universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Theoretische Astronomie

Klinkerfues, Wilhelm

Braunschweig, 1912

Vorbemerkungen zur dritten Ausgabe

urn:nbn:at:at-ubi:2-6723

VORBEMERKUNGEN ZUR DRITTEN AUSGABE,

mit einer kritischen Uebersicht der neueren von

W. GIBBS, P. HARZER UND A. LEUSCHNER

gegebenen Methoden der Bahnrechnung.

Als der Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn das Ansuchen an mich richtete, von meiner Neubearbeitung der theoretischen Astronomie von Klinkerfues eine neue Ausgabe zu veranstalten, ergriff ich diese Aufgabe bereitwilligst. Es gereicht mir zur Genugthuung, verschiedene, dem Werk anhaftende Mängel bei der neuen Ausgabe beseitigen zu können. Diese, von der Kritik [1]) nicht hervorgehobenen Mängel näher zu bezeichnen, ist der erste Zweck des Vorwortes.

Zunächst muss ich einen Irrthum konstatiren und, soweit das hier möglich ist, klarstellen. In der ersten Vorlesung der zweiten Auflage (cf. S. 7 und 11) wurde bei der Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung und der kurzen Charakterisirung der Theorieen ihrer Lösung gesagt, dass die Gyldén'sche Theorie der absoluten Bahn eine wirklich befriedigende Lösung des Störungsproblems gäbe, indem sie die Bewegung eines Planeten für einen beliebigen Zeitraum ausreichend genau darstelle.

In diesem Umfang präcisirt, ist die Behauptung, wie hier nur in aller Kürze begründet werden kann, nicht zutreffend. Die letzte von Gyldén aufgestellte Integrationsmethode, die horistische, behandelt einerseits die Differentialgleichung für die sogenannte Zeitreduction (Länge), andererseits diejenige für den Radius Vector, auf Grund von verschiedenen „horistischen" Methoden, vor Allem mittelst elliptischer Functionen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Zeitreduction (vergl. §. 6 der Gyldén'schen *Nouvelles Recherches*) ist, trotz der gegen sie erhobenen Einwände, mathematisch nicht fehlerhaft [2]); indess wird die in dieser Gleichung auftretende Horistica

---

[1]) Vergl. O. Callandreau, Bulletin astronomique, Tome XVII, Mars 1900. Ferner: Schulhof, Revue générale des Sciences pures et appliquées No. 8, 30 Avril 1900.

[2]) Wie die auf S. 159 bis 191 meiner Abhandlung: „Die Gyldén'sche horistische Integrationsmethode des Problems der drei Körper und ihre Convergenz, Nova Acta. Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Academie der Naturforscher, Bd. LXXXI, Nr. 3" im Detail durchgeführte Nachprüfung des mathematisch interessanten, äusserst complicirten §. 6 der Gyldén'schen *Nouvelles Recherches* erweist. Indess ist die auf S. 191 bis 199 dieser Arbeit wiedergegebene Backlund'sche Behandlungsweise des Radius Vector [die in anderer, aber bereits ähnlicher Form schon in Herrn Backlund's zweiter Arbeit über den Hecubatypus $\binom{1}{2}$, im Anschluss an Gyldén, die Basis bildet] bezüglich der Convergenz nicht richtig. Man vergleiche hierzu meinen Aufsatz in Nr. 3922 der Astronomischen Nachrichten: „Klarstellung der von Herrn Backlund A. N. 3911 gegen mich erhobenen Vorwürfe", sowie das Weitere, bezüglich des Radius Vector oben Gesagte.

so klein von höherer Ordnung, dass die Methode praktisch illusorisch werden kann, abgesehen von ihrer zu grossen Complicirtheit für die Anwendung. Hingegen ist die Lösung für die Differentialgleichung des Radius Vector im allgemeinen Fall, auf den es ankommt (wie sie im §. 7 der N. R. gegeben ist), nicht richtig. Hier hat Gyldén gegen das eigens von ihm aufgestellte Princip der Mitnahme der kritischen Glieder verstossen, indem er die Integration der Differentialgleichung gerade dadurch ermöglicht, dass er gewisse kritische Glieder vernachlässigt, auf deren vollständige Mitnahme Alles ankommt (vergl. Anm. 1). Dagegen sind die für specielle Fälle angegebenen Methoden (in §. 2 bis §. 4 der N. R.) mittelst elliptischer Functionen nicht in dem Grade mangelhaft, wie ihnen vorgeworfen wurde. Kann man daher von einer „convergenten" Lösung nicht sprechen, wie es in Vorlesung I der zweiten Auflage von Klinkerfues' theoretischer Astronomie geschehen, und ist der grosse principielle Fortschritt, wie ihn Gyldén durch die horistische Methode erreicht zu haben glaubte, den auch Herr Backlund ausdrücklich als solchen hinstellt[1]), nicht erreicht, so ist doch nicht zu leugnen, dass die, durch Herrn Poincaré weit über Gebühr herabgesetzte Gyldén'sche Störungstheorie, in Folge der Gyldén'schen Entwickelung der Störungsfunction und bei Anwendung von Gyldén's partieller Integrationsmethode (gegen die theoretisch kein Einwand erhoben ist), wie sie vor allen Anwendung auf gewisse Typen kleiner Planeten gefunden hat, einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der alten Störungstheorie bedeutet. Denn einerseits ermöglicht diese Methode die analytische Behandlung von wissenschaftlich besonders interessanten Fällen (diejenige der „charakteristischen" Planeten), bei denen die früheren Methoden nicht ausreichen; andererseits giebt sie eine weit bequemere Näherung, als die früheren analytischen Methoden sie erreichten (vergl. auch Vorlesung 1, S. 10). Treffend bemerkt Prof. Brendel in Theil II seiner „*Theorie der kleinen Planeten*" S. 2: „Der Leser

---

[1]) O. Backlund, Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, Jahrg. 32, Heft I, S. 15 u. 18. „... Entwürfe, die darauf abzielten, gleichsam die Waffen zu schmieden, mit denen er den schliesslichen Sieg erfechten sollte... Es galt vor allen Dingen, die sogenannten kritischen Glieder zu bewältigen, die bei den gewöhnlichen Integrationsmethoden zu sinnlosen Resultaten führen. Die neuen Integrationsmethoden, die er zu dem Zwecke schuf, und zwar in erster Linie die sogenannte horistische Methode, gehören zu Gyldén's genialsten Leistungen. Dadurch gelang es ihm in der That, den erwähnten Gliedern die richtige Bedeutung zu vindiciren."

O. Backlund, Comptes rendus. Séance de lundi, 11 février 1901. „*Cette erreur élémentaire m'appartient exclusivement. Je le dois à la mémoire de Gyldén.*"

O. Backlund, Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904, p. 289. *Sur la méthode horistique de Gyldén.* „*Cette objection*" (— „*il y a des cas où la méthode horistique peut être inoffensive; il n'y en a pas où elle peut être utile*" —) „*devient très grave étant énoncée par la plus grande autorité de notre temps. Ne partageant pas l'opinion de M. Poincaré, j'estime de mon devoir d'en exposer la raison... Les termes avec les arguments* $G_1 - 2\,G_2$ *et* $2\,G_1 - G_2$ *ne sont pas alors critiques.*" Hier, am springenden Punkt der ganzen Principienfrage, macht Herr Poincaré zu §. 7 der Gyldén'schen N. R. den berechtigten Einwand, dass die zuvor von Herrn Backlund erwähnten Glieder doch kritisch sind und ihre Vernachlässigung durch Gyldén das allgemeine horistische Integrationsverfahren für den Radius Vector illusorisch macht. Vergleiche:

M. H. Poincaré, Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904, p. 293. *Sur la méthode horistique.* „*Je ne relèverais pas ce qui chez M. Backlund n'est qu'une inadvertance si ce n'était là précisément l'erreur fondamentale de Gyldén. Il est impossible que* G_1 *et* G_2 *soient critiques, sans que* $2\,G_1 - G_2$ *le soit ...; si l'astronome russe s'est trompé, ce n'est pas qu'il en a mal appliqué les règles, c'est que ces règles ne valaient rien.*" Den genauen Nachweis Poincaré's cf. Comptes rendus vom 18. April 1904.

wird mit Recht fragen, ob und welche Vortheile die Gyldén'sche Methode gegenüber den älteren Methoden gewährt, zumal das Vorhandensein solcher Vortheile aus den Entwickelungen des ersten Theiles nicht direct ersichtlich sein dürfte, und von Poincaré auch angezweifelt worden ist (Acta Mathematica, Bd. 29, 1905). Ich will ausdrücklich hervorheben, dass ich bei meinen Untersuchungen die Bedürfnisse der rechnenden Astronomie im Auge habe; für diese dürften die neuen Methoden Gyldén's schliesslich fruchtbringender sein, als die wichtigen analytischen Resultate über den Charakter der Lösungen." —

Auch die Bedeutung von Gyldén's Hauptwerk, den *Orbites absolues*, — falls dasselbe im dritten Band wirklich noch seinen Abschluss finden sollte[1]), — liegt in erster Linie nicht in den principiellen Ergebnissen, da die „absolute Lösung" im Princip nicht erreicht ist und der Titel selbst daher nicht gerechtfertigt erscheint.

Dass Gyldén selbst unter seiner „absoluten" Lösung, die er mittelst der horistischen Methode erreicht zu haben glaubte, in der That eine für unbeschränkte Zeit gültige, „convergente" Lösung verstand, beweist unter anderen Stellen S. 275 und 276 der *Nouvelles Recherches*: „Nichtsdestoweniger kann man, wenn die arbiträren Constanten bestimmt sind, abgesehen von dem höchst seltenen, sogenannten asymptotischen Fall, eine numerische Lösung erhalten, welche die Coordinaten eines Planeten durch gleichförmig convergente trigonometrische Reihen ausdrückt.... Man kann daher, wenn man in Betracht zieht, dass die Convergenz der kritischen Glieder in der Störungsfunction derjenigen einer geometrischen Progression gleichkommt, leicht schliessen, dass man den Grad der Annäherung so weit treiben kann wie man will, derart, dass der Rest kleiner als eine gegebene Grösse wird." Hierzu vergleiche auch *Orbites absolues*, S. 497, 555 etc. —

Den Werth der *Orbites absolues*, wenn dies Werk durch Prof. Sundmann's Mitwirkung, der auch bereits den wesentlichsten Theil der Fortsetzung von Bd. II nach Pulkova geliefert hat, vollendet werden sollte, wird man vielmehr, — von methodischen Vervollkommnungen im Einzelnen, die allerdings zum Theil wesentliche sind, abgesehen, — nur in dem erhöhten Genauigkeitsgrad der Annäherung und den eventuellen numerischen Ergebnissen zu suchen haben, d. h. er kann sich, in letzter Instanz, nur auf das Gebiet der rechnenden Astronomie erstrecken.

