein solches Tatonnement über zwei Unbekannte meistens eine erschreckend lange Rechnung verursachen. Dieser zu entgehen und die Versuche von ähnlicher Einfachheit, wie bei der Kreisbahn, zu haben, müssten wir wie dort eine Relation zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  haben, welche Alles auf die eine Unbekannte  $\varrho$  reducirt.

Wir werden nun in der folgenden Vorlesung sehen, wie in Wirklichkeit das Verhältniss  $\frac{\varrho''}{\varrho}$  unmittelbar durch die Data dreier vollständiger Beobachtungen und die Zeitintervalle mit genügender Schärfe ausgedrückt werden kann; wir können also dann aus  $\varrho$  allein die Grössen  $r, r'', \kappa$  berechnen und den Werth suchen, welcher durch Befriedigung der Lambert'schen Gleichung sich als den richtigen zu erkennen giebt.

### Sechszwanzigste Vorlesung.

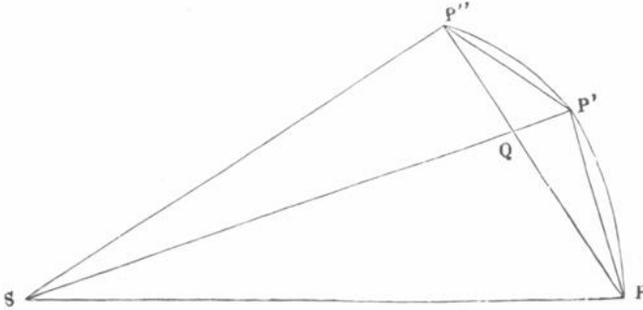
#### Ableitung des Olbers'schen Ausdruckes für das Verhältniss von zwei Distanzen von der Erde $\varrho$ und $\varrho''$ .

Eine solche Vereinfachung der Bestimmung von noch gänzlich unbekanntem Bahnelementen, wie wir sie jetzt vornehmen wollen, wird durch eine in der Praxis regelmässig von der Natur gebotene Erleichterung ermöglicht, die darin besteht, dass die der ersten Berechnung zu Grunde zu legenden Beobachtungen niemals durch sehr grosse Zeitintervalle von einander getrennt sind. Es ist z. B. erfahrungsmässig selten, dass man genöthigt wäre, das Zeitintervall zwischen zwei benachbarten Beobachtungen zur

Bahnbestimmung grösser als zehn Tage zu wählen, obgleich meistens mit Nutzen für die zu erhaltende Näherung ein grösseres angewendet werden kann. Der eben erwähnte Umstand nun erlaubt eine der einfachsten, angenähertsten und nützlichsten unter den vielen nicht ganz strengen Voraussetzungen, zu denen man zur Abkürzung dieser sonst sehr zeitraubenden Rechnungen zu greifen pflegt.

Es sei in Fig. 48  $S$  die Sonne,  $\overline{PP'P''}$  ein Stück der Bahn irgend eines Himmelskörpers um die Sonne, mag dieselbe parabolisch oder elliptisch sein.  $SP$  oder  $r$ ,  $SP'$  oder  $r'$ ,  $SP''$  oder  $r''$  seien drei Radienvectoren, entsprechend den Zeiten  $t, t', t''$ ;  $Q$  der Durchschnitt des mittleren dieser Radienvectoren mit der die Punkte  $P$  und  $P''$  verbindenden Sehne. Betrachten wir nun das Verhältniss eines der von zwei Radienvectoren und einer Sehne gebildeten Dreiecke zu dem ihm entsprechenden

Fig. 48.



Sector, so bemerken wir leicht, dass dasselbe für mässig grosse Zeiten immer der Einheit sehr nahe bleiben wird; wir dürfen uns daher erlauben, für das Verhältniss:

$$\frac{\Delta SP'P''}{\Delta SP'P}$$

das Verhältniss der Sektoren:

$$\frac{\text{Sector } SP'P''}{\text{Sector } SP'P},$$

welches letztere aber bekanntlich gleich:

$$\frac{t'' - t'}{t' - t}$$

ist, zu setzen. Ausserdem haben aber die mit einander verglichenen Dreiecke  $SP'P''$  und  $SP'P$  die gemeinschaftliche Basis  $SP'$ ; sie verhalten sich demnach wie  $QP''$  zu  $QP$ , woraus denn die für die Olbers'sche Methode fundamentale Bemerkung folgt, dass die Sehne zwischen den beiden äusseren Oertern sowohl bei den Kometen, als bei der Erde, vom mittleren Radius vector sehr nahe im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten werde. Es ist auch leicht zu erkennen, dass dies ganz besonders nahe der Fall sein wird, wenn die Zwischenzeiten gleich sind, d. h.  $t'' - t' = t' - t$  ist.

Führen wir nun die Construction der Fig. 48 noch einmal, sowohl für die drei Oerter eines Kometen in seiner Bahn  $C, C', C''$ , als auch für die drei zugehörigen Oerter der Erde  $T, T', T''$  durch, und verbinden den Schnittpunkt der Erdsehne zwischen dem ersten und dritten Orte  $Q$  mit dem entsprechenden  $q$  der Kometenbahn, Fig. 49, so lässt sich sogleich eine sehr wichtige Eigenschaft der Richtung dieser Verbindungslinie und der Lage einer Ebene, auf welcher sie senkrecht steht, nachweisen.

Es ist nämlich klar, dass, wenn man sowohl die drei Punkte  $C, q, C''$  der Kometensehne, als auch die entsprechenden  $T, Q, T''$  der Erdsehne auf eine solche Ebene rechtwinklig projicirt, die Verbindungslinie  $Qq$  als Punkt erscheinen und folgende Figur entstehen wird (Fig. 50).

In dieser sind nun aber, wenn man die oben gemachte Annahme, dass die Sehne der Erdbahn von dem mittleren Radius vector in demselben Verhältniss geschnitten

werde, wie die Kometensehne, beibehält, die Dreiecke  $QTC$  und  $QT''C''$  ähnlich; denn es verhält sich:

$$\overline{QT''} : \overline{QT} = \overline{QC''} : \overline{QC}$$

d. h.

$$\overline{QT''} : \overline{QC''} = \overline{QT} : \overline{QC},$$

da durch eine solche Projection das Verhältniss der projecirten Stücke offenbar nicht geändert wird, und ausserdem ist Winkel  $CQT =$  Winkel  $C''QT''$ .

Es ist also  $CT$  parallel  $T''C''$ , oder die auf diese Ebene projecirten Verbindungslinien zwischen Erde und Komet für die erste und dritte Beobachtung sind sich diametral entgegengesetzt. Demnach würden die geocentrischen Oerter des Kometen in der ersten und dritten Beobachtung, wenn sie für eine solche Ebene als Fundamentelebene transformirt würden, die beiden Längencoordinaten  $180^\circ$  von einander differirend ergeben. Diese auf eine andere Fundamentelebene als die Ekliptik bezogenen Längen

Fig. 49.

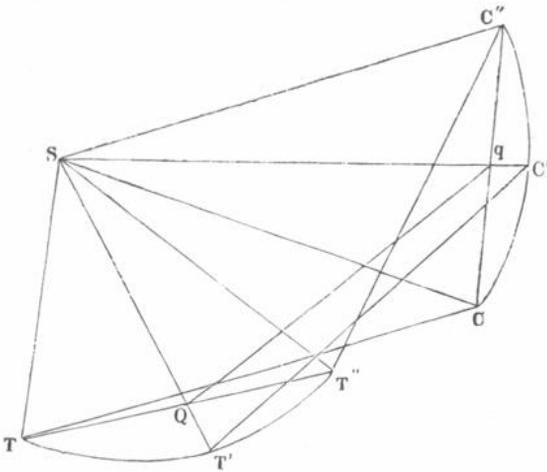
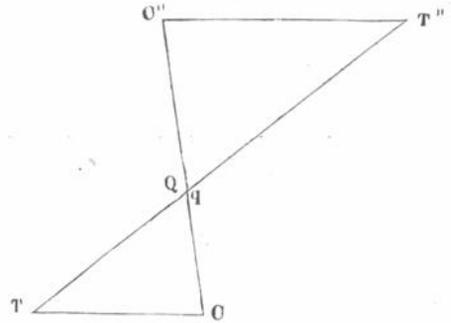


Fig. 50.



wollen wir im Folgenden der Kürze halber die Quasilängen, die zugehörigen Breitencoordinaten die Quasibreiten nennen. Die Richtung der Linie  $Qq$  in Fig. 49 ist der Pol

einer solchen Fundamentelebene; er muss also, da die Quasilängen der ersten und dritten Beobachtung um  $180^\circ$  verschieden sind, nothwendig auf einem den ersten und dritten geocentrischen Ort verbindenden grössten Kreise der Sphäre liegen. Die Richtung von  $Qq$  liegt aber offenbar auch, da sie einen Punkt des Radius vectors der Erde in der zweiten Beobachtung, mit einem Punkte des entsprechenden Radius vectors des Kometen verbindet, in einer durch diese beiden Radienvectoren, oder auch durch die Linien  $ST'$  und  $T'C'$  in Fig. 49 gelegten Ebene. Allen in diese Ebene fallenden Richtungen entspricht aber der durch den geocentrischen Ort und den Sonnenort in der zweiten Beobachtung gelegte grösste Kreis der Sphäre. Die Richtung von  $Qq$ , d. h. der Pol der Fundamentelebene, für welche die Fig. 50 in Beziehung auf die Projectionen gültig ist, liegt also auf dem Durchschnitte zweier grösster Kreise, wovon der eine die gegebenen geocentrischen Oerter der ersten und dritten Beobachtung, der andere den zweiten geocentrischen Ort und den zugehörigen Sonnenort verbindet. Diese Richtung ist also zu bestimmen; denken wir uns letzteres Geschäft ausgeführt, so haben wir aus Fig. 50:

$$\overline{C''T''} = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \overline{CT},$$

worin  $\overline{C''T''}$  und  $\overline{CT}$  die Projectionen der Distanzen  $q''$  und  $q$  bedeuten. Bezeichnen

wir die Quasibreiten für diese Fundamentelebene mit  $(\beta)$  und  $(\beta'')$ , so hat man

$$\overline{CT} = \varrho \cos(\beta), \quad \overline{C''T''} = \varrho'' \cos(\beta''),$$

demnach

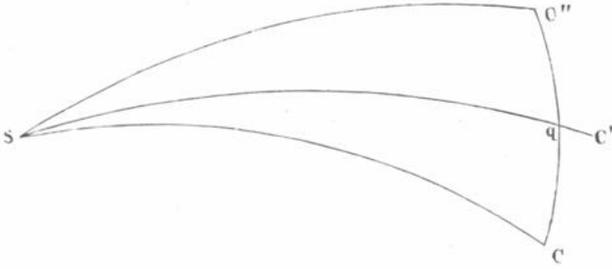
$$\varrho'' \cos(\beta'') = \frac{t'' - t'}{t' - t} \varrho \cos(\beta),$$

d. h.

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t} \dots \dots \dots (2)$$

Um zu einer einfachen Relation zwischen  $\varrho''$  und  $\varrho$  zu gelangen, an der uns aus bekannten Gründen so viel gelegen ist, haben wir jetzt nur noch  $\cos(\beta)$  und  $\cos(\beta'')$  zu

Fig. 51.



entwickeln. Es sind diese Grössen auch die Sinus der Abstände des geocentrischen Ortes vom Pole der Fundamentelebene, oder vom Durchschnitte der genannten grössten Kreise. In Fig. 51 denken wir uns die drei geocentrischen Oerter des Kometen in  $C, C', C''$  und den Sonnenort der zweiten Beobachtung in  $S$

auf einen Himmelsglobus aufgetragen und die beiden grössten Kreise durch  $C$  und  $C''$ ,  $S$  und  $C'$  construiert; der Durchschnitt beider sei  $q$ . Dann ist:

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')} = \frac{\sin q C}{\sin q C''}$$

Werden noch die Bogen grösster Kreise  $SC$  und  $SC''$  gezogen, so hat man ferner:

$$\frac{\sin q C}{\sin SC} = \frac{\sin CSq}{\sin CqS}$$

$$\frac{\sin q C''}{\sin SC''} = \frac{\sin C''Sq}{\sin C''qS}$$

also

$$\frac{\sin q C}{\sin q C''} = \frac{\sin SC}{\sin SC''} \frac{\sin CSq}{\sin C''Sq} \dots \dots \dots (3)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich unmittelbar durch die drei geocentrischen Längen und Breiten des Kometen  $\lambda, \beta, \lambda', \beta', \lambda'', \beta''$  und durch die Länge der Sonne in der zweiten Beobachtung,  $\odot'$ , ausdrücken. Bedeuten nämlich  $\gamma, \gamma', \gamma''$  die Winkel, welche die durch  $SC, SC', SC''$  gelegten grössten Kreise mit der Ekliptik bilden, so wird:

$$\text{Winkel } CSq = \gamma' - \gamma$$

$$\text{„ } C''Sq = \gamma'' - \gamma'$$

$$\frac{\sin CSq}{\sin C''Sq} = \frac{\sin(\gamma' - \gamma)}{\sin(\gamma'' - \gamma')} = \frac{\sin \gamma' \cos \gamma - \cos \gamma' \sin \gamma}{\sin \gamma'' \cos \gamma' - \cos \gamma'' \sin \gamma'}$$

Es ist aber nach Früherem (einundzwanzigste Vorlesung):

$$\sin \chi = \sin SC = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\sin \chi'' = \sin SC'' = \frac{\sin \beta''}{\sin \gamma''}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\lambda - L')} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin [\lambda - (\odot' + 180^\circ)]} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\odot' - \lambda)} \\ \operatorname{tg} \gamma' &= \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin (\odot' - \lambda')} \\ \operatorname{tg} \gamma'' &= \frac{\operatorname{tg} \beta''}{\sin (\odot' - \lambda'')} \end{aligned}$$

Die Gleichung (3) geht dadurch in die folgende über:

$$\begin{aligned} \frac{\sin q C}{\sin q C''} &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} \cdot \frac{\sin \gamma' \cos \gamma - \cos \gamma' \sin \gamma}{\sin \gamma'' \cos \gamma' - \cos \gamma'' \sin \gamma'} \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma' \operatorname{ctg} \gamma - \cos \gamma'}{\cos \gamma' - \sin \gamma' \operatorname{ctg} \gamma''} \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \gamma'}{\operatorname{ctg} \gamma' - \operatorname{ctg} \gamma''} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \beta''} \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda'' - \odot')} \end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze halber:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin (\lambda' - \odot')} = m$$

setzt, und endlich in der Gleichung (2) den hier für  $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')}$  gefundenen Ausdruck substituirt:

$$\frac{q''}{q} = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta''} \cdot \frac{m \sin (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta'' - m \sin (\lambda'' - \odot')} \dots \dots \dots (4)$$

Es ergibt sich hiernach zu jedem Werthe von  $q$  sogleich das zugehörige  $q''$ , also auch  $r$  und  $r''$  und die Sehne  $\kappa$ , die einzigen Grössen, welche in der Lambert'schen Gleichung ausser dem bekannten  $6k(t'' - t)$  eine Rolle spielen, und es bleibt nur noch übrig, sich für die über  $q$  anzustellenden Versuche bequem einzurichten.

### Siebenundzwanzigste Vorlesung.

## Die Olbers'sche Methode zur Berechnung einer Kometenbahn in verschiedenen Formen.

Der Schwerpunkt der Olbers'schen Methode liegt in der Gleichung (4), welche durch die Annahme erlangt wurde, dass die Sehne der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte vom zweiten Radius vector in demselben Verhältnisse, wie bei dem Kometen, speciell in dem der Zeitintervalle  $t'' - t'$  und  $t' - t$ , geschnitten werde, was in den Fällen praktischer Anwendung immer äusserst nahe richtig ist. Der weitere Gang der Operationen kann mannigfaltig modificirt werden. Eine der einfachsten und kunstlosesten Arten, die Versuche über  $q$  anzustellen, würde darin bestehen, dass man die heliocentrischen Coordinaten des Kometen, hier bezogen auf die Ekliptik, also, unter Anwendung früherer Bezeichnung, die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \beta \cos \lambda - R \cos \odot, & x'' &= \varrho'' \cos \beta'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'', \\ y &= \varrho \cos \beta \sin \lambda - R \sin \odot, & y'' &= \varrho'' \cos \beta'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'', \\ z &= \varrho \sin \beta, & z'' &= \varrho'' \sin \beta'', \end{aligned}$$

$$\kappa^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2(R\varrho)R\varrho, \quad r''^2 = R''^2 + \varrho''^2 + 2(R''\varrho'')R''\varrho'',$$

worin die Symbole  $(R\varrho)$  und  $(R''\varrho'')$  die in der achtzehnten Vorlesung angegebene Bedeutung haben, berechnete, und zur Probe für den Werth von  $\varrho$  in die Gleichung:

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 6k(t'' - t)$$

einsetzte. Man sieht übrigens noch leicht ein, dass sich der Ausdruck für das Quadrat der Sehne  $\kappa$  für alle Versuche auf die Form:

$$\kappa^2 = A + B\varrho + C\varrho'' + D\varrho^2 + E\varrho\varrho'' + F\varrho''^2$$

bringen lässt, welche, wenn man unter Benutzung der Gleichung (4) der vorigen Vorlesung:

$$\varrho'' = M\varrho$$

setzt, in:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= A + (B + CM)\varrho + (D + EM + FM^2)\varrho^2 \\ &= A + B'\varrho + C'\varrho^2 \end{aligned}$$

übergeht. Denkt man sich einen Versuch mit dem Werthe  $\varrho = 0$  gemacht, so muss offenbar das entsprechende  $\kappa^2$  das Quadrat der Sehne der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte werden; also ist der Coëfficient  $A$  das Quadrat dieser Sehne. Auch die Coëfficienten  $B'$  und  $C'$  enthalten nur gegebene Grössen und können daher vor den Versuchen berechnet werden.

Die eben gegebene Form ist durchaus nicht unbequem und von Olbers selbst gewählt worden. Wir können für die Versuche aber auch an die Gleichung (5) der achtzehnten Vorlesung, welche wir hier unter der Form:

$$(rr'')rr'' = (Rr'')Rr'' + (R\varrho'')R\varrho'' + (R''\varrho)R''\varrho + (\varrho\varrho'')\varrho\varrho''$$

schreiben, anknüpfen. Da  $\kappa^2 = r^2 + r''^2 - 2(rr'')rr''$ , so erhält man aus ihr:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= r^2 + r''^2 - 2(Rr'')Rr'' - 2(R\varrho'')R\varrho'' \\ &\quad - 2(R''\varrho)R''\varrho - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho'', \end{aligned}$$

oder auch, da

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + \varrho^2 + 2(R\varrho)R\varrho = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho \cos \chi \\ r''^2 &= R''^2 + \varrho''^2 + 2(R''\varrho'')R''\varrho'' = R''^2 + \varrho''^2 + 2R''\varrho'' \cos \chi'' \\ \kappa^2 &= R^2 + R''^2 - 2(Rr'')Rr'' + 2(R\varrho)R\varrho - 2(R\varrho'')R\varrho'' \\ &\quad + 2(R''\varrho'')R''\varrho'' - 2(R''\varrho)R''\varrho \\ &\quad + \varrho^2 + \varrho''^2 - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho''. \end{aligned}$$

Die Summen der drei Glieder  $R^2 + R''^2 - 2(Rr'')Rr''$  geben sich hier unmittelbar als das Quadrat der Erdsehne, welches wir im Folgenden mit  $g^2$  bezeichnen wollen, zu erkennen. Die Summen  $\varrho^2 + \varrho''^2 - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho''$  entsprechen dem Quadrate einer Grösse, welche man die geocentrisch genommene Sehne des Kometen nennen könnte, d. h. derjenigen, welche man erhalten würde, wenn man die Verbindungslinie zwischen Erde und Kometen bis zu einem Durchschnitte in der Erdsehne parallel verschöbe. Bezeichnen wir diese Grösse mit  $s$  und setzen  $(\varrho\varrho'') = \cos \omega$ , so wird:

$$\begin{aligned} s^2 &= \varrho^2 + \varrho''^2 - 2\varrho\varrho'' \cos \omega = \varrho^2 - 2\varrho\varrho'' + \varrho''^2 + 2\varrho\varrho'' \\ &\quad - 2\varrho\varrho'' \cos \omega = (\varrho'' - \varrho)^2 + 4\varrho\varrho'' \sin^2 \frac{1}{2} \omega = [(M - 1)^2 \\ &\quad + 4M \sin^2 \frac{1}{2} \omega] \varrho^2. \end{aligned}$$

Die Einführung des  $\sin \frac{1}{2} \omega$  ist für scharfe Rechnung nothwendig, wenn  $\omega$  ein

kleiner Bogen ist; denn der  $\cos \omega$  würde sich häufig für eine beträchtliche Aenderung des Beobachtungsmateriales fast ganz unempfindlich zeigen.

Die Erdsehne  $g$  berechnen wir nach der Formel:

$$g^2 = (R'' - R)^2 + 4RR'' \sin \frac{1}{2}(\odot'' - \odot)^2.$$

Der Ausdruck für  $\kappa^2$  wird durch Einführung von  $g$  und  $s$ :

$$\kappa^2 = g^2 + s^2 + 2\{(R\varrho)R - (R''\varrho)R'' + M[(R''\varrho'')R'' - (R\varrho'')R]\}\varrho.$$

Der Coëfficient von  $\varrho$ , auch in der Form:

$$2[(R\varrho) - M(R\varrho'')]R - 2[(R''\varrho) - M(R''\varrho'')]R''$$

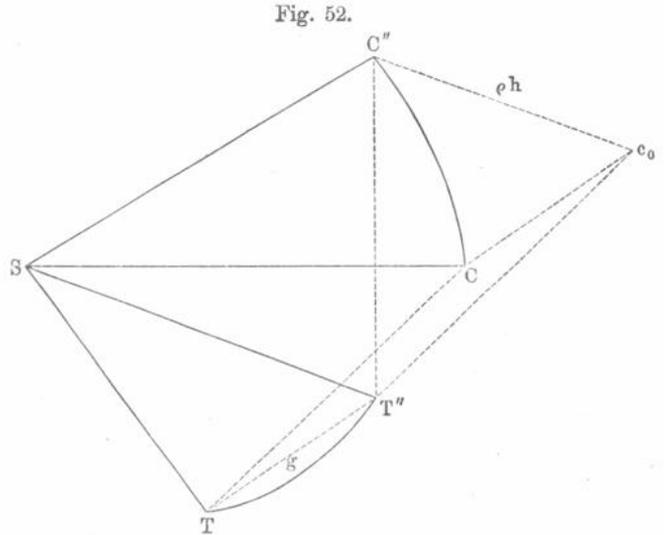
zu schreiben, lässt sich nach den für  $(R\varrho)$ ,  $(R\varrho'')$  u. s. w. bekannten Formeln, ohne weitere Umformung mit hinreichender Schärfe berechnen; doch werden wir bald eine viel vortheilhaftere Transformation auch dieser Glieder kennen lernen.

## Achtundzwanzigste Vorlesung.

### Die Gauss'sche Umformung der Olbers'schen Methode.

In den Formeln von Olbers und in der eleganten und höchst bequemen Modification, welche Gauss daran vorgenommen hat, bedeuten  $\varrho$  und  $\varrho''$  nicht die Distanzen selbst, sondern deren Projectionen auf die Ekliptik, die sogenannten curtirten Distanzen, nach unserer Bezeichnung demnach die Grössen  $\varrho \cos \beta$  und  $\varrho'' \cos \beta''$ . Aus diesem Grunde wollen wir ebenfalls wenigstens für die nächsten Untersuchungen unter  $\varrho$  und  $\varrho''$  die curtirten Distanzen verstehen.

Die genannte Modification erstreckt sich nicht auf den Olbers'schen Ausdruck für das Verhältniss der beiden Distanzen, sondern nur auf die Berechnungsweise von  $\kappa$ ,  $r$  und  $r''$ . Um für  $\kappa$  einen bequemen Ausdruck zu gewinnen, wird eine einfache Construction zu Hülfe gezogen, auf die wir durch das Vorhergehende schon vorbereitet sind. Wir verschieben (Fig. 52) die Verbindungslinie zwischen Erde und Komet in der ersten Beobachtung,  $TC$  mit sich parallel auf der Erdsehne, bis sie durch den Erdort in der dritten Beobachtung  $T''$  geht, wobei wir ihre Länge ungeändert lassen; oder, was dasselbe ist, wir tragen in  $C$  eine Linie, der Erdsehne



parallel und gleich, also ebenfalls von der Länge  $g$ , auf. Die Coordinaten des auf diese Weise festgelegten Punktes wollen wir mit  $x_0, y_0, z_0$ , den Punkt selbst mit  $c_0$  bezeichnen.

Nach der Natur der eben ausgeführten Construction, wegen des Parallelismus und der Gleichheit der in  $C$  aufgetragenen Länge mit der Erdsehne, übertreffen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes  $c_0$  die des Punktes  $C$  um eben so viel, als die Coordinaten des dritten Erdortes  $T''$  die des ersten  $T$  übertreffen. Es ist also, mit Beibehaltung früherer Bezeichnung:

$$\begin{aligned} x_0 - x &= R'' \cos L'' - R \cos L = R \cos \odot - R'' \cos \odot'' \\ y_0 - y &= R'' \sin L'' - R \sin L = R \sin \odot - R'' \sin \odot'' \\ z_0 - z &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man demnach:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= R'' \cos \odot'' - R \cos \odot = g \cos G \\ y - y_0 &= R'' \sin \odot'' - R \sin \odot = g \sin G, \end{aligned}$$

so ist  $G$  die Länge des Punktes  $C$  von  $c_0$  aus gesehen, oder, was wegen der Construction dasselbe ist, die Länge des ersten Erdortes, vom dritten aus gesehen, und  $g$  wieder die Sehne zwischen beiden. Bezeichnen wir hier mit  $q h$  dieselbe Grösse, welche wir in der vorigen Vorlesung  $s$  genannt haben, d. h. den Abstand des Punktes  $c_0$  von dem dritten Kometenorte  $C''$  und setzen:

$$\begin{aligned} x'' - x_0 &= q'' \cos \lambda'' - q \cos \lambda = q h \cos \xi \cos H \\ y'' - y_0 &= q'' \sin \lambda'' - q \sin \lambda = q h \cos \xi \sin H \\ z'' - z_0 &= q'' \operatorname{tg} \beta'' - q \operatorname{tg} \beta = q h \sin \xi, \end{aligned}$$

so bedeutet offenbar  $H$  die Länge des Punktes  $C''$ , von  $c_0$  aus gesehen,  $\xi$  die Breite derselben Richtung. Da aber ausserdem, mit Rücksicht auf die hier stattfindende Bedeutung von  $q$  und  $q''$ :

$$q'' = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \cdot q,$$

welche in der sechszwanzigsten Vorlesung abgeleitete Gleichung wir im Folgenden unter der Form:

$$q'' = M q$$

schreiben, so haben wir:

$$\begin{aligned} M q \cos \lambda'' - q \cos \lambda &= q h \cos \xi \cos H \\ M q \sin \lambda'' - q \sin \lambda &= q h \cos \xi \sin H \\ M q \operatorname{tg} \beta'' - q \operatorname{tg} \beta &= q h \sin \xi. \end{aligned}$$

Da  $q$  aus diesen Gleichungen herausfällt, werden  $h$ ,  $\xi$ ,  $H$  völlig bekannte Grössen.

