Theoretische Astronomie

Klinkerfues, Wilhelm

Braunschweig, 1912

Zweite Abtheilung. Die Berechnung von Bahnen aus gegebenen Beobachtungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6723

Zweite Abtheilung.

Die Berechnung von Bahnen aus gegebenen Beobachtungen.

Sechszehnte Vorlesung.

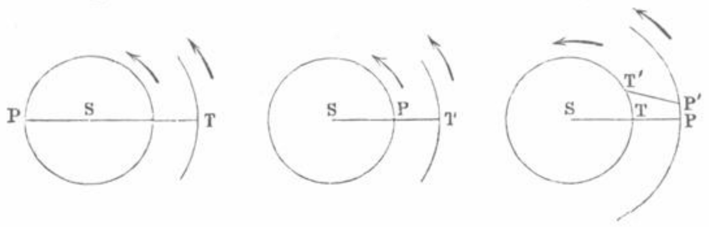
Berechnung einer Kreisbahn.

Von den Problemen, welche sich mit der Bestimmung der Bahnelemente aus gegebenen geocentrischen Beobachtungen beschäftigen, ist das der Berechnung einer Kreisbahn, welche sich an zwei vollständige geocentrische Oerter anschliesst, das leichteste, und obwohl mit der Annahme, dass die Excentricität e gleich Null sei, die Strenge verletzt wird, doch bei Planeten nicht ohne praktische Bedeutung. Vor der Entdeckung der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter und der dadurch veranlassten Einführung der Gauss'schen Methoden in die Astronomie war es sogar der einzige Weg, den man zur Ermittelung der Bahnelemente kannte, zuerst die Annahme $e = 0$ zu machen und das gefundene Resultat durch kleine Correctionen mehr und mehr zu verbessern. Die Bahnen aller älteren und grösseren Planeten mit Einschluss des im Jahre 1781 von Wilhelm Herschel entdeckten Uranus sind auf diese Weise gefunden worden; dieselbe konnte sogar noch bei Gelegenheit der Auffindung des Neptun gute Dienste leisten. Auch für die kleinen Planeten, deren Bahnen bekanntlich im Durchschnitt viel excentrischer sind, als die der grösseren, wird man sich recht gut einer auf eine Kreisbahn gegründeten Ephemeride bedienen können, wenn es bloss darauf ankommt, einen solchen neu entdeckten Himmelskörper auf einige Wochen zu verfolgen; es ist dann angenehm, dass man zu dem Zwecke nicht eine dritte Beobachtung abzuwarten hat, und doch schon Einiges über den Lauf erfährt, z. B. vor Allem, ob die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik gross oder gering ist, in welchem letzteren Falle nachher bei der Bestimmung der elliptischen Elemente anders verfahren werden muss, als wenn sie gross ist; die Berechnung der Kreisbahn eignet sich daher sehr gut zum Sondiren der Neigung, auf welches Geschäft Gauss aus dem eben vorläufig angedeuteten Grunde grosses Gewicht legte.

Handelt es sich dagegen darum, einen kleinen Planeten nach Monate lang andauernder Unsichtbarkeit wieder aufzufinden, so wird das nach einer Kreisbahn-Ephemeride fast niemals gelingen, weil deren Fehler anfangs schwach, dann immer stärker und stärker anwachsen. Es bedarf, wenn eine solche Periode der Unsichtbarkeit im Anzuge ist, durchaus einer mit aller Sorgfalt und ohne die Hypothese $e = 0$ durchgeführten Rechnung, wie sie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll. Für Kometenbahnen vollends würde jene Annahme durchaus unzulässig sein.

Es ist hier der Ort, den Leser noch mit einigen Verhältnissen des Planetenlaufes bekannt zu machen, welche bei Untersuchungen dieser Art von Bedeutung sind. Hat ein Planet dieselbe geocentrische Länge, wie die Sonne, so sagt man, der Planet sei in Conjunction; dabei wird noch weiter unterschieden, ob derselbe jenseits oder diesseits der Sonne stehe. Das Letztere nennt man die untere, das Erstere obere Conjunction. Die untere Conjunction bringt, wenn mit dieser Gleichheit der geocentrischen Längen von Planet und Sonne zugleich ein geringer Unterschied der Breiten, kleiner als der Halbmesser der Sonnenscheibe, verbunden ist, einen Vorübergang des Planeten vor der Sonnenscheibe. Von den bis jetzt bekannten Planeten können nur Mercur und Venus, die sogenannten unteren Planeten, eine untere Conjunction haben; alle übrigen, wie Mars, die kleinen Planeten, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun, haben nur die obere Conjunction und sind schon längere Zeit vor und nach derselben für unsere Instrumente unsichtbar wegen der Nähe der Sonne, deren Strahlen sie gleichsam verdecken. Die günstigste Zeit für ihre Sichtbarkeit und demnach auch für die Beobachtungen ist ihre sogenannte Opposition, d. h. die Zeit, zu welcher ihre geocentrische Länge um 180° von der der Sonne verschieden ist. Sie culminiren dann um Mitternacht, sind also die ganze Nacht oder doch einen grossen Theil derselben hindurch über dem Horizonte und ausserdem der Erde am nächsten. Die Figuren 41, 42 und 43, in welchen S die

Fig. 41. Fig. 42. Fig. 43.



Sonne, T die Erde, P einen Planeten vorstellen, versinnlichen nach der Reihe die obere Conjunction, die untere und die Opposition der Planeten. Die Richtung der Bewegung in der kreisförmig angenommenen Bahn ist mit einem Pfeil angedeutet, zum leichteren Verständniss des Folgenden.

Wir wissen schon aus Vorlesung Vier, dass die Winkelbewegung eines Planeten in kreisförmiger Bahn desto grösser ist, je kleiner der Halbmesser a derselben, da sich ja die mittlere tägliche Bewegung durch $\frac{k}{a^{3/2}}$ ausdrückt. Nun erhält man die lineare Bewegung des Planeten oder seinen in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg offenbar, wenn man jene Winkelbewegung mit a multiplicirt; in der Kreisbahn drückt sich demnach die lineare Geschwindigkeit durch $\frac{k}{\sqrt{a}}$ aus. Hiernach ist auch die lineare Geschwindigkeit in der Kreisbahn um so kleiner, je grösser a oder der Halbmesser der Bahn ist. Die Geschwindigkeit der Erde übertrifft also die des in Opposition befindlichen Planeten; ist nun in Fig. 43 noch T' ein Ort der Erde kurze Zeit nach der Opposition, P' der entsprechende Ort des Planeten, so ist die Richtung in Länge, in welcher der Planet gesehen wird, d. h. die Projection der Verbindungslinie zwischen Erde und Planet auf der Ekliptik von $\overline{TP}$ in $\overline{T'P'}$ übergegangen, hat also, da $\overline{TT'} > \overline{PP'}$, eine rückgängige Bewegung gemacht. Man sieht hieraus, dass zur Zeit der Opposition die geocentrischen Längen abnehmen, der Planet daher sich in dem Theile des unendlich entfernten Fixsternhimmels, auf welchen er sich für unser Auge projicirt, in einem Sinne gegen die Sterne zu bewegen scheint, welcher seiner wahren Bewegung entgegengesetzt ist; der Planet ist dann rückläufig. Dasselbe ist auch bei unteren Conjunctionen der Fall, bei den oberen dagegen ist es umgekehrt, denn bei den letzteren wirkt die Erdbewegung der Planetenbewegung in ihrem Bestreben, die geocentrischen Längen zu vergrössern, nicht entgegen, sondern trägt noch selbst dazu bei; in den oberen Conjunctionen wird deshalb schnelles Wachsen der geocentrischen Längen stattfinden. Offenbar müssen Zu- und Abnahme allmälig in einander übergehen, es muss einige Zeit vor der Opposition sowohl wie einige Zeit nachher einen Zeitpunkt geben, wo weder Abnahme noch Zunahme der geocentrischen Länge stattfindet und der Planet seinen Ort unter den Fixsternen beinahe gar nicht zu ändern scheint. Es sind dies die Zeiten des sogenannten Stationärwerdens des Planeten; die Bewegungen der Erde und des Planeten stehen dann in einem solchen Verhältniss zu einander, dass die Verbindungslinie beider Körper für eine kurze Zeit sich parallel bleibt.

Nach diesen Bemerkungen können wir uns leicht von den Hauptzügen in dem geocentrischen Laufe der oberen Planeten (die vorläufig mehr als die unteren unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen) Rechenschaft ablegen. Ein Asteroid z. B., um die Opposition herum vorzüglich sichtbar, und deshalb auch meistens nahe bei derselben entdeckt, rückt, wie die Sternbilder, in welchen es aufzusuchen ist, immer früher und früher, zuerst nach Mitternacht, darauf gegen Mitternacht, endlich schon in der Abenddämmerung untergehend, während zuletzt sein Abstand von der Erde rasch zunimmt, der Periode seiner Unsichtbarkeit entgegen. Nach längerer Zeit, bei den meisten von diesen Gestirnen nach mehr als Jahresfrist, kommt der Planet in einer ganz anderen Gegend des Sternhimmels in der Morgendämmerung wieder zum Vorschein, indem er einige Stunden vor der Sonne aufgeht. Immer mehr in den Nachthimmel hineinrückend, dabei wegen seiner Annäherung zur Erde fortwährend an Licht zunehmend, wird der Planet stationär, kommt in Opposition, wird zum zweiten Male stationär, verschwindet am Abendhimmel u. s. f. Diesen Verlauf vom Auftauchen in der Morgendämmerung bis zum Verschwinden am Abendhimmel pflegt man eine Erscheinung des Planeten zu nennen.

Die oben erklärten Grundzüge in der Erscheinung eines oberen Planeten sich zu vergegenwärtigen, ist bei vielen Gelegenheiten nützlich, ja fast nothwendig, weswegen sie denn auch in diesen einleitenden Bemerkungen ausführlich vorzutragen waren.

Siebenzehnte Vorlesung.

Formeln zu der Berechnung einer Kreisbahn.

Es wurde schon in voriger Vorlesung beiläufig bemerkt, dass man für die Bestimmung einer Kreisbahn nur zwei vollständige Beobachtungen, welche zwei Längen und zwei Breiten, also vier von einander unabhängige Daten, enthalten, nöthig hat; denn die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten beträgt ebenfalls nur vier: ☊ oder die Länge des aufsteigenden Knotens, i oder die Neigung der Bahn, a oder der Halbmesser der Bahn, endlich, weil man wissen muss, in welchem Punkte seiner Bahn der Planet zu einer gegebenen Epoche sich befunden hat, das Argument der Breite für jene Zeit, d. h. der Winkelabstand vom aufsteigenden Knoten, in der Bahnebene gezählt.

Wir bezeichnen die letztere Grösse, welche hier an die Stelle von dem $\pi - \Omega + v$ der allgemeinen Formeln tritt, wieder mit u.