---

[1]) Man vergleiche die Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft vom Jahre 1897; 32. Jahrg., S. 20, Zeile 20 etc. und S. 21, Zeile 14 etc. — Bd. II der *Orbites absolues*, der erst zu Anfang des Jahres 1909, zwölf Jahre nach der Ueberführung von Gyldén's wissenschaftlichem Nachlass nach Pulkova, zur Ausgabe gelangt ist, bringt ausser dem bei Gyldén's Tod bereits Gedruckten als Fortsetzung nur die 130 Seiten einfacher weiterer Formel- und Zahlenentwickelungen, welche den Abschluss der von Gyldén zum grossen Theil schon durchgeführten Berechnung der Störungsfunction für die *Hauptplaneten* bilden; wogegen die eigentliche Arbeit, die Integration der Differentialgleichungen, noch aussteht. Für die *kleinen Planeten* ist von Herrn Brendel durch seine „*Theorie der kleinen Planeten*" mittelst der Gyldén'schen Principien ein Resultat bereits erreicht. —

Sollten die im 32. Jahrgange der astronomischen Vierteljahrsschrift in Aussicht gestellten Publicationen sich noch weiter verzögern müssen, so wäre erwünscht, dass vielleicht vorher die daselbst auf S. 32 erwähnten 200 Briefe Gyldén's, „die fast ausschliesslich einen wissenschaftlichen Charakter tragen", erscheinen könnten. —

Dass aber für die rechnende Astronomie die Principien Gyldén's und die Gyldén'schen Methoden in der That wirklichen Werth besitzen und die von Gyldén begründeten Brendel'schen „instantanen" Elemente den osculirenden hinsichtlich der Kürze der Rechnung erheblich überlegen sind, dafür hat Prof. Brendel in Theil IV seiner *Theorie der kleinen Planeten* den Beweis erbracht.

Dies nunmehr abgeschlossene Werk[1]), das für die Astronomie von bleibendem Werth ist, zeigt, dass man mittelst der Gyldén'schen Methoden mit einem recht geringen Aufwand von Rechenarbeit im Stande ist, die Beobachtungen eines Planeten so genähert darzustellen, dass seine Wiederauffindung am Himmel etwa während eines Jahrhunderts ohne jede Mühe gesichert ist.

In Nr. 4397 der Astronomischen Nachrichten weist Herr Brendel darauf hin, dass bei Berücksichtigung einiger Hauptstörungsglieder für Jupiter die zur Vergleichung herangezogenen Beobachtungen der Aegina aus den Jahren 1866 bis 1907 so dargestellt werden, dass die grösste Differenz in Rectascension $2^s.3$, in Declination $23''$ beträgt, ein Resultat, das angesichts der angestrebten Genauigkeitsgrenze nichts zu wünschen übrig lässt. In Theil IV der *Theorie der kleinen Planeten* setzt Herr Brendel bei der Ausgleichung auseinander, dass die bei der Ausgleichung nicht berücksichtigten Beobachtungen, ebenso wie die Vorausberechnungen auf 50 Jahre oder darüber, etwas stärker abweichen müssen; dass aber die nicht berücksichtigten und die vorausberechneten Oerter nicht so stark abweichen werden, dass die Auffindung nach 50 oder mehr Jahren irgend welche Schwierigkeit macht. (Hierzu vergl. auch den Schluss der folg. Anm. 1, S. XXVII.)

Nach Bestimmung eines genügend zuverlässigen Elementensystems und Aufstellung der Bewegungstafeln für das nächste halbe Jahrhundert oder länger aber ist ein Planet auf lange Zeit gesichert, ohne dass irgend eine Neurechnung erforderlich wäre. Hierin liegt die hauptsächlichste Ueberlegenheit der Gyldén'schen Methode über diejenige der speciellen Störungen; zudem ist eine solche definitive Bahnbestimmung in ein paar Wochen vollständig zu erledigen, während die älteren analytischen Störungsmethoden weit umständlichere Rechnungen erfordern. Von eben so grosser Bedeutung aber sind die neuen Methoden, wenn es sich um eine scharfe Darstellung der Beobachtungen und eventuell um Prüfung des Newtonschen Gesetzes handelt. Die hierzu erforderliche Mitnahme der weiteren Störungen höherer Ordnung (und höheren Grades), die nach den älteren analytischen Störungsmethoden äusserst complicirt und mühsam ist, erledigt sich nach den Gyldén'schen Prinzipien in einfachster Weise bei Behandlung der einzelnen Grade. (Hierzu vergleiche man speciell meine, auf S. 10 des Folgenden in Anmerkung 4 citirte Wiener Denkschriftenarbeit über den Typus $\frac{2}{3}$, Theil I, wo sich auf S. 349 und 350 alles Diesbezügliche in ausführlichster Weise auseinandergesetzt findet, sowie später Theil III.) —

Durch Aufdeckung des von Gyldén bei seiner horistischen Methode in §. 7 der *Nouvelles Recherches* begangenen Fehlers, der die convergente Lösung illusorisch macht,

---

[1]) Theil IV (der mir schon im Manuscript vorlag und von dem die Separata bereits erschienen sind) cf. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Bd. VIII, Nr. 1. Die Tafeln umfassen circa **350** Planeten ($n > 709''$).

hat Herr Poincaré der Astronomie einen wesentlichen Dienst geleistet. In seiner allgemeinen Beurtheilung der Gyldén'schen Arbeiten aber, wie sie Herr Poincaré z. B. auch auf S. 235 von Bd. 29 der Acta Mathematica, Zeile 6 bis 14 ausspricht, ist er nicht nur über das Maass und Ziel einer objectiven wissenschaftlichen Bewerthung hinausgegangen, sondern hat sich zu einem nicht motivirten und völlig unzutreffenden Werthurtheil hinreissen lassen. Das beweisen die nunmehr vorliegenden, von Herrn Brendel erlangten positiven Rechenergebnisse der Gyldén'schen Methoden, denen kein wissenschaftlich ernst zu nehmender Einwand bezüglich ihres Werthes für die Astronomie mehr entgegen zu stellen ist. Meine eigenen, weit später als die Brendel-schen Arbeiten begonnenen Untersuchungen auf Grund der Methoden Gyldén's über den *Hildatypus* [$\frac{2}{3}$] (cf. S. 10 des Folgenden, Anmerkung 4, sowie S. XXVII dieser Vorbemerkungen, Anmerkung 1) haben zur Zeit ihren Abschluss noch nicht erreicht. —

Während nun Herr Poincaré den Gyldén'schen Versuch einer „convergenten" Lösung des Störungsproblems als nicht geglückt in Bd. 29 der Acta Mathematica aufs schärfste verurtheilt, ist seine eigene „convergente", im Jahre **1889** als Tome XIII der Acta Mathematica bereits gedruckte, *„preisgekrönte"* Lösung — wie seiner Zeit Gyldén und Phragmén erwiesen — ebenso gescheitert. Dem auf anderen Gebieten so fruchtbaren Genie des grossen Mathematikers ist es — meines Wissens — auch bis heute, trotz wiederholter Versuche, noch nicht gelungen, wirklich brauchbare Störungsmethoden für die Astronomie zu schaffen, welche die Rechnungen nicht unnöthig compliciren, und deren Werth vor Allem durch die Erfahrung (die Beobachtungen) genügend bestätigt wird: Methoden, wie sie Gyldén dagegen hinterlassen hat.

Das ist das Endergebniss der ganzen Frage, während deren Herr Poincaré seit Gyldén's Tode oft nur einige abfällige Bemerkungen zu publiciren brauchte — die häufig genug gänzlich unrichtige Behauptungen[1]) neben zutreffender Kritik enthielten, die aber nur von einigen Wenigen, mit dem Stoff völlig Vertrauten überhaupt nachgeprüft werden konnten —, um durch das blosse Gewicht seines Namens lange Zeit hindurch eine ganze Richtung niederzudrücken und ihre Vertreter vor der Oeffentlichkeit

[1]) Hierzu vergleiche man auch das Brendel'sche Referat auf der Astronomenversammlung vom Jahre 1910 in Breslau in dem betreffenden Versammlungsbericht der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, 45. Jahrgang, Heft 4, auf welches die nachfolgenden Seitenzahlen hinweisen.

In diesem Referat (cf. S. 307) weist Herr Brendel mit aller nur wünschenswerthen Deutlichkeit darauf hin, dass gewisse abfällige Urtheile Poincaré's „vollkommen haltlos und auch auf kein Argument gestützt sind", . . . dass „die ungeheuren Vortheile der Gyldén'schen Methode gegenüber den classischen Methoden Herrn Poincaré offenbar entgangen sind, weil er niemals weiter in das Problem dieser Entwickelung eingedrungen ist", ... und „dass die Grundlosigkeit dieser Vorwürfe so auf der Hand liegt, dass man kaum ein Wort darüber zu verlieren braucht". —

Der durch das Brendel'sche Referat (cf. S. 306, Zeile 24 bis 43) veranlasste Beschluss der astronomischen Gesellschaft in Breslau (cf. S. 299, Zeile 14 bis 30 und S. 300, Zeile 8 bis 10) gewährleistet bereits die systematische Nutzbarmachung der neuen Methoden für die Astronomie durch ihre Anwendung zur gruppenweisen Berechnung der kleinen Planeten. Denn sehr richtig schlägt Herr Brendel (cf. S. 306, Zeile 29 bis 32) als „zweite Modification des Bauschinger'schen Programms" für die kleinen Planeten (cf. Astr. V. J. Schrift, 31. Jahrgang, 1896, S. 284) vor, „nicht die Methode der speciellen Störungen anzuwenden, sondern absolute Störungen" (nach den Gyldén-schen Principien) „zu rechnen, die es ja ermöglichen, die Bahn für längere Zeit festzulegen". —

lahm zu legen durch Behauptungen, die seiner Autorität einfach geglaubt wurden, die aber nicht durch Polemik, sondern nur und allein durch Resultate endgültig zu widerlegen waren.

