

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

**Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph**

Leipzig, 1910

Elfter Abschnitt. Die optischen Eigenschaften durchsichtiger isotroper
Körper und durchsichtiger Kristalle

und Bedeutung erlangt. Hieran schließen sich die Untersuchungen über die elektromagnetische Strahlung, die durch Einführung der *Elektronentheorie* ein weites Gebiet umfassen. Die Grundlagen der Elektronentheorie sind von H. A. Lorentz (Enzykl. d. math. Wissensch. V. 1904 S. 2) entwickelt. Eine hervorragende Darstellung der Elektronentheorie und der elektromagnetischen Strahlung ist von M. Abraham im zweiten Bande seiner Theorie der Elektrizität (Leipzig u. Berlin, 1908) gegeben. Zum Aufbau der Elektronentheorie haben J. J. Thomson, O. Heaviside, W. Voigt, E. Riecke, A. Sommerfeld, W. Wien, P. Drude, A. H. Bucherer u. a. m. Beiträge geliefert.

Elfter Abschnitt.

Die optischen Eigenschaften durchsichtiger isotroper Körper und durchsichtiger Kristalle.

§ 130. Einleitung.

Je mehr Erscheinungen in der Lehre vom Lichte auftreten und je mehr Beziehungen zwischen dem Lichte und anderen Naturerscheinungen gefunden werden, um so schwieriger wird es, eine Theorie des Lichtes zu entwickeln. Nach der *Emissionstheorie* des Lichtes, die im allgemeinen Newton zugeschrieben wird und von ihm mathematisch behandelt ist, wird die Energie durch Lichtkörperchen übertragen, die von dem leuchtenden zu dem beleuchteten Körper wirklich übergehen. Die Lichtkörperchen vermögen dabei ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Form der Energie, die sie in sich aufnehmen können, mit sich fort zu führen. Im vorigen Jahrhundert reichte die Emissionstheorie aus, die bekannten Erscheinungen zu erklären. Allein die Emissionstheorie ließ sich nur sehr schwer weiter entwickeln; dies trat besonders im Anfange des vorigen Jahrhunderts bei den großen Entdeckungen in der Optik hervor, die wir Young, Fresnel und Malus verdanken. Im Gegensatze zur Emissionstheorie entwickelte Fresnel seine erste Form der *Undulationstheorie*, die ursprüng-

lich von Huygens herrührt; hierbei werden die Lichtwellen als longitudinale betrachtet. Nach der Undulationstheorie ist der Raum zwischen dem leuchtenden und dem erleuchteten Körper mit einem materiellen Medium angefüllt. Durch die Wirkung der Teilchen dieses Mediums aufeinander wird die Energie, welche vom leuchtenden Körper ausgesandt wird, von Teilchen zu Teilchen durch das Medium fortgeleitet bis zum erleuchteten Körper. Demnach ist das betrachtete Medium der Träger der Energie während des Überganges des Lichtes von dem einen Körper zum anderen. Die Undulationstheorie hat manche Vorzüge gegenüber der Emissionstheorie. Namentlich werden die Interferenzerscheinungen in natürlicher Weise durch die Undulationstheorie erklärt, dasselbe gilt auch zum Teil von den Erscheinungen der Doppelbrechung. Aber die Erklärung der Polarisation des Lichtes durch diese Undulationstheorie bot nicht unerhebliche Schwierigkeiten, die nur dadurch überwunden werden konnten, daß man die Richtung der Lichtschwingungen senkrecht zur Strahlenrichtung annahm. Da Fresnel zugleich festhielt, daß das Medium, der *Äther*, in welchem die Lichtschwingungen fortgepflanzt werden, ein flüssiger Körper ist, so stieß er auf einen hartnäckigen Widerstand, indem namentlich Poisson mit Recht geltend machte, daß transversale Schwingungen nie in einem flüssigen Körper fortgepflanzt werden können. Obwohl die Undulationstheorie in ihrer ursprünglichen Form keineswegs einwurfsfrei und in mancher Beziehung auch unzureichend war, indem unter anderen die *Farbenzerstreuung* nicht aus ihr abgeleitet werden konnte, so war ihre Entwicklung doch der Emissionstheorie gegenüber ein gewaltiger Fortschritt.

Da es nicht möglich ist, das Licht als Schwingungen in einem elastischen Medium zu betrachten, nicht einmal unter der Annahme, wie später gezeigt wird, daß das Medium ein fester Körper ist, so müssen wir auf einem anderen Wege nach einer Erklärung der Erscheinungen in der Optik suchen. Unter den Bestrebungen nach dieser Richtung hat besonders die von Maxwell entwickelte *elektromagnetische Lichttheorie* besondere Vorzüge. Nach der Auffassung von Maxwell ist das Licht auch eine Wellenbewegung, aber es besteht in periodischen elektrischen Strömungen oder Verschiebungen in den Isolatoren,

die an die Stelle der Ätherschwingungen in der Theorie von Fresnel treten.

Der Vorteil der elektromagnetischen Lichttheorie, die die Lichtstrahlen und die Wärmestrahlen als elektromagnetische Wellen ansieht, besteht darin, daß sie von vornherein *longitudinale Wellen ausschließt und nur transversale Wellen zuläßt*. Die auf der Elastizitätstheorie beruhende mechanische Auffassung des Lichtes als Wellenbewegung eines elastischen Mediums liefert für den Übergang der Bewegung an der Grenze zweier elastischer Körper sechs Grenzbedingungen, zu deren Befriedigung man außer den transversalen Wellen auch longitudinale Wellen annehmen mußte. In der verschiedensten Weise ist in der älteren Theorie versucht, die sich hier darbietenden Schwierigkeiten zu überwinden. In der elektromagnetischen Lichttheorie gelten dieselben Grenzbedingungen, die in jedem elektromagnetischen Felde bestehen, und sie macht besondere Voraussetzungen für die Lichtschwingungen unnötig. Ausschlaggebend für die Annahme der elektromagnetischen Theorie des Lichtes ist aber der Umstand, daß diese Theorie gestattet, die Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und bisweilen auch in ponderablen Körpern aus reinen elektrischen Messungen heraus im voraus zu berechnen.

Nach der elektromagnetischen Lichttheorie ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}},$$

wenn $\mu = 1$ gesetzt wird. *Im freien Äther ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gleich dem Verhältnis c des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maßsystem.* Die sorgfältigsten Messungen der Lichtgeschwindigkeit haben $v = 2,999 \cdot 10^{10}$ cm/sek ergeben, während andererseits aus elektromagnetischen Versuchen $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek gefunden ist.

In einem Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ ist die Lichtgeschwindigkeit

$$(a) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Bezeichnen wir mit N_0 den Brechungsindex des Isolators gegen das Vakuum, so ist

$$(b) \quad N_0 = \sqrt{\varepsilon} = \frac{c}{v},$$

d. h. das Quadrat des Brechungsindex muß gleich der Dielektrizitätskonstanten sein. Diese Maxwellsche Relation ist schon auf S. 437 gefunden; sie kann nicht streng gelten, weil N_0 in allen Körpern von der Schwingungsdauer oder von der Farbe abhängt, während ε nach der Definition hiervon unabhängig ist. Da bei den Gasen der Brechungsindex nur in sehr geringem Maße von der Farbe abhängt, so finden wir bei ihnen die Gleichung (b) bestätigt. Dagegen ist bei vielen festen Körpern (Glas) und bei Flüssigkeiten (Alkohol, Wasser) ε erheblich größer als N_0^2 . Um diese Abweichungen der Theorie zu beseitigen, muß man die seither als konstant angesehene Größe ε als abhängig von der Schwingungsdauer ansehen.

§ 131. Die Formeln von Fresnel.

Da die Formeln von Fresnel für die nachfolgenden Betrachtungen große Bedeutung haben, so wollen wir sie zunächst entwickeln. Hier seien nur kurz noch die Hauptsätze der Optik erwähnt, die für alle isotropen und vollkommen durchsichtige Körper gelten. Die Kenntnis dieser Hauptsätze ist für die Ableitung der Formeln von Fresnel notwendig, aber nicht hinreichend.

I. Das Licht pflanzt sich in einem und demselben Medium mit einer Geschwindigkeit fort, die auch nach den Interferenzversuchen von Lippich und Ebert von der Intensität der Lichtquelle unabhängig ist, aber von der Wellenlänge des Lichtes abhängt. In verschiedenen Medien hat die Lichtgeschwindigkeit verschiedene Werte.

II. Trifft ein Lichtstrahl auf eine ebene Fläche, die zwei verschiedene Medien voneinander trennt, so tritt eine *Brechung* und eine *Reflexion* ein. Alle drei Strahlen, d. h. der einfallende, der gebrochene und der reflektierte Strahl liegen in einer und derselben Ebene, die zur brechenden Fläche senkrecht ist. Ist φ der Einfallswinkel, ψ der Brechungswinkel und φ' der Reflexionswinkel, so haben wir

$$\varphi = \varphi', \quad N = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Das *Brechungsverhältnis* N ist für homogenes Licht konstant.

III. Ist V_1 die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium (1), in welchem die Reflexion eintritt, und V_2 die Geschwindigkeit in dem Medium (2), in dem die Brechung stattfindet, so ist

$$N = \frac{V_1}{V_2}, \quad \text{und also} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Der Brechungsexponent beim Übergang des Lichtes von einem Medium 1 zu einem Medium 2 ist also gleich dem Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in 1 und 2.

Im Vakuum ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Farbe, was in Übereinstimmung mit der Tatsache steht, daß beim Beginn und Ende der Verfinsterung der Jupitermonde diese dem Beobachter nicht farbig erscheinen. In der Luft ist der Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Strahlen verschiedener Farbe wegen der geringen Dispersion der Luft praktisch genommen gleich Null.

IV. Das Licht kann als eine Wellenbewegung in einem Medium betrachtet werden, das wir als Äther bezeichnen. Ob dabei an die Körper selbst oder an eine unbekannt Substanz gedacht wird oder vielmehr an Veränderungen im elektrischen oder magnetischen Zustande des Körpers, ist hier ganz gleichgültig. Wir wollen nur ausdrücken, daß die Lichterregung durch ein oder mehrere Glieder von der Form

$$a = A \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \delta \right)$$

ausgedrückt werden kann, wo A die *Amplitude* oder *Schwingungsweite*, τ die Schwingungsdauer, δ die Phase und t die veränderliche Zeit ist. Die *Schwingungsenergie* ist dem Quadrate der Amplitude A proportional und bestimmt für die sichtbaren Strahlen die sogenannte *Lichtintensität*.

V. Die Bewegung des Äthers ist senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles, d. h. wir haben *transversale Schwingungen*. Die Bewegung kann entweder immer in derselben Richtung erfolgen, dann haben wir einen *geradlinig polarisierten Strahl*, oder zwei oder mehrere Bewegungen der eben angegebenen Art versetzen die Ätherteilchen in eine Kurvenbewegung, die im allgemeinen eine *elliptische* ist. Lichtstrahlen der letzteren Art heißen *elliptisch polarisiert*. Ist die Bahn des Äther-

teilchens ein Kreis, so ist das Licht *zirkular polarisiert*. Über das *natürliche Licht* hatte Fresnel die Vorstellung, daß seine Schwingungen ebenfalls senkrecht zur Richtung des Strahles und geradlinig stattfinden, daß sie aber innerhalb einer sehr kurzen Zeit nach allen Richtungen erfolgen ohne irgend eine derselben zu bevorzugen.

Der polarisierte Strahl muß in den verschiedenen zu seiner Richtung senkrechten Richtungen ungleiche Eigenschaften besitzen. Nach der Vorstellung von Fresnel ist der Strahl in einer bestimmten Ebene polarisiert, wenn seine Schwingungen senkrecht zu dieser Ebene erfolgen.

Im Nachfolgenden wollen wir die von Fresnel abgeleiteten Formeln für die Amplitude und Stärke der reflektierten und gebrochenen Strahlen wiedergeben. Gegen die Theorie von Fresnel sind mit Recht viele Einwände erhoben. Jedoch führt die Theorie in einfachen Fällen zu Formeln, die durch die Beobachtung bestätigt werden. Die Fresnelschen Formeln finden jedoch keine Bestätigung, wenn es sich um Reflexion von Strahlen an Körpern handelt, deren Absorptionsvermögen für die betrachteten Strahlen sehr groß ist; sie gelten also nicht für die Reflexion der Strahlen an Metallen und an Substanzen, die eine anomale Dispersion zeigen.

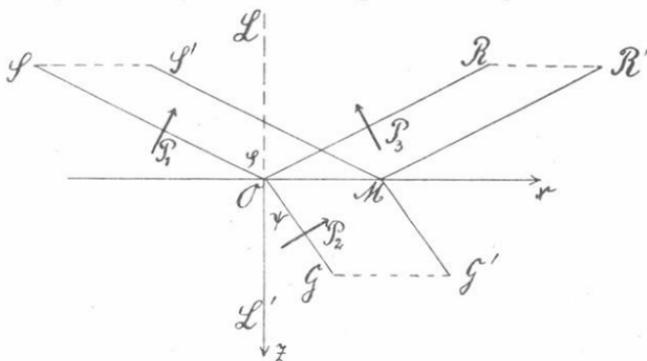


Fig. 131.

