Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Dreizehnter Abschnitt. Wärmeleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

ist, so erhalten wir in Rücksicht auf (c)

$$\begin{aligned}\triangle Q &= \nu(c\,T + h) + \nu_1(c_1\,T + h_1) + \nu_2(c_2\,T + h_2) + \ldots \\ &= \nu\,h + \nu_1\,h_1 + \nu_2\,h_2 + \ldots = -\,H\cdot\log h_0.\end{aligned}$$

$\triangle Q$ ist gleich der Dissoziationswärme, die verbraucht wird, um zwei Moleküle JH zu spalten. Ist λ die Dissoziationswärme für ein Gramm der Substanz und μ das Molekulargewicht derselben, so haben wir

$$\triangle Q = 2\,\lambda\,\mu.$$

Dreizehnter Abschnitt.

Wärmeleitung.

§ 161. Die Fouriersche Gleichung.

Wenn die Temperatur oder die mittlere lebendige Kraft der Bewegung der Moleküle in den verschiedenen Teilen eines Körpers ungleich ist, so tritt eine Fortpflanzung der Wärmeenergie von den wärmeren zu den kälteren Stellen ein, bis alle Teile des Körpers dieselbe Temperatur haben, d. h. bis das *Temperaturgleichgewicht* eingetreten ist. Diese Erscheinung der Fortpflanzung der Wärme und der Entstehung eines Wärmestromes wird als *innere Wärmeleitung* bezeichnet. Wir wollen dabei voraussetzen, daß der Körper weder Wärme von der Umgebung aufnimmt, noch Wärme an dieselbe abgibt. Je schneller der Gleichgewichtszustand eintritt, um so besser leitet der Körper die Wärme. Wir unterscheiden zwischen guten, mittelmäßigen und schlechten Wärmeleitern, zwischen denen eine scharfe Grenze jedoch nicht gezogen werden kann. Die Wärmeleitungsfähigkeit ist abhängig von der Temperatur des Körpers und überhaupt eine Funktion seines Zustandes.

Den Vorgang der Wärmeleitung oder der Ausbreitung der Bewegungsenergie der Moleküle können wir ansehen als eine Übertragung eines Teiles der Energie der Schichten des Körpers mit höherer Temperatur durch fortgesetzte Zusammenstöße der Moleküle auf die anliegenden Schichten mit geringerer

Temperatur und also auch geringerer Bewegungsenergie. Auch kann man den Vorgang der Wärmeleitung auf eine intramolekulare Strahlung zurückführen. Ohne näher auf diese beiden inneren Vorgänge einzugehen, die vielleicht auch gleichzeitig auftreten können, wollen wir nur von der Beobachtung ausgehen, daß die überall und stets von selbst eintretende innere Wärmeleitung so lange auftritt, bis das Temperaturgleichgewicht im Körper sich eingestellt hat. Man kann auch die Wärmeleitung der Metalle zurückführen auf eine Übertragung der Energie durch Stöße der Elektronen und nicht der ponderablen Moleküle, die nur um Gleichgewichtslagen schwingen, ohne durch Stoß aufeinander zu wirken.

Wir bezeichnen als *Stromstärke der Wärmebewegung* die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tritt. Durch das Element df im Inneren des Körpers geht also in der Zeit $d\vartheta$ die Wärmemenge

$$Q \cdot df \cdot d\vartheta,$$

wenn Q die Stromstärke der Wärmebewegung durch das Flächenelement df ist. Sind U, V und W die Komponenten der Stromstärke nach den Koordinatenachsen, so geht durch das Flächenelement $dy\,dz$ in der Zeit $d\vartheta$ die Wärmemenge $U \cdot dy\,dz \cdot d\vartheta$, während durch die Flächenelemente $dx\,dz$ und $dx\,dy$ in der Zeit $d\vartheta$ bzw. die Wärmemengen $V \cdot dx\,dz \cdot d\vartheta$ und $W \cdot dx\,dy \cdot d\vartheta$ strömen. Die Stromstärke Q der Wärmebewegung durch ein Element df, deren Normale die Richtungskosinus l, m und n zugehören, können wir darstellen durch

(a) $$Q = lU + mV + nW.$$

In Fig. 162 betrachten wir als Raumelement des Körpers ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ den Koordinatenachsen parallel sind.

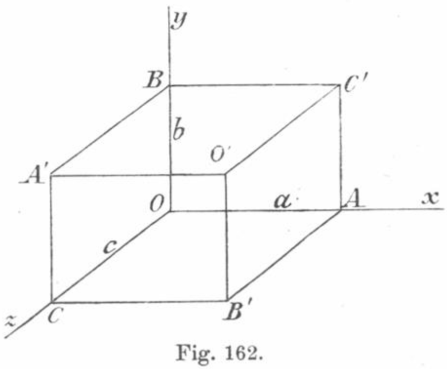

Fig. 162.

Wenn im Punkte O die Komponenten der Stromstärke U, V und W sind, so sind sie in A bzw.

$$U + \frac{\partial U}{\partial x} a, \quad V + \frac{\partial V}{\partial x} a, \quad W + \frac{\partial W}{\partial x} a,$$

indem a, b und c so klein sind, daß wir nur die ersten Glieder der Entwickelung zu berücksichtigen brauchen. Durch die Fläche $OBA'C$ erhält das Parallelepiped in der Zeit $d\vartheta$ die Wärmemenge $U \cdot d\vartheta \cdot bc$, durch die Fläche $AC'O'B'$ strömt in derselben Zeit aus dem Raumelemente die Menge

$$\left(U + \frac{\partial U}{\partial x} a\right) bc \cdot d\vartheta$$

aus. In bezug auf diese Stromkomponente hat also das Raumelement die Wärmemenge

$$-\frac{\partial U}{\partial x} abc \cdot d\vartheta$$

aufgenommen. Berücksichtigen wir auch die übrigen Seitenflächen, so ist die Wärmemenge, die durch die Strömung ins Raumelement eingetreten ist

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) abc \cdot d\vartheta,$$

oder, wenn wir $abc = dv$ setzen,

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dv\, d\vartheta.$$

Ist c die spezifische Wärme des Körpers und ϱ seine Dichte, so erhöht jene Wärmemenge die Temperatur T des Körpers um dT. Wir finden also

$$\text{(b)} \qquad c\varrho \cdot dT = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) d\vartheta.$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur dann, wenn die aufgenommene Wärme allein zur Temperaturänderung verwendet wird und nicht etwa gleichzeitig Änderungen des Aggregatzustandes oder chemische Veränderungen des Körpers eintreten. Zuweilen entsteht auch Wärme im Inneren des Körpers, die nicht in Form von Wärme in den Körper gedrungen ist, sondern infolge innerer Reibung oder durch einen elektrischen Strom im Körper entstanden ist.

Die Stromkomponenten U, V und W hängen von der Temperaturverteilung im Körper und von der Natur des Körpers ab. In einem *isotropen Körper* hat der Koeffizient k der inneren Wärmeleitung in allen Richtungen von einem Punkte aus denselben Wert, und der Wärmestrom hat in jedem Punkte die Richtung der Normalen der Isothermenfläche $T = \text{const}$, die durch diesen Punkt hindurchgeht. Für einen isotropen Körper kann man die Stromstärke in folgender Weise bestimmen. A und B seien zwei unendlich nahe benachbarte Punkte innerhalb des Körpers, in denen die Temperaturen bzw. T und T' sind. $d\nu$ sei der Abstand der Punkte A und B, und k sei der *Koeffizient der inneren Wärmeleitung* oder kurz das *Wärmeleitungsvermögen*, dann ist die Stärke des Wärmestromes in der Richtung AB durch den Ausdruck

$$Q = \frac{k(T - T')}{d\nu} \tag{c}$$

gegeben. Auf dieser durch die Versuche bestätigten Annahme, daß der Wärmestrom Q dem Temperaturgefälle proportional ist, beruht die mathematische Theorie der Wärmeleitung. Nach der Gleichung (c) wird das Wärmeleitungsvermögen k durch diejenige Wärmemenge bestimmt, die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit in der zu der letzteren senkrechten Richtung hindurchströmt, wenn die Temperatur in der angegebenen Richtung auf die Längeneinheit bezogen um 1^0 abnimmt, oder wenn das *Temperaturgefälle* in der Richtung gleich 1 ist. Da aber

$$T' = T + \frac{dT}{d\nu} d\nu$$

ist, so haben wir auch

$$Q = -k \frac{dT}{d\nu}. \tag{d}$$

Für die Stromkomponenten U, V, W erhalten wir daher die Ausdrücke

$$U = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad V = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad W = -k \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{e}$$

In Wirklichkeit ist das Leitungsvermögen k eine Funktion von T. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, daß k konstant ist, so erhalten wir aus (b) und (e)

$$c \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \tag{f}$$

Auch die spezifische Wärme c und die Dichte ϱ sind Funktionen von T. Der Gleichung (f), die als Fouriersche *Gleichung* bezeichnet wird, können wir auch die Form geben

$$\text{(g)} \qquad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

wo

$$\text{(h)} \qquad \varkappa^2 = \frac{k}{c\,\varrho}$$

ist. $\varkappa^2$ wird als *Temperaturleitungsfähigkeit* bezeichnet.

In der folgenden Tabelle sind die Werte von k und $\varkappa$ für die Temperaturen 0° und 100° C. nach den Beobachtungen von L. Lorenz[1]) zusammengestellt.

	k_0	k_{100}	$\varkappa_0$	$\varkappa_{100}$
Kupfer	0,7198	0,7226	0,909	0,873
Zinn	0,1528	0,1432	0,392	0,344
Eisen	0,1665	0,1627	0,202	0,179
Blei	0,0836	0,0764	0,242	0,222

Die Angaben der verschiedenen Forscher über den Betrag des Temperaturkoeffizienten α der Wärmeleitungsfähigkeit k weichen ziemlich stark voneinander ab. Man stellt k dar in der Form

$$k = k_0 (1 + \alpha t),$$

wo t die Temperatur in ° C. und k_0 die Wärmeleitungsfähigkeit bei 0° C. sein soll. Jäger und Diesselhorst haben eine von F. Kohlrausch angegebene Methode der direkten Bestimmung des Verhältnisses der Wärmeleitungsfähigkeit zur elektrischen Leitfähigkeit weiter ausgebildet und die Methode auch zur Ermittelung des Temperaturkoeffizienten α benutzt. Die genannten Forscher fanden, daß für die reinen Metalle α nur sehr klein ist, und ferner, daß α negativ für Kupfer, Zinn, Blei und Eisen u. a. m. ist, daß α positiv z. B. für Gold, Platin ist. Größere Werte von α finden wir beim Wismut und bei Legierungen wie Rotguß, Konstantan, Manganin und den unreinen Metallen überhaupt.

§ 162. Der stationäre Wärmezustand.

Der Wärmezustand des Körpers ist *stationär*, wenn die Temperaturen der einzelnen Teile des Körpers verschieden sind,

---

[1]) L. Lorenz, Wied. Ann. **13**. S. 422. 1881.

aber im Laufe der Zeit sich nicht ändern. In diesem Falle gibt jedes Teilchen nach der einen Seite so viel Wärme ab als es von der anderen Seite empfängt, und die Temperatur ist unabhängig von der Zeit ϑ und nur abhängig von den Koordinaten x, y, z. Für den stationären Zustand lautet die Gleichung § 161 (f)

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T = 0.$$

Die Stromkomponenten werden durch die Gleichungen § 161 (e) ausgedrückt.

Die Wärmeströmung in einer Platte. Wir betrachten eine dünne Platte, deren Seitenflächen L und M der yz-Ebene parallel sind. Die Seitenflächen haben bzw. die Temperaturen T_1 und T_2. In diesem Falle ist der Wärmestrom der x-Achse parallel, und die Temperatur T hängt in der Nähe der x-Achse allein von x ab, sodaß nach (a)

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

ist. Also wird

$$T = px + q.$$

Haben die Seitenflächen L und M vom Koordinatenanfangspunkte bzw. die Abstände a und b, so finden wir

$$T_1 = pa + q \quad \text{und} \quad T_2 = pb + q,$$

und also

$$T = \frac{T_1 b - T_2 a}{b - a} - \frac{(T_1 - T_2)x}{b - a}.$$

Bezeichnen wir den Abstand $b - a$ der Seitenflächen mit e, so ist die Stärke U des Wärmestromes

$$\text{(c)} \qquad U = \frac{k(T_1 - T_2)}{e}.$$

Überhaupt entspricht jedes Integral der Gleichung (a) einem stationären Wärmezustande. Ist

$$T = f(x, y, z)$$

ein Integral von (a), so sind

$$T_1 = f(x, y, z) \quad \text{und} \quad T_2 = f(x, y, z),$$

wo T_1 und T_2 konstant sind, die Gleichungen für zwei Flächen konstanter Temperatur oder für zwei *isotherme Flächen.* Wird der Körper von den Flächen begrenzt, die durch T_1 und T_2 bestimmt sind, und ist T eine Temperatur, die zwischen T_1 und T_2 liegt, so ist

$$T = f(x, y, z)$$

die Gleichung für eine beliebige isotherme Fläche.

Die Wärmeströmung in einer Kugel. Sind m und c Konstante und ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so wird

$$T = \frac{m}{r} + c$$

eine Lösung von (a). Setzen wir also

$$T_1 = \frac{m}{r_1} + c, \quad T_2 = \frac{m}{r_2} + c,$$

so ist

$$\text{(d)} \qquad T = \frac{(T_1 - T_2) r_1 r_2}{r(r_2 - r_1)} - \frac{r_1 T_1 - r_2 T_2}{r_2 - r_1}$$

die Gleichung für das System der isothermen Flächen, die in diesem Falle Kugelflächen sind. Für den Wärmestrom U in der Richtung r haben wir

$$\text{(e)} \qquad U = -k\frac{dT}{dr} = k(T_1 - T_2)\frac{r_1 r_2}{r^2(r_2 - r_1)}.$$

Aus den Gleichungen (d) und (e) ergeben sich auch die Temperatur und die Wärmeströmung in einer Hohlkugel

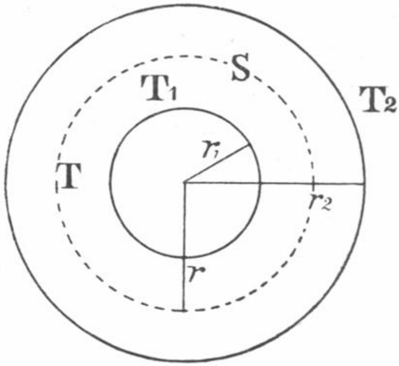

Fig. 163.

(Fig. 163), deren innere und äußere Fläche bzw. die Temperaturen T_1 und T_2 haben. Die gesamte Wärmemenge Q, die durch die Kugel S mit dem Radius r ausströmt, ist

$$Q = 4\pi r^2 U = 4\pi k(T_1 - T_2)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

d. h. unabhängig vom Radius r der Kugelfläche S.

Wir betrachten jetzt die stationäre Wärmeströmung in einer von *zwei konzentrischen Zylinderflächen begrenzten Schicht.* Sind c und c' Konstante und ist $r^2 = x^2 + y^2$, so haben wir nach S. 255

$$T = c \log r + c'$$

als ein Integral von (a). Wird also

$$T_1 = c \log r_1 + c', \qquad T_2 = c \log r_2 + c'$$

gesetzt, indem den Grenzflächen mit den Radien r_1 und r_2 bzw. die Temperaturen T_1 und T_2 zugehören, so finden wir

$$\text{(f)} \qquad T = (T_1 - T_2)\frac{\log r}{\log r_1 - \log r_2} + \frac{T_1 \log r_2 - T_2 \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}.$$

In der Richtung des Radius ist der Wärmestrom

$$U = k(T_1 - T_2)\frac{1}{r(\log r_2 - \log r_1)}.$$

Die Wärmemenge, die durch eine Längeneinheit des Rohres strömt, ist also

$$\text{(g)} \qquad 2\pi r U = \frac{2\pi k (T_1 - T_2)}{\log r_2 - \log r_1}.$$

§ 163. Die periodische Wärmeströmung in einer Richtung.