Hiermit ist alles, den Thatsachen entsprechend, festgelegt.

Diese Feststellung war auch deshalb wünschenswerth, weil eine Beantwortung und Klarstellung von Herrn Poincaré's grossem Aufsatz in Bd. 29 der Acta Mathematica gegen die Gyldén'sche Richtung überhaupt, von Seiten des Inhabers von Gyldén's wissenschaftlichem Nachlass, — an den Herrn Poincaré's Aufsatz im Jahre 1905 gerichtet war (cf. A. M. Bd. 29, S. 260 und 261), — nicht erfolgt ist, und von dieser Seite nach einander so verschiedenartige Versehen begangen wurden, dass die allgemeine Meinung durch beides und die geringe Förderung der *Orbites absolues* naturgemäss darin bestärkt werden musste, das Urtheil Herrn Poincaré's über Gyldén's wissenschaftliche Leistungen sei in jeder Beziehung das richtige gewesen. „Voll unnützer Complicationen" indess, und „nur noch von historischem Interesse" — wie Herr Poincaré in Bd. 29 (S. 235, Zeile 6 bis 14) der Acta Mathematica behauptet — sind die nichthoristischen Methoden Gyldén's am wenigsten von allen Störungsmethoden der Astronomie. Auch haben andere neue Methoden den Grad von Brauchbarkeit, wie ihn nach der „*Theorie der kleinen Planeten*" die Gyldén'schen Methoden besitzen, zahlenmässig bisher nicht bewiesen.

Es könnte gewagt scheinen, wenn hier ein Urtheil abgegeben wurde, das dem Poincaré'schen theilweise widerspricht. Ist doch die Bedeutung Poincaré's als Mathematiker allgemein anerkannt. Auf dem Nachbargebiet der Astronomie, hinsichtlich der Leistungen seines einstigen Gegners Gyldén jedoch, haben die wissenschaftlichen Thatsachen das Poincaré'sche Urtheil als ein nicht in jeder Hinsicht zutreffendes und gültiges erwiesen. Und wiewohl die analytischen Untersuchungen der zweiten Poincaré'schen Arbeit: „*Ueber das Problem der drei Körper und die Gleichungen der Dynamik*", vom Jahre 1890, hinsichtlich der periodischen Lösungen (wie auch andere Poincaré'sche Untersuchungen), in erkenntnisstheoretischer Hinsicht für die Astronomie einen gewissen Werth besitzen, so haben diese Arbeiten doch den actuellen Werth, die fruchtbare Verwerthbarkeit, die den Keim neuer Entdeckungen birgt, welche die Gyldén'schen Methoden erwiesen haben, für die Astronomie nicht gezeitigt. Jedenfalls aber hat sich für die Astronomie Poincaré's eigene Forschung [in Acta Mathematica, Tome XIII [1])] und sein Urtheil (in Acta Mathematica, Bd. 29, S. 235, Zeile 6 bis 14 etc.) hinsichtlich des Störungsproblems (Problem der drei Körper) in der Grundtendenz als irrig erwiesen. Das

[1]) Für diejenigen Leser, denen die auf S. 10 des Folgenden erwähnte Physikalische Zeitschrift nicht erreichbar ist, sei aus dieser, als Beleg für obige Behauptung zur nothwendigen Vervollständigung des zuvor Gesagten, die betreffende Stelle hier angeführt und, als beste Illustration zu Poincaré's späterer schmählicher Beurtheilung der wissenschaftlichen Leistungen seines verstorbenen astronomischen Gegners in Bd. 29 der Acta Mathematica, hier gleichfalls festgelegt. Nach allem hier Dargelegten wird sich der Leser selbst sein Urtheil bilden. Physikalische Zeitschrift, 5. Jahrgang, Nr. 7, S. 181:

„Im Jahre 1889 wurde eine Arbeit Poincaré's über das Problem der drei Körper durch den officiellen Preisrichter in Stockholm, den Chefredacteur der Acta Mathematica, Mittag

von vereinzelten Astronomen [und gerade von einem sonst so anerkannten, wie H. Bruns in Leipzig], — welche die nicht horistischen Methoden Gyldén's und den Werth der neuen Richtung nicht entsprechend an Beispielen geprüft zu haben scheinen, — schlechthin als gültig acceptirte „αὐτὸς ἔφα“ des Mathematikers ist für die Astronomie zur Genüge als ungültig gekennzeichnet und erledigt. —

Durch das Gesagte dürfte es verständlich werden, warum der principielle Standpunkt von Vorlesung I der zweiten Auflage von Klinkerfues' theoretischer Astronomie bei Abfassung der dritten Ausgabe des Werkes ein anderer geworden ist. Wiewohl die erörterte Frage nicht die Bahnrechnung als solche betrifft, sondern die alte Grundfrage der Mechanik des Himmels bildet, so war doch ihre endgültige Klarstellung bei Charakterisirung des allgemeinen Problems der planetarischen Bewegung, das in Vorlesung I naturgemäss an die Spitze der Betrachtung gestellt wurde, gegeben.

— — — — — — — —

Leffler, mit dem von S. M. Oscar II. König von Schweden gestifteten Preis von zehntausend Kronen gekrönt. [Dass Mittag Leffler allein — nicht aber auch Weierstrass — die Verantwortung für die Entscheidung des Preisgerichtes trägt, hat er selbst zugegeben. (cf. Acta Math., Tome XIII. Avant Propos pag. VII.)] Diese Arbeit ist:

„Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889. Avec des Notes par l'auteur.“

Die gekrönte Arbeit wurde in den Acta Mathematica vollständig gedruckt vom 29. April **1889** bis 13. November **1889** (wie die Seitenimprimata des Exemplares zeigen); ihre officielle Ausgabe wurde jedoch im letzten Moment noch vermieden, nachdem sogar schon broschirte Separate (so eines an Gyldén) vom Chefredacteur der Acta Mathematica in Stockholm versandt worden waren. Denn man ward erst jetzt, just nach Ablauf der zwölften Stunde, auf einen Fehler in der Preisarbeit aufmerksam, der sich nicht mehr durch Zusätze nachträglich etwa berichtigen und noch verbessern liess, sondern die Grundlagen der gekrönten Arbeit derart berührte, dass er ihre Ausgabe unmöglich machte.

An Stelle dieser Arbeit veröffentlichten die Acta Mathematica — ein Jahr später — eine zweite Arbeit Poincaré's von fast völlig gleichem Titel, aber verändertem Inhalt. Diese zweite Arbeit, welche die verfehlte Preisarbeit ersetzen musste, ist:

„Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889.“

Ist gedruckt vom 28. April **1890** bis 21. October **1890** (wie man wiederum aus den Seitenimprimata im Bd. XIII der Acta Mathematica ersieht).

Während beide Arbeiten als Tome XIII, Nr. 1 und 2 der Acta Mathematica gedruckt wurden, gelangte nur die zweite Arbeit in Bd. XIII der Acta Mathematica, wie man im Titelblatt liest, als das „Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier **1889**“ zur wirklichen Ausgabe!

Ein seiner Zeit vom „Rédacteur en chef“ der Acta Mathematica versandtes, broschirtes Exemplar der ursprünglichen Preisarbeit Poincaré's, das von mir persönlich eingesehen wurde, dem auch die oben mitgetheilten Datum der Seitenimprimata entnommen sind, befindet sich in Sicherheit. — Hiermit vergleiche man die Erklärungen Poincaré's in seiner „Introduction“ zur edirten — „Preisarbeit“ Acta Mathematica, Tome XIII, p. 5. . . . .

Soviel historisch über die wichtigste und grösste Arbeit, die Poincaré über das Problem der drei Körper verfasst hat.“ —

An Stelle der ursprünglichen, „convergenten“ Ergebnisse der ersten Arbeit war nur von Preis-Bewerber und Preis-Richter die divergente Lösung der eilends verfassten, zweiten, „gekrönten“ Arbeit über das Fundamentalproblem der Astronomie gesetzt worden, deren mehr negative Ergebnisse, wie schon hervorgehoben, nichts von der actuellen Bedeutung und positiven Verwerthbarkeit für die Störungstheorie besitzen, welche die Gyldén'schen Methoden bei ihrer Anwendung erwiesen haben.

Damit ist historisch das Facit über das von Gyldén und von Poincaré für das Störungsproblem Erreichte objectiv gezogen. (Man vergl. aber auch noch S. XXVII, Anmerkung 1.) —

Nach Klärung des erwähnten Irrthums hinsichtlich der horistischen Methode muss auf den zweiten, schwerer ins Gewicht fallenden Mangel hingewiesen werden, der die zweite Auflage trifft; es ist der Mangel an verbürgter Sicherheit für die Richtigkeit der mathematischen Formeln, die aus der ersten Auflage des ursprünglichen, 30 Druckbogen umfassenden Werkes von Klinkerfues in die Neubearbeitung von mir übernommen wurden.

Ich will diesen Mangel in keiner Weise zu beschönigen suchen. In meiner Assistentenstellung, wo ich naturgemäss durch die Dienststunden und laufenden Beobachtungen schon sehr in Anspruch genommen war, unterschätzte ich die Schwierigkeiten der Herausgabe eines Werkes, das wegen seiner ausgezeichnet pädagogischen und geistreichen Darstellung mit Recht berühmt geworden ist, das jedoch durch das tragische Geschick seines Verfassers im Detail der mathematischen Formeln gänzlich unzuverlässig war. Es hätte bei der Neubearbeitung zugleich eine vollständige Nachprüfung der Formeln der ersten Auflage stattfinden müssen. Immerhin wurden damals 186 Fehler festgestellt. Das gedruckte Verzeichniss derselben wurde seiner Zeit dem Verlag ebensowohl, wie dem Chefredacteur der astronomischen Vierteljahrsschrift, Prof. Lehmann-Filhés und auch verschiedenen anderen Collegen übergeben.

Gleichwohl umfasst diese grosse Zahl von Fehlern der ersten Auflage — die keineswegs durchweg blosse Druckfehler waren —, noch nicht entfernt die sämmtlichen in ihr enthaltenen Fehler.