In dem allgemeinen Ausdrucke für  $x^2$ :

$$x^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

geben wir den Differenzen  $x'' - x$ ,  $y'' - y$ ,  $z'' - z$  die Form:

$$\begin{aligned} x'' - x &= x'' - x_0 - (x - x_0) = q h \cos \xi \cos H - g \cos G \\ y'' - y &= y'' - y_0 - (y - y_0) = q h \cos \xi \sin H - g \sin G \\ z'' - z &= z'' - z_0 - (z - z_0) = q h \sin \xi, \end{aligned}$$

wodurch der Ausdruck für  $x^2$  wird:

$$x^2 = q^2 h^2 + g^2 - 2 g q h \cos \xi \cos(G - H).$$

Für  $r^2$  und  $r''^2$  erhält man durch Bildung der Summen  $x^2 + y^2 + z^2$  und  $x''^2 + y''^2 + z''^2$ , in welchen:

$$\begin{aligned} x &= q \cos \lambda - R \cos \odot & x'' &= q'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'' \\ y &= q \sin \lambda - R \sin \odot & y'' &= q'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'' \\ z &= q \operatorname{tg} \beta & z'' &= q'' \operatorname{tg} \beta'', \end{aligned}$$

die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} r^2 &= \varrho^2 \sec \beta^2 + R^2 - 2 R \varrho \cos(\lambda - \odot) \\ r''^2 &= M^2 \varrho^2 \sec \beta''^2 + R''^2 - 2 M R'' \varrho \cos(\lambda'' - \odot''). \end{aligned}$$

Zu weiterer Abkürzung führt Gauss noch die Hilfsgrößen  $\psi$ ,  $\psi''$  und  $\varphi$  mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos(\lambda - \odot) &= \cos \psi \\ \cos \beta'' \cos(\lambda'' - \odot'') &= \cos \psi'' \\ \cos \xi \cos(G - H) &= \cos \varphi \end{aligned}$$

ein; dann wird:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\varrho \sec \beta - R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi \\ r''^2 &= (M \varrho \sec \beta'' - R'' \cos \psi'')^2 + R''^2 \sin^2 \psi'' \\ \alpha^2 &= (\varrho h - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Da es sich empfiehlt, für  $\varrho$  eine andere Unbekannte einzuführen, so wird ferner:

$$\varrho h - g \cos \varphi = u$$

gesetzt. Man bestimmt also hierbei zunächst  $u$ , aus dessen Werthe sich dann  $\varrho$  nach der Formel:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}$$

ergiebt.

Der Leser ist durch das Vorhergehende in Stand gesetzt, das folgende Schema in allen Theilen zu verstehen, welches Gauss für Anstellung der Versuche bei einer Kometenbahn (v. Zach's monatliche Correspondenz, Bd. 28) aufstellt<sup>1)</sup>. Bei der schon früher angegebenen, doch der Vollständigkeit der Vorschrift wegen hier noch einmal zu wiederholenden Bedeutung der Zeichen, wobei:

- $t, t', t''$  die drei Beobachtungszeiten,
- $\lambda, \lambda', \lambda''$  die drei beobachteten geocentrischen Längen,
- $\beta, \beta', \beta''$  die drei geocentrischen Breiten,
- $\varrho, \varrho'$  die curtirten Abstände des Kometen von der Erde,
- $\odot, \odot', \odot''$  die drei Längen der Sonne,
- $R, R', R''$  die drei Radien vectoren der Erde

vorstellen, berechne man:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{tg \beta' \sin(\lambda - \odot') - tg \beta \sin(\lambda' - \odot')}{tg \beta'' \sin(\lambda'' - \odot'') - tg \beta' \sin(\lambda' - \odot')} \\ R'' \cos(\odot'' - \odot) - R &= g \cos(G - \odot)^2 \\ R'' \sin(\odot'' - \odot) &= g \sin(G - \odot) \\ M - \cos(\lambda'' - \lambda) &= h \cos \xi \cos(H - \lambda'') \\ \sin(\lambda'' - \lambda) &= h \cos \xi \sin(H - \lambda'') \\ M tg \beta'' - tg \beta &= h \sin \xi \\ \cos \xi \cos(G - H) &= \cos \varphi \\ \cos \beta \cos(\lambda - \odot) &= \cos \psi \\ \cos \beta'' \cos(\lambda'' - \odot'') &= \cos \psi'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

<sup>1)</sup> Wir empfehlen dem Leser noch den vortrefflichen, in vieler Beziehung lehrreichen Aufsatz von ENCKE: „Ueber die OIBERS'sche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen“ im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1833, zum Studium.

<sup>2)</sup> Diese Gleichung ist mit der vorher abgeleiteten

$$R'' \cos \odot'' - R \cos \odot = g \cos G$$

identisch, da man sich immer denken kann, alle Längen würden vom ersten Sonnenorte an gezählt. Eine ähnliche Bemerkung ist noch von einigen anderen Gleichungen der Formeln (1) zu machen.

$$\left. \begin{aligned}
 g \sin \varphi &= A \\
 R \sin \psi &= B \\
 R'' \sin \psi'' &= B'' \\
 h \cos \beta &= b \\
 \frac{h \cos \beta''}{M} &= b'' \\
 g \cos \varphi - b R \cos \psi &= c \\
 g \cos \varphi - b'' R'' \cos \psi'' &= c''
 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Die Ausdrücke für  $r^2$ ,  $r''^2$  und  $\varkappa^2$  werden dann:

$$\left. \begin{aligned}
 r^2 &= \left( \frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2 \\
 r''^2 &= \left( \frac{u + c''}{b''} \right)^2 + B''^2 \\
 \varkappa^2 &= u^2 + A^2,
 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

und es muss noch  $u$  so bestimmt werden, dass der aus denselben abzuleitende Werth von:

$$(r + r'' + \varkappa)^{3/2} - (r + r'' - \varkappa)^{3/2},$$

gleich  $6k(t'' - t)$  wird. Hat man dies durch in bekannter Weise anzustellende Versuche erreicht, so berechnet man:

$$\left. \begin{aligned}
 \varrho &= \frac{u + g \cos \varphi}{h} \\
 \varrho'' &= M \varrho.
 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Man kann nun sofort die heliocentrischen Längen und Breiten des Kometen  $l$ ,  $b$ ,  $l''$ ,  $b''$  bestimmen, wozu sich die aus den Fundamentalformeln des ersten Abschnittes leicht abzuleitenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 \varrho \cos (\lambda - \odot) - R &= r \cos b \cos (l - \odot) \\
 \varrho \sin (\lambda - \odot) &= r \cos b \sin (l - \odot) \\
 \varrho \operatorname{tg} \beta &= r \sin b \\
 \varrho'' \cos (\lambda'' - \odot'') - R'' &= r'' \cos b'' \cos (l'' - \odot'') \\
 \varrho'' \sin (\lambda'' - \odot'') &= r'' \cos b'' \sin (l'' - \odot'') \\
 \varrho'' \operatorname{tg} \beta'' &= r'' \sin b''
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

sehr gut eignen.

Es gewährt hier eine erste Prüfung der Rechnung, dass die durch die Auflösung der Gleichungen folgenden Werthe von  $r$  und  $r''$  mit den aus den Versuchen über  $u$  folgenden übereinstimmen müssen. Der Komet ist rechtläufig, d. h. die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik  $i$  ist im Folgenden im ersten Quadranten zu nehmen, wenn:

$$l'' - l \text{ positiv;}$$

im anderen Falle, wenn:

$$l'' - l \text{ negativ,}$$

ist der Komet rückläufig, was, wie wir wissen, am einfachsten dadurch berücksichtigt wird, dass man  $i$  im zweiten Quadranten wählt und das Vorzeichen von  $(\pi - \Omega)$  geändert wird.

$\Omega$  und  $i$  berechnen sich aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} tgb &= \pm tgi \sin(l - \Omega)^1 \\ \frac{tgb'' - tgb \cos(l'' - l)}{\sin(l'' - l)} &= \pm tgi \cos(l - \Omega) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Ueber den Quadranten von  $l - \Omega$  bleibt kein Zweifel, da  $tgi$  positiv werden muss, wenn  $l'' - l$  positiv, dagegen negativ, wenn  $l'' - l$  negativ ist. Die erste der beiden eben genannten Gleichungen ist nichts Anderes, als die Auflösungsformel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, in welchem  $l - \Omega$  die eine Kathete,  $i$  der ihr anliegende Winkel,  $b$  die andere Kathete ist. Es besteht daher auch noch die Gleichung:

$$tgb'' = \pm tgi \sin(l'' - \Omega),$$

welche mit der ersteren verbunden, die zweite der in Rede stehenden Gleichungen giebt. Bequemer noch ist es, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} tgb &= \pm tgi \sin(l - \Omega) \\ tgb'' &= \pm tgi \sin(l'' - \Omega) \end{aligned}$$

durch Addition und Subtraction umzuformen, wodurch man für die Bestimmung von  $i$  und  $\Omega$  erhält:

$$\left. \begin{aligned} \pm tgi \sin [1/2(l'' + l) - \Omega] \\ = 1/2 (tgb'' + tgb) \sec 1/2(l'' - l) \\ \pm tgi \cos [1/2(l'' + l) - \Omega] \\ = 1/2 (tgb'' - tgb) \operatorname{cosec} 1/2(l'' - l) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Auch hier findet keine Zweideutigkeit der Lösung statt.

Wir sind jetzt im Stande, die Argumente der Breite,  $v \pm (\pi - \Omega)$  und  $v'' \pm (\pi - \Omega)$  zu berechnen, da nach uns bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} tg [v \pm (\pi - \Omega)] &= \frac{tg(l - \Omega)}{\cos i} \\ tg [v'' \pm (\pi - \Omega)] &= \frac{tg(l'' - \Omega)}{\cos i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

und es bietet sich hier wieder eine Gelegenheit zur Prüfung der Rechnung bis zu diesem Punkte. Der Werth von  $x^2$  aus der Gleichung:

$$x^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \{ [v'' \pm (\pi - \Omega)] - [v \pm (\pi - \Omega)] \}$$

muss mit dem früher gefundenen genau übereinstimmen.

Endlich haben wir noch, wie früher gezeigt, für die Bestimmung von  $1/2(v'' + v)$ , welches mit dem bekannten Werthe von  $1/2(v'' - v)$  verbunden, die beiden wahren Anomalien und dann verglichen mit  $v \pm (\pi - \Omega)$  und  $v'' \pm (\pi - \Omega)$ , das Element  $\pi - \Omega$  ergiebt, und für die Bestimmung des Perihelabstandes, die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sin 1/4(v'' + v) &= 1/2 \left( \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \operatorname{cosec} 1/4(v'' - v)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos 1/4(v'' + v) &= 1/2 \left( \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \sec 1/4(v'' - v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

<sup>1)</sup> Wo in diesen und den folgenden Formeln ein doppeltes Vorzeichen vorkommt, bezieht sich das obere auf rechtläufige Kometen, das untere auf rückläufige.

<sup>2)</sup> In der Olbers'schen Abhandlung ist den Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\cos 1/2 v}{\sqrt{q}}, \quad \frac{\cotg 1/2(v'' - v)}{\sqrt{r}} = \frac{\operatorname{cosec} 1/2(v'' - v)}{\sqrt{r''}} = \frac{\sin 1/2 v}{\sqrt{q}}$$

der Vorzug gegeben.

Für die Berechnung der Epoche des Perihels  $T$  mittelst des Perihels bedurfte es keiner besonderen Vorschrift, da sie dem Leser aus dem ersten Abschnitte schon hinreichend bekannt ist. Es sei jedoch bemerkt, dass bei unserer Art, das  $i$  bei rückläufigen Kometen zu zählen, auch hier eine etwas lästige Unterscheidung überflüssig wird. Bei uns ist stets:

$$T = t - Mq^{3/2}n = t'' - M''q^{3/2}n,$$

wobei  $M$  und  $M''$  die zu  $v$  und  $v''$  nach der Barker'schen Tafel gehörenden mittleren Bewegungen und  $n$  einen festen Coëfficienten bedeutet, dessen Logarithmus = 0,0398723.

Die Probe, dass die beiden Werthe von  $T$  übereinstimmen müssen, controlirt die sorgfältige Auflösung der Lambert'schen Gleichung.

### Neunundzwanzigste Vorlesung.

#### Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Modification der Olbers'schen Methode.

Nach Göttinger Beobachtungen vom 7., 14. und 21. April 1813 ist für den zweiten Kometen von 1813:

$t = 7,55002$	
$t' = 14,54694$	
$t'' = 21,59931$	
$\lambda = 271^{\circ} 16' 38''$	$\beta = + 29^{\circ} 2' 0''$
$\lambda' = 266 27 22$	$\beta' = + 22 52 18$
$\lambda'' = 256 48 8$	$\beta'' = + 9 53 12$
$\odot = 17 47 41$	$\log R = 0,00091$
$\odot' = 24 38 45$	$\log R' = 0,00175$
$\odot'' = 31 31 25$	$\log R'' = 0,00260.$

Aus diesem Materiale ergeben sich:

$\log M = 9,75799$	$\log B = 9,98706$
$G = 113^{\circ} 43' 57''$	$\log B'' = 9,86038$
$\log g = 9,38029$	$\log b = 9,75645$
$H = 109^{\circ} 5' 49''$	$\log b'' = 0,05028$
$\xi = 44 13 9$	$g \cos \varphi = 0,17147$
$\log h = 9,81477$	$c = 0,31365$
$\log A = 9,22527$	$c'' = 0,95443$

In Beziehung auf  $h$ ,  $\xi$ ,  $H$  kann es vielleicht nützlich sein, den Leser daran zu erinnern, dass  $h$  und  $\cos \xi$  nach ihrer im Früheren gegebenen Definition stets positiv zu nehmen sind; hiermit ist denn auch der Quadrant von  $H$  völlig bestimmt.

Machen wir den ersten Versuch mit  $u = 0,3$ , so stellt sich die Rechnung für denselben wie folgt:

$\log u = 9,47712$	$(u + c) = 0,61365$	$u + c'' = 1,25443$
$\log u^2 = 8,95424$	$\log(u + c) = 9,78793$	$\log(u + c'') = 0,09844$
$\log A^2 = 8,45054$	$\log \frac{1}{b} = 0,24355$	$\log \frac{1}{b''} = 9,94972$
Differ. = 0,50370	0,03148	0,04816
Zech = 0,11844	0,06296	0,09632
$\log \alpha^2 = 9,07268$	$\log B^2 = 9,97412$	$\log B''^2 = 0,72076$
$\log \alpha = 9,53634$	Differ. = 0,08884	Differ. = 0,37556
$\alpha = 0,34382$	Zech = 0,25888	Zech = 0,15264
	$\log r^2 = 0,32184$	$\log r''^2 = 0,24896$
	$\log r = 0,16092$	$\log r'' = 0,12448$
	$r = 1,44850$	$r'' = 1,33193$

$$r + r'' + \alpha = 3,12425, \quad r + r'' - \alpha = 2,43661$$

$$(r + r'' + \alpha)^{3/2} - (r + r'' - \alpha)^{3/2} = 1,71883.$$

Es ist aber:

$$\log 6 = 0,77815$$

$$\log k = 8,23558$$

$$\log(t'' - t) = 1,14765$$


---


$$0,16138 = \log \text{numeri } 1,45040.$$

Die Hypothese  $u = 0,3$  zeigt hiernach in der Befriedigung der Lambert'schen Gleichung einen Fehler von 0,26843, um welche Grösse die linke Seite die rechte übertrifft.

Machen wir einen zweiten Versuch mit dem Werthe  $u = 0,4$ , so finden wir auf die nämliche Art:

$$(r + r'' + \alpha)^{3/2} - (r + r'' - \alpha)^{3/2} = 2,24869;$$

diese Hypothese hat in demselben Sinne, wie vorhin, den Fehler 0,79829; da demnach die Aenderung von einer Einheit der ersten Stelle von  $u$  den Fehler um die Grösse 0,52986 hat wachsen lassen, so werden wir den Werth  $u = 0,3$  um die Grösse

$$\frac{0,26843}{0,52986} \cdot 0,1 \text{ oder } 0,05066$$

vermindern müssen, um der Wahrheit näher zu kommen; den dritten Versuch würden wir deshalb mit  $u = 0,24934$  anstellen. Setzen wir die Versuche bis zur grössten Schärfe fort, so erhalten wir als definitiven Werth

$$u = 0,24389,$$

welchem entsprechen:

$$\log \alpha = 9,47150$$

$$\log r = 0,13896$$

$$\log r'' = 0,11068$$

$$\log \varrho = \log \frac{u + g \cos \varphi}{h} = 9,80366$$

$$\log \varrho'' = \log M \varrho = 9,56165.$$

Die heliocentrischen Coordinaten des Kometen werden:

$$\varrho \cos \lambda - R \cos \odot = 0,01418 - 0,95415 = - 0,93997$$

$$\varrho \sin \lambda - R \sin \odot = - 0,63614 - 0,30625 = - 0,94239$$

$$\varrho \operatorname{tg} \beta = \quad \quad \quad = \quad \quad \quad 0,35319$$

$$\begin{aligned} x'' &= \varrho'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'' = - 0,08321 - 0,85755 = - 0,94076 \\ y'' &= \varrho'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'' = - 0,35483 - 0,52599 = - 0,88082 \\ z'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta = 0,06352. \end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen folgt durch eine uns schon hinlänglich bekannte Rechnung:

$$\begin{aligned} l &= 225^\circ 4' 25'' & l'' &= 223^\circ 6' 56'' \\ b &= + 14 51 40 & b'' &= + 2 49 18 \\ \log r &= 0,13896 & \log r'' &= 0,11069. \end{aligned}$$

Diese Werthe von  $\log r$  und  $\log r''$  zeigen, dass die Rechnung bis auf die kleinen unvermeidlichen Unsicherheiten der letzten Stelle richtig geführt worden ist. Da  $l'' - l$  negativ ausfällt, giebt sich der Komet als rückläufig zu erkennen. Wir wenden deshalb zur Berechnung von  $\Omega$  und  $i$  die Formeln (6) mit den unteren Zeichen an, welches folgende Rechnung giebt:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{2} &= 9,69897 & \log \frac{1}{2} &= 9,69897 \\ \log (\operatorname{tg} b'' + \operatorname{tg} b) &= 9,49781 & \log (\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b) &= 9,33458 \\ \log \sec \frac{1}{2} (l'' - l) &= 0,00006 & \log \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (l'' - l) &= 1,76735_n \\ \hline & & & 9,19684_n & & 0,80090 \end{aligned}$$

Die Auflösung muss so gewählt werden, dass  $\operatorname{tg} i$  negativ wird; man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (l'' + l) - \Omega &= 181^\circ 25' 32'' \\ i &= 98 59 5 \\ \Omega &= 42 40 8. \end{aligned}$$

Die Formeln (7) haben nur ein einfaches Vorzeichen, wenn wir bei retrograden Kometen für  $\pi - \Omega$  seine Ergänzung zu  $360^\circ$  nehmen. Sie ergeben:

$$\begin{aligned} v + \pi - \Omega &= 164^\circ 56' 57'' \text{ 1)} \\ v' + \pi - \Omega &= 177 8 32 \\ v'' - v &= + 12 11 35, \end{aligned}$$

womit:

$$x^2 = r^2 + r''^2 - 2 r r'' \cos (v'' - v) = 0,08771$$

wird, während der früher erhaltene Werth die rechte Seite gleich 0,08770 liefert. Der Unterschied ist von keiner Bedeutung.

Bei der nun folgenden Rechnung der Bestimmung von  $q$ ,  $v$  und  $v''$  ist es immer zu empfehlen, siebenstellige Logarithmen anzuwenden.

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{2} &= 9,6989700 & \log \frac{1}{2} &= 9,6989700 \\ \log \left( \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) &= 8,4502743_n & \log \left( \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) &= 0,2386775 \\ \log \operatorname{cosec} \frac{1}{4} (v'' - v) &= 1,2742750 & \log \sec \frac{1}{4} (v'' - v) &= 0,0006149 \\ \hline & & & 9,4235193_n & & 9,9382624. \end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen folgt eindeutig, da  $q$  positiv werden muss:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (v'' + v) &= - 16^\circ 59' 49'',09 \\ \frac{1}{2} (v'' + v) &= - 33 59 38 18 \\ \frac{1}{2} (v'' - v) &= 6 5 47 50 \\ \hline v'' &= - 27^\circ 53' 51'' \\ v &= - 40 5 26 \\ \log q &= 0,0846818. \end{aligned}$$

1) Wenn  $\cos i$  negativ ist, liegt die Ergänzung des Argumentes der Breite zu  $360^\circ$  mit  $l - \Omega$  immer in demselben Quadranten.

Wir hatten auch noch  $v + \pi - \Omega = 164^{\circ} 56' 57''$ ; demnach wird:

$$\pi - \Omega = 205^{\circ} 2' 23''^1).$$

Zu  $v = -40^{\circ} 5' 26''$  gehört in der Barker'schen Tafel  $\log M = 1,45605_n$ ; also wird  $-Mnq^{3/2} = 41^t,971$ , die Zeit des Perihels = April (7,550 + 41,971), oder Mai 19,521. Aus  $v''$  folgt  $T = \text{Mai } 19,519$ , nahe mit dem ersten Werthe stimmend, so dass wir  $T = 19,520$  setzen können.

Am Schlusse stellen wir die einzelnen Resultate, welche wir erhalten haben, noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned} T &= 1813 \text{ Mai } 19,520 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\ \pi - \Omega &= 205^{\circ} 2' 23'' \\ \Omega &= 42 \ 40 \ 8 \\ i &= 98 \ 59 \ 5 \\ \log q &= 0,08468, \end{aligned}$$

oder, wenn wir die andere Unterscheidung für rückläufige Kometen wählen wollen:

$$\begin{aligned} T &= 1813 \text{ Mai } 19,520 \\ \pi - \Omega &= 154^{\circ} 57' 37'' \\ \Omega &= 42 \ 40 \ 8 \\ i &= 81 \ 0 \ 55 \\ \log q &= 0,08468 \\ \text{Bewegung: Retrograd.} \end{aligned}$$

### Dreissigste Vorlesung.

#### Verschiedene Arten, die erste Hypothese für $q$ oder $u$ bei der Olbers'schen Methode zu bilden.

In dem eben gegebenen Rechnungsbeispiele haben wir bei dem ersten Versuche  $u = 0,3$  angenommen, ohne davon Rechenschaft abzulegen, weshalb wir mit diesem Werthe beginnen. Die Olbers'sche Methode überlässt in der That die Bildung der ersten Hypothese dem praktischen Takte des Rechners, welcher uns in dem gegenwärtigen Falle mit einem leichten Ueberschlage erkennen liess, dass der Werth von  $u$  nicht viel grösser sein werde als 0,3 oder 0,4, weil wir sonst auf Entfernungen des Kometen von der Sonne geführt werden, in denen diese Körper für uns meistens nicht sichtbar sind. Es kommt jedoch zuweilen vor, dass man das Fehlen einer bestimmten und festen Vorschrift in der Beziehung als eine Lücke in der Methode empfindet. Olbers selbst hat diesem Gegenstande noch eine besondere Abhandlung gewidmet, welche man in der zweiten und dritten Ausgabe des Olbers'schen Buches unter der Ueberschrift „Ueber die zweckmässigste Art, bei Berechnung einer Kometenbahn die Versuche anzustellen“ und in dem Berliner Astronom. Jahrbuche für 1833 mit abgedruckt findet. Es wird darin gezeigt, wie aus einer genähert richtigen Hypothese eine andere

<sup>1)</sup> Bei den übergeneigten Bahnen retrograder Kometen ist, wie schon bemerkt wurde, das  $\pi - \Omega$  der hier befolgten Zählungsweise identisch mit  $-(\pi - \Omega)$  der anderen Zählungsweise von  $i$ , wie man am leichtesten findet, wenn man sich den Uebergang von einer directen zu einer retrograden Bahn bei  $i = 90^{\circ}$  vorstellt.

noch mehr genäherte gebildet werden kann, was den allerdings grossen Vortheil gewährt, dass man sich nicht, wie bei den auf das Gerathewohl angestellten Versuchen, von der Wahrheit einmal wieder entfernen kann. Beispielsweise begegnete uns das Letztere auch bei der Rechnung der neunundzwanzigsten Vorlesung, wo der dem zweiten Versuche zu Grunde gelegte Werth von  $u$ ,  $u = 0,4$ , fehlerhafter war, als der bei dem ersten Versuche angenommene  $u = 0,3$ . Im Wesentlichen besteht das von Olbers vorgeschlagene Verfahren darin, dass aus einem genäherten Werthe von  $r + r''$  das nach der Lambert'schen Gleichung, also phoronomisch, entsprechende  $\alpha$  bestimmt wird, woraus sich dann wieder durch rein geometrische Bedingungen  $r$  und  $r''$  finden. So lange man nicht die richtige Lösung besitzt, werden die beiden Summen von  $r + r''$ , nämlich diejenige, welche man durch die Substitution in der Lambert'schen Gleichung erhält, und die geometrisch aus dem dieser Gleichung genügenden Werthe der Sehne  $\alpha$  abgeleitete, verschieden sein. Die Umformungen, welche wir unten für solche Zwecke mit der Lambert'schen Gleichung vornehmen werden, lassen uns auch erkennen, dass das aus derselben zu berechnende  $\alpha$  für einen Fehler in der Annahme von  $r + r''$  viel empfindlicher ist, als das geometrisch aus  $r + r''$  zu bestimmende. Aus demselben Grunde wird das aus  $\alpha$  geometrisch (d. h. hier immer ohne Zuziehung der Zeit) bestimmte  $r + r''$  der Wahrheit näher kommen, als das, von welchem man ausgegangen ist. Den so gefundenen genaueren Werth von  $r + r''$  substituirt man dann von Neuem in die Lambert'sche Gleichung, erhält einen genaueren Werth von  $\alpha$ , aus diesem abermals genauer  $r$  und  $r''$  u. s. w.

Der Gewinn, welchen dieses Verfahren mit sich bringt, würde noch erheblich grösser sein, wenn man von vornherein den Werth von  $r + r''$  genauer bestimmen könnte. In der Bildung der ersten Hypothese wird indessen von Olbers noch Vieles dem praktischen Gefühle des Rechners überlassen; es wird nur empfohlen, wenn der Coëfficient von  $q$  in dem Ausdrücke für  $r^2$  nahe Null ist,  $r + r'' = 2$  zu setzen, wenn er sehr stark negativ ausfällt,  $r + r''$  kleiner als 2, etwa  $= 1,5$ , und wenn er stark positiv wird, grösser als 2, etwa  $2,5$  zu wählen.

In einer Zusammenstellung der Formeln für Berechnung einer Kometenbahn, welche sich im Anhang der Encke'schen Ausgabe von Olbers' Abhandlung findet, wird in Betreff der Bildung der ersten Hypothese Folgendes bemerkt: „Kennt man sonst keine Näherung für  $q$  oder  $r$  oder  $r''$ , wodurch  $u$  genähert bekannt würde, so kann man ausgehen von:

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{t'' - t}{41}\right)^2 - A^2},$$

ein Vorschlag, der offenbar darauf hinauskommt,  $\alpha = \frac{t'' - t}{41}$  zu setzen. Zu dieser wegen des Divisors 41 etwas fremdartig aussehenden Näherungsformel wollen wir bemerken, dass  $\frac{1}{41}$  hier nur eine Abrundung für  $k\sqrt{2}$  ist. Entwickelt man die Differenz  $(r + r'' + \alpha)^{3/2} - (r + r'' - \alpha)^{3/2}$  unter Voraussetzung eines sehr kleinen Werthes von  $\alpha$ , dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden können, setzt man demnach:

$$\begin{aligned} (r + r'' + \alpha)^{3/2} &= (r + r'')^{3/2} + \frac{3}{2}(r + r'')^{1/2} \alpha \\ (r + r'' - \alpha)^{3/2} &= (r + r'')^{3/2} - \frac{3}{2}(r + r'')^{1/2} \alpha, \end{aligned}$$

so geht die Lambert'sche Gleichung in die folgende:

$$(r + r'')^{1/2} \alpha = 2k(t'' - t)$$

oder:

$$\alpha = \frac{2k(t'' - t)}{\sqrt{r + r''}}$$

über. Setzt man hier, was Olbers als Mittelwerth vorschlägt,  $r + r'' = 2$ , so erhält man:

$$\kappa = k \sqrt{2} (t'' - t) = \frac{t'' - t}{41,11}.$$

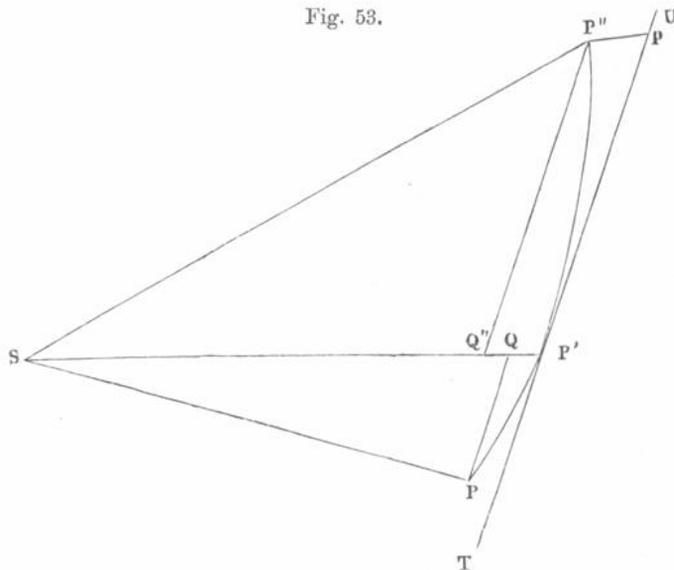
In dem durchgeführten Rechnungsbeispiele würde danach  $\log \kappa = 9,53487$  geworden sein, was von dem definitiv gefundenen  $\log \kappa = 9,47150$  nicht gerade stark abweicht. Indessen kann es doch für manche Fälle erwünscht sein, gleich der ersten Hypothese mit Sicherheit einen höheren Grad von Annäherung geben zu können, ohne zu einer weitläufigen Rechnung genöthigt zu sein. Aus den für solchen Zweck in der nächsten Vorlesung anzustellenden Betrachtungen folgt dann auch mit Leichtigkeit der berühmte Satz von Lambert über die Krümmung der geocentrischen Bahn eines Himmelskörpers, nach welchem man aus dieser Krümmung entscheiden kann, ob derselbe der Sonne entfernter oder näher ist als die Erde.