Wenn die Temperatur des Körpers nur von einer Koordinate z. B. x abhängt, so lautet die Fouriersche Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

In welcher Weise diese Gleichung integriert werden kann, soll später untersucht werden. Vorläufig wollen wir einzelne Integrale betrachten, die einfachen und wichtigen Fällen entsprechen.

Die Temperatur des Erdkörpers ändert sich im Laufe des Jahres; sie steigt und fällt wie die Temperatur der Luft. Allein das Maximum der Temperatur tritt um so später ein, je tiefer man in das Erdinnere eindringt; dasselbe gilt natürlich von dem Minimum der Temperatur. In der nachfolgenden

Betrachtung wollen wir die Eigenwärme der Erde nicht berücksichtigen.

Ist die Temperatur an der Erdoberfläche durch

$$T = \sin\alpha\vartheta \tag{b}$$

gegeben, so kann man die Temperatur im Erdinnern durch

$$T = P\cdot\sin\alpha\vartheta + Q\cdot\cos\alpha\vartheta \tag{c}$$

ausdrücken, wo P und Q Funktionen des Abstandes x sind, den der betrachtete Punkt von der Erdoberfläche hat. Setzen wir für T den Ausdruck (c) ein in (a), so wird

$$P\alpha\cos\alpha\vartheta - Q\alpha\sin\alpha\vartheta = \varkappa^2\left(\sin\alpha\vartheta\frac{d^2P}{dx^2} + \cos\alpha\vartheta\frac{d^2Q}{dx^2}\right).$$

Demnach muß

$$-Q\alpha = \varkappa^2\cdot\frac{d^2P}{dx^2} \quad \text{und} \quad P\alpha = \varkappa^2\cdot\frac{d^2Q}{dx^2}$$

sein. Setzen wir

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha}{\varkappa^2},$$

so wird

$$P = -\frac{1}{\varepsilon^4}\frac{d^4P}{dx^4} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2P}{dx^2}. \tag{d}$$

Zur Integration der Gleichung nehmen wir

$$P = Ae^{px}$$

und erhalten dann

$$p = \varepsilon\cdot\sqrt[4]{-1}.$$

Das Integral der Gleichung (d) erhält dann folgende Form

$$P = Ae^{\frac{(1+\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}} + Be^{\frac{(1-\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}} + Ce^{\frac{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}} + De^{\frac{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}}.$$

Da $T = 0$ sein muß für $x = \infty$, so wird $A = B = 0$, und also

$$P = Ce^{\frac{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}} + De^{\frac{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}}.$$

Nach der Gleichung (d) erhalten wir

$$Q = \left(Ce^{\frac{(-1+\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}} - De^{\frac{(-1-\sqrt{-1})\varepsilon x}{\sqrt{2}}}\right)\cdot\sqrt{-1}.$$

Aber nach den Gleichungen (b) und (c) ist $P = 1$ und $Q = 0$ für $x = 0$, also wird $C = D = \frac{1}{2}$. Demnach erhalten wir

$$P = e^{-\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{\varepsilon x \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\varepsilon x \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}}}{2} \right) = e^{-\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$Q = - e^{-\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{e^{\frac{\varepsilon x \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\varepsilon x \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{-1}} \right) = - e^{-\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}\right)$$

und

$$T = e^{-\frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin\left(\alpha \vartheta - \frac{\varepsilon x}{\sqrt{2}}\right).$$

Setzen wir den Wert für ε ein, so ergibt sich

$$\text{(e)} \qquad T = e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \sin\left(\alpha \vartheta - \frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Der Unterschied zwischen der höchsten und tiefsten Temperatur in der Tiefe x unter der Erdoberfläche ist also

$$2 e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Dieser Unterschied hängt demnach wesentlich von α ab. Je schneller die Temperatur an der Oberfläche wechselt, desto geringer ist der Einfluß dieses Wechsels auf die Temperatur im Inneren. Setzen wir z. B. die Temperatur an der Oberfläche gleich

$$T = \sin \frac{2\pi \vartheta}{\Theta},$$

so wird jener Unterschied zwischen der höchsten und tiefsten Temperatur gleich

$$2 e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}}},$$

und dieser ist sehr viel größer, wenn Θ die Dauer eines Jahres ist, als dann, wenn Θ die Dauer eines Tages ist.

Wir finden ferner

$$T = \sin 2\pi \left(\frac{\vartheta}{\Theta} - \frac{x}{2\pi\varkappa}\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}}}$$

Demnach ist die Länge λ der Wärmewelle

$$\lambda = 2\varkappa \cdot \sqrt{\pi\,\Theta} = 2\sqrt{\frac{\pi\,k\,\Theta}{c\,\varrho}},$$

d. h. *die Länge der Wärmewelle ist proportional der Quadratwurzel der Dauer Θ einer Wärmeperiode.* λ ist der in der Richtung der x-Achse gemessene kleinste Abstand zweier Punkte, die sich in gleicher Wärmephase befinden, also z. B. zu gleicher Zeit die Temperatur 0° C. haben. Da sich während der Zeit Θ die Wärmewelle um die Strecke λ fortpflanzt, so haben wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v der Wärmewellen in der Richtung der x-Achse

$$v = \frac{\lambda}{\Theta} = 2\sqrt{\frac{\pi\,k}{\varrho\,c\,\Theta}} = 2\varkappa\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}},$$

d. h. *die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dauer einer Wärmeperiode.*

Die Dämpfung der Wärmewelle ist durch das Glied

$$e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{a}{2}}} = e^{-\frac{x}{\varkappa}\sqrt{\frac{\pi}{\Theta}}} = e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}$$

gegeben. Demnach ist also die Dämpfung um so größer, je kleiner die Dauer Θ der Wärmeperiode oder die Länge λ der Wärmewelle ist.

An der Erdoberfläche gestalten sich in Wirklichkeit die Verhältnisse anders als sie durch die obigen Gleichungen beschrieben werden. Die jährliche und besonders die tägliche Wärmeperiode verlaufen unregelmäßig, sodaß auch der mittlere Verlauf kaum durch eine Sinuskurve dargestellt werden kann. Dazu kommt, daß, von besonderen Fällen abgesehen, die Oberflächenschicht der Erde nicht als homogen angesehen werden kann. Immerhin gibt die Anwendung des behandelten Problems einen Einblick in den Vorgang des Eindringens der Wärme in das Erdinnere.

§ 164. Eine erwärmte Fläche.

Die Temperatur in einem unendlichen Körper, die wir im Nachfolgenden mit t bezeichnen wollen, sei überall Null, ausgenommen in einer Ebene S, in der jede Flächeneinheit die Wärmemenge σ enthält. Dieser Zustand sei zur Zeit $\vartheta = 0$

vorhanden. Fourier hat gezeigt, daß die Temperatur t in einem Punkte, dessen Abstand von der erwärmten Ebene x ist, zur Zeit ϑ durch

(a) $$t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma \varkappa}{2 k \sqrt{\vartheta}} e^{-\frac{x^2}{4 \varkappa^2 \vartheta}}$$

gegeben ist, wo k das Leitungsvermögen und $\varkappa$ die in § 161 (h) definierte Größe ist. Wir untersuchen nun, ob dieser Ausdruck für t allen Bedingungen genügt, und zwar zunächst der Differentialgleichung

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

Aus (a) erhalten wir

(b) $$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \left(-\frac{1}{2 \vartheta} + \frac{x^2}{4 \varkappa^2 \vartheta^2}\right) t,$$

(c) $$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{x t}{2 \varkappa^2 \vartheta},$$

(d) $$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2 \varkappa^2 \vartheta} + \frac{x^2}{4 \varkappa^4 \vartheta^2}\right) t.$$

Aus (b) und (d) folgt, daß die Differentialgleichung erfüllt ist. Für $\vartheta = 0$ ist $t = 0$ für alle Werte von x mit Ausnahme des Wertes $x = 0$. Denn die Funktion

$$z e^{-z^2}$$

nähert sich dem Grenzwerte Null, wenn z unendlich groß wird. Wenn t durch die Gleichung (a) bestimmt ist, so können wir ferner zeigen, daß jede Flächeneinheit der erwärmten Fläche S zur Zeit $\vartheta = 0$ die Wärmemenge σ enthält. Die gesamte Wärmemenge, die im Raume vorhanden ist, wird durch den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S \varrho c t \, dx = \frac{S \sigma}{2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varkappa \sqrt{\vartheta}} e^{-\frac{x^2}{4 \varkappa^2 \vartheta}} dx$$

gegeben. Weil aber

(e) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = \sqrt{\pi}$$

ist, so muß die zu jeder Zeit im Raume vorhandene Wärmemenge gleich $S \sigma$ sein. Da aber diese Wärmemenge zur Zeit $\vartheta = 0$ auf der unendlichen Fläche S vorhanden ist, so muß die Flächeneinheit zur Zeit $\vartheta = 0$ die Wärmemenge σ enthalten.

Aus (a) ergibt sich, daß $t = 0$ ist sowohl für $\vartheta = 0$ als auch für $\vartheta = \infty$. Zu einer bestimmten Zeit muß also t ein Maximum haben. Dieser Zeitpunkt wird gefunden aus

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{oder} \quad \vartheta = \frac{x^2}{2\varkappa^2}.$$

Der entsprechende Wert von t ist

$$\text{(g)} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{\sigma}{c\varrho x}.$$

Nach der Gleichung (a) müßte sich die Wärme mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreiten, denn t ist überall von Null verschieden, sobald nur ϑ größer als Null ist.

Wir wollen jetzt die Temperatur zu jeder Zeit in einem Raume bestimmen, in dem die ursprüngliche Wärmeverteilung nur von einer der Koordinaten abhängt. Für $\vartheta = 0$ sei $t = f(a)$, wo a der Abstand von der yz-Ebene ist. Der Teil des Raumgebietes, der von zwei parallelen Ebenen S begrenzt wird, für die $x = a$ und $x = a + da$ ist, enthält die Wärmemenge

$$S\sigma = S \cdot da \cdot \varrho c \cdot f(a).$$

Also ist die Wärmemenge σ, die in der Flächeneinheit der Lamelle vorhanden ist,

$$\sigma = da \cdot \varrho c \cdot f(a).$$

Wenn der übrige Teil des Raumes die Temperatur Null hat, so strömt von dem betrachteten Teile nach beiden Seiten die Wärme aus und in einem Punkte, dessen Abstand von der yz-Ebene gleich x ist, der also von der betrachteten Lamelle den Abstand $x - a$ hat, ist nach (a) die Temperatur

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\varrho c \varkappa}{2k\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot f(a)\, da.$$

Die übrigen entsprechenden Lamellen senden die Wärme nach demselben Gesetze aus, und wir haben demnach

$$\text{(h)} \qquad t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot f(a)\, da.$$

Setzt man

$$q = \frac{a - x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}},$$

so wird

(i) $$t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} \cdot f(x + 2\varkappa q\sqrt{\vartheta})\, dq.$$

Durch die Ausdrücke (h) und (i) ist die vorgelegte Aufgabe vollständig gelöst. Setzt man in der Gleichung (i) $\vartheta = 0$, und benutzt man die Beziehung (e), so ergibt sich sogleich $t = f(x)$.

Ist z. B. die Anfangstemperatur konstant und gleich t_0 für $-l < x < +l$, aber gleich Null außerhalb dieser Grenzen, so wird die Integration in (h) zwischen diesen Grenzen ausgeführt, sodaß

(k) $$t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t_0}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \int\limits_{-l}^{+l} e^{-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}\, da$$

ist.

§ 165. Die Ausbreitung der Wärme von einem Punkte aus.

In einem unendlich großen Körper sei die Temperatur überall gleich Null, ausgenommen in einem Punkte, in dem die Wärmemenge m konzentriert ist. Wir wollen die Wärmeverteilung zu einer beliebigen Zeit ϑ im Körper untersuchen. Diese Aufgabe ist zuerst von Fourier behandelt, der für die Temperatur t im Abstande r von m den Ausdruck

(a) $$t = \frac{m\varkappa^2}{k} \cdot \frac{1}{(2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta})^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4\varkappa^2\vartheta}}$$

gefunden hat. Wir zeigen zunächst, daß dieser Ausdruck allen Bedingungen genügt.

Befindet sich der Punkt mit der Wärmemenge im Koordinatenanfangspunkte, so nimmt die Fouriersche Gleichung

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$

nach S. 253 die Form an

(b) $$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right),$$

weil t allein von r abhängt. Der letzten Gleichung kann man die Form

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial (r t)}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 (r t)}{\partial r^2}$$

geben. Aus (a) erhalten wir

$$\text{(d)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial (r t)}{\partial \vartheta} &= \left(- \frac{3}{2 \vartheta} + \frac{r^2}{4 \varkappa^2 \vartheta^2} \right) r t, \\ \frac{\partial (r t)}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{2 \varkappa^2 \vartheta} \right) r t, \\ \frac{\partial^2 (r t)}{\partial r^2} &= \left(- \frac{3}{2 \varkappa^2 \vartheta} + \frac{r^2}{4 \varkappa^4 \vartheta^2} \right) r t. \end{aligned} \right.$$

Somit ist die Fouriersche Gleichung erfüllt. Für $\vartheta = 0$ ist ferner $t = 0$. Die ursprünglich vorhandene Wärmemenge ist wirklich gleich m, denn die gesamte Wärmemenge zu einer beliebigen Zeit ist durch

$$\int_0^\infty 4 \pi r^2 \cdot \varrho c t \cdot d r = \int_0^\infty 4 \pi r^2 m \cdot \frac{1}{(2 \varkappa \sqrt{\pi \vartheta})^3} e^{-\frac{r^2}{4 \varkappa^2 \vartheta}} d r$$

gegeben. Setzt man

$$q = \frac{r}{2 \varkappa \sqrt{\vartheta}},$$

so nimmt das Integral die Form

$$\text{(e)} \qquad \frac{4 m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-q^2} \cdot q^2 d q$$

an. Führt man in

$$\int_0^\infty e^{-z^2} d z = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

das sich leicht aus § 164 (e) ergibt, für die Variable z eine mit ihr proportionale Variable durch die Substitution $z = a x$ ein, so finden wir

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} a \, d x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} d x = \frac{\sqrt{\pi}}{2 a}.$$

Setzen wir ferner $a^2 = \alpha$, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

wobei der Quadratwurzel das positive Vorzeichen zu geben ist, da die Funktion unter dem Integralzeichen positiv ist. Differenziert man unter dem Integralzeichen in bezug auf α, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cdot x^2\, d\, x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}},$$

woraus für $\alpha = 1$ folgt

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Auch durch teilweise Integration und mit Rücksicht auf die Gleichung § 164 (e) findet man, daß das Integral (e) den Wert m hat.

Der Zeitpunkt ϑ, in welchem t seinen höchsten Wert annimmt, ergibt sich aus der Gleichung $d t / d \vartheta = 0$, oder nach (a) aus

$$\vartheta = \frac{r^2}{6 \varkappa^2}.$$

Der entsprechende Wert von t ist

$$t = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3} \pi e}\right)^3} \cdot \frac{m}{c \varrho r^3}.$$

§ 166. Die Ausbreitung der Wärme in einem unbegrenzten Körper.