Der Umstand, dass mir durch Prof. Knopf, Prof. Lehmann-Filhés und Dr. Wedemeyer noch eine Anzahl übersehener Fehler der ersten Auflage mitgetheilt wurde, wofür ich ihnen auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte, veranlasste mich, meine Arbeit mit dem Erscheinen derselben nicht als abgeschlossen zu betrachten, sondern sie von Neuem vorzunehmen, mit dem Bestreben, vor allem die Richtigkeit der mathematischen Formeln sicherzustellen. Wie ich hoffe, enthält das im Laufe der Jahre von mir hergestellte Fehlerverzeichniss (das auch wieder dem Vieweg'schen Verlag und dem Chefredacteur der A. V. J. S., sowie Herrn Geheimrath v. Seeliger übersandt wurde) nunmehr wirklich die sämmtlichen, früher übersehenen, in der dritten Ausgabe berücksichtigten Fehler, welche einen grossen Theil der mathematischen Formeln der zweiten Auflage durchlaufend entstellen.

Bemerkt sei an dieser Stelle, dass den Rechner irreführende Druckfehler in den mathematischen Formeln auch in anderen, das Gebiet der Bahnrechnung behandelnden Werken zu finden sind. Ja, ich stehe nicht an, zu behaupten, dass es fast unmöglich sein dürfte, derartig umfangreiche Werke völlig druckfehlerfrei herzustellen. Als Beweis hierfür möchte ich auch das bereits im Jahre 1905 erschienene grosse Bauschinger'sche[1]) Lehrbuch über Bahnrechnung anführen, das gewiss mit der grösstmöglichen Sorgfalt ausgeführt und revidirt worden ist. Ohne dass ich dies umfangreiche Buch in allen Theilen genauer geprüft hätte, ist mir in demselben eine, für seinen Umfang allerdings nicht grosse Anzahl von Fehlern bekannt, die ich im

[1]) Die Bahnbestimmung der Himmelskörper von Julius Bauschinger. Mit 84 Figuren im Text. Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1906.

*

Interesse der Rechner den Exemplaren der vorliegenden dritten Ausgabe als Sonderbeilage hinzugefügt habe. Jedenfalls wird man hieraus aber dem hochverdienstvollen Werke keinen ernstlichen Vorwurf machen; enthält doch sogar das classische Lehrbuch der Bahnbestimmung von Oppolzer, das sein Verfasser, nach Mittheilung des neuen Fehlerverzeichnisses in Engelmann's Verlag im Jahre 1880, für vollständig controlirt hielt, noch die beträchtliche Anzahl, von Prof. Leuschner im Jahre 1890 in den „Publications of the Astronomical Society of the Pacific" mitgetheilter Fehler, deren Verzeichniss, da es nicht allgemein bekannt sein dürfte, der vorliegenden dritten Ausgabe gleichfalls mit beigegeben ist. Und so wage auch ich nicht zu behaupten, dass das eine oder andere Druckversehen in den mathematischen Formeln der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes, trotz aller stattgehabten Bemühungen, völlig ausgeschlossen wäre. Ja, wenn sich Jemand der Mühe einer Prüfung derselben unterziehen und dabei von mir unbemerkt gebliebene Versehen feststellen und mir oder dem Vieweg'schen Verlage mittheilen wollte, so würde ich ihm im Interesse des Werkes zu aufrichtigem Dank verpflichtet sein. —

Auch von den Klinkerfues'schen Rechenbeispielen wurden einige, offenbar fehlerhafte, neu gerechnet, wie die Beispiele der Vorlesungen 20, 34, 36 und 70 der zweiten Auflage; verschiedene andere, zwar im Ergebniss richtige, indess mit Druckfehlern behaftete, wurden corrigirt. Ob im übrigen Klinkerfues bei seinen Rechenbeispielen noch Fehler untergelaufen sind, will ich dahingestellt sein lassen. Das, worauf es mir ankam, war vor Allem die Richtigstellung der mathematischen Entwickelungen. — Ebenso wurde auch das Ebert'sche Rechenbeispiel der 110. Vorlesung, in dem am Schluß sämmtliche Elementencorrectionen unrichtig erhalten sind, da die Fehlereinheit vergessen ist, corrigirt. Diese verschiedenen Rechnungen wurden von Herrn Dr. Wedemeyer und mir in Controle gleichzeitig durchgeführt.

Ferner wurden einige neu gefundene (auch im Watson'schen Original enthaltene) Druckfehler der im Anhang gegebenen Barker'schen Tafel VI beseitigt; auch wurden in Tafel XI und XII der 2. Auflage die von Prof. Brendel in den Gauss'schen Originaltafeln der *Theoria motus* (cf. Gauss' Werke, Bd. VII, 1906, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen) angebrachten Verbesserungen berücksichtigt. Schliesslich wurde die Constantentafel XVI der 2., d. i. Tafel XX der 3. Ausgabe erweitert und modern verbessert. In ihrer vorliegenden Form dürften Druckfehler der Tafeln ausgeschlossen sein. Die im Vorwort der 2. Auflage (cf. S. X) über die Nummernfolge der Tafeln gemachten Angaben gelten für die 3. Ausgabe, in welche neue Zahlentafeln aufgenommen sind, nicht mehr; die diesbezüglichen Aufschlüsse findet der Leser auf S. 828 des folgenden Anhanges, der die Tafeln enthält, gegeben. —

Bezüglich der Präcession, die auch in anderen Werken über Bahnrechnung eine ausführlichere Behandlung erfahren hat — wiewohl streng genommen allerdings nur die Ergebnisse der Theorie für die Bahnrechnung in Betracht kommen —, möchte ich auf das schon im Vorwort zur zweiten Auflage des vorliegenden Werkes auf S. IX Gesagte verweisen. Hier sei noch erwähnt, dass die classische mechanische Theorie der Figur der Erde, die einen genäherten Werth für die Abplattung ergiebt (der,

numerisch modificirt, in der Theorie der Präcession, cf. S. 148 des Folgenden, gebraucht ist), sich in meinem Buch über die Figur der Erde [1]) in verständlich gehaltener Form und weit ausführlicher, als in anderen Arbeiten über dies complicirte Problem der höheren Mechanik, abgeleitet findet, ein Ziel, das ich besonders auch bei der Präcession angestrebt habe. Der moderne Werth für die Abplattung wird in der Fortsetzung des genannten Buches behandelt. (Diese wird indess erst nach Abschluss des dritten Theiles meiner, auf Grund der Gyldén'schen Störungstheorie durchgeführten Untersuchungen über die Störungen der kleinen Planeten vom *Hildatypus* [$\frac{2}{3}$] zur Ausgabe gelangen.) —

Im Uebrigen habe ich meine erste Neubearbeitung des Klinkerfues'sches Buches keiner weiteren wesentlichen Umarbeitung unterzogen, sondern von einer gleich zu erwähnenden, principiellen Erweiterung abgesehen, nur noch einzelne, mehr nebensächliche Veränderungen vorgenommen, wie die Aenderung verschiedener Figuren, die Hinzufügung einzelner Gleichungen etc. Ferner ist in der dritten Ausgabe das falsche Klinkerfues'sche Beispiel der 127. Vorlesung der zweiten (d. i. der 122. Vorlesung der ersten) Auflage für die Identität der zwei betreffenden Meteoritenbahnen fortgefallen, da, worauf im Astronomical Journal, Bd. XV, S. 165 durch Prof. Schaeberle hingewiesen ist, die beiden Sternschnuppen nicht identisch waren.

Das an Stelle des unrichtigen Klinkerfues'schen Beispieles im Folgenden gegebene Beispiel ist von Herrn Chas. P. Olivier (cf. Lick Observatory Contributions Nr. 5) und behandelt die gleichzeitige Beobachtung desselben Meteors auf Mt. Hamilton und Mt. Diablo. Herr Olivier hat den Moment des Verschwindens dem Moment des Aufleuchtens bei der Berechnung vorgezogen, weil der letztere in der Regel viel weniger beobachtet ist, als der erstere (cf. S. 812 des Folgenden). —

Hinzugefügt sind der neuen Ausgabe, wie schon erwähnt, noch einige wichtige neue Zahlentafeln. Tafel XI der dritten Ausgabe, für Vorlesung 35, hatte Herr Dr. Wedemeyer die Güte auszuführen [2]). — Als eine besondere Errungenschaft für die dritte Ausgabe dürfte jedoch die Aufnahme der neuen Leuschner'schen Bahnrechnungsmethoden zu betrachten sein, auf deren Charakteristik ich sogleich mit einigen Worten zurückkommen werde. Die für diese Methoden gebrauchte Tafel XVI, die eine Erweiterung der entsprechenden Oppolzer'schen Tafel XIII, Bd. I, auf sechs Stellen mit kleineren Intervallen darstellt und im Allgemeinen genau bis auf circa eine Einheit der letzten Ziffer ist, und die von besonderer Wichtigkeit ist (cf. S. 471 und

---

[1]) Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet und die Theorie der Figur der Erde. Erster Theil. Mit 137 Textfiguren. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1908. Besprochen in der:

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, 46. Jahrgang, Heft 1 von 1911 (durch Prof. E. Anding). —

Im: Bulletin astronomique, Bd. 25 (1908), S. 200 (durch Prof. Armand Lambert). —

In: Nature Nr. 2025, Vol. 78. Thursday, 20. August 1908 (durch Captain W. J. Johnston, Captain Clarkes Nachfolger). —

[2]) Diese von Klinkerfues am Schluss von Vorlesung 35 der ersten Auflage erwähnte Tafel hat sich zwar in Klinkerfues' wissenschaftlichem Nachlass befunden, ist aber von Klinkerfues' Nachfolger, wie er mir seiner Zeit mittheilte, mit dem übrigen Nachlass wegen gänzlicher Unleserlichkeit verbrannt worden. —

S. 473, Zeile 22 und 23 des Folgenden), hatte Herr Prof. Leuschner die Güte, für die dritte Ausgabe zur Verfügung zu stellen, während Tafel XIV und XV dem zweiten Bande von Oppolzer's Bahnrechnung (Tafel Ia und IIa daselbst) mit Genehmigung des Engelmann'schen Verlags entnommen sind. —