Wir beginnen hier mit einer Methode, welche an die räumliche Phantasie des Lesers nur geringe Anforderungen stellt, aus den Gleichungen der Vorlesungen des Abschnittes I. mit Leichtigkeit entwickelt werden kann, und die auch an Bequemlichkeit kaum hinter den später mitzutheilenden zurücksteht.

Es seien λ und λ' die geocentrischen Längen des Gestirnes zu den Beobachtungszeiten t und t', β und β' die geocentrischen Breiten, $\odot$ und $\odot'$ die Längen der Sonne um dieselbe Zeit, R und R' die beiden zugehörigen Radienvectoren oder Abstände der Erde von der Sonne, so lassen sich nach den Fundamentalformeln des Abschnittes I. die heliocentrischen Polarcoordinaten des Gestirnes, r, l, b in der ersten Beobachtung oder zur Zeit t, und r', l', b' in der zweiten Beobachtung oder zur Zeit t', durch die entsprechenden geocentrischen Coordinaten ϱ, λ, β und ϱ', λ', β' wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
r \cos b \cos l &= \varrho \cos\beta \cos\lambda - R \cos\odot \\
r \cos b \sin l &= \varrho \cos\beta \sin\lambda - R \sin\odot \\
r \sin b &= \varrho \sin\beta \\
r' \cos b' \cos l' &= \varrho' \cos\beta' \cos\lambda' - R' \cos\odot' \\
r' \cos b' \sin l' &= \varrho' \cos\beta' \sin\lambda' - R' \sin\odot' \\
r' \sin b' &= \varrho' \sin\beta'.
\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung einer Kreisbahn ist $r' = r$. Man sieht ferner, dass die Kenntniss von einer der Unbekannten in diesen beiden Systemen von Gleichungen, die Kenntniss von ϱ zum Beispiel, sogleich auch die übrigen, r, b, l, b', l' und ϱ' liefern würde. Denn man findet, wenn man die drei ersten Gleichungen addirt, nachdem man auf beiden Seiten in das Quadrat erhoben:

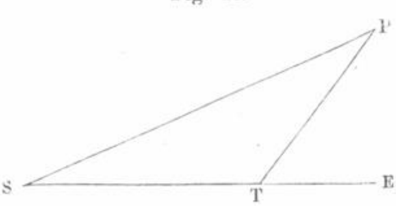
$$\left.\begin{aligned}
r^2 &= \varrho^2 - 2R\varrho\cos\beta\,(\cos\lambda\cos\odot + \sin\lambda\sin\odot) + R^2 \\
&= \varrho^2 - 2R\varrho\cos\beta\cos(\lambda - \odot) + R^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und ebenso aus den drei anderen:

$$\left.\begin{aligned}
r'^2 &= \varrho'^2 - 2R'\varrho'\cos\beta'\,(\cos\lambda'\cos\odot' + \sin\lambda'\sin\odot') + R'^2 \\
&= \varrho'^2 - 2R'\varrho'\cos\beta'\cos(\lambda' - \odot') + R'^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Grösse $\cos\beta\cos(\lambda - \odot)$ in der Gleichung (1) giebt sich durch eine sehr leichte Betrachtung als der Cosinus des Winkels zu erkennen, den an der Erde die Richtung nach dem Planeten und die nach der Sonne mit einander bilden. Um dies zu erkennen, braucht man sich nur mit Fig. 44 das Dreieck Sonne, Erde, Planet zur Zeit der Beobachtung zu vergegenwärtigen; bedeutet S die Sonne, T die Erde, P den Planeten, E einen in der Verlängerung von $\overline{ST}$ gelegenen Punkt, so ist:

Fig. 44.



$$\overline{SP}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TP}^2 - 2\,\overline{ST}\,.\,\overline{TP}\,.\cos PTS$$

oder

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho\cos\chi \quad \ldots \quad (3)$$

wenn wir den Winkel PTE, der bei vollständigen Beobachtungen immer bekannt wird und in den Rechnungen dieser Art eine grosse Rolle spielt, mit χ bezeichnen. Analog haben wir für die andere Beobachtung:

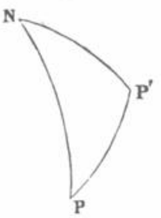
$$r^2 = R'^2 + \varrho'^2 + 2R'\varrho'\cos\chi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Daher ergiebt sich durch Vergleich dieser Gleichungen mit (1) und (2)

$$\begin{aligned}
\cos\chi &= -\cos\beta\cos(\lambda - \odot) \\
\cos\chi' &= -\cos\beta'\cos(\lambda' - \odot').
\end{aligned}$$

Wir können nun mit Leichtigkeit prüfen, ob ein bestimmter Werth von ϱ der Bewegungsbedingung in einer Kreisbahn genügt, d. h. ob der von den beiden gleichen Radienvectoren r des Planeten eingeschlossene Bogen, wie wir ihn aus den uns bekannt werdenden Grössen l, b, l' und b' finden, gleich

Fig. 45.



$$\frac{k}{a^{3/2}}(t'-t) \text{ oder } \frac{k}{r^{3/2}}(t'-t)$$

wird, wie es die Bewegung in einer Kreisbahn erfordert. Die zur Berechnung dieses Winkels, der in den praktischen Anwendungen immer recht klein sein wird, und daher sich nicht scharf durch den Cosinus bestimmen lässt, aus l, b, l', b' geeigneten Formeln ergeben sich mit Hülfe der Fig. 45.

In dem sphärischen Dreieck NPP' ist N der Nordpol der Ekliptik, P der heliocentrische Ort des Planeten auf der Sphäre in der ersten, P' der in der zweiten Beobachtung, also

$$\begin{aligned} &\text{Seite } NP \;.\;.\;.\;.\; = 90^0 - b \\ &\;\;\;\text{„}\;\; NP' \;.\;.\;.\;.\; = 90^0 - b' \\ &\text{Winkel } PNP' \;.\;. = l' - l. \end{aligned}$$

Nach einer bekannten Fundamentalformel hat man:

$$\begin{aligned} \cos\overline{PP'} &= \cos\overline{NP}\,.\cos\overline{NP'} + \sin\overline{NP}\,.\sin\overline{NP'}\,.\cos PNP' \\ &= \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos(l'-l). \end{aligned}$$

Um die Gleichung für kleine Werthe von $\overline{PP'}$ brauchbarer zu machen, kann man setzen:

$$\begin{aligned} \sin b \sin b' &= \sin b \sin b' \left[\cos {}^1/_2 (l'-l)^2 + \sin {}^1/_2 (l-l)^2\right] \\ \cos b \cos b' \cos(l'-l) &= \cos b \cos b' \left[\cos {}^1/_2 (l'-l)^2 - \sin {}^1/_2 (l'-l)^2\right], \end{aligned}$$

wodurch zunächst:

$$\cos\overline{PP'} = \cos(b'-b)\cos {}^1/_2 (l'-l)^2 - \cos(b'+b)\sin {}^1/_2 (l'-l)^2$$

erhalten wird. Subtrahirt man diese Gleichung nun noch von der Gleichung:

$$1 = \cos {}^1/_2 (l'-l)^2 + \sin {}^1/_2 (l'-l)^2,$$

so findet man:

$$\sin {}^1/_2 \overline{PP'}^2 = \sin {}^1/_2 (b'-b)^2 \cos {}^1/_2 (l'-l)^2 + \cos {}^1/_2 (b'+b)^2 \sin {}^1/_2 (l'-l)^2 \quad (5)$$

und es muss nun nach dem Vorhergehenden, um die Bewegungsgesetze in der Kreisbahn zu befriedigen,

$$\overline{PP'} = \frac{k}{r^{3/2}}(t'-t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

werden. Durch Versuche wird man meistens mit Leichtigkeit den Werth von ϱ und entsprechend die r, b, l, b', l' finden, welche der Bedingung genügen. Denkt man sich diejenigen Werthe von ϱ, welche man auf diese Eigenschaft prüft, als Abscissen auf einer Axe aufgetragen, die zugehörigen Werthe von $\overline{PP'}$, wie sie aus der Gleichung (6) sich ergeben, als die Ordinaten, anderentheils aber auch die Werthe von $\frac{k}{r^{3/2}}(t'-t)$ als Ordinaten aufgetragen, so entstehen zwei Curven, welche durch ihren Schnittpunkt den Werth von ϱ, welcher der zu erfüllenden Bedingung genügt, angeben. Vorausgesetzt, dass überhaupt der Anschluss der Beobachtungen an die Kreisbahn möglich ist (was bei einigermaassen grossem Zeitintervall der beiden Beobachtungen keineswegs immer der Fall ist), müssen die beiden Curven eine die andere schneiden und es ist leicht einzusehen, dass die Abscisse des Schnittpunktes das gesuchte ϱ ist. Mittelst dieser geometrischen Betrachtung und dem darauf gebauten graphischen Verfahren kann man zunächst einen sehr hohen Grad von Annäherung an die Wahrheit erreichen, und dann nach der bekannten Regel vom sogenannten falschen Satze *(regula falsi)*, welcher annimmt, dass die Fehler einer Hypothese über eine zu ermittelnde Unbekannte [im gegenwärtigen Falle der Unterschied zwischen dem Ergebniss der Gleichungen (5) und (6)], sich verhalten, wie die Correctionen, deren die entsprechenden angenommenen Werthe der Unbekannten bedürfen, den definitiven Werth von ϱ interpoliren. Gesetzt, es sei für eine gewisse Annahme von ϱ: $\varrho = \varrho_0$, der Unterschied des Ergebnisses von (5) und (6) gleich p, für eine andere Annahme von ϱ dagegen: $\varrho = \varrho_0 + \varDelta\varrho$, sei der Unterschied aus jenen Gleichungen $p + \varDelta p$, ferner $\varrho_0 + \xi$ der wahre Werth von ϱ, so hat man die Proportion:

$$\varDelta\varrho : \varDelta p = \xi : p,$$

und

$$\varrho = \varrho_0 + \xi = \varrho_0 + \frac{p\varDelta\varrho}{\varDelta p}$$

wird der wahre Werth von ϱ sein. Dieser Ausdruck für die Verbesserung setzt voraus, dass ξ schon sehr klein sei; um zu sehen, ob diese letztere Bedingung in hinreichendem Grade erfüllt war, wird man den verbesserten Werth von ϱ substituiren, und wenn er noch nicht ganz genügt, das angegebene Verfahren wiederholen. Ist auf solche Weise ϱ und dann r, b, l, b', l' bestimmt worden, so findet man die Argumente der Breite u und u', welche zu den beiden Beobachtungszeiten gehören, sowie die Elemente ☊ und i aus folgenden im Abschnitte I. entwickelten Formeln:

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin i \sin u \\ \sin b' &= \sin i \sin u' \\ tg\,(l - ☊) &= \cos i\; tg\, u \\ tg\,(l' - ☊) &= \cos i\; tg\, u'. \end{aligned}$$

Indem man einmal die beiden ersten dieser Gleichungen zu einander addirt, das andere Mal von einander subtrahirt, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \sin i \sin {}^1\!/_2 (u' + u) \cos {}^1\!/_2 (u' - u) &= \sin {}^1\!/_2 (b' + b) \cos {}^1\!/_2 (b' - b) \\ \sin i \cos {}^1\!/_2 (u' + u) \sin {}^1\!/_2 (u' - u) &= \cos {}^1\!/_2 (b' + b) \sin {}^1\!/_2 (b' - b) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

woraus sich, da $u' - u$ bekannt und gleich $\frac{k}{r^{3/2}}\,(t' - t)$ ist, sowohl i als auch u und u' ergeben. Die Substitution in die beiden letzten der vier obigen Gleichungen, wobei dann wieder zu berücksichtigen, dass $l -$ ☊ mit u, ebenso $l' -$ ☊$'$ mit u' in demselben Quadranten liegen muss, liefert zwei Werthe von ☊; letztere müssen offenbar mit einander sehr nahe übereinstimmen, wenn die Rechnung in allen Theilen für richtig gelten soll. Zur vollständigen Controle der Rechnung ist immer sehr rathsam, zu prüfen, ob die bei der Bahnbestimmung zu Grunde liegenden Beobachtungen durch die gefundenen Elemente auch wirklich dargestellt werden.