Wir wollen mit Hilfe der gefundenen Resultate die Ausbreitung der Wärme in einem unendlichen Körper untersuchen, wenn die Verteilung der Wärme in einem bestimmten Zeitpunkte gegeben ist. Zur Zeit $\vartheta = 0$ sei $t = f(a, b, c)$, wo a, b, c die Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind. Ein Raumelement $d a \cdot d b \cdot d c$ enthält die Wärmemenge

$$d m = \frac{k}{\varkappa^2} \cdot f(a, b, c) \cdot d a\, d b\, d c.$$

Breitet sich diese Wärmemenge über den Körper aus, so bringt sie nach § 165 (a) die Erwärmung

$$dt = \frac{1}{(2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta})^3} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot f(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

hervor

Nimmt man die Summe über alle Erwärmungen, die von der betrachteten Wärmeverteilung herrühren, so erhält man für die Temperatur t im Punkte x, y, z

$$\text{(a)} \quad t = \frac{1}{(2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta})^3} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \times f(a, b, c)\, da\, db\, dc.$$

Dieser Ausdruck für t ist ein Integral der Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).$$

Man beachte, daß die Integration dieser Gleichung von der Integration der einfacheren Gleichung

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial X}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

abhängt. Ist nämlich X eine Funktion von x und ϑ, die der Gleichung (c) genügt, und sind Y und Z bzw. Funktionen von y, ϑ und z, ϑ, die den analogen Gleichungen (c) für y und z genügen, so befriedigt

$$t = XYZ$$

die Gleichung (b). Wir haben

$$YZ\frac{\partial X}{\partial \vartheta} + XZ\frac{\partial Y}{\partial \vartheta} + XY\frac{\partial Z}{\partial \vartheta} = \varkappa^2\left(YZ\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right).$$

Aus (c) und den analogen Gleichungen für y und z ergibt sich, daß diese Gleichung erfüllt ist. Nach § 164 (a) ist die Gleichung (c) erfüllt durch

$$X = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}.$$

Demnach ist der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(z-c)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}$$

ein Integral der Gleichung (b). Ebenso ist auch

$$t = C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{\vartheta})^3} e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot f(a, b, c)\, da\, db\, dc$$

ein Integral der Gleichung (b). C ist eine Konstante und $f(a, b, c)$ eine willkürliche Funktion von a, b und c. Setzen wir

$$\alpha = \frac{a - x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}, \quad \beta = \frac{b - y}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}, \quad \gamma = \frac{c - z}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}},$$

so ergibt sich

$$t = (2\varkappa)^3 C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \cdot f(x + 2\varkappa\alpha\sqrt{\vartheta},\ y + 2\varkappa\beta\sqrt{\vartheta},$$
$$z + 2\varkappa\gamma\sqrt{\vartheta})\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Nimmt man nun $\vartheta = 0$, so folgt mit Hilfe von § 164 (e)

$$t = (2\varkappa)^3 \cdot C(\sqrt{\pi})^3 f(x, y, z).$$

Ist $f(x, y, z)$ ein Ausdruck für die Temperatur im Anfange der Zeit, so setzt man

$$C = \frac{1}{(2\varkappa\sqrt{\pi})^3}$$

und erhält also

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} t = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \cdot f(x + 2\varkappa\alpha\sqrt{\vartheta}, \\ \qquad y + 2\varkappa\beta\sqrt{\vartheta},\ z + 2\varkappa\gamma\sqrt{\vartheta})\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (a) und (d) sind identisch, wovon man sich durch Einführung der vorhin benutzten Substitution überzeugen kann.

§ 167. Die Eisbildung.

Eine Wassermasse habe überall im Inneren die Temperatur $t = 0$; ihre Oberfläche sei in Berührung mit einer Fläche, welche die Temperatur $-t_0$ hat. t_0 kann konstant oder variabel sein, soll aber stets unter Null liegen. Unter der Fläche mit der Temperatur $-t_0$ wird eine Eisschicht gebildet, die Dicke ε der Eisschicht ist eine Funktion der Zeit ϑ. Die Temperatur t in der Eismasse selbst ist eine Funktion von ϑ und vom Abstande x von der Oberfläche. Für $x = \varepsilon$ haben wir stets $t = 0$. In der Eismasse gilt überall die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}.$$

An der Grenzfläche zwischen Eis und Wasser wird fortgesetzt neues Eis gebildet. Die Wärmemenge, welche in der Zeit $d\vartheta$ durch die Flächeneinheit der untersten Eisschicht aufwärts strömt, ist durch

$$k \frac{\partial t}{\partial x} d\vartheta$$

gegeben. In derselben Zeit wird eine Eisschicht von der Dicke $d\varepsilon$ gebildet, die dadurch frei gewordene Wärmemenge ist

$$R \varrho \, d\varepsilon,$$

wenn R die Schmelzwärme und ϱ die Dichte des Eises ist. Für $x = \varepsilon$ wird

$$\text{(b)} \qquad k \frac{\partial t}{\partial x} = R \varrho \cdot \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{R}{c \varkappa^2} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\vartheta},$$

t kann durch

$$\text{(c)[1]} \qquad -\frac{c t}{R} = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d(\varepsilon - x)^2}{\varkappa^2 \cdot d\vartheta} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^2 (\varepsilon - x)^4}{\varkappa^4 \cdot d\vartheta^2} + \ldots$$

dargestellt werden, und man überzeugt sich leicht, daß (c) die Gleichung (a) befriedigt. Ferner wird $t = 0$ für $x = \varepsilon$. Um zu zeigen, daß auch (b) erfüllt ist, differenziieren wir in (c) in bezug auf x und erhalten dadurch

$$-\frac{c}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{d(\varepsilon - x)}{\varkappa^2 \cdot d\vartheta} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 (\varepsilon - x)^3}{\varkappa^4 \cdot d\vartheta^2} - \ldots$$

Hieraus erhalten wir für $x = \varepsilon$ die Gleichung (b).

Da an der Oberfläche $t = -t_0$ ist, ergibt sich aus (c)

$$\text{(d)} \qquad \frac{c t_0}{R} = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d\varepsilon^2}{\varkappa^2 d\vartheta} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^2 \varepsilon^4}{\varkappa^4 d\vartheta^2} + \ldots$$

Ist die Dicke der Eisschicht als Funktion der Zeit ϑ gegeben, so kann t_0 leicht bestimmt werden; ist dagegen t_0 gegeben, so ist es im allgemeinen schwierig, ε zu bestimmen.

[1]) Diese Lösung ist von L. Lorenz mitgeteilt worden. Siehe auch Stefan, Wied. Ann. **42.** S. 269.

Ist t_0 konstant, so muß die rechte Seite der Gleichung (d) ebenfalls konstant sein. Hierzu ist erforderlich, daß

$$\frac{\varepsilon^2}{\varkappa^2} = 2p^2\vartheta,$$

wo p eine Konstante ist. Aus (d) erhalten wir dann die Gleichung

$$\text{(e)} \qquad \frac{c\,t_0}{R} = \frac{p^2}{1} + \frac{p^4}{1\cdot 3} + \frac{p^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$$

die zur Bestimmung von p dienen kann. Um die Reihe in (e) in eine endliche Form zu bringen, bilden wir aus (e)

$$\frac{d\left(\frac{c\,t_0}{Rp}\right)}{dp} = 1 + \frac{p^2}{1} + \frac{p^4}{1\cdot 3} + \frac{p^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots,$$

und also wird

$$\frac{d\left(\frac{c\,t_0}{Rp}\right)}{dp} = 1 + \frac{c\,t_0}{R}.$$

Das Integral dieser Gleichung lautet

$$\text{(f)} \qquad \frac{c\,t_0}{R} = p\int_0^p e^{-\frac{\alpha^2 - p^2}{2}}\,d\alpha.$$

Wächst die Dicke der Eisschicht proportional mit der Zeit ϑ, ist also

$$\varepsilon = q\varkappa\vartheta,$$

wo q eine neue Konstante ist, so ergibt sich aus (d)

$$\frac{c\,t_0}{R} = q^2\vartheta + \frac{q^4\vartheta^2}{1\cdot 2} + \frac{q^6\vartheta^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

oder

$$\text{(g)} \qquad \frac{c\,t_0}{R} = e^{q^2\vartheta} - 1.$$

Ist ε sehr klein, so erhalten wir aus (d)

$$\frac{c\,t_0}{R} = \frac{1}{2\varkappa^2}\cdot\frac{d\varepsilon^2}{d\vartheta}$$

und demnach

$$\text{(h)} \qquad \varepsilon^2 = \frac{2k}{R\varrho}\cdot\int_0^\vartheta t_0\,d\vartheta.$$

Das letzte Resultat ergibt sich auch, wenn wir den aufwärts sich bewegenden Wärmestrom gleich $k t_0/\varepsilon$ setzen, wobei jedoch angenommen wird, daß die Temperatur im Eise gleichmäßig nach unten zunimmt. Unter dieser Voraussetzung strömt in der Zeit $d\vartheta$ die Wärmemenge $k t_0 \cdot d\vartheta / \varepsilon$ aufwärts durch das Eis. In derselben Zeit wird eine Eisschicht von der Dicke $d\varepsilon$ gebildet, wobei die Wärmemenge $R\varrho \cdot d\varepsilon$ frei wird. Wir haben demnach

$$\frac{k t_0 \cdot \partial \vartheta}{\varepsilon} = R\varrho \cdot d\varepsilon .$$

Diese Gleichung führt zu demselben Resultat, das wir oben erhalten haben. Ist t_0 konstant, so ergibt sich

$$\text{(i)} \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{2 t_0 k \vartheta}{R\varrho}} \cdot$$

§ 168. Die Wärmebewegung in einer Platte, deren Oberfläche auf konstanter Temperatur erhalten wird.

Im allgemeinen ist es sehr schwierig, zu ermitteln, in welcher Weise die Temperatur in einem begrenzten Körper sich ändert. Wir wollen einige Fälle besprechen, in denen die Lösung der Aufgabe möglich ist. Im Inneren einer planparallelen Platte sei die Temperatur $t = f(x)$, wo x der Abstand des betrachteten Punktes von der einen Seitenfläche ist. Von der Zeit $\vartheta = 0$ ab befindet sich die Oberfläche in Berührung mit einer Mischung aus Eis und Wasser, oder ihre Temperatur wird in irgend einer anderen Weise auf 0° C. erhalten. Das Gesetz, nach welchem die Wärme im Inneren der Platte abnimmt, soll ermittelt werden. Bezeichnen wir die Dicke der Platte mit a, so ist

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \text{für } \vartheta = 0, \ t = f(x); & \text{für } \vartheta = \infty, \ t = 0; \\ \text{für } x = 0, \ t = 0 \ ; & \text{für } x = a, \ t = 0. \end{cases}$$

An der Oberfläche ändert sich die Temperatur unendlich schnell; sie ist unmittelbar außerhalb der Oberfläche an der einen Seite der Platte gleich Null, innerhalb der Oberfläche aber $f(0)$. An der anderen Seitenfläche ist die Temperatur außerhalb der Platte ebenfalls Null, innerhalb derselben aber $f(a)$. Die Funktion t soll nicht allein diesen Bedingungen genügen, sondern auch der Differentialgleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cdot$$

Ein Integral dieser Differentialgleichung lautet

(c) $$t = e^{-m^2 \varkappa^2 \vartheta}(A \sin m x + B \cos m x).$$

Nach (a) muß $B = 0$ sein, sodaß

(d) $$t = A e^{-m^2 \varkappa^2 \vartheta} \sin m x$$

ist. Dieser Wert von t erfüllt nicht allein die Gleichung (b), sondern verschwindet auch für $x = 0$. Weil t auch Null sein soll für $x = a$, so muß

$$\sin m a = 0$$

sein und also

$$m a = \pm p \pi,$$

wo p eine ganze Zahl ist. Wir haben demnach

(e) $$t = A \cdot e^{-\frac{p^2 \pi^2 \varkappa^2 \vartheta}{a^2}} \cdot \sin\left(\frac{p x \pi}{a}\right).$$

Berücksichtigen wir ferner, daß $t = f(x)$ für $\vartheta = 0$ sein soll, so muß

(f) $$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{p \pi x}{a}\right)$$

sein.

Im allgemeinen kann aber die Funktion $f(x)$ nicht durch diesen Ausdruck dargestellt werden. Zur Lösung der Aufgabe benutzt man dann die folgende Methode.

Der Ausdruck (e) liefert uns nicht allein ein Integral der Fourierschen Gleichung, sondern als ein Integral dieser Gleichung gilt auch eine Summe von Ausdrücken (e), die sich dadurch ergibt, daß wir p alle ganzen Werte zwischen 1 und ∞ beilegen. Die Glieder, welche einem negativen p entsprechen, unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von den Gliedern mit positivem p und können also als in den letzteren enthaltend betrachtet werden. Wir setzen demnach

(g) $$t = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \varkappa^2 \vartheta}{a^2}} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{2^2 \pi^2 \varkappa^2 \vartheta}{a^2}} + \ldots$$

Für $\vartheta = 0$ ist $t = f(x)$, sodaß für $0 < x < a$

(h) $$f(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + \ldots$$

wird.

Wir untersuchen nun, ob eine willkürliche Funktion $f(x)$ für den betrachteten Bereich durch eine trigonometrische Reihe von dieser Form ersetzt werden kann. Zu diesem Zwecke wählen wir an der Stelle der unendlichen Reihe (h) eine andere Reihe mit $(n-1)$-Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, die mit $f(x)$ in $(n-1)$-Punkten zusammenfällt, nämlich für

$$x = \frac{a}{n}, \quad x = \frac{2a}{n}, \quad \ldots \quad x = \frac{(n-1)a}{n}.$$

Daraus ergeben sich folgende $(n-1)$-Gleichungen

$$f\left(\frac{a}{n}\right) = A_1 \sin\frac{\pi}{n} + A_2 \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + A_{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

$$f\left(\frac{2a}{n}\right) = A_1 \sin\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin\frac{2\cdot 2\pi}{n} + \ldots + A_{n-1} \sin\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

$$f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) = A_1 \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + A_2 \sin\frac{(n-1)2\pi}{n} + \ldots$$
$$+ A_{n-1} \sin\frac{(n-1)(n-1)\pi}{n}.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit $(\sin\pi/n)$, die zweite mit $\sin(2\pi/n)$ usw. multipliziert, so ergibt sich durch Addition der rechten und linken Seiten der Gleichungen

$$f\left(\frac{a}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$
$$= A_1\left[\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$
$$+ A_2\left[\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\cdot 2\pi}{n} + \ldots \right.$$
$$\left. + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{(n-1)2\pi}{n}\right] + \ldots$$

Nun ist

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2(n-1)\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[n - 1 - \left(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos(2n-2)\alpha\right)\right].$$

Wir summieren zunächst

$$s = \cos\beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos(n-1)\beta.$$

Multipliziert man die beiden Seiten dieser Gleichung mit $2\cos\beta$, und verwandelt man die Produkte der Kosinus in Summen, so folgt

$$2s\cdot\cos\beta = 1 + \cos\beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos(n-2)\beta$$
$$+ \cos 2\beta + \cos 3\beta + \cos 4\beta + \ldots + \cos n\beta.$$

Für den ersten Teil der Reihe können wir setzen

$$s + 1 - \cos(n-1)\beta$$

und für den zweiten Teil

$$s - \cos\beta + \cos n\beta.$$

Somit folgt

$$2s(1-\cos\beta) = -(1-\cos\beta) + \left(\cos(n-1)\beta - \cos n\beta\right),$$

also

$$s = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos(n-1)\beta - \cos n\beta}{2(1-\cos\beta)} = \frac{\cos\frac{1}{2}n\beta \cdot \sin\frac{1}{2}(n-1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Demnach wird

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2(n-1)\alpha = \tfrac{1}{2}\left[n - 1 - \frac{\cos n\alpha \cdot \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}\right].$$

Setzen wir für α seinen Wert π/n ein, so wird

$$\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin^2\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2}.$$

Dem Faktor von A_2 können wir die Form

$$\tfrac{1}{2}\Big[\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} - \cos\frac{6\pi}{n} \ldots +$$
$$+ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-1)3\pi}{n}\Big]$$

geben. Wenden wir die oben angegebene Summationsformel an, so zeigt sich, daß dieser Faktor gleich Null wird. In derselben Weise verschwinden die Faktoren A_3, $A_4 \ldots$, und wir erhalten das Resultat

$$A_1 = \frac{2}{n}\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Allgemein hat man für $0 < m < n$

$$\text{(i)} \qquad A_m = \frac{2}{n}\Big[f\left(\frac{a}{n}\right)\sin\frac{m\pi}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right)\sin\frac{2m\pi}{n} + \ldots$$
$$+ f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\Big].$$

Demnach ist es möglich, die Koeffizienten A_1, $A_2 \ldots$ so zu bestimmen, daß $f(x)$ und die trigonometrische Reihe für $(n-1)$-Werte von x zwischen 0 und a zusammenfallen. Je größer n gewählt wird, desto mehr Werte haben die beiden Funktionen gemeinsam, und für $n = \infty$ ist es gestattet, die eine Funktion an die Stelle der anderen in dem betrachteten

Intervalle zu setzen. Beide Funktionen sind jedoch nicht identisch, denn ihre Differentialquotienten können ganz verschieden sein. Die eine Funktion verhält sich zu der anderen wie eine gerade Linie zu einer gezähnten Linie, deren Zähne unendlich klein sind.