Einunddreissigste Vorlesung.

Vorbereitende Betrachtungen für den Lambert'schen Satz über die Krümmung des geocentrischen Laufes.

Nach den Elementen der Attractionslehre, der wir einige Betrachtungen hier entlehnen müssen, kann man die Bewegung eines die Sonne in einem Kegelschnitte umkreisenden Körpers an jedem Punkte der Bahn als das Resultat einer in der Richtung der Tangente wirkenden

Fig. 53.

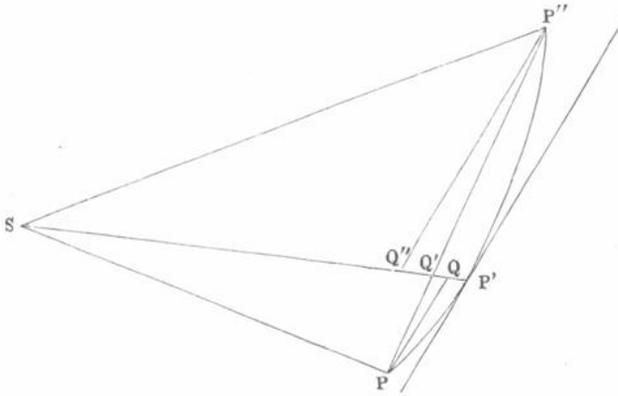


Wurfgeschwindigkeit und einem nach der Sonne vermöge deren Attraction gerichteten Fallen ansehen. Ist in Fig. 53 S die Sonne,  $PPP'$  ein Theil des Kegelschnittes, wobei  $P, P', P''$  der Reihe nach den Zeiten  $t, t', t''$  entsprechen sollen, ferner  $TU$  die Tangente in  $P'$ , so ist  $P'U$  zugleich die Richtung, welche der Körper verfolgen würde, wenn im Punkte  $P'$  zur Zeit  $t'$  die Attraction der Sonne plötzlich aufhörte.

Er würde dann seinen Weg gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit zurücklegen, welche er im Punkte  $P'$  besass, und auf diese Weise zur Zeit  $t''$  bis zu einem gewissen Punkte  $p$  der Tangente gelangen. Unter dem fortdauernden Einflusse der Schwerkraft jedoch wird der Richtung von  $\overline{SP''}$  parallel mit beschleunigter Ge-

schwindigkeit in dem Zeitraume  $t'' - t$  das Stück  $\overline{pP''}$  durchfallen, so dass der Körper die nach der Sonne concave Bahn  $\overline{P'P''}$  verfolgt. Ziehen wir noch durch den Punkt  $P''$  mit der Tangente parallel die Linie  $\overline{P''Q''}$ , wodurch  $\overline{Q''P'}$  parallel und gleich  $\overline{qP''}$  wird. So lange nun das Zeitintervall  $t'' - t'$  an Grösse nicht diejenigen Grenzen überschreitet,

Fig. 54.



welche wir bei diesen Untersuchungen innehalten dürfen, sind die Veränderungen in der Intensität der beschleunigenden Kraft sehr gering; es ist dann erlaubt, diese Kraft während der ganzen Fallzeit gleich

$$\frac{C}{(SP')^2} \text{ oder } \frac{C}{r'^2}$$

zu setzen, wobei  $C$  eine gleich zu bestimmende, von der Sonnenmasse abhängende Constante vorstellt. Den durchfallenen Raum findet man be-

kanntlich aus der beschleunigenden Kraft, indem man diese letztere mit dem halben Quadrate der Zeit multiplicirt; also hat man:

$$\overline{Q''P'} = \frac{C}{2r'^2} (t'' - t')^2.$$

Diese Formel muss aber offenbar auch noch ihre Gültigkeit für die Bewegung in einer Kreisbahn vom Radius 1 behalten, in einer solchen wird:

$$\overline{Q''P'} = 1 - \cos k(t'' - t') = 1 - [1 - \frac{1}{2}k^2(t'' - t')^2 + \dots],$$

dennach:

$$\frac{C(t'' - t')^2}{2} = \frac{k^2}{2} (t'' - t')^2$$

oder:

$$C = k^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung  $k(t'' - t') = \vartheta$ , so wird daher in dem allgemeineren Falle:

$$\overline{Q''P'} = \frac{\vartheta^2}{2r'^2}.$$

Ein Körper, welcher nach der Fig. 53 die Bahn  $\overline{P''P'}$  verfolgt hätte, würde in dem Zeitintervall  $t' - t$  nach  $P$  gelangen. Construiert man  $PQ$  und  $Q'P'$  gerade so, wie vorhin  $P''Q''$  und  $Q''P'$ , so wird daher nach denselben Betrachtungen:

$$\overline{QP'} = \frac{k^2(t' - t)^2}{2r'^2} = \frac{\vartheta'^2}{2r'^2},$$

wenn wir zur Abkürzung  $k(t' - t) = \vartheta'$  setzen.

In Fig. 54 wiederholen wir die Construction von  $Q$  und  $Q''$  und ziehen noch die Sehne  $\overline{PP''}$ . Deren Durchschnitt mit  $\overline{SP}$  sei  $Q'$ .

Es entstehen wegen des Parallelismus von  $\overline{QP}$  und  $\overline{Q''P''}$  die ähnlichen Dreiecke  $P'Q'Q$  und  $P''Q'Q''$ , daher die Proportionen:

$$\overline{QQ'} : \overline{Q'Q''} = \overline{PQ} : \overline{P''Q''} = \overline{PQ'} : \overline{Q'P''}$$

oder, da sich die letzteren Grössen sehr nahe wie die Zeiten verhalten:

$$\overline{QQ'} : \overline{Q'Q''} = \vartheta' : \vartheta,$$

also auch, wenn wir  $k(t'' - t) = \vartheta'$  setzen, wodurch  $\vartheta' = \vartheta + \vartheta''$  wird:

$$\overline{Q'Q'} : \overline{Q'Q'} + \overline{Q'Q''} = \vartheta'' : \vartheta',$$

d. h. nach dem Vorigen:

$$\overline{Q'Q'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \overline{Q'Q''} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \frac{(\vartheta^2 - \vartheta''^2)}{2r'^2} = \frac{\vartheta''(\vartheta - \vartheta'')}{2r'^2}.$$

Hieraus ergibt sich dann weiter:

$$\overline{P'Q'} = \overline{P'Q} + \overline{Q'Q'} = \frac{\vartheta'^2}{2r'^2} + \frac{\vartheta''(\vartheta - \vartheta'')}{2r'^2}$$

oder endlich:

$$\overline{P'Q'} = \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^2} \dots \dots \dots (Q)$$

eine für viele Untersuchungen sehr wichtige Gleichung, weswegen wir sie mit dem besonderen Buchstaben (Q) bezeichnen.

### Zweiunddreissigste Vorlesung.

#### Der Lambert'sche Satz von der geocentrischen Krümmung.

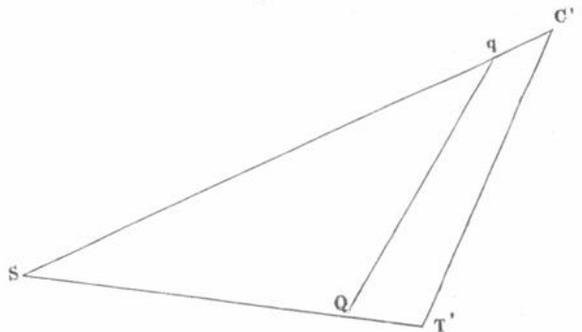
Lambert, von dessen wichtiger Gleichung über die Bewegung in der Parabel wir schon so häufigen Gebrauch gemacht haben, verdanken wir auch die Entdeckung einer sehr merkwürdigen Eigenschaft des geocentrischen Laufes aller Gestirne, für welche die Sonne Centalkörper ist, der folgenden nämlich:

Die Krümmung des geocentrischen Laufes eines Planeten oder Kometen ist gegen den Ort der Sonne auf der Sphäre concav, so lange die räumliche Entfernung des Körpers von der Sonne die der Erde von der Sonne nicht übertrifft, im anderen Falle dagegen convex.

Oder auch:

Legt man durch den ersten und dritten von drei benachbarten geocentrischen Oertern eines Himmelskörpers einen grössten Kreis, durch welchen die Kugel in zwei Hemisphären getheilt wird, so liegen der zweite geocentrische Ort und die Sonne auf verschiedener Hemisphäre, so lange der Radius vector der Erde den des Gestirnes übertrifft; dieselben Oerter liegen auf derselben Hemisphäre, wenn der Radius vector des Gestirnes der grössere ist.

Fig. 55.



Mercur und Venus z. B. kehren trotz aller Complication in ihrem geocentrischen Laufe der Sonne doch immer die concave Seite zu, die oberen Planeten, Mars, die Asteroiden, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun stets die convexe Seite. Bei den Kometen geht die Convexität gegen den Ort der Sonne in Concavität über, wenn sie der Sonne näher kommen, als der Erde.

Wir wollen den eben ausgesprochenen Satz zunächst beweisen und dann Anwendungen von demselben machen.

In Fig. 55 zeichnen wir wieder, wie in Fig. 49 der 26. Vorlesung, das ebene Dreieck  $ST'C'$  der zweiten Beobachtung und die Verbindungslinie  $Qq$  zwischen den Schnittpunkten der Sehnen mit dem mittleren Radius vector, die dort gebrauchte Bezeichnung so weit hier unverändert beibehaltend. Ist nun  $SC' > ST'$ , d. h.  $r' > R'$ , so ist nothwendig Winkel  $SQq >$  Winkel  $ST'C'$ ; denn wären beide Winkel einander gleich, so würde man die Proportion haben:

$$QT' : qC' = ST' : SC'.$$

Nach der Voraussetzung, dass  $SC' > ST'$ , müsste also auch  $qC' > QT'$  werden; dasselbe würde in noch höherem Grade stattfinden, wenn gar der Winkel  $SQq <$  Winkel  $ST'C'$  wäre. Nun ist aber nach der Relation (Q) am Schlusse der 31. Vorlesung:

$$qC' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^2}$$

$$QT' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2},$$

also  $qC' < QT'$ , so lange  $r' > R'$ . Demnach muss Winkel  $SQq$  in der That grösser sein, als Winkel  $ST'C'$ , wenn kein Widerspruch mit den Bewegungsgesetzen entstehen soll; und es liegt  $T'C'$  oder die Richtung des zweiten geocentrischen Ortes der Richtung  $T'S$ , d. h. dem Ort der Sonne in der zweiten Beobachtung, näher als die Richtung von  $Qq$  der letzteren Richtung liegt.  $Qq$  zielt aber bekanntlich auf einen Punkt des durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises und es ist somit bewiesen, dass, wenn  $r' > R'$ , der zweite geocentrische Ort und der zweite Sonnenort auf einer und derselben von den beiden Hemisphären liegen, in welche die Kugel durch jenen Kreis getheilt wird.

Auf ganz dieselbe Art ist zu zeigen, dass, wenn  $r' < R'$ , dann nothwendig auch Winkel  $SQq <$  Winkel  $ST'C'$  sein muss, weil sonst wieder ein mit der Gleichung (Q) der 31. Vorlesung unvereinbares Resultat erhalten werden würde. Es müssen also in diesem Falle der zweite geocentrische Ort und der zweite Sonnenort auf verschiedene Halbkugeln fallen.

---

### Dreiunddreissigste Vorlesung.

#### Anwendung des Lambert'schen Kriteriums über die Entfernung eines Gestirns von der Sonne.

Der in der 32. Vorlesung bewiesene Satz lässt sich offenbar auch umkehren, so dass aus der Krümmung des geocentrischen Laufes eines Planeten oder Kometen ein Schluss, vorerst allgemeinerer Art, auf die Entfernung des Körpers von der Sonne zu ziehen ist. Ob nach der Seite der Sonne, d. h. nach derjenigen Richtung hin, nach welcher die Sonne weniger als  $180^\circ$  im grössten Kreise absteht, die Krümmung concav oder convex ist, kann durch Construction auf einem Globus oder auf einer sorgfältig gezeichneten Karte, in welche man die geocentrischen Oerter einträgt, am Sichersten aber durch Rechnung ermittelt werden.

Nach der Bezeichnung in Fig. 51 der 26. Vorlesung und den darauf folgenden Gleichungen ist zu entscheiden, ob der Bogen  $Sq <$  oder grösser  $> SC'$ . Nennen wir  $\lambda_0, \beta_0$  die geocentrische Länge und Breite des Punktes  $q$ , Grössen, welche sich leicht finden lassen, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin \overline{Sq} &= \frac{\sin \beta_0}{\sin \gamma'} \\ \sin \overline{SC'} &= \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (R)$$

oder auch:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \overline{Sq} &= - \frac{\operatorname{tg} (\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} \\ \operatorname{tg} \overline{SC'} &= - \frac{\operatorname{tg} (\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (S)$$

Es wird sich demnach hauptsächlich darum handeln,  $\lambda_0$  und  $\beta_0$  auf möglichst kurze Weise zu bestimmen. Bezeichnen wir die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des Schnittpunktes der Sehne des Himmelskörpers und seines zweiten Radius vector mit  $x_0, y_0, z_0$ , die entsprechenden Grössen bei der Erde mit  $X_0, Y_0, Z_0$  und bedienen uns der Olbers'schen Annahme, dass beide Sehnen im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten werden, so haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x + \frac{t' - t}{t'' - t} (x'' - x) = \frac{t'' - t}{t'' - t} x + \frac{t' - t}{t'' - t} x'' \\ y_0 &= y + \frac{t' - t}{t'' - t} (y'' - y) = \frac{t'' - t}{t'' - t} y + \frac{t' - t}{t'' - t} y'' \\ z_0 &= z + \frac{t' - t}{t'' - t} (z'' - z) = \frac{t'' - t}{t'' - t} z + \frac{t' - t}{t'' - t} z'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (T)$$

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= X + \frac{t' - t}{t'' - t} (X'' - X) = \frac{t'' - t}{t'' - t} X + \frac{t' - t}{t'' - t} X'' \\ Y_0 &= Y + \frac{t' - t}{t'' - t} (Y'' - Y) = \frac{t'' - t}{t'' - t} Y + \frac{t' - t}{t'' - t} Y'' \\ Z_0 &= Z + \frac{t' - t}{t'' - t} (Z'' - Z) = \frac{t'' - t}{t'' - t} Z + \frac{t' - t}{t'' - t} Z'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (U)$$

Gleichungen, welche, wie gleich bemerkt werden mag, auch für andere Fundamentebenen, als die Ekliptik, ihre Gültigkeit behalten, da durch rechtwinklige Projection auf irgend welche Ebene das Verhältniss der Theilstücke einer Geraden keine Aenderung erleidet.

Es besteht hiernach die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{y_0 - Y_0}{x_0 - X_0} = \frac{(t'' - t') (y - Y) + (t' - t) (y'' - Y'')}{(t'' - t') (x - X) + (t' - t) (x'' - X'')}.$$

Substituiren wir, hier die Ekliptik als Fundamentebene beibehaltend, für  $x - X, y - Y, x'' - X'', y'' - Y''$  die dafür bekannten Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x - X &= \varrho \cos \lambda \\ y - Y &= \varrho \sin \lambda \\ x'' - X'' &= \varrho'' \cos \lambda'' = M \varrho \cos \lambda'' \\ y'' - Y'' &= \varrho'' \sin \lambda'' = M \varrho \sin \lambda'', \end{aligned}$$

worin noch  $\varrho$  und  $\varrho''$  die curtirten Distanzen von der Erde in der ersten und dritten Beobachtung vorstellen, so erhalten wir:

$$tg \lambda_0 = \frac{(t'' - t') \sin \lambda + M (t' - t) \sin \lambda''}{(t'' - t') \cos \lambda + M (t' - t) \cos \lambda''},$$

oder aber, wenn wir mit Rücksicht auf den Ausdruck für  $M$  in den Formeln (1) der 28. Vorlesung:

$$N = \frac{tg \beta' \sin(\lambda - \odot') - tg \beta \sin(\lambda' - \odot')}{tg \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - tg \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \dots \dots \dots (V)$$

und:

$$M = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot N \dots \dots \dots (W)$$

setzen:

$$tg \lambda_0 = \frac{\sin \lambda + N \sin \lambda''}{\cos \lambda + N \cos \lambda''} \dots \dots \dots (X)$$

Aus Grössen also, welche auf dem Wege der Olbers'schen Methode liegen, kann  $\lambda_0$  auf die einfachste Weise berechnet werden.

Es mag dann noch bemerkt werden, dass die Grösse  $tg \gamma'$  mit der Grösse  $m$  am Schlusse der 26. Vorlesung, deren Einführung Olbers zur Abkürzung des Ausdruckes für  $M$  empfiehlt, identisch ist.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass aus den Vorbereitungsgrössen für die Olbers'sche Methode  $\overline{Sg}$  und  $\overline{SC'}$  mit leichter Mühe und zwar, ganz seltene Ausnahmen abgerechnet, nach den Formeln (V), (W), (X) und (S) zu finden sind. Findet sich dabei der Bogen  $SC' < Sg$ , oder wenn  $SC'$  grösser als  $180^\circ$  wäre,  $360^\circ - SC' < 360^\circ - Sg$ , so ist der beobachtete Himmelskörper in der zweiten Beobachtung von der Sonne entfernter als die Erde; im anderen Falle ist er näher.

Ein Beispiel wird die Bequemlichkeit der Rechnung zeigen.

Aus den Zahlen der 29. Vorlesung erhalten wir:

$$\log m = \log tg \gamma' = \log \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} = 9,679974_n$$

$$\log N = \log \frac{m \sin(\lambda - \odot') - tg \beta}{tg \beta'' - m \sin(\lambda'' - \odot')} = 9,754515,$$

woraus etwas abweichend, aber wegen der mit sechs Stellen geführten Rechnung auch etwas genauer als im Früheren:

$$\log M = 9,757944$$

sich ergibt. Bis hierher haben wir nur Grössen gebraucht, deren wir bei der Olbers'schen Methode nothwendig bedurften. Es wird nun ferner:

$$\log tg \lambda_0 = \log \frac{\sin \lambda + N \sin \lambda''}{\cos \lambda + N \cos \lambda''} = 1,159989$$

$$\lambda_0 = 266^\circ 2' 32'',3$$

$$\log tg \overline{Sg} = \log \frac{tg(\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} = 0,308152$$

$$\overline{Sg} = 243^\circ 48' 32'',1, \quad \text{Abstand des Punktes } g \text{ von der Sonne} = 116^\circ 11' 27'',9$$

$$\log tg SC' = \log \frac{tg(\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'} = 0,315549$$

$$\overline{SC'} = 244^\circ 11' 36'',3, \quad \text{Abstand des Punktes } C' \text{ von der Sonne} = 115^\circ 48' 23'',7.$$

Der Quadrant von  $\overline{Sg}$  ist stets derselbe, wie der von  $\lambda_0 - \odot'$ , ebenso liegt  $\overline{SC'}$  mit  $\lambda' - \odot'$  in demselben Quadranten, wie schon bei verschiedenen Gelegenheiten er-

wähnt wurde. Da nun also hier der Abstand des Punktes  $C'$  von der Sonne kleiner als der der Richtung  $Qq$  ist, so ist ganz gewiss der Komet in der zweiten Beobachtung von der Sonne entfernter gewesen als die Erde. Dieses sichere Urtheil haben wir durch Nebenrechnung gewonnen.

Vierunddreissigste Vorlesung.

Bestimmung der Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne.

Mit einem nur geringen Mehraufwande von Rechnung kann das oben angegebene Lambert'sche Kriterium zu einer wirklichen Bestimmung von  $r'$  vervollkommenet werden. In den dahin führenden Betrachtungen wollen wir für den Bogen  $\overline{Sq}$ , den kleinsten Abstand des Punktes  $q$  von der Sonne, die Bezeichnung mit  $\chi_0$ , für das entsprechende  $SC'$  das Zeichen  $\chi'$  einführen, wonach wir also haben:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi_0 &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} \\ \operatorname{tg} \chi' &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'}. \end{aligned}$$

Ferner sei für die in Fig. 55 dargestellten ebenen Dreiecke  $Sq = r_0$ ,  $SC' = r'$ ,  $SQ = R_0$ ,  $ST' = R'$ , Winkel  $SC'T' = z$ , dann haben wir

$$\begin{aligned} r' &= \frac{R' \sin ST'C'}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} \\ r_0 &= \frac{R_0 \sin SQq}{\sin [z - (SQq - ST'C')]} = \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)^2} \end{aligned}$$

also auch:

$$r' - r_0 = q C' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^2} = \left. \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)} \right\} \dots (1)$$

und wenn für  $r'$  sein Werth  $\frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$  gesetzt wird:

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} \cdot \frac{\sin z^2}{R'^2 \sin \chi'^2} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)} \dots (2)$$

Die Seiten dieser Gleichung sind von der Ordnung des Productes der kleinen Grössen  $\vartheta$  und  $\vartheta''$ , oder nach einem gebräuchlichen Ausdrucke, kleine Grössen der zweiten Ordnung. Man darf deshalb die rechte Seite der Gleichung mit einem Factor multipliciren, welcher von der Einheit um eine kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden ist, da man dabei nur eine Grösse der vierten Ordnung vernachlässigt. Man multiplicire die rechte Seite mit dem Factor  $\frac{r'}{r_0}$ , d. h. mit:

$$\frac{R' \sin \chi'}{R_0 \sin \chi_0} \cdot \frac{\sin (z + \chi' - \chi_0)}{\sin z},$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} \frac{\sin z^2}{R'^2 \sin \chi'^2} = \frac{R'^2 \sin \chi'^2}{R_0 \sin \chi_0 \sin z} \cdot \frac{\sin (z + \chi' - \chi_0)}{\sin z} - \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$$

oder:

$$\sin z^2 = \frac{2 R'^4 \sin \chi'^4}{\vartheta \vartheta'' R_0 \sin \chi_0} \cdot \frac{\sin(z + \chi' - \chi_0)}{\sin z} - \frac{2 R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{R' \sin \chi'}{R_0 \sin \chi_0} \cdot \cos(\chi' - \chi_0) - 1 = a$$

$$\frac{R' \sin \chi'}{R_0 \sin \chi_0} \cdot \sin(\chi' - \chi_0) = b,$$

so erhält man:

$$\sin z^3 = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} \cotg z \dots \dots \dots (3)$$

Wird  $\cotg z = x$  gesetzt, so geht die Gleichung über in:

$$(1 + x^2)^{-3/2} = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} x \dots \dots \dots (4)$$

Hieraus ist sofort eine sehr einfache Construction für die reellen Lösungen dieser Gleichung zu erkennen. Man zeichne nämlich die durch die Gleichung:

$$y = (1 + x^2)^{-3/2}$$

vorgestellte Curve, was, da dieselbe keinen veränderlichen Parameter enthält, nur einmal für alle möglichen Fälle zu geschehen braucht, und lege durch diese die der Gleichung:

$$y = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} x$$

entsprechende gerade Linie hindurch, deren Lage sich in jedem gegebenen Falle auf das Leichteste bestimmt. Die Abscissen der Schnittpunkte werden die Werthe von  $\cotg z$  sein, welche die Gleichung (4) befriedigen. Die Ordinaten stellen  $\sin z^3$  vor.

Die Curve besteht aus zwei von einander getrennten, zur Abscissenaxe symmetrisch liegenden und die letztere zur gemeinschaftlichen Asymptote habenden Zweigen; sie hat also nothwendig mindestens zwei Schnittpunkte mit jeder gegen die Abscissenaxe geneigten Geraden. Eine dieser reellen Lösungen entspricht sehr nahe der Erdbahn, liefert also  $r' = R'$ , d. h.  $z = 180^\circ - \chi'$ , da doch auch die Erde ein in den Gesichts- oder Beobachtungsrichtungen gelegener Himmelskörper ist, welcher bei seiner Bewegung die zu Grunde gelegten Gesetze befolgt. Die praktisch in Betracht kommende Lösung ist in den allermeisten Fällen leicht dadurch zu erkennen, dass bei ihr  $z$  zwar positiv, aber kleiner als  $180^\circ - \chi'$  ausfallen muss. In dem nicht seltenen Falle, wo mehr als eine Lösung dieser Bedingung genügt, giebt es auch in der That mehr als eine Bahn, welche die gegebenen Beobachtungen darstellt, und es können dann nur weitere Beobachtungen entscheiden, welche Lösung man zu wählen hat.

In den Ausdrücken für  $a$  und  $b$  kommt das Verhältniss  $\frac{R'}{R_0}$  vor. Nach der in Vorlesung 32 entwickelten Relation haben wir:

$$R' - R_0 = \frac{Q T'}{2 R'^2} = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2},$$

also:

$$\frac{R'}{R_0} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2 R_0},$$

wofür wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^3}$$

setzen dürfen.

Eine für die Auflösung durch Rechnung und Verbesserung des durch Construction gefundenen Werthes von  $z$  bequeme Form der oben entwickelten Gleichung erhält man, wenn man zwei Hilfsgrößen  $n$  und  $q$  einführt.

Macht man:

$$\begin{aligned} a &= n \cos q \\ b &= n \sin q, \end{aligned}$$

so geht die Gleichung (3) über in:

$$\frac{\vartheta \vartheta'' \sin z^4}{2 R'^3 \sin \chi'^3} = n \sin(z + q) \dots \dots \dots (5)$$

Durch eine einigermaßen sorgfältige Construction kann meistens  $z$  bis auf einen kleinen Bruchtheil eines Grades genau gefunden werden; nachher kann man die Gleichung (5) unter der Form:

$$\log \frac{\vartheta \vartheta'' \sin z^4}{2 R'^3 \sin \chi'^3} = \log [n \sin(z + q)]$$

durch Anwendung des schon bekannten Gauss'schen Kunstgriffes des logarithmischen Increments leicht so genau auflösen, wie man für nöthig hält.

Es ist somit:

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$$

bekannt und nach Vorlesung 30 wird:

$$x = \sqrt{\frac{2}{r'}} \cdot k(t'' - t) = \vartheta' \sqrt{\frac{2}{r'}}$$

ein sehr genäherter Werth für die in der Zeit  $t'' - t$  beschriebene Sehne sein. Das Ausgehen von demselben bei der Olbers'schen Art der Hypothesenbildung oder ein derselben im Wesentlichen gleich kommendes Verfahren, welches wir später noch entwickeln wollen, führt dann bald zu definitiven Werthen.