Die Ebene OM (Fig. 131) sei die Trennungsebene zweier isotroper durchsichtiger Medien. Die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium über der Trennungsebene sei $SO = V_1$, die Geschwindigkeit des Lichtes in dem Medium unterhalb der Trennungsebene sei $OG = V_2$. N sei der Brechungsindex des

Strahles beim Übergange vom ersten zum zweiten Medium, also ist $V_1 = NV_2$. Der Punkt O in der oberen Trennungsfäche werde zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, die z -Achse sei senkrecht zur Trennungsfäche, und die x -Achse liege in der *Einfallsebene*, d. h. in der Ebene, die durch das Einfallslot LL' und den einfallenden Strahl SO gelegt ist. Die y -Achse ist also senkrecht zur Einfallsebene und nach dem Leser hin gerichtet. Ferner sei SO der einfallende, OR der reflektierte, und OG der gebrochene Strahl. Der Einfallswinkel ist mit φ , der Brechungswinkel mit ψ bezeichnet. Die Amplitude der Schwingungen des einfallenden Strahles sei mit A_1 , diejenige der Schwingungen des gebrochenen und reflektierten Strahles bzw. A_2 und A_3 bezeichnet. Die Schwingungsebenen dieser Strahlen bilden mit der Einfallsebene Winkel, die bzw. mit α_1 , α_2 , α_3 bezeichnet werden sollen. Die Komponenten der Bewegung nach den Koordinatenachsen sind für den einfallenden Strahl X_1, Y_1, Z_1 , für den gebrochenen Strahl X_2, Y_2, Z_2 und für den reflektierten Strahl X_3, Y_3, Z_3 . Ferner ist es zweckmäßig, eine Bezeichnung für die Bewegungskomponenten einzuführen, die in der Einfallsebene liegen und zur Richtung der Strahlen senkrecht sind. Diese Bewegungskomponenten sollen für die drei Strahlen bzw. mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden. Wir haben dann in Rücksicht auf Fig. 131 die folgenden Gleichungen:

$$(a) \begin{cases} Z_1 = -P_1 \sin \varphi, & Z_2 = -P_2 \sin \psi, & Z_3 = -P_3 \sin \varphi; \\ X_1 = P_1 \cos \varphi, & X_2 = P_2 \cos \psi, & X_3 = -P_3 \cos \varphi; \\ A_1^2 = P_1^2 + Y_1^2, & A_2^2 = P_2^2 + Y_2^2, & A_3^2 = P_3^2 + Y_3^2; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Y_1}{P_1}; & \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Y_2}{P_2}; & \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{Y_3}{P_3}. \end{cases}$$

Um P_2 und P_3 , sowie Y_2 und Y_3 durch P_1 und Y_1 ausdrücken zu können, müssen gewisse Annahmen über das Verhalten des Lichtes beim Übergange von dem einen Medium zum anderen gemacht werden. In dieser Hinsicht ging Fresnel von folgenden Voraussetzungen aus:

1. *Beim Vorgange der Reflexion und Brechung geht kein Licht verloren oder die Summe der reflektierten und der gebrochenen Lichtintensität ist gleich der einfallenden.* Hierin ist nur der Satz von der Erhaltung der Energie ausgesprochen,

indem die kinetische Energie des einfallenden Strahles gleich der kinetischen Energie des reflektierten und gebrochenen Strahles ist. $OMSS'$ (Fig. 131) sei ein Zylinder, dessen Grundfläche OM die Größe f hat und dessen Seitenlinie SO die Lichtgeschwindigkeit V_1 ist. Bezeichnen wir mit ρ_1 die Dichte des schwingenden Mediums, so hat die in dem betrachteten Zylinder enthaltene Lichtmenge die kinetische Energie L_1

$$L_1 = \frac{1}{2} \rho_1 V_1 \cdot \cos \varphi \cdot f A_1^2.$$

Nach Verlauf einer Sekunde ist diese kinetische Energie auf den reflektierten und den gebrochenen Strahl verteilt. Die kinetische Energie L_3 in dem reflektierten Strahle ist

$$L_3 = \frac{1}{2} \rho_1 V_1 \cdot \cos \varphi \cdot f A_3^2,$$

und die kinetische Energie L_2 in dem gebrochenen Strahle ist

$$L_2 = \frac{1}{2} \rho_2 V_2 \cdot \cos \psi \cdot f A_2^2,$$

wenn ρ_2 die Dichte des schwingenden Mediums unterhalb der ebenen Grenzfläche ist. Nach der oben ausgesprochenen Annahme ist

$$L_1 = L_2 + L_3 \quad \text{oder} \quad \rho_1 V_1 (A_1^2 - A_3^2) \cos \varphi = \rho_2 V_2 A_2^2 \cos \psi.$$

Beachten wir die Beziehungen

$$V_1 = NV_2 \quad \text{und} \quad \sin \varphi = N \sin \psi,$$

so können wir der letzten Gleichung die Form

$$(b) \quad \rho_1 (A_1^2 - A_3^2) \sin \varphi \cos \varphi = \rho_2 A_2^2 \sin \psi \cos \psi$$

geben. Liegen die Schwingungen des Strahles in der Einfallsebene, so ist $A_1 = P_1$ usw., und wir erhalten

$$(c) \quad \rho_1 (P_1^2 - P_3^2) \sin \varphi \cos \varphi = \rho_2 P_2^2 \sin \psi \cos \psi.$$

Sind aber die Schwingungen des Lichtstrahles zur Einfallsebene senkrecht, so ist $A_1 = Y_1$ usw., und also

$$(d) \quad \rho_1 (Y_1^2 - Y_3^2) \sin \varphi \cos \varphi = \rho_2 Y_2^2 \sin \psi \cos \psi.$$

2. Fresnel nahm ferner an, daß die der Grenzfläche parallelen Schwingungskomponenten des Lichtes unmittelbar unterhalb und oberhalb der Grenzfläche gleich groß sind. Liegen die Lichtschwingungen in der Einfallsebene, so ist also nach dieser Annahme an der Grenzfläche

$$X_1 + X_3 = X_2,$$

oder

$$(e) \quad (P_1 - P_3) \cos \varphi = P_2 \cos \psi.$$

Sind die Schwingungen aber zur Einfallsebene senkrecht, so erhalten wir an der Grenzfläche

$$(f) \quad Y_1 + Y_3 = Y_2.$$

Aus (c) und (e) ergibt sich

$$(g) \quad \begin{cases} P_2 = P_1 \cdot \frac{2 \varrho_1 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho_1 \sin \varphi \cos \psi + \varrho_2 \cos \varphi \sin \psi}, \\ P_3 = P_1 \cdot \frac{\varrho_2 \cos \varphi \sin \psi - \varrho_1 \sin \varphi \cos \psi}{\varrho_1 \sin \varphi \cos \psi + \varrho_2 \cos \varphi \sin \psi}. \end{cases}$$

Ferner erhalten wir aus (d) und (f)

$$(h) \quad \begin{cases} Y_2 = Y_1 \cdot \frac{2 \varrho_1 \sin \varphi \cos \varphi}{\varrho_1 \sin \varphi \cos \varphi + \varrho_2 \sin \psi \cos \psi}, \\ Y_3 = Y_1 \cdot \frac{\varrho_1 \sin \varphi \cos \varphi - \varrho_2 \sin \psi \cos \psi}{\varrho_1 \sin \varphi \cos \varphi + \varrho_2 \sin \psi \cos \psi}. \end{cases}$$

3. Da das Verhältnis zwischen ϱ_1 und ϱ_2 gänzlich unbekannt ist, so mußte Fresnel eine dritte Annahme machen, und zwar setzte er *in verschiedenen Medien gleiche Elastizität, aber verschiedene Dichte des Äthers voraus*. Demgegenüber hat F. E. Neumann die Annahme gemacht, *daß die Dichte des Äthers für alle Medien dieselbe, daß aber die Elastizität für verschiedene Medien verschieden sei*. Weil Fresnel den Äther als einen luftförmigen Körper betrachtete, so war seine Annahme natürlich, aber sie ist nicht berechtigt, wie wir vorhin schon bemerkt haben. Fresnel nahm ferner an, daß V_1 und V_2 in derselben Weise wie in der Elastizitätslehre ausgedrückt werden könnten [vgl. § 40 (k)] und setzte demgemäß

$$V_1 = \sqrt{\frac{N_1}{\varrho_1}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{N_2}{\varrho_2}}.$$

Ist aber nach der Annahme Fresnels $N_1 = N_2$, so erhalten wir

$$(i) \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{V_1^2}{V_2^2} = N^2,$$

wobei N der Brechungsindex ist.

Beachten wir, daß

$$\sin(a + b) \cos(a - b) = \sin a \cos a + \sin b \cos b,$$

$$\sin(a - b) \cos(a + b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b$$

ist, so nehmen in Rücksicht auf die dritte Annahme die Gleichungen (g) und (h) die Form an:

$$(k) \quad \begin{cases} P_2 = P_1 \cdot \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}, \\ P_3 = P_1 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}; \\ Y_2 = Y_1 \cdot \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}, \\ Y_3 = -Y_1 \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \end{cases}$$

Diese Formeln für die Amplituden des reflektierten und durchgehenden Lichtes rühren von Fresnel her. Der Versuch allein kann über den Wert dieser Formeln entscheiden. Die Beobachtungen von Jamin zeigen, daß diese Formeln von Fresnel streng wahrscheinlich nur für sehr wenige Körper gelten. Von großem Einflusse ist dabei der Zustand der Oberfläche der Körper.

Die Schwingungsebene des einfallenden Strahles bildet, wie oben angegeben, mit der Einfallsebene den Winkel α_1 , während der entsprechende Winkel für den reflektierten Strahl α_3 ist. Brewster hat gefunden, daß

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)}$$

ist. Dieselbe Gleichung ergibt sich auch aus den Fresnelschen Formeln, indem

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{Y_3}{P_3} = -\operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)}$$

ist. Diese Übereinstimmung spricht also für die Richtigkeit der Fresnelschen Formeln.

Nimmt φ den besonderen Wert φ_0 an, für welchen $\varphi_0 + \psi = \pi/2$ ist, so ist $P_3 = 0$. In diesem Falle, wo $\operatorname{tg} \varphi_0 = N$ ist, wird die zur Einfallsebene parallele Schwingung überhaupt nicht reflektiert. Fällt also ein polarisierter Licht-

strahl auf die Grenzfläche unter dem Winkel φ_0 , den wir als *Polarisationswinkel* bezeichnen, so wird nur die zur Einfallsebene senkrechte Komponente dieser Schwingung reflektiert. Wenn $\varphi_0 + \psi = \pi/2$ ist, so liegt der reflektierte Strahl senkrecht zum gebrochenen Strahl. Ist dieses der Fall, so wird das einfallende Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, dessen Schwingungen also in der Einfallsebene liegen, überhaupt nicht reflektiert (Gesetz von Brewster). Dieses Gesetz gilt jedoch nur für normale Substanzen und nicht für die Reflexion an Metallen oder an Substanzen, die das Licht stark absorbieren oder anomale Dispersion zeigen.

Fresnel nahm an, daß die Elastizität des schwingenden Mediums zu beiden Seiten der brechenden Fläche dieselbe ist. Diese Annahme ist ziemlich willkürlich. Demgegenüber ging F. E. Neumann von der Annahme aus, daß $\varrho_1 = \varrho_2$ ist. Wir erhalten dann aus (g) und (h)

$$(l) \quad \begin{cases} P_2 = P_1 \cdot \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, & Y_2 = Y_1 \cdot \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}, \\ P_3 = -P_1 \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, & Y_3 = Y_1 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}. \end{cases}$$

§ 132. Reflexion und Brechung an der Grenze isotroper durchsichtiger Körper.

Bei der Betrachtung solcher Körper, in denen keine Absorption stattfindet und in denen die Lichtgeschwindigkeit nach allen Richtungen gleich groß ist, gehen wir aus von den Gleichungen § 114 (d) und (e) und setzen für Isolatoren $\sigma = 0$ und $\mu = 1$. Da $\operatorname{div} \mathfrak{S} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$, also das Vorhandensein freier Ladungen ausgeschlossen wird, so ist, wenn wir die Komponenten der elektrischen Kraft mit X, Y, Z , die der magnetischen Kraft mit α, β, γ bezeichnen,

$$(a) \quad \begin{cases} \nabla^2 \alpha = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, & \nabla^2 \beta = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}, & \nabla^2 \gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}; \\ \nabla^2 X = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, & \nabla^2 Y = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, & \nabla^2 Z = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Hinzutreten also noch die Gleichungen

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \\ \text{und} \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

In § 115 haben wir gefunden, daß die Differentialgleichungen (a) Wellen darstellen, die sich mit der Geschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon}$ fortpflanzen, welche wir mit V bezeichnen wollen.

Die Bedingungen an der Grenzfläche zweier Medien ergeben sich aus § 117.

Eine ebene Lichtwelle bewege sich in einer Richtung, die mit den Achsen Winkel bildet, deren Kosinus l, m, n sind. Im Anfangspunkte sei die elektrische Kraft ausgedrückt durch

$$f = F \cdot \cos \frac{2\pi t}{\tau}.$$

In einem Punkte, dessen Koordinaten x, y und z sind, ist die elektrische Kraft

$$(c) \quad f = F \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{lx + my + nz}{V} \right) \right\},$$

denn die Phase hat den gleichen Betrag in den Ebenen

$$lx + my + nz = \text{konst.}$$

Diese Gleichung stellt die Wellenebenen dar. l, m und n sind die Richtungskosinus der Normalen zu den Wellenebenen, indem

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

ist. Hat F die Komponenten F_x, F_y, F_z , so ist

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = F_x \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{lx + my + nz}{V} \right) \right\}, \\ Y = F_y \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{lx + my + nz}{V} \right) \right\}, \\ Z = F_z \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{lx + my + nz}{V} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

Diese Ausdrücke für X, Y, Z genügen den Gleichungen (a). Damit auch die zweite der Gleichungen (b) erfüllt ist, muß

$$F_x l + F_y m + F_z n = 0$$

sein, d. h. die Richtung der elektrischen Kraft ist zur Fortpflanzungsrichtung der elektrischen Welle senkrecht. Die Welle

ist also eine *Transversalwelle*. Auch die magnetische Kraft ist zur Fortpflanzungsrichtung senkrecht.

Die xy -Ebene (Fig. 132) sei die Trennungsfäche zweier Körper 1 und 2, deren Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 sind. Im Körper 1 falle eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel φ auf die Grenzfläche, und zwar sei die xz -Ebene die Einfallsebene. Dann ist

$$(e) \quad l = \sin \varphi, \quad m = 0, \\ n = \cos \varphi.$$

Die elektrische Kraft F der einfallenden Welle sei in zwei Komponenten F_p und F_s zerlegt, von denen F_p parallel und F_s senkrecht zur Einfallsebene ist. Die Amplitude F_s ist parallel zur y -Achse. Wir haben also in Rücksicht auf (e) für die y -Komponente Y_e der elektrischen Kraft der einfallenden Welle

$$(f) \quad Y_e = F_s \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\},$$

indem $V_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Körper 1 ist. Der Index e bezieht sich auf die einfallende Welle. F_p ist senkrecht zum Lichtstrahl, da wir es mit transversalen Wellen zu tun haben. Die Komponenten von F_p nach der x - und nach der z -Achse sind in Rücksicht auf Fig. 132 bzw.

$$F_p \cos \varphi \quad \text{und} \quad -F_p \sin \varphi.$$

Also finden wir nach (a) für die x - und für die z -Komponente der elektrischen Kraft der einfallenden Welle

$$(g) \quad \begin{cases} X_e = F_p \cos \varphi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}, \\ Z_e = -F_p \sin \varphi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}. \end{cases}$$

Alle Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes in einem isotropen Isolator sind durch die Gleichungen

$$(h) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}, & \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, & \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{cases}$$

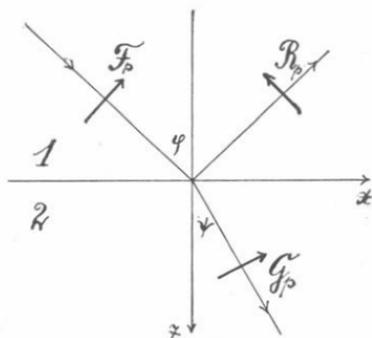


Fig. 132.

gegeben. Diese Gleichungen ergeben sich aus den mit (b) und (c) auf S. 429 bezeichneten, wenn wir die am Anfange dieses Paragraphen eingeführte Bezeichnung anwenden. Aus den Gleichungen (h) erhalten wir die Komponenten der magnetischen Kraft der einfallenden Welle. Wir finden

$$(i) \quad \begin{cases} \alpha_e = -F_s \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}, \\ \beta_e = F_p \sqrt{\epsilon_1} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}, \\ \gamma_e = F_s \sqrt{\epsilon_1} \sin \varphi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}. \end{cases}$$

Liegt die elektrische Kraft in der xz -Ebene, d. h. ist $F_s = 0$, jedoch $F_p > 0$, dann ist nach (i) $\alpha_e = \gamma_e = 0$, aber β_e nicht gleich Null. Für die in der Einfallsebene liegende elektrische Kraft finden wir eine zugehörige und zur Einfallsebene senkrechte magnetische Kraft. Ist aber $F_p = 0$ und F_s von Null verschieden, so haben wir nach (f) eine zur Einfallsebene senkrechte elektrische Kraft, und nach (i) eine in der Einfallsebene liegende magnetische Kraft.