Wir wollen nun annehmen, daß $n = \infty$ ist, und schreiben die Gleichung (i)

$$A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \left[f\left(\frac{a}{n}\right) \sin \frac{m\pi}{n} + f\left(\frac{2a}{n}\right) \sin \frac{2m\pi}{n} + \ldots + f\left(\frac{ra}{n}\right) \sin \frac{rm\pi}{n} + \ldots \right].$$

Wir setzen nun

$$\frac{r\pi}{n} = \gamma, \quad \frac{\pi}{n} = d\gamma, \quad \frac{ra}{n} = \frac{a\gamma}{\pi},$$

so folgt

$$\text{(k)} \qquad A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f\left(\frac{a\gamma}{\pi}\right) \sin(m\gamma)\, d\gamma.$$

Wird ferner $x = a\gamma / \pi$ gesetzt, so haben wir

$$\text{(l)} \qquad A_m = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi x}{a}\, dx.$$

Dasselbe Resultat ist in einer anderen Weise in § 42 (c) gefunden.

Wir können also für einen beliebigen Bereich, z. B. von 0 bis a, an die Stelle der Funktion $f(x)$ eine trigonometrische Reihe, nämlich für $0 < x < a$

$$\text{(m)} \quad f(x) = \frac{2}{a} \left[\sin \frac{\pi x}{a} \cdot \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi x}{a}\, dx + \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \int_0^a f(x) \sin \frac{2\pi x}{a}\, dx + \ldots \right]$$

setzen. Werden die für $A_1, A_2 \ldots$ erhaltenen Werte in (g) eingeführt, so ist die betrachtete Aufgabe gelöst, und wir erhalten

$$\text{(n)} \quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2} a t = {} & \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{\pi^2 \varkappa^2 \vartheta}{a^2}} \cdot \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi x}{a}\, dx \\ & + \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{2^2 \pi^2 \varkappa^2 \vartheta}{a^2}} \cdot \int_0^a f(x) \sin \frac{2\pi x}{a}\, dx + \ldots \end{aligned} \right.$$

Ist z. B. die Temperatur der Platte von vornherein konstant und gleich t_0, so haben wir

$$\int_0^a t_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = (1-\cos m\pi)\cdot\frac{a\,t_0}{m\pi},$$

und also

$$\text{(o)}\qquad \tfrac{1}{4}\pi t = t_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-\left(\frac{\pi \varkappa}{a}\right)^2\cdot\vartheta} + \tfrac{1}{3} t_0 \sin\frac{3\pi x}{a} e^{-\left(\frac{3\pi\varkappa}{a}\right)^2\cdot\vartheta} + \dots$$

Für $\vartheta = 0$ erhalten wir, wenn $0 < x < a$ ist,

$$\text{(p)}\qquad \tfrac{1}{4}\pi = \sin\frac{\pi x}{a} + \tfrac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a} + \tfrac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{a} + \dots$$

§ 169. Die Entwicklung der Funktionen in Reihen von Sinus und Kosinus.

Nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen kann man stets

$$\text{(a)}\qquad f(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + \dots$$

setzen, wo nach § 168 (l)

$$\text{(b)}\qquad A_m = \frac{2}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha$$

ist, wenn x mit α vertauscht wird. Die Reihenentwicklung gilt nur für $0 < x < a$; für die Grenzwerte 0 und a selbst gilt sie nicht, wofern nicht $f(x)$ selbst gleich Null für diese Grenzwerte ist. Die rechte Seite von (a) ist eine ungerade Funktion, die zugleich mit x das Vorzeichen wechselt. Die Reihe (a) gilt auch für den Bereich $-a < x < 0$, wenn $f(x)$ auch eine ungerade Funktion ist. Setzen wir $f(x) = x$, so wird

$$A_m = \frac{2}{a}\cdot\int_0^a \alpha\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha = -\,2a\cdot\frac{\cos m\pi}{m\pi}.$$

Wir haben nämlich, wenn $p = m\pi/a$ gesetzt wird,

$$\int \alpha\sin p\alpha\,d\alpha = -\frac{\alpha\cos p\alpha}{p} + \int\frac{\cos p\alpha\,d\alpha}{p}$$

$$= -\frac{\alpha\cos p\alpha}{p} + \frac{\sin p\alpha}{p^2}.$$

Also wird

$$\int_0^a \alpha \sin p\alpha\, d\alpha = -\frac{a^2 \cos m\pi}{m\pi}; \quad \frac{2}{a}\cdot\int_0^a \alpha \sin\frac{m\pi\alpha}{a}\, d\alpha = -2a\cdot\frac{\cos m\pi}{m\pi}.$$

Ferner haben wir für $f(x) = x$

(c) $$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi x}{a} = \sin\frac{\pi x}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\pi x}{a} + \tfrac{1}{3}\cdot\sin\frac{3\pi x}{a} - \ldots$$

Da x eine ungerade Funktion ist, so gilt die Reihe auch für negative Werte von x, wenn sie für positive Werte besteht. Weil aber die Reihe auch für $x = 0$ gilt, so gilt sie für den Bereich

$$-a < x < +a.$$

Setzt man $\pi x / a = y$, so ist auch für $-\pi < y < +\pi$

(d) $$\tfrac{1}{2} y = \sin y - \tfrac{1}{2}\cdot\sin 2y + \tfrac{1}{3}\cdot\sin 3y - \ldots$$

Diese Reihe gilt nicht mehr für $y = \pm\pi$. Wird ferner

(e) $$f(x) = B_0 + B_1 \cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + \ldots$$

gesetzt, und werden beide Seiten dieser Gleichung mit $\cos(m\pi x / a)$ multipliziert und dann integriert von 0 bis a, so ergibt sich, wenn m und n ganze Zahlen sind,

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}\, dx = \tfrac{1}{2} a.$$

Demnach erhalten wir für $m > 0$

(f) $$B_m = \frac{2}{a}\cdot\int_0^a f(x)\cdot\cos\frac{m\pi x}{a}\, dx \quad \text{und} \quad B_0 = \frac{1}{a}\cdot\int_0^a f(x)\, dx.$$

B_0 ergibt sich, wenn in (e) rechts und links mit dx multipliziert und dann von 0 bis a integriert wird. Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so gilt die Reihe für den Bereich $-a < x < a$, da die Kosinusreihe nicht mit x das Vorzeichen wechselt. Ist aber $f(x)$ eine ungerade Funktion, so gilt die Reihe (e) nur innerhalb der Grenzen 0 und a.

Nach (a) und (b), sowie nach (e) und (f) erhalten wir

$$
\text{(g)}\quad \left|\begin{aligned} \tfrac{1}{2} a \cdot f(x) &= \sin\frac{\pi x}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{a}\,d\alpha \\ &+ \sin\frac{2\pi x}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{a}\,d\alpha + \dots \end{aligned}\right.
$$

und

$$
\text{(h)}\quad \left|\begin{aligned} \tfrac{1}{2} a \cdot f(x) &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a f(\alpha)\,d\alpha + \cos\frac{\pi x}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{a}\,d\alpha \\ &+ \cos\frac{2\pi x}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{a}\,d\alpha + \dots \end{aligned}\right.
$$

Eine willkürliche Funktion $f(x)$ kann auch in Reihen von Sinus und Kosinus entwickelt werden, sodaß die Entwicklung für den Bereich $-a < x < a$ gültig bleibt. Zu diesem Zwecke setzt man

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\cdot[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}\cdot[f(x) - f(-x)],$$

wobei $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ eine gerade Funktion ist, weil sie unverändert bleibt, wenn man x mit $-x$ vertauscht. Dieselbe Funktion kann als Kosinusreihe dargestellt werden. Der Koeffizient von $\cos(m\pi x/a)$ wird

$$\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a [f(\alpha) + f(-\alpha)]\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a f(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha + \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a f(-\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha.$$

Wird in dem letzten Integral α mit $-\alpha$ vertauscht, so geht es über in

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{-a} f(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha,$$

und der gesuchte Koeffizient wird dadurch

$$\tfrac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha.$$

Wir erhalten demnach

$$
\text{(i)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,a\cdot[f(x)+f(-x)] &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha \\
&+\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{a}\,d\alpha \\
&+\cos\frac{2\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{2\pi\alpha}{a}\,d\alpha+\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Dagegen ist die Funktion $\tfrac{1}{2}\cdot[f(x)-f(-x)]$ eine ungerade Funktion, weil sie mit x zugleich das Vorzeichen wechselt. Mit Hilfe von (g) stellen wir also diese Funktion als Sinusreihe dar. Der Koeffizient von $\sin(m\pi x/a)$ wird

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a [f(\alpha)-f(-\alpha)]\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha \\
&=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha-\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a f(-\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha.
\end{aligned}
$$

Vertauscht man in dem letzten Integrale α und $-\alpha$, so geht es über in

$$
-\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{-a} f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha,
$$

und der Koeffizient wird

$$
\tfrac{1}{2}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha.
$$

Wir erhalten also das Resultat

$$
\text{(k)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,a\cdot[f(x)-f(-x)] &= \sin\frac{\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{a}\,d\alpha \\
&+\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\sin\frac{2\pi\alpha}{a}\,d\alpha+\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

Durch Addition ergibt sich aus den Gleichungen (i) und (k) endlich

$$(\mathrm{l})\quad \left\{\begin{aligned} a\cdot f(x) &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha + \int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{\pi(x-\alpha)}{a}\,d\alpha \\ &+ \int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{2\pi(x-\alpha)}{a}\,d\alpha + \ldots, \end{aligned}\right.$$

oder für $-a < x < a$

$$(\mathrm{m})\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a}\cdot\int_{-a}^{+a}\left[\tfrac{1}{2} + \cos\frac{\pi(x-\alpha)}{a}\right. \\ &\left. + \cos\frac{2\pi(x-\alpha)}{a} + \ldots\right] f(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Diese Reihe rührt von Fourier her, die auch in der Form

$$(\mathrm{n})\qquad f(x) = \frac{1}{2a}\cdot\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{a}\cdot\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{a}\,d\alpha$$

dargestellt werden kann.

Wir können nun a irgendwelche Werte beilegen. Ist a unendlich groß und ist

$$\int_{-a}^{+a} f(\alpha)\,d\alpha$$

endlich, so verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (n), und wir erhalten

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{\pi}{a}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos\frac{m\pi(x-\alpha)}{a}\,d\alpha.$$

Wird nun

$$\frac{m\pi}{a} = \lambda,\quad \text{und also}\quad \frac{\pi}{a} = d\lambda$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(\mathrm{o})\qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\cos\big(\lambda(x-\alpha)\big)\,d\alpha,$$

wo $-\infty < x < \infty$ ist. An Stelle dieser Gleichung kann man oft zwei andere anwenden, die sich aus (g) und (h) ergeben. Das allgemeine Glied in (g) lautet nämlich

$$\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha\,.$$

Demnach ist

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot\sum_{m=1}^{m=\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\int_0^a f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha\,.$$

Wird nun

$$\frac{m\pi}{a}=\lambda,\quad\text{und also}\quad\frac{\pi}{a}=d\lambda$$

gesetzt, so ergibt sich für $0<x<\infty$

$$\text{(p)}\qquad f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty d\lambda\,\sin(\lambda x)\int_0^\infty f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\,d\alpha\,.$$

Aus (h) erhalten wir in derselben Weise für $0<x<\infty$

$$\text{(q)}\qquad f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty d\lambda\,\cos(\lambda x)\int_0^\infty f(\alpha)\cos(\lambda\alpha)\,d\alpha\,.$$

§ 170. Die Anwendung des Fourierschen Satzes auf die Ausbreitung der Wärme.

Wenn die Temperatur in einem Raume nur von der x-Koordinate abhängt, so muß die Temperatur T der Fourierschen Gleichung

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial T}{\partial\vartheta}=\varkappa^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

genügen. Nach § 168 (c) ist

$$T=e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta}(A\sin\lambda x+B\cos\lambda x)$$

ein Integral der Gleichung (a), wenn λ, A und B Konstante sind. Wir können T auch darstellen durch

$$T=e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta}\cos\big(\lambda(x-\alpha)\big)\cdot f(\alpha)\,,$$

wo $f(\alpha)$ eine willkürliche Funktion von α ist, und wo λ und α konstante Größen sind, die alle möglichen Werte annehmen können. Jede Summe solcher Glieder genügt der Gleichung, und also genügt ihr auch

(b) $$T = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^\infty d\lambda\, e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos\bigl(\lambda(x-\alpha)\bigr)\, d\alpha\,.$$

Aber für $\vartheta = 0$ ergibt sich hieraus

$$T = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \bigl(\cos \lambda(x-\alpha)\bigr)\, d\alpha\,,$$

woraus wir durch Vergleichung mit § 169 (o)

$$T = f(x)$$

erhalten.

In (b) ist also die Lösung der Aufgabe enthalten, die Temperatur in einem Körper zu irgend einer Zeit ϑ zu bestimmen, wenn die Temperatur zur Zeit $\vartheta = 0$ durch $T = f(x)$ gegeben ist. Dieselbe Aufgabe ist inzwischen bereits auf einem anderen Wege in § 164 (h) und (i) gelöst worden, und wir zeigen nun, daß der hier für T gefundene Ausdruck mit dem früheren identisch ist.

Da

(c) $$T = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, d\alpha \int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \cos\bigl(\lambda(x-\alpha)\bigr)\, d\lambda$$

ist, so bestimmen wir zunächst den Wert des Integrals

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \cos\bigl(\lambda(x-\alpha)\bigr)\, d\lambda\,.$$

Entwickeln wir $\cos\bigl(\lambda(x-\alpha)\bigr)$ in eine Reihe, so wird dieses Integral dargestellt durch

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(x-\alpha)^{2n}}{[2n]} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \lambda^{2n} \cdot d\lambda\,.$$

Durch teilweise Integration ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \lambda^{2n}\, d\lambda = \frac{2n-1}{2\varkappa^2 \vartheta} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \lambda^{2n-2}\, d\lambda$$

und durch fortgesetzte Reduktion

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \lambda^{2n}\, d\lambda = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{(2\varkappa^2 \vartheta)^n} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta}\, d\lambda\,.$$

Weil aber

$$\int_0^\infty e^{-q^2} dq = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist, so erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \lambda^{2n} d\lambda = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{(2\varkappa^2 \vartheta)^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}.$$

Das gesuchte Integral wird also

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(x-\alpha)^{2n}}{[2n]} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{(2\varkappa^2\vartheta)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{[n]} \frac{(x-\alpha)^{2n}}{(4\varkappa^2\vartheta)^n},$$

oder

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \cdot e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}.$$

Führen wir diesen Ausdruck für das Integral in (c) ein, so ergibt sich

$$\text{(d)} \qquad T = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} d\alpha.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der in § 164 (h) gegebenen.

Wir wollen ferner den Fourierschen Lehrsatz benutzen, um das Gesetz aufzufinden, nach dem die Wärme in einen Körper eindringt. Dabei wollen wir den einfachen Fall betrachten, in welchem der Körper mit seiner ebenen Grenzfläche F einen anderen Körper berührt, der die gegebene und konstante Temperatur t_0 hat. Die Temperatur des kalten Körpers sei 0° C.