Bei Abfassung meiner ersten Neubearbeitung des Werkes war es durch das wissenschaftliche Interesse geboten, die neue, im Jahre 1889 erschienene Vectorenmethode von Willard Gibbs[1]) aufzunehmen, die, originell und elegant hinsichtlich der theoretischen Entwickelungen, im Genauigkeitsgrad der Annäherung allen früheren Methoden überlegen ist und schon aus diesem Grunde bei einer Neudarstellung der Bahnrechnung selbstverständlich nicht einfach unerörtert bleiben durfte. Wenngleich einige Nachtheile dieser Methode in praktischer Beziehung allerdings nicht in Abrede zu stellen sind (cf. S. XXVI, Anm.), so fällt doch das günstige Urtheil derjenigen Rechner, die sie angewandt haben (cf. S. 414 des Folgenden), dem, bekanntlich von anderer Seite über die Methode gefällten, einseitig absprechenden Urtheil gegenüber, wesentlich ins Gewicht. Ebenso hat auch Callandreau die Vorzüge der Methode rühmend anerkannt. Die von Fabritius und von Vogel (cf. A. N., Bd. 128, S. 225 und Bd. 129, S. 37) gemachten Vorschläge von Verbesserungen der Gibbs'schen Methode, — die einige Mängel derselben beseitigen, — wurden nicht berücksichtigt, weil sie weder eine wirklich durchgeführte Neugestaltung der Methode, noch auch, auf Grund einer solchen, die numerische Anwendung erbringen. Auf die wesentliche Verbesserung der Methode durch Frischauf werden wir weiterhin zu sprechen kommen. —

Kurz nach dem Erscheinen meiner ersten Neubearbeitung von Klinkerfues' theoretischer Astronomie ist dann von Prof. Harzer in Kiel ein erneuter Versuch gemacht worden, für das Problem eine noch vollkommenere Lösung als die von Gauss, Encke, Oppolzer und Gibbs gegebene, zu finden, in einer grossen, buchartigen Abhandlung: „Ueber die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen.“ (Publication der Sternwarte in Kiel XI, herausgegeben von Paul Harzer; cf. auch A. N., Bd. 141.) Schon Prof. Bauschinger hat die Aufnahme der Harzer'schen Methode in sein neues Lehrbuch über Bahnrechnung abgelehnt. Er motivirt auf S. 393 seine Gegnerschaft gegen die Laplace'sche und die Harzer'sche Methode

[1]) Von meiner damaligen Correspondenz mit Gibbs über seine Methode ist inzwischen in den gesammelten Werken des Verstorbenen (vergl. Vol. II, Nr. VI, S. 149—154) ein höchst interessanter Brief erschienen: „*On the use of the Vector method in the determination of orbits. Letter to Dr. Hugo Buchholz, Editor of Klinkerfues Theoretische Astronomie [Hitherto unpublished]*“, den ich den amerikanischen Herausgebern von Gibbs' Werken im Jahre 1905 auf ihre Bitte zur Verfügung stellte. — An dieser Stelle möchte ich eines, wenn auch nebensächlichen Irrthums der zuvor erwähnten Callandreau'schen Kritik gedenken. Callandreau schrieb: „*Pour l'exposé de la méthode vectorielle de Gibbs, le Dr. Buchholz a eu à sa disposition les leçons du professeur Schur, de Göttingue, sur le calcul des orbites, ainsi que des Notes communiquées par M. Gibbs lui même.*“ Hierzu möchte ich bemerken: erstens, dass ich bei Klinkerfues' Nachfolger niemals Vorlesungen gehört habe; zweitens, dass die von Gibbs selbst nicht gegebene, ausführliche Ableitung seiner Fundamentalgleichung, wie sie auf S. 419 bis 422 im Folgenden gegeben ist, in Wirklichkeit von Prof. Schering herstammt (man vergleiche S. 419, Zeile 16 etc.); drittens, dass meine im Folgenden gegebene Darstellung der Gibbs'schen Methode, wie sich jeder überzeugen kann, direct auf dem englischen Original von Gibbs selbst, sowie auf Gibbs' Briefen basirt.

damit: „...da jede Anwendung derselben von der Mühseligkeit der Rechnung und von der geringen Sicherheit des erlangten Resultates den Beweis erbringt. Die Methode fasst zweifellos das Problem im Kern, aber die Hülfsmittel, deren sie sich bedient, sind unzulänglich.“ Nun ist freilich der Vorwurf, dass die Harzer'sche Methode auf Laplace fusse und darum mangelhaft sei, nicht zutreffend; übrigens vergleiche man die Harzer'sche Entgegnung (Astronomische Nachrichten, Bd. 170, Nr. 4058); trotzdem aber trifft die Harzer'sche Methode der letzte Theil des von Prof. Bauschinger erhobenen, nur nicht weiter begründeten Vorwurfs.

Ein so ausgezeichneter Kenner der Bahnrechnung, der sich auf dem Gebiete so erfolgreich selbst bethätigt hat, wie der bekannte Director des Students' Observatory in Californien, Prof. A. O. Leuschner, urtheilt bei Darstellung seiner werthvollen neuen Bahnrechnungsmethoden (A short method of determining orbits from three Observations, University of California Publications; cf. Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, Part. 1; ferner Part. 2, 3, 7, 8; vergl. Vorlesung 82 des Folgenden) gleichfalls hinsichtlich ihrer praktischen Verwerthbarkeit, auf die es astronomisch ankommt, abfällig[1]) über die Harzer'sche Methode. Einige der von Prof. Leuschner hervorgehobenen Mängel der Harzer'schen Methode, welche dieselbe dem Rechner wenig brauchbar erscheinen lassen müssen, finden sich im Folgenden (vergl. S. 448) kurz angegeben; ausführlicher noch sind sie in der zuvor erwähnten ersten Arbeit gleich zu Beginn von Prof. Leuschner beleuchtet worden, weshalb ich hier nicht weiter auf sie eingehe. Bei der Leuschner'schen Methode jedoch sind alle Unstimmigkeiten der Harzer'schen Arbeit auf das Glücklichste vermieden (vergl. S. 449 und auch S. 450 des Folgenden). Die Berücksichtigung der Untersuchungen von Prof. Leuschner — einer Autorität auf dem Gebiete der Bahnrechnung — in der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes musste im Interesse der Rechner in hohem Grade wünschenswerth erscheinen, um so mehr, als dieselben im Original schwer erreichbar, und in anderen Werken über Bahnrechnung nicht zu finden sind. (Hierzu vergleiche man auch S. 449, Zeile 27 etc. der im Folgenden, in Vorlesung 82 gegebenen Leuschner'schen Darstellung.) —

Die ursprüngliche Fassung der „short method“, wie sie bis jetzt erst in Part. 1, 2 und 3 von Vol. VII der „Publications of the Lick Observatory“ publicirt vorliegt, erfuhr indess im Laufe der letzten Jahre nicht nur Verbesserungen, sondern auch grundlegende Erweiterungen, deren endgültige Formulirung zur Zeit der Abfassung der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes noch nicht gedruckt vorlag, sondern vom Autor damals erst

---

[1]) Vergl. z. B. S. 3 der Sonderausgabe der ersten Leuschner'schen Arbeit: „... *There are, however pratical difficulties involved which make it doubtful whether astronomers will adopt this*“ *(Harzer's)* „*method in preference to the short methods of determining circular elements for planets, to Olbers' and v. Oppolzer's methods of deriving parabolic orbits for comets, or even to the more general methods of Gauss and Oppolzer for the Determination of orbits without previous hypothesis as to the excentricity. Some of the difficulties, all of them of the utmost importance to computers are as follows....*“ „*The essential improvements to be sought for are...*“ (Es folgen in der Leuschner'schen Arbeit mehrere Seiten ausstellender Kritik über die Harzer'sche Arbeit.) Ferner z. B. S. 25: „*The methods of Laplace and Harzer furnish convenient expressions which contain the geocentric distance ...; but for reasons which are apparent from the preceding article,* ***these methods are otherwise not suited for the solution of the present problem.***“

für die Publicationen des Lick Observatory im Manuscript zusammengestellt wurde[1]). Aus diesem Grunde ersuchte ich Prof. Leuschner, die folgende, in Vorlesung 82 gegebene Gesammtdarstellung seiner Untersuchungen selbst zu übernehmen und stellte meine eigene, auf Grund der ersten Leuschner'schen Arbeiten bereits verfasste Darstellung zurück. Nachträglich lieferte dann Prof. Leuschner auf meine Bitte auch noch entsprechende Formelzusammenstellungen mit Rechenbeispielen, sowie eine etwas ausführlichere Darstellung seiner „Methode der Bahnberechnung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen", sammt Rechenbeispiel, als sie in der Astr. V. J. Schrift (43. Jahrg., Heft 4) gegeben ist, Entwickelungen, die im Anhang mitgetheilt sind. Bei Prof. Leuschner's eingetretener schwerer Erkrankung — von der er glücklich wiederhergestellt ist —, hatte Prof. Crawford vom Students' Observatory die Güte, die Correctur der Tafel XVI mit zu erledigen.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass ich die im Folgenden, auf S. 448, 449 u. 450 gegebenen einleitenden Bemerkungen, auf Grund mir von Prof. Leuschner überlassener Notizen, selbst verfasst habe. Die Bemerkungen über den Werth und die Bedeutung der Leuschner'schen Methoden rühren dabei von mir her. Die bezüglich der Harzer-schen Methode gemachten kritischen Bemerkungen jedoch, und ebenso die Bemerkung über das auf S. 393 des Bauschinger'schen Werkes über Bahnrechnung (auf S. 448 u. 449 des Folgenden) Gesagte, sind dem, in meinem Besitz befindlichen Leuschner-schen Entwurfe wörtlich entnommen. —