Bezeichnet man mit φ' den Winkel zwischen der Richtung der z -Achse und der Fortpflanzungsrichtung der reflektierten Welle, so haben wir für die Richtungskosinus der Normalen der reflektierten Welle

$$l = \sin \varphi', \quad m = 0, \quad n = \cos \varphi'.$$

Demnach erhalten wir für die Komponenten der elektrischen Kraft in der reflektierten Welle, ebenso wie in (f) und (g)

$$(k) \quad \begin{cases} X_r = R_p \cos \varphi' \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}, \\ Y_r = R_s \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}, \\ Z_r = -R_p \sin \varphi' \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}, \end{cases}$$

wobei R_p und R_s dieselbe Bedeutung für die reflektierte Welle haben wie F_p und F_s für die einfallende Welle.

Für die in den Körper 2 übergehende gebrochene Welle haben wir

$$l = \sin \psi, \quad m = 0, \quad n = \cos \psi,$$

und also, wenn die elektrische Kraft G der gebrochenen Welle bzw. die Komponenten G_p und G_s hat:

$$(l) \quad \begin{cases} X_g = G_p \cos \psi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}, \\ Y_g = G_s \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}, \\ Z_g = -G_p \sin \psi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}. \end{cases}$$

Die Komponenten der magnetischen Kraft der reflektierten Welle ergeben sich aus (k) und (h), nämlich

$$(m) \quad \begin{cases} \alpha_r = -R_s \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi' \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}, \\ \beta_r = R_p \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}, \\ \gamma_r = R_s \sqrt{\varepsilon_1} \sin \varphi' \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right) \right\}. \end{cases}$$

Für die Komponenten der magnetischen Kraft der gebrochenen Welle finden wir aus (h) und (l)

$$(n) \quad \begin{cases} \alpha_g = -G_s \sqrt{\varepsilon_2} \cos \psi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}, \\ \beta_g = G_p \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}, \\ \gamma_g = G_s \sqrt{\varepsilon_2} \sin \psi \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right) \right\}. \end{cases}$$

Wir setzen an die Stelle der trigonometrischen Form

$$(o) \quad \cos \left\{ \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right) \right\}$$

den Ausdruck

$$(p) \quad e^{k\iota \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right)},$$

wo $\iota = \sqrt{-1}$ und $k = 2\pi/\tau$ bedeutet. Aus dem Schlußresultate wird nur der reelle Teil von (p), nämlich (o), entnommen. Beide Ausdrücke (o) und (p) genügen derselben Differentialgleichung, und deshalb kann bei unserer Rechnung der eine an die Stelle des anderen treten. Wir erhalten somit für die Gleichungen (f), (g), (k) und (l) die folgenden

$$(q') \quad \begin{cases} X_e = F_p \cos \varphi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right)}, \\ Y_e = F_s \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right)}, \\ Z_e = -F_p \sin \varphi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1} \right)}; \end{cases}$$

$$(q'') \quad \begin{cases} X_r = R_p \cos \varphi' \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right)}, \\ Y_r = R_s \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right)}, \\ Z_r = -R_p \sin \varphi' \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{V_1} \right)}; \end{cases}$$

$$(q''') \quad \begin{cases} X_g = G_p \cos \psi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right)}, \\ Y_g = G_s \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right)}, \\ Z_g = -G_p \cdot \sin \psi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right)}. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (q'), (q'') und (q''') sind die Komponenten der elektrischen Kräfte in der einfallenden, reflektierten und gebrochenen Welle dargestellt.

An der Grenzfläche zwischen dem Körper 1 und dem Körper 2, d. h. für $z = 0$, haben wir

$$X_e + X_r = X_g,$$

also

$$F_p \cdot \cos \varphi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi}{V_1} \right)} + R_p \cdot \cos \varphi' \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \varphi'}{V_1} \right)} \\ = G_p \cdot \cos \psi \cdot e^{k t \left(t - \frac{x \sin \psi}{V_2} \right)}.$$

Diese Gleichung muß an der Grenzfläche ($z = 0$) für jeden Wert von t und für alle zusammengehörigen Werte von x und y bestehen. Dazu ist erforderlich, daß die Exponenten aller drei Funktionen einander gleich sind, oder, daß

$$(r) \quad \frac{\sin \varphi}{V_1} = \frac{\sin \varphi'}{V_1} = \frac{\sin \psi}{V_2}$$

ist. Zunächst finden wir $\sin \varphi = \sin \varphi'$, und also $\varphi' = \pi - \varphi$, d. h. *der einfallende Strahl und der reflektierte Strahl liegen symmetrisch zum Einfallslot (Reflexionsgesetz).*

Ferner haben wir

$$(s) \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{V_1}{V_2} = N,$$

wo N der *Brechungsindex* des Körpers 2 gegen den Körper 1 ist. Wir haben damit das Snelliussche *Brechungsgesetz* gefunden. *Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene. Der Sinus des Einfallswinkels verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den zugehörigen Körpern.*

Um R_p , R_s , G_p und G_s aus F_p und F_s zu bestimmen, benutzen wir die an der Grenzfläche geltenden Bedingungen (vgl. S. 443). Diese lauten in Rücksicht auf (r), und weil $\cos \varphi = -\cos \varphi'$,

$$(t) \quad \begin{cases} (F_p - R_p) \cos \varphi = G_p \cos \psi, \\ F_s + R_s = G_s. \end{cases}$$

Da ferner die der Grenzfläche parallelen Komponenten der magnetischen Kräfte zu beiden Seiten an der Grenzfläche gleich sein müssen, also für $z = 0$

$$\alpha_e + \alpha_r = \alpha_g \quad \text{und} \quad \beta_e + \beta_r = \beta_g$$

sein muß, so haben wir ferner noch zur Berechnung der Amplituden der elektrischen Kräfte die Gleichungen

$$(t') \quad \begin{cases} (F_s - R_s) \sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi = G_s \sqrt{\varepsilon_2} \cos \psi, \\ (F_p + R_p) \sqrt{\varepsilon_1} = G_p \sqrt{\varepsilon_2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (t) und (t') erhalten wir

$$(t'') \quad \begin{cases} R_s = F_s \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \psi}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \psi}, & G_s = 2 F_s \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \psi}, \\ R_p \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right) = F_p \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right), & F_p = \frac{1}{2} G_p \left(\frac{\cos \psi}{\cos \varphi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right). \end{cases}$$

Das Verhältnis $\sqrt{\varepsilon_2}/\sqrt{\varepsilon_1}$ ist gleich dem Brechungsindex N vom Körper 2 gegen den Körper 1, also

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = N = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Demnach erhalten wir

$$(u) \quad \begin{cases} R_s = -F_s \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, & G_s = F_s \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \\ R_p = F_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}, & G_p = F_p \frac{2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}. \end{cases}$$

Wir gelangen also zu denselben Formeln, die die elastische Lichttheorie (vgl. S. 490) geliefert hat. Die Gleichungen (u) sind die von Fresnel aufgestellten, nach denen man die Intensität und Phase der reflektierten und gebrochenen Welle aus den Eigenschaften der einfallenden Welle berechnen kann.

Aus (u) folgt, daß $R_p = 0$ ist, wenn $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \infty$ oder $\varphi + \psi = \pi/2$ und $\varphi - \psi = \pi/2$. Also ist $R_p = 0$, wenn der reflektierte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht. Dagegen kann R_s nicht gleich Null werden.

Aus $\varphi + \psi = \pi/2$ folgt ferner, daß $\cos \varphi = \sin \psi$ ist. Da aber $\sin \varphi / \sin \psi = N$ ist, so haben wir für $R_p = 0$

$$(v) \quad \operatorname{tg} \varphi = N.$$

Dieses ist das Brewstersche Gesetz. Fällt also ein Lichtstrahl ein unter dem Winkel φ , der der Gleichung (v) genügt, so hat die elektrische Kraft der reflektierten Welle keine zur Einfallsebene parallele Komponente. Auch wenn natürliches Licht auf die Grenzfläche unter dem Winkel φ einfällt, der der Gleichung (v) genügt, so hat in der reflektierten Welle die elektrische Kraft nur eine zur Einfallsebene senkrechte Komponente, d. h. *das reflektierte Licht ist linear polarisiert*. Setzt man an die Stelle der Schwingungen der elektrischen Kraft die in der älteren elastischen Lichttheorie betrachteten Ätherschwingungen, so sind diese letzteren in der linear polarisierten Welle senkrecht zur Einfallsebene, die zugleich die Polarisations-ebene ist. Nach der Theorie von F. E. Neumann müßten die Ätherschwingungen den periodischen Änderungen der magnetischen Kraft entsprechen.

Trifft der Lichtstrahl senkrecht die Trennungsfläche, ist also $\varphi = 0$, so verlieren die Gleichungen (u) ihre Bedeutung, da auch $\psi = 0$ ist. Die Gleichungen (t) und (t') ergeben

$$(w) \quad R_s = -F_s \frac{N-1}{N+1},$$

indem

$$N = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

ist. Ferner finden wir

$$(w') \quad R_p = F_p \frac{N-1}{N+1}.$$

Ist also $N > 1$, so ist die zur Einfallsebene senkrechte Komponente der elektrischen Kraft der reflektierten Welle entgegengesetzt gerichtet der entsprechenden Komponente der einfallenden Welle. Dasselbe gilt jedoch auch für die der Einfallsebene parallelen Komponenten der elektrischen Kraft der einfallenden und der reflektierten Welle, denn für $\varphi = 0$ sind nach Fig. 132 beide Komponenten entgegengesetzt. Für einen sehr großen Wert des Brechungsexponenten N und für $\varphi = 0$ würden die Amplituden der elektrischen Kräfte der einfallenden und reflektierten Welle einander gleich und entgegengesetzt gerichtet, d. h. wir müßten an der reflektierenden Fläche selbst einen Schwingungsknoten erhalten, wenn durch Interferenz der einfallenden und reflektierten Welle stehende Schwingungen auftreten. Was die magnetische Kraft anbetrifft, so ergibt die Betrachtung der Gleichungen (w) und (w'), daß die Amplituden der magnetischen Kräfte der einfallenden und reflektierten Welle gleich gerichtet sind. An der reflektierenden Fläche müßten also bei stehenden Wellen und für $N > 1$ die magnetischen Kräfte einen Schwingungsbauch haben. Diese Resultate sind besonders wichtig in bezug auf die *stehenden Lichtwellen*, die von O. Wiener (1889) zuerst durch Reflexion von senkrecht einfallenden und von einer homogenen Lichtquelle herrührenden Strahlen an einer versilberten Glasplatte erzeugt wurden.

§ 133. Die totale Reflexion.

Im Körper 1 treffe das einfallende Licht auf die Trennungsfläche zwischen den Körpern 1 und 2. Der Brechungsindex N der Substanz 2 gegen die Substanz 1 sei kleiner als 1. Dann ist der dem Einfallswinkel φ entsprechende Brechungswinkel ψ nicht mehr reell, wenn

$$(a) \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{N} > 1$$

ist. Für alle Einfallswinkel φ , die dieser Gleichung zugehören, findet keine Brechung statt, sondern das ganze einfallende Licht wird reflektiert.

Für diese totale Reflexion gelten auch die Gleichungen (t) und (t') des vorigen Paragraphen. Wir legen ein Koordinatensystem zugrunde wie in Fig. 132 S. 493. Die zur Einfallsebene senkrechte Komponente der elektrischen Kraft in der reflektierten Welle ist nach den Gleichungen (q'') und (u) des vorigen Paragraphen

$$(b) \quad Y_r = -F_s \cdot \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \cdot e^{k\epsilon} \left\{ t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right\}.$$

Nach (a) ist

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{N^2}},$$

also, weil $\cos \psi$ negativ imaginär sein muß,

$$N \iota \cos \psi = \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}.$$

Wir erhalten also

$$-\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\cos \varphi + \iota \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{\cos \varphi - \iota \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}.$$

Wir setzen

$$\cos \varphi = C \cos \frac{1}{2} \chi \quad \text{und} \quad \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2} = C \sin \frac{1}{2} \chi,$$

so wird

$$(c) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{\cos \varphi}; \quad C^2 = 1 - N^2.$$

Ferner ist

$$-\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} = e^{\epsilon \chi}.$$

Also ist die zur Einfallsebene senkrechte Komponente der elektrischen Kraft der reflektierten Welle durch den reellen Teil von

$$F_s \cdot e^{\epsilon} \left\{ k \left(t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right) + \chi \right\}$$

gegeben, also durch

$$F_s \cdot \cos \left\{ k \left(t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} + \chi \right) \right\}.$$

Demnach ist die Reflexion vollständig, da F_s als Amplitude sowohl in dem Ausdrucke für die einfallende wie in dem für die reflektierte Welle auftritt. *Durch die totale Reflexion erleidet*

aber das reflektierte Licht eine Phasendifferenz χ gegenüber dem einfallenden Lichte. Diese Phasendifferenz ist aus (c) zu berechnen.

Die der Einfallsebene parallele Komponente der elektrischen Kraft der reflektierten Welle ergibt sich aus der Gleichung (q'') auf S. 496

$$R_p \cdot e^{k\iota} \left\{ t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right\},$$

und in Rücksicht auf (u) finden wir für diese Komponente

$$F_p \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \cdot e^{k\iota} \left\{ t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right\}.$$

Beachten wir die Gleichung

$$N \iota \cos \psi = \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2},$$

so wird

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} = \frac{N^2 \cos \varphi + \iota \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{N^2 \cos \varphi - \iota \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}.$$

Wir setzen

$$(d) \quad N^2 \cos \varphi = D \cos \frac{1}{2} \delta, \quad \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2} = D \sin \frac{1}{2} \delta$$

und erhalten

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} = e^{i\delta},$$

$$(e) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{N^2 \cos \varphi}, \quad D^2 = N^4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - N^2.$$

Also wird die zur Einfallsebene parallele Komponente der elektrischen Kraft der reflektierten Welle durch den reellen Teil von

$$F_p \cdot e^{\iota} \left\{ k \left(t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right) + \delta \right\}$$

und zwar durch

$$F_p \cdot \cos \left\{ k \left(t - \frac{x \sin \varphi - z \cos \varphi}{V_1} \right) + \delta \right\}$$

gegeben. Die Reflexion ist also vollständig. Zur Bestimmung der Phasendifferenz δ zwischen der reflektierten und einfallenden Welle dient die Gleichung (d). Aus (c) und (e) finden wir

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta - \chi) = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - N^2} \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Bei streifender Inzidenz ist $\varphi = \pi/2$, also $\delta - \chi = 0$. Auch wird $\delta = \chi$, d. h. die relative Phasendifferenz wird gleich Null für $\sin \varphi = N$, d. h. für den Grenzwinkel der Totalreflexion. Für die Zwischenwerte ist $\delta - \chi$ von Null verschieden, d. h. das *reflektierte Licht ist elliptisch polarisiert*, falls das einfallende Licht linear polarisiert ist. Wir bezeichnen die relative Phasendifferenz mit ζ , sodaß

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi.$$

Dann wird

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \frac{2N^2 - \sin^2 \varphi (1 + N^2)}{\sin^3 \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}.$$

ζ wird also ein Maximum für den Wert φ_0 , der der Gleichung

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{2N^2}{1 + N^2}$$

genügt. Der Höchstwert der Phasendifferenz ist dann durch

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta_0 = \frac{1 - N^2}{2N}$$

gegeben.