Wenn wir von dem im Anschluß an die Gleichung (a) für t bzw. T gegebenen Ausdruck ausgehen und § 169 (p) benutzen, so folgt

$$t = t_0 + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta} \int_0^\infty f(\alpha) \sin(\lambda\alpha) d\alpha.$$

Dieser Ausdruck für t genügt allen Bedingungen, wenn nur für $\vartheta = 0$

$$0 = t_0 + \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \int_0^\infty f(\alpha) \sin(\lambda \alpha)\, d\alpha$$

wird. Aber nach § 169 (p) wird diese Gleichung erfüllt, wenn

$$f(\alpha) = -t_0$$

ist. Die Lösung der vorgelegten Aufgabe ist demnach in

(e) $$t = t_0 - \frac{2t_0}{\pi} \cdot \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x)\, e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} \int_0^\infty \sin(\lambda \alpha)\, d\alpha$$

enthalten. Benutzen wir dieselbe Reduktionsmethode, durch die der Ausdruck (c) in den Ausdruck (d) umgewandelt ist, so ergibt sich

$$t = t_0 - \frac{t_0}{2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta}} \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}\, d\alpha - \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4x^2\vartheta}}\, d\alpha \right\},$$

woraus folgt

$$t = t_0 - \frac{t_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \int_{-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^\infty e^{-q^2}\, dq - \int_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^\infty e^{-q^2}\, dq \right\},$$

also auch

$$t = t_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{+\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}} e^{-q^2}\, dq \right\}.$$

Da e^{-q^2} eine gerade Funktion ist, so erhalten wir

$$t = t_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}} e^{-q^2}\, dq \right\},$$

oder in Rücksicht auf § 164 (e)

(f) $$t = \frac{2t_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^\infty e^{-q^2}\, dq\,.$$

A und B seien zwei Punkte im Inneren des Körpers, welche bzw. die Abstände x_1 und x_2 von der Fläche F haben. Wenn A nach der Zeit ϑ_1 die Temperatur t' erlangt hat, so ist

$$t' = \frac{2t_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\frac{x_1}{2\varkappa\sqrt{\vartheta_1}}}^{\infty} e^{-q^2}\, d\, q\,.$$

Dieselbe Temperatur erreicht B erst nach der Zeit ϑ_2, die durch die Gleichung

$$t' = \frac{2t_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\frac{x_2}{2\varkappa\sqrt{\vartheta_2}}}^{\infty} e^{-q^2}\, d\, q$$

bestimmt ist. Durch Vergleichung der beiden Integrale sieht man, daß

$$\frac{x_1}{\sqrt{\vartheta_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{\vartheta_2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta_2}{\vartheta} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

sein muß, d. h. *die Zeiten, nach deren Verlauf zwei Punkte dieselbe Temperatur erlangen, verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Punkte von der erwärmten Fläche F.*

Wir bestimmen nun die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit in den kalten Körper während der Zeiteinheit hineinströmt. Zu diesem Zwecke geben wir der Gleichung (f) die Form

$$t = \frac{2\,t_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[f(\infty) - f\left(\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}\right)\right],$$

woraus sich in Rücksicht auf (f)

$$-k\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{k\,t_0}{\varkappa\sqrt{\pi\,\vartheta}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\varkappa^2\vartheta}}$$

ergibt. Die gesuchte Wärmemenge U finden wir, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Die Wärmemenge ist

$$\text{(g)} \qquad U = \frac{k\,t_0}{\varkappa\sqrt{\pi\,\vartheta}}.$$

Mit Hilfe der Gleichung (g) wollen wir eine wichtige Aufgabe lösen; die mit der Frage nach dem *Temperatursprunge an der gemeinsamen Oberfläche zweier Körper* in Verbindung steht. Nach den Beobachtungen von G. Wiedemann und von Ångström ist ein Temperatursprung an der Berührungsfläche zweier Metalle nicht vorhanden. Dagegen hat Rogowski (1903) aus einem Versuche auf einen Temperatursprung an der Oberfläche eines durch einen elektrischen Strom geheizten Metalldrahtes, der von strömendem Wasser umgeben war, geschlossen. Zwei Körper L und L' stoßen in einer ebenen Fläche zusammen, der eine von ihnen hat die Temperatur t, der andere die Temperatur t'. Werden beide Körper miteinander in Berührung gebracht, so wird der eine von ihnen erwärmt, während sich der andere abkühlt. Wir können auch die Temperatur t_0 der Berührungsfläche bestimmen. Nehmen wir an, daß t_0 konstant ist, so wird die Wärmemenge, die L in der Zeiteinheit empfängt, nach (g) ausgedrückt durch

$$U = \frac{k(t_0 - t)}{\varkappa \sqrt{\pi \vartheta}}.$$

In derselben Zeit erhält L' die Wärmemenge

$$U' = \frac{k'(t_0 - t')}{\varkappa' \sqrt{\pi \vartheta}},$$

wo k' und $\varkappa'$ dieselbe Bedeutung für L' haben wie k und $\varkappa$ für L. Da aber die Grenzfläche keine Wärme enthält, so muß $U + U' = 0$ sein, oder

$$\frac{k(t_0 - t)}{\varkappa} = \frac{k'(t' - t_0)}{\varkappa'},$$

woraus

$$\text{(h)}^{1)} \qquad t_0 = \frac{t\sqrt{k c \varrho} + t'\sqrt{k' c' \varrho'}}{\sqrt{k c \varrho} + \sqrt{k' c' \varrho'}}$$

sich ergibt. Daraus ersieht man, daß unsere Annahme richtig ist, nach der die Temperatur in der Grenzfläche zwischen zwei Körpern, die sich in einer ebenen Fläche berühren, konstant ist. In Wirklichkeit müssen die beiden sich berührenden Körper unendlich groß sein, aber die Formel (h) kann auch auf kleine Körper angewandt werden, wenn wir nur die Zeit kurz nach der Berührung betrachten. Aus (h) folgt

$$\frac{t - t_0}{t_0 - t'} = \sqrt{\frac{k' c' \varrho'}{k c \varrho}}.$$

Sind t und t' die Temperaturen eines festen Körpers und eines Gases, so ist ϱ viel größer als ϱ'. Demnach ist $t_0 - t'$ sehr

[1]) L. Lorenz, Die Lehre von der Wärme. S. 178. Kopenhagen 1877.

viel größer als $t - t_0$, besonders wenn k auch größer als k' ist, während c und c' nicht sehr voneinander abweichen. Aus (h) ergibt sich also, daß die Temperatur eines erwärmten festen Körpers nur wenig von der Temperatur der Grenzschicht verschieden ist, wenn die Wärme von dem Körper auf ein ihn umgebendes Gas durch Leitung übergeht. Dagegen ist der Temperaturunterschied zwischen Grenzschicht und Gas erheblich, sodaß wir einen Temperatursprung an der Oberfläche eines festen Körpers finden, besonders wenn der Körper von einem verdünnten Gase umgeben ist. Dieser Temperatursprung ist von Smoluchowski theoretisch auf Grund der kinetischen Gastheorie untersucht worden.

§ 171. Die Abkühlung einer Kugel.

Die Temperatur im Inneren einer Kugel hänge nur vom Abstande des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkte ab. In diesem Falle nimmt nach § 165 (c) die Fouriersche Gleichung die Form

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial (r\,t)}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 (r\,t)}{\partial r^2}$$

an. Sind m, A, B willkürliche Größen, so lautet ein Integral der Gleichung (a)

$$r\,t = e^{-m^2 \varkappa^2 \vartheta} \cdot \big(A \sin(m\,r) + B \cos(m\,r)\big).$$

Weil aber $t = \infty$ wird für $r = 0$, so muß $B = 0$ sein, und wir erhalten als Integral der Gleichung (a)

$$\text{(b)} \qquad r\,t = A \cdot e^{-m^2 \varkappa^2 \vartheta} \cdot \sin(m\,r).$$

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, in welchem die Kugel in einer Mischung von Schnee und Wasser sich befindet, oder ihre Oberfläche durch irgend ein anderes Mittel die Temperatur 0^0 annimmt. Bezeichnen wir den Radius der Kugel mit R, so ist für $r = R$ auch $t = 0$ und also muß

$$\sin(m\,R) = 0$$

sein. Ist demnach p eine beliebige ganze Zahl, so folgt

$$m\,R = \pm\, p\,\pi.$$

Wir können nun setzen

$$\text{(c)}\qquad r\,t = A_1\, e^{-\left(\frac{\pi \varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} \cdot \sin \frac{\pi r}{R} + A_2\, e^{-\left(\frac{2\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} \cdot \sin \frac{2\pi r}{R} + \ldots$$

Die Konstanten $A_1, A_2 \ldots$ werden mit Hilfe der Temperaturen bestimmt, die zur Zeit $t = 0$ vorhanden sind. Zu dieser Zeit sei die Temperatur durch $f(r)$ gegeben. Wir erhalten also

$$r \cdot f(r) = A_1 \sin \frac{\pi r}{R} + A_2 \sin \frac{2\pi r}{R} + \ldots$$

Nach 168 (l) finden wir für

$$\text{(d)}\qquad A_m = \frac{2}{R} \cdot \int\limits_0^R r\, f(r) \sin \frac{m \pi r}{R}\, d r\,.$$

Ist die Temperatur konstant und zwar gleich t_0 zur Zeit $\vartheta = 0$, so folgt

$$A_m = \frac{2\, t_0}{R} \cdot \int\limits_0^R r \cdot \sin \frac{m \pi r}{R}\, d r\,,$$

und demnach (vgl. § 169)

$$A_m = -\frac{2\, t_0 R}{m \pi} \cos m \pi\,.$$

Somit ergibt sich das Resultat

$$\text{(e)}\qquad \left\{ \begin{aligned} t = \frac{2 R t_0}{\pi r} \cdot \Big[\sin \frac{\pi r}{R} \cdot e^{-\left(\frac{\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} &- \tfrac{1}{2} \sin \frac{2\pi r}{R} \cdot e^{-\left(\frac{2\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} \\ &+ \tfrac{1}{3} \sin \frac{3\pi r}{R} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

Die Mitteltemperatur t' ist

$$\text{(f)}\qquad t' = \frac{6\, t_0}{\pi^2} \cdot \left\{ e^{-\left(\frac{\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} + \tfrac{1}{4}\, e^{-\left(\frac{2\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} + \tfrac{1}{9}\, e^{-\left(\frac{3\pi\varkappa}{R}\right)^2 \vartheta} + \ldots \right\}.$$

Die Gleichung können wir auf ein Thermometer anwenden, das in eine kältere Flüssigkeit gebracht oder in ihr bewegt wird. Die Temperatur des Thermometers ist dann wesentlich durch das erste Glied der obigen Gleichung gegeben. Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist

$$\text{(g)}\qquad -\frac{d t'}{d \vartheta} = \frac{\pi^2 k\, t'}{c\, \varrho\, R^2}.$$

Wir betrachten jetzt den anderen wichtigen Fall, daß sich eine Kugel in einem leeren Raume befindet und Wärme ausstrahlt. Der Raum oder vielmehr seine Begrenzung habe die Temperatur 0^0. Die Ausstrahlung erfolge nach dem Newtonschen Gesetze und sei also proportional der Temperatur an der Kugeloberfläche. Nach (b) erhält das Integral die Form

$$rt = \sum A_m e^{-m^2 \varkappa^2 \vartheta} \cdot \sin(mr). \tag{h}$$

Bezeichnen wir mit E das Ausstrahlungsvermögen, so strahlt ein Element dS der Oberfläche in der Zeiteinheit die Wärmemenge

$$dS \cdot Et$$

aus. E soll in dem betrachteten Falle konstant sein. Dasselbe Flächenelement dS erhält aus dem Inneren der Kugel in der gleichen Zeit die Wärmemenge

$$-\frac{k \cdot dS \cdot dt}{dr}.$$

Da die von dS aufgenommene Wärmemenge gleich der abgegebenen sein muß, so erhalten wir

$$-k\frac{dt}{dr} = Et \quad \text{oder} \quad -\frac{dt}{dr} = ht, \tag{i}$$

wo der Kürze wegen $h = E/k$ gesetzt ist. Demnach ergibt sich für $r = R$

$$\sum A_m e^{-m^2\varkappa^2\vartheta} \cdot \left(\frac{m\cos(mR)}{R} - \frac{\sin(mR)}{R^2}\right) = -h\sum A_m e^{-m^2\varkappa^2\vartheta} \cdot \frac{\sin(mR)}{R}$$

oder

$$\sum A_m e^{-m^2\varkappa^2\vartheta} \cdot [mR\cos(mR) - (1-hR)\sin(mR)] = 0.$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von ϑ gelten, so muß

$$mR \cdot \cos(mR) = (1-hR) \cdot \sin(mR) \tag{k}$$

sein. Diese Gleichung muß nach m aufgelöst werden. Wir setzen $mR = x$ und haben dann

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1-hR}. \tag{l}$$

Nehmen wir ferner

$$y_1 = \operatorname{tg} x,$$

so können y_1 und x als die rechtwinkligen Koordinaten einer gewissen Kurve betrachtet werden (Fig. 164). Diese Kurve hat unendlich viele Zweige oa, πb, $2\pi c, \ldots$, für welche die geraden Linien

$$x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad x = \tfrac{3}{2}\pi \ldots$$

Asymptoten sind. Wird ferner

$$y_2 = \frac{x}{1 - hR}$$

gesetzt, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie, z. B. $o\,p\,q$ dar, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems geht.

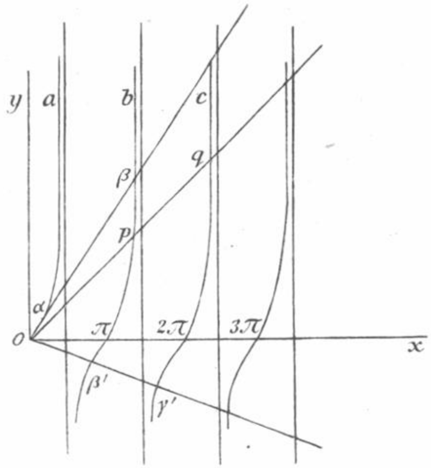

Fig. 164.

h ist sicher positiv, liegt also zwischen 0 und ∞. Wir betrachten den Fall, daß $h = 0$ ist; dann folgt

$$y_2 = x,$$

und diese Gleichung stellt eben die gerade Linie $o\,p\,q$ dar, welche die Kurve $o\,a$ im Punkte o berührt, ferner $\pi\,b$ in p, $2\,\pi\,c$ in q schneidet. Die Abszissen $0, x_1, x_2 \ldots$ sind Wurzeln der Gleichung (1). Ferner ist

$$\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}; \quad 2\pi < x_2 < \frac{5\pi}{2}; \ldots n\pi < x_n < (n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Je größer n wird, desto mehr nähert sich x_n der oberen Grenze $(n + \frac{1}{2})\pi$. Außer den positiven Wurzeln hat die Gleichung (1) auch negative Wurzeln, die dem absoluten Werte nach den positiven gleich sind. Ist nächstdem

$$0 < h < \frac{1}{R},$$

so ist

$$0 < 1 - hR < 1$$

und also

$$y_2 > x .$$

Eine solche Linie ist z. B. $o\,\alpha\,\beta$ (Fig. 164), welche die Kurven in o, α, β ... schneidet. Die Abszissen $0, x_1', x_2'\; x_3' \ldots$ dieser Punkte sind Wurzeln der Gleichung (l), und wir haben

$$0 < x_1' < \tfrac{1}{2}\pi\,; \quad \pi < x_2' < \frac{3\pi}{2}\,; \quad 2\pi < x_3' < \frac{5\pi}{2} \ldots$$

$$(n-1)\pi < x_n' < (n - \tfrac{1}{2})\pi\,.$$

Je größer h wird, desto mehr nähert sich der Winkel $\alpha\,0\,\pi$ dem Winkel $\frac{1}{2}\pi$ und desto mehr nähern sich die Wurzeln ihrer oberen Grenze. Ist $h = 1 / R$, so wird $x = 0$, und die Wurzeln werden

$$0\,, \quad \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \frac{3\pi}{2}\,, \quad \frac{5\pi}{2}\,, \ldots$$