Hier sei nur darauf hingewiesen, dass in den folgenden Leuschner'schen Untersuchungen die in „short method" gegebenen Entwickelungen unter anderem nicht nur modificirt sind dadurch, dass geschlossene Ausdrücke für f und g für die Anwendung auf lange Intervalle eingeführt sind, ebenso für ∂f und ∂g; dass ausserdem einfache Modificationen direct zur Parabel oder zum Kreise führen, wenn derartige Bahnbestimmungen erwünscht sind. Vor allem sind die ursprünglichen Untersuchungen dadurch erweitert, dass nunmehr osculirende erste Elemente, d. h. solche mit sofortigem Einschluss der Störungen, berechnet werden können. Das Letztere erscheint als besonders wichtig für gestörte Trabanten, wie z. B. für Saturn IX, Jupiter VI, VII, VIII. Denn bisher hat es bekanntlich überhaupt keine directe Methode der Bahnbestimmung für Satelliten gegeben; vielmehr ist man von Annahmen über Perioden, Excentricität und bisweilen auch Neigung ausgegangen. Diese Annahmen fallen bei der Leuschner'schen Methode vollständig fort, und alle Elemente und alle Lösungen, wenn mehrere vorliegen, erfolgen in ihrer Bestimmung gleichzeitig. Dabei geht die Lösung der verschiedenen Probleme, wie der Parabel, der Kreisbahn, der allgemeinen Bahn, der gestörten Bahn, fast in der gleichen Weise vor sich, und der Uebergang von der einen zur anderen Bahn, wie z. B. von der Parabel zur Ellipse, erfordert kaum Mehrarbeit. Diese Allgemeinheit der Methoden ist, neben ihrer Genauigkeit und Kürze, ein Hauptvorzug vom theoretischen Standpunkt aus. Denn die Leuschner'schen Methoden, deren gute praktische Verwerth-

[1]) Dieselben sind auch jetzt noch nicht gedruckt und ihre Publication in Amerika (in einem anderen, als dem hier, pädagogisch, entwickelten Zusammenhang) wird erst später erfolgen.

barkeit durch die numerischen Rechnungen hinlänglich erwiesen ist (man vergleiche die im Folgenden mitgetheilten Beispiele), dienen in ihrer jetzigen Form nicht, wie in ihrer ursprünglichen, nur mehr für genäherte Ephemeriden, sondern sie umfassen das ganze Gebiet der Bahnrechnung. —

Dabei ist noch zu betonen, dass, wenn die erste Annäherung („directe Lösung") nicht hinreichend ist, die zweite Annäherung nicht, wie die sogenannte zweite Hypothese, durch algebraische Nachrechnung der vorher vernachlässigten Glieder höherer Ordnung erfolgt, sondern dadurch, dass auf differentiellem Wege diejenigen Correctionen der vier Fundamentalgrössen berechnet werden, welche die Unterschiede Beobachtung minus Rechnung zum Verschwinden bringen.

Schliesslich sei hier noch der Bemerkung Prof. Leuschner's (cf. S. 454, Zeile 16 des Folgenden) Erwähnung gethan, die darauf hinweist, dass es für den Bahnrechner von Vortheil sein würde, wenn künftig bei Herstellung der astronomischen Jahrbücher die betreffenden Geschwindigkeiten in den Sonnencoordinaten mit berechnet würden. —

Von der Harzer'schen Methode muss bei objectiver Prüfung hervorgehoben und ausdrücklich anerkannt werden, dass sie in rein mathematischer Beziehung das Problem mit viel Scharfsinn löst[1]); in praktischer Beziehung, auf die es astronomisch ankommt, jedoch thut sie das nicht. Zwar sagt Herr Harzer selbst auf S. 6 von seiner Arbeit: „So sinnreich dies Verfahren (das Gibbs'sche) ist, muss doch bezweifelt werden, dass es praktische Vortheile vor dem von uns skizzirten gewähre." Allein in einem wissenschaftlichen Lehrwerk wie dem Klinkerfues'schen, das nur die wirklich brauchbaren Hauptergebnisse der wissenschaftlichen Forschung enthalten soll (ohne, bei der Fülle des Stoffes, jeder der vielen werthvollen kleineren Arbeiten über das Gebiet gerecht werden zu können), das zugleich ein Führer und Wegweiser der studirenden Jugend ist, durfte, bei eingehender, gewissenhafter Prüfung, die Harzer'sche Methode, als minder brauchbar, eine Berücksichtigung nicht finden.

So giebt auch der Verfasser des bekannten „Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien" (in 2. Auflage erschienen 1903 bei Engelmann in Leipzig), Prof. Frischauf, in seiner, Verbesserungen und neue Gesichtspunkte enthaltenden Darstellung[2]) der Gibbs'schen Methode auf S. 30 sein Urtheil über den Harzer'schen Versuch dahin ab: „Harzer setzt als Näherungswerth ... Die darauf gegründete Bestimmung von r, r', r'' wird aber, was Kürze, Bequemlichkeit und

[1]) Hierzu vergleiche man die von Herrn Harzer unmittelbar vor der „Einleitung" seiner Arbeit gemachte Vorbemerkung auf S. 3, Zeile 4 und 5, wonach Winke des bekannten Mathematikers Prof. Staeckel, während dieser an der Kieler Universität wirkte, „für die Gestaltung der analytischen Darstellung der Untersuchungen nützlich gewesen". —

[2]) Die Gauss-Gibbs'sche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen von Dr. J. Frischauf, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Graz. Leipzig, Verlag von W. Engelmann 1905. Diese interessante, von Frischauf gegebene Modification der Gibbs'schen Methode, — welche zwar keine numerische Anwendung als Probe ihrer praktischen Leistungsfähigkeit, in der That aber principielle Verbesserungen der Gibbs'schen Originalmethode in Gestalt einer detallirt gegebenen Neugestaltung der Rechenformeln bringt, — numerisch, bei gleichzeitiger Anwendung der Gibbs'schen Originalmethode auf ein Beispiel, zu prüfen, würde eine wissenschaftlich zweckvolle Aufgabe zum Vergleich der Methoden für eine „Dissertation" bilden.

Convergenz der Rechnungen anbelangt, von der Gauss-Gibbs'schen in jeder Beziehung übertroffen. Zunächst erscheinen die Harzer'schen transcendenten Ausgangswerthe für $n:n'$ und $n'':n'$ zur Berechnung von r, r', r'' nicht sehr geeignet; sie müssen zu diesem Zwecke in rationale Ausdrücke von r, r', r'' umgewandelt werden, was einem Aufgeben dieser Specialmethode gleichwerthig ist. Ferner, da in der Praxis f in der Regel klein ist, so ist das Fehlerglied Harzer's mit ν^4 mit dem nur unsicher bestimmbaren Factor σ^2 ungleich größer als das bezügliche von Gibbs (bei Pallas $f = 0{,}1268$ das 14,5- und 12fache, bei Ceres $f = -0{,}03056$ das 53,3- und 55,8fache für $n:n'$ und $n'':n'$). . . . Es ist daher auch bei Harzer eine Beschränkung auf kleine Werthe von ν (höchstens gleich 1:3) geboten, wodurch wieder die Entwickelung der höheren Glieder, mindestens von ν^9 an, überflüssig erscheint. Die Harzer'schen Reihenentwickelungen mit der Beschränkung auf Glieder sechster Ordnung nach ν^2, u, v reichen nicht einmal für das Ceres-Beispiel $\nu = 0{,}536$ trotz der kleinen Excentricität $= 0{,}081$ aus" u. s. w. (Das Gibbs'sche Ceres-Beispiel vergl. S. 438 des Folgenden.) —

Dagegen weist Herr Frischauf auf die fundamentale Bedeutung des neuen, von Gibbs für die Bahnrechnung aufgestellten Principes mit den charakteristischen Worten hin: „Diese einfachen, rationalen und dabei sehr genauen Ausdrücke nach r, r', r'', die Gibbs als Näherungswerthe der Dreiecksverhältnisse aufgestellt hat, können unstreitig als der bedeutendste Fortschritt der Lösung der Aufgabe einer ersten Bahnbestimmung seit Gauss bezeichnet werden."

Fabritius aber hebt den praktischen Werth der Gibbs'schen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse sowohl für die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, als auch aus vier Beobachtungen, wie auch für parabolische Bahnen rühmend hervor, indem er sagt: „Bei Kometen mit bedeutender heliocentrischer Bewegung brachte diese Methode (die Gibbs'sche) convergirende Resultate, wo andere Methoden divergirende ergeben."

Fassen wir das Gesagte kritisch zusammen, so kann das Urtheil über die neueren, nach einander von Gibbs, Harzer und Leuschner entwickelten Methoden der Bahnrechnung nur dahin präcisirt werden: dass die Leuschner'schen Untersuchungen einfache Resultate von ausgezeichneter Brauchbarkeit ergeben. Auch der Originalmethode von Gibbs kann, wenngleich sie weniger einfach ist, und ihr, in gewissen Fällen, Nachtheile in praktischer Hinsicht (wie sie die Frischauf'sche Arbeit auf S. 16 richtig hervorhebt[1]) in der That anhaften — ganz abgesehen von ihrer hervor-

[1]) „So günstig die unmittelbare Verwendung der drei Gleichungen (4), (5), (6), wie sie Gibbs vorgeschlagen hat, beim Ceres-Beispiel (mit Zwischenzeiten von bezw. 134 und 126 Tagen) erscheint..., so ungünstig stellt sich dieselbe bei wirklich kleinen Zwischenzeiten, etwa 10 bis 20 Tagen, je zweier auf einander folgender Beobachtungen... Der Grund der misslichen Verwendbarkeit der obigen Gleichungen liegt in der Kleinheit des Nenners der drei Unbekannten Δq, $\Delta q'$, $\Delta q''$, welche in der Form:

$$\Delta q = \frac{a X_0 + b Y_0 + c Z_0}{d} = \frac{a}{d} X_0 + \frac{b}{d} Y_0 + \frac{c}{d} Z_0 \text{ u. s. w.}$$

erscheinen... Für das Ceres-Beispiel, wo bereits die zweite Hypothese genügt, bestätigt die Erfahrung diese (die Gibbs'schen) Voraussetzungen, nicht aber beim Swift-Komet (1880, V), wo trotz guter Darstellung der Zwischenzeiten die gegebenen Beobachtungen aus den erhaltenen Elementen nicht genügend genau dargestellt werden."

ragenden Originalität und Exactheit —, die Brauchbarkeit in vielen Fällen (wie z. B. Ceres) keineswegs abgesprochen werden; wenngleich von der Methode zugegeben werden muss, dass, selbst in ihrer verbesserten Form, die erste Annäherung in der Rechnung zwar von hoher Genauigkeit, aber praktisch doch zu complicirt ist, und dass andere Methoden, wie beispielsweise die Encke'sche und vor allem die Leuschner'schen, weil kürzer und bequemer, für den Rechner vorzuziehen sind. Dagegen kann der Weg, den Herr Harzer in seiner Arbeit eingeschlagen — wiewohl nicht zu verkennen ist, dass diese Arbeit einen wesentlichen Fortschritt gegen andere Harzer'sche Untersuchungen, wie z. B. auch gegen die über die Störungen der Bahnen vom Hecubatypus [$\frac{1}{2}$] („Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper“ [1]) unstreitig insofern bezeichnet, weil sie ein positives Resultat

---

[1]) Bei Innehaltung der von Herrn Harzer für *Hecuba* gewählten Genauigkeitsgrenze gehen die Abweichungen bei Herrn Harzer's Theorie in obiger Arbeit bis zu vier Grad schon in den heliocentrischen Eclipticalcoordinaten; was auch ganz erklärlich ist, da nicht einmal die aus der Störungsfunction kommenden Glieder zweiten Grades von Herrn Harzer entsprechend berücksichtigt sind. Auf die Bezeichnung einer astronomischen Näherung kann diese, vom rein theoretischen Standpunkt aus zwar interessante, an neuen wissenschaftlichen Resultaten jedoch, trotz ihres Umfanges, gleichfalls ohne eigentliche Ergebnisse gebliebene Harzer'sche Studie keinen Anspruch machen.