Wir betrachten jetzt *das bei der Totalreflexion in das zweite Medium eingedrungene Licht*. Die zur Einfallsebene senkrechte Komponente der elektrischen Kraft in der gebrochenen Welle ist nach § 132 (q''') und (u)

$$(f) \quad F_s \cdot \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \cdot e^{kz} \left\{ t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} \right\}.$$

Nun ist

$$\frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{2 \cos \varphi}{C} \cdot e^{1/2 \epsilon z}$$

und

$$\frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{V_2} = \frac{x \sin \varphi - \epsilon z \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{V_1}.$$

Der reelle Teil von (f) wird also

$$F_s \cdot \frac{2 \cos \varphi}{C} \cdot e^{-\frac{kz \sqrt{\sin^2 \varphi - N^2}}{V_1}} \cdot \cos \left\{ k \left(t - \frac{x \sin \varphi}{V_1} \right) + \frac{1}{2} \chi \right\}.$$

Diese Gleichung stellt eine Welle dar, die sich in der Richtung der x -Achse fortpflanzt. Die Amplitude nimmt in der Richtung des Einfallslotes ab, ferner ändert sich die Phase in einer zum Einfallslot geneigten Richtung. Eine Energieströmung

durch die xy -Ebene kann dabei nicht stattfinden. Im übrigen ist die Amplitude der gebrochenen Welle nur merklich von Null verschieden in sehr geringem Abstände von der brechenden Fläche.

Ähnliche Resultate ergeben sich bei der Untersuchung des gebrochenen Strahles, wenn wir die zur Einfallsebene parallele Komponente der elektrischen Kraft betrachten.

§ 134. Farben dünner Blättchen. Newtonsche Ringe.

Läßt man auf eine sehr dünne Schicht einer festen, flüssigen oder gasförmigen Substanz weißes Licht fallen, so zeigt die Schicht im reflektierten und im durchgehenden Lichte Färbung. In den beiden Fällen sind die Färbungen komplementär. Diese Interferenzerscheinung beobachtet man an Seifenblasen,

an auf dem Wasser ausgebreiteten dünnen Ölschichten usw. Die im reflektierten Lichte beobachteten Farben dünner Schichten ergeben sich durch Interferenz zwischen Strahlen, die an der oberen Seite AB der Platte (Fig. 133) und die an der unteren Seite A_1B_1 der Platte reflektiert sind oder die nach einer ungeraden Anzahl von Reflexio-

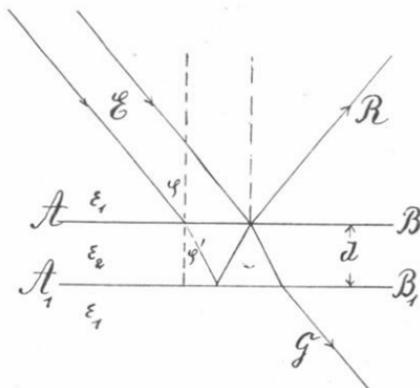


Fig. 133.

nen in der Platte an der oberen Seite AB wieder austreten. Im durchgehenden Lichte kommen die Farben zustande durch Interferenz der Strahlen, die direkt durch die Platte hindurchgehen, mit den Strahlen, die vor ihrem Durchgange durch die Platte eine gerade Anzahl von Reflexionen im Inneren der Platte erlitten haben. Die Beobachtung zeigt, daß an jeder Stelle eines dünnen Blättchens die Farbe mit der Größe des Einfallswinkels des Lichtes wechselt. Im übrigen ist der Gangunterschied der reflektierten und durchgehenden Strahlen von der Dicke und von dem Brechungsverhältnis des Blättchens abhängig.

Ein besonderer Fall der Farben dünner Blättchen sind die Newtonschen Farbenringe, die man beobachtet, wenn eine schwach gekrümmte Plankonvexlinse mit der konvexen Fläche auf eine ebene Glasplatte gelegt wird und von oben her weißes Licht auf die Linse fällt. Man beobachtet dann eine Anzahl farbiger Ringe, deren Farben in bestimmter Ordnung aufeinander folgen. Beleuchtet man mit homogenem Lichte, so zeigen sich im reflektierten Lichte zahlreiche helle und dunkle konzentrische Ringe. Die Mitte der Ringe, wo sich Linse und Platte berühren, ist im reflektierten Lichte dunkel. Solche Ringe beobachtet man auch im durchgehenden Lichte, hierbei ist aber die Mitte der Ringe hell. Die Ringe liegen um so dichter zusammen, je kleiner die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist. Bei den Newtonschen Farbenringen ist das dünne Blättchen durch die zwischen Glasplatte und Linse vorhandene dünne Luftschicht gegeben, deren Dicke mit der Entfernung vom Berührungspunkte der Gläser zunimmt.

Die Theorie der Farben dünner Blättchen ist zuerst von Thomas Young (1802) aufgestellt als Anwendung des von ihm zuerst behandelten Prinzipes der Interferenz.

Wir betrachten eine ebene Lichtwelle, die senkrecht auf eine planparallele Platte (Fig. 133) mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 trifft. Die Platte, deren Dicke d sei, befinde sich in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante ϵ_1 ist. Wir wollen die Seite der Platte, auf die das Licht einfällt, als die xy -Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems ansehen, die andere Seite der Platte ist die zur xy -Ebene parallele Ebene $z = d$.

Wir behandeln im Nachfolgenden eine von P. Drude¹⁾ gegebene Darstellung der Erscheinungen der Newtonschen Farbenringe. Dabei betrachten wir nur die in der y -Achse liegende Komponente der elektrischen Kraft. Nach der Gleichung (q') auf S. 496 setzen wir für $\varphi = 0$

$$X_e = 0, \quad Y_e = F e^{kz(t - z/v_1)}, \quad Z_e = 0.$$

Wir brauchen nur die nach der y -Achse liegende Komponente zu betrachten, da sich für die in der Richtung der x -Achse

¹⁾ P. Drude, Lehrbuch der Optik. 2. Aufl. S. 287.

liegende Komponente im übrigen dieselben Resultate ergeben. Zu den letzten Gleichungen gehört nach (i) S. 494 die magnetische Kraft

$$\alpha_e = -F\sqrt{\varepsilon_1} e^{k\iota(t-z/V_1)}, \quad \beta_e = 0, \quad \gamma_e = 0.$$

Alle ebenen Wellen, die in der Richtung der negativen z -Achse reflektiert werden, können stets zu einer einzigen ebenen Welle zusammengesetzt werden, deren Amplitude mit R bezeichnet werden soll. Für die elektrische Kraft der reflektierten Welle im Medium 1 haben wir nach (q'') auf S. 496

$$X_r = 0, \quad Y_r = R e^{k\iota(t+z/V_1)}, \quad Z_r = 0,$$

und für die magnetische Kraft nach S. 495 (m)

$$\alpha_r = R\sqrt{\varepsilon_1} e^{k\iota(t+z/V_1)}, \quad \beta_r = 0, \quad \gamma_r = 0.$$

Auch bei den im Inneren der Platte mehrfach auftretenden Reflexionen können wir alle ebenen Wellen, die sich in derselben Richtung bewegen, stets zu einer einzigen ebenen Welle zusammensetzen. Dabei haben wir in der Platte Wellen, die sich in der Richtung der $+z$ -Achse fortpflanzen und deren Amplitude mit G_1 bezeichnet werden soll. Die elektrische Kraft für diese ist nach (q''') auf S. 496 dargestellt durch

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = G_1 e^{k\iota(t-z/V_2)}, \quad Z_1 = 0.$$

Für die elektrische Kraft der Wellen, die sich im Inneren der Platte in der Richtung der negativen z -Achse fortpflanzen, haben wir

$$X_2 = 0, \quad Y_2 = G_2 e^{k\iota(t+z/V_2)}, \quad Z_2 = 0.$$

Die zugehörigen magnetischen Kräfte sind bzw.

$$\alpha_1 = -G_1\sqrt{\varepsilon_2} e^{k\iota(t-z/V_2)}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = +G_2\sqrt{\varepsilon_2} e^{k\iota(t+z/V_2)}, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

Die elektrische Kraft und die magnetische Kraft des durch die Platte hindurchgegangenen Lichtes, das vorher mehrfach in der Platte reflektiert sein kann, läßt sich darstellen durch

$$X_d = 0, \quad Y_d = G e^{k\iota(t-z/V_1)}, \quad Z_d = 0;$$

$$\alpha_d = -G\sqrt{\varepsilon_1} e^{k\iota(t-z/V_1)}, \quad \beta_d = 0, \quad \gamma_d = 0.$$

Wir stellen jetzt die Grenzbedingungen an beiden Seiten der Platte, d. h. für $z = 0$ und für $z = d$ auf (vgl. § 117). Für $z = 0$ haben wir

$$(a) \quad Y_e + Y_r = Y_1 + Y_2 \quad \text{und} \quad \alpha_e + \alpha_r = \alpha_1 + \alpha_2,$$

und für $z = d$ ferner

$$(b) \quad Y_1 + Y_2 = Y_d \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_d.$$

Aus den Gleichungen (a) erhalten wir

$$(c) \quad \begin{cases} F + R = G_1 + G_2, \\ (F - R)\sqrt{\varepsilon_1} = (G_1 - G_2)\sqrt{\varepsilon_2}. \end{cases}$$

Aus (b) finden wir

$$\begin{aligned} G_1 e^{-k\iota d/V_2} + G_2 e^{+k\iota d/V_2} &= G e^{-k\iota d/V_1}, \\ G_1 \sqrt{\varepsilon_2} e^{-k\iota d/V_2} - G_2 \sqrt{\varepsilon_2} e^{+k\iota d/V_2} &= G \sqrt{\varepsilon_1} e^{-k\iota d/V_1}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{k d}{V_2} = u \quad \text{und} \quad \frac{k d}{V_1} = v,$$

so lassen sich die letzten Gleichungen darstellen durch

$$(d) \quad \begin{cases} G_1 e^{-\iota u} + G_2 e^{+\iota u} = G e^{-\iota v}, \\ G_1 \sqrt{\varepsilon_2} e^{-\iota u} - G_2 \sqrt{\varepsilon_2} e^{+\iota u} = G \sqrt{\varepsilon_1} e^{-\iota v}. \end{cases}$$

Aus (d) erhält man

$$(e) \quad G_1 e^{-\iota u} (\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) = G_2 e^{+\iota u} (\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}).$$

Ferner ergibt sich aus (c)

$$\frac{1 + \frac{R}{F}}{1 - \frac{R}{F}} = \frac{(G_1 + G_2)\sqrt{\varepsilon_1}}{(G_1 - G_2)\sqrt{\varepsilon_2}},$$

also

$$\frac{R}{F} = \frac{G_1(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) + G_2(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{G_1(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}) + G_2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}.$$

Führen wir hier den Wert von G_1/G_2 aus (e) ein, so wird

$$\frac{R}{F} = \frac{(e^{\iota u} - e^{-\iota u})(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{e^{\iota u}(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2 - e^{-\iota u}(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^2},$$

oder

$$\frac{R}{F} = \frac{\iota \sin u (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos u + \iota (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin u}.$$

Das Verhältnis der Intensitäten des reflektierten und des einfallenden Lichtes, d. h. $R^2:F^2$ ergibt sich, wenn man den Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung mit seinem komplex konjugierten multipliziert. An die Stelle einer Beziehung zwischen komplexen Größen kann man stets eine andere setzen, die dadurch sich ergibt, daß man an die Stelle von $+i$ die Größe $-i$ setzt. Durch den Übergang zu den konjugiert komplexen Größen bleibt die Gleichung richtig bestehen, weil die reellen und die imaginären Teile auf den beiden Seiten der Gleichung für sich genommen einander gleich sein müssen. Wir erhalten daher

$$(f) \quad \frac{R^2}{F^2} = \frac{\sin^2 u (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sin^2 u (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Führen wir den Brechungsindex N der Platte (2) gegen das umgebende Medium (1) ein, so ist $N^2 = \varepsilon_2 : \varepsilon_1$, und wir erhalten

$$R^2 = F^2 \cdot \frac{\sin^2 u (1 - N^2)^2}{(1 - N^2)^2 \sin^2 u + 4 N^2}.$$

Die Intensität R^2 des reflektierten Lichtes wird Null für $u = 0, \pi, 2\pi$ usw., d. h. für

$$\frac{k d}{V_2} = \frac{2\pi d}{\tau V_2} = \frac{2\pi d}{\lambda_2} = 0, \pi, 2\pi \text{ usw.}$$

Also verschwindet die Intensität des reflektierten Lichtes an den Stellen, wo die Plattendicke

$$d = 0, \quad d = \frac{\lambda_2}{2}, \quad d = \lambda_2 \text{ usw.}$$

Aus den Gleichungen (c) und (d) erhalten wir für das Verhältnis der Intensitäten des durchgehenden Lichtes und des einfallenden Lichtes

$$(g) \quad \frac{G^2}{F^2} = \frac{4 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sin^2 u (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4 \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Die Gleichungen (f) und (g) zeigen, daß die Summe der Intensitäten des reflektierten und des durchgegangenen Lichtes gleich der Intensität des einfallenden Lichtes ist.

§ 135. Die Doppelbrechung.

In einem Kristalle hängt die Dielektrizitätskonstante von der Richtung der elektrischen Kraft ab. Im allgemeinen stimmt in einem Kristalle die Richtung der Stromlinien nicht überein

mit der Richtung der elektrischen Kraft. Man kann jedoch in einem Kristalle drei Achsen angeben, die wir als Koordinatenachsen wählen wollen und die solche Richtung haben, daß in ihnen die elektrische Strömung mit der Richtung der elektrischen Kraft zusammenfällt. Diese Achsen werden als *elektrische Symmetrieachsen* bezeichnet, indem das elektrische Verhalten des Kristalles eine Symmetrie in bezug auf jene drei zueinander senkrechten Richtungen aufweist, bzw. in bezug auf die Ebenen, die man durch die drei Achsen legen kann. Bezeichnen wir mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die *Hauptdielektrizitätskonstanten*, so lauten jetzt die Gleichungen (b) auf S. 429

$$(a) \quad \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_3}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$(b) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ferner ergeben die Gleichungen (d) auf S. 429, wenn wir auch hier die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ setzen,

$$(c) \quad \begin{cases} \nabla^2 X - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 Y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon_2}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 Z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon_3}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Amplitude des Vektors der Lichterregung mit A , und seine Komponenten nach den Koordinatenachsen mit a_x, a_y, a_z , so können wir diese Komponenten von A bei ebenen Wellen darstellen durch

$$(d) \quad \begin{cases} a_x = A \mathfrak{Q} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}, \\ a_y = A \mathfrak{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}, \\ a_z = A \mathfrak{N} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}, \end{cases}$$

wobei

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 1 \quad \text{und} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

ist. l, m, n sind die Richtungskosinus der Wellennormale, und $\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sind die Richtungskosinus von A gegen die Koordinatenachsen.