Ist nun

$$\frac{1}{R} < h < \infty\,,$$

so wird

$$y_2 = -\frac{x}{hR-1}\,.$$

Die gerade Linie hat dann z. B. die Lage $o\,\beta'\,\gamma'$. Bezeichnen wir in diesem Falle die Wurzeln der Gleichung (l) mit $0, x_1'', x_2'' \ldots$, so haben wir

$$\tfrac{1}{2}\pi < x_1'' < \pi\,; \quad \frac{3\pi}{2} < x_2'' < 2\pi \ldots$$

Je mehr h wächst, desto mehr nähern sich die Wurzeln ihrer oberen Grenze. Ist aber $h = \infty$, so erhalten wir

$$x_1'' = \pi\,; \quad x_2'' = 2\pi\,; \ldots$$

Wir können nun die Wurzeln der Gleichung (l) als bekannt betrachten und aus denselben m bestimmen. Die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Werte von m seien

$$0, \quad m_1\,, \quad m_2\,, \ldots$$

Die negativen Wurzeln können wir fortlassen, weil die ihnen entsprechenden Glieder in (h) mit denen zusammengefaßt werden können, die von den positiven Wurzeln herrühren. Wir setzen also

$$\text{(m)} \qquad r\,t = A_1\, e^{-m_1^2 \varkappa^2 \vartheta} \sin(m_1 r) + A_2\, e^{-m_2^2 \varkappa^2 \vartheta} \sin(m_2 r) + \ldots$$

Ist die Temperatur zur Zeit $\vartheta = 0$ durch $t = f(r)$ gegeben, so haben wir

$$(\text{n}) \qquad r \cdot f(r) = A_1 \sin(m_1 r) + A_2 \sin(m_2 r) + \ldots$$

Sind nun m_a und m_b zwei Wurzeln der Gleichung (k), so werden die rechte und linke Seite der Gleichung (n) mit $\sin(m_a r)$ multipliziert. Durch Integration von 0 bis R ergibt sich

$$(\text{o}) \qquad \int_0^R r \cdot f(r) \sin(m_a r)\, dr = \sum A_b \int_0^R \sin(m_b r) \sin(m_a r)\, dr .$$

Nun ist aber

$$(\text{p}) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^R \sin(m_b r) \sin(m_a r)\, dr &= \tfrac{1}{2} \int_0^R \{\cos[(m_b - m_a) r] - \cos[(m_b + m_a) r]\} dr \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin[(m_b - m_a) R]}{m_b - m_a} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin[(m_b + m_a) R]}{m_b + m_a} \\ &= \frac{m_a \sin(m_b R) \cos(m_a R) - m_b \cos(m_b R) \sin(m_a R)}{m_b^2 - m_a^2}, \end{aligned} \right.$$

Weil aber nach (k)

$$m_a R = (1 - h R) \operatorname{tg}(m_a R), \quad m_b R = (1 - h R) \operatorname{tg}(m_b R)$$

ist, und also

$$m_a \operatorname{tg}(m_b R) = m_b \operatorname{tg}(m_a R),$$

oder

$$m_a \cdot \sin(m_b R) \cdot \cos(m_a R) = m_b \cdot \sin(m_a R) \cdot \cos(m_b R)$$

ist, so wird

$$\int_0^R \sin(m_b r) \cdot \sin(m_a r)\, dr = 0,$$

wofern m_a und m_b voneinander verschieden sind. Sind aber m_a und m_b einander gleich, so wird (p) unbestimmt. Den Wert des Ausdruckes (p) finden wir in diesem Falle dadurch, daß wir $m_b = m_a + \varepsilon$ setzen, wo ε eine kleine Größe ist. Einfacher gelangen wir zum Ziele, wenn wir den Wert des Integrales

$$\int_0^R \sin^2(m_a r)\, dr = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^R [1 - \cos(2 m_a r)]\, dr = \tfrac{1}{2} \left[R - \frac{\sin(2 m_a R)}{2 m_a} \right]$$

suchen. Daraus erhalten wir

$$A_a = \frac{2}{R} \cdot \int_0^R r \cdot f(r) \frac{\sin(m_a r)}{1 - \frac{\sin(2 m_a R)}{2 m_a R}} dr .$$

Die vollständige Lösung der Aufgabe ist demnach enthalten in

$$\text{(q)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{R r t}{2} = {} & \frac{\sin(m_1 r) e^{-m_1^2 \varkappa^2 \vartheta}}{1 - \frac{\sin(2 m_1 R)}{2 m_1 R}} \cdot \int_0^R r \cdot f(r) \sin(m_1 r) \, dr \\ & + \frac{\sin(m_2 r) e^{-m_2^2 \varkappa^2 \vartheta}}{1 - \frac{\sin(2 m_2 R)}{2 m_2 R}} \cdot \int_0^R r \cdot f(r) \sin(m_2 r) \, dr + \ldots \end{aligned} \right.$$

In dem einfachen Falle, in welchem die Temperatur der Kugel anfangs in allen Punkten gleich groß ist, haben wir $f(r) = t_0$ und finden dann

$$t_0 \cdot \int_0^R r \sin(m r) \, dr = \frac{t_0}{m^2} \cdot [\sin(m R) - m R \cos(m R)] ,$$

oder in Rücksicht auf (k)

$$t_0 \int_0^R r \sin(m r) \, dr = \frac{h R t_0 \sin(m R)}{m^2} .$$

Wir erhalten also das Resultat

$$\text{(r)} \quad \left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{4} r t = h R t_0 \cdot \Bigg(& \frac{\sin(m_1 R) \sin(m_1 r) e^{-m_1^2 \varkappa^2 \vartheta}}{m_1 [2 m_1 R - \sin(2 m_1 R)]} \\ & + \frac{\sin(m_2 R) \sin(m_2 r) e^{-m_2^2 \varkappa^2 \vartheta}}{m_2 [2 m_2 R - \sin(2 m_2 R)]} + \ldots \Bigg) . \end{aligned} \right.$$

Ist das Ausstrahlungsvermögen E und also auch h sehr klein, oder ist der Radius der Kugel klein, so ist das Produkt $(h R)$ eine kleine Größe. In diesem Falle erhalten wir aus (k), wenn der Sinus und der Kosinus in eine Reihe entwickelt und die höheren Potenzen fortgelassen werden

$$1 - \tfrac{1}{2} m_1^{\,2} R^2 = (1 - h R)(1 - \tfrac{1}{6} m_1^{\,2} R^2) ,$$

woraus sich

$$m_1^{\,2} = \frac{3 h}{R}$$

ergibt.

Die anderen Werte von m sind so sehr viel größer, daß die entsprechenden Glieder in (r) verschwinden gegen das erste Glied. Wir erhalten also

$$t = t_0 \cdot e^{-\frac{3 h \varkappa^2 \vartheta}{R}}$$

oder, wenn der Wert für h eingesetzt wird,

$$t = t_0 e^{-\frac{3 E \vartheta}{\varrho c R}}. \tag{s}$$

Diese Formel können wir auch in einfacher Weise ableiten. Die Wärmemenge, welche die Kugel in der Zeit $d\vartheta$ ausstrahlt, ist

$$4\pi R^2 E t \cdot d\vartheta.$$

Dabei nimmt die Temperatur der Kugel um $-dt$ ab; die abgegebene Wärmemenge ist also

$$-\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 c \varrho \cdot dt.$$

Demnach haben wir

$$4\pi R^2 E t \cdot d\vartheta = -\frac{4\pi}{3} \cdot R^3 c \varrho \cdot dt,$$

woraus folgt

$$t = t_0 e^{-\frac{3 E \vartheta}{c \varrho R}},$$

da die Temperatur der Kugel gleich t_0 zur Zeit $\vartheta = 0$ ist.

§ 172. Die Wärmebewegung in einem unendlich langen Zylinder.

Der Querschnitt S des Zylinders sei so klein, daß die Temperatur t in ihm konstant ist. A und B seien zwei Querschnitte, deren Abstand dx ist. Durch A strömt während der Zeit $d\vartheta$ die Wärmemenge

$$-S k \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \cdot d\vartheta.$$

Durch den Querschnitt B strömt in derselben Zeit die Wärmemenge

$$-S k \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\right) d\vartheta.$$

Der Teil des Zylinders, der zwischen A und B liegt, hat demnach die Wärmemenge

$$S k \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\, d\vartheta$$

aufgenommen. Ein Teil dieser Wärme wird durch Leitung oder Strahlung an die Umgebung abgegeben. Ist P der Umfang des Zylinders, E eine Konstante, und hat die Umgebung des Zylinders die Temperatur 0^0, so ist die durch Leitung oder Strahlung abgegebene Wärme

$$P E t \cdot dx\, d\vartheta .$$

Ein anderer Teil der zugeführten Wärme dient zur Erwärmung des Zylinders, und dieser Teil ist

$$S \cdot dx \cdot c \varrho \cdot dt .$$

Demnach erhalten wir die Gleichung

$$S k \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = S \varrho c \frac{\partial t}{\partial \vartheta} + P E t,$$

oder

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial t}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - h t$$

wenn

$$\varkappa^2 = \frac{k}{c \varrho} \quad \text{und} \quad h = \frac{P E}{S \varrho c}$$

gesetzt wird.

Wenn der Zustand in dem Zylinder oder der Stange stationär geworden ist, haben wir $\partial t / \partial \vartheta = 0$, und die Gleichung (a) erhält die Form

$$\varkappa^2 \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = h t .$$

Daraus ergibt sich

$$\text{(b)} \qquad t = A e^{\frac{x \sqrt{h}}{\varkappa}} + B e^{-\frac{x \sqrt{h}}{\varkappa}} .$$

Ist die Temperatur der Stange in zwei Punkten gegeben, so erhalten wir durch (b) die Temperatur in den Zwischenpunkten. Wir wollen annehmen, daß ein Punkt der Stange die Temperatur t_0 habe, und daß in einem sehr großen Abstande von dem betrachteten Punkte die Stange die Temperatur 0^0 habe. Dann muß $t = 0$ für $x = \infty$ und also

$$\text{(c)} \qquad t = t_0 \cdot e^{-\frac{x \sqrt{h}}{\varkappa}}$$

sein. Ist aber der Zustand nicht stationär, so muß die Gleichung (a) benutzt werden. Setzen wir in dieser Gleichung

$$t = u \cdot e^{-h\vartheta},$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{d}$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist früher angegeben. Mit Hilfe der Gleichungen (c) und (d) können wir die Abkühlung einer Stange untersuchen, die beliebig erwärmt ist.

Wir wollen hier nur den Fall betrachten, in welchem ein einzelner Querschnitt S der Stange die Temperatur t_0 hat, während an allen übrigen Stellen der Stange die Temperatur gleich Null ist. Von S breitet sich die Wärme nach beiden Seiten hin aus und nach unendlich langer Zeit ist die Temperatur im Abstande x vom Querschnitte S durch

$$t = t_0 e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}$$

gegeben. Dagegen ist zur Zeit t die Temperatur an derselben Stelle durch

$$t = t_0 e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} + u e^{-h\vartheta} \tag{e}$$

bestimmt. Hier muß u die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. u muß der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \varkappa^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

genügen;

2. für $\vartheta = 0$ muß

$$0 = t_0 e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} + u,$$

und

3. für $x = 0$ soll $u = 0$ sein.

Den Bedingungen 1 und 3 genügt

$$u = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \int_0^\infty f(\alpha) \sin(\lambda \alpha) e^{-\lambda^2 \varkappa^2 \vartheta} d\alpha .$$

Damit u auch (2) genügt, muß

$$0 = t_0 \cdot e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \int\limits_0^\infty f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\,d\alpha$$

sein. Hierzu ist erforderlich, daß

$$f(\alpha) = -t_0\, e^{-\frac{\alpha\sqrt{h}}{\varkappa}}$$

ist. Die Lösung der vorgelegten Aufgabe lautet demnach

$$t = t_0 \cdot e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} - \frac{2t_0}{\pi} \cdot e^{-h\vartheta}\int\limits_0^\infty d\lambda \sin(\lambda x) \cdot \int\limits_0^\infty \sin(\lambda\alpha)\, e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta - \frac{\alpha\sqrt{h}}{\varkappa}}\, d\alpha.$$

Ebenso wie in § 170 können wir dem Ausdrucke

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^\infty \sin(\lambda x)\cdot\sin(\lambda\alpha)\, e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta}\, d\lambda$$

die Form

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos[\lambda(x-\alpha)]\, e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta}\, d\lambda - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos[\lambda(x+\alpha)]\, e^{-\lambda^2\varkappa^2\vartheta}\, d\lambda$$

geben, und dieser letztere Ausdruck ist gleich

$$\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta}} \cdot \left(e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}\right).$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichung für t ein, so ergibt sich

$$t = t_0\left[e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} - \frac{e^{-h\vartheta}}{2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta}}\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} - e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}}\right)\cdot e^{-\frac{\alpha\sqrt{h}}{\varkappa}}\, d\alpha\right].$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes setzen wir

$$p = \frac{\alpha - x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}, \qquad \alpha = x + 2\varkappa p\sqrt{\vartheta}.$$

Dann ergibt sich

$$\frac{e^{-h\vartheta}}{2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot e^{-\frac{\alpha\sqrt{h}}{\varkappa}}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_{-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^\infty e^{-p^2}\cdot e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa} - 2p\sqrt{h\vartheta}} \cdot e^{-h\vartheta}\, dp$$

$$= \frac{e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-(p+\sqrt{h\vartheta})^2} dp = \frac{e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\sqrt{h\vartheta}-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq.$$

In derselben Weise erhalten wir

$$\frac{e^{-h\vartheta}}{2\varkappa\sqrt{\pi\vartheta}} \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(x+\alpha)^2}{4\varkappa^2\vartheta}} \cdot e^{-\frac{\alpha\sqrt{h}}{\varkappa}} d\alpha = \frac{e^{\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\sqrt{h\vartheta}+\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq,$$

und also

$$\text{(f)} \qquad t = t_0 \left[e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}} - \frac{e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{h\vartheta}-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq + \frac{e^{\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\sqrt{h\vartheta}+\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq \right].$$

Eine genaue Betrachtung dieses Ausdruckes zeigt, daß er wirklich den Verlauf der Erwärmung in einer unendlich langen Stange darstellt. Für $\vartheta = 0$ wird die untere Grenze des ersten Integrals gleich $-\infty$, der Wert des Integrals selbst ist dann gleich $\sqrt{\pi}$; die untere Grenze des zweiten Integrals wird in demselben Falle ∞, der Wert des zweiten Integrals also gleich Null. Wir erhalten demnach für $\vartheta = 0$ auch $t = 0$, und dieses sollte auch der Fall sein für alle Querschnitte der Stange, ausgenommen für den erwärmten Querschnitt. Für $x = 0$ erhalten beide Integrale denselben Wert, und also ist $t = t_0$. Für $\vartheta = \infty$ verschwinden beide Integrale, und wir haben also richtig für den stationären Wärmezustand

$$t = t_0 \cdot e^{-\frac{x\sqrt{h}}{\varkappa}}.$$

Weil

$$h = \frac{PE}{Sc\varrho}$$

ist, so wird h unendlich klein, wenn der Querschnitt der Stange unendlich groß, oder wenn das Ausstrahlungsvermögen E unendlich klein wird. Setzen wir $h = 0$ in (f), so gelangen wir zu einem früher behandelten Falle, indem

$$\text{(g)} \qquad t = t_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{\frac{x}{2\varkappa\sqrt{\vartheta}}}^{\infty} e^{-q^2} dq \right).$$

Dieses Resultat ist auch in § 170 gefunden. Der Ausdruck (g) gibt nämlich die Temperatur in einem unendlich weit ausgedehnten Körper an, der zur Zeit $\vartheta = 0$ in allen Punkten die Temperatur $t = 0$ hat, mit Ausnahme der Punkte auf der Fläche $x = 0$, für die $t = t_0$ ist.