Achtzehnte Vorlesung.

Modification der Formeln der letzten Vorlesung.

Die eben gegebenen Formeln haben noch eine Unbequemlichkeit, die sich auf ziemlich einfache Weise vermeiden lässt; sie erfordern nämlich für jeden Versuch, den man über den Werth von ϱ anstellt, auch die Berechnung von b, l, b', l'. Da nun die Kenntniss dieser letzteren Grössen von keinem weiteren Nutzen ist, so lange man nicht den definitiven Werth von ϱ ermittelt hat, erscheint es zweckmässig, dieselben aus der Rechnung für die Versuche ganz zu eliminiren. Ziemlich bequem gestalten sich diese Formeln, wenn man für ϱ und r eine andere Unbekannte einführt, und zwar in folgender Weise: Nennen wir in Fig. 44 den Winkel an P, d. h. am Planeten, in der ersten Beobachtung z, in der zweiten z' (wobei nur noch vor der Verwechselung mit der heliocentrischen Coordinate z und z' gewarnt werden muss), so wird:

$$r = \frac{R \sin \chi}{\sin z}$$

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

$$\varrho = \frac{R \sin(\chi - z)}{\sin z}$$

$$\varrho' = \frac{R' \sin(\chi' - z')}{\sin z'}.$$

Es ist nun $r = r'$, also besteht zwischen z und z' die Gleichung:

$$\frac{R \sin \chi}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

oder:

$$\frac{\sin z'}{\sin z} = \frac{R'}{R} \frac{\sin \chi'}{\sin \chi},$$

und es ist daher z' aus z immer leicht zu berechnen. Das Verhältniss $\frac{\varrho'}{\varrho}$ wird ausgedrückt durch:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sin z}{\sin z'} \frac{R' \sin(\chi' - z')}{R \sin(\chi - z)} = \frac{\sin \chi}{\sin \chi'} \frac{\sin(\chi' - z')}{\sin(\chi - z)}.$$

Führen wir auf kurze Zeit wieder die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten des Planeten, und zwar mit x, y, z für die erste, mit x', y', z' für die zweite Beobachtung ein, sind ferner X, Y, Z, X', Y', Z' die zugehörigen Coordinaten der Erde und bedeutet $\varkappa$ die zu dem heliocentrischen Bogen des Planeten gehörige Sehne, so wird noch:

$$\begin{aligned}\varkappa^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz') \\ &= 2r^2 - 2(\varrho \cos\beta \cos\lambda + X)(\varrho' \cos\beta' \cos\lambda' + X') \\ &\quad - 2(\varrho \cos\beta \sin\lambda + Y)(\varrho' \cos\beta' \sin\lambda' + Y') \\ &\quad - 2(\varrho \sin\beta + Z)(\varrho' \sin\beta' + Z').\end{aligned}$$

Bei dem Auflösen dieser Parenthesen erkennt man, dass der Factor, mit welchem der Ausdruck $- 2\varrho\varrho'$ in dem entwickelten Producte multiplicirt erscheint, nämlich:

$$\cos\beta \cos\beta' \cos\lambda \cos\lambda' + \cos\beta \cos\beta' \sin\lambda \sin\lambda' + \sin\beta \sin\beta'$$

nichts Anderes ist, als der Cosinus des zwischen den beiden geocentrischen Oertern, auf welche die Richtungen von ϱ und ϱ' zielen, gelegenen Bogens eines grössten Kreises, d. h. des völlig bekannten Abstandes der beiden geocentrischen Oerter auf der Sphäre. Ersetzt man auch X, Y, Z, X', Y', Z' durch die entsprechenden Polarcoordinaten der Erde, so erscheint in dem genannten Product die Grösse $-2R\varrho'$ mit einem Factor multiplicirt, welchen wir leicht als Cosinus des Bogens zwischen dem zweiten geocentrischen Orte und dem ersten heliocentrischen Erdorte erkennen, analog ist $-2R'\varrho$ mit dem Cosinus des Bogens zwischen dem ersten geocentrischen Orte und dem zweiten heliocentrischen Erdorte multiplicirt. Endlich ist:

$$XX' + YY' + ZZ' = RR' \cos(\odot' - \odot),$$

wenn wieder $\odot$ und $\odot'$ die Längen der Sonne vorstellen; also ist auch der Ausdruck $-2RR'$ des genannten Productes mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die Richtungen von R und R' mit einander bilden.

Bezeichnet man nun der Kürze halber:

mit (RR') den Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen von R und R'
„ $(R\varrho')$ „ „ „ „ „ „ „ „ R „ ϱ'
„ $(R'\varrho)$ „ „ „ „ „ „ „ „ R' „ ϱ
„ $(\varrho\varrho')$ „ „ „ „ „ „ „ „ ϱ „ ϱ'

so erhält man, da auch $\varkappa^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(u' - u)$:

$$r^2 \cos(u' - u) = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho' \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder:

$$\cos(u' - u) = (RR')\frac{RR'}{rr} + (R\varrho')\frac{R\varrho'}{rr} + (R'\varrho)\frac{R'\varrho}{rr} + (\varrho\varrho')\frac{\varrho\varrho'}{rr}.$$

Alles auf der rechten Seite dieser Gleichung wird bekannt, wenn man den Winkel z kennt oder über den Werth desselben eine Hypothese macht; die Werthe von (RR'), $(R\varrho')$, $(R'\varrho)$, $(\varrho\varrho')$ werden vorher, d. h. vor Anstellung der Versuche über z, von denen sie unabhängig sind, berechnet, immer unter Anwendung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, welche aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel den Cosinus der dritten Seite liefert. Es wird demnach, wenn wir unter L und L' die Längen der Erde oder die Grössen $\odot + 180^0$, $\odot' + 180^0$ verstehen:

$$\begin{aligned}
(RR') &= \cos(L' - L) = \cos(\odot' - \odot) \\
(R\varrho') &= \cos\beta' \cos(\lambda' - L) = -\cos\beta' \cos(\lambda' - \odot) \\
(R'\varrho) &= \cos\beta \cos(\lambda - L') = -\cos\beta \cos(\lambda - \odot') \\
(\varrho\varrho') &= \sin\beta \sin\beta' + \cos\beta \cos\beta' \cos(\lambda' - \lambda).
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Gleichung (4) erstreckt sich auch noch auf den Fall, wo die beiden Radienvectoren, welche den Winkel $(u' - u)$ einschliessen, nicht gleich sind. Allgemeiner demnach kann man sie schreiben, wenn wir die abkürzende Bezeichnung der Cosinus auch auf $\cos(u' - u)$ ausdehnen, wobei dann $\cos(u' - u) = (rr')$,

$$(rr')rr' = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho' \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese dem Gedächtniss sich leicht einprägende Formel ist auch für einige unserer späteren Untersuchungen von Bedeutung.

In unserem speciellen Falle soll nun wieder das aus Gleichung (5) oder (4) hervorgehende $(u' - u) = \dfrac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ sein. Fast immer ist dies in den Anwendungen ein so kleiner Winkel, dass seine Bestimmung durch den Cosinus mangelhaft ausfallen wird.

Ist nun durch Versuche in der in voriger Vorlesung beschriebenen Weise ein Werth des Winkels z, von welchem alle übrigen Unbekannten auf der rechten Seite der

Gleichung (4) wie z', ϱ, ϱ', r abhängen, gefunden, so kann man endlich die heliocentrischen Polarcoordinaten l, b, l', b' berechnen und daraus die Elemente, wie früher vorgetragen, bestimmen.

Es erscheint kaum nöthig, hier zu bemerken, dass der Gleichung (4) unmittelbar die Gestalt einer Relation zwischen den Winkeln am Planeten z und z' und bekannten Grössen gegeben werden kann, während z und z' noch ausserdem durch die Gleichung:

$$\frac{R \sin \chi}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

mit einander verbunden sind. Bei der Einfachheit dieser letzteren Relation verhält sich die Bestimmung des richtigen Werthes von z in praktischer Hinsicht fast ebenso, als hätte man in der Gleichung (4) nur die eine Unbekannte z.

In doppelter Hinsicht scheint die eben entwickelte Methode, aus zwei vollständigen Beobachtungen die Elemente einer Kreisbahn zu finden, den Vorzug vor derjenigen der vorigen Vorlesung geltend machen zu können. Einestheils braucht man bei den Versuchen nicht allzu weit auszuholen, weil eine sogenannte Finalgleichung vorhanden ist; anderentheils lässt sich diese Methode mit grösserer Leichtigkeit als die anderen dem Coordinatensysteme des Aequators anpassen. Wir werden die meisten Methoden zu Bahnberechnungen so anlegen, dass am Schlusse der Rechnung unmittelbar die zur Berechnung der Ephemeride nöthigen Gauss'schen Constanten und fast zugleich mit ihnen auch die Elemente, bezogen auf die Ekliptik, erhalten werden. Die verhältnissmässig grosse Einfachheit und Kürze jener Methoden, welche vorzugsweise durch die jetzige, viel vollständigere Einrichtung der astronomischen Jahrbücher [1]) ermöglicht wird, lassen in den Formeln der Bahnberechnung den Gebrauch der Rectascension und Declination, statt der Längen und Breiten, wegen der vielen, bei einer schärferen Rechnung auftretenden, lästigen Anforderungen (als da besonders sind die Verwandlung der beobachteten Rectascensionen und Declinationen in Länge und Breite, die weit grössere Complication in der Berücksichtigung der Parallaxe und der Aberration, anderer wichtiger Umstände vorläufig nicht zu gedenken) als das Bequemere erscheinen.