Ganz erreichen das Ziel einer genügenden Annäherung für den Typus $^1/_2$ auch die viel werthvolleren Kramer'schen Entwickelungen in ihrer jetzigen Gestalt noch nicht, wiewohl bei diesen weitgehenden Untersuchungen ausser den Gliedern erster Ordnung zweiten Grades, auch noch die Glieder zweiter Ordnung für den zweiten Grad in der Störungsfunction Berücksichtigung gefunden haben, und bei der Integration noch die exargumentalen Glieder dritten Grades. Für *Hecuba* selbst reichen die von Herrn Kramer ermittelten Elemente und Störungen noch nicht aus, um für längere Zeit die Bewegung auf $\pm 1'$ bis $2'$ darzustellen. Dagegen brachte Herr Kramer beim Planeten des Typus $^1/_2$ *Semele*, für den er Tafeln aus Beobachtungen der Jahre 1866 bis 1896 (Epoche 1876) auf Grund der Gyldén-Brendel'schen Principien abgeleitet, die Genauigkeit bereits auf den, wenn auch praktisch noch nicht völlig zureichenden Werth von $\pm 2'$, bei einer Excentricität von 12^0 und einem Divisor $\delta = 0.08$ (1903: $\Delta\alpha = -0'.6$, $\Delta\delta = -2'.4$, 1906: $\Delta\alpha = -2'.7$, $\Delta\delta = +2'.7$). (Hierzu vergl. S. 10 des Folgenden, Anmerkung 3.)

Man ersieht hieraus, um an dieser Stelle die zuvor über die Gyldén'schen Methoden gemachten Bemerkungen nochmals aufzunehmen und zu ergänzen, dass für den Typus $^1/_2$ und den in anderer Hinsicht noch complicirteren Typus $^2/_3$ auch die Mitnahme der aus der Störungsfunction selbst kommenden Glieder dritten Grades (sowie eventuell der „Zusatzglieder“ dritten Grades und einiger Glieder vierten Grades) nach den Gyldén'schen Principien nöthig ist, wenn man zu einem nur einigermaassen brauchbaren Resultat gelangen, d. h. die Beobachtungen auch nur auf eine Bogenminute genau darstellen will. Auch empfiehlt es sich eventuell bei den jupiternahen Planeten des Hildatypus (und ebenso bei denjenigen des Hecubatypus), wenn die numerischen Näherungen zu langsam fortschreiten, statt der Gyldén'schen partiellen Integration ein anderes Gyldén'sches Verfahren mittelst elliptischer Functionen zur Verstärkung der Convergenz anzuwenden, worauf ich später in Theil IV des Hildatypus zurückkommen werde. (Erwähnt sei hier noch, dass das Druckfehlerverzeichniss von Theil I und II meiner Untersuchungen über Hilda, welches seiner Zeit den Separaten größtentheils schon gedruckt beigegeben wurde, aber nicht in die Bände der Denkschriftenausgabe mit eingebunden worden zu sein scheint, vollständig in Theil III angegeben werden wird, wo auch die in Cap. V von Theil I behandelte specielle Frage über die Lücke verificirt werden wird.)

Bei den einfacheren, von Herrn Brendel in seiner *Theorie der kleinen Planeten* behandelten Commensurabilitätstypen, speciell bei den Typen $^1/_3$ und $^1/_4$ („charakteristische“ Planeten, bei denen die alten analytischen Methoden viel mühsamer sind und z. B. bereits bei Hestia versagen) aber war eine so weit gehende Mitnahme von Gliedern höheren Grades und höherer Ordnung nicht nöthig, wie sie die besonders schwierigen Typen $^1/_2$ und $^2/_3$ nach den gemachten Erfahrungen erfordern. Vielmehr ergeben sich dort schon bei Berücksichtigung des

erbracht hat —, aus den zuvor erwähnten Gründen nicht als ein eigentlich zweckentsprechender, praktisch befriedigender betrachtet werden.

Zwar könnte mit Recht eingewendet werden, daß hinsichtlich der praktischen Brauchbarkeit die Gibbs'sche Originalmethode der Harzer'schen nicht so be-

---

zweiten Grades und der zweiten Ordnung brauchbare Resultate, durch welche Hunderte von kleinen Planeten für lange Zeit in weit bequemerer Weise mittelst der Gyldén'schen Principien zu erledigen sind, als dies mittelst der Theorie der speciellen Störungen möglich ist. Nach den alten analytischen Methoden aber hat man seit Laplace's Zeit absolute Störungen mit Tafeln nur für dreizehn kleine Planeten (cf. Astr. V. J. Schrift, 31. Jahrgang, 1896, S. 288, Gruppe G.), unter grossem Rechenaufwand berechnet, allerdings mit grösserer Anforderung an die Genauigkeit. Eine solche wäre bei Mitnahme des dritten Grades — den ich für *Hilda* nach den Gyldén'schen Principien bis inclusive der zweiten Ordnung in der Störungsfunction und in den Differentialgleichungen bereits in Rechnung gezogen habe — für die Brendel'schen Planetengruppen sehr einfach zu erreichen. Für den ins Auge gefassten Zweck, das rasche Wiederauffinden eines kleinen Planeten am Himmel für circa ein Jahrhundert, aber ist eine grössere Genauigkeit als die in der „*Theorie der kleinen Planeten*" angestrebte, für die betreffenden Gruppen nicht erforderlich. (Hierzu ist es interessant, Enckes Worte, auf S. 588 des Folgenden, zu vergleichen, welche die Berechnung der kleinen Planeten noch ganz in die Domaine der speciellen Störungen verweisen.) —

Dass die hier, wie in Vorlesung I gegebenen kritischen Darlegungen, welche die Frage nach dem von Gyldén (und von Poincaré) für das Störungsproblem Erreichten (und nicht Erreichten) zum ersten Mal allseitig klar stellen und zum Abschluss bringen, vom Anfänger (dem das vorliegende Werk sonst, so weit es möglich ist, Rechnung trägt) zunächst besser überschlagen werden, darauf ist auch in Vorlesung I, S. 6, hingewiesen.

Sollte immerhin Poincaré, um sein gegen die Gyldén'sche Richtung so apodiktisch abgegebenes Urtheil aufrecht zu erhalten, es, trotz der Thatsachen, versuchen, den Vorwurf der Unbrauchbarkeit gegen diese Richtung (die „voll unnützer Complicationen und bloss noch von historischem Wert ist"!) in irgend einer Weise zu erneuern: durch die ersten Zahlenergebnisse der *Theorie der kleinen Planeten* bereits (welche auf der stricten Anwendung der Grundprincipien Gyldén's und auf der detaillirten Ausbildung und consequenten praktischen Durchführung seiner einen Hauptmethode gerade beruht) steht die Gyldén'sche Richtung, wie wir gesehen haben, so vollständig gerechtfertigt da, dass sie künftig weder durch Poincaré's Warnungen vor ihrer Anwendung und die sonstigen Aussprüche dieses einstigen Rivalen Gyldén's wird mehr discreditirt, noch durch dessen gekrönte Arbeiten über das Störungsproblem wird mehr zu Unrecht in den Schatten gestellt und beeinträchtigt werden können.

Hat auch Gyldén, so wenig wie im Jahre 1889 Poincaré, die „convergente" Lösung für das Störungsproblem, und damit nicht den principiellen „Sieg" erreicht (man vergl. die Anmerkung 1, S. XIII dieser Vorbemerkungen): so dürfte es doch, nach der ganzen hier gegebenen Thatsachenzusammenstellung wohl Niemand mehr zweifelhaft sein, welcher der beiden Forscher für die Astronomie das wirklich Positive, Bleibende geschaffen, und welchem von ihnen in dem durch seine besonderen Begleitumstände in der Geschichte der Wissenschaft einzig dastehenden Kampf der Sieg verblieben ist.

Gyldén, den man in Stockholm von der allgemeinen Preisbewerbung über sein eigenstes Specialgebiet, das Störungsproblem, in mehr als sonderbarer Weise ausschloss; dessen Arbeiten, nach seinem Tode, seine alten Gegner vom Jahre 1889 [und der Genannte, nun zur Genüge widerlegte, in Deutschland] durch abfällige Worte nach allen Seiten zu discreditiren und vollständig zu entwerten versuchten, — eine Zeit lang dabei vom äußeren Erfolg begleitet: Gyldén als Astronom hat, in richtiger Erkenntnis der Bedürfnisse seines Faches, das Brauchbare geschaffen, den Fortschritt gegen das Frühere begründet und so Bedürfnissen entsprochen, denen der Mathematiker Poincaré — dessen Verdienste im übrigen wohl Jeder willig anerkennt — naturgemäß nicht das volle nothwendige Verständnis entgegenbringen konnte. Seine ganze Beurtheilungsweise der astronomischen Arbeiten Gyldén's hat das — **von allem Uebrigen gänzlich abgesehen** — ja in der That auch auf das deutlichste und schlagendste gezeigt, was auch dagegen etwa in der französischen Zeitschrift *Bulletin astronomique* — Poincaré's Organ — oder sonst immer gesagt werde. Im Uebrigen haben äußere Machenschaften — wie sie *verschiedentlich* im vorliegenden Fall offen vor Aller Augen liegen — das Durchdringen der wissenschaftlichen Wahrheit noch niemals dauernd verhindern können. —

deutend überlegen sei. Allein die Gibbs'sche Methode bezeichnet, wie schon hervorgehoben, die erste Bahnrechnungsmethode, welche den wesentlichen principiellen Fortschritt der größeren Genauigkeit der Annäherung erreicht, als sie allen zuvor gebrauchten Bahnrechnungsmethoden eigen ist. Aus diesem Grunde durfte diese Methode, trotz der ihr anhaftenden praktischen Unzulänglichkeiten, selbstverständlich in einem Grundwerk über Bahnrechnung nicht fehlen.