Die Lösung (f) gilt nur für positive Werte von x; soll sie aber auch für jene Teile der Stange gelten, denen negative Werte von x entsprechen, so muß zunächst in (f) x mit $-x$ vertauscht werden.

§ 173. Die Wärmeleitung in Flüssigkeiten.

Bislang haben wir nur die Wärmebewegung in festen Körpern betrachtet. Die Resultate, die sich dabei ergeben haben, können im allgemeinen nicht auf die Flüssigkeiten übertragen werden, weil jeder Temperaturunterschied eine verschieden große Ausdehnung in den verschiedenen Teilen der Flüssigkeit hervorbringt und damit zu sogenannten Konvektionsströmungen Veranlassung gibt. Im allgemeinen werden die Temperaturunterschiede durch diese Strömungen schneller ausgeglichen als durch die Leitung allein. Die Verhältnisse sind also sehr verwickelt. Zur Untersuchung der Wärmeleitung in Flüssigkeiten kann man entweder die Masse der Flüssigkeit von oben her erwärmen oder von unten abkühlen und die Temperaturen in verschiedenen Höhen messen, oder eine sehr dünne Flüssigkeitsschicht zwischen zwei horizontale Metallplatten bringen, deren Temperaturen beobachtet werden. Für Wasser von 23,6° C. fand H. F. Weber $k = 0{,}00143$, dagegen fand R. Weber (1903) für Wasser von 20° C. $k = 00131$ (in C.G.S.-Einheiten). Wir beschränken uns darauf die allgemeinen Bewegungsgleichungen zu entwickeln, die in einzelnen einfachen Fällen angewendet werden sollen.

Wir gebrauchen die in der Hydrodynamik benutzte Bezeichnung. Die Kontinuitätsgleichung [vgl. S. 180 (d)] lautet, wenn wir das Zeitelement mit $d\vartheta$ bezeichnen,

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} + \frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho u_z)}{\partial z} = 0.$$

Die Bewegungsmenge, welche die Volumeneinheit in der Zeiteinheit aufnimmt, ist gleich der Kraft, die auf jene Volumeneinheit wirkt. Nach § 46 haben wir also

$$\text{(b)} \left\{ \begin{aligned} A &= \varrho\left(\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X, \\ B &= \varrho\left(\frac{\partial u_y}{\partial \vartheta} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y, \\ C &= \varrho\left(\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z. \end{aligned} \right.$$

Die Bezeichnung A, B, C ist der Anwendung wegen hinzugefügt, die später gemacht werden soll.

Der flüssige Körper, den wir hier betrachten wollen, sei tropfbarflüssig und inkompressibel. In diesem Falle enthält er nur Energie in Form von lebendiger Kraft oder von Wärme. Ist der Körper dagegen luftförmig, so soll er ein ideales Gas sein, das den Gesetzen von Boyle und Gay-Lussac folgt. Solche Gase können wohl zusammengedrückt werden, aber die bei der Kompression geleistete Arbeit tritt in Form von Wärme auf, sodaß die im Gase enthaltene Energie unabhängig vom Volumen ist, aber allein durch die lebendige Kraft und Temperatur bestimmt ist.

Ein Raumelement $d\omega = dx\,dy\,dz$ der Flüssigkeit, das die Gestalt eines Parallelepipeds hat, enthält zur Zeit ϑ eine Energiemenge, welche die Summe der lebendigen Kraft und der Wärmemenge ist, wenn wir die letztere mit dem mechanischen Äquivalent E der Wärmeeinheit multiplizieren. Ist Σe die Energie der Volumeneinheit, und enthält die Masseneinheit die Wärmemenge Θ, so haben wir, wenn h die Geschwindigkeit bezeichnet,

$$\Sigma e = \tfrac{1}{2} \varrho h^2 + E \varrho \Theta.$$

Während der Zeit $d\vartheta$ erhält das Volumenelement $d\omega$ die Energiemenge

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} & \dfrac{d\,\Sigma e}{d\,\vartheta} \cdot d\,\vartheta\, d\,\omega, \\ \text{indem} & \\ & \dfrac{d\,\Sigma e}{d\,\vartheta} = \frac{1}{2}\,\dfrac{d\,(\varrho\, h^2)}{d\,\vartheta} + E \cdot \dfrac{d\,(\varrho\,\Theta)}{d\,\vartheta} \end{cases}$$

ist. Der Zuwachs an Energie, den das Element $d\,\omega$ in der Zeit $d\,\vartheta$ erhält, rührt von folgenden Ursachen her:

1. von der Arbeit, welche die beschleunigend wirkenden Kräfte X, Y, Z leisten,

2. von der kinetischen Energie, die infolge des Strömens der Flüssigkeit durch die Oberfläche des Raumelementes $d\,\omega$ in das letztere hineingelangt,

3. von der Arbeit, welche die Oberflächenkräfte X_x, $X_y \ldots$ auf die Teile der Flüssigkeit ausüben, die sich in der Oberfläche des Elementes $d\,\omega$ befinden,

4. von der Wärme, welche die Teile der Flüssigkeit enthalten, die in das Raumelement $d\,\omega$ hineinströmen,

5. von der Wärme, die durch Leitung in das Element $d\,\omega$ dringt.

Diese einzelnen Energiemengen wollen wir der Reihe nach mit $e_1\, d\omega\, d\vartheta$, $e_2\, d\omega\, d\vartheta$, $e_3\, d\omega\, d\vartheta$, $e_4\, d\omega\, d\vartheta$, $e_5\, d\omega\, d\vartheta$ bezeichnen. e_1 ist also die Energiemenge, welche die Volumeneinheit in der Zeiteinheit allein durch den Einfluß der beschleunigend wirkenden Kräfte erhält. Wir wollen nun die Werte von e_1, $e_2 \ldots$ ermitteln.

Die Arbeit, welche die beschleunigend wirkenden Kräfte während der Zeit $d\,\vartheta$ ausführen, bestimmen wir folgendermaßen. Das Raumelement $d\,\omega$ hat die Masse $\varrho\, d\,\omega$ und bewegt sich in der Zeit $d\,\vartheta$ um die Strecke $u_x\, d\,\vartheta$ in der Richtung der x-Achse. Dabei leistet die Kraft X die Arbeit $\varrho\, d\,\omega \cdot X u_x\, d\,\vartheta$. Die Arbeiten, welche die Kräfte Y und Z ausführen, werden in derselben Weise bestimmt. Die betrachtete Arbeit ist also

$$\varrho\,(u_x X + u_y Y + u_z Z)\, d\omega\, d\vartheta\,.$$

Diese Arbeit haben wir aber mit $e_1\, d\omega\, d\vartheta$ bezeichnet und demnach folgt

$$\text{(d)} \qquad e_1 = \varrho\,(u_x X + u_y Y + u_z Z)\,.$$

Die kinetische Energie, welche $d\,\omega$ durch die Teile der Flüssigkeit empfängt, die während der Zeit $d\,\vartheta$ in das Element

$d\omega$ hineinströmen, bestimmen wir folgendermaßen. Die Masse, die während der Zeit $d\vartheta$ durch das Oberflächenelement $dy\,dz$ hineinströmt, ist $\varrho\, u_x\, d\vartheta \cdot dy\, dz$; die kinetische Energie dieser Masse ist also $\frac{1}{2}\varrho\, u_x\, d\vartheta \cdot dy\, dz \cdot h^2$. Setzen wir aber

$$U_x = \tfrac{1}{2}\varrho\, u_x\, h^2,$$

so ist U_x die Stromkomponente der kinetischen Energie in der Richtung der x-Achse. Die entsprechenden Stromkomponenten nach der y- und nach der z-Achse seien bzw. U_y und U_z; wir haben dann

$$U_y = \tfrac{1}{2}\varrho\, u_y\, h^2, \qquad U_z = \tfrac{1}{2}\varrho\, u_z\, h^2.$$

Nach ähnlichen Betrachtungen wie in § 62 erlangt das Volumenelement $d\omega$ in der Zeit $d\vartheta$ die Energiemenge

$$-\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) d\omega\, d\vartheta.$$

Diese Größe bezeichnen wir mit $e_2\, d\omega\, d\vartheta$ und demnach folgt

$$e_2 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial(\varrho\, u_x\, h^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, u_y\, h^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\, u_z\, h^2)}{\partial z}\right\},$$

oder

$$\begin{aligned} e_2 = &-\tfrac{1}{2} h^2 \left\{\frac{\partial(\varrho\, u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\, u_z)}{\partial z}\right\} \\ &- \varrho\, u_x \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ &- \varrho\, u_y \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ &- \varrho\, u_z \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial z} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (a) und (b) erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} e_2 = &\tfrac{1}{2} h^2 \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} + \varrho\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \vartheta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}\right) \\ &- (A\, u_x + B\, u_y + C\, u_z), \end{aligned}$$

oder einfacher

(e) $$e_2 = \tfrac{1}{2}\frac{d(\varrho\, h^2)}{d\vartheta} - (A\, u_x + B\, u_y + C\, u_z).$$

Die Energiemenge, welche die Oberflächenkräfte X_x, X_y, ... dem Elemente $d\omega$ erteilen, bestimmen wir in folgender Weise. Auf das Oberflächenelement $dy\,dz$, das $d\omega$ auf der Seite begrenzt, die nach der Richtung der negativen x-Achse liegt, wirkt die Kraft $-X_x\, dy\, dz$ in der Richtung der x-Achse. Die

Flüssigkeitsteilchen, welche während der Zeit $d\vartheta$ durch das Element $dy\,dz$ strömen, legen den Weg $u_x\,d\vartheta$ in der Richtung der x-Achse zurück. Dabei leistet die Kraft $-X_x$ die Arbeit $-X_x\,dy\,dz\cdot u_x\,d\vartheta$. Aber die Flüssigkeitsteilchen, die sich im Oberflächenelemente $dy\,dz$ befinden, haben auch tangentiale Bewegungen. In der Richtung der y-Achse legen sie unter dem Einflusse der Kraft $-Y_x\,dy\,dz$ den Weg $u_y\,d\vartheta$ zurück, wobei die Arbeit $-Y_x\,dy\,dz\cdot u_y\,d\vartheta$ geleistet wird. Ferner bewegen sich auch dieselben Teilchen in der Richtung der z-Achse, wobei die Arbeit $-Z_x\,dy\,dz\cdot u_z\,d\vartheta$ geleistet wird. Die gesamte Arbeit, welche die auf das Element $dy\,dz$ wirkenden Kräfte in der Zeit $d\vartheta$ ausführen, ist also

$$-(X_x u_x + Y_x u_y + Z_x u_z)\,dy\,dz\,d\vartheta.$$

Diesen Energiestrom in der Richtung der x-Achse wollen wir mit $U_x'\,dy\,dz\,d\vartheta$ bezeichnen; die entsprechenden Ströme in der Richtung der y- und in der Richtung der z-Achse seien bzw. $U_y'\,dx\,dz\,d\vartheta$ und $U_z'\,dx\,dy\,d\vartheta$. Dann haben wir

$$U_x' = -(X_x u_x + Y_x u_y + Z_x u_z), \qquad U_y' = -(X_y u_x + Y_y u_y + Z_y u_z),$$
$$U_z' = -(X_z u_x + Y_z u_y + Z_z u_z).$$

Die Energiemenge, die $d\omega$ dabei erhält, wird ebenso wie im vorigen Falle bestimmt und ist gleich

$$e_3\,d\omega\,d\vartheta = -\left(\frac{\partial U_x'}{\partial x} + \frac{\partial U_y'}{\partial y} + \frac{\partial U_z'}{\partial z}\right) d\omega\,d\vartheta.$$

Demnach erhalten wir

$$e_3 = \frac{\partial(X_x u_x + Y_x u_y + Z_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y u_x + Y_y u_y + Z_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z u_x + Y_z u_y + Z_z u_z)}{\partial z}.$$

Benutzen wir aber die Gleichungen (b), so ergibt sich

$$\text{(f)}\quad \left\{\begin{aligned} e_3 = {} & X_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + Z_y\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + X_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ & + Y_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + (A - \varrho X)u_x + (B - \varrho Y)u_y + (C - \varrho Z)u_z. \end{aligned}\right.$$

Die Wärmemenge, welche die einzelnen Teile der Flüssigkeit enthalten, wird mit diesen durch die Strömung fortgeführt. Durch das Flächenelement $dy\,dz$ dringt in der Zeit $d\vartheta$ in das Element $d\omega$ die Masse $\varrho\,u_x\,d\vartheta\cdot dy\,dz$ ein und bringt mit sich die Wärmemenge $\varrho\, u_x\, dy\, dz\, d\vartheta\, \Theta$, oder die Energie $E\varrho\, u_x\, dy\, dz\, d\vartheta\, \Theta$. In derselben Weise bestimmen wir die Wärmemengen, die in das Element $d\omega$ durch die anderen Grenzflächen gelangen. Benutzen wir sodann die oben angegebene Methode und setzen

$$U_x'' = E\varrho\, u_x\, \Theta, \quad U_y'' = E\varrho\, u_y\, \Theta, \quad U_z'' = E\varrho\, u_z\, \Theta,$$

so ergibt sich die Wärmemenge $e_4\, d\omega\, d\vartheta$, die das Parallelepiped $d\omega$ in der Zeit $d\vartheta$ durch die Wärmekonvektion aufnimmt, aus

$$e_4 = -\left(\frac{\partial U_x''}{\partial x} + \frac{\partial U_y''}{\partial y} + \frac{\partial U_z''}{\partial z}\right)$$

oder

$$e_4 = -E\left[\frac{\partial(\varrho\, u_x\, \Theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\, u_y\, \Theta)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\, u_z\, \Theta)}{\partial z}\right].$$

Hieraus folgt in Rücksicht auf die Gleichung (a)

$$\text{(g)} \qquad e_4 = E \cdot \frac{\partial(\varrho\, \Theta)}{\partial \vartheta} - E\varrho\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + u_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + u_z \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right).$$

Endlich erhält das Element $d\omega$ auch Wärme durch die Leitung. Die entsprechenden Strömungskomponenten sind nach § 161

$$-Ek \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad -Ek \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad -Ek \cdot \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Setzen wir die Energiemenge, die $d\omega$ in der Zeit $d\vartheta$ erlangt, gleich $e_5\, d\omega\, d\vartheta$, und nehmen wir das Leitungsvermögen als konstant an, so ist

$$\text{(h)} \qquad e_5 = Ek\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Der Zuwachs an Energie, den $d\omega$ in der Zeit $d\vartheta$ erhält, ist nach (c) durch

$$\left[\tfrac{1}{2}\frac{d(\varrho\, h^2)}{d\vartheta} + E\frac{d(\varrho\, \Theta)}{d\vartheta}\right] d\omega\, d\vartheta$$

gegeben. Zu gleicher Zeit strömt in das Element $d\omega$ die Energiemenge $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5)\, d\omega\, d\vartheta$ hinein, und wir haben also

$$\text{(i)} \qquad \tfrac{1}{2}\frac{d(\varrho\, h^2)}{d\vartheta} + E\frac{d(\varrho\, \Theta)}{d\vartheta} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5.$$

Setzen wir in diese Gleichung die für e_1, e_2, e_3 ... gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$
\text{(k)} \quad \left\{
\begin{aligned}
& E\varrho\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + u_x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + u_y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + u_z\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) - Ek\cdot\nabla^2 T \\
& = X_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + Y_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + Z_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + Z_y\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + X_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\
& \qquad + Y_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Tritt in der Flüssigkeit eine innere Reibung auf, so haben wir nach § 52 (h) und (b)

$$X_x = -p + 2\mu\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

und

$$Z_y = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \text{ usw.}$$

Wegen dieser Gleichungen können wir statt (k) schreiben

$$
\text{(l)} \quad \left\{
\begin{aligned}
& E\varrho\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} + u_x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + u_y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + u_z\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right) - Ek\cdot\nabla^2 T \\
& = -p\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\
& + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] \\
& + \mu\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Zur Bestimmung der Bewegung und der Temperatur der Flüssigkeit haben wir die fünf Gleichungen, die unter (a), (b) und (l) gegeben sind. Diese fünf Gleichungen reichen zur Bestimmung der sieben Unbekannten u_x, u_y, u_z, ϱ, p, Θ und T nicht aus. Zwei weitere Gleichungen ergeben sich in folgender Weise. Die gesamte Wärmemenge Θ, welche die Masseneinheit enthält, muß von T abhängen, und wir wollen annehmen, daß

$$\text{(m)} \qquad \Theta = cT$$

ist, wo c konstant ist und die spezifische Wärme bedeutet. Wenn die betrachtete Flüssigkeit luftförmig ist, so ist c die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Die zweite Gleichung muß die Abhängigkeit der Dichte ϱ vom Drucke und von der Temperatur angeben. Für Flüssigkeiten kann man annäherungsweise

(n) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \alpha t}$$

setzen, wo ϱ_0 die Dichte bei $t = 0^0$ C., und wo α eine Konstante ist. Für luftförmige Körper aber haben wir, wenn V das Volumen der Masseneinheit bei dem Drucke p und der Temperatur t, V_0 das Volumen derselben Masse bei dem Drucke p_0 und der Temperatur 0^0 ist,

$$p V = p_0 V_0 (1 + \alpha t) = \frac{p_0 V_0 T}{273}.$$

Da $V \varrho = 1$ und ebenso $V_0 \varrho_0 = 1$ ist, so haben wir

(o) $$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}(1 + \alpha t) = \frac{p_0}{\varrho_0}\frac{T}{273}.$$

Die Gleichung (o) in Verbindung mit den Gleichungen (a), (b), (l) und (m) dient zur Bestimmung der unbekannten Größen. Die entwickelten Gleichungen, welche die Temperatur und die Bewegung in einer Flüssigkeit bestimmen, sind sehr schwer zu integrieren, sodaß bislang noch keine Aufgabe für irgend einen Fall vollständig gelöst ist.