Die *Lichtstrahlen betrachten wir als die Strömungslinien der Energie*. Die Richtung des Lichtstrahles ist also zugleich durch die Komponenten des Strahlvektors \mathfrak{S} gegeben und steht senkrecht sowohl zur elektrischen Kraft, wie zur magnetischen Kraft des Feldes.

Aus den Gleichungen (b) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) = 0.$$

Dann muß auch

$$(e) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

sein, weil hier nur periodische Änderungen der magnetischen Kraft auftreten und unter diesen Verhältnissen die nach t genommenen Differentialquotienten von $\partial \alpha / \partial x$ usw. diesen Größen selbst proportional sind, von einer Phasendifferenz $\pi/2$ abgesehen.

Setzen wir also der Theorie von F. E. Neumann u. a. entsprechend den Lichtvektor an die Stelle der magnetischen Kraft, d. h. nehmen wir a_x, a_y, a_z bzw. proportional α, β, γ an, so sind nach der Gleichung (e) Lichtvektor und magnetische Kraft senkrecht zur Wellennormale, und wir erhalten bei dieser Annahme transversale Wellen. Da die Polarisations-ebene die durch die Richtungen der magnetischen Kraft und der Wellennormale gelegte Ebene sein soll, so liegt der Lichtvektor in der Polarisations-ebene.

$$\frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{\varepsilon_3}{c} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

sind proportional den Komponenten der elektrischen Strömung. Die Gleichungen (a) ergeben, daß auch

$$(f) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = 0$$

ist. Setzen wir also den Lichtvektor A an die Stelle der elektrischen Strömung, so ergibt die Gleichung (f), daß wir auch in diesem Falle eine transversale Welle haben. Im betrachteten Falle liegt der Lichtvektor senkrecht zur Polarisations-ebene, und wir gelangen zur Theorie von Fresnel.

Die dritte Annahme schließlich, bei der wir die Richtung des Lichtvektors mit der Richtung der elektrischen Kraft zu-

sammenfallen lassen, also a_x , a_y und a_z bzw. proportional X , Y und Z setzen, ergibt keine transversalen Wellen. Denn nach (f) ist wegen der verschiedenen Werte der Dielektrizitätskonstanten ε

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \neq 0,$$

und also wäre auch

$$(g) \quad \mathfrak{L} l + \mathfrak{M} m + \mathfrak{N} n \neq 0.$$

Da die Wellennormale senkrecht ist zur magnetischen Kraft und zur Richtung der elektrischen Strömung, die Richtung des Lichtstrahles oder der Energieströmung aber zur Richtung der elektrischen und magnetischen Kraft senkrecht ist, so fällt der Lichtstrahl im allgemeinen nicht mit der Wellennormale ebener Wellen zusammen.

Wir wollen voraussetzen, daß der Lichtvektor identisch ist mit dem Vektor der elektrischen Strömung, und wir setzen daher im Anschluß an (d) für ebene Wellen

$$(h) \quad \begin{cases} a_x = \varepsilon_1 X = A \mathfrak{L} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}, \\ a_y = \varepsilon_2 Y = A \mathfrak{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}, \\ a_z = \varepsilon_3 Z = A \mathfrak{N} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left\{ t - \frac{l x + m y + n z}{V} \right\}. \end{cases}$$

Die Gleichung (f) ist erfüllt, wenn

$$(h') \quad \mathfrak{L} l + \mathfrak{M} m + \mathfrak{N} n = 0,$$

d. h. wenn die Wellen transversale sind.

Führt man die für X , Y und Z aus (h) sich ergebenden Werte in die Gleichungen (c) ein, so folgt

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{l}{V^2} \left(\frac{\mathfrak{L} l}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{M} m}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{N} n}{\varepsilon_3} \right) = \frac{\mathfrak{L}}{\varepsilon_1 V^2} - \frac{\mathfrak{L}}{c^2}, \\ \frac{m}{V^2} \left(\frac{\mathfrak{L} l}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{M} m}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{N} n}{\varepsilon_3} \right) = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon_2 V^2} - \frac{\mathfrak{M}}{c^2}, \\ \frac{n}{V^2} \left(\frac{\mathfrak{L} l}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{M} m}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{N} n}{\varepsilon_3} \right) = \frac{\mathfrak{N}}{\varepsilon_3 V^2} - \frac{\mathfrak{N}}{c^2}. \end{cases}$$

c bedeutet hier die universelle Konstante $3 \cdot 10^{10}$. Da wir den Buchstaben c hier in anderer Bedeutung verwenden müssen, so wollen wir in den Gleichungen (i) und den nachfolgenden c

ersetzen durch \mathfrak{C} . Wir finden dann durch Multiplikation der Gleichungen (i) mit $\mathfrak{C}^2 V^2$

$$(k) \quad \frac{\mathfrak{Q} \mathfrak{C}^2}{\varepsilon_1} - \mathfrak{Q} V^2 = l \mathfrak{C}^2 \left(\frac{\mathfrak{Q} l}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{M} m}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{N} n}{\varepsilon_3} \right),$$

und die zugehörigen, die sich durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ergeben. Wir setzen nun

$$(k') \quad \frac{\mathfrak{C}^2}{\varepsilon_1} = a^2, \quad \frac{\mathfrak{C}^2}{\varepsilon_2} = b^2, \quad \frac{\mathfrak{C}^2}{\varepsilon_3} = c^2,$$

und erhalten dann aus (k)

$$\mathfrak{Q} a^2 - \mathfrak{Q} V^2 = l(a^2 \mathfrak{Q} l + b^2 \mathfrak{M} m + c^2 \mathfrak{N} n).$$

Bezeichnen wir den in der Klammer auf der rechten Seite stehenden Ausdruck mit D^2 , so finden wir die Gleichungen

$$(l) \quad \mathfrak{Q}(a^2 - V^2) = l D^2, \quad \mathfrak{M}(b^2 - V^2) = m D^2, \quad \mathfrak{N}(c^2 - V^2) = n D^2,$$

oder

$$(m) \quad \mathfrak{Q} = D^2 \frac{l}{a^2 - V^2}, \quad \mathfrak{M} = D^2 \frac{m}{b^2 - V^2}, \quad \mathfrak{N} = D^2 \frac{n}{c^2 - V^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit l , m und n , so ergibt sich durch Addition in Rücksicht auf (h')

$$(n) \quad \frac{l^2}{a^2 - V^2} + \frac{m^2}{b^2 - V^2} + \frac{n^2}{c^2 - V^2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt das *Fresnelsche Gesetz* für die Lichtgeschwindigkeiten dar. Die Gleichung (n) ist in bezug auf V vom vierten Grade, und sie stellt V als Funktion von l , m und n dar. Da je zwei Wurzeln dem absoluten Betrage nach einander gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat die *ebene Welle in der Richtung ihrer Normalen zwei verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2* .

Die Gleichung (n) können wir in die Form

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^4 - \{l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2)\} V^2 \\ \quad + l^2 b^2 c^2 + m^2 c^2 a^2 + n^2 a^2 b^2 = 0 \end{array} \right.$$

bringen. Ist $l = 0$, d. h. ist die ebene Welle der x -Achse parallel, so haben wir

$$V^4 - (a^2 + m^2 c^2 + n^2 b^2) V^2 + a^2 (m^2 c^2 + n^2 b^2) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung lauten

$$V_1 = a \quad \text{und} \quad V_2 = \sqrt{m^2 c^2 + n^2 b^2}.$$

Um darzustellen, in welcher Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Welle mit der Richtung der Wellennormale sich ändern, können wir von einem Punkte O (Fig. 134) in der

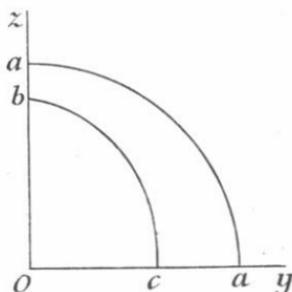


Fig. 134.

yz -Ebene Radienvektoren ziehen, die der Größe und Richtung nach die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten darstellen. Die Endpunkte dieser Radienvektoren liegen dann auf zwei Kurven; die eine entspricht $V_1 = a$ und ist ein Kreis, die andere entspricht $V_2 = \sqrt{m^2 c^2 + n^2 b^2}$ und ist ein Oval. Ist $a > b > c$, so hat die Kurve, die V_2 entspricht, ihre kleine halbe Achse c in der y -Achse und ihre große halbe

Achse b in der z -Achse. Das Verhalten der ebenen Wellen, die bzw. mit der y - und mit der z -Achse parallel sind, ist in Fig. 135 und Fig. 136 dargestellt.

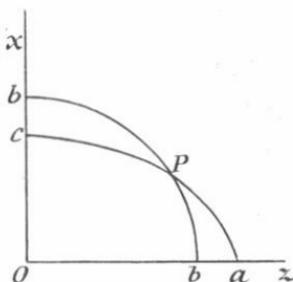


Fig. 135.

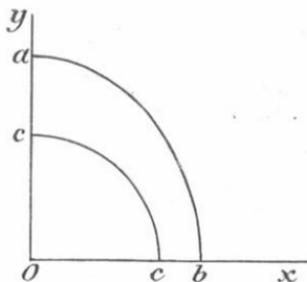


Fig. 136.

Ist $l = 1$ und $m = n = 0$, so wird $V_1 = b$ und $V_2 = c$, d. h. liegt die Wellennormale in einer der elektrischen Symmetrieachsen, z. B. in der x -Achse, so sind b und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (vgl. Fig. 135 u. Fig. 136). a , b und c werden als die *Hauptlichtgeschwindigkeiten* bezeichnet.

Besonders eigentümlich ist das Verhalten der Lichtgeschwindigkeiten in der xz -Ebene. Wir finden nämlich für $m = 0$ aus der Gleichung (o)

$$V_1 = b \quad \text{und} \quad V_2 = \sqrt{l^2 c^2 + n^2 a^2},$$

wobei $l^2 + n^2 = 1$ ist. Die Wellennormale, für welche die beiden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 gleich sind, ergibt sich aus

$$l = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad n = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die zugehörige Wellennormale ist in Fig. 137 durch die Gerade OP gegeben.

Trägt man von einem Punkte O auf allen Richtungen der Wellennormalen die beiden zusammengehörigen Geschwindigkeiten ab, so ergibt sich nach den Fig. 134—136 eine zweischalige Fläche, die als *Normalenfläche* (Fig. 137) bezeichnet wird. In der xz -Ebene schneiden sich die beiden Schalen der Normalenfläche in vier Punkten, von denen einer in Fig. 137 dargestellt ist.

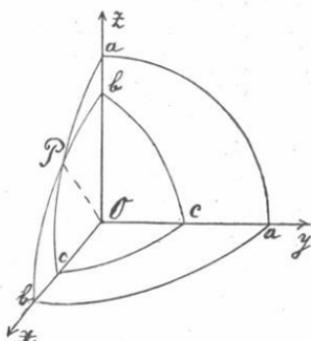


Fig. 137.

§ 136. Die Lichtgeschwindigkeiten.

Sind V_1 und V_2 die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derselben ebenen Welle, so haben wir nach der Gleichung (o) auf S. 511

$$(a) \quad \begin{cases} V_1^2 + V_2^2 = l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2), \\ V_1^2 V_2^2 = l^2 b^2 c^2 + m^2 c^2 a^2 + n^2 a^2 b^2, \end{cases}$$

und

$$(V_1^2 - V_2^2)^2 = [l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2)]^2 - 4(l^2 b^2 c^2 + m^2 c^2 a^2 + n^2 a^2 b^2).$$

Wird das letzte Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung mit $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ multipliziert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (V_1^2 - V_2^2)^2 &= l^4(b^2 - c^2)^2 + m^4(a^2 - c^2)^2 + n^4(a^2 - b^2)^2 \\ &\quad + 2m^2 n^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + 2l^2 n^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) \\ &\quad + 2l^2 m^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2). \end{aligned}$$

Ist $a > b > c$, so wird also

$$\begin{aligned} (V_1^2 - V_2^2)^2 &= l^4(b^2 - c^2)^2 + m^4(a^2 - c^2)^2 + n^4(a^2 - b^2)^2 \\ &\quad + 2m^2n^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) - 2l^2n^2(b^2 - c^2)(a^2 - b^2) \\ &\quad + 2l^2m^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2), \end{aligned}$$

oder

$$(b) \begin{cases} (V_1^2 - V_2^2)^2 = [l^2(b^2 - c^2) + m^2(a^2 - c^2) + n^2(a^2 - b^2)]^2 \\ \quad - 4l^2n^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2), \\ (V_1^2 - V_2^2)^2 = \{m^2(a^2 - c^2) + (l\sqrt{b^2 - c^2} + n\sqrt{a^2 - b^2})^2\} \\ \quad \{m^2(a^2 - c^2) + (l\sqrt{b^2 - c^2} - n\sqrt{a^2 - b^2})^2\}. \end{cases}$$

Demnach können die beiden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 für bestimmte Richtungen der Wellennormalen gleich groß werden. Dieser Fall tritt ein, wenn $m = 0$ und

$$l\sqrt{b^2 - c^2} + n\sqrt{a^2 - b^2} = 0,$$

oder

$$l\sqrt{b^2 - c^2} - n\sqrt{a^2 - b^2} = 0$$

ist. Diese Bedingungen sind erfüllt durch

$$m = 0 \quad \text{und} \quad \frac{l}{n} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Demnach ergeben sich vier Richtungen, die sämtlich der xz -Ebene parallel und zur mittleren elektrischen Symmetrieachse senkrecht sind. Bezeichnen wir mit l_0 , m_0 , n_0 die Kosinus der Winkel, welche diese Richtungen mit den Koordinatenachsen bilden, so ist

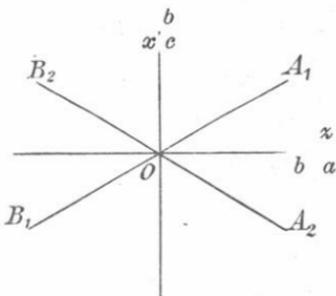


Fig. 138.

$$(c) \quad m_0 = 0, \quad l_0 = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

$$n_0 = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die durch diese Gleichungen bestimmten beiden Richtungen der Wellennormale, für die die beiden Lichtgeschwindigkeiten zusammenfallen, nennt man die *optischen Achsen* des Kristalles. Zwei optische Achsen sind vorhanden, indem jede von ihnen zwei entgegengesetzten Richtungen zugehört. Die elektrischen Symmetrieachsen x und z (Fig. 138), die die Winkel zwischen

den optischen Achsen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ halbieren, nennt man *optische Mittellinien*.

Wir wollen nun die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer beliebigen Richtung* durch die Winkel E_1 und E_2 ausdrücken, welche diese Richtung mit den optischen Achsen OA_1 und OA_2 bildet. l, m, n sind die Kosinus der Winkel, welche die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle mit den Achsen bildet.

OA_1 hat die Richtungskosinus $+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$.

OA_2 hat die Richtungskosinus $-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$.