Es erschien zweckmässig, die obigen Vorschriften zur Bestimmung von  $r'$  zu entwickeln, sowohl um zu zeigen, dass sich für die Bildung der ersten Hypothese ein gar nicht beschwerliches Verfahren angeben lässt, als auch, weil doch in einzelnen Fällen auch das practische Gefühl des erfahrenen Rechners eine Zeit lang vergeblich nach einer brauchbaren Näherung suchen würde.

Rechnungsbeispiel für die Bestimmung von  $r'$ .

Am Schlusse der 33. Vorlesung fanden wir:

$$\begin{aligned} 360^\circ - \overline{S}q &= \chi_0 = 116^\circ 11' 27'',9 \\ 360^\circ - \overline{S}C' &= \chi' = 115^\circ 48' 4'',9 \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned} \log \vartheta &= 9,083917 \\ \log \vartheta'' &= 9,080488 \\ \log R' &= 0,001750 \\ \log \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2} &= 0,304530, \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \log \frac{R'}{R_0} &= 0,003144 & q &= - 32^\circ 59' 37'',4 \\ \log b &= 7,837213_n & \log n &= 8,101179 \\ \log a &= 8,024801 & \log \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^3 \sin \chi'^3} &= 7,994052, \\ \log \operatorname{tg} q &= 9,812412_n \end{aligned}$$

wonach denn die aufzulösende Gleichung heisst:

oder:  $(7,994\,952) \sin z^4 = (8,101\,179) \sin(z - 32^\circ 59' 37'',4)$   
 $(9,893\,773) \sin z^4 = \sin(z - 32^\circ 59' 37'',4).$

Durch eine vierstellige Versuchsrechnung finden wir, dass  $z$  zwischen  $42^\circ$  und  $43^\circ$  liegt.

Für  $z = 42^\circ$  hat man:

$$\begin{array}{r} \log \sin z = 9,8255 \\ 4 \log \sin z = 9,3020 \\ \hline 9,8938 \\ \hline 9,1958 \end{array}$$

$$\log \sin(42^\circ - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,1946$$

$$\text{Differenz} = + 0,0012$$

Für  $z = 43^\circ$  hat man:

$$\begin{array}{r} \log \sin z = 9,8338 \\ 4 \log \sin z = 9,3352 \\ \hline 9,8938 \\ \hline 9,2290 \end{array}$$

$$\log \sin(43^\circ - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,2399$$

$$\text{Differenz} = - 0,0109$$

Aus der regula falsi ergibt sich als Verbesserung  $\Delta z$  von  $z$  in Minuten:

$$\Delta z = \frac{0,0012 \cdot 60}{0,0121} = \frac{0,0012 \cdot 60 \cdot 10000}{0,0121 \cdot 10000} = \frac{12 \cdot 60}{121} = \frac{720}{121} = 6'.$$

Nennen wir die Verbesserung von  $z$  in Secunden  $x$  und entnehmen für jede Seite der Gleichung aus den Logarithmentafeln die Aenderung des Logarithmus in Einheiten der letzten Stelle, die der Aenderung von  $z$  um  $1''$  entspricht, so ergibt sich durch sechsstellige Rechnung:

$$\begin{array}{r} \log \sin 42^\circ 6' 0'' = 9,826351 + 2,34 x \\ 4 \log \sin 42^\circ 6' 0'' = 9,305404 + 9,36 x \\ \hline 9,893773 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,199177 + 9,36 x \\ \log \sin(42^\circ 6' 0'' - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,199387 + 13,13 x \end{array}$$

Für die Correction  $x$  erhalten wir demnach die Bedingungsgleichung:

$$\begin{array}{r} 9,199177 + 9,36 x = 9,199387 + 13,13 x \\ - 3,77 x = + 210 \\ x = - 55'',7 \\ z = 42^\circ 6' 0'',0 - 55'',7 = 42^\circ 5' 4'',3 \end{array}$$

$$\log r' = \log \frac{k' \sin \chi'}{\sin z} = 0,12992.$$

Da nun  $\log \vartheta' = \log k(t'' - t) = 9,38323$ , so erhalten wir für die erste Hypothese bei  $\log x$  den Näherungswert:

$$\log x = \log \vartheta' \sqrt{\frac{2}{r'}} = 9,46878,$$

in der 29. Vorlesung erhielten wir als definitiven Werth:

$$\log x = 9,47150.$$

Die Kenntniss von  $r'$  giebt uns sogar die Mittel an die Hand,  $\varrho$  und  $\varrho''$  ohne die Vermittelung von  $x$  zu finden und darauf hin die ganze Bahnbestimmung zu vollenden. Wir würden aber damit ein wesentliches Stück der Olbers'schen Methode, die Benutzung der Lambert'schen Gleichung, aufgeben.

Da, wie wir in den vorhergehenden Entwicklungen gesehen haben, die erste Hypothese für die Versuche der Olbers'schen Methode, wenn man will, auf eine systematische und sichere Weise gebildet werden kann, so beschäftigen wir uns im Folgenden mit der Verbesserung der Hypothesen. Hierbei ist, wie schon bemerkt wurde, eine Transformation der Lambert'schen Gleichung für die Parabel von grossem Nutzen.

Fünfunddreissigste Vorlesung.

Umformung der Lambert'schen Gleichung; Ausdruck für das Verhältniss des Sectors zum Dreieck bei der Parabel.

Durch Einführung der Hilfsgrösse  $\varphi$  mittelst der Relation:

$$\sin \varphi = \frac{x}{r + r''}$$

nimmt die Lambert'sche Gleichung für die Parabel eine Gestalt an, welche unseren Zwecken sehr förderlich ist. Dieselbe geht dadurch zunächst über in:

$$6k(t'' - t) = (r + r'')^{3/2} \{ [1 + \cos(90^\circ - \varphi)]^{3/2} - [1 - \cos(90^\circ - \varphi)]^{3/2} \} \\ = 2^{3/2} (r + r'')^{3/2} \{ \cos(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 \},$$

oder, da:

$$\cos(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 \\ = \{ \cos(45^\circ - 1/2 \varphi) - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi) \} \{ 1 + 1/2 \cos \varphi \} \\ = 2 \cos 45^\circ \cdot \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi) \\ = 2^{1/2} \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi),$$

in:

$$3k(t'' - t) = 2 \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi) (r + r'')^{3/2} \dots \dots \dots (1)$$

Multiplicirt und dividirt man auf der rechten Seite mit  $\cos 1/2 \varphi$  und bemerkt, dass:

$$2 \sin 1/2 \varphi \cos 1/2 \varphi = \sin \varphi = \frac{x}{r + r''},$$

so erhält man:

$$6k(t'' - t) = x (r + r'')^{1/2} \frac{2 + \cos \varphi}{\cos 1/2 \varphi},$$

oder nach  $x$  aufgelöst:

$$x = \frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi} \cdot \frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{1/2}} \dots \dots \dots (2)$$

Auf dieser Umformung beruht die Construction der Encke'schen Hülftafel für Auflösung der Lambert'schen Gleichung. Dieselbe giebt für das Argument  $\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$  den Logarithmus von  $\frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi}$ . Bezeichnen wir diese Grösse  $\frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi}$ , welche in den Fällen der Praxis immer sehr nahe gleich 1 bleibt, mit dem Buchstaben  $\mu$ , so wird die Sehne aus der Formel:

$$x = \frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{1/2}} \mu$$

erhalten. Auf diese Weise reicht die in dem Anhange aufgenommene Tafel X aus, mit aller Bequemlichkeit  $x$  aus  $r + r''$  der Lambert'schen Gleichung gemäss zu bestimmen.

Aus Gleichung (1) erhält man noch, wenn man  $\cos \varphi$  in  $1 - 2 \sin^2 1/2 \varphi$  umsetzt

$$\sin 1/2 \varphi^3 - 3/2 \sin 1/2 \varphi = - 3/2 \frac{k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}} \dots \dots \dots (3)$$

eine cubische Gleichung, deren kleinste positive Wurzel den Bogen  $\varphi$  ergibt. Hiermit ist dann zugleich der Weg gezeigt, auf welchem die Hilfsgrösse  $\mu$  aus  $\frac{k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$  abgeleitet werden kann.

Mittelst der Hilfsgrösse  $\varphi$  kann man auch das in vielen Rechnungen eine wichtige Rolle spielende Verhältniss des parabolischen Sectors zum Dreieck zwischen denselben Radienvectoren auf eine sehr einfache Weise ausdrücken.

Es sei  $\mathcal{A}$  die doppelte Dreiecksfläche, also:

$$\mathcal{A} = r r'' \sin(v'' - v) = 2 r r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \cos \frac{1}{2}(v'' - v),$$

wenn wieder  $v$  und  $v''$  die wahren Anomalien von  $r$  und  $r''$  vorstellen.

Bedeutet  $\Sigma$  den doppelten Sector, so können wir folgende Entwicklung des Ausdruckes für  $\mathcal{A}$  vornehmen:

$$\mathcal{A} = 2 \sqrt{r r''} \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sqrt{r r''} \cos \frac{1}{2}(v'' - v)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{r r''} \sin \frac{1}{2}(v'' - v) &= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v} (\sin \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v - \cos \frac{1}{2} v'' \sin \frac{1}{2} v) \\ &= q (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v), \end{aligned}$$

wo  $q$  den Perihelabstand bezeichnet. Ferner ist nach Vorlesung fünf:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{2q} &= \frac{q}{3} (tg \frac{1}{2} v''^3 - tg \frac{1}{2} v^3) + (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) q \\ &= q (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) (\frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v''^2 + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v'' tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^2 + 1) \\ &= q (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) \{ \frac{1}{3} (1 + tg \frac{1}{2} v''^2) + \frac{1}{3} (1 + tg \frac{1}{2} v^2) \\ &\quad + \frac{1}{3} (1 + tg \frac{1}{2} v'' tg \frac{1}{2} v) \}. \end{aligned}$$

Da nun:

$$r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2} = q (1 + tg \frac{1}{2} v^2)$$

$$r'' = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v''^2} = q (1 + tg \frac{1}{2} v''^2)$$

$$1 + tg \frac{1}{2} v'' tg \frac{1}{2} v = \frac{\cos \frac{1}{2} (v'' - v)}{\cos \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v} = \frac{1}{q} \sqrt{r r''} \cos \frac{1}{2} (v'' - v),$$

so erhält man aus dem Vorhergehenden:

$$\Sigma = \frac{2q}{3} (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) (r'' + r + \sqrt{r r''} \cos \frac{1}{2} (v'' - v))$$

$$\mathcal{A} = 2q (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) \sqrt{r r''} \cos \frac{1}{2} (v'' - v).$$

Für das Quadrat der Sehne haben wir aber den Ausdruck:

$$\begin{aligned} x^2 &= r''^2 + r^2 - 2 r r'' \cos (v'' - v) \\ &= (r'' + r)^2 - 4 r r'' \cos \frac{1}{2} (v'' - v)^2, \end{aligned}$$

folglich:

$$2 \sqrt{r r''} \cos \frac{1}{2} (v'' - v) = \sqrt{(r + r'')^2 - x^2} = (r'' + r) \cos \varphi$$

$$\frac{\Sigma}{\mathcal{A}} = \frac{2}{3 \cos \varphi} + \frac{1}{3}$$

oder:

$$\frac{\Sigma}{\mathcal{A}} = \frac{2 + \cos \varphi}{3 \cos \varphi} \dots \dots \dots (4)$$

Obwohl diese Gleichung sich durch Einfachheit auszeichnet, kann sie doch meistens mit Vortheil durch eine Reihenentwicklung ersetzt werden, welche nach Potenzen von

$\frac{k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$  fortläuft; denn der Winkel  $\varphi$  ist nur selten unmittelbar gegeben. Wir wollen zur Abkürzung die Grösse  $\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$  oder  $\frac{2\vartheta'}{(r + r'')^{3/2}}$ , welche auch zugleich das Argument der vorhin erwähnten Encke'schen Hülftafel ist, mit dem Buchstaben  $\nu$  bezeichnen und dann die Wurzel der cubischen Gleichung (3), d. h.  $\sin \frac{1}{2} \varphi$ , in eine nach Potenzen der Grösse  $\nu$  fortlaufende Reihe zu entwickeln suchen.

Die kleinste positive Wurzel der reducirten cubischen Gleichung:

$$x^3 - \frac{3}{2}x = -\frac{3\nu}{4}$$

existirt unter der Form:

$$x = A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + D\nu^4 + \dots,$$

worin  $A, B, C, D$  u. s. w. Zahlenfactoren vorstellen, welche nach der bekannten Methode der unbestimmten Coëfficienten zu ermitteln sind. Substituirt man die für  $x$  angenommene Reihe in  $x^3 - \frac{3}{2}x$  und ordnet nach Potenzen von  $\nu$ , so erhält man:

$$-\frac{3A}{2}\nu - \frac{3B}{2}\nu^2 + \left(A^3 - \frac{3C}{2}\right)\nu^3 + \left(3A^2B - \frac{3D}{2}\right)\nu^4 + \dots = -\frac{3\nu}{4},$$

das heisst:

$$\begin{aligned} -\frac{3A}{2} &= -\frac{3}{4} \\ -\frac{3B}{2} &= 0 \\ -\frac{3C}{2} &= -A^3 \\ -\frac{3D}{2} &= -3A^2B \\ -\frac{3E}{2} &= -3AB^2 - 3A^2C \\ -\frac{3F}{2} &= -B^3 - 6ABC - 3A^2D \\ -\frac{3G}{2} &= -3B^2C - 3AC^2 - 6ABD - 3A^2E \end{aligned}$$

u. s. w.

also:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} & E &= \frac{1}{24} \\ B &= 0 & F &= 0 \\ C &= \frac{1}{12} & G &= \frac{1}{36} \\ D &= 0 & & \end{aligned}$$

Man hat also für  $\sin \frac{1}{2} \varphi$  den folgenden Ausdruck:

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{12}\nu^3 + \frac{1}{24}\nu^5 + \frac{1}{36}\nu^7 + \dots$$

Das Verhältniss des Dreiecks zum Sector hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Sigma} &= \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi} = \frac{3 \cos \varphi}{3 - (1 - \cos \varphi)} = \frac{1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2}{1 - \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2} \\ &= (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2) \left(1 + \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{4}{9} \sin \frac{1}{2} \varphi^4 + \frac{8}{27} \sin \frac{1}{2} \varphi^6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{81} \sin \frac{1}{2} \varphi^8 + \dots\right) = 1 - \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{8}{9} \sin \frac{1}{2} \varphi^4 \\ &\quad - \frac{16}{27} \sin \frac{1}{2} \varphi^6 - \frac{32}{81} \sin \frac{1}{2} \varphi^8 - \dots \end{aligned}$$

Substituirt man nun den Werth von  $\sin \frac{1}{2} \varphi$  aus obiger Reihenentwicklung, so erhält man nach leichten Reductionen:

$$\frac{A}{\Sigma} = 1 - \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{6} \nu^4 - \frac{1}{9} \nu^6 - \frac{55}{648} \nu^8 - \frac{91}{1296} \nu^{10} - \frac{119}{1944} \nu^{12} - \frac{323}{5832} \nu^{14} . . . \quad (5)$$

Nach dieser in allen praktischen Fällen sehr schnell convergirenden Reihe ist im Anhang die Tafel XI construirt worden, aus welcher der Werth von  $\log \frac{A}{\Sigma}$ , der für viele Rechnungen von grosser Bedeutung ist, mit dem Argumente:

$$\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}}$$

entnommen werden kann.

### Sechsendreissigste Vorlesung.

#### Systematische Verbesserung der Hypothesen in den Versuchen zur Olbers'schen Methode, durch ein Rechnungsbeispiel erläutert.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen haben wir uns die nöthigen Hilfsmittel verschafft, um ohne Unbequemlichkeit zu einem angenommenen oder gegebenen Werthe von  $r + r''$  die Sehne  $x$  zu berechnen, welche die Lambert'sche Gleichung befriedigt, und das schon früher angegebene Verfahren der Verbesserung der Versuchswerthe der Olbers'schen Methode mit weniger Arbeit durchzuführen.

Ein Beispiel wird den Gang einer solchen Rechnung am besten erläutern.

In der 34. Vorlesung ermittelten wir, dass der auf das Rechnungsbeispiel der 29. Vorlesung bezügliche Werth von  $\log x$  nahe gleich 9,46878 sein müsse. Wir hatten  $\log r' = 0,12992$  gefunden; betrachten wir dies als Näherungswerth für  $\log \frac{1}{2}(r + r'')$ , setzen demnach  $\log(r + r'') = 0,43083$ , so wird:

$$\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\vartheta'}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}} = 0,10915.$$

Geht man mit diesem Werthe  $\nu = 0,10915$  in die Encke'sche Hülfstafel, so findet man:

$$\log u = 0,00022,$$

und es ist nun:

$$\log x = \log \frac{2u\vartheta'}{(r + r'')^{\frac{1}{2}}} = \log [uv(r + r'')] = 9,46906.$$

Ferner ist:

$$u^2 = x^2 - A^2 = (0,24187)^2; \quad u = 0,24187.$$

Mittelst der Ausdrücke:

$$r^2 = \left(\frac{u + c}{b}\right)^2 + B^2, \quad r''^2 = \left(\frac{u + c''}{b''}\right)^2 + B''^2$$

findet man:

$$\begin{aligned} \log r &= 0,13817 \\ \log r'' &= 0,11173. \end{aligned}$$

Demnach hat man viel genäherter für die folgende Hypothese:

$$\begin{aligned} \log(r + r'') &= 0,42621 \\ v &= 0,11091 \\ \log \mu &= 0,00022 \\ \log x &= 9,47139 \\ u &= 0,24380, \end{aligned}$$

woraus dann wieder genauer:

$$\begin{aligned} \log r &= 0,13892 \\ \log r'' &= 0,11067 \\ \log(r + r'') &= 0,42605 \\ v &= 0,11096 \\ \log \mu &= 0,00022 \\ \log x &= 9,47144. \end{aligned}$$

Aus dem Gange der Zahlen, die wir für  $\log x$  erhielten, nämlich:

$$\begin{array}{ll} 9,46906 & \text{Diff.} = + 0,00233 \\ 9,47139 & \text{Diff.} = + 0,00005 \\ 9,47144 & \end{array}$$

können wir schliessen, dass der definitive Werth von  $\log x = 9,47145$  sein wird, welcher nur fünf Einheiten der letzten Stelle von dem in der 29. Vorlesung gefundenen abweicht.

### Siebenunddreissigste Vorlesung.

#### Verbesserung des nach dem Olbers'schen Princip gefundenen Werthes von $\frac{q''}{q}$ . Kunstgriff von Carlini.

Erste Bahnbestimmungen von Kometen pflegt man im Allgemeinen nicht auf einen sehr hohen Grad von Schärfe anzulegen; man vernachlässigt auch meistens den Einfluss der Parallaxe und der Aberration, ohne die Gefahr, eine brauchbare Annäherung zu verfehlen. Nur in einzelnen Fällen kann diese Vernachlässigung für den Erfolg der Rechnung, welche aus nur wenige Tage umfassenden Beobachtungsmaterial schon die ganze Individualität der von einem neuen Kometen beschriebenen Bahn im Wesentlichen verrathen soll, von grösserer Bedeutung, gewissermaassen verhängnissvoll, werden. Es tritt dies häufig dann ein, wenn der beschriebene geocentrische Bogen sehr klein ist, und dennoch eine Bahnbestimmung gewagt werden soll; in einem solchen Falle ist es rathsam, eine Form der Rechnung zu wählen, welche die Berücksichtigung von Aberration, Parallaxe und anderer kleiner Correctionen möglichst erleichtert, wie sie der Leser später kennen lernen wird. Hiervon abgesehen, ist aber die Olbers'sche Methode an und für sich, soweit dieselbe von der Voraussetzung Gebrauch macht, dass die Sehne der Kometenbahn und die der Erdbahn in gleichem Verhältniss geschnitten werden, welche Annahme man auch wohl das Olbers'sche Princip zu nennen pflegt, keine ganz strenge.

Der dadurch begangene Fehler kann ebenfalls gewöhnlich vernachlässigt werden, besonders, wenn die Zwischenzeiten der Beobachtungen sich nicht sehr von der Gleichheit entfernen. Werden dagegen diese Intervalle sehr ungleich, oder ist die geocentrische Bewegung des Kometen so schwach, dass dadurch ein jeder sonst unschädliche Fehler eine grössere Bedeutung erlangt, so wird es nöthig, auch den Olbers'schen Ausdruck für  $\frac{\varrho''}{\varrho}$  oder  $M$  zu verbessern. Ziemlich einfach kann dies durch einen von Carlini vorgeschlagenen Kunstgriff, auf welchen die folgenden Betrachtungen führen, erreicht werden.

Es ist einleuchtend, dass wir, um den Werth von  $M$  verbessern zu können, auch ein Merkmal haben müssen, zu erkennen, dass derselbe der Verbesserung bedarf; dieses Merkmal liegt in der Art, wie die Beobachtungen dargestellt werden. Offenbar werden die äusseren Beobachtungen nach den Rechnungen der Olbers'schen Methode stets vollständig dargestellt, wie fehlerhaft auch das angenommene  $M$  sein möge; damit aber auch die mittlere Beobachtung vollständig durch die Elemente wiedergegeben werde, dazu ist Zweierlei erforderlich: erstlich müssen die Beobachtungen selbst einer parabolischen Bahn entsprechen, obwohl sie eine gegebene Grösse mehr enthalten, als die Parabel erfordert; zweitens darf die Voraussetzung, auf welcher die Herleitung des Olbers'schen  $M$  beruht, nicht fehlerhaft sein. Ist diese zweite Bedingung vollständig erfüllt, aber nicht die erstere, so werden weder die geocentrische Länge noch die Breite der mittleren Beobachtung dargestellt, doch ist alsdann der aus den Elementen zu berechnende Ort der zweiten Beobachtung noch ein Punkt jenes grössten Kreises, welcher den beobachteten Ort mit dem Sonnenorte in der zweiten Beobachtung verbindet. Es wird also dann mit anderen Worten die Grösse:

$$m = \operatorname{tg} \gamma' = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')}$$

durch das aus den Elementen zu berechnende  $\lambda'$  und  $\beta'$ , welches wir zur Unterscheidung im Folgenden mit  $\lambda_0'$  und  $\beta_0'$  bezeichnen wollen, genau wiedergegeben werden müssen. Dass alsdann auch die Grösse  $M$  so dargestellt wird, wie sie bei der Rechnung zu Grunde gelegt wurde, die Elemente also a posteriori das angenommene  $M$  bestätigen, ist leicht einzusehen, weil in dem Ausdruck für die letztere Grösse  $\lambda'$  und  $\beta'$ , nur so weit sie in  $m$  enthalten sind, vorkommen. Ist dagegen das Olbers'sche Princip wirklich fehlerhaft, so wird sich das eben dadurch verrathen, dass der aus den Elementen berechnete Ort einem anderen durch den zweiten Sonnenort gelegten Kreise entspricht, als dem eben genannten, wonach denn also die zweite Beobachtung selbst in dem Falle, dass sie genau einer Parabel entspräche, nicht dargestellt werden könnte.

Diese Betrachtungen geben nun den von Carlini vorgeschlagenen Kunstgriff an die Hand, durch welchen man erreicht, dass nach einer zweiten Bestimmung der Elemente der durch den zweiten Sonnenort und den schliesslich berechneten Ort gehende grösste Kreis in Wirklichkeit auch sehr nahe durch den beobachteten Ort geht und folglich diesen darstellt, wenn derselbe einer Parabel entspricht. Man wird dies, wie leicht einzusehen, dadurch erreichen, dass man den bei der ersten Rechnung gefundenen Unterschied:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} - \frac{\operatorname{tg} \beta_0'}{\sin(\lambda_0' - \odot')} = \text{Beobachtung} - \text{Rechnung}$$

als eine Correction betrachtet, welche an dem Werth:

$$m = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')}$$

angebracht werden muss. Der verbesserte Werth von  $M$ , welchen man bei der Wiederholung der Bahnberechnung zu Grunde zu legen hat, wird also auf einfache Weise dadurch erhalten werden, dass man darin:

$$m = 2 \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} - \frac{\operatorname{tg} \beta'_0}{\sin(\lambda'_0 - \odot')} = \text{Beobachtung} - \text{Rechnung}$$

setzt. Ein Beispiel wird hinreichen, diese Vorschrift zu erläutern.

Für den zweiten Kometen des Jahres 1813 fanden wir die Elemente:

$$\begin{aligned} T &= 1813, \text{ Mai } 19,520 \text{ Berl. Zeit} \\ \pi - \Omega &= 205^\circ 2' 23'' \\ \Omega &= 42 40 8 \\ i &= 98 59 5 \\ \log q &= 0,08468. \end{aligned}$$

Die mittlere Beobachtung fiel auf April 14,5469; also ist  $t' - T = - 34,9731$ .

Die mittlere tägliche Bewegung ist  $\frac{75 k}{q^{3/2} \sqrt{2}}$ ;  $\log \text{ motus medii diurni } 9,83311$ . In die Barker'sche Tafel hat man demnach mit dem Logarithmus  $9,83311 + \log 34,9731$ , d. h. mit  $1,37684$  einzugehen, um die wahre Anomalie  $v'$  zu finden. Letztere ergibt sich gleich

$$- 34^\circ 13' 2'', \log r' = \log \frac{q}{\cos^{1/2} v'^2} = 0,12399.$$

Das Argument der Breite  $\pi - \Omega + v'$  wird demnach:

$$205^\circ 2' 23'' - 34^\circ 13' 2'' = 170^\circ 49' 21''.$$

Setzen wir nach Formeln der Vorlesung Zehn:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(\pi - \Omega + v') \\ y' &= r' \cos i \sin(\pi - \Omega + v') \\ z' &= r' \sin i \sin(\pi - \Omega + v') \\ X' &= R' \cos(\odot' - \Omega) \\ Y' &= R' \sin(\odot' - \Omega), \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \varrho' \cos(\lambda'_0 - \Omega) &= x' + X' \\ \varrho' \sin(\lambda'_0 - \Omega) &= y' + Y' \\ \varrho' \operatorname{tg} \beta'_0 &= z'. \end{aligned}$$

Im gegenwärtigen Falle werden wir auf folgende Zahlen geführt:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(170^\circ 49' 21'') = - 1,31340 \\ y' &= r' \cos(98^\circ 59' 5'') \sin(170^\circ 49' 21'') = - 0,03314 \\ z' &= r' \sin(98^\circ 59' 5'') \sin(170^\circ 49' 21'') = + 0,20959 \\ X' &= R' \cos 341^\circ 58' 37'' = + 0,95477 \\ Y' &= R' \sin 341^\circ 58' 37'' = - 0,31065 \\ \lambda'_0 - \Omega &= 223^\circ 47' 22'' \\ \lambda'_0 &= 266^\circ 27' 30'' \\ \beta'_0 &= + 22^\circ 52' 28'' \end{aligned}$$

Es sollte  $\lambda' = 266^\circ 27' 22''$ ,  $\beta' = + 22^\circ 52' 18''$  erhalten werden.

Legt man nun auf diesen für eine erste Bahnbestimmung sehr wenig in Betracht kommenden Unterschied derartiges Gewicht, dass man die Bahnberechnung mit einem verbesserten  $M$  wiederholen will, so hat man zunächst die Grösse:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'_0}{\sin(\lambda'_0 - \odot')},$$

welche hier gleich  $-0,47865$  gefunden wird, zu berechnen. Oben hatten wir:

$$m = \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} = -0,47860$$

erhalten. Bei der Wiederholung müsste deshalb:

$$m = -0,95720 + 0,47865 = -0,47855$$

angenommen und in die Formel:

$$M = \frac{t'' - t}{t' - t} \cdot \frac{m \sin(\lambda - \odot') - tg \beta}{tg \beta'' - m \sin(\lambda'' - \odot')}$$

eingesetzt werden. Durch diese Substitution wird:

$$\log M = 9,75826$$

und hat demnach gegen die erste Rechnung eine Correction von  $0,00027$  erlitten.