Aus diesen Gründen erscheint es zweckmässig, unsere Methode für Berechnung einer Kreisbahn ebenfalls noch für das System des Aequators zu geben. Dabei sehen wir hier noch vorläufig von allen den kleinen Correctionen ab, welche eine scharfe Rechnung erforderlich machen würde, obwohl dieselben gerade für dieses Coordinatensystem alles Lästige und Ermüdende verlieren, d. h. wir vernachlässigen noch Parallaxe und Aberration, ebenso die Bewegung des Aequinoctiums von einer Beobachtung bis zur anderen, indem wir die Oerter auf das scheinbare Aequinoctium des Tages, an welchem sie angestellt sind, beziehen. Wir dürfen das hier um so mehr, als ja doch immer die Voraussetzung der Kreisbahn in praktischer Hinsicht einen Fehler in sich schliesst.

---

[1]) Das verbreitetste astronomische Jahrbuch ist das englische, dessen vollständiger Titel lautet: „The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the year . . . for the Meridian of the Royal Observatory at Greenwich. Published by order of the lords commissioners of the admiralty. London: printed for Her Majesty's Stationery Office by Darling & Son, LTD., 1 — 3, Great. St. Thomas Apostle E. C. Price two shillings and six pence." Ein Appendix dazu enthält Ephemeriden von kleinen Planeten. Doch ist in letzterer Beziehung das Berliner Jahrbuch vollständiger. Dasselbe erscheint jetzt unter dem Titel: „Berliner Astronomisches Jahrbuch mit Angaben für die Oppositionen der Planeten (1) — (674) für 1910. Herausgegeben von dem Rechen-Institute der Königlichen Sternwarte zu Berlin. Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung." Empfehlenswerth ist auch das in Washington erscheinende Jahrbuch: „The American Ephemeris and Nautical Almanac" und die in Paris von dem Bureau des longitudes herausgegebene „Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs."

Es seien also:

t, t' die Beobachtungszeiten,
α, α' die Rectascensionen,
δ, δ' die Declinationen,
A, A' die Rectascensionen der Sonne,
D, D' die Declinationen der Sonne,
R, R' die Radienvectoren der Sonne oder der Erde.

Die Sonnenörter, sowie R und R', finden sich in jedem Jahrbuche angegeben. Man berechne nun unter Benutzung der Zech'schen Tafeln für Summen- und Differenzlogarithmen:

$$\begin{aligned}
(R\varrho) &= \cos\chi = -\sin D \sin\delta - \cos D \cos\delta \cos(\alpha - A)\\
(R'\varrho') &= \cos\chi' = -\sin D' \sin\delta' - \cos D' \cos\delta' \cos(\alpha' - A')\\
(R\varrho') &= -\sin D \sin\delta' - \cos D \cos\delta' \cos(\alpha' - A)\\
(R'\varrho) &= -\sin D' \sin\delta - \cos D' \cos\delta \cos(\alpha - A')\\
(RR') &= \sin D \sin D' + \cos D \cos D' \cos(A' - A)\\
(\varrho\varrho') &= \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha).
\end{aligned}$$

Es ist dann ferner, wenn der vom Planeten aus gesehene Winkelabstand zwischen Erde und Sonne in der ersten Beobachtung mit z, in der zweiten mit z' bezeichnet wird,

$$r = \frac{R \sin\chi}{\sin z} = \frac{R' \sin\chi'}{\sin z'}$$

$$\varrho = \frac{R \sin(\chi - z)}{\sin z}$$

$$\varrho' = \frac{R' \sin(\chi' - z')}{\sin z'}$$

und es muss nun durch Versuche derjenige Werth des Winkels z bestimmt werden, welcher den aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}
\cos(u' - u) = (RR') \frac{\sin z \sin z'}{\sin\chi \sin\chi'} &+ (R\varrho') \frac{\sin z \sin(\chi' - z')}{\sin\chi \sin\chi'}\\
+ (R'\varrho) \frac{\sin z' \sin(\chi - z)}{\sin\chi \sin\chi'} &+ (\varrho\varrho') \frac{\sin(\chi - z) \sin(\chi' - z')}{\sin\chi \sin\chi'}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\cos(u' - u) \sin\chi \sin\chi' = (RR') \sin z \sin z' + (R\varrho') \sin z \sin(\chi' - z')\\
+ (R'\varrho) \sin z' \sin(\chi - z) + (\varrho\varrho') \sin(\chi - z) \sin(\chi' - z')
\end{aligned}$$

von $u' - u$ mit dem von $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ übereinstimmend macht.

Neunzehnte Vorlesung.

Directe Berechnung der Gauss'schen Constanten aus den heliocentrischen Coordinaten für den Aequator.

Wir wollen nun gleich hier für alle zukünftigen Fälle die Vorschrift entwickeln, nach welcher man aus sechs heliocentrischen Coordinaten für den Aequator, welches auch die Gestalt der Bahn sei, die Gauss'schen Constanten für den Aequator findet. Nach der zehnten Vorlesung hat man:

$$\left.\begin{aligned} a\,r\,sin(A + \pi - \Omega + v) &= x = a\,r\,sin(A' + v) \\ a\,r'\,sin(A + \pi - \Omega + v') &= x' = a\,r'\,sin(A' + v') \\ b\,r\,sin(B + \pi - \Omega + v) &= y = b\,r\,sin(B' + v) \\ b\,r'\,sin(B + \pi - \Omega + v') &= y' = b\,r'\,sin(B' + v') \\ c\,r\,sin(C + \pi - \Omega + v) &= z = c\,r\,sin(C' + v) \\ c\,r'\,sin(C + \pi - \Omega + v') &= z' = c\,r'\,sin(C' + v') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

worin v und v' die wahren Anomalien in beiden Beobachtungen bedeuten und A' für die Constante $A + \pi - \Omega$, B' für $B + \pi - \Omega$, C' für $C + \pi - \Omega$ gesetzt ist. Verbindet man von diesen Gleichungen die erste mit der zweiten, die dritte mit der vierten, die fünfte mit der sechsten, einmal durch Addition, das andere Mal durch Subtraction, so erhält man folgende zur Bestimmung von a, A', b, B', c, C' aus den Coordinaten geeignete Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a\,sin\,[A' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{x'}{r'} + \frac{x}{r}\right) sec\ {}^1\!/_2(v' - v) \\ a\,cos\,[A' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{x'}{r'} - \frac{x}{r}\right) cosec\,{}^1\!/_2(v' - v) \\ b\,sin\,[B' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{y'}{r'} + \frac{y}{r}\right) sec\ {}^1\!/_2(v' - v) \\ b\,cos\,[B' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{y'}{r'} - \frac{y}{r}\right) cosec\,{}^1\!/_2(v' - v) \\ c\,sin\,[C' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{z'}{r'} + \frac{z}{r}\right) sec\ {}^1\!/_2(v' - v) \\ c\,cos\,[C' + {}^1\!/_2(v' + v)] &= {}^1\!/_2\left(\frac{z'}{r'} - \frac{z}{r}\right) cosec\,{}^1\!/_2(v' - v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

In allen Fällen der Anwendung ist v und v' bekannt; hier, d. h. bei der Kreisbahn, ist die Grösse $v' - v$ gleich $u' - u$, und offenbar die Lage des Perihels willkürlich zu wählen; daher ist es erlaubt, das Perihel in die Mitte der beiden dargestellten Beobachtungen fallen zu lassen. Es wird hierdurch $v' = -v$, oder ${}^1\!/_2(v + v') = 0$. Auf diese Weise kommt man sehr schnell zu allen für die Berechnung einer Ephemeride nöthigen Grössen, und ohne dass man auf die auf die Ekliptik bezogenen Elemente zurückzugehen hätte.

Um aber auch Ω und i zu finden, genügt eine leichte Betrachtung. Nach dem öfter angewandten Satze von der Transformation der Coordinaten drückt sich die auf die Ekliptik bezogene z-Coordinate durch die y und z für den Aequator in der Form:

$$- y\,sin\,\varepsilon + z\,cos\,\varepsilon$$

oder:

$$c\,r\,cos\,\varepsilon\,sin(C' + v) - b\,r\,sin\,\varepsilon\,sin(B' + v)$$

aus, worin ε die Schiefe der Ekliptik vorstellt. Um den Abstand des Ω vom Perihel zu finden, kommt es also nur darauf an, denjenigen Werth von v zu bestimmen, welcher die Grösse:

$$c\,cos\,\varepsilon\,sin(C' + v) - b\,sin\,\varepsilon\,sin(B' + v)$$

zu Null macht; dieser Werth, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist immer gleich $\pi - \Omega$. (Der aufsteigende Knoten ist vom niedersteigenden leicht dadurch zu unterscheiden, dass bei dem ersteren die z-Coordinate bezüglich der Ekliptik bei wachsendem v positiv wird, bei letzterem negativ.)

Man hat hiernach:

$$\frac{\sin[B' + (\Omega - \pi)]}{\sin[C' + (\Omega - \pi)]} = \frac{c \cos\varepsilon}{b \sin\varepsilon}$$

oder:

$$\frac{\sin[B' + (\Omega - \pi)] + \sin[C' + (\Omega - \pi)]}{\sin[B' + (\Omega - \pi)] - \sin[C' + (\Omega - \pi)]} = \frac{c \cos\varepsilon + b \sin\varepsilon}{c \cos\varepsilon + b \sin\varepsilon}$$

oder endlich $\frac{b}{c} = tg\, q$ gesetzt,

$$tg\,\{{}^1/_2(B' + C') - (\pi - \Omega)\} = \frac{\cos(\varepsilon - q)}{\cos(\varepsilon + q)}\, tg\, {}^1/_2(B' - C') \quad . \; . \quad (3)$$

Bei unserer speciellen Lage des Perihels, wie wir es zur Vereinfachung der Formeln bei der Kreisbahn annehmen durften, ist offenbar die Grösse $\pi - \Omega$ identisch mit dem Abstande des Planeten vom aufsteigenden Knoten für die in die Mitte der beiden Beobachtungen fallende Zeit des Perihels.

Man hat nun ferner allgemein aus den Formeln der zehnten Vorlesung zur Berechnung der Gauss'schen Constanten

$$\left.\begin{aligned} \cos\Omega &= a \sin A = a \sin[A' - (\pi - \Omega)] \\ -\sin\Omega \cos i &= a \cos A = a \cos[A' - (\pi - \Omega)] \\ \sin\Omega \cos\varepsilon &= b \sin B = b \sin[B' - (\pi - \Omega)] \\ \sin\Omega \sin\varepsilon &= c \sin C = c \sin[C' - (\pi - \Omega)] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

woraus sich, unter Benutzung zweier dieser Gleichungen zur Controle, Ω und i mit Leichtigkeit ergeben.

Zwanzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für Harmonia.