Also erhalten wir

$$(d) \quad \begin{cases} \cos E_1 = l\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} + n\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \\ \cos E_2 = -l\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} + n\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$2n = (\cos E_1 + \cos E_2) \sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}},$$

$$2l = (\cos E_1 - \cos E_2) \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

Wird m mit Hilfe der Beziehung $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ aus der Gleichung (a) eliminiert, so erhalten wir

$$V_1^2 + V_2^2 = a^2 + c^2 + \{n^2(b^2 - c^2) - l^2(a^2 - b^2)\},$$

und demnach in Rücksicht auf die Gleichung (d)

$$(e) \quad V_1^2 + V_2^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos E_1 \cos E_2.$$

Aus den Gleichungen (d) finden wir ferner

$$(e') \quad \begin{cases} (a^2 - c^2) \sin^2 E_1 = a^2 - c^2 - l^2(a^2 - b^2) - n^2(b^2 - c^2) \\ \quad - 2ln\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}, \\ (a^2 - c^2) \sin^2 E_2 = a^2 - c^2 - l^2(a^2 - b^2) - n^2(b^2 - c^2) \\ \quad + 2ln\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ können wir die Gleichung (b) in der Form

$$(V_1^2 - V_2^2)^2 = \{a^2 - c^2 - l^2(a^2 - b^2) - n^2(b^2 - c^2)\}^2 - 4l^2n^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)$$

schreiben. Dadurch erhalten wir wegen (e')

$$(f) \quad V_1^2 - V_2^2 = (a^2 - c^2) \sin E_1 \sin E_2.$$

Aus den Gleichungen (e) und (f) folgt

$$(g) \quad \begin{cases} 2V_1^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos(E_1 - E_2), \\ 2V_2^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos(E_1 + E_2). \end{cases}$$

Hat also die Wellennormale die Richtung der z -Achse, so ist $E_1 = E_2$, und wir erhalten aus (g) $V_1 = a$ und $V_2 = b$, weil $\cos E_1 = n_0 = \cos E_2$ ist. Hat die Wellennormale die Richtung der x -Achse, so ist $E_1 + E_2 = \pi$, und wir erhalten nach (g) $V_2 = c$ und $V_1 = b$, indem $\cos E_1 = l_0$ ist. Fällt die Wellennormale mit einer der optischen Achsen, z. B. OA_1 zusammen, so ist $E_1 = 0$ und ferner $\cos \frac{1}{2} E_2 = n_0$, also wird $V_1 = b$ und $V_2 = b$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Welle ist dann gleich der mittleren der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten.

§ 137. Die Strahlenfläche.

Vom Anfangspunkte des Koordinatensystems gehe eine ebene Welle 1 aus, deren Normale mit den Achsen Winkel bildet, welche die Kosinus l, m, n haben. Nach Verlauf der Zeiteinheit hat die ebene Welle in der Lage 2 vom Koordinatenanfangspunkte den Abstand V . Die in einem Punkte vorhandene Lichterregung hat sich nach Verlauf der Zeiteinheit auf eine Fläche ausgebreitet, die wir als *Strahlenfläche*, bisweilen auch als *Wellenfläche*, bezeichnen. Sieht man jeden Punkt einer Wellenebene (Fig. 139) als Ausgangspunkt einer Lichterregung an und konstruiert man die zu ihm gehörige Wellenfläche, so ergibt die Enveloppe dieser Wellenflächen eine Ebene, d. i. die Lage der Wellenebene nach der Zeiteinheit. Die Richtung des Lichtstrahles fällt dabei mit der Wellennormalen nicht zusammen. Während V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale ist, wollen wir mit \mathfrak{S} die *Strahlengeschwindigkeit* bezeichnen. \mathfrak{S} möge mit den Koordinatenachsen Winkel bilden, deren Kosinus f, g, h sind. Dann ist der Kosinus des Winkels zwischen der Strahlenrichtung und der Wellennormale

$$(a) \quad \frac{V}{\mathfrak{S}} = lf + mg + nh.$$

Die Strahlengeschwindigkeit \mathfrak{B} ist größer als die Normalengeschwindigkeit V . V ist nach der Gleichung (n) auf S. 511 gegeben durch

$$(b) \quad \frac{l^2}{a^2 - V^2} + \frac{m^2}{b^2 - V^2} + \frac{n^2}{c^2 - V^2} = 0,$$

wobei

$$(c) \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

ist. Wenn l , m und n sich ändern und zugleich auch V , so hüllen die Ebenen 2 (Fig. 139) eine Fläche ein, die wir als *Strahlenfläche* bezeichnen. Denken wir uns demnach durch einen Punkt alle möglichen Wellenebenen gelegt, und be-

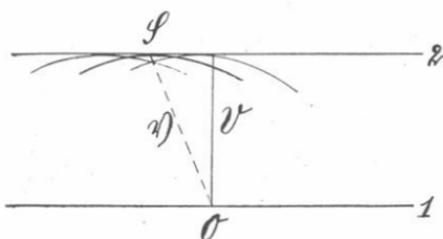


Fig. 139.

trachten wir ihre Lagen nach der Zeiteinheit, so ist die Strahlenfläche die Enveloppe der sämtlichen Wellenebenen, die wir erhalten haben. Nach der in Fig. 139 angedeuteten Konstruktion muß die zum Strahle OS gehörige Wellenebene die Tangentialebene sein, die wir im Punkte S an die Strahlenfläche legen können. Wir wollen jetzt die Gleichung dieser Strahlenfläche aufstellen. S (Fig. 139) ist ein Punkt der Strahlenfläche, und seine Koordinaten seien x , y , z , indem

$$\frac{x}{\mathfrak{B}} = f, \quad \frac{y}{\mathfrak{B}} = g, \quad \frac{z}{\mathfrak{B}} = h$$

ist. Wir schreiben dann statt (a)

$$V = lx + my + nz.$$

Aus dieser Gleichung und aus (b) und (c) erhalten wir

$$(d) \quad dV = x \cdot dl + m \cdot dy + n \cdot dz,$$

$$(e) \quad l \cdot dl + m \cdot dm + n \cdot dn = 0,$$

$$(f) \quad \frac{l \cdot dl}{a^2 - V^2} + \frac{m \cdot dm}{b^2 - V^2} + \frac{n \cdot dn}{c^2 - V^2} + \Gamma V \cdot dV = 0,$$

wo

$$(g) \quad \Gamma = \frac{l^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - V^2)^2}$$

ist. Eliminiert man dV mittels der Gleichung (d) aus (f), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\Gamma V x + \frac{l}{a^2 - V^2} \right] dl + \left[\Gamma V y + \frac{m}{b^2 - V^2} \right] dm \\ + \left[\Gamma V z + \frac{n}{c^2 - V^2} \right] dn = 0. \end{aligned}$$

Zur linken Seite dieser Gleichung addieren wir die mit einem Faktor A multiplizierte Gleichung (e). Da dl , dm und dn als willkürliche Größen angesehen werden können, so haben wir

$$(h) \quad \begin{cases} \frac{l}{a^2 - V^2} + \Gamma V x + Al = 0, & \frac{m}{b^2 - V^2} + \Gamma V y + Am = 0, \\ \frac{n}{c^2 - V^2} + \Gamma V z + An = 0. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach bzw. mit l , m und n multipliziert und dann addiert, so erhalten wir in Rücksicht auf (a) und (b)

$$A = -\Gamma V^2.$$

Demnach ist

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{l}{a^2 - V^2} = \Gamma V(Vl - x), & \frac{m}{b^2 - V^2} = \Gamma V(Vm - y), \\ \frac{n}{c^2 - V^2} = \Gamma V(Vn - z). \end{cases}$$

Erheben wir die rechten und die linken Seiten dieser Gleichungen zum Quadrat, so ergibt sich durch Addition und in Rücksicht auf (g)

$$1 = \Gamma V^2 \{ V^2 - 2V(lx + my + nz) + \mathfrak{B}^2 \},$$

indem $\mathfrak{B}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist. Da aber $lx + my + nz = V$ ist, so finden wir

$$(k) \quad 1 = \Gamma V^2 (\mathfrak{B}^2 - V^2).$$

Nun kann aus dieser Gleichung Γ nach den Beziehungen (i) eliminiert werden, und dann erhalten wir

$$(l) \quad \frac{x}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = \frac{lV}{V^2 - a^2}, \quad \frac{y}{\mathfrak{B}^2 - b^2} = \frac{mV}{V^2 - b^2}, \quad \frac{z}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = \frac{nV}{V^2 - c^2},$$

oder

$$(1) \quad \frac{f\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = \frac{lV}{V^2 - a^2}, \quad \frac{g\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - b^2} = \frac{mV}{V^2 - b^2}, \quad \frac{h\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = \frac{nV}{V^2 - c^2}.$$

Diese Gleichungen stellen Beziehungen dar zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit \mathfrak{B} des Lichtstrahles und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit \mathfrak{B} der Wellennormale, sowie zwischen der Richtung des Lichtstrahles und der Richtung der Wellennormale.

Wir gelangen auch zu den Gleichungen (1), wenn wir die Lichtstrahlen als die Strömungslinien der Energie des elektromagnetischen Feldes ansehen. Wir haben dann in Rücksicht auf S. 426 und die hier benutzte Schreibweise

$$f:g:h = (\gamma Y - \beta Z) : (\alpha Z - \gamma X) : (\beta X - \alpha Y).$$

Nun ist nach (h) auf S. 510

$$X:Y:Z = \frac{\mathfrak{Q}}{\varepsilon_1} : \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon_2} : \frac{\mathfrak{N}}{\varepsilon_3},$$

oder nach den Gleichungen (k') auf S. 511

$$X:Y:Z = \mathfrak{Q} a^2 : \mathfrak{M} b^2 : \mathfrak{N} c^2.$$

Ferner ergeben die Gleichungen (b) auf S. 508 zusammen mit den Gleichungen (h) auf S. 510

$$\alpha:\beta:\gamma = (\mathfrak{N} m c^2 - \mathfrak{M} n b^2) : (\mathfrak{Q} n a^2 - \mathfrak{N} l c^2) : (\mathfrak{M} l b^2 - \mathfrak{Q} m a^2).$$

Dann folgt

$$f:g:h = [\mathfrak{Q} a^2 D^2 - l(\mathfrak{Q}^2 a^4 + \mathfrak{M}^2 b^4 + \mathfrak{N}^2 c^4)] : \dots : \dots,$$

wo die beiden übrigen Glieder auf der rechten Seite sich leicht durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ergeben. D^2 hat die auf S. 511 angegebene Bedeutung. Die Gleichungen (1) auf S. 511 ergeben ferner

$$(m) \quad \mathfrak{Q} a^2 = \mathfrak{Q} V^2 + l D^2, \quad \mathfrak{M} b^2 = \mathfrak{M} V^2 + m D^2, \\ \mathfrak{N} c^2 = \mathfrak{N} V^2 + n D^2.$$

Werden die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen quadriert, so folgt durch Addition

$$\mathfrak{Q}^2 a^4 + \mathfrak{M}^2 b^4 + \mathfrak{N}^2 c^4 = V^4 + D^4,$$

indem $\mathfrak{Q} m + \mathfrak{M} m + \mathfrak{N} n = 0$ ist. Also finden wir

$$f:g:h = \{\mathfrak{Q} a^2 D^2 - l(V^4 + D^4)\} : \dots : \dots$$

Durch Benutzung der Gleichungen (m) ergibt sich dann

$$f:g:h = \left\{ \frac{l a^2 D^4}{a^2 - V^2} - l(V^4 + D^4) \right\} : \dots : \dots$$

und schließlich

$$f:g:h = l \left\{ \frac{D^4}{V^2 - a^2} + V^2 \right\} : m \left\{ \frac{D^4}{V^2 - b^2} + V^2 \right\} : n \left\{ \frac{D^4}{V^2 - c^2} + V^2 \right\}.$$

Wir führen einen Proportionalitätsfaktor G ein und setzen

$$f = l G \left\{ \frac{D^4}{V^2 - a^2} + V^2 \right\}, \quad g = m G \left\{ \frac{D^4}{V^2 - b^2} + V^2 \right\} \text{ usw.}$$

Da $f^2 + g^2 + h^2 = 1$ ist, so erhalten wir in Rücksicht auf (n) S. 511

$$D^8 \left\{ \frac{l^2}{(V^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(V^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(V^2 - c^2)^2} \right\} + V^4 = \frac{1}{G^2}.$$

Da aber nach (m)

$$D^4 = \frac{\mathfrak{B}^2 (V^2 - a^2)^2}{l^2} = \dots = \dots$$

ist, so finden wir

$$(n) \quad D^4 + V^4 = \frac{1}{G^2}.$$

Nun ist nach (a)

$$\frac{V}{G \mathfrak{B}} = l^2 \left\{ \frac{D^4}{V^2 - a^2} + V^2 \right\} + m^2 \left\{ \frac{D^4}{V^2 - b^2} + V^2 \right\} + n^2 \left\{ \frac{D^4}{V^2 - c^2} + V^2 \right\}.$$

Mit Rücksicht auf das Fresnelsche Gesetz der Lichtgeschwindigkeiten (vgl. S. 511) erhalten wir

$$(o) \quad \frac{V}{G \mathfrak{B}} = V^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{G} = \mathfrak{B} V.$$

Demnach wird

$$f = \frac{l}{\mathfrak{B} V} \left\{ \frac{D^4}{V^2 - a^2} + V^2 \right\} \text{ usw.}$$

Da nach (n)

$$D^4 = \frac{1}{G^2} - V^4 = \mathfrak{B}^2 V^2 - V^4$$

ist, so finden wir

$$f = \frac{l V}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{B}^2 - a^2}{V^2 - a^2}$$

und analoge Gleichungen für g und h . Wir sind damit zu den Gleichungen (l) zurückgekommen.

Schreiben wir die Gleichungen (l') auf S. 518 in der Form

$$\frac{x(V^2 - a^2)}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = l V \text{ usw.}$$

und multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit x , y und z , so ergibt sich, weil $lx + my + nz = V$ ist,

$$\frac{x^2(V^2 - a^2)}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{y^2(V^2 - b^2)}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{z^2(V^2 - c^2)}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = V^2.$$

Für diese Gleichung wollen wir abgekürzt schreiben

$$(p) \quad \sum \frac{x^2(V^2 - a^2)}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = V^2.$$

Bei Benutzung dieser abgekürzten Schreibweise ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum \frac{x^2(V^2 - a^2)}{\mathfrak{B}^2 - a^2} &= \sum \frac{x^2(V^2 - \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^2 - a^2)}{\mathfrak{B}^2 - a^2} \\ &= \sum x^2 + (V^2 - \mathfrak{B}^2) \sum \frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Da aber in Rücksicht auf unsere Bezeichnung

$$\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mathfrak{B}^2$$

ist, so folgt aus (p)

$$(V^2 - \mathfrak{B}^2) \left(1 - \sum \frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2}\right) = 0.$$

Die Gleichung der Strahlenfläche lautet also

$$(q) \quad \frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 1,$$

oder

$$(q') \quad \frac{f^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{g^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{h^2 \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 1.$$

Weil aber in unserer Bezeichnung

$$\sum \frac{x^2}{\mathfrak{B}^2} = 1$$

ist und daher mit Bezug auf (q)

$$\sum \left(\frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} - \frac{x^2}{\mathfrak{B}^2} \right) = \sum \frac{a^2 x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = 0,$$

so können wir der Gleichung der Strahlenfläche auch die Form

$$(r) \quad \frac{a^2 x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 0$$

geben.