### Achtunddreissigste Vorlesung.

## Die Berücksichtigung der Aberration, der Parallaxe und der Bewegung der Aequinoctien bei Bahnbestimmungen.

Schon im ersten Abschnitte wurde bewiesen, dass in Folge der Aberration ein Himmelskörper unseres Sonnensystems bis auf eine in der Praxis völlig unmerkliche Grösse genau in derjenigen Richtung gesehen wird, welche zu der Zeit, als das unser Auge treffende Licht von dem Körper ausging, die Richtung der Verbindungslinie zwischen ihm und der Erde war, dass man demgemäss, wenn man die Zeit der Beobachtung um so viel vermindert, als das Licht nöthig hat, den Weg zwischen den beiden Himmelskörpern zurückzulegen, Alles so betrachten kann, als sei die Aberration des Lichtes gar nicht vorhanden. In der Regel wird nun bei ersten Bahnbestimmungen, auch wenn sie gar keine Rücksicht auf die Aberration nehmen, die Entfernung von der Erde hinreichend genau bekannt, um bei einer Wiederholung der Bahnbestimmung diese einfachste Methode in Anwendung bringen zu können, und so könnte man denn auch bei der ersten Bahnbestimmung selbst schon die ganze Rechnung mit wegen Aberration verbesserten Beobachtungszeiten wiederholen. Ein solches Verfahren würde aber die sehr fühlbare Unbequemlichkeit mit sich führen, dass man für die verbesserten Zeiten auch die Erd- oder Sonnencoordinaten von Neuem bestimmen oder, den veränderten Zeiten gemäss, ebenfalls corrigiren müsste, was zur weiteren Folge hätte, dass sogar unter den Grössen der Vorbereitungsrechnungen nicht eine einzige Zahl ungeändert bliebe. Diesen Uebelstand kann man nun aber dadurch vermeiden, dass man die Beobachtungsrichtungen von derjenigen Täuschung, welche die Bewegung der Erde verursacht, d. h. von der sogenannten Fixsternaberration befreit. Sind dann  $t, t', t''$  die Beobachtungszeiten,  $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$  die wirklichen (nicht curtirten) Distanzen des Gestirnes von der Erde, so entsprechen diese verbesserten Beobachtungen den Richtungen der Verbindungslinien zwischen den Erdörter der Zeiten  $t, t', t''$  mit den Planeten- oder Kometenörtern der Zeiten  $t - 498'',5 \mathcal{A}, t' - 498'',5 \mathcal{A}', t'' - 498'',5 \mathcal{A}''$ . Da nun die Fixsternaberration im Gegensatze zu der Planetenaberration von der Entfernung unabhängig ist, so ändern sich weder die Sonnenörter, noch die beobachteten Oerter bei

solcher Behandlungsweise der Aberration, wenn nur immer den gefundenen Abständen von der Erde gemäss die Zeiten, welchen die heliocentrischen Coordinaten des beobachteten Himmelskörpers entsprechen, verbessert werden. Schon im ersten Abschnitte haben wir gesehen, dass die volle Wirkung der Fixsternaberration in einen durch die Richtung der Erdbewegung und die Richtung nach dem Stern gelegten grössten Kreis fällt, und dass sie stets beide Richtungen um eine Grösse zu nähern strebt, welche dem Producte aus der Erdgeschwindigkeit mit dem Sinus des von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels proportional ist. Bei der Aberration spielt also der Punkt am Himmel, auf den die Erdbewegung gerichtet ist, eine ganz ähnliche Rolle, als bei der Wirkung der Parallaxe Zenith oder Nadir des Beobachtungsortes, da die Parallaxe den Ort eines Gestirnes dem Nadir um eine Grösse zu nähern strebt, welche dem Producte aus der Horizontalparallaxe mit dem Sinus der Nadirdistanz proportional ist.

Die Parallaxe kann schon bei einer ersten Bahnbestimmung und ohne alle Kenntniss der Abstände des Gestirnes von der Erde und der daraus folgenden Horizontalparallaxe in aller Strenge berücksichtigt werden. Man braucht zu dem Zwecke nur anstatt der Coordinaten des Erdmittelpunktes die des Beobachtungsortes in die Rechnung einzuführen. Die letzteren findet man offenbar dadurch, dass die auf den Erdmittelpunkt bezogenen Coordinaten des Beobachtungsortes zu den heliocentrischen des Erdmittelpunktes addirt werden. Wählt man den Aequator zur Fundamentelebene, so nehmen die zu den Sonnencoordinaten hinzuzufügenden Grössen sehr einfache Gestalt an, denn bezeichnet man mit  $s$  die Sternzeit der Beobachtung, mit  $\varphi$  die Polhöhe des Ortes und mit  $\pi$  die Sonnenparallaxe in Secunden (nach den neuesten Bestimmungen zu  $8'',80$  angenommen), mit  $X, Y, Z$  die unmittelbar den Jahrbüchern zu entnehmenden Sonnencoordinaten, so sind für die Bahnbestimmung die Grössen:

$$X = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$$

$$Y = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \cos \varphi \cdot \sin s$$

$$Z = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \sin \varphi$$

als Sonnencoordinaten zu gebrauchen, um die Parallaxe von vornherein zu berücksichtigen. Es ist nun aber noch leicht zu sehen, dass, wenn diese corrigirten rechtwinkligen Coordinaten der Sonne in Polarcordinaten umgesetzt werden, z. B. in Rectascension und Declination, der durch die Sonnenparallaxe veränderte Sonnenort erhalten wird. Auf die Parallaxe des zu berechnenden Himmelskörpers kann also in dreierlei Formen Rücksicht genommen werden: entweder corrigirt man die Sonnencoordinaten  $X, Y, Z$  auf die oben angegebene Weise, oder die geocentrischen Oerter des Kometen (Planeten) mit der aus seiner Distanz  $A$  folgenden Parallaxe, oder man bringt an den Sonnenort den Effect der Sonnenparallaxe an. Im letzteren Falle muss jedoch auch  $R$  um eine von dem Cosinus der Zenithdistanz der Sonne abhängige Grösse vermindert werden, und zwar um den Betrag:

$$\sin \pi \cdot \cos \text{Zenithdistanz},$$

wie sich leicht daraus ergibt, dass die Sonne im Zenith dem Beobachtungsorte um den Erddurchmesser, d. h. um  $\sin \pi$ , genähert ist.

Bei einer scharfen Bahnbestimmung muss auch noch auf die Bewegung der Aequinoctien von einer Beobachtung zur anderen Rücksicht genommen und auf ein festes Aequinoctium reducirt werden, wie wir in Vorlesung 14 gesehen haben. Man wählt zu letzterem gewöhnlich das mittlere Aequinoctium vom Anfange desjenigen Jahres, in welchem der Komet in sein Perihel kommt. Es ist bei den Astronomen vorwiegend

Gebrauch geblieben, den scheinbaren Ort der Beobachtungen, d. h. den mit der Nutation und der Fixsternaberration behafteten Ort anzugeben; die Reductionen demnach, welche ausser der für Parallaxe nach dem Vorhergehenden anzubringen, werden nichts Anderes sein als diejenigen Grössen, welche man nach Angabe der astronomischen Jahrbücher an den mittleren Ort für den Jahresanfang angegebenen Ort anzubringen hat, um den scheinbaren zu erhalten, nur mit entgegengesetztem Zeichen.

In Anbetracht des Umstandes, dass die weitaus grössere Zahl der Beobachtungen neuer Himmelskörper in der Form von Messungen des Rectascensions- und Declinationsunterschiedes gegen einen sehr benachbarten Stern erhalten werden, dessen Reduction vom scheinbaren auf den mittleren Ort bis auf eine äusserst kleine Grösse dieselbe sein wird, wie die des zu bestimmenden Gestirnes, wird man sich ausserordentlich häufig erlauben dürfen, der Rechnung ganz einfach diejenigen Positionen zu Grunde zu legen, welche durch Anbringung des beobachteten Rectascensions- und Declinationsunterschiedes an den mittleren Ort des Vergleichsternes erhalten werden. Nur, wenn der letztere nicht ganz benachbart war, wie wohl bei Meridianbeobachtungen vorzukommen pflegt, wird man zu einer Ausnahme genöthigt sein, d. h. die Reduction des Vergleichsternes und die des Beobachtungsobjectes verschieden setzen müssen. Die so behandelten Beobachtungen geben, wenn man noch ausserdem auf angegebene Art die Parallaxe berücksichtigt, die Bahnelemente, bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges, also gerade das, was man haben will. Man kann dann sogar mit diesen festen Elementen die Ephemeride berechnen; nur muss man, wenn sie auf das Aequinoctium des Tages bezogen und auf die gewöhnliche, dem Leser schon bekannte Art mit den Beobachtungen vergleichbar sein soll, an die Oerter der Ephemeride noch die Reduction vom mittleren auf den scheinbaren Ort, wie ihn die Jahrbücher geben, jedoch mit Ausschluss der Glieder für die Fixsternaberration, anbringen.

Diese letztere Form der Ephemeridenrechnung, bei welcher man ein unveränderliches System Gauss'scher Constanten anwenden kann, empfiehlt sich vor dem früher erklärten durch grössere Bequemlichkeit und Uebersichtlichkeit.

---

## Neununddreissigste Vorlesung.

### Die Olbers'sche Methode für den Aequator als Fundamentalebene umgeformt.

Die jetzige Einrichtung der Jahrbücher kommt, wie schon an anderer Stelle bemerkt wurde, dem Gebrauche des Aequators als Fundamentalebene so sehr entgegen, dass die Ekliptik einen grossen Theil ihrer Bequemlichkeit verloren hat. Wo die Ekliptik ohne Weiteres den Vortheil bietet, durch das Nullwerden der *Z*-Coordinate des Sonnenortes die Formeln zu vereinfachen, scheint sich allerdings auch bei der jetzigen Einrichtung der Jahrbücher die Verwandlung der Beobachtungen in Länge und Breite noch zu lohnen. In Strenge besteht aber jener Vortheil fast niemals, wegen der Sonnenbreite, welche nach der positiven sowohl als der negativen Seite ganz nahe 1'' erreichen kann, und ausserdem, wie wir wissen, wegen der Parallaxe. Nur wo man diese Correctionen vernachlässigen will, und dies ist allerdings bei ersten Bestimmungen in der Regel

erlaubt, dürfte sich die Ekliptik unbedingt empfehlen; für scharfe Rechnungen und diejenigen besonderen Fälle dagegen, wo schon auf die erste Bestimmung ein höherer Grad von Sorgfalt und Genauigkeit zu verwenden ist, scheint der Aequator als Fundamentalebene mehr Aufmerksamkeit zu verdienen, als ihm bis jetzt, trotz der sehr zu seinen Gunsten veränderten Einrichtung der astronomischen Jahrbücher, zu Theil geworden ist. Hierher ist besonders zu rechnen, dass die Jahrbücher jetzt auch die Sonnen-coordinaten für das mittlere Aequinoctium des Jahresanfangs geben.

Man könnte vielleicht zu Gunsten der Ekliptik noch geltend machen, dass doch schliesslich die Bahnelemente auf dieselbe bezogen zu werden pflegen, wogegen wieder zu bemerken sein würde, dass man für den doch vorwiegend wichtigen Zweck der Ephemeridenberechnung der Gauss'schen Constanten für den Aequator bedarf, und dass es ebenso leicht ist, die Elemente für die Ekliptik aus den Gauss'schen Constanten, wie diese aus jenen zu berechnen. Nur besteht hier auch noch für den Aequator der Vortheil, dass sich aus den Zahlen einer mit dieser Fundamentalebene ausgeführten Bahnbestimmung sofort auch die Gauss'schen Constanten ergeben, während man im anderen Falle erst von den ursprünglich immer auf den Aequator bezogenen Beobachtungen durch Verwandlung der Rectascensionen und Declinationen in Längen und Breiten auf die Ekliptik und von dieser schliesslich wieder auf den Aequator zurückgehen muss.

Aus den eben angeführten Gründen wollen wir denn die Ekliptik hier nicht in dem Grade bevorzugen, wie es in den meisten Schriften dieser Art zu geschehen pflegt, und demnach untersuchen, wie sich die Olbers'sche Methode für den Aequator als Fundamentalebene gestaltet.

Die Hauptaufgabe wird hier darin bestehen, das Verhältniss  $\frac{q''}{q}$  oder das Olbers'sche  $M$  möglichst unmittelbar durch Rectascensionen und Declinationen auszudrücken, was wir aber jetzt auf eine andere und allgemeiner anwendbare Art thun wollen, als früher. In der 26. Vorlesung kam es uns vor Allem darauf an, die Kenntniss jenes Verhältnisses als nahe und fast unmittelbare Folge des Olbers'schen Principis darzulegen. Zu unserem jetzigen Zwecke können wir an die Bemerkung anknüpfen, dass für irgend drei Bogen  $A, B$  und  $C$  folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(B - A) \sin C + \sin(C - B) \sin A + \sin(A - C) \sin B &= 0 \\ \sin(B - A) \cos C + \sin(C - B) \cos A + \sin(A - C) \cos B &= 0 \end{aligned}$$

existiren, wovon man sich sehr leicht durch Auflösung der Klammern überzeugt. Bezeichnen wir nun die doppelte Dreiecksfläche zwischen den Radienvectoren  $r'$  und  $r''$ , d. h. die Grösse  $r' r'' \sin(v'' - v')$  mit  $n$ , die doppelte Dreiecksfläche zwischen  $r$  und  $r'$ , d. h.  $r r' \sin(v' - v)$  mit  $n''$ ,  $r r'' \sin(v'' - v)$  mit  $n'$ , und berücksichtigen, dass auf irgend welche durch die Sonne gelegte Fundamentalebene bezogen, die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten  $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$  durch die Formeln:

$$\begin{aligned} x &= a' r \sin(A' + v) & x' &= a' r' \sin(A' + v') & x'' &= a' r'' \sin(A' + v'') \\ y &= b' r \sin(B' + v) & y' &= b' r' \sin(B' + v') & y'' &= b' r'' \sin(B' + v'') \\ z &= c' r \sin(C' + v) & z' &= c' r' \sin(C' + v') & z'' &= c' r'' \sin(C' + v'') \end{aligned}$$

erhalten werden, so ist nach obigen Identitäten:

$$\begin{aligned} n' x' &= n x + n'' x'' \\ n' y' &= n y + n'' y'' \\ n' z' &= n z + n'' z'' \end{aligned}$$

oder, wenn  $\frac{n}{n'} = c, \frac{n''}{n'} = c''$  zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} x' &= cx + c''x'' \\ y' &= cy + c''y'' \\ z' &= cz + c''z'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Letztere Gleichungen bilden den Ausgangspunkt sehr vieler hierher einschlagender Untersuchungen, so auch der uns jetzt vorliegenden Aufgabe. Bedeuten nämlich  $\alpha, \alpha', \alpha''$  die drei beobachteten Rectascensionen,  $\delta, \delta', \delta''$  die Declinationen,  $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$  die zugehörigen Sonnenkoordinaten, aus denen das Verhältniss der für den Aequator eurtirten Abstände  $\varrho$  und  $\varrho''$  gefunden werden soll, so haben wir zunächst die bekannten Gleichungen:

$$\frac{y' + Y'}{x' + X'} = \operatorname{tg} \alpha'$$

$$\frac{z' + Z'}{x' + X'} = \operatorname{sec} \alpha' \operatorname{tg} \delta'$$

oder, nach dem Obigen:

$$\frac{cy + c''y'' + Y'}{cx + c''x'' + X'} = \operatorname{tg} \alpha' \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{cz + c''z'' + Z'}{cx + c''x'' + X'} = \operatorname{sec} \alpha' \cdot \operatorname{tg} \delta' \dots \dots \dots (3)$$

Drückt man hier nun noch  $x, x', y, y', z, z''$  durch  $\varrho$  und  $\varrho''$  aus, da:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \alpha - X & x' &= \varrho'' \cos \alpha' - X'' \\ y &= \varrho \sin \alpha - Y & y' &= \varrho'' \sin \alpha' - Y'' \\ z &= \varrho \operatorname{tg} \delta - Z & z' &= \varrho'' \operatorname{tg} \delta'' - Z'', \end{aligned}$$

so erhält man aus (2) und (3) zwei Gleichungen zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$ . Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} M &= (X \sin \alpha' - Y \cos \alpha') \cdot \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha') \\ M' &= (X' \sin \alpha' - Y' \cos \alpha') \cdot \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha') \\ M'' &= (X'' \sin \alpha' - Y'' \cos \alpha') \cdot \operatorname{cosec}(\alpha'' - \alpha'), \end{aligned}$$

so geht Gleichung (2) in die folgende über:

$$c'' \varrho'' = M' - Mc - M'' c'' - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \cdot c \varrho \dots \dots \dots (4)$$

Der Gleichung (3) kann man eine ganz analoge Gestalt geben; setzt man:

$$\begin{aligned} N &= X \operatorname{tg} \delta' - Z \cos \alpha' \\ N' &= X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha' \\ N'' &= X'' \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos \alpha', \end{aligned}$$

so hat man:

$$(\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') c'' \varrho'' = N' - Nc - N'' c'' - (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta') c \varrho (5)$$

Aus diesen beiden Gleichungen (4) und (5) könnte man nun die Grösse  $c''$  eliminiren, in der Weise, dass die daraus resultirende Gleichung nur das Verhältniss  $\frac{c}{c''}$  oder  $\frac{n}{n''}$  als einzigen nicht in aller Strenge bekannten Factor von  $\varrho$  enthielte. Erlaubten wir uns nun auch hier, dieses Verhältniss der Dreiecksflächen für die Erde und für den Kometen gleich gross zu setzen, so kämen wir auf einen für jede beliebige Fundamentelebene gültigen und brauchbaren Ausdruck. Da nun aber hier die  $X, Y, Z$  u. s. w. wegen der in voriger Vorlesung angegebenen Berücksichtigung der Parallaxe nicht mehr den Punkten einer Planetenbahn entsprechen, indem sie sich nicht auf den Erdmittelpunkt beziehen, so würden wir hier mit Anwendung des Olbers'schen Principis ohne Correction eine Inconsequenz begehen. Deshalb müssen wir, wenn sich die Berücksichtigung der Parallaxe

und der Aberration vollständig lohnend zeigen soll, der Gleichung zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  eine grössere Genauigkeit geben, als in der Olbers'schen Annahme enthalten ist.

Vorläufig aber machen wir hier von den Gleichungen (4) und (5) unmittelbar Gebrauch; von der ersteren, wenn die Rectascension des Kometen sich stärker ändert, als die Declination, von der letzteren, wenn das Gegentheil der Fall ist. Weiter unten werden wir aus (5) eine Gleichung ableiten, welche vollkommen streng den Olbers'schen Ausdruck für  $\frac{\varrho''}{\varrho}$  als speciellen Fall enthält.

Um in den genannten Gleichungen  $c$  und  $c''$  auf eine vortheilhafte Weise auszudrücken, führen wir die Verhältnisse des Sectors zum Dreieck ein.

Bezeichnet man das dem Zeitintervalle  $t'' - t'$  entsprechende Verhältniss  $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$  mit  $\eta$ , das dem Intervalle  $t' - t$  entsprechende mit  $\eta''$ , das für  $t'' - t$  mit  $\eta'$ , so ist offenbar:

$$\begin{aligned} n &= k (t'' - t') \eta \cdot \sqrt{p} \\ n'' &= k (t' - t) \eta'' \cdot \sqrt{p} \\ n' &= k (t'' - t) \eta' \cdot \sqrt{p}, \end{aligned}$$

demnach:

$$\begin{aligned} c &= \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \\ c'' &= \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'} = \frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'}. \end{aligned}$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (4) und (5) in die folgenden über:

$$\varrho'' = M' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - M \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} - M'' \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \cdot \dots \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} - N'' \\ &- (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta') \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \dots \quad (7)$$

welche völlig streng sind, aber auch die nicht völlig bekannten Grössen  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  enthalten. Aus unseren Entwicklungen in der 35. Vorlesung, speciell der Gleichung oder Reihenentwicklung (5) geht hervor, dass  $\eta$  von  $r' + r''$ ,  $\eta'$  von  $r + r''$ ,  $\eta''$  von  $r + r'$  abhängig ist und sofort bekannt wird, sobald es diese Summen werden. Zu bemerken ist, dass die Verhältnisse  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  nur um kleine Grössen zweiter Ordnung von der Einheit verschieden sind, durch welchen Umstand es ermöglicht wird, wenn man will, das unten zu beschreibende Verfahren der successiven Verbesserung schon während der systematischen Versuche für die  $\varrho$  und  $\varrho''$ , welche die Olbers'sche Methode vorschreibt, durchzuführen, im Gegensatze zu der Verbesserung des Olbers'schen  $M$  nach ausgeführter Bahnbestimmung. Zugleich erhält man Gelegenheit, an die Zeiten die Verbesserung wegen der Aberration anzubringen.

Dass die Gleichungen (6) und (7) überhaupt auch zur Verbesserung des Olbers'schen Verhältnisses gut gebraucht werden können, liegt auf der Hand; wir wollen es aber hier doch noch an dem früher behandelten  $M$  des zweiten Kometen von 1813 erläutern. Wo die beobachteten geocentrischen Längen und Breiten gebraucht werden, wird zur Anwendung von (6) etwas einfacher:

$$\begin{aligned} M &= R \sin(\lambda' - \odot) \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda') \\ M' &= R' \sin(\lambda' - \odot') \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda') \\ M'' &= R'' \sin(\lambda' - \odot'') \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda'), \end{aligned}$$

und wenn wir (7) anwenden wollen:

$$\begin{aligned} N &= R \operatorname{tg} \beta' \cos \odot \\ N' &= R' \operatorname{tg} \beta' \cos \odot' \\ N'' &= R'' \operatorname{tg} \beta' \cos \odot''. \end{aligned}$$

Für das in Rede stehende Beispiel gestaltet sich die Aufstellung der Gleichung (6) wie folgt:

Es wird:

$$\begin{aligned} \log M &= 0,74555 \\ \log M' &= 0,72240 \\ \log M'' &= 0,69108 \\ \log \frac{\sin (\lambda - \lambda')}{\sin (\lambda'' - \lambda')} &= 9,69999_{\text{n}}. \end{aligned}$$

Ferner ist nach früher geführter Rechnung:

$$\begin{aligned} r &= 1,37708 \\ r' &= 1,33042 \\ r'' &= 1,29027; \end{aligned}$$

da nun  $\frac{2 \vartheta}{(r' + r'')^{\frac{1}{2}}} = 0,057191$ , welche letztere Zahl für  $\nu$  in die Reihenentwicklung (5) der 35. Vorlesung gesetzt werden muss, um  $\eta$  zu erhalten, so ergibt sich:

$$\eta = 0,99891, \quad \log \eta = 9,99953,$$

was auch der Tafel XI im Anhang entnommen werden kann.

Ebenso findet sich:

$$\begin{aligned} \eta' &= 0,99587, & \log \eta' &= 9,99820, \\ \eta'' &= 0,99903, & \log \eta'' &= 9,99958, \end{aligned}$$

also, da:  $\log \vartheta = 9,08392, \quad \log \vartheta' = 9,38323, \quad \log \vartheta'' = 9,08049,$

$$\begin{aligned} \log \vartheta \eta &= 9,08345 \\ \log \vartheta' \eta' &= 9,38143 \\ \log \vartheta'' \eta'' &= 9,08007, \end{aligned}$$

wird die numerisch ausgedrückte Gleichung (6):

$$\varrho'' = 0,04278 + 0,50509 \cdot \varrho.$$

Wir hatten früher gefunden, dass  $\log \varrho$  sehr nahe gleich 9,80366 sei; nach der eben aufgestellten Relation gehört dazu:

$$\log \varrho'' = 9,56130,$$

also ist hiernach der verbesserte Logarithmus des Olbers'schen  $M = 9,75764$ .

Die Uebereinstimmung der aus den Gleichungen (6) und (7) folgenden Relationen zwischen  $\varrho''$  und  $\varrho$  mit der nach der Carlini'schen Verbesserungsmethode folgenden ist davon abhängig, ob die Länge und die Breite der zweiten Beobachtung einer und derselben Parabel entsprechen. Wenn wir die Gleichung (7) zur Aufstellung jener Relation benutzen wollen, was hier in Anbetracht der grösseren Bewegung in Breite das Genauere ist, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} \log N &= 9,60476 \\ \log N' &= 9,58541 \\ \log N'' &= 9,55840 \\ \log (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') &= 8,93215 \\ \log (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') &= 8,64061_{\text{n}} \end{aligned}$$

und endlich:

$$q'' = 0,03638 + 0,51504 q;$$

dem Werthe  $\log q = 9,80366$  entspricht hiernach  $\log q'' = 9,56122$ ; folglich ergibt sich aus Gleichung (5) der Logarithmus des Olbers'schen  $M = 9,75756$ <sup>1)</sup>.

Nach dieser Abschweifung über die Verbesserung des Verhältnisses  $\frac{q''}{q}$  kehren wir zu unserem Hauptthema, der strengen Bestimmung einer Kometenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen, welche in Rectascension und Declination gegeben sein sollen, zurück.

Es lässt sich zu dem Zwecke folgender Gang der Rechnung vorschlagen.

Man macht zuerst eine Annahme über  $q$ , welche dem Werthe  $r = 1$  entspricht, setzt gleichzeitig für die Berechnung von  $\eta, \eta', \eta''$   $r = 1, r' = 1, r'' = 1$ , und bestimmt das zu  $q$  gehörige  $q''$  entweder nach der Formel (6) oder nach (7), je nachdem der Gebrauch der Rectascensionen, oder der der Declinationen eine grössere Genauigkeit verspricht. Aus  $q''$  ergibt sich dann auf einfache Weise  $r''$  und nach der Encke'schen Hilfstafel die zu  $q$  und  $q''$ , oder  $r$  und  $r''$  gehörige Sehne  $\kappa$ . Darauf berechnet man die heliocentrische Bewegung ( $v'' - v$ ), deren Cosinus wir in der 18. Vorlesung mit ( $r r''$ ) bezeichnet haben. Die Gleichungen (4) oder (5) der genannten Vorlesung, d. h. die Gleichung:

$$(r r'') r r'' = (R R'') R R'' + (R q'') R q'' + (R'' q) R'' q + (q q'') q q'',$$

mit Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnung geschrieben, liefert hier mit aller nur zu wünschenden Schärfe das Product der Radienvectoren  $r r''$ , da das gegen die Anwendung derselben bei kleiner geocentrischer Bewegung geäusserte Bedenken jetzt wegfällt. Denn man kann nun nicht mehr, wie früher der Fall war, das Beobachtungsmaterial merklich ändern, ohne auch auf das Resultat für  $r r''$  erheblich einzuwirken.

Den so gefundenen Logarithmus des  $r r''$  zieht man von demjenigen, welcher der Hypothese für  $q$  und  $q''$  entspricht, ab; die ganze Differenz betrachtet man als die an den angenommenen  $\log r$  anzubringende Verbesserung. Sollte dieselbe zufälligerweise schon bei dem ersten Versuche klein ausfallen, so lohnt sich die Mühe, gleich auch  $r'$  aus der Formel:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (cx + c'x'')^2 + (cy + c'y'')^2 + (cz + c'z'')^2,$$

und hieraus dann noch  $q'$  zu berechnen. Die drei Abstände von der Erde  $q \sec \delta, q' \sec \delta', q'' \sec \delta''$  dienen dann dazu, die Beobachtungszeiten wegen der Aberration zu corrigiren; die  $r, r', r''$  ergeben mit gesteigerter Schärfe  $\eta, \eta', \eta''$  und ermöglichen auch, eine genauere Relation zwischen  $q$  und  $q''$  für die weiteren Versuche in Anwendung zu bringen.