Es sollen nun die vorhergehenden Vorschriften dazu angewendet werden, eine Kreisbahn aus den folgenden geocentrischen Oertern der Harmonia:

Mittl. Berl. Zeit

1864 Sept. 21,5 . . $\alpha = 21^0\,29'\,8'',85 \quad \delta = +\,0^0\,48'\,4'',2$

„ 29,5 . . $\alpha' = 19^0\,50'\,27'',45 \quad \delta' = +\,0^0\,1'\,29'',6$,

welche auf den Aequator bezogen sind, zu berechnen. Schlagen wir in den Jahrbüchern noch die Rectascensionen der Sonne für dieselben Zeiten, A und A', deren Declinationen D und D' und die $\log R$ und $\log R'$ auf, so erhalten wir:

$$A = 179^0\,14'\,39'',9, \quad D = +\,0^0\,19'\,39'',0, \quad \log R = 0{,}0013202,$$
$$A' = 186^0\,27'\,21'',75, \quad D' = -\,2^0\,47'\,35'',4, \quad \log R' = 0{,}0003442.$$

Die Formeln der achtzehnten Vorlesung geben dann folgende Rechnung [1]):

---

[1]) Es ist in den Rechnungsbeispielen einfach $\sin D$ für $\log\sin D$, $\cos D$ für $\log\cos D$ u. s. w. geschrieben. Die Rechnung ist zu einem Theile mit siebenstelligen Logarithmen durchgeführt worden, um wenigstens für diesen Zweck den Cosinussen kleiner Bogen dennoch hinreichende Genauigkeit für die Bestimmung des Bogens zu geben. Eine Umformung der Grundgleichung würde mehr Unbequemlichkeiten verursachen, als es der zeitweilige Gebrauch solcher Tafeln thut.

$\sin D = 7{,}7570863$
$\sin D' = 8{,}6878022_n$
$6{,}4448885_n$

$\cos D = 9{,}9999929$
$\cos D' = 9{,}9994838$
$\cos (A' - A) = 9{,}9965507$
$9{,}9960274$
$6{,}4448885_n$

Differenz . . . 3,5511389
Zech. 0,0001221

$\log (R R') = 9{,}9959053$

$\sin D = 7{,}7570863$
$\sin \delta = 8{,}1455861$
$5{,}9026724$

$\cos D = 9{,}9999929$
$\cos \delta = 9{,}9999576$
$\cos (A - \alpha) = 9{,}9664222_n$
$9{,}9663727_n$
$5{,}9026724$

Differenz . . . 4,0637003
Zech. 0,0000375

$\log (R \varrho) = 9{,}9663352$
$\chi = 22^0 16' 9'',9$

$\sin D = 7{,}7570863$
$\sin \delta' = 6{,}6378829$
$4{,}3949692$

$\cos D = 9{,}9999929$
$\cos \delta' = 0{,}0000000$
$\cos (A - \alpha') = 9{,}9713133_n$
$9{,}9713062_n$
$4{,}3949692$

Differenz . . . 5,5763370
Zech. 0,0000012

$\log (R \varrho') = 9{,}9713050$

$\sin D' = 8{,}6878022_n$
$\sin \delta = 8{,}1455861$
$6{,}8333883_n$

$\cos D' = 9{,}9994838$
$\cos \delta = 9{,}9999576$
$\cos (A' - \alpha) = 9{,}9848833_n$
$9{,}9843247_n$
$6{,}8333883_n$

Differenz . . . 3,1509364
Zech. 0,0003066

$\log (R' \varrho) = 9{,}9846313$

$\sin D' = 8{,}6878022_n$
$\sin \delta' = 6{,}6378829$
$5{,}3256851_n$

$\cos D' = 9{,}9994838$
$\cos \delta' = 0{,}0000000$
$\cos (A' - \alpha') = 9{,}9880401_n$
$9{,}9875239_n$
$5{,}3256851_n$

Differenz . . . 4,6618388
Zech. 0,0000095

$\log (R' \varrho') = 9{,}9875334$
$\chi' = 13^0 39' 46'',1$

$$\begin{array}{rl} \sin\delta' = & 6{,}6378829 \\ \sin\delta = & 8{,}1455861 \\ \hline & 4{,}7834690 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \cos\delta' = & 0{,}0000000 \\ \cos\delta = & 9{,}9999576 \\ \cos(\alpha' - \alpha) = & 9{,}9998210 \\ \hline & 9{,}9997786 \\ & 4{,}7834690 \\ \hline \text{Differenz} \ldots & 5{,}2163096 \\ \text{Zech} \ldots\ldots & 0{,}0000026 \\ \log(\varrho\,\varrho') = & 9{,}9997812 \end{array}$$

Wir erhalten also:

$$\log \frac{(RR')}{\sin\chi \sin\chi'} = 1{,}0440158 \qquad \log \frac{(R\varrho')}{\sin\chi \sin\chi'} = 1{,}0194155$$

$$\log \frac{(R'\varrho)}{\sin\chi \sin\chi'} = 1{,}0327418 \qquad \log \frac{(\varrho\,\varrho')}{\sin\chi \sin\chi'} = 1{,}0478917,$$

und für die Fundamentalgleichung (4) der achtzehnten Vorlesung die Form:

$$\cos(v' - v) = \cos \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = (1{,}0440158) \sin z \sin z'$$

$$+ (1{,}0194155) \sin z \sin(\chi' - z') + (1{,}0327418) \sin(\chi - z) \sin z'$$
$$+ (1{,}0478917) \sin(\chi - z) \sin(\chi' - z'),$$

wobei die eingeschlossenen Zahlen schon die Logarithmen der Zahlenfactoren vorstellen.

Eine Probe mit dem Werthe $r = 2{,}3$ (als einem der kleinsten, der bei einem Asteroid zwischen Jupiter und Mars nach der Erfahrung zu erwarten steht und demnach also einer Art von Grenze für die Versuche entsprechend) führt auf die folgenden Zahlen:

$$\begin{array}{rl|rl} \log R \sin\chi = & 9{,}5799162 & \log R' \sin\chi' = & 9{,}3736377 \\ \log 2{,}3 = & 0{,}3617278 & \log 2{,}3 = & 0{,}3617278 \\ \hline \sin z = & 9{,}2181884 & \sin z' = & 9{,}0119099 \\ z = & 9^0\,30'\,46'',05 & z' = & 5^0\,53'\,57'',40 \\ & 1{,}0440158 & & 1{,}0194155 \\ \log \sin z = & 9{,}2181884 & \log \sin z = & 9{,}2181884 \\ \log \sin z' = & 9{,}0119099 & \log \sin(\chi' - z') = & 9{,}1306071 \\ \hline & 9{,}2741141 & & 9{,}3682110 \\ \text{numerus} = & 0{,}18798108 & & 0{,}23345920 \\ & 1{,}0327418 & & 1{,}0478917 \\ \log \sin(\chi - z) = & 9{,}3440191 & \log \sin(\chi - z) = & 9{,}3440191 \\ \log \sin z' = & 9{,}0119099 & \log \sin(\chi' - z') = & 9{,}1306071 \\ \hline & 9{,}3886708 & & 9{,}5225179 \\ \text{numerus} = & 0{,}24472074 & & 0{,}33305649 \end{array}$$

$$\cos(v' - v) = \cos(u' - u) = 0{,}18798108 + 0{,}23345920 + 0{,}24472074$$
$$+ 0{,}33305649 = 0{,}99921751;\ v' - v = 2^0\,16'\,1'',1.$$

Es ist aber $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ für diese Hypothese gleich $2^0\,15'\,37'',76$, also der Fehler derselben gleich $2^0\,16'\,1'',1 - 2^0\,15'\,37'',76 = 23'',34$. Macht man den zweiten Versuch mit einem um fünf Einheiten der dritten Stelle vergrösserten Werthe von $\log r$ oder, was dasselbe ist, mit um ebensoviel verminderten Werthen von $\log \sin z$ und $\log \sin z'$, so erhält man durch eine Rechnung von derselben Art $u' - u = v' - v = 2^0\,13'\,18'',7$; $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = 2^0\,13'\,18'',43$, als Fehler der Hypothese $+ 0'',27$. Die fünf Einheiten der dritten Stelle des Logarithmus haben demnach den Fehler der Hypothese um $-23'',07$ geändert, eine solche Einheit wird also darauf einen Einfluss von $-4'',61$ haben. Man wird daraus ohne Mühe schliessen, dass $\log r = 0{,}366\,757$ sehr nahe der richtige Werth sein wird, welchen wir, ohne unseren Zweck zu verfehlen, als definitiven annehmen können. Es entsprechen demselben für ϱ und ϱ' : $\log \varrho = 0{,}135\,864$, $\log \varrho' = 0{,}127\,842$.

Die bekannten Vorschriften geben dann:

$$x = 2{,}275\,101 \quad y = 0{,}487\,526 \quad z = 0{,}013\,385$$
$$x' = 2{,}255\,862 \quad y' = 0{,}567\,980 \quad z' = 0{,}049\,352$$

Wie schon bemerkt wurde, kann man die Formeln (2) der neunzehnten Vorlesung bei der Kreisbahn so zur Anwendung bringen, dass man das ganz willkürliche Perihel in die Mitte der beiden Beobachtungen verlegt, wobei dann das gleich nachher zu findende $\pi - \Omega$ mit dem Argumente der Breite für jene Epoche identisch wird. Ausserdem ist noch, weil $r' = r$ ist, ar, br, cr constant, daher man bei der Kreisbahn einfacher:

$$2\,a\,r \sin A' = (x' + x) \sec {}^1/_2 (v' - v)$$
$$2\,a\,r \cos A' = (x' - x) \operatorname{cosec} {}^1/_2 (v' - v)$$
u. s. w.

schreiben kann. Da für den definitiven Werth von z oder von r:

$$\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = 2^0\,13'\,17'',62$$

ist, also ${}^1/_2 (v' - v) = 1^0\,6'\,38'',81$, so findet man durch leichte Rechnung:

$$\log a\,r = 0{,}365\,414 \qquad A' = 102^0\,21'\,8'',68$$
$$\log b\,r = 0{,}330\,654 \qquad B' = 14\;\;16\;\;18{,}81$$
$$\log c\,r = 9{,}967\,648 \qquad C' = 1\;\;56\;\;13{,}30$$

mit welchen Grössen wir sofort eine Ephemeride berechnen könnten. Denn bezeichnen wir für irgend eine Zeit den vom Planeten seit jener Epoche des Perihels zurückgelegten Bogen oder das Product von $\frac{k}{r^{3/2}}$ mit der Zeit durch w, so werden die heliocentrischen Coordinaten des Planeten allgemein durch:

$$x = a\,r \sin (A' + w)$$
$$y = b\,r \sin (B' + w)$$
$$z = c\,r \sin (C' + w)$$

gegeben sein. Mit diesen brauchte man nur auf bekannte Art die Sonnencoordinaten aus den Jahrbüchern zu verbinden, um den zugehörigen geocentrischen Ort zu finden.