Da $f^2 + g^2 + h^2 = 1$ ist, so ergibt sich aus (q')

$$\frac{f^2 a^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{g^2 b^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{h^2 c^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{f^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} + \frac{g^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} + \frac{h^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\mathfrak{B}^2}} = 0.$$

Diese Form der Gleichung der Strahlenfläche geht aus der Gleichung der Normalenfläche (n) auf S. 511 hervor, wenn wir an Stelle von a^2, b^2, c^2 die reziproken Beträge und ebenso den reziproken Wert des Geschwindigkeitsquadrates einführen.

Durch die Gleichung (q') wird die Strahlengeschwindigkeit \mathfrak{B} als Funktion der Strahlenrichtung gegeben. Trägt man nach jeder durch die Richtungskosinus f, g und h bestimmten Richtung die aus der Gleichung (q') sich ergebenden Werte \mathfrak{B} als Radienvektoren auf, so ergibt sich auch hier eine zweischalige Fläche, die als *Strahlenfläche* bezeichnet wird. Die Gleichung der Strahlenfläche ist vom vierten Grade.

Aus (r) erhalten wir

$$(r') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^4 (a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2) - \{ (b^2 + c^2) a^2 f^2 + (a^2 + c^2) b^2 g^2 \\ + (a^2 + b^2) c^2 h^2 \} \mathfrak{B}^2 + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{array} \right.$$

Also wird

$$2 \mathfrak{B}^2 (a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2) - \{ (b^2 + c^2) a^2 f^2 + (a^2 + c^2) b^2 g^2 + (a^2 + b^2) c^2 h^2 \} = \pm R,$$

wo

$$R^2 = \left\{ (b^2 + c^2) a^2 f^2 + (a^2 + c^2) b^2 g^2 + (a^2 + b^2) c^2 h^2 \right\}^2 - 4 a^2 b^2 c^2 (a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2)$$

ist. Hieraus erhalten wir ferner

$$R^2 = \left[(a^2 - c^2) b^2 g^2 + (a f \sqrt{b^2 - c^2} + c h \sqrt{a^2 - b^2})^2 \right] \cdot \left[(a^2 - c^2) b^2 g^2 + (a f \sqrt{b^2 - c^2} - c h \sqrt{a^2 - b^2})^2 \right].$$

Eine gerade Linie, die vom Koordinatenanfangspunkte ausgeht, schneidet die Fläche in zwei Punkten, die zusammenfallen, wenn $R = 0$, oder wenn

$$(s) \quad g = 0 \quad \text{und} \quad \frac{f}{h} = \pm \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

ist. Daraus erhalten wir

$$(s') \quad f = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad h = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die durch diese Richtungskosinus bestimmten beiden Richtungen heißen die *Strahlenachsen*.

Zur besseren Übersicht wollen wir die Schnittkurven zwischen der Strahlenfläche und den Symmetrieebenen yz , zx , xy bestimmen. Aus (r) erhalten wir

$$(t) \quad \left\{ \begin{aligned} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) \mathfrak{B}^2 - \left[(b^2 + c^2) a^2 x^2 + (a^2 + c^2) b^2 y^2 \right. \\ \left. + (a^2 + b^2) c^2 z^2 \right] + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir hier der Reihe nach $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$, so ergibt sich für $x = 0$

$$(b^2 y^2 + c^2 z^2)(y^2 + z^2) - (a^2 + c^2) b^2 y^2 - (a^2 + b^2) c^2 z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0$$

oder

$$(y^2 + z^2 - a^2)(b^2 y^2 + c^2 z^2 - b^2 c^2) = 0,$$

und für $y = 0$ und $z = 0$

$$(z^2 + x^2 - b^2)(c^2 z^2 + a^2 x^2 - a^2 c^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2) = 0.$$

Demnach sind die Schnittkurven der Strahlenfläche mit den Symmetrieebenen Kreise und Ellipsen, die in den Figg. 140 bis 142 dargestellt sind.

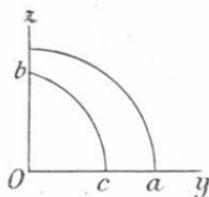


Fig. 140.

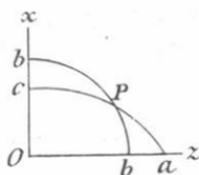


Fig. 141.

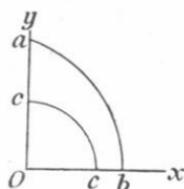


Fig. 142.

Besonderes Interesse bietet die xz -Ebene. Die Gleichung $x^2 + z^2 = b^2$ stellt einen Kreis mit dem Radius b dar. Die Gleichung $c^2 z^2 + a^2 x^2 - a^2 c^2 = 0$ liefert eine Ellipse, deren Halbachsen a und c sind. Unter der Voraussetzung, daß $a > b > c$ ist, schneiden sich der Kreis und die Ellipse in einem Punkte P , der einer der vier Schnittpunkte der beiden Schalen der Strahlenfläche ist.

Im übrigen sei noch bemerkt, daß wir die durch die Gleichungen (s') definierten Richtungen der Strahlenachsen erhalten, wenn wir in den Gleichungen (c) auf S. 514 für die Richtungen der optischen Achsen alle Größen durch ihre reziproken Werte ersetzen.

§ 138. Konische Refraktion.

Nach der Gleichung (n) S. 511 gehören zu jedem Werte von l , m , n zwei Werte von V^2 und demgemäß nach den Gleichungen (l) auf S. 518 auch zwei Strahlen mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Besonderes Interesse bietet der Fall, in dem die Wellennormale in der Richtung einer der optischen Achsen liegt. In diesem Falle ist nach § 135 die Normalengeschwindigkeit gleich b und die Fortpflanzungsrichtung ist nach den Gleichungen (c) auf S. 514

$$l_0 = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad m_0 = 0, \quad n_0 = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Betrachten wir nur eine der optischen Achsen, so lauten die Gleichungen (l) auf S. 518

$$\frac{f\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - a^2} = \frac{l_0 b}{b^2 - a^2}, \quad \frac{h\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2 - c^2} = \frac{n_0 b}{b^2 - c^2},$$

oder

$$f\mathfrak{B}(a^2 - b^2) = x(a^2 - b^2) = l_0 b(a^2 - \mathfrak{B}^2), \\ h\mathfrak{B}(b^2 - c^2) = z(b^2 - c^2) = n_0 b(\mathfrak{B}^2 - c^2).$$

Führen wir in diese Gleichungen die Werte von l_0 und n_0 ein, so ergibt sich

$$(a) \quad \begin{cases} x \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = b(a^2 - \mathfrak{B}^2), \\ z \sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} = b(\mathfrak{B}^2 - c^2). \end{cases}$$

Indem $\mathfrak{B}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, stellt jede dieser Gleichungen eine Kugel dar. In der Schnittlinie beider Kugeln liegen die Berührungspunkte zwischen der betrachteten Wellenebene und der Strahlenfläche. Die Wellenebene berührt also in dem betrachteten Falle die Strahlenfläche längs eines Kreises.

Zu diesem Resultate gelangen wir auch auf dem folgenden Wege. In Rücksicht auf die oben angegebenen Werte von l_0 und n_0 können wir den Gleichungen (a) die Form

$$(b) \quad x = \frac{b(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)}{l_0(a^2 - c^2)} \quad \text{und} \quad z = \frac{b(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)}{n_0(a^2 - c^2)}$$

geben. Durch diese Gleichungen wird eine ebene Kurve dargestellt, weil

$$(c) \quad l_0 x + n_0 z = b$$

ist. Wir führen nun ein neues Koordinatensystem ein mit demselben Anfangspunkte; die η -Achse falle mit der y -Achse zusammen, während die ζ -Achse mit der optischen Achse zusammenfällt. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(d) \quad x = \xi n_0 + \zeta l_0, \quad y = \eta, \quad z = -\xi l_0 + \zeta n_0.$$

Die Gleichung (c), die eine Ebene darstellt, lautet dann

$$(e) \quad \zeta = b,$$

d. h. die Ebene der Schnittkurve ist senkrecht zur Richtung der optischen Achse und geht durch den Endpunkt der letzteren.

Die erstere der Gleichungen (b) nimmt mit Rücksicht auf (d) und (e) die Form

$$(f) \quad \xi^2 + \xi \cdot \frac{n_0 l_0 (a^2 - c^2)}{b} + \eta^2 = 0$$

an. Diese Gleichung stellt aber einen Kreis dar, der durch den Punkt $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = b$ oder durch den Endpunkt der optischen Achse geht. Der Radius r des Kreises ist

$$r = \frac{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}}{2b},$$

und der Mittelpunkt des Kreises hat die Koordinaten

$$\xi = -r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = b.$$

Damit ist der Kreis bestimmt, in welchem eine auf der optischen Achse in ihrem Endpunkte senkrechte Ebene die Wellenfläche berührt.

Die Untersuchung zeigt also, daß zur optischen Achse als Wellennormale unendlich viele Strahlen gehören, die auf einem Kegelmantel liegen. Der Öffnungswinkel δ des Kegels ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{2r}{b} = \frac{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}}{b^2}.$$

Gibt man dem auf eine Kristallplatte fallenden Lichtstrahl solche Richtung, daß die gebrochene Wellennormale mit der optischen Achse des Kristalls zusammenfällt, so bilden die

im Inneren des Kristalls vorhandenen Lichtstrahlen einen Kegelmantel. Diese Erscheinung wird als *innere konische Refraktion* bezeichnet. Handelt es sich um eine planparallele Kristallplatte, so liegen nach dem Austritte aus der Platte die Lichtstrahlen auf einem elliptischen Zylinder, dessen Achse der Richtung der einfallenden Strahlen parallel ist. Zur Beobachtung der inneren konischen Refraktion eignet sich besonders der Aragonit.

Um bei gegebener Richtung des Strahles, d. h. wenn f , g und h gegeben sind, die Richtung der zugehörigen Wellennormalen zu finden, muß man von den Gleichungen (l) auf S. 518 ausgehen und diese mit der Gleichung (a) auf S. 516 verbinden. Zu jedem Werte von f , g , h gehören nach der Gleichung (q') auf S. 521 zwei Werte von \mathfrak{B}^2 und daher auch zwei Normalenrichtungen. Hat aber der Lichtstrahl eine durch die Gleichungen (s') auf S. 523 bestimmte Richtung, so ist $\mathfrak{B}^2 = b^2$. In ähnlicher Weise wie oben kann der Nachweis geführt werden, daß einem Lichtstrahle, der im Inneren des Kristalls in der Richtung der Strahlenachse fortgepflanzt wird, eine unendliche Anzahl von Wellenebenen zugehören, deren Normalen auf dem Mantel eines Kegels liegen. *An der Austrittsstelle der Strahlenachsen haben wir an der Strahlenfläche nicht zwei Tangentenebenen, sondern einen Tangentenkegel.* Nach dem Austritte des Lichtstrahles aus dem Kristalle bilden die äußeren Lichtstrahlen dann einen Kegelmantel. Dabei ist zu beachten, daß wegen der verschiedenen Lagen der Wellenebenen im Kristall infolge der Brechung Strahlen entstehen, die dann außerhalb des Kristalls verschiedene Richtungen haben.

§ 139. Die Richtungen der Lichtschwingungen und der elektrischen Kraft.

ON (Fig. 143) sei die Normale einer ebenen Welle; die Richtung der Normalen ist durch die Kosinus l , m , n bestimmt. $OP_1 = V_1$ und $OP_2 = V_2$ seien die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche der betrachteten Welle entsprechen. Die Berührungspunkte zwischen der ebenen Welle und der Wellenfläche seien Q_1 und Q_2 . Wir haben dann $OQ_1 = \mathfrak{B}_1$ und $OQ_2 = \mathfrak{B}_2$. Die Koordinaten der Punkte Q_1 und Q_2 be-

zeichnen wir bzw. mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 . Sind $Q_1 P_1 = p_1$ und $Q_2 P_2 = p_2$ die Senkrechten, die von den Berührungspunkten auf die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle gefällt werden, so haben wir

$$p_1^2 = \mathfrak{B}_1^2 - V_1^2,$$

$$p_2^2 = \mathfrak{B}_2^2 - V_2^2.$$

Der Zusammenhang zwischen der Strahlenrichtung $O Q_1$ und $O Q_2$ und der Richtung der Wellennormale $O P_1$ und $O P_2$ ist durch die Gleichungen (l) auf S. 518 gegeben. Die Richtungen der Linien p_1 und p_2 wollen wir näher betrachten. Die Projektion von PQ auf die x -Achse ist $Vl-x$. Bezeichnen wir die Kosinus der Winkel, welche p mit den Achsen bildet, mit λ', μ', ν' , so haben wir

$$\lambda' = \frac{Vl-x}{p}, \quad \mu' = \frac{Vm-y}{p}, \quad \nu' = \frac{Vn-z}{p}.$$

Führen wir in diese Beziehungen für x, y und z die Werte aus den Gleichungen (l') (S. 518) ein, so ergibt sich in Rücksicht auf die obigen Gleichungen für p_1 und p_2

$$(a) \quad \lambda' = \frac{lVp}{a^2 - V^2}, \quad \mu' = \frac{mVp}{b^2 - V^2}, \quad \nu' = \frac{nVp}{c^2 - V^2}.$$

Nach den Gleichungen (m) auf S. 511 haben wir

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \mathfrak{L} : \mathfrak{M} : \mathfrak{N},$$

d. h. p_1 und p_2 geben die Richtungen der Lichtvektoren oder der elektrischen Strömung (s. S. 510). Um den Winkel zwischen $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ zu finden, bestimmen wir den Kosinus

$$\cos(P_1 Q_1 \widehat{P_2 Q_2}) = \lambda_1' \lambda_2' + \mu_1' \mu_2' + \nu_1' \nu_2',$$

oder

$$\cos(P_1 Q_1 \widehat{P_2 Q_2}) = p_1 p_2 V_1 V_2 \sum \frac{l^2}{(a^2 - V_1^2)(a^2 - V_2^2)}.$$

Da aber nach der Gleichung (n) auf S. 511

$$\sum \frac{l^2}{a^2 - V_1^2} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{l^2}{a^2 - V_2^2} = 0$$

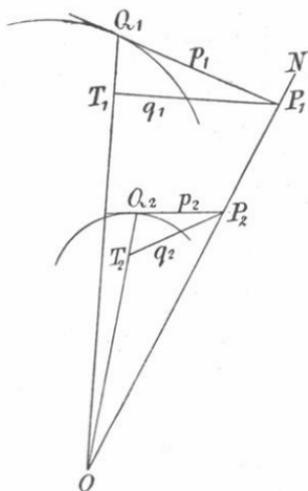


Fig. 143.

ist, so haben wir auch

$$(V_1^2 - V_2^2) \sum \frac{l^2}{(a^2 - V_1^2)(a^2 - V_2^2)} = 0.$$

Sehen wir von dem Falle ab, in dem $V_1 = V_2$ und die Wellennormale mit einer der optischen Achsen zusammenfällt, so ist

$$\cos(P_1 Q_1 \hat{P}_2 Q_2) = 0,$$

und also der Winkel zwischen $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ ein Rechter. Die durch die Richtungskosinus

$$(a') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 : \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{N}_1 = \frac{l}{a^2 - V_1^2} : \frac{m}{b^2 - V_1^2} : \frac{n}{c^2 - V_1^2} \\ \text{und} \\ \Omega_2 : \mathfrak{M}_2 : \mathfrak{N}_2 = \frac{l}{a^2 - V_2^2} : \frac{m}{b^2 - V_2^2} : \frac{n}{c^2 - V_2^2} \end{array} \right.$$

bestimmten Lichtvektoren liegen senkrecht zueinander. In der Richtung einer bestimmten Wellennormale werden nur zwei linear polarisierte Wellen fortgepflanzt; beide Wellen sind senkrecht zueinander polarisiert. Fällt aber die Wellennormale mit einer der optischen Achsen zusammen, d. h. ist $m = 0$ und auch $b^2 - V^2 = 0$, so wird die Schwingungsrichtung unbestimmt. Daher kann in der Richtung einer der optischen Achsen natürliches Licht sich fortpflanzen wie auch Licht, das nach irgend einer Richtung polarisiert ist.