§ 174. Der Einfluß der Wärmeleitung auf die Stärke und Geschwindigkeit des Schalles in luftförmigen Körpern.

Nach § 173 hat man zur Bestimmung der Bewegung in einem luftförmigen Körper, in dem die Temperatur veränderlich ist, die folgenden Gleichungen:

1. Die Kontinuitätsgleichung § 173 (a), die in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} + \varrho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + u_x \frac{\partial \varrho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varrho}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

2. die Bewegungsgleichungen § 173 (b). In diesen Gleichungen setzen wir für die Kräfte X_x, X_y, ... die Werte ein, die in § 52 (b) und (h) gefunden sind, und erhalten [vgl. § 53 (a)]

$$\varrho\left(\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x$$
$$+ \tfrac{1}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

und die analogen Gleichungen für y und z,

3. die Bedingung für die Erhaltung der Energie [vgl. § 173 (l)],

4. der Zusammenhang zwischen dem Wärmeinhalte und der Temperatur [vgl. (§ 173 (m)],

5. das Gesetz von Boyle und Gay-Lussac [vgl. § 173 (o)].

Die Geschwindigkeit und die Temperaturänderung seien sehr kleine Größen; dasselbe ist der Fall mit den Differentialquotienten wie $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$ usw., und wir wollen daher die Produkte dieser Größen unberücksichtigt lassen, d. h. die Glieder von der Form

$$u_x \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} \text{ usw.}$$

fortlassen. Dadurch nehmen die Gleichungen 1—5 eine sehr viel einfachere Gestalt an. Wir erhalten nämlich

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial (\log \varrho)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Setzen wir ferner $\mu / \varrho = \mu'$, so nimmt die Gleichung unter (2) in Rücksicht auf (a) die Form an

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \mu' \cdot \nabla^2 u_x - \tfrac{1}{3} \mu' \cdot \frac{\partial^2 (\log \varrho)}{\partial x \, \partial \vartheta}.$$

Dieselben Gleichungen gelten für u_y und u_z mit Vertauschung von x bzw. durch y und z.

Eliminieren wir in der Gleichung § 173 (l) Θ durch die Beziehung $\Theta = c\,T$, und führen wir für $1/E$ das Wärmeäquivalent A der Arbeitseinheit ein, so ergibt sich, wenn wir jetzt die Temperatur mit t bezeichnen,

$$\text{(c)} \qquad c\,\varrho \cdot \frac{\partial t}{\partial \vartheta} - k \nabla^2 t = A p \frac{\partial (\log \varrho)}{\partial \vartheta}.$$

Ferner lautet die Gleichung § 173 (o)

$$\text{(d)} \qquad \frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0} \cdot (1 + \alpha t).$$

μ', k und c werden als konstante Größen betrachtet. An die Stelle von ϱ wird ϱ_0 gesetzt, wenn ϱ oder $1/\varrho$ als Koeffizient auftritt; ebenso wird in (c) p durch p_0 ersetzt. Bei diesen Substitutionen vernachlässigen wir nur unendlich kleine Größen zweiter Ordnung. Wird

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \sigma)$$

gesetzt, so erhalten wir

(e) $$\log \varrho = \log \varrho_0 + \sigma,$$

weil σ eine kleine Größe ist. Demnach erhält die Gleichung (d) die Form

$$p = p_0(1 + \sigma)(1 + \alpha t),$$

oder, weil auch t eine kleine Größe ist,

(f) $$p = p_0(1 + \sigma + \alpha t).$$

Die Gleichung (c) lautet nun

$$\frac{\partial t}{\partial \vartheta} - \frac{k}{c \varrho_0} \cdot \nabla^2 t = \frac{A p_0}{c \varrho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}.$$

Setzen wir aber

$$\varkappa^2 = \frac{k}{c \varrho_0} \quad \text{und} \quad \Theta = \frac{c \varrho_0 t}{A p_0},$$

so folgt aus der letzten Gleichung

(g) $$\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \varkappa^2 \nabla^2 \Theta = \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}.$$

Die Gleichung (b) können wir in Rücksicht auf (e) und (f) umformen in

$$\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + \frac{p_0}{\varrho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{p_0 \alpha}{\varrho_0} \frac{\partial t}{\partial x} = \mu' \nabla^2 u_x - \tfrac{1}{3} \mu' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta \, \partial x}.$$

Führen wir für t die vorhin definierte Größe Θ ein, so folgt

(h) $$\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + \frac{p_0}{\varrho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{p_0}{\varrho_0} \frac{A p_0 \alpha}{\varrho_0 c} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \mu' \nabla^2 u_x - \tfrac{1}{3} \mu' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta \, \partial x}.$$

Wird ein Gramm Luft von der Temperatur t auf $t + dt$ bei konstantem Drucke erwärmt, so ist dazu die Wärmemenge $C \cdot dt$ erforderlich, wenn C die spezifische Wärme bei konstantem Drucke ist. Ein Teil dieser Wärmemenge, nämlich $c \cdot dt$, ist zur Erwärmung verbraucht, der andere Teil dient zur Überwindung des Widerstandes bei der Ausdehnung, bei der die Arbeit $p \cdot dV$ geleistet wird. Wir haben also

$$C \cdot dt = c \cdot dt + A p \cdot dV.$$

Aus der Zustandsgleichung

$$p V = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

ergibt sich, weil p hier konstant ist,

$$p \cdot dV = p_0 V_0 \alpha \cdot dt,$$

und also

$$C = c + \frac{A p_0 \alpha}{\varrho_0}, \tag{i}$$

weil $V_0 \varrho_0 = 1$ ist.

Setzen wir endlich

$$a^2 = \frac{p_0 C}{\varrho_0 c} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{p_0}{\varrho_0},$$

so nehmen die Gleichungen (a), (b) und (c) die folgenden Formen an:

$$\text{(k)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \mu' \nabla^2 u_x - \tfrac{1}{3} \mu' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta\, \partial x}, \\ &\frac{\partial u_y}{\partial \vartheta} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \mu' \nabla^2 u_y - \tfrac{1}{3} \mu' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta\, \partial y}, \\ &\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \mu' \nabla^2 u_z - \tfrac{1}{3} \mu' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \vartheta\, \partial z}, \\ &\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \varkappa^2 \nabla^2 \Theta = \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen rühren von Kirchhoff[1]) her. Wegen der Anwendung dieser Gleichungen auf schwierigere Fälle der Fortpflanzung des Schalles sei auf Kirchhoffs Arbeit verwiesen. Wir wollen hier nur den Einfluß der Wärmeleitung und der Reibung auf die Bewegung ebener Schallwellen untersuchen. Zunächst soll aber die physikalische Bedeutung der Konstanten a und b ermittelt werden.

Wenn weder Wärmeleitung noch Reibung in der Luft stattfindet, so ist $\varkappa = 0$ und $\mu' = 0$; wenn ferner die Schwingungen in der Richtung der x-Achse erfolgen, so ist auch $u_y = u_z = 0$. Unter diesen Umständen lauten die Gleichungen (k)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u_x}{\partial \vartheta} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

---

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann. **134**. 1868.

Wird die zweite dieser drei Gleichungen in bezug auf ϑ differenziert, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \vartheta^2} + b^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \, \partial \vartheta} + (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial \vartheta} = 0.$$

Hieraus ergibt sich aber mit Hilfe der ersten und letzten der drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \vartheta^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$u_x = \cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right],$$

und dieser Ausdruck stellt eine Wellenbewegung dar, die mit der Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{p_0 C}{\varrho_0 c}} = b \sqrt{\frac{C}{c}} \tag{1}$$

fortschreitet. Dieser Wert für die Geschwindigkeit des Schalles ist von Laplace gefunden. Er weicht von dem in § 40 berechneten Werte ab, der ursprünglich von Newton gefunden ist und in der von uns benutzten Bezeichnung

$$b = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}$$

lautet. Der Unterschied zwischen beiden Formeln rührt daher, daß wir bei der ersteren auf die Erwärmung der Luft bei der Kompression und auf die Abkühlung derselben bei der Expansion Rücksicht genommen haben. Da man durch direkte Versuche das Verhältnis C/c ermittelt hat, so kann die wahre Geschwindigkeit des Schalles in der Luft berechnet werden. Für atmosphärische Luft ist bei 0° C. $C/c = 1{,}405$; demnach wird $a = 33815$ cm. Dieser Wert stimmt sehr gut mit der Erfahrung überein. Aus unseren Betrachtungen aber ergibt sich, daß b der Wert für die Schallgeschwindigkeit ist, den Newton berechnet hat, während a die wirkliche Geschwindigkeit des Schalles ist.

Eine ebene Welle pflanze sich in der Richtung der x-Achse fort; $\varkappa$ und μ' sollen von Null verschieden sein. Die Schwingungen sind parallel der x-Achse, sodaß $u_y = 0$ und

$u_z = 0$. Da u_x, Θ und σ jetzt Funktionen nur von x und ϑ sind, so lauten die Gleichungen (k):

$$\text{(m)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial\vartheta} + \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial u_x}{\partial\vartheta} + b^2\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} = \mu'\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\mu'\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial\vartheta\,\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} - \varkappa^2\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}. \end{cases}$$

Die unbekannten u_x, Θ und σ sind gewisse periodische Funktionen von ϑ. Wir wollen mit h eine reelle Größe bezeichnen und mit u', Θ' und σ' drei Größen, die nur Funktionen von x sind. Alsdann liegt es nahe

$$\text{(n)}\qquad u_x = u'\cdot e^{hi\vartheta},\quad \Theta = \Theta'\cdot e^{hi\vartheta},\quad \sigma = \sigma'\cdot e^{hi\vartheta}$$

zu setzen, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalten wir aus (m)

$$h i \sigma' + \frac{d u'}{d x} = 0,$$

$$h i u' + b^2\frac{d\sigma'}{dx} + (a^2 - b^2)\frac{d\Theta'}{dx} = \mu'\frac{d^2 u'}{dx^2} - \frac{1}{3}\mu' h i\frac{d\sigma'}{dx},$$

$$h i \Theta' - \varkappa^2\frac{d^2\Theta'}{dx^2} = h i \sigma'.$$

Aus diesen Gleichungen kann σ' eliminiert werden, und wir erhalten dann

$$\text{(o)}\quad \begin{cases} -h^2 u' + h i(a^2 - b^2)\dfrac{d\Theta'}{dx} = (b^2 + \frac{4}{3}\mu' h i)\dfrac{d^2 u'}{dx^2}, \\[2mm] \dfrac{d u'}{d x} = \varkappa^2\dfrac{d^2\Theta'}{dx^2} - h i \Theta'. \end{cases}$$

Wird die erstere der Gleichungen (o) nach x differenziert, so kann u' eliminiert werden, und wir erhalten dann folgende Differentialgleichung

$$\text{(p)}\quad \varkappa^2(b^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h i)\frac{d^4\Theta'}{dx^4} + (h^2\varkappa^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h^2 - h a^2 i)\frac{d^2\Theta'}{dx^2} - h^3 i\,\Theta' = 0.$$

Da diese Gleichung linear ist, so setzen wir

$$\text{(q)}\qquad \Theta' = e^{m x}$$

und erhalten dann

$$\text{(r)}\quad \varkappa^2 m^4(b^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h i) + m^2(h^2\varkappa^2 + \tfrac{4}{3}\mu' h^2 - h a^2 i) - h^3 i = 0.$$

Wir wollen den Exponenten m nur für den Fall bestimmen, in welchem sowohl das Wärmeleitungsvermögen als auch die innere Reibung sehr gering sind. Ist $\varkappa = 0$ und $\mu' = 0$, so erhalten wir aus (r)

$$m = -\frac{h i}{a}.$$

Setzen wir also allgemein

$$m = \frac{-h i + \delta}{a},$$

wo δ eine kleine Größe ist, deren höhere Potenzen unbeachtet bleiben können, so ergibt sich aus (r), wenn die Glieder $\varkappa^2 \mu'$, $\varkappa^2 \delta$ usw. fortgelassen werden,

$$\delta = -\frac{\frac{4}{3}\mu' h^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\varkappa^2 h^2}{2 a^2}. \tag{s}$$

Aus (n) und (q) folgt aber, daß der eine Wert für Θ

$$\Theta = e^{\frac{\delta x}{a}} \cdot e^{h i\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)}$$

ist. Den anderen Wert erhalten wir durch Vertauschung von i mit $-i$, indem auch

$$\Theta = e^{\frac{\delta x}{a}} \cdot e^{-h i\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)}$$

ist. Die halbe Summe der beiden Werte von Θ genügt ebenfalls den Bedingungen und ist zu gleicher Zeit reell, indem

$$\Theta = e^{-\frac{\left[{}^4/_3\,\mu' h^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\varkappa^2 h^2\right] x}{2 a^3}} \cdot \cos\left[h\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right] \tag{t}$$

ist. Aus dem Exponenten von e erkennt man, daß die Temperaturänderungen in der Welle abnehmen, je weiter sie fortschreitet; zu gleicher Zeit nimmt auch u_x ab. Der Schall wird also um so schwächer, je weiter die Welle vorwärts schreitet. Wenn τ die Schwingungsdauer und n die Schwingungszahl ist, so haben wir

$$h = \frac{2\pi}{\tau} = 2 n \pi.$$

Aus der Gleichung (t) ergibt sich aber, daß die höheren Töne schneller erlöschen als die tieferen.

Die mathematische Behandlung der Wärmeleitung rührt hauptsächlich von Fourier her, der nicht nur die partielle Differentialgleichung entwickelt hat, die bei der Betrachtung der Wärmeleitung zugrunde gelegt wird, sondern auch Methoden zur Lösung einer größeren Zahl von Aufgaben angegeben hat. Sein Hauptwerk ist: Théorie analytique de la Chaleur, Paris 1822. Von den neueren Werken, welche die Wärmeleitung behandeln, heben wir hervor: Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, 1894; Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895; Helmholtz Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig 1903; Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1901.