Es bedürfte zu dem Berechnen der Ephemeride, wie in den ähnlichen Fällen, welche der Leser später kennen lernen wird, noch nicht einmal der Ermittelung des Argumentes der Breite, indem A' schon gleich $A + \pi - \Omega$, $B' = B + \pi - \Omega$, $C' = C + \pi - \Omega$. Da es aber ein Interesse hat, auch die auf die Ekliptik bezogenen Elemente zu finden, so machen wir noch von den Formeln (3) und (4) der neunzehnten Vorlesung Gebrauch. Wird die Schiefe der Ekliptik oder ε gleich $23^0\,27'\,14'',8$, aus den Jahrbüchern für 1864 entnommen, so ist

$$\operatorname{tg} q = \frac{b}{c} = \frac{b\,r}{c\,r} = \operatorname{tg} 66^0\,33'\,46'',8,$$

also:

$$\varepsilon - q = -\,43^0\,6'\,32'',0$$
$$\varepsilon + q = 90^0\,1'\;\;1'',6,$$

und wir erhalten:

$${}^1/_2 (B' + C') - (\pi - \Omega) = 90^0\,6'\,56'',17$$

oder:

$$\pi - \Omega = Arg.\ \text{der Breite} = 277^0\,59'\,19'',88,$$

zum Sept. 25,5 gehörig, hieraus:

$$A = A' - (\pi - \Omega) = 184^0\,21'\,48'',80$$
$$\Omega = 94^0\,20'\,58'',4$$
$$i = \ \ 4^0\,31'\,0''0.$$

Diese Genauigkeit genügt, um zu beurtheilen, ob die Kleinheit von i vielleicht nöthigt, bei der Berechnung einer elliptischen Bahn die Bestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen, welches die bequemere ist, zu verlassen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

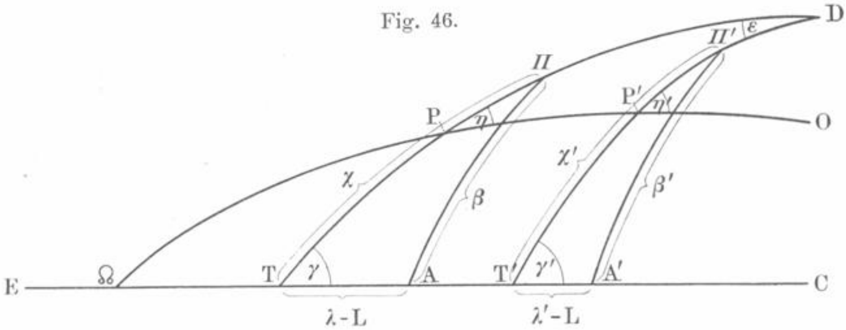
Die Gauss'sche Methode zur Berechnung einer Kreisbahn [1]).

Das Verfahren von Gauss, an zwei vollständige Beobachtungen eines Planeten eine Kreisbahn anzuschliessen, gewährt für die Ekliptik eine sehr bequeme Rechnung.

Wir beginnen damit, uns die Lage der Bahnebene gegen die Ekliptik, sowie die Bedingungen der Aufgabe, noch auf eine andere Art in Fig. 46 zu versinnlichen.

Es sei EC der die Ekliptik vorstellende grösste Kreis der Himmelskugel, T und T' seien die Oerter der Erde auf derselben, d. h. diejenigen Punkte der Sphäre, auf welche die Radienvectoren der Erde in den beiden Beobachtungen gerichtet sind. Durch jede vollständige Beobachtung wird die Richtung oder eine Gerade, auf welcher der

Fig. 46.



Planet sich zur Zeit der Beobachtung befinden muss, völlig bekannt, demnach auch die Lage der Ebene, welche durch diese Gerade und den Radius vector der Erde in derselben Beobachtung gelegt werden kann. Diese Ebenen für die erste und die zweite Beobachtung werden in der Figur durch die grössten Kreise TD und $T'D$, welche sich in D schneiden, vorgestellt. Es sei $\Omega PP'O$ die Bahnebene des Planeten, in der Ω der aufsteigende Knoten, in der Ekliptik, P und P' die heliocentrischen Oerter des Planeten in beiden Beobachtungen seien. Die geocentrischen Oerter in der Fig. 46 mit Π und Π' bezeichnet, fallen offenbar ebenfalls in die grössten Kreise TD und $T'D$. Man kann ferner noch leicht bemerken, dass der Bogen TP nichts Anderes ist, als der Winkel,

---

[1]) Der Verfasser verdankt diese Methode den mündlichen Mittheilungen von Gauss, bei Gelegenheit eines Auftrages zur Untersuchung der Bahn der Eunomia.

welchen der Radius vector des Planeten mit dem Radius vector der Erde in der ersten Beobachtung bildet, $T'P'$ dasselbe für die zweite Beobachtung. Diese beiden Bogen sind nicht von vornherein gegeben, dagegen die Bogen $T\Pi$ und $T'\Pi'$, d. h. die Winkel, welchen an der Erde die Beobachtungsrichtungen mit den Verlängerungen der Radienvectoren der Erde in beiden Beobachtungen bilden; diese beiden Winkel sind demnach identisch mit den Bogen, welche wir in den vorhergehenden Beobachtungen mit χ und χ' bezeichneten und auch hier wieder der Kürze wegen so bezeichnen wollen. Stellen auch jetzt wieder z und z' die Winkel am Planeten im Dreieck: Sonne, Erde, Planet für die Beobachtungszeiten t und t' vor, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} TP &= \chi - z \\ T'P' &= \chi' - z' \\ T\Pi &= \chi \\ T'\Pi' &= \chi'. \end{aligned}$$

Der Kürze halber bezeichnen wir auch noch die sphärischen Winkel TDT' mit ε, DTC mit γ, $DT'C$ mit γ'. Legen wir noch durch Π und Π' die Bogen ΠA und $\Pi'A'$ senkrecht zur Ekliptik, so ist, wenn:

λ, λ' die geocentrischen Längen des Planeten,
β, β' „ „ Breiten „ „
L, L' „ Längen der Erde bedeuten,

$$\begin{aligned} TA &= \lambda - L \\ T'A' &= \lambda' - L' \\ \Pi A &= \beta \\ \Pi'A' &= \beta', \end{aligned}$$

also nach den Formeln rechtwinkliger sphärischer Dreiecke:

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\beta}{sin\,(\lambda - L)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$sin\,\chi = \frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die früher aufgestellte Formel für χ:

$$cos\,\chi = cos\,\beta\,cos\,(\lambda - L)$$

kann zur Controle der Rechnung dienen. Für einen eben entdeckten, noch in der Nähe seiner Opposition befindlichen Planeten pflegt der Winkel χ nicht gross zu sein, weshalb seine Bestimmung durch (1) und (2) der anderen vorzuziehen ist.

Bei der zweiten Beobachtung hat man analog:

$$tg\,\gamma' = \frac{tg\,\beta'}{sin\,(\lambda' - L')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$sin\,\chi' = \frac{sin\,\beta'}{sin\,\gamma'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nach der Berechnung von γ und γ' kann man sofort zur Auflösung des Dreiecks TDT', d. h. zur Bestimmung der beiden Seiten TD, $T'D$ und des Winkels TDT' oder ε, aus den Winkeln γ, $(180^0 - \gamma')$ und der dazwischen liegenden Seite TT' oder $L' - L$ schreiten. Die Gauss'schen Dreiecksformeln liefern hier die Gleichungen:

$$sin\,{}^1\!/_2\,\varepsilon\,.\,sin\,{}^1\!/_2\,(TD + T'D) = sin\,{}^1\!/_2\,(L' - L)\,sin\,{}^1\!/_2\,(\gamma' + \gamma)\,. \quad . \quad . \quad (5)$$
$$sin\,{}^1\!/_2\,\varepsilon\,.\,cos\,{}^1\!/_2\,(TD + T'D) = cos\,{}^1\!/_2\,(L' - L)\,sin\,{}^1\!/_2\,(\gamma' - \gamma)\,. \quad . \quad . \quad (6)$$
$$cos\,{}^1\!/_2\,\varepsilon\,.\,sin\,{}^1\!/_2\,(TD - T'D) = sin\,{}^1\!/_2\,(L' - L)\,cos\,{}^1\!/_2\,(\gamma' + \gamma)\,. \quad . \quad . \quad (7)$$
$$cos\,{}^1\!/_2\,\varepsilon\,.\,cos\,{}^1\!/_2\,(TD - T'D) = cos\,{}^1\!/_2\,(L' - L)\,cos\,{}^1\!/_2\,(\gamma' - \gamma)\,. \quad . \quad . \quad (8)$$

Hat man diese Vorbereitungsrechnungen beendigt, so erhält man für jede Hypothese über den Werth von r oder den Abstand des Planeten von der Sonne sofort die Bogen DP und DP', aus denen man dann in Verbindung mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ε die Seite PP' des Dreiecks PDP', d. h. den heliocentrischen Bogen PP', welcher, wenn die Hypothese richtig ist, gleich $\frac{k\,(t'-t)}{r^{3/2}}$ sein soll, bestimmen kann. Denn ein Blick auf die Fig. 46 zeigt, dass:

$$DP = DT - PT = DT - (\chi - z) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$DP' = DT' - P'T' = DT' - (\chi' - z') \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

während nach dem Früheren:

$$sin\, z = \frac{R\, sin\, \chi}{r}$$

$$sin\, z' = \frac{R'\, sin\, \chi'}{r},$$

wobei wieder R und R' die Radien vectoren der Erde vorstellen.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\text{Winkel } DPO = \eta,$$

$$\text{„} \quad DP'O = \eta',$$

so haben wir wieder nach den Gauss'schen trigonometrischen Formeln:

$$sin\, {}^1\!/_2\, PP'\, sin\, {}^1\!/_2\, (\eta' + \eta) = sin\, {}^1\!/_2\, \varepsilon\, sin\, {}^1\!/_2\, (DP + DP') \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$cos\, {}^1\!/_2\, PP'\, sin\, {}^1\!/_2\, (\eta' - \eta) = sin\, {}^1\!/_2\, \varepsilon\, cos\, {}^1\!/_2\, (DP + DP') \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$sin\, {}^1\!/_2\, PP'\, cos\, {}^1\!/_2\, (\eta' + \eta) = cos\, {}^1\!/_2\, \varepsilon\, sin\, {}^1\!/_2\, (DP - DP') \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$cos\, {}^1\!/_2\, PP'\, cos\, {}^1\!/_2\, (\eta' - \eta) = cos\, {}^1\!/_2\, \varepsilon\, cos\, {}^1\!/_2\, (DP - DP') \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

aus denen PP', η' und η sich ergeben. Die beiden letzteren Grössen η und η' gewinnen erst Interesse, wenn man den definitiven Werth von r gefunden hat, weshalb es vortheilhaft ist, dieselben aus den Versuchen zu eliminiren. Man addire zu dem Zwecke die Gleichungen (11) und (13), nachdem man auf beiden Seiten in das Quadrat erhoben hat, wodurch sich ergiebt:

$$sin\, {}^1\!/_2\, PP'^{\,2} = sin\, {}^1\!/_2\, \varepsilon^2\, sin\, {}^1\!/_2\, (DP + DP')^2 + cos\, {}^1\!/_2\, \varepsilon^2\, sin\, {}^1\!/_2\, (DP - DP')^2. \quad . \quad (15)$$

(während kaum nöthig scheint, zu bemerken, dass sich der Exponent 2 nicht auf die in Klammern stehenden Bogen, sondern auf das Quadriren des Sinus bezieht).