Während, wie gesagt, der Vorwurf gegen die Harzer'sche Methode mit Recht nicht erhoben werden kann (cf. S. XXIII dieser Vorbemerkungen): daß sie auf der Laplace'schen Methode fusse und deshalb unbrauchbar sei; beruht doch die theoretisch wie praktisch gleich vorzügliche Leuschner'sche Methode gerade auf der Methode von Laplace. —

Nach Abschluss[1]) der vorstehenden Uebersicht über die neueren Methoden der Bahnrechnung sind im Sommer 1910 die Sonderabzüge einer weiteren Bahnberechnungsmethode erschienen, unter dem Titel: „Ueber die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen von Paul Harzer". Publication der Sternwarte Kiel XII.

Diese Methode liefert jedoch keine allgemein zureichende Lösung für das Problem (weil sie gerade bei den parabolischen Kometenbahnen nicht praktisch ausreicht), während andere, im Folgenden zur Darstellung gelangte Methoden eine solche ergeben. Diesen Mangel musste auch Herr Harzer in der Einleitung auf S. 6 seiner neuen Arbeit selbst zugeben. —

Die Idee der geometrischen Methode, deren Kritik im Einzelnen nach dem Zuvorgesagten hier übergangen werden kann, ist zudem keineswegs in dem Grade originell und neu, wie Herr Harzer selbst annahm und noch besonders in der Vorankündigung seiner Arbeit in den Astronomischen Nachrichten (Nr. 4399, S. 110) und ebenso noch auf S. 6 seiner Arbeit hervorhebt, worauf er auch sogleich von Prof. F. Engel hingewiesen wurde. Vielmehr hatte bereits ein halbes Jahrhundert früher A. Grunert in mehreren, das Thema behandelnden originellen Arbeiten, wenn auch, wie zuzugeben ist, in unvollkommenerer Form, Ideen entwickelt, welche die Harzer'sche Arbeit in den Grundlagen berühren (cf. Astronomische Nachrichten Nr. 448 und 456; ferner: Archiv d. Mathematik u. Physik, Band 17); Arbeiten, über die Herr Harzer nachträglich in Nr. 4417 der Astronomischen Nachrichten in absprechendster Weise urtheilt, und noch besonders ihre praktische Bedeutungslosigkeit im Vergleich zu seiner eigenen Methode hervorhebt, die er selbst als eine „einfache", „durchsichtige", „bei grossen Zwischenzeiten sehr brauchbare rein geometrische Methode" in Nr. 4417 der Astronomischen Nachrichten bezeichnet.

---

[1]) Die vorstehende Uebersicht war von der Druckerei bereits im Wintersemester 1909/1910 gesetzt (vergl. die Ankündigung in den Astronomischen Nachrichten Nr. 4410, S. 289, Anmerkung 2); die Herausgabe des Werkes wurde indess durch Fertigstellung der Leuschner'schen Tafel XVI über ein Jahr verzögert, so dass ausser den obigen Bemerkungen über die „geometrische" Methode auch noch die Anmerkung 1, S. XVI nachträglich Aufnahme finden konnte. —

Sucht man dieser neuen, wie den Harzer'schen Arbeiten überhaupt gerecht zu werden, so ist allerdings hervorzuheben, dass auch die „geometrische“ Methode unbestreitbar neue Ideen zur Behandlung des Problems enthält; ebenso enthält sie manche schöne theoretische Betrachtungen und Entwickelungen. Andererseits kann aber nicht bestritten werden, dass die Harzer'sche Ausführung seiner Ideen für praktische Zwecke eine viel zu complicirte ist. Gerade für den Werth astronomischer Methoden aber ist ein Hauptmaassstab ihres Werthes die gute praktische Verwerthbarkeit. Anwenden wird ein erfahrener Rechner die Harzer'schen Theorieen indess nicht (und hat es ausser Herrn Harzer selbst auch nicht gethan), sondern jedenfalls einer der anderen zur Verfügung stehenden, weit brauchbareren und weit vollkommeneren Methoden den Vorzug geben. —

Indess sind die zuvor gekennzeichneten Mängel der ersten Harzer'schen Behandlungsweise des Bahnrechnungsproblems doch von grossem Nutzen für die Wissenschaft geworden. Denn ohne die Harzer'sche Bearbeitung der Laplace'schen Methode hätte Herr Leuschner — wie er selbst verschiedentlich hervorgehoben hat (cf. z. B. auch S. 448, Zeile 26 des Folgenden) — nicht daran gedacht, die Laplace'sche Methode anders zu bearbeiten. Doch besteht ein Unterschied zwischen der Abfassung wenn auch noch so interessanter, grosser Abhandlungen und der Schöpfung wirklich brauchbarer, wissenschaftlich werthvoller Methoden.

Von Herrn Leuschner — darauf sei hier noch hingewiesen — ist übrigens, als erstem, die fundamentale Frage der parabolischen Lösungen: dass, wenn drei parabolische Lösungen existiren, nur eine gültig ist, mittelst seiner Methoden nicht nur theoretisch entschieden, sondern zugleich auch durch Discussion der Wirklichkeit entnommener Beispiele (im folgenden Anhang ist ein solches als Beispiel VI wiedergegeben) praktisch erledigt worden. Hierzu vergl. man S. 468, Anmerkung 1 der folgenden Leuschner'schen Darstellung, die bereits im Frühjahr **1910** gedruckt war, während die Ausgabe des vorliegenden Werkes verzögert wurde (cf. Anmerkung 1, S. XXIX dieser Vorbemerkungen). Der ausführliche Beweis für das auf S. 468 erwähnte und bei den Beispielen des folgenden Anhanges, speciell beim sechsten Beispiel verwandte Leuschner'sche Resultat ist in Part 7, vol. VII der „Publications of the Lick Observatory“ gegeben.

Zur Frage, dass wenn drei parabolische Lösungen existiren, nur eine gültig ist, vergl. man übrigens auch einen äusserst interessanten, von Herrn Charlier[1]) in den „Monthly Notices“ vom März **1911** gegebenen, sowie einen anderen, in Nr. 4495 der „Astronomischen Nachrichten“ vom Mai **1911** von R. Vogel[2]) mitgeteilten Beweis.

Ein Lehrbuch der Bahnbestimmung, das dem Anspruch, auf einem modernen Standpunkt zu stehen, genügen sollte, ohne doch zu weitschweifig zu werden, musste

---

[1]) Cf. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. LXXI, Nr. 5, March 1911, pag. 454: „Second Note on Multiple Solutions in the Determination of Orbits from three Observations. By Professor C. V. L. Charlier, Assoc. R. A. S.“ Vergl. auch schon die Nummer vom November 1910.

[2]) Cf. Astronomische Nachrichten, Bd. 188, S. 105: „Ueber die Unmöglichkeit dreier Lösungen bei einer theoretisch vollständigen Bestimmung einer parabolischen Bahn.“ Von R. Vogel.

sich auf die Wiedergabe der principiell bedeutsamsten und praktisch brauchbarsten neueren Methoden beschränken. An einer Discussion aber über die hier begründeten Urtheile über diese, wie die anderen zuvor erwähnten Methoden, in welcher Form sie auch etwa eröffnet werden möchte, würde ich mich nicht betheiligen können, da meine Zeit durch andere Arbeiten in Anspruch genommen ist. Mit Darlegung des wissenschaftlichen Sachverhaltes betrachte ich meine vorliegende Aufgabe als beendet. Bezüglich der Gyldén'schen Principien und ihrer Verwerthung sei noch auf die beiden letzten Publicationen Herrn Brendel's hingewiesen, nämlich auf seine, mittelst der neuen Methoden durchgeführte Bahnbestimmung des schwierigen Planeten (699)[1]), der eine sehr grosse Excentricität hat (cf. Astronomische Nachrichten, Nr. 4544), sowie auf seinen Aufsatz über einen Programmentwurf zur Bearbeitung der kleinen Planeten unter Berücksichtigung der neuen Gesichtspunkte (cf. Astronomische Nachrichten, Nr. 4545)[2]). —

An dieser Stelle möchte ich nicht unterlassen, dem Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, der, wie schon bei der Drucklegung der zweiten Auflage, so auch diesmal keine Mühe gescheut hat, das Buch zu einem möglichst zweckentsprechenden zu machen, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

---

[1]) Dieser Planet, der die grösste bisher überhaupt beobachtete Excentricität hat und noch dazu ungenügend beobachtet ist, war nur mit grösster rechnerischer Mühe vor dem Verlorengehen zu retten. Die mittelst der Brendel'schen „*Theorie der kleinen Planeten*" durchgeführte genäherte Bahnbestimmung, welche den Planeten für zehn Jahre sichert, beansprucht nur ein paar Stunden. Der Erfolg ist hier gerade der, dass mit einer rohen Annäherung in wenigen Stunden so viel erreichbar ist, während eine genaue Bahnbestimmung rechnerische (und theoretische) Weiterentwickelungen, aber trotzdem weit weniger Zeit, als nach den classischen Methoden, erfordern würde. —

[2]) „Die Mehrarbeit, die entsteht, wenn man die Hauptstörungen" — nach der *Theorie der kleinen Planeten* — „berücksichtigt, anstatt nur rein elliptische Elemente abzuleiten, ist so geringfügig, dass sie gegen den gewaltigen Vortheil, die Bewegungen mit einem Schlage für einen langen Zeitraum darstellen zu können, überhaupt kaum in Betracht kommt." —

Hugo Buchholz.