Zeigt sich hingegen der erste Versuch, indem sich aus Gleichung (5) der 18. Vorlesung ein ganz anderes  $r r''$  ergibt, als den zu Grunde gelegten Werthen entspricht, noch sehr von der Wahrheit entfernt, so wird man sich erlauben, die Correction wegen Aberration noch zu unterlassen, und für die eine Berechnung von  $\eta, \eta', \eta'', r' = \frac{1}{2}(r + r'')$  zu setzen. Sollten die beiden Zwischenzeiten sich aber hierfür zu weit von der Gleichheit entfernen, so interpolire man  $r'$  im Verhältniss der Zwischenzeiten, setze demnach:

$$r' = \frac{\vartheta}{\vartheta'} r + \frac{\vartheta''}{\vartheta'} r''.$$

<sup>1)</sup> Im Berliner Jahrbuche von 1833 findet Encke nach ebenfalls beinahe strengen Formeln in diesem Falle einmal  $\log M = 9,75863$ , ein anderes Mal  $\log M = 9,75824$ , welcher letztere Werth mit dem nach der Carlini'schen Verbesserungsmethode gefundenen  $\log M = 9,75826$  fast ganz übereinkommt. Die Unterschiede sind bei einer mit fünf Stellen geführten Rechnung zu erwarten.

Dieser letztere Ausdruck wird sich häufig auch während der ganzen Rechnung vollständig genügend erweisen.

Erscheint die Zweideutigkeit, welche der Bestimmung von  $\varrho$  aus  $r$ , oder von  $\varrho''$  aus  $r''$  anhaftet, störend, so wird man es vorziehen, die obige Gleichung (5) in Beziehung auf  $\varrho \varrho''$  aufzulösen, und den dafür gefundenen Werth mit dem Producte der angenommenen Werthe zu vergleichen. Im Uebrigen bleibt der Gang der Rechnung wie beschrieben wurde. Der Leser darf bei der Gleichung (5) aus Vorlesung 18 nicht übersehen, dass darin  $\varrho$  und  $\varrho''$  die wirklichen, nicht curtirten Abstände bedeuten.

In den meisten Fällen wird man bei der eben beschriebenen Art, bei welcher die Verbesserung des Olbers'schen Verhältnisses mit der Auflösung der Lambert'schen Gleichung vereinigt wird, ziemlich schnell definitive Werthe bekommen; übrigens sind die Formeln dieser und der folgenden Vorlesung mehr für einen Noth- und Ausnahmefall der Olbers'schen Methode geeignet, und ausserdem hier als Vorbereitungen zu einer weit vollkommeneren Form zu betrachten.

### Vierzigste Vorlesung.

#### Zusammenstellung der Formeln für eine auf den Aequator zu beziehende Kometenbahnberechnung.

Es seien:

$\alpha, \alpha', \alpha''$  die zu den Zeiten  $t, t', t''$  gehörigen, von der bekannten Reduction vom mittleren Aequinoctium des Jahresanfanges auf das scheinbare Aequinoctium wieder befreiten Rectascension,  $\delta, \delta', \delta''$  die auf eben solche Art behandelten Declinationen des Gestirns,  $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$  die zugehörigen, auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen, wegen der Lage des Beobachtungsortes verbesserten Sonnenkoordinaten. Um daraus die heliocentrischen Coordinaten des Gestirns, bezogen auf das genannte mittlere Aequinoctium, mit aller Schärfe zu finden, hat man nun zunächst folgende Vorbereitungsrechnungen, betreffend die Grössen  $R^2, R'^2, R''^2, (RR''), (R\varrho''), (R''\varrho), (\varrho\varrho'')$ , desgleichen  $\cos \chi$  oder  $(R\varrho)$  und  $\cos \chi''$  oder  $(R''\varrho'')$  zu erledigen:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ R'^2 &= X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \\ R''^2 &= X''^2 + Y''^2 + Z''^2 \\ RR''(RR'') &= XX'' + YY'' + ZZ'' \\ -R \cdot (R\varrho'') &= X \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z \sin \delta'' \\ -R'' \cdot (R''\varrho) &= X'' \cos \delta \cos \alpha + Y'' \cos \delta \sin \alpha + Z'' \sin \delta \\ (\varrho\varrho'') &= \sin \delta \sin \delta'' + \cos \delta \cos \delta'' \cos (\alpha'' - \alpha) \\ -R \cdot (R\varrho) &= -R \cos \chi = X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ -R'' \cdot (R''\varrho'') &= -R'' \cos \chi'' = X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta'' \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Nachher berechne man, wenn die geocentrische Bewegung in Rectascension den grösseren Bogen umfasst, die Relation zwischen den auf den Aequator projecirten Abständen  $\varrho$  und  $\varrho''$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha'' - \alpha') \varrho'' &= M' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - M \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- M'' - \sin(\alpha - \alpha') \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

wobei  $\eta, \eta', \eta''$  die in der 39. Vorlesung erklärte Bedeutung haben, die Grössen  $M, M', M''$  aber der Reihe nach durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M &= (X \sin \alpha' - Y \cos \alpha') \\ M' &= (X' \sin \alpha' - Y' \cos \alpha') \\ M'' &= (X'' \sin \alpha' - Y'' \cos \alpha') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

definiert werden, und als nur Gegebenes enthaltend, in die Vorbereitungsrechnung mit aufzunehmen sind.

Entspricht dagegen der Bewegung in Declination ein grösserer Bogen, so bediene man sich statt der Gleichung (2) der folgenden:

$$\left. \begin{aligned} (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- N'' - (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta') \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

worin die Grössen:

$$\left. \begin{aligned} N &= X \operatorname{tg} \delta' - Z \cos \alpha' \\ N' &= X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha' \\ N'' &= X'' \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos \alpha' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ebenfalls schon in den Vorbereitungsrechnungen vollständig zu bestimmen sind.

Man mache nun über  $\varrho$  eine zweckmässig scheinende Hypothese und berechne:

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 \sec^2 \delta + 2 R \varrho \sec \delta \cos \chi \dots \dots \dots (6)$$

Dem hieraus folgenden Werthe von  $r$  setzt man zuerst auch  $r'$  und  $r''$  gleich, und mit diesen Werthen bestimme man auf die oben beschriebene Weise die Grössen  $\eta, \eta', \eta''$  in (2) oder (4). Man ist jetzt im Stande, das zu  $\varrho$  gehörige  $\varrho''$  nach (2) oder (4) zu berechnen, aus welchem wiederum  $r''$  durch die Formel:

$$r''^2 = R''^2 + \varrho''^2 \sec^2 \delta'' + 2 R'' \varrho'' \sec \delta'' \cos \chi'' \dots \dots \dots (7)$$

zu bestimmen ist. Es kommt darauf die Encke'sche Hülftafel für die Lambert'sche Gleichung in Anwendung, welche aus  $\partial'$  und  $r + r''$  die Sehne  $\kappa$  liefert. Zur Prüfung der Richtigkeit des angenommenen Werthes von  $\varrho$  dient dann die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} (\varrho \varrho'') \varrho \varrho'' \sec \delta \sec \delta'' &= \frac{1}{2}(r^2 + r''^2 - \kappa^2) - (R R'') R R'' \\ &- (R'' \varrho) R'' \varrho \sec \delta - (R \varrho'') R \varrho'' \sec \delta'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

aus welcher  $\varrho \varrho''$  übereinstimmend mit den der Gleichung (2) oder (4) gemäss angenommenen Werthen von  $\varrho$  und  $\varrho''$  sich ergeben müsste. Aus einem sich zeigenden Unterschiede leitet man auf die oben beschriebene Art ein verbessertes  $\varrho$  ab, um damit denselben Versuch zu wiederholen.

Ist man durch die successiven Verbesserungen der Wahrheit schon sehr nahe gekommen, so berechnet man, wenn man sehr grosse Schärfe in die Bestimmung zu legen wünscht,  $r'$  aus der Gleichung:

$$(\partial' \eta' r')^2 = [(\partial \eta)^2 + \partial \partial'' \eta \eta''] r^2 + [(\partial'' \eta'')^2 + \partial \partial'' \eta \eta''] r''^2 - \partial \partial'' \eta \eta'' \kappa^2 \dots (9)$$

Genügt geringere Genauigkeit, so setzt man:

$$\partial' r' = \partial r + \partial'' r'' \dots \dots \dots (10)$$

Aus  $r'$  bestimmt man, wenn man der Rechnung die volle Schärfe bewahren will,  $\varrho'$  unter Anwendung der Formel:

$$\varrho' \sec \delta' = - R' \cos \chi' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} \dots \dots \dots (11)$$

wobei:

$$- R' \cos \chi' = X' \cos \delta' \cos \alpha' + Y' \cos \delta' \sin \alpha' + Z' \sin \delta',$$

bei etwas geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit kann man auch hier einfacher:

$$\vartheta' \varrho' = \vartheta \varrho + \vartheta'' \varrho'' \dots \dots \dots (12)$$

zu setzen sich erlauben, was zugleich dazu dienen kann, im anderen Falle das Vorzeichen der Wurzelgrösse in Gleichung (11) zu entscheiden. Die weitere Rechnung hat man dann mit den Zeiten:

$$t - 498^s,5 \varrho \sec \delta \quad t' - 498^s,5 \varrho' \sec \delta' \quad t'' - 498^s,5 \varrho'' \sec \delta''$$

zu führen, um die Aberration zu berücksichtigen; demgemäss sind auch  $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$  zu ändern.

Zu bemerken ist dabei jedoch, dass die Gleichungen (10) und (12) nur brauchbar sind, solange die äusseren Beobachtungen auf derselben Seite des Perihels liegen, unbrauchbar dagegen, wenn auf entgegengesetzten Seiten.

Hat man die definitiven Werthe von  $\varrho$  und  $\varrho''$ ,  $r$  und  $r''$  und aus  $\kappa$  noch den heliocentrischen Bogen  $v'' - v$  gefunden, so berechnet man zunächst auf schon bekannte Weise die Epoche des Perihels  $T$ , den Radius vector des Perihels  $q$ , sowie die wahren Anomalien  $v$  und  $v''$ . Diesem Geschäfte kann man dann fast unmittelbar die Berechnung der Ephemeride folgen lassen, da sich, wie wir wissen, die heliocentrischen Coordinaten auf die Form:

$$\begin{aligned} x &= a' r \sin(A' + v) \\ y &= b' r \sin(B' + v) \\ z &= c' r \sin(C' + v) \end{aligned}$$

bringen lassen, deren Constanten  $a', b', c', A', B', C'$ , sich deshalb aus  $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ ,

$\frac{x''}{r''}, \frac{y''}{r''}, \frac{z''}{r''}$ ,  $v$  und  $v''$  auf folgende Weise bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} a' \sin [A' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{x''}{r''} + \frac{x}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ a' \cos [A' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{x''}{r''} - \frac{x}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \\ b' \sin [B' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{y''}{r''} + \frac{y}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ b' \cos [B' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{y''}{r''} - \frac{y}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \\ c' \sin [C' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{z''}{r''} + \frac{z}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ c' \cos [C' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left( \frac{z''}{r''} - \frac{z}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Will man die Ephemeride, wie das in der Regel bei der ersten Berechnung eines Himmelskörpers zu sein pflegt, nur zum Zwecke des Aufsuchens und der Vorausberechnung seiner Helligkeitsverhältnisse (da nach der Erfahrung auch bei Kometen nahezu die Helligkeit dem Quadrate des Productes der Entfernungen von der Erde und von der Sonne sich umgekehrt proportional zeigt) benutzen, so kann man auch die zu berechnenden Oerter sämmtlich auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges beziehen. Es sind dann also mit den heliocentrischen Coordinaten die Sonnencoordinaten,

bezogen auf dasselbe Aequinoctium, zu verbinden. Im anderen Falle, wenn die Ephemeride auch zu scharfen Vergleichen zwischen Rechnung und Beobachtung dienen soll, und dieses Geschäft auf die gewöhnliche Weise ausgeführt werden soll, hat man den berechneten mittleren Oertern noch die Reduction auf das wahre Aequinoctium des Beobachtungsmomentes hinzuzufügen. Die Fixsternaberration hat man wegzulassen, da diese nachher bei der Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride in der uns bekannten anderen Art berücksichtigt wird<sup>1)</sup>.

Um endlich mit leichter Mühe auch die Elemente  $\Omega$ ,  $\pi - \Omega$  und  $i$ , bezogen auf die Ekliptik, zu haben, braucht man nur die Gleichungen (8) und (9) der 19. Vorlesung in Anwendung zu bringen. Jene Gleichungen machen keinen Unterschied zwischen rechtläufigen und rückläufigen Kometen; man erhält bei letzteren einfach einen im zweiten Quadranten liegenden Werth von  $i$ , und für  $\pi - \Omega$  das  $\Omega - \pi$  der anderen Zählungs- und Bezeichnungsweise rückläufiger Kometen; will man auf diese andere übergehen, so hat man daher  $i$  in  $180^\circ - i$ ,  $\pi - \Omega$  in  $360^\circ - (\pi - \Omega)$  zu verwandeln, und den Elementen noch das Zeichen R. oder Retrograd hinzuzufügen.

Da hier die Bezeichnung in einzelnen Stücken von der in der 19. Vorlesung abweicht, und der Vollständigkeit halber mögen hier jene Vorschriften zur Berechnung von  $\pi - \Omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$  noch einmal aufgeführt werden. Bedeutet  $\varepsilon$  die Schiefe der Ekliptik zur Epoche des gewählten Aequinoctiums, so berechne man einen Hülfswinkel  $\psi$  aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b'}{c'}$$

dann hat man:

$$\operatorname{tg} [1/2 (B' + C') - (\pi - \Omega)] = \frac{\cos(\varepsilon - \psi)}{\cos(\varepsilon + \psi)} \cdot \operatorname{tg} 1/2 (B' - C') \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \Omega &= a' \sin [A' - (\pi - \Omega)] \\ - \sin \Omega \cos i &= a' \cos [A' - (\pi - \Omega)] \\ \sin \Omega &= b' \sec \varepsilon \sin [B' - (\pi - \Omega)] \\ &= c' \operatorname{cosec} \varepsilon \sin [C' - (\pi - \Omega)] \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

In welchem Quadranten  $\pi - \Omega$  und  $\Omega$  liegen, muss hier, da wir die geocentrischen Breiten nicht unmittelbar haben, auf etwas andere Art, als in Vorlesung 19 entschieden werden, nämlich dadurch, dass eine der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} b' \cos [B' - (\pi - \Omega)] &= \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \\ c' \cos [C' - (\pi - \Omega)] &= \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \end{aligned}$$

zugezogen wird. Ist noch eine derselben befriedigt, so ist in (14) der Quadrant von  $\pi - \Omega$  richtig gewählt; im anderen Falle sind  $\pi - \Omega$  und  $\Omega$  um  $180^\circ$  zu ändern. Das auf solche Weise bestimmte System wird die Gauss'schen Constanten wiedergeben, daher die Beobachtungen darstellen, und man hat somit auch die Elemente, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges.

<sup>1)</sup> Nach der Bezeichnung des Berliner Jahrbuches hat man also an die mittleren Rectascensionen noch die Grössen  $A a$ ,  $B b$ , an die Declinationen die Grössen  $A a'$ ,  $B b'$  anzubringen.

Einundvierzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel zu Vorlesung Vierzig<sup>1)</sup>.

Der Komet 1857. III. wurde vom Herrn Professor Förster am Berliner Refractor wie folgt beobachtet:

	Mittlere Berliner Zeit	Rectascension	Declination
1857. Juni 23.	12 <sup>h</sup> 56' 53"	53° 6' 53",4	+ 40° 59' 38",5
27.	12 56 37	61 20 51 ,1	+ 44 53 50 ,1
Juli 2.	13 27 37	77 2 50 ,6	+ 48 47 8 ,8.

Wir führen zunächst an diesen Beobachtungen die Reduction vom scheinbaren Orte auf den mittleren aus, d. h. beziehen die Beobachtungen auf das mittlere Aequinoctium des Jahres 1857,0, indem wir sie zugleich von der Fixsternaberration befreien. Die Jahrbücher geben die dazu gehörigen Formeln und Zahlen. Dem Jahrbuche (hier dem Nautical Almanac) entnehmen wir auch noch die Sonnenkoordinaten für die Beobachtungszeiten und bringen daran zur Berücksichtigung der Parallaxe die in der 38. Vorlesung angegebenen, von der Sternzeit und Polhöhe des Beobachtungsortes abhängigen Correctionen an, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{an den X die Correction} &= - \frac{\pi}{206264,8} \cos \varphi \cos s \\ \text{„ „ Y „ „} &= - \frac{\pi}{206264,8} \cos \varphi \sin s \\ \text{„ „ Z „ „} &= - \frac{\pi}{206264,8} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Wir wollen diese leichten Reductionen hier nicht in das Einzelne durchführen, sondern gleich das auf solche Weise von fremdartigen Beimischungen befreite Material der Rechnung selbst hier anführen.

$t, t', t''$ . . . .	Juni 23,53950	Juni 27,53932	Juli 2,56085
$\alpha, \alpha', \alpha''$ . . . .	53° 6' 51"	61° 20' 48"	77° 2' 44"
$\delta, \delta', \delta''$ . . . .	40 59 35	44 43 46	48 47 4
$X, X', X''$ . . . .	— 0,04203	— 0,10953	— 0,19350
$Y, Y', Y''$ . . . .	0,93183	0,92730	0,91569
$Z, Z', Z''$ . . . .	0,40432	0,40235	0,39731.

Die Vorbereitungsrechnungen nach den Gleichungen (1) der vorigen Vorlesung ergeben nun nach (1):

$$\begin{aligned} R^2 &= 1,03355 & (R'' q) R'' \sec \delta &= - 0,96155 \\ R'^2 &= 1,03377 & (q q'') \sec \delta \sec \delta'' &= 1,90622 \\ R''^2 &= 1,03378 & (R q) R &= R \cos \chi = - 0,80873 \\ (R R'') R R' &= 1,02204 & (R'' q'') R'' &= R'' \cos \chi'' = - 0,85827, \\ (R q'') R \sec \delta'' &= - 1,36029 & & \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Da es hier bloss darauf ankommt, den Gang der Rechnung zu veranschaulichen, so wurde von einer Umrechnung des Beispiels mit den modernen Werthen der Sonnenparallaxe und Aberrationszeit abgesehen. Anmerkung des Herausgebers der 2. Auflage.

und für den Fall einer scharfen Berechnung der Aberration:

$$\begin{aligned} R' \cos \chi' &= - 0,82396 \\ R'^2 \sin \chi'^2 &= 0,35486. \end{aligned}$$

Von den Formeln (2) und (4) verdient offenbar hier die erstere bei der Aufstellung der Relation zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  den Vorzug, weil die Bewegung in Rectascension die in Declination bedeutend übertrifft; berechnet man deshalb die  $M, M', M''$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} M &= - 0,48370 \\ M' &= - 0,54077 \\ M'' &= - 0,60888, \end{aligned}$$

und jene Relation wird überhaupt:

$$0,27058 \cdot \varrho'' = - 0,54077 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} + 0,48370 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} + 0,60888 + 0,14319 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho.$$

Die Gleichungen (6) und (7) nehmen, in Zahlen ausgedrückt, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1,03355 - 2,14293 \varrho + 1,75529 \varrho^2 \\ r'^2 &= 1,03378 - 2,60520 \varrho'' + 2,30340 \varrho''^2, \end{aligned}$$

und die Gleichung (8) endlich wird:

$$3,81244 \cdot \varrho \varrho'' = r^2 + r'^2 - \kappa^2 - 2,04408 + 1,92310 \varrho + 2,72058 \varrho''.$$

Da hiermit die Vorbereitungsrechnungen beendigt sind, schreiten wir zu den Versuchen über  $\varrho$ ; ohne Gefahr, unser Ziel zu verfehlen, könnten wir mit einem Werthe beginnen, der  $r = 1$  entspricht. Die Grösse der negativen Coefficienten von  $\varrho$  in dem Ausdrücke für  $r^2$  lässt indessen vermuthen, dass  $r$  bedeutend kleiner als 1 ist; deshalb schätzen wir  $r = 0,75$  und beginnen die Versuche mit  $\varrho = 0,9$ . Mittelst der geschätzten Werthe von  $r' + r'', r + r'', r + r'$ , welche wir vorläufig bei der Berechnung von  $\eta, \eta', \eta''$  alle drei gleich 1,5 setzen, bekommen wir nach den nun bekannten Vorschriften:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99871 & \log \partial \eta &= 8,93513 \\ \log \eta' &= 9,99578 & \log \partial' \eta' &= 9,18663 \\ \log \eta'' &= 9,99918 & \log \partial'' \eta'' &= 8,83680. \end{aligned}$$

Um die Gleichung zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  zu verbessern, hat man jetzt die  $\eta, \eta', \eta''$  mit den Werthen  $r = 0,72574, r' = 0,64809, r'' = 0,55063$  zu berechnen. Zu  $\varrho = 0,9$  oder  $\log \varrho = 9,95424$  gehört zufolge der Relation (2)  $\log \varrho'' = 9,79022$ , aus (6) und (7) ergeben sich die zugehörigen  $r^2$  und  $r'^2$ :

$$\begin{aligned} r^2 &= 0,52670 & r &= 0,72574 \\ r'^2 &= 0,30325 & r' &= 0,55067. \end{aligned}$$

Bestimmt man aus  $\partial'$  und  $(r + r'')$  die Sehne  $\kappa$  mittelst der Lambert'schen Gleichung und Encke's Hülftafel, so wird  $\log \kappa = 9,43970, \kappa^2 = 0,07575$ . Wird letzterer Werth auf der rechten Seite von Gleichung (8) substituirt, so erhält man:

$$(r r'') r r'' = 0,37582;$$

wir wollen diesen aus Gleichung (8) hervorgehenden den geometrischen, den aus der Lambert'schen Gleichung zu bestimmenden, wenn man das derselben entsprechende  $\kappa$  in die Formel  $(r r'') r r'' = \frac{1}{2} (r^2 + r'^2 - \kappa^2)$  einsetzt, den phonomischen Werth von  $(r r'') r r''$  nennen. Der letztere wird hier gleich 0,37710. Um die Fehler von

$\eta, \eta', \eta''$  zu verbessern, berechnen wir zu dem  $r$  und  $r''$  der ersten Hypothese noch das  $r'$  nach der Formel:

$$(\vartheta' \eta')^2 r'^2 = (\vartheta \eta + \vartheta'' \eta'') (\vartheta \eta r^2 + \vartheta'' \eta'' r''^2) - \vartheta \eta \cdot \vartheta'' \eta'' \cdot \kappa^2.$$

Diese Rechnung liefert uns:  $r' = 0,64407$ ; bestimmen wir jetzt aus den drei Radienvectoren von Neuem  $\eta, \eta', \eta''$ , so erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} \log \eta = 9,99744 & \log \vartheta \eta = 8,93386 \\ \log \eta' = 9,99309 & \log \vartheta' \eta' = 9,18394 \\ \log \eta'' = 9,99893 & \log \vartheta'' \eta'' = 8,83655. \end{array}$$

Dem Werthe von  $\log \varrho = 9,95424$  entspricht nach Gleichung (2) demnach genauer der Werth:  $\log \varrho'' = 9,80303$ ; die weiteren Zahlen der zweiten Hypothese werden nun:

$$\begin{array}{ll} r^2 = 0,52670 & r = 0,72574 \\ r''^2 = 0,30839 & r'' = 0,55533 \\ \log \kappa = 9,43894 & \\ \kappa^2 = 0,07548 & \\ (r r'') r r'' \text{ geometr.} = 0,38237 & \\ (r r'') r r'' \text{ phoron.} = 0,37980. & \end{array}$$

Um der Wahrheit sich mehr zu nähern, müsste daher das Product  $r r''$ , welches dem angenommenen Werthe von  $\varrho$  und  $\varrho''$  entspricht, in dem Verhältniss von  $0,37980$  zu  $0,38240$ , oder das hypothetische  $r = 0,72574$  im Verhältniss von  $\sqrt{0,37980} : \sqrt{0,38240}$  vergrössert werden. Es würde dies eine Vermehrung des  $r$  von  $0,00248$  erfordern, welchem Zuwachs von  $r$  nach der Relation:

$$r^2 = 1,03355 - 2,14293 \varrho + 1,75529 \varrho^2,$$

oder:

$$r \triangle r = (1,75529 \varrho - 1,07146) \triangle \varrho$$

als Zuwachs von  $\varrho$  die Grösse  $0,00354$ , als Zuwachs von  $\log \varrho$  die Grösse  $0,00171$  entspricht.

Bei der folgenden Hypothese nehmen wir demgemäss an:  $\log \varrho = 9,95595$ ; um mit grösserer Genauigkeit den entsprechenden Werth von  $\log \varrho''$  zu finden, verbessern wir mit den drei Radienvectoren der vorhergehenden Hypothese  $r = 0,72574$ ,  $r' = 0,64859$ ,  $r'' = 0,55533$  die Werthe von  $\log \eta, \log \eta', \log \eta''$ . Die letzteren werden dadurch:

$$\begin{array}{l} \log \eta = 9,99750, \\ \log \eta' = 9,99316, \\ \log \eta'' = 9,99894. \end{array}$$

$\log \varrho''$  wird gleich  $9,80459$ , und die weiteren Zahlen der Rechnung ergeben sich wie folgt:

$$\begin{array}{ll} r^2 = 0,53032, & r = 0,72822, \\ r''^2 = 0,30915, & r'' = 0,55601, \\ \log \kappa = 9,43839, & \\ \kappa^2 = 0,07530, & \\ (r r'') r r'' \text{ geometr.} = 0,38411, & \\ (r r'') r r'' \text{ phoron.} = 0,38208. & \end{array}$$

Das  $\log \varrho$  der Hypothese bedürfte diesmal der Verbesserung von  $0,00131$ ; um die Convergenz des Verbesserungsverfahrens zu erhöhen, nehmen wir an, dass die durch dasselbe zu erhaltenden einzelnen Correctionen eine geometrische Progression bilden; dieselbe würde hier mit den Gliedern:

$$0,00171 + 0,00131 + \dots$$

beginnen; ihr Exponent würde 0,77, ihre Summe gleich  $0,00171 \cdot \frac{1}{1-0,77}$ , also gleich 0,00727 sein. Demgemäss dürfen wir schliessen, dass  $\log \varrho$  sehr nahe gleich 9,95424 + 0,00727 oder 9,96151 sein wird, was sich in der That bestätigt findet.

Es ist deshalb jetzt die Verbesserung der Beobachtungszeiten wegen der Aberration vorzunehmen. Benutzen wir die  $\eta, \eta', \eta''$  der vorhergehenden Hypothese, so finden wir, dass zu  $\log \varrho = 9,96151$  ein  $\log \varrho'' = 9,80982$  gehört, und dann wieder folgende drei Radienvectoren:

$$\begin{aligned} r &= 0,73658 \\ r' &= 0,65664 \\ r'' &= 0,55819. \end{aligned}$$

Aus dem  $r'$  folgt der Abstand von der Erde in der zweiten Beobachtung gleich:

$$- R' \cos \chi' + \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} \text{ oder gleich } 0,82396 + 0,27628.$$

Die drei nicht curtirten Abstände von der Erde, mit denen man die Aberrationsconstante von 493,3<sup>1)</sup> nach den gegebenen Vorschriften multipliciren soll, werden somit:

$$\begin{aligned} &1,21250 \\ &1,10024 \\ &0,97950, \end{aligned}$$

und die geforderten Verbesserungen der Beobachtungszeiten, in Tagen ausgedrückt, gleich:

$$\begin{aligned} &- 0,00692 \\ &- 0,00628 \\ &- 0,00559. \end{aligned}$$

Man wird also für den Schluss der Rechnung die Beobachtungszeiten:

$$\begin{aligned} \text{Juni} & 23,53258 \\ \text{Juni} & 27,53304 \\ \text{Juli} & 2,55526, \end{aligned}$$

und die  $\eta, \eta', \eta'', \vartheta \eta, \vartheta' \eta', \vartheta'' \eta''$  noch einmal dementsprechend berechnen.

Für die folgende Hypothese wird mit Rücksicht hierauf:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99757, & \log \vartheta \eta &= 8,93405, \\ \log \eta' &= 9,99338, & \log \vartheta' \eta' &= 9,18430, \\ \log \eta'' &= 9,99898, & \log \vartheta'' \eta'' &= 8,83667. \end{aligned}$$

Führt man die Versuche zu Ende<sup>2)</sup>, so findet man endlich für  $\log \varrho$  die definitive Lösung:

$$\log \varrho = 9,96102,$$

und für  $\log \varrho''$ :

$$\log \varrho'' = 9,80809.$$

Es entsprechen dieser Lösung die Radienvectoren:

$$\begin{aligned} r &= 0,73582, & \log r &= 9,86677 \\ r' &= 0,55755, & \log r' &= 9,74628 \\ & & x^2 &= 0,074787. \end{aligned}$$

Zunächst berechnet man darauf den Bogen  $\frac{1}{2}(v'' - v)$  nach der Formel:

$$4 r r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v)^2 = x^2 - (r'' - r)^2,$$

<sup>1)</sup> Siehe Anmerkung S. 297.