Hat man die definitive Lösung gefunden, so rechnet man nach den Formeln (9) bis (12), so dass auch η und η' bekannt werden. Wieder ein Blick auf Fig. 46 zeigt uns, wie die drei Elemente ☊, i und der Abstand vom Knoten bei der ersten Beobachtung oder das Argument der Breite u durch Auflösung des Dreiecks $P☊T$ zu finden sind. In diesem ist offenbar:

$$\text{Winkel } P☊T = i = \text{Neigung der Bahnebene zur Ekliptik},$$

$$☊P = u$$

$$☊T = (L - ☊),$$

und da auch Winkel $☊\,PT = \eta$,

$$PT☊ = 180^0 - \gamma,$$

$$PT = \chi - z,$$

so ist nach den Dreiecksformeln:

$$sin\, {}^1\!/_2\, i\, sin\, {}^1\!/_2\, [u + (L - ☊)] = sin\, {}^1\!/_2\, (\chi - z)\, sin\, {}^1\!/_2\, (\gamma + \eta) \quad \ldots \quad (16)$$

$$sin\, {}^1\!/_2\, i\, cos\, {}^1\!/_2\, [u + (L - ☊)] = cos\, {}^1\!/_2\, (\chi - z)\, sin\, {}^1\!/_2\, (\gamma - \eta) \quad \ldots \quad (17)$$

$$cos\, {}^1\!/_2\, i\, sin\, {}^1\!/_2\, [u - (L - ☊)] = sin\, {}^1\!/_2\, (\chi - z)\, cos\, {}^1\!/_2\, (\gamma + \eta) \quad \ldots \quad (18)$$

$$cos\, {}^1\!/_2\, i\, cos\, {}^1\!/_2\, [u - (L - ☊)] = cos\, {}^1\!/_2\, (\chi - z)\, cos\, {}^1\!/_2\, (\gamma - \eta) \quad \ldots \quad (19)$$

Zur Controle der Rechnung dient die Uebereinstimmung des i oder der Neigung, wie sie aus (14) und (15) und aus $\sin {}^1/_2 i$ folgt, mit der aus (16) und (17) und aus $\cos {}^1/_2 i$.

Zu weiterer Sicherung der Richtigkeit kann man noch das Dreieck $☊ P' T'$ zur Bestimmung der Elemente verwenden.

Man hat danach auch:

$$\sin {}^1/_2 i \sin {}^1/_2 [u' + (L' - ☊)] = \sin {}^1/_2 (\chi' - z') \sin {}^1/_2 (\gamma' + \eta') \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\sin {}^1/_2 i \cos {}^1/_2 [u' + (L' - ☊)] = \cos {}^1/_2 (\chi' - z') \sin {}^1/_2 (\gamma' - \eta') \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\cos {}^1/_2 i \sin {}^1/_2 [u' - (L' - ☊)] = \sin {}^1/_2 (\chi' - z') \cos {}^1/_2 (\gamma' + \eta') \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\cos {}^1/_2 i \cos {}^1/_2 [u' - (L' - ☊)] = \cos {}^1/_2 (\chi' - z') \cos {}^1/_2 (\gamma' - \eta') \quad . \quad . \quad (23)$$

Das Argument der Breite in der zweiten Beobachtung, u', muss noch der Bedingung genügen, dass $u' - u = PP' = \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ wird, wie es immer der Fall sein wird, wenn die Rechnung vorher in allen Theilen scharf geführt worden ist.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Methode zur Bestimmung einer Kreisbahn.

Auf die in der zwanzigsten Vorlesung gegebenen Oerter der Harmonia wollen wir jetzt die Gauss'schen Vorschriften aus der vorigen Vorlesung zur Anwendung bringen, nachdem wir sie, wie in der neunten Vorlesung gelehrt wurde, in Länge und Breite verwandelt haben. Der Werth von ε oder der Schiefe der Ekliptik findet sich in den astronomischen Jahrbüchern für die Beobachtungszeiten zu $23^0\,27'\,14'',8$ angegeben. Die Verwandlung des ersten geocentrischen Ortes in Länge und Breite gestaltet sich dann wie folgt:

$\alpha = 21^0\,29'\,8'',8$	$\delta = +\,0^0\,48'\,4'',2$
$\log \sin \alpha = 9{,}563\,802$	$\log \sin (M + \varepsilon) = 9{,}969\,367$
$\log \cos \delta = 9{,}999\,958$	$\log m = 9{,}564\,076$
$\log m \sin M = 9{,}563\,760$	$\log \frac{1}{\cos \beta} = 0{,}003\,872$
$\log \sin \delta = \log m \cos M = 8{,}145\,586$	$\log \sin \lambda = 9{,}537\,315$
$\log tg\, M = 1{,}418\,174$	$\lambda = 20^0\,9'\,26'',5$
$M = 87^0\,48'\,48'',9$	Controle der Verwandlung
$\log \sin M = 9{,}999\,684$	$\log \cos \alpha = 9{,}968\,720$
$\log m = 9{,}564\,076$	$\log \cos \delta = 9{,}999\,958$
$\varepsilon = 23^0\,27'\,14'',8$	$\log \cos \delta \cos \alpha = 9{,}968\,678$
$\log \cos (M + \varepsilon) = 9{,}559\,578_n$	$\log \cos \lambda = 9{,}972\,550$
$\log \sin \beta = 9{,}123\,654_n$	$\log \cos \beta = 9{,}996\,128$
$\beta = -7^0\,38'\,22'',2$	$\log \cos \beta \cos \lambda = 9{,}968\,678$

Durch dieselbe Verwandlung erhält man für die zweite Beobachtung:

$$\lambda' = \quad 18^0\,19'\,29'',7$$
$$\beta' = -\quad 7^0\,44'\,26'',1.$$

Ferner wird:

$$1864,\ \text{Sept. } 21{,}5{:}\ L = 359^0\,10'\,37'',1 \quad \log R = 0{,}001\,320$$
$$\text{Sept. } 29{,}5{:}\ L' = 7^0\ \ 1'\,55'',8 \quad \log R' = 0{,}000\,344$$

und nach Formel (1) und (2) der einundzwanzigsten Vorlesung:

$$\begin{array}{rlrl}
\log tg\,\beta \ldots\ldots & 9{,}127\,527_n & \log \sin\beta = & 9{,}123\,665_n \\
\log \sin(\lambda - L) \ldots\ldots & 9{,}553\,942 & \log \sin\gamma = & 9{,}545\,069_n \\
\hline
\log tg\,\gamma \ldots\ldots & 9{,}573\,585_n & \log \sin\chi = & 9{,}578\,596 \\
\gamma = - & 20^0\,32'\,12'',2 & \chi = & 22^0\,16'\,10'',0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \cos\beta = & 9{,}996\,128 \\
\log \cos(\lambda - L) = & 9{,}970\,208 \\
\hline
 & 9{,}966\,336 \\
\log \cos\chi = & 9{,}966\,335.
\end{array}$$

Durch eine Rechnung dieser Art für den zweiten geocentrischen Ort wird nach Formel (3) und (4):

$$\gamma' = -\ 34^0\,45'\,56'',9 \qquad \chi' = 13^0\,39'\,45'',1,$$

und da:

$$\begin{aligned}
{}^1/_2\,(L' - L) &= \quad 3^0\,55'\,39'',35 \\
{}^1/_2\,(\gamma' + \gamma) &= -\ 27^0\,39'\ \ 4'',55 \\
{}^1/_2\,(\gamma' - \gamma) &= -\quad 7^0\ \ 6'\,52'',35,
\end{aligned}$$

so wird die weitere Rechnung für ε, TD und $T'D$ nach der Formel (5) bis (8) die folgende:

$$\begin{array}{ll}
\sin {}^1/_2\,(L' - L) = 8{,}835\,664 & \sin {}^1/_2\,(L' - L) \sin {}^1/_2\,(\gamma' + \gamma) = 8{,}502\,265_n \\
\cos {}^1/_2\,(L' - L) = 9{,}998\,979 & \cos {}^1/_2\,(L' - L) \sin {}^1/_2\,(\gamma' - \gamma) = 9{,}091\,887_n \\
\sin {}^1/_2\,(\gamma' + \gamma) = 9{,}666\,601_n & \sin {}^1/_2\,(L' - L) \cos {}^1/_2\,(\gamma' + \gamma) = 8{,}782\,994 \\
\cos {}^1/_2\,(\gamma' + \gamma) = 9{,}947\,330 & \cos {}^1/_2\,(L' - L) \cos {}^1/_2\,(\gamma' - \gamma) = 9{,}995\,622 \\
\sin {}^1/_2\,(\gamma' - \gamma) = 9{,}092\,908_n & tg\,{}^1/_2\,(DT + DT') = 9{,}410\,378 \\
\cos {}^1/_2\,(\gamma' - \gamma) = 9{,}996\,643 & {}^1/_2\,(DT + DT') = 194^0\,25'\,38'',07 \\
 & \sin {}^1/_2\,\varepsilon = 9{,}105\,803.
\end{array}$$

In Betreff des Quadranten, in welchem ${}^1/_2\,(DT + DT')$ und ${}^1/_2\,(DT - DT')$ zu nehmen sind, kann man sich an die Regel halten, dass ${}^1/_2\,\varepsilon$ im ersten Quadranten liegen soll, also $\sin {}^1/_2\,\varepsilon$ und $\cos {}^1/_2\,\varepsilon$ positiv werden müssen.