Werden von P_1 und P_2 die Linien $P_1 T_1$ und $P_2 T_2$ bzw. senkrecht zu $O Q_1$ und $O Q_2$ gezogen (Fig. 143), und setzen wir $P_1 T_1 = q_1$ und $P_2 T_2 = q_2$, so ist

$$q : p = V : \mathfrak{B}, \quad \text{also} \quad q = \frac{pV}{\mathfrak{B}}.$$

Ferner ist

$$OT = \frac{V^2}{\mathfrak{B}}.$$

Sind λ , μ und ν die Kosinus der Winkel, die q mit den Koordinatenachsen bildet, so ist

$$\lambda = \frac{Vl - OT \cdot \frac{x}{\mathfrak{B}}}{q} \quad \text{usw.}$$

In Rücksicht auf die Gleichungen (1) auf S. 518 erhalten wir

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(a^2 - V^2) = \frac{l a^2 p}{\mathfrak{B}}, \quad \mu(b^2 - V^2) = \frac{m b^2 p}{\mathfrak{B}}, \\ \nu(c^2 - V^2) = \frac{n c^2 p}{\mathfrak{B}}. \end{array} \right.$$

Auf S. 519 fanden wir für die Richtung der elektrischen Kraft

$$X:Y:Z = \mathfrak{L} a^2 : \mathfrak{M} b^2 : \mathfrak{N} c^2,$$

oder nach der Gleichung (m) auf S. 511

$$(c) \quad X:Y:Z = \frac{l a^2}{a^2 - V^2} : \frac{m b^2}{b^2 - V^2} : \frac{n c^2}{c^2 - V^2}.$$

Also finden wir, daß die $P_1 T_1$ und $P_2 T_2$ die Richtungen der zu den Wellen gehörigen elektrischen Kräfte angeben, die senkrecht sind bzw. zu den Strahlen $O Q_1$ und $O Q_2$.

§ 140. Die einachsigen Kristalle.

Wenn zwei von den Konstanten a , b , c gleich groß sind, z. B. $a = b$, so werden die Verhältnisse wesentlich einfacher, und unsere Betrachtungen finden dann eine wichtige Anwendung bei der Brechung in den einachsigen Kristallen, zu denen die Kristalle des quadratischen und hexagonalen Systems gehören. Die Kristalle des regulären Systems sind optisch isotrop, sie zeichnen sich daher mit Bezug auf die in ihnen auftretenden optischen Erscheinungen durch keine Besonderheiten vor den isotropen Körpern aus, weil wegen der kristallographischen Symmetrie $a = b = c$ sein muß.

Bei den einachsigen Kristallen fallen beide optischen Achsen zusammen, und zwar in die Richtung der z -Achse. Dieses ergibt sich aus den Gleichungen (c) auf S. 514. Wenn nach S. 515 E_1 und E_2 die Winkel sind, die die Wellennormale mit den optischen Achsen bildet, so ist also bei den einachsigen Kristallen stets $E_1 = E_2 = E$. Also erhalten wir für die einachsigen Kristalle aus den Gleichungen (g) auf S. 516

$$V_1^2 = a^2 \quad \text{und} \quad V_2^2 = a^2 \cos^2 E + c^2 \sin^2 E,$$

wo E der Winkel ist, den die Wellennormale mit der optischen Achse bildet.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2 auf anderem Wege zu erhalten, wenden wir die Gleichung (o) auf S. 511 an, die übergeht in

$$(a) \quad V^4 - (a^2 + n^2 a^2 + (1 - n^2) c^2) V^2 + a^2 (n^2 a^2 + (1 - n^2) c^2) = 0.$$

Hieraus finden wir

$$(b) \quad V_1^2 = a^2 \quad \text{und} \quad V_2^2 = n^2 a^2 + (1 - n^2) c^2.$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen überein, weil $\cos E = n$ ist.

Die eine Welle hat also die konstante Geschwindigkeit $V_1 = a$, sie wird als *ordinäre Welle* bezeichnet. Die Geschwindigkeit V_2 der anderen Welle, die wir als *extraordinäre Welle* bezeichnen, hängt von der Richtung der Wellennormale ab, oder von dem Winkel, den die Wellennormale mit der Symmetriachse c bildet. Diese Achse ist die *optische Achse des Kristalles*, die der kristallographischen Achse parallel ist, deren Richtung im Kristall durch die geometrischen Eigenschaften seiner Oberfläche gegeben ist. In der Richtung der optischen Achse des einachsigen Kristalles haben wir nur eine Geschwindigkeit der Wellenebenen und also auch der Strahlen. Als *Hauptschnitt* des einachsigen Kristalles bezeichnen wir jede durch die kristallographische Achse gelegte Ebene, im weiteren Sinne jede Ebene, die der kristallographischen Achse parallel ist, also jede Ebene, in der eine optische Achse liegt. Durch jeden Punkt des einachsigen Kristalles kann eine optische Achse und können unendlich viele Hauptschnitte gelegt werden. Auch kann man durch jede Gerade im Kristall einen Hauptschnitt legen.

Die Gleichung der Strahlenfläche der optisch einachsigen Kristalle erhalten wir, wenn die Gleichung (r') auf S. 522 in der Form

$$\mathfrak{B}^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - ((b^2 + c^2)a^2x^2 + (a^2 + c^2)b^2y^2 + (a^2 + b^2)c^2z^2) + a^2b^2c^2 = 0$$

schreiben und $a = b$ setzen. Dann finden wir

$$(\mathfrak{B}^2 - a^2) \cdot \{a^2(x^2 + y^2) + c^2z^2 - a^2c^2\} = 0.$$

Die Strahlenfläche besteht also aus einer Kugel mit dem Radius a und einem mit ihr konzentrischen Rotationsellipsoid mit der Polarachse $2a$ und der Äquatorialachse $2c$. Kugel und Ellipsoid berühren sich in der Polarachse. In Fig. 144 ist AA_1 die Polarachse oder die optische Achse, AR_1A_1 eine Schnittebene durch die Kugelfläche und AR_2A_1 eine Schnittebene durch das Ellipsoid. OB_2R_1 sei die Normale zur ebenen Welle POQ ; B_1D und B_2R_2 sind zwei Tangentialebenen zur Wellenfläche, die beide zur Wellennormale senkrecht sind. OR_1 und OB_2 sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung der Wellennormale. Die von uns betrachtete Schnittebene, welche

sowohl die optische Achse als auch die Wellennormale enthält, ist ein *Hauptschnitt*. Für die außerordentliche Welle ist OR_2 die Strahlenrichtung, wenn im Punkte R_2 die Ebene B_2R_2 das Ellipsoid berührt. Die Richtung der elektrischen Kraft gibt B_2U_2 , das senkrecht zu OR_2 ist. Für die ordentliche Welle fallen Strahlenrichtung und Wellennormale zusammen, und die Richtung der elektrischen Kraft ist senkrecht zur Ebene der Figur.

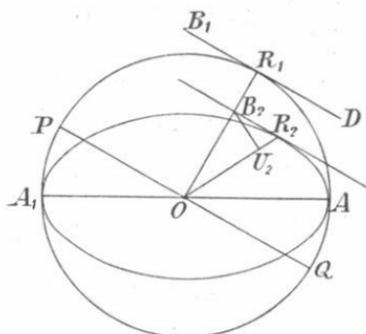


Fig. 144.

In der Fig. 144 ist die Polarachse $AA_1 = 2a$ größer als die Äquatorialachse $2c$; die Kristalle, in denen sich die ordentliche Welle schneller fortpflanzt als die außerordentliche, und also die ordentliche Welle die weniger stark brechbare ist, bezeichnet man als *positive Kristalle*.

Ist dagegen $a < c$, so ist der Kristall *negativ*, bei diesem wird die ordentliche Welle stärker gebrochen als die außerordentliche. Die Kugel kann das Ellipsoid umschließen oder umgekehrt; *Kristalle der ersteren Art nennt man positive, die der zweiten Art negative*. Kalkspat ist ein negativer, Bergkristall ist ein positiver einachsiger Kristall.

Berechnet man nach den Gleichungen (a') auf S. 528 die Richtung des Lichtvektors der außerordentlichen Welle bzw. die dieser Welle zugehörige Strömung, so ergibt sich in Rücksicht auf die Gleichungen (b), daß der Lichtvektor bzw. die Strömung im Hauptschnitte liegen. Wir sagen, daß die Schwingungsrichtung der außerordentlichen Welle im Hauptschnitte liegt, d. h. in der Ebene, die durch die optische Achse und Wellennormale gelegt werden kann. Dagegen ist also die Schwingungsrichtung der ordentlichen Welle zum Hauptschnitte senkrecht. Um die Richtung der elektrischen Kraft für die außerordentliche Welle in bezug auf die Wellennormale zu finden, gehen wir aus von den Gleichungen (c) auf S. 529 und beachten, daß die Richtungskosinus der Wellennormale l , m und n sind. Für den Kosinus des Winkels zwischen der

Richtung der elektrischen Kraft der außerordentlichen Welle und der Richtung der Wellennormale erhalten wir dann

$$\frac{n(a^2 - c^2)\sqrt{1-n}}{\sqrt{a^4 n^2 + c^4(1-n^2)}} = \frac{(a^2 - c^2) \cos E \sin E}{\sqrt{a^4 \cos^2 E + c^4 \sin^2 E}}.$$

Wir betrachten einen polarisierten Lichtstrahl, der z. B. beim Übergange von Luft zum Kristall auf die Oberfläche eines doppelt brechenden Mediums trifft. Die z -Achse sei dem Einfallslot parallel und sei von der Luft in das Innere des doppelt brechenden Mediums gerichtet; die y -Achse sei senkrecht zur Einfallsebene, und die x -Achse sei der Schnittlinie zwischen der Einfallsebene und der brechenden Fläche parallel. Die Komponenten der elektrischen Kraft des einfallenden Strahles können wir nach der Gleichung (c) auf S. 492 und den Gleichungen (f) und (g) auf S. 493 darstellen durch

$$X_e = \mathfrak{L}_e f_e, \quad Y_e = \mathfrak{M}_e f_e, \quad Z_e = \mathfrak{N}_e f_e,$$

wo

$$f_e = F_e \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V} \right),$$

oder, wenn wir nur den reellen Teil berücksichtigen,

$$f_e = F_e e^{k t \left\{ t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V} \right\}}$$

setzen. In diesen Gleichungen ist φ der Einfallswinkel und V die Geschwindigkeit des Lichtes außerhalb des Kristalles. Zu diesen Gleichungen kommt noch die Bedingung, daß die elektrische Kraft zur Richtung des Strahles senkrecht ist. Die Richtungskosinus des letzteren sind durch die Gleichungen (e) auf S. 493 gegeben. Wir haben demnach

$$\mathfrak{L}_e \sin \varphi + \mathfrak{N}_e \cos \varphi = 0.$$

Bei der entsprechenden Bezeichnung für den reflektierten Strahl haben wir

$$X_r = \mathfrak{L}_r f_r, \quad Y_r = \mathfrak{M}_r f_r, \quad Z_r = \mathfrak{N}_r f_r,$$

$$f_r = F_r e^{k t \left\{ t - \frac{l_r x + m_r y + n_r z}{V} \right\}}.$$

Damit die elektrische Kraft senkrecht zur Richtung des Strahles ist, muß

$$\mathfrak{L}_r l_r + \mathfrak{M}_r m_r + \mathfrak{N}_r n_r = 0$$

sein. Endlich haben wir für den gebrochenen Strahl

$$X_g = \mathfrak{L}_g f_g, \quad Y_g = \mathfrak{M}_g f_g, \quad Z_g = \mathfrak{N}_g f_g,$$

$$f_g = F_g e^{k t \left\{ t - \frac{l_g x + m_g y + n_g z}{V'} \right\}}.$$

Die Normalengeschwindigkeit V' hängt von den Richtungskosinus der Wellennormale ab. Die Grenzbedingungen sind dieselben wie bei den isotropen Körpern. Überall in der Grenzfläche, d. h. für $z = 0$, haben wir

$$X_e + X_r = X_g,$$

also

$$\mathfrak{L}_e F_e e^{k t \left\{ t - \frac{x \sin \varphi}{V} \right\}} + \mathfrak{L}_r F_r e^{k t \left\{ t - \frac{l_r x + m_r y}{V} \right\}} = \mathfrak{L}_g F_g e^{k t \left\{ t - \frac{l_g x + m_g y}{V'} \right\}}.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x und y bestehen muß, so haben wir

$$(c) \quad \frac{\sin \varphi}{V} = \frac{l_r}{V} = \frac{l_g}{V'}$$

und

$$(d) \quad 0 = \frac{m_r}{V} = \frac{m_g}{V'}.$$

Demnach ist $m_r = m_g = 0$, d. h. die Wellennormalen des reflektierten und gebrochenen Strahles liegen in der xz -Ebene, d. h. in der Einfallsebene. Da nach (c) $l_r = \sin \varphi$ ist, so ist der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel. Die Richtung des reflektierten Strahles wird also in derselben Weise bestimmt wie bei der Reflexion an einem isotropen Körper.

Wir wollen jetzt nach der von Huygens gegebenen Konstruktion die Richtung der gebrochenen Strahlen ermitteln, wenn das Licht übergeht von einem isotropen Medium zu einem einachsigen negativen Kristall. XX sei die natürliche oder künstlich geschliffene Oberfläche eines einachsigen negativen Kristalles; LL sei das Lot zu dieser Oberfläche. BO und B_1S seien die unter dem Winkel φ gegen das Einfallslot auftreffenden Strahlen. Während der Strahl den Weg DS in der Luft zurücklegt, entstehen um die Punkte zwischen O und S Strahlenflächen, die aus einem Rotationsellipsoid und einer Kugel bestehen. Da der Kristall ein negativer sein soll, so wird die Kugel von dem Rotationsellipsoid umschlossen. OO_1 sei die Richtung der optischen Achse. Die um den

Punkt O liegende zweischalige Strahlenfläche ist in der Fig. 145 dargestellt und besteht aus der Kugel AA und dem Rotationsellipsoid CC . Alle Kugeln und Rotationsellipsoide, die um die Punkte zwischen O und S zu konstruieren sind, sind in bezug auf ihre linearen Dimensionen dem Abstände des betreffenden Punktes von O proportional. Alle diese