<sup>2)</sup> Bei dem Schlusse der Versuche ist es, wenn man eine sehr grosse Genauigkeit in die Rechnung legen will, vorzuziehen, den geometrischen Werth von  $x^2$  aus der Gleichung  $(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$  zu suchen, um mit dem phonomischen Werthe zu vergleichen; um so mehr, als die heliocentrischen Coordinaten doch später berechnet werden müssen.

woraus sich:

$$\frac{1}{2}(v'' - v) = 90^{\circ} 18' 59'',3$$

ergibt.

Rechnet man darauf nach den Formeln (12) der 28. Vorlesung, so findet man noch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(v'' + v) &= -40^{\circ} 21' 45'',8 \\ \log q &= 9,565436 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} v &= -90^{\circ} 2' 30'',9 \\ v'' &= -71 24 32,3, \end{aligned}$$

und hieraus mittelst der Barker'schen Tafel die Zeit des Perihels:

$$T = 1857, \text{ Juli } 17,99482 \text{ (Berl. Zeit).}$$

Die definitiven Werthe der heliocentrischen Coordinaten des Kometen waren für die erste Beobachtung:

$$x = 0,59073, \quad y = -0,20066, \quad z = 0,39015;$$

für die zweite Beobachtung:

$$x'' = 0,33761, \quad y'' = -0,28923, \quad z'' = 0,33658;$$

also werden die Grössen  $a', A', b', B', c', C'$  u. s. w.

$$\begin{aligned} a' &= \text{num. log. } 9,97237, & A' &= 211^{\circ} 13' 14'' \\ b' &= \text{num. log. } 9,93412, & B' &= 288 32 45 \\ c' &= \text{num. log. } 9,79078, & C' &= 149 10 41. \end{aligned}$$

Hiermit ist nun alles für Berechnung einer Ephemeride Erforderliche bekannt. Prüft man, wie die zweite Beobachtung durch diese Constanten dargestellt wird, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Berechnete Rectascension} &= 61^{\circ} 20' 50'' \\ \text{Beobachtete } &= 61 20 48 \\ \text{Berechnete Declination} &= + 44 43 56 \\ \text{Beobachtete } &= 44 43 46. \end{aligned}$$

Die Rectascension wird so genau dargestellt, als es der Gebrauch der fünfstelligen Tafeln ermöglicht. Eine ebenso genaue Darstellung der Declination dagegen war, weil wir die Relation (2) angewandt, welche nur die Rectascensionen berücksichtigt, nicht zu erwarten.

Wollen wir nun noch die auf die Ekliptik bezogenen Elemente des Kometen kennen lernen, so haben wir, nach den Gleichungen (14) und (15) der 40. Vorlesung, mit dem Werthe  $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 37''$  für die Schiefe der Ekliptik zu der Epoche 1857,0:

$$\begin{aligned} \pi - \Omega &= 134^{\circ} 4' 0'' \\ \Omega &= 23 48 42 \\ i &= 121 6 52, \end{aligned}$$

oder, nach anderer Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned} \pi - \Omega &= 225^{\circ} 56' 0'' \\ \Omega &= 23 48 42 \\ i &= 58 53 8. \\ &\text{Retrograd.} \end{aligned}$$

Zweiundvierzigste Vorlesung.

Die Gauss'sche Form der Olbers'schen Methode, auf den Aequator übertragen.

Wir haben absichtlich in den vorhergehenden Rechnungen aus bald zu errathenden Gründen von einer Umformung der Gleichung (4) keinen Gebrauch gemacht, durch welche die Grösse  $\frac{1}{c''}$ , welche am meisten durch die Convergenz der Verbesserungen verzögert wird, ganz aus der Relation verschwindet. Unsere Absicht war, den Leser schon an diesen Rechnungen erkennen zu lassen, wie man für den Fall, dass eine Beobachtung wegen fehlender Declinationsbestimmung unvollständig wäre, doch nicht allzu mühsam zu einem scharfen Resultate gelangen könnte. Diesem Falle widmen wir in der folgenden Vorlesung noch einige Betrachtungen; jetzt aber wollen wir zeigen, wie in dem Falle vollständiger Beobachtungen für die Fundamentalebene des Aequators eine vollständig strenge Gleichung zwischen  $\varrho''$  und  $\varrho$ , den auf diese Ebene curtirten Distanzen zu erhalten ist, in welcher als Unbekannte ausser  $\varrho$  und  $\varrho''$  selbst nur das Verhältniss  $\frac{c}{c''}$  noch auftritt. Von diesem Verhältnisse lässt sich nach den früheren Entwicklungen erkennen, dass es bis auf Grössen von der Ordnung des Productes der kleinen Zwischenzeiten, d. h. bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive genau, gleich dem Verhältniss der Zwischenzeiten  $\frac{t'' - t'}{t' - t}$  oder  $\frac{\delta}{\delta''}$  gesetzt werden kann. Hieraus geht noch hervor, dass eine solche Relation, wie wir sie zu entwickeln vorhaben, um die Genauigkeit des Olbers'schen  $M$  zu erreichen, die Kenntniss der  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$  nicht mehr erfordert. Substituirt man aber bei einer Wiederholung der Rechnung die  $\eta$  und  $\eta''$ , welche dann selbst bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive bekannt sind, so erhält man die Unbekannten bis auf Grössen vierter Ordnung genau; überhaupt steigert jede Wiederholung die Genauigkeit hier um zwei Ordnungen, und wenn die Zwischenzeiten gleich sind, sogar um drei Ordnungen.

Dieses vorausgeschickt, bemerken wir, dass der Coëfficient  $N'$  der Gleichung (4) im Gegensatze zu  $M'$  der Gleichung (2) von der Wahl der Anfangsrichtung in der Fundamentalebene abhängig erscheint, so dass es immer möglich sein wird, durch eine blosse Drehung des Coordinatensystems um die  $Z$ -Axe den Coëfficienten  $N'$  und demnach auch  $N' \cdot \frac{1}{c''}$  zum Verschwinden zu bringen. Es sollen also jetzt die Rectascensionen von einem Meridian gerechnet werden, welchem nach der gewöhnlichen Zählweise die Rectascension  $A'_0$  entspricht, unter der Bedingung, dass:

$$N' = X' \operatorname{tg} \delta' \cos A'_0 + Y' \operatorname{tg} \delta' \sin A'_0 - Z' \cos (\alpha' - A'_0) = 0$$

wird. Die Auflösung dieser Bedingung ergibt:

$$\operatorname{tg} A'_0 = - \frac{X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha'^1)}{Y' \operatorname{tg} \delta' - Z' \sin \alpha'} \dots \dots \dots (1)$$

<sup>1)</sup> Es mag hier vorläufig Erwähnung finden, dass nach dieser Gleichung  $A'_0$  mit der Rectascension (beziehungsweise der Länge) der Pole eines grössten Kreises identisch ist, welcher den zweiten geocentrischen Ort und den zugehörigen Sonnenort verbindet.

Die Zweideutigkeit des Quadranten von  $A'_0$  ist hier gleichgültig, da sie keinen Einfluss hat.

An die Stelle der Gleichung (4) können wir daher jetzt die folgende setzen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'' &= \frac{tg \delta \cos(\alpha' - A'_0) - tg \delta' \cos(\alpha - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho \\ &+ \frac{tg \delta' (X'' \cos A'_0 + Y'' \sin A'_0) - Z'' \cos(\alpha' - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \\ &+ \frac{tg \delta' (X \cos A'_0 + Y \sin A'_0) - Z \cos(\alpha' - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

welche Formel noch vollkommen streng ist.

Nimmt man nun aber an, dass das Verhältniss  $\frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''}$  bei dem Kometen und bei der Erde gleichen Werth hat, was bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive richtig ist, so muss die vorstehende Relation auch die Lösung der Erdbahn:  $\varrho = 0$  und  $\varrho'' = 0$  mit einschliessen, was nur möglich ist, wenn sich auch das von  $\varrho$  freie Glied der rechten Seite auf Null reducirt. Man kann daher mit demselben Grade von Annäherung, den die Olbers'sche Methode besitzt, von der Gleichung:

$$\varrho'' = \frac{tg \delta \cos(\alpha' - A'_0) - tg \delta' \cos(\alpha - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \varrho \dots \dots (3)$$

Gebrauch machen, bei welcher die Verwandlung der Beobachtungen in Länge und Breite nicht mehr verlangt wird.

Gelingt es nun noch, die Gauss'sche Form, die Versuche anzustellen, auf den Aequator zu übertragen, so werden wir zu einer Methode gelangen, welche grösste Bequemlichkeit mit grösster Schärfe vereinigen lässt. Wir erreichen unseren Zweck wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} X'' - X &= g \cos \gamma \cos G \\ Y'' - Y &= g \cos \gamma \sin G \\ Z'' - Z &= g \sin \gamma, \end{aligned}$$

wobei, wie leicht ersichtlich,  $g$  die Erdsehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung,  $G$  die Rectascension des ersten Erdortes, vom dritten aus gesehen,  $\gamma$  die zugehörige Declination bedeutet.

Ferner setzen wir, analog den früheren Entwicklungen in der 28. Vorlesung:

$$\begin{aligned} M \cos \alpha'' - \cos \alpha &= h \cos \xi \cos H \\ M \sin \alpha'' - \sin \alpha &= h \cos \xi \sin H \\ M tg \delta'' - tg \delta &= h \sin \xi, \end{aligned}$$

wodurch man für  $\kappa^2$  oder  $(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$  folgenden Ausdruck erhalten wird:

$$\kappa^2 = \varrho^2 h^2 - 2 g \varrho h [\sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos (G - H)] + g^2.$$

Bezeichnen wir den Winkelabstand des ersten geocentrischen Ortes des Kometen vom ersten Sonnenorte mit  $\psi$ , die entsprechende Grösse bei der dritten Beobachtung mit  $\psi''$ , so haben wir:

$$\begin{aligned} R \cos \psi &= X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ R'' \cos \psi'' &= X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta''. \end{aligned}$$

Es sei auch noch der Kürze wegen:

$$\cos \varphi = \sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos (G - H),$$

so werden  $r^2$ ,  $r''^2$  und  $\kappa^2$  wieder ganz ihre frühere Form (28. Vorlesung) annehmen; man wird nämlich haben:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\varrho \sec \delta - R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi \\ r''^2 &= (M \varrho \sec \delta'' - R'' \cos \psi'')^2 + R''^2 \sin^2 \psi'' \\ \alpha^2 &= (\varrho h - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Man braucht jetzt nur noch wieder die Grösse  $u$  mittelst der Gleichung:

$$\varrho h - g \cos \varphi = u,$$

d. h.:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}$$

einzuführen, und die Versuchsgleichungen werden wieder ganz die früheren, nur mit dem Unterschiede, dass sich  $\varrho$ , und entsprechend  $u$ , ebenso wie das wieder mit  $M$  bezeichnete Verhältniss  $\frac{\varrho''}{\varrho}$  hier auf den Aequator, statt auf die Ekliptik beziehen. Es ist leicht zu sehen, dass die Formeln für die Ekliptik durch Specialisirung aus den vorhergehenden zu erhalten sind.

Wir wollen für diese der Olbers'schen nahe verwandte Methode, welche ihr an Bequemlichkeit ungefähr gleich kommt, aber dabei so ungemein leicht den höchsten Grad von Schärfe in die Bestimmung legen lässt, noch einmal die Formeln zusammenstellen.

### Dreiundvierzigste Vorlesung.

## Zusammenstellung der Formeln für die unmittelbar auf den Aequator bezogene, strenge Form der Olbers'schen Methode. Rechnungsbeispiel.

Man berechne:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} V &= \frac{X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha'}{Y' \operatorname{tg} \delta' - Z' \sin \alpha'} \quad 1), \\ M &= \frac{\operatorname{tg} \delta \cos(V + \alpha') - \operatorname{tg} \delta' \cos(V + \alpha)}{\operatorname{tg} \delta' \cos(V + \alpha'') - \operatorname{tg} \delta'' \cos(V + \alpha')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t}, \\ g \cos \gamma \cos G &= X'' - X \\ g \cos \gamma \sin G &= Y'' - Y \\ g \sin \gamma &= Z'' - Z \\ M - \cos(\alpha'' - \alpha) &= h \cos \xi \cos(H - \alpha'') \\ \sin(\alpha'' - \alpha) &= h \cos \xi \sin(H - \alpha'') \\ M \operatorname{tg} \delta'' - \operatorname{tg} \delta &= h \sin \xi \\ \cos \varphi &= \sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos(G - H) \\ R \cos \psi &= X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ R'' \cos \psi'' &= X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta''. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Oder auch, wenn man lieber die Polarcoordinaten, Rectascension und Declination des Sonnenortes  $A'$  und  $D'$  gebrauchen will:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \delta' \cos A' - \operatorname{tg} D' \cos \alpha'}{\operatorname{tg} \delta' \sin A' - \operatorname{tg} D' \sin \alpha'}.$$

Desgleichen kann man im Folgenden setzen:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A), \\ \cos \psi'' &= \sin \delta'' \sin D'' + \cos \delta'' \cos D'' \cos(\alpha'' - A''). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= g \sin \varphi \\ B &= R \sin \psi \\ B'' &= R'' \sin \psi'' \\ b &= h \cos \delta \\ b'' &= \frac{h \cos \delta''}{M} \\ c &= g \cos \varphi - b R \cos \psi \\ c'' &= g \cos \varphi - b'' R'' \cos \psi'', \end{aligned}$$

dann wird wieder:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left( \frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2 \\ r''^2 &= \left( \frac{u + c''}{b''} \right)^2 + B''^2 \\ \kappa^2 &= u^2 + A^2; \end{aligned}$$

ist  $u$  auf bekannte Weise, der Lambert'schen Gleichung genügend, bestimmt, so wird:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}.$$

Für eine Wiederholung der Rechnung wird man die Zeiten wegen Aberration corrigiren, und  $M$  nach Gleichung (2) unter Berücksichtigung der  $\eta$  und  $\eta''$  von Neuem bestimmen, dabei jene Gleichung unter der Form:

$$\varrho'' = a \varrho + a' = \left( a + \frac{a'}{\varrho} \right) \varrho$$

schreibend, in welcher:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{tg \delta'' (X'' \cos V - Y'' \sin V) - Z'' \cos (\alpha' + V)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')} \\ &+ \frac{tg \delta' (X \cos V - Y \sin V) - Z \cos (\alpha' + V)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')}, \\ a &= \frac{tg \delta \cos (V + \alpha') - tg \delta' \cos (V + \alpha)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \eta''}. \end{aligned}$$

Die zweite oder Verbesserungsrechnung wird also mit dem Werthe:

$$M = a + \frac{a'}{\varrho},$$

worin der in der ersten Rechnung gefundene Werth von  $\varrho$  zu substituiren ist, zu führen sein.

Man erreicht durch die Verbesserung des  $M$  hier dasselbe, was man auch durch andere Arten der Correction des Olbers'schen  $M$  erreicht, dass der durch den zweiten Sonnenort und den zweiten geocentrischen Ort gehende Kreis durch die berechnete Parabel wiedergegeben wird. Entsprechen die Beobachtungen in Wirklichkeit einer Parabel, so müssen auch wieder der beobachtete und der berechnete Ort in einen Punkt des genannten grössten Kreises fallen.

Wir benutzen noch weiter das Material des Kometen 1857 III., um die grosse Bequemlichkeit der oben gegebenen Formeln zu zeigen. Mit Zugrundelegung also der Daten der 41. Vorlesung erhält man:

$V$	$= - 28^{\circ} 3' 32''$	$H$	$= 194^{\circ} 17' 28''$
$\log M$	$= 9,84828$	$\zeta$	$= - 7 59 19$
$G$	$= 186^{\circ} 4' 56''$	$\log h$	$= 9,66345$
$\gamma$	$= - 2 38 5$	$g \cos \varphi$	$= 0,14833$
$\log g$	$= 9,18324$	$R \cos \psi$	$= 0,80873$

$R'' \cos \psi'' =$	0,85827	$\log b =$	9,54128
$\log A =$	8,54866	$\log b'' =$	9,63398
$\log B =$	9,78961	$c =$	— 0,13227
$\log B'' =$	9,73647	$c'' =$	— 0,22117

Den Gleichungen:

$$r^2 = \left(\frac{u + c}{b}\right)^2 + B^2$$

$$r''^2 = \left(\frac{u + c''}{b''}\right)^2 + B''^2$$

$$x^2 = u^2 + A^2$$

und der Lambert'schen Gleichung wird nun, wie man leicht findet, genügt durch:

$$u = 0,27132,$$

d. h. durch folgende Werthe von  $\log \varrho$ ,  $\log \varrho''$ ,  $\log r$ ,  $\log r''$  und  $x^2$ :

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 9,95942 \\ \log \varrho'' &= 9,80770 \\ \log r &= 9,86595 \\ \log r'' &= 9,74617 \\ x^2 &= 0,074866. \end{aligned}$$

Will man die Genauigkeit noch weiter bis zu den Grössen vierter Ordnung inclusive treiben, so hat man die Gleichung (2) anzuwenden, in welcher  $A'_0$  mit  $-V$  identisch ist. Es wird nun, wie wir hier nicht von Neuem zu berechnen brauchen, mit

Berücksichtigung der Aberration<sup>1)</sup>,  $\log \frac{\vartheta \eta}{\vartheta'' \eta''} = 0,09738$ , demnach:

$$\begin{aligned} \varrho'' &= 0,70285 \varrho + 0,24517 - 0,24458 \\ &= \left(0,70285 + 0,00059 \cdot \frac{1}{(\varrho)}\right) \varrho, \end{aligned}$$

oder, wenn wir für  $(\varrho)$  den eben gefundenen Werth, dessen Logar. = 9,95942, einsetzen:

$$\varrho'' = 0,70350 \varrho,$$

d. h.:

$$\log M = 9,84726;$$

bei der zweiten, mit diesem Werthe zu führenden Rechnung wird man so gut wie völlig strenge, mit dem früher auf längerem Wege gefundenen Resultate übereinstimmende Zahlen erhalten.

### Vierundvierzigste Vorlesung.

## Der sogenannte Ausnahmefall der Olbers'schen Methode. Berechnung der Bahn eines Kometen aus drei Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

Nach den Principien der Olbers'schen Methode war das Verhältniss  $M$  der Distanzen von der Erde aus der Lage des Durchschnittspunktes jener beiden grössten Kreise der Sphäre zu finden, von denen der eine die beiden äusseren geocentrischen

<sup>1)</sup> Siehe Bemerkung S. 297.

Oerter, der andere den mittleren geocentrischen Ort mit dem Orte der Sonne verbindet. Es ist klar, dass dieser Durchschnittspunkt und demnach auch der Olbers'sche Ausdruck für das genannte Verhältniss an grosser Unbestimmtheit und Unsicherheit leiden werden, so oft die beiden Kreise nur einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden, d. h. wenn die Richtung der geocentrischen Bewegung eines Kometen sehr nahe mit dem durch die Sonne gelegten grössten Kreise zusammenfällt. Diesen Fall, wo man demnach die Relation zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  mit anderen Hilfsmitteln ableiten muss, nennen die Astronomen den Ausnahmefall bei der Olbers'schen Methode.

Die Hilfsmittel nun, welche alsdann zugezogen werden können, besitzen wir schon in den Entwicklungen der 40. Vorlesung; denn in den Relationen (2) und (4) dieser Vorlesung spielt der Durchschnittspunkt der genannten Kreise keine Rolle.

Ogleich hiernach die Untersuchung im Ausnahmefalle als erledigt betrachtet werden könnte, weil man sich, sei es für den Aequator, oder für die Ekliptik, durchaus der Formeln der genannten Vorlesungen bedienen kann, so mag doch hier noch eine Entwicklung Platz finden, welche zuweilen mit Nutzen bei Kometenbahnen von geringer Neigung gegen die Erdbahn angewendet werden kann. Die Parallaxe kann dabei nicht gut von vornherein berücksichtigt werden, weshalb es hier bequemer erscheint, die Formeln auf die Ekliptik zu beziehen.

Die früher entwickelte Relation (4), S. 289, wobei die  $M$  defnirt sind durch die Gleichungen (3), S. 294:

$$\sin(\lambda'' - \lambda') \cdot c'' \varrho'' = M' - Mc - M''c'' - \sin(\lambda - \lambda') \cdot c \varrho$$

geht dann über in:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda'' - \lambda') c'' \varrho'' &= R' \sin(\lambda' - \odot') - R \sin(\lambda' - \odot) \cdot c \\ &\quad - R'' \sin(\lambda' - \odot'') c'' - \sin(\lambda - \lambda') c \varrho. \end{aligned}$$

Es ist nun einleuchtend, dass, wenn in dieser Gleichung die Verhältnisse  $\frac{n}{n'}$ ,  $\frac{n''}{n'}$ , wie sie für die Erdbewegung stattfinden, substituirt würden, dieselbe durch die Werthe  $\varrho = 0$  und  $\varrho'' = 0$  befriedigt werden müsste, da die Erde selbst sich in den drei durch die Beobachtungen gegebenen Gesichtslinien befindet. Bezeichnen wir daher die genannten Verhältnisse bei der Erdbewegung mit  $C$  und  $C''$ , so wird die Gleichung:

$$0 = R' \sin(\lambda' - \odot') - CR \sin(\lambda' - \odot) - C'' R'' \sin(\lambda' - \odot'')$$

oder:

$$0 = R' \sin(\lambda' - \odot') \cdot \frac{1}{C''} - R \sin(\lambda' - \odot) \cdot \frac{C}{C''} - R'' \sin(\lambda' - \odot'')$$

erfüllt sein müssen. Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen Relation, nachdem man die letztere durch  $c''$  dividirt hat, so findet man:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda'' - \lambda') \cdot \varrho'' &= R' \sin(\lambda' - \odot') \left( \frac{1}{c''} - \frac{1}{C''} \right) \\ &\quad - R \sin(\lambda' - \odot) \left( \frac{c}{c''} - \frac{C}{C''} \right) - \sin(\lambda - \lambda') \frac{c}{c''} \varrho. \end{aligned}$$

Ferner aber ist, mit Rücksicht auf die Definition von  $c$  und  $c''$ , sowie die Entwicklungen der 32. Vorlesung:

$$\begin{aligned} c &= \frac{n}{n'} = \frac{n}{n+n''} \cdot \frac{n+n''}{n'} = \frac{\partial}{\partial r'} \cdot \frac{r'}{r_0'} = \frac{\partial}{\partial r'} \left( 1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{n''}{n'} = \frac{n''}{n+n''} \cdot \frac{n+n''}{n'} = \frac{\partial''}{\partial r'} \cdot \frac{r'}{r_0'} = \frac{\partial''}{\partial r'} \left( 1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right), \end{aligned}$$

also:

$$\frac{1}{c''} = \frac{\partial'}{\partial''} \left( 1 - \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right) \quad \frac{c}{c''} = \frac{\partial}{\partial''},$$

und analog für die Erde (da die Ausdrücke bei den Kegelschnitten allgemein gelten):

$$\frac{1}{C''} = \frac{\vartheta'}{\vartheta''} \left( 1 - \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^3} \right) \quad \frac{C}{C''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir von diesen Gleichungen in der obigen Relation Gebrauch machen, die Gleichung:

$$\varrho'' = \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2} \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} - \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} \cdot \varrho \dots \dots (1)$$

Nach dem Vorschlage von Encke für den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode kann diese Gleichung so angewendet werden, dass man zuerst:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')} \dots \dots \dots (2)$$

den Formeln der Olbers'schen Methode als Ausdruck für  $M$  zu Grunde legt. Der danach durch die bekannten Versuche erhaltene Werth von  $\varrho$  sei gleich  $(\varrho)$ , so wird dann nach Gleichung (1) der Ausdruck:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2(\varrho)} \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cdot \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} + \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')}$$

ein verbesserter Werth des Olbers'schen  $M$  sein, mit welchem die Rechnung zu wiederholen wäre. Es ist demnach der zuerst angenommene Werth:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')}$$

mit dem Correctionsfactor:

$$1 + \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2(\varrho)} \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda' - \lambda)} \cdot \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

zu multipliciren.

In dem von uns schon mehrfach benutzten Beispiel vom zweiten Kometen des Jahres 1813, welches zwar keinen Ausnahmefall bietet, gerade deshalb aber geeignet ist, den Grad der Annäherung der vorhergehenden Formeln zu zeigen, war:

$\log \vartheta = 9,08392,$	$\lambda' - \lambda = - 4^{\circ} 49' 16'',$
$\log \vartheta' = 9,38323,$	$\lambda'' - \lambda' = - 9 \ 39 \ 14 ,$
$\log \vartheta'' = 9,08049,$	$\log \sin(\lambda' - \lambda) = 8,92451_n,$
$\log(\varrho) = 9,80366,$	$\log \sin(\lambda'' - \lambda') = 9,22452_n,$
$\log r' = 0,12399,$	$\lambda' - \odot' = 241^{\circ} 48' 37'',$
$\log R' = 0,00175,$	$\log \sin(\lambda' - \odot') = 9,94517_n.$

Setzt man in der Formel (1) zuerst  $r' = R'$ , d. h. macht man von (2) Gebrauch, so erhält man:

$$\log M = 9,70342.$$

Rechnet man hingegen mit Benutzung der obigen Werthe von  $r'$  und  $\varrho'$ , auf welche man successive durch Wiederholung der Rechnungen der Olbers'schen Methode geführt werden würde, so findet man:

$$\frac{\vartheta' \vartheta''}{2(\varrho)} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \odot') R'}{\sin(\lambda' - \lambda)} \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) = 0,13563,$$

den Correctionsfactor des obigen  $M$  demnach gleich:

$$1,13563,$$

dessen Logarithmus:

$$0,05524$$

zu dem Werthe von  $\log M = 9,70342$  addirt werden muss, um diesen letzteren zu verbessern. Man erhält demnach jetzt:

$$\log M = 9,75866,$$

während nach dem gewöhnlichen Ausdruck der Olbers'schen Methode:

$$\log M = 9,75799$$

gefunden wurde.

Nicht immer, obwohl meistens, wird in dem Ausnahmefalle der Olbers'schen Methode die Bewegung in Länge die überwiegende sein; auch der Fall, dass der geocentrische Ort hauptsächlich Breitenänderungen erleidet, und also wegen der Kleinheit von  $\lambda' - \lambda$  und  $\lambda'' - \lambda'$  auch die vorhergehende Formel für  $M$  ihre Dienste versagen würde, hat einigen Anspruch auf unsere Berücksichtigung. Aus der Relation (4), Vorlesung 40:

$$(\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \cdot \varrho'' = N' \cdot \frac{1}{c''} - N \frac{c}{c''} - N'' - (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \cdot \frac{c}{c''} \varrho,$$

worin:

$$N = R \cos \odot \operatorname{tg} \beta'$$

$$N' = R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta'$$

$$N'' = R'' \cos \odot'' \operatorname{tg} \beta',$$

folgt durch Betrachtungen, welche den vorhin angewendeten ganz analog sind:

$$\begin{aligned} (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \varrho'' &= \frac{\vartheta \vartheta'}{2} \cdot R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta' \cdot \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \\ &- (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \frac{\vartheta}{\vartheta''} \varrho, \end{aligned}$$

oder:

$$\varrho'' = \frac{\vartheta}{\vartheta''} \frac{\cos \lambda \operatorname{tg} \beta' - \cos \lambda' \operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta'} \varrho + \frac{\vartheta \vartheta'}{2} \cdot \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \frac{R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta'}{\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta'} \quad (3)$$

Es ist einleuchtend, dass es für die Relation zwischen  $\varrho''$  und  $\varrho$  ganz gleichgültig sein muss, von welchem Punkte der Ekliptik die Längen gezählt werden, so dass man unbeschadet der Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung die in derselben vorkommenden Grössen  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  und  $\odot'$  um den Betrag  $\odot'$  vermindern kann. Dadurch geht dieselbe über in:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'' &= \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda'' - \odot')} \varrho \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\vartheta \vartheta'}{\operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda'' - \odot')} \cdot \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Der Factor von  $\varrho$  auf der rechten Seite dieser Gleichung unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Ausdruck für das  $M$  der Olbers'schen Methode, wie man sieht, bloss dadurch, dass hier überall die Cosinus der Bögen  $\lambda - \odot'$ ,  $\lambda' - \odot'$ ,  $\lambda'' - \odot'$  vorkommen, wo dort die Sinus stehen. In einem Ausnahmefalle der in Rede stehenden Art kann man daher so verfahren, dass man in dem gewöhnlichen Ausdrücke für das Olbers'sche  $M$  die Cosinus statt der Sinus der obigen Unterschiede einsetzt. Hat man hierdurch eine erste Näherung erhalten, so kann dann dieses  $M$  durch Multiplication mit dem Factor:

$$1 + \frac{\vartheta' \vartheta''}{2} \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda' - \odot')} \frac{R'}{(\varrho)} \cdot \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

verbessert werden.

Bei dem Kometen 1813 II. liefert die Cosinusformel:

$$\log M = 9,73400;$$

der Logarithmus des Verbesserungsfactor aber wird,  $\log(\varrho) = 9,80366$  und  $\log r' = 0,12399$  gesetzt, gleich:

0,02427,

also der verbesserte Werth selbst:

$$\log M = 9,75827,$$

was mit dem nach der Carlini'schen Methode gefundenen  $\log M = 9,75826$  so gut wie völlig, und auch mit dem Ergebniss der Formel (2) ziemlich gut übereinstimmt. Die Formel (4) verdiente aber hier vor jener wegen der stärkeren Breitenbewegung den Vorzug.

Der aufmerksame Leser wird vielleicht selbst schon die von uns viel gebrauchte Relation (2) (40. Vorlesung), und die daraus abgeleitete (1) dieser Vorlesung, in welchen beiden die Winkelkoordinaten des Abstandes von der Fundamentalebene, d. h. die Declination oder die Breite, explicite nicht vorkommen, als unmittelbar brauchbar auch für den Fall einer Bahnrechnung erkannt haben, welche auf zwei vollständige und eine unvollständige Beobachtung gestützt werden soll. Es ist dies ein Problem von praktischer Bedeutung, weil bei den Beobachtungsmitteln, auf deren Gebrauch sich die Astronomen bei den Kometen vorzugsweise angewiesen sehen, die Bestimmung einer Declination ziemlich leicht misslingt.

In dem Rechnungsbeispiele der 41. Vorlesung hätte es, wie man leicht erkennt, der Kenntniss der Declination der zweiten Beobachtung gar nicht bedurft; diese Declination diene dort nur dem untergeordneten Zwecke, die für die Berücksichtigung der Aberration nöthige Bestimmung von  $\varrho'$  aus  $r'$  auf eine bequemere Art auszuführen. Es hätte dies aber auch dadurch geschehen können, dass man das Formelsystem:

$$\begin{aligned} \varrho' \cos \alpha' &= cx + c'x'' + X' \\ \varrho' \sin \alpha' &= cy + c'y'' + Y' \\ \varrho' \operatorname{tg} \delta' &= cz + c'z'' + Z' \end{aligned}$$

auflöste, wodurch dann sowohl der für die Verbesserung der Beobachtungszeit zu suchende Abstand von der Erde  $\varrho' \sec \delta'$  bekannt, als auch eine schätzbare Controle der Rechnung gegen gröbere Fehler gewonnen wird; denn es wird das so zu findende  $\alpha'$  mit der gegebenen Rectascension sehr nahe übereinstimmen müssen.

Wäre die unvollständige Beobachtung immer die mittlere, so würden wir den gegebenen Vorschriften nichts weiter hinzuzufügen haben. In der Praxis aber ist es gerade die Beobachtung in der Nacht der Entdeckung, also die erste, welche mehr als andere der Gefahr, unvollständig zu werden, ausgesetzt ist. Aber auch diesem Falle können die Formeln der 40. Vorlesung durch eine leichte Modification angepasst werden, indem man den auf die unvollständige erste Beobachtung bezüglichen Daten den Accent ' giebt. Das Material der Rechnungen der 41. Vorlesung würden wir dann, nämlich unter der Voraussetzung, die Declination der ersten Beobachtung (Juni 23.) sei nicht gelungen, in folgendes Schema stellen:

$t, t', t''$ . . . . .	Juni 27,53932,	Juni 23,53950,	Juli 2,256085
$\alpha, \alpha', \alpha''$ . . . . .	61° 20' 48"	53° 6' 51"	77° 2' 44"
$\delta, \delta''$ . . . . .	+ 44 43 46		+ 48 47 4
$X, X', X''$ . . . . .	— 0,10953	— 0,04203	— 0,19350
$Y, Y', Y''$ . . . . .	0,92730	0,93183	0,91569
$Z, Z', Z''$ . . . . .	0,40235	0,40432	0,39731,

um dann darauf mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Formeln der 40. Vorlesung anzuwenden. Es wird dabei  $\vartheta''$  negativ, desgleichen  $\vartheta'' \eta''$ , da die Reihe für das Verhältniss des Sectors zum Dreieck nur die geraden Potenzen von  $\vartheta$  enthält. Die Vertauschung der ersten mit der zweiten Beobachtung hat also bei diesen Grössen die Folge, dass auch  $\vartheta \eta$  und  $\vartheta' \eta'$  sich vertauschen, während  $\vartheta'' \eta''$  negatives Vorzeichen

bekommt. Bei den  $M, M', M''$  dagegen werden in Folge der veränderten Ordnung des Materials ganz andere Zahlen zum Vorschein kommen, im vorliegenden Falle z. B.:

$$\begin{aligned} M &= -0,64417 \\ M' &= -0,59291 \\ M'' &= -0,70437, \end{aligned}$$

als Relation zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  wird die Gleichung:

$$0,65889 \cdot c'' \varrho'' = -0,59291 + 0,64417 c + 0,70437 \cdot c' + 0,17816 c \varrho$$

oder:

$$0,65889 \varrho'' = -0,59291 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} + 0,64417 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} + 0,70437 + 0,17816 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho$$

erhalten werden. Im Uebrigen weicht der Gang der Rechnung von dem des Beispiels in der 41. Vorlesung nicht ab; es erscheint daher unnöthig, dieselbe hier von Neuem durchzuführen.

Man kann vielleicht noch wünschen, auch den Fall behandelt zu sehen, wo die Declinationen alle gegeben sind, dagegen eine der drei Rectascensionen fehlt. Derselbe kann ganz leicht zu einem praktischen werden, z. B. dann, wenn man nach Anstellung einer in beiden Coordinaten gut gelungenen Beobachtung entdeckt, dass an der Rectascension des gebrauchten Vergleichssterne eine Unsicherheit haftet. Der erfahrene Beobachter weiss, dass Unsicherheiten von mehreren Zeitsecunden, aus Zähl- oder Schreibfehlern entsprungen, gar nicht so überaus selten selbst in den besten Sternkatalogen sich vorfinden, dass darauf nicht einige Rücksicht zu nehmen wäre.

Dieser Fall kann ohne besondere Schwierigkeit auf Grundlage der Gleichung (4) (40. Vorlesung) behandelt werden; denn obwohl in derselben die als nicht genau bekannt anzusehende Rectascension  $\alpha'$  ebenfalls vorkommt, so können wir es, da sie nur durch ihren Cosinus vertreten ist, leicht so einrichten, dass eine ganz rohe, nur bis auf etwa eine Zeitminute genaue Kenntniss derselben, wie wir sie ja immer zur Hand haben werden, zur Aufstellung der Relation zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  vollkommen hinreicht.

Offenbar ist die die Abhängigkeit des  $\varrho''$  von  $\varrho$  ausdrückende Gleichung unabhängig von dem Nullpunkte der Zählung der Rectascensionen; man kann diesen Nullpunkt daher, anstatt in das Frühlingsäquinocmium, in einen Punkt des Aequators verlegen, dessen Rectascension nach der gewöhnlichen Zählungsweise einen gewissen Werth  $\alpha'_0$  hat. Die Gleichung (4) der 40. Vorlesung wird dann übergehen in:

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'] \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- N'' - [\cos(\alpha' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'] \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho, \end{aligned}$$

worin dann aber für  $N, N', N''$  der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (X \cos \alpha'_0 + Y \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z \cos(\alpha' - \alpha'_0) \\ (X' \cos \alpha'_0 + Y' \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos(\alpha' - \alpha'_0) \\ (X'' \cos \alpha'_0 + Y'' \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos(\alpha' - \alpha'_0) \end{aligned}$$

zu setzen sind.

Es wird nun aber immer möglich sein, die willkürliche Grösse  $\alpha'_0$  so nahe dem  $\alpha'$  zu wählen, dass ohne merklichen Fehler:

$$\cos(\alpha' - \alpha'_0) = 1$$

gesetzt werden kann, und die obigen Ausdrücke die Form:

$$\begin{aligned}
 [tg \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) tg \delta'] \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\
 &- N'' - [tg \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) tg \delta'] \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho, \\
 N &= (X \cos \alpha'_0 + Y \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z \\
 N' &= (X' \cos \alpha'_0 + Y' \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z' \\
 N'' &= (X'' \cos \alpha'_0 + Y'' \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z''
 \end{aligned}$$

annehmen.

Aus dem Materiale des Kometen 1857 III. z. B. hätten wir, wenn wir statt der Declination der zweiten Beobachtung deren Rectascension als nicht genau bekannt voraussetzten, mit der Annahme:

$$\begin{aligned}
 \alpha'_0 &= 61^\circ 30': \\
 N &= + 0,38703 \\
 N' &= + 0,35315 \\
 N'' &= + 0,30840 \\
 [tg \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) tg \delta'] &= 0,18732 \\
 [tg \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) tg \delta'] &= - 0,11093.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Relation:

$$\begin{aligned}
 0,18732 \varrho'' &= 0,35315 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - 0,38703 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\
 &- 0,30840 + 0,11094 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho.
 \end{aligned}$$

Substituirt man für  $\frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''}$  und  $\frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''}$  die definitiven Werthe, wie sie sich schliesslich in der 41. Vorlesung ergaben, d. h.  $\log \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} = 0,34761$ ,  $\log \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} = 0,09737$ , so erhält man den zu dem Werthe  $\log \varrho = 9,96102$  gehörigen Werth von  $\log \varrho''$  gleich 9,80828, während derselbe an jener Stelle gleich 9,80809 gefunden wurde. Der kleine, für praktische Zwecke meistens nicht in Betracht kommende Unterschied rührt zum grösseren Theile daher, dass die hier gebrauchte Declination der mittleren Beobachtung, und die oben zu Grunde gelegte Rectascension nicht einer und derselben Parabel entsprechen.

Da, wie wir eben gesehen, eine Schätzung der verfehlten Rectascension bis auf 15 Bogenminuten oder 40 bis 60 Zeitsecunden genau genügt, die zur Bahnberechnung erforderliche Gleichung zwischen  $\varrho$  und  $\varrho''$  aufzustellen, so ist also das Fehlen der Rectascension bei einer Beobachtung ebenso wenig wie das der Declination ein Hinderniss für die Ausführung der Vorschriften der 40. Vorlesung.

Fünfundvierzigste Vorlesung.

Eine andere Umformung der Gleichung (4) in Vorlesung Vierzig.  
Bessel's Beitrag zur Kometentheorie.

Durch einen Kunstgriff, welchen wir im Vorhergehenden schon einige Male in Anwendung brachten, kann die Relation (4):

$$\begin{aligned} (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \varrho'' &= N' \frac{1}{c''} - N \frac{c}{c''} \\ &- N'' - (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \frac{c}{c''} \varrho \end{aligned}$$

so umgeformt werden, dass die Grösse  $\frac{1}{c''}$ , welche im Gegensatze zu  $\frac{c}{c''}$  schon in der ersten Näherung den Radius vector  $r'$  in die Formeln einführt, verschwindet.

Wir machen wieder die Bemerkung, dass der Nullpunkt der Zählung für die Längen nach Belieben gewählt werden kann, und nehmen jetzt als solchen einen Punkt der Ekliptik von der Länge  $90^\circ + \odot'$ . Es geht dadurch  $\cos \lambda$  über in  $\cos(\lambda - 90^\circ - \odot')$  oder  $\sin(\lambda - \odot')$ ,  $\cos \lambda'$  in  $\sin(\lambda' - \odot')$ ,  $\cos \lambda''$  in  $\sin(\lambda'' - \odot')$ ,  $N$  in  $R \sin(\odot - \odot') \operatorname{tg} \beta'$ ,  $N'$  in  $R' \sin(\odot' - \odot) \operatorname{tg} \beta'$  oder Null,  $N''$  in  $R'' \sin(\odot'' - \odot') \operatorname{tg} \beta'$  und die ganze obige Gleichung in:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'' &= \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \cdot \frac{c}{c''} \varrho \\ &+ \frac{R \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot) \frac{c}{c''} + R'' \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot'')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

über.

Es ist dies wieder eine durchaus strenge Gleichung, welche speciell das Olbers'sche  $M$  ergibt, sobald das Verhältniss  $\frac{c}{c''}$  bei dem Kometen dem entsprechenden Verhältniss bei der Erde oder der Grösse:

$$\frac{R'' \sin(\odot'' - \odot')}{R \sin(\odot' - \odot)}$$

gleichgesetzt wird; man erkennt sofort, dass alsdann das Zusatzglied zu dem Olbers'schen Ausdrucke verschwindet.

Die Gleichung führt uns daher ebenfalls auf das schon bekannte Hilfsmittel, die Olbers'sche Methode von dem Fehler der Voraussetzung zu befreien, dass die Sehne der Kometenbahn von dem mittleren Radius vector in demselben Verhältniss, wie bei der Erde geschnitten werde. Es ist zu dem Zwecke nur nöthig, wenn eine erste Rechnung die Distanz  $\varrho = (\varrho)$  und  $\frac{c}{c''} = \left(\frac{c}{c''}\right)$  hat finden lassen, die Bestimmung mit Zugrundelegung des Ausdruckes:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \left(\frac{c}{c''}\right) \\ &+ \frac{R \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot) \cdot \left(\frac{c}{c''}\right) + R'' \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot'')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \frac{1}{(\varrho)} \end{aligned}$$

zu wiederholen. Um nun aber zu vermeiden, dass man bei der Berechnung von  $\frac{c}{c''}$  jedesmal auf die Elemente selbst zurückgehen müsste, behandelt Bessel die Aufgabe:  $\frac{c}{c''}$  durch die beiden äusseren Radien und die Zwischenzeiten unmittelbar zu finden<sup>1)</sup>.

Wir haben für diese Aufgabe schon oben eine indirecte, praktisch sehr bequeme Auflösung kennen gelernt, indem wir bemerkten, dass für  $r'^2$  die Gleichung:

$$r'^2 = \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial t'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial t' \eta''} \right] r^2 + \left[ \left( \frac{\partial'' \eta''}{\partial t' \eta''} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial t'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial t' \eta''} \right] r''^2 - \frac{\partial \eta}{\partial t'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial t' \eta''} x^2$$

existire. Von einer Schätzung für  $r'$  ausgehend, fanden wir einen Näherungswerth für  $\eta, \eta', \eta''$ , mit welchem wir dann  $r'$  genauer bestimmen konnten; dieses lieferte uns darauf genauere Werthe von  $\eta, \eta', \eta''$ , dann wurde die Berechnung des  $r'$  wiederholt und so fort, bis sich nichts mehr änderte. Obgleich die rasche Convergenz dieses Verfahrens das Bedürfniss einer directen Auflösung nicht fühlen lässt, so kann doch die elegante Behandlung des Problems durch Bessel hier nicht gut übergangen werden.

Bedeutet nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung  $v, v', v''$  die wahren Anomalien, so wird bei der Parabel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{c''} = \frac{n}{n''} = \frac{r' r'' \sin(v'' - v')}{r r' \sin(v' - v)} &= \frac{\sin(v'' - v')}{\sin(v' - v)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} v^2}{\cos \frac{1}{2} v''^2} \\ &= \frac{(tg \frac{1}{2} v'' \cos \frac{1}{2} v' - \sin \frac{1}{2} v') (\cos \frac{1}{2} v' + tg \frac{1}{2} v'' \sin \frac{1}{2} v')}{(\sin \frac{1}{2} v' - tg \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v') (\cos \frac{1}{2} v' + tg \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v')} \\ &= \frac{tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v'}{tg \frac{1}{2} v' - tg \frac{1}{2} v} \cdot \frac{1 + tg \frac{1}{2} v' tg \frac{1}{2} v''}{1 + tg \frac{1}{2} v tg \frac{1}{2} v'} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Wir fanden nun schon in Vorlesung 35 für den doppelten parabolischen Sector  $\Sigma$  die Gleichung:

$$\frac{\Sigma}{2q} = q (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v) ( \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v''^2 + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v'' tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^2 + 1 ),$$

also wenn wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{3k}{\sqrt{2}} (t'' - t') &= T, \\ \frac{3k}{\sqrt{2}} (t'' - t) &= T', \\ \frac{3k}{\sqrt{2}} (t' - t) &= T'' \end{aligned}$$

setzen und die Gleichung auf die Intervalle  $t'' - t$  und  $t' - t$  anwenden:

$$\left. \begin{aligned} T'' &= q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v' - tg \frac{1}{2} v) (3 + tg \frac{1}{2} v^2 + tg \frac{1}{2} v tg \frac{1}{2} v' + tg \frac{1}{2} v'^2) \\ T &= q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v') (3 + tg \frac{1}{2} v''^2 + tg \frac{1}{2} v'' tg \frac{1}{2} v' + tg \frac{1}{2} v'^2) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

oder:

$$\begin{aligned} T'' - q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v' - tg \frac{1}{2} v)^3 &= 3 q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v' - tg \frac{1}{2} v) (1 + tg \frac{1}{2} v tg \frac{1}{2} v') \\ T - q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v')^3 &= 3 q^{\frac{3}{2}} (tg \frac{1}{2} v'' - tg \frac{1}{2} v') (1 + tg \frac{1}{2} v' tg \frac{1}{2} v''). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Siehe Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Zweites Heft, S. 1.

Es sei noch zur Abkürzung:

$$\sqrt{q} \cdot (tg^{1/2} v' - tg^{1/2} v) = u''; \quad \sqrt{q} \cdot (tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v) = u;$$

dividirt man die letzterhaltenen Gleichungen in einander, so erhält man mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{c}{c''} = \frac{n}{n''} = \frac{T - u^3}{T'' - u''^3} \dots \dots \dots (4)$$

Die unbekanntenen Grössen  $u$  und  $u''$ , von welchen demnach das gesuchte Verhältniss abhängt, erhält man durch die gegebenen Grössen  $r, r'', T, T''$  ausgedrückt, wenn man  $q, tg^{1/2} v, tg^{1/2} v''$  aus den Gleichungen (3) und aus:

$$tg^{1/2} v' = tg^{1/2} v + \frac{u''}{\sqrt{q}}, \quad tg^{1/2} v'' = tg^{1/2} v'' - \frac{u}{\sqrt{q}} \dots \dots \dots (5)$$

$$tg^{1/2} v^2 = \frac{r}{q} - 1, \quad tg^{1/2} v''^2 = \frac{r''}{q} - 1 \dots \dots \dots (6)$$

eliminiert. Substituirt man für  $tg^{1/2} v'$  in (3) seine Werthe aus (5), so erhält man, mit Berücksichtigung von (6):

$$\left. \begin{aligned} T'' &= u'' (3r + 3u'' tg^{1/2} v \sqrt{q} + u''^2) \\ T &= u (3u'' - 3u tg^{1/2} v'' \sqrt{q} + u^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

ferner, weil nach (5) und (6):

$$\left. \begin{aligned} u'' + u &= tg^{1/2} v'' \sqrt{q} - tg^{1/2} v \sqrt{q} \\ r'' - r &= q tg^{1/2} v''^2 - q tg^{1/2} v^2, \end{aligned} \right.$$

die Gleichungen:

$$\frac{r'' - r}{u'' + u} = tg^{1/2} v'' \sqrt{q} + tg^{1/2} v \sqrt{q}$$

$$2 tg^{1/2} v \sqrt{q} = \frac{r'' - r}{u'' + u} - (u'' + u); \quad 2 tg^{1/2} v'' \sqrt{q} = \frac{r'' - r}{u'' + u} + (u'' + u).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (7), so wird:

$$2 T'' = u'' \left( 6r + 3u'' \frac{r'' - r}{u'' + u} - 3u u'' - u''^2 \right)$$

$$2 T = u \left( 6r'' - 3u \frac{r'' - r}{u'' + u} - 3u u'' - u^2 \right).$$

Addirt man diese Gleichungen, einmal unmittelbar und einmal nach Multiplication mit  $-u''$  und  $+u$ , so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} 2(T + T'') &= 3(r'' + r)(u'' + u) - (u'' + u)^3 \\ 2(Tu'' - T''u) &= u u'' [3(r'' - r) + u'^2 - u^2] \end{aligned} \right.$$

und, wenn:

$$u + u'' = 2z, \quad u - u'' = 2z'$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} T + T'' &= 3(r'' + r)z - 4z^3 \\ 2(T - T'')z - 2(T + T'')z' &= (z^2 - z'^2) [3(r'' - r) - 4zz'] \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

Der zweiten Gleichung kann man auch, mittelst der ersten, die folgende Form geben:

$$\left. \begin{aligned} z'^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{r'' - r}{z} \cdot z'^2 + 3 \left( \frac{r'' + r}{2} - z^2 \right) \cdot z' \\ z' = \frac{T - T''}{2} - \frac{3}{4} (r'' - r) z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Die Bestimmung des Verhältnisses  $\frac{c}{c''}$  oder  $\frac{\eta}{\eta''}$  ist also von zwei cubischen Gleichungen abhängig, von denen die einfachere dem irreductiblen Falle angehört. Die Grösse  $z$  kann ihrer Natur nach nicht negativ werden; die bekannte trigonometrische Formel lässt sogleich erkennen, dass zwei positive Wurzeln existiren, von denen die kleinere zu wählen ist, wenn der Komet weniger als  $180^\circ$  in wahrer Anomalie zurückgelegt hat. Die Gleichung für  $z'$  hat nur eine reelle Wurzel. Für die praktischen Anwendungen wird man zuweilen mit Reihenentwickelungen, durch welche noch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, hinreichende Schärfe erlangen. Die Reihenentwickelungen sind nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten ganz ähnlich, wie in Vorlesung 35 leicht auszuführen und ergeben:

$$z = \frac{T + T''}{3(r'' + r)} + \dots = \frac{T'}{3(r'' + r)} + \dots$$

$$z' = \frac{T - T''}{3(r'' + r)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2} + \dots$$

oder:

$$u'' = \frac{2T'}{3(r'' + r)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2},$$

$$u = \frac{2T}{3(r'' + r)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2},$$

woraus dann die Gleichung (4), und da  $\frac{c}{c''} = \frac{T}{T''} \cdot \frac{\eta}{\eta''}$ :

$$\eta = 1 - \frac{u^3}{T}$$

$$\eta'' = 1 - \frac{u''^3}{T''}$$

bestimmt wird.

Bei den oben gebrauchten Beobachtungen des Kometen 1857 III. haben wir:

$$\log \vartheta = 8,93648, \quad \log T = \log \frac{3\vartheta}{\sqrt{2}} = 9,26309$$

$$\log \vartheta' = 9,19092, \quad \log T' = \log \frac{3\vartheta'}{\sqrt{2}} = 9,51753$$

$$\log \vartheta'' = 8,83769, \quad \log T'' = \log \frac{3\vartheta''}{\sqrt{2}} = 9,16430$$

$$r = 0,73582,$$

$$r'' = 0,55755.$$

Es ergibt sich nach den Reihenentwickelungen:

$$\log \eta = 9,99760, \quad \log \eta'' = 9,99898.$$

Für den vorliegenden Fall zeigen sich hiernach, wenn man mit den früher erhaltenen Werthen vergleicht, die Reihenentwickelungen für  $u$  und  $u''$  hinreichend weit fortgesetzt. Wo es auf Erlangung grösserer Schärfe abgesehen ist, dürfte meistens das oben beschriebene indirecte Verfahren zur Bestimmung von  $\frac{c}{c''}$  aus  $r$  und  $r''$  den Vorzug verdienen.

Sechsvierzigste Vorlesung.

Ueber Construction einer Tafel zum schnellen Erkennen der Identität von Kometen.

Die in den vorhergehenden Vorlesungen entwickelten Methoden nehmen auf alle Umstände Rücksicht, welche bei neu entdeckten Kometen vorzukommen pflegen, es sei denn, dass sich die Bahn schon in den ersten Rechnungen als merklich von der Parabel abweichend erweist. Letzterer Fall ist gar nicht selten, und die Geschichte der Kometen-erscheinungen hat auffallende Beispiele davon verzeichnet, dass die Astronomen durch solche Körper von kurzer Umlaufzeit überrascht wurden, wie bei dem grossen Kometen des Jahres 1770, dessen Periode sich unerwarteter Weise zu nur  $5\frac{1}{2}$  Jahren herausstellte. Es fällt bei einem solchen Vorkommnisse der Berechnung der parabolischen Bahn die Rolle zu, den Beweis zu führen, dass die Beobachtungen nicht darstellbar werden, eine Aufgabe, welche bei der gebräuchlichen Anwendungsweise der Olbers'schen Methode etwas weitläufige Rechnungen verursacht; denn es ist der gesammte Einfluss aller der Vernachlässigungen, welche man sich zu erlauben pflegt, wie der Parallaxe, der Aberration, der Bewegung des Aequinoctiums u. s. w. auf die Bahnbestimmung sehr schwer zu schätzen. Die zuverlässigsten Beobachtungen vorausgesetzt, wird man daher erst, wenn die Abweichungen von der Parabel in ansehnlicher Grösse hervortreten, den Beweis ihres Vorhandenseins leicht führen können. Mit geringerer Mühe dürfte derselbe Nachweis auf überzeugende Art nach der in Vorlesung 42 gegebenen Uebersetzung der Gauss'schen Form auf den Aequator zu führen sein, weil sie der Berücksichtigung aller Correctionen in hohem Grade Vorschub leistet.

Um aber die eben empfohlene, ebenso kurze als scharfe Methode noch nützlicher zu machen, wäre es wünschenswerth, den Rechner auch noch der schliesslichen Bestimmung der Elemente für die Ekliptik zu überheben. Dies ist um so leichter thunlich, als ja vorerst die beiden Hauptzwecke der Bahnbestimmung, die Aufstellung der Ephemeride, und die Untersuchung der Identität mit früheren Kometen, ohne die Kenntniss jener Elemente erreicht werden können.

Um nun die Frage nach der Identität möglichst rasch zur Entscheidung bringen zu können, bedarf es nur einer leichten Umformung des Verzeichnisses der früher erschienenen Kometen, bei welcher an die Stelle der Elemente  $\Omega, \pi - \Omega, i$  die Gauss'schen Constanten  $A + \pi - \Omega$  oder  $A', B + \pi - \Omega$  oder  $B', C + \pi - \Omega$  oder  $C'$  mit Hinzufügung ihrer Secularänderungen gesetzt werden. Eine solche von dem Verfasser auf Grund des in der dritten Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung enthaltenen Kometenverzeichnisses berechnete Tafel findet der Leser im Anhange als Tafel XIX gegeben. Es ist klar, dass die drei von einander unabhängigen Constanten  $A', B', C'$ , die Elemente  $\Omega, \pi - \Omega$  und  $i$  vollständig ersetzen.

Soll ein neu erscheinender Komet, dessen Bahn man eben bestimmt, mit einem früheren für identisch gelten können, so müssen, unter Berücksichtigung der Secularänderungen, die  $A', B', C'$  und  $q$  der neuen Erscheinung mit denen der alten übereinstimmen.