Es wird ferner:

$$\begin{aligned}
tg\,{}^1/_2\,(DT - DT') &= 8{,}787\,372 \\
{}^1/_2\,(DT - DT') &= 3^0\,30'\,25'',65 \\
\cos {}^1/_2\,\varepsilon &= 9{,}996\,436.
\end{aligned}$$

Eine Controle der Auflösung des Dreiecks besteht darin, dass $\sin {}^1/_2\,\varepsilon$ und $\cos {}^1/_2\,\varepsilon$ einander entsprechend gefunden werden; dies ist hier der Fall. Man erhält

$$\begin{aligned}
{}^1/_2\,\varepsilon &= \quad 7^0\,19'\,48'',41 \\
DT &= 197\ \ 56\ \ \ 3{,}72 \\
DT' &= 190\ \ 55\ \ 12{,}42.
\end{aligned}$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen erledigt. Macht man nun einen Versuch mit der Hypothese:

$$r = 2{,}3,$$

so ergiebt sich für z und z' die Rechnung:

$\log R = 0{,}001\,320$	$\log R' = 0{,}000\,344$
$\sin\chi = 9{,}578\,596$	$\sin\chi' = 9{,}373\,285$
$\log\frac{1}{r} = 9{,}638\,272$	$\log\frac{1}{r} = 9{,}638\,272$
$\sin z = 9{,}218\,188$	$\sin z' = 9{,}011\,901$
$z = 9^0 30' 46'',0$	$z' = 5^0 53' 57'',0$
$\chi - z = 12^0 45' 24'',0$	$\chi' - z' = 7^0 45' 48'',1$
und nach (9) und (10) $DP =$	$DP' = DT' - (\chi' - z')$
$DT - (\chi - z) = 185^0 10' 39'',7$	$= 183^0 9' 24'',3.$

Da es wahrscheinlich, dass die Hypothese nicht gleich genügen wird, also die Grössen η und η' in den Gleichungen (11) bis (14) vorläufig ohne Bedeutung sind, kommt zunächst Formel (15) zur Anwendung:

$\sin {}^1/_2\,\varepsilon = 9{,}105\,803$	$\cos {}^1/_2\,\varepsilon = 9{,}996\,436$
$\sin {}^1/_2\,(DP + DP') = 8{,}861\,341_n$	$\sin {}^1/_2\,(DP - DP') = 8{,}246\,379$
$7{,}967\,144_n$	$8{,}242\,815$
$\times\, 2 = 5{,}934\,288$	$\times\, 2 = 6{,}485\,630$
	$5{,}934\,288$
	Differenz . . $0{,}551\,342$
	Zech . . . . $0{,}107\,539$
	$6{,}593\,169$
	$\times\, {}^1/_2 = \sin {}^1/_2\, P = 8{,}296\,584$

$$ {}^1/_2\, PP' = 1^0\ 8' 3'',55$$
$$PP' = 2^0 16' 7'',10.$$

$\log k(t' - t)$ ist, wie in der zwanzigsten Vorlesung, gleich 4,453096, also $\log k(t' - t) - {}^3/_2 \log r = 4{,}453\,096 - 0{,}542\,592 = 3{,}910\,504$,

$$\frac{k(t'-t)}{r^{3/2}} = 8137'',74 = 2^0 15' 37'',74,$$

und demnach:

$$PP' - \frac{k(t'-t)}{r^{3/2}} = +\ 29'',36.$$

Führt man die Rechnung für eine Hypothese, worin $\log r$ um fünf Einheiten der dritten Stelle grösser als in der vorigen, d. h. gleich 0,366728 angenommen wird, so erhält man:

$$PP' - \frac{k(t'-t)}{r^{3/2}} = -\ 2'',31.$$

Die Aenderung von fünf Einheiten in der dritten Stelle des Logarithmus von r hat demnach eine Aenderung von 31″,67 in jener Differenz bewirkt, eine solche Einheit bringt also eine Aenderung von 6″,83 hervor. Um den Fehler von — 2″,31 zu beseitigen, wird man den entsprechenden Werth von $\log r$ um 0,000277 verkleinern, also

$$\log r = 0{,}366\,363 \quad r = 2{,}324\,679\ ^{1)}$$

[1]) In der zwanzigsten Vorlesung wurde $\log r = 0{,}366757$ gefunden; der Unterschied gegen den obigen Werth rührt daher, dass $v' - v$ in der 20. Vorlesung durch den Cosinus nur auf einige Secunden genau berechnet werden konnte.

setzen müssen, welches Letztere wir ohne Bedenken als definitive Lösung behandeln können. Es werden daher die definitiven Werthe von z und z':

$$z = 9^0\,24'\,39'',13$$
$$z' = 5^0\,50'\,10'',78.$$

Dadurch wird:

$$\begin{aligned} DP &= 185^0\ \ 4'\,32'',85 \\ DP' &= 183^0\ \ 5'\,38'',10 \\ \hline {}^1/_2(DP + DP') &= 184^0\ \ 5'\ \ 5'',47 \\ {}^1/_2(DP - DP') &= \ \ \ 0^0\,59'\,27'',37, \end{aligned}$$

auf welche Zahlen nun die Formeln (11) bis (14) in folgender Rechnung zur Anwendung kommen:

$$\begin{array}{llll} \sin{}^1/_2(DP + DP') = 8{,}852686_n & & \sin{}^1/_2PP'\sin{}^1/_2(\eta' + \eta) = 7{,}958489_n \\ \cos{}^1/_2(DP + DP') = 9{,}998895_n & & \sin{}^1/_2PP'\cos{}^1/_2(\eta' + \eta) = 8{,}234337 \\ \sin{}^1/_2(DP - DP') = 8{,}237901 & & \cos{}^1/_2PP'\sin{}^1/_2(\eta' - \eta) = 9{,}104698_n \\ \cos{}^1/_2(DP - DP') = 9{,}999935 & & \cos{}^1/_2PP'\cos{}^1/_2(\eta' - \eta) = 9{,}996371 \\ \sin{}^1/_2\varepsilon \qquad\qquad\quad = 9{,}105803 & & \\ \cos{}^1/_2\varepsilon \qquad\qquad\quad = 9{,}996436 & & \end{array}$$

Es ergiebt sich (ohne Zweideutigkeit, weil $\sin{}^1/_2PP'$ und $\cos{}^1/_2PP'$ positiv werden muss):

$$\begin{aligned} {}^1/_2(\eta' + \eta) &= -\ 27^0\,55'\ \ 0'',59 \\ {}^1/_2(\eta' - \eta) &= -\ \ \ 7^0\,18'\,46'',00 \\ \eta &= -\ 20^0\,36'\,14'',59 \\ \eta' &= -\ 35^0\,13'\,46'',59 \\ {}^1/_2PP' &= \ \ \ \ \ 1^0\ \ 6'\,44'',24 \\ PP' &= \ \ \ \ \ 2^0\,13'\,28'',48 \\ \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} &= \ \ \ \ \ 2^0\,13'\,28'',50, \end{aligned}$$

ferner wird die Rechnung der Gleichungen (16) bis (19) der vorigen Vorlesung in folgender Weise erledigt:

$$\begin{aligned} {}^1/_2(\gamma + \eta) &= -\ 20^0\,34'\,13'',39 \\ {}^1/_2(\gamma - \eta) &= +\ \ \ 0^0\ \ 2'\ \ 1'',19 \\ {}^1/_2(\chi - z) &= \ \ \ \ \ 6^0\,25'\,45'',43 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \sin{}^1/_2(\gamma + \eta) = 9{,}545750_n & & \sin{}^1/_2 i \sin{}^1/_2[u + (L - \Omega)] = 8{,}584879_n \\ \cos{}^1/_2(\gamma + \eta) = 9{,}971388 & & \sin{}^1/_2 i \cos{}^1/_2[u + (L - \Omega)] = 6{,}766302 \\ \sin{}^1/_2(\gamma - \eta) = 6{,}769042 & & \cos{}^1/_2 i \sin{}^1/_2[u - (L - \Omega)] = 9{,}020517 \\ \cos{}^1/_2(\gamma - \eta) = 0{,}000000 & & \cos{}^1/_2 i \cos{}^1/_2[u - (L - \Omega)] = 9{,}997260 \\ \sin{}^1/_2(\chi - z) = 9{,}049129 & & \\ \cos{}^1/_2(\chi - z) = 9{,}997260 & & \end{array}$$

also:

$$\begin{aligned} {}^1/_2[u + (L - \Omega)] &= 270^0\,51'\ \ 0'',67 \\ {}^1/_2[u - (L - \Omega)] &= \ \ \ \ \ 6^0\ \ 1'\,20'',94 \\ {}^1/_2 i &= \ \ \ \ \ 2^0\,15'\,18'',28 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} u &= 276^0\,52'\,21'',61 \\ L - \Omega &= 264^0\,49'\,39'',73 \end{aligned}$$

und also:

$$\begin{aligned} \Omega &= 94^0\,20'\,57'',37 \\ i &= \ \ 4^0\,30'\,36'',56. \end{aligned}$$

Zur Controle berechnet man endlich u', ☊ und i auch aus (20) bis (23) auf dieselbe Art und erhält:

$$u' = 279^0\ 5'\,50'',28$$
$$☊ = 94^0\,20'\,57'',20$$
$$i = 4^0\,30'\,36'',52,$$

es ist demnach hier $u' - u = 2^0\,13'\,28'',67$, nahe mit dem Früheren übereinstimmend, die stattfindende Abweichung von $0'',17$ wird durch die Abweichung in ☊ bei der geringen Neigung so gut wie vollständig aufgehoben und unwirksam gemacht.

Nach Dr. Powalky, welcher die Bahn der Harmonia auf das Sorgfältigste bestimmt hat, ist ☊ $= 93^0\,35'\,58'',8$, $i = 4^0\,15'\,54'',8$.

Zum Schluss dieser Abtheilung sei noch auf die Unmöglichkeit einer Kreisbahn hingewiesen, wenn gewisse Umstände eintreten. Wie schon auf S. 222 gesagt wurde, ist die Annahme einer Kreisbahn für stark excentrische Bahnen unzulässig. Dass aber auch für Bahnen mit schwacher Excentricität keine Kreisbahn existiren kann, wenn die geocentrische Bewegung in Breite gewisse Grenzen überschreitet, hat Tisserand im Bull. astron. T. XII, p. 53, 1895, bewiesen. Setzt man in der Gleichung (4), S. 229,

$$r^2 \cos(u' - u) = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho',$$

die aus den Gleichungen (3) und (4), S. 225, folgenden Werthe für ϱ und ϱ' ein, nämlich:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2\chi} - R\cos\chi$$
$$\varrho' = \sqrt{r^2 - R'^2 \sin^2\chi'} - R'\cos\chi',$$

und setzt

$$u' - u = k(t' - t)\,r^{-3/2},$$

so folgt:

$$r^2 \cos\frac{k(t'-t)}{r^{3/2}} = (RR')RR' + (R\varrho')R\left\{\sqrt{r^2 - R'^2\sin^2\chi'} - R'\cos\chi'\right\}$$
$$+ (R'\varrho)R'\left\{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\chi} - R\cos\chi\right\}$$
$$+ (\varrho\varrho')\left\{\sqrt{r^2 - R^2\sin^2\chi} - R\cos\chi\right\}\left\{\sqrt{r^2 - R'^2\sin^2\chi'} - R'\cos\chi'\right\}.$$

In dieser transcendenten Gleichung kommen nur die trigonometrischen Functionen der Seiten und Diagonalen des Vierecks zwischen den beiden Planeten und den beiden Erdörtern vor. Nimmt man die Erdbahn als Kreisbahn an mit dem Radius 1, so muss $r = 1$ die der Erdbahn entsprechende Wurzel der Gleichung sein. Setzt man voraus, dass $t' - t$ klein ist und dass der Planet in der Nähe der Opposition und zugleich in der Nähe der Ekliptik steht, setzt man ferner $R = R' = 1$ und berücksichtigt in der Entwickelung der Gleichung nur die ersten Potenzen der Bogen, so findet man, dass bei einer, gewisse Grenzen überschreitenden Bewegung in Breite, r imaginär wird, also eine Kreisbahn unmöglich ist. Wegen Einzelheiten muss auf die citirte Abhandlung verwiesen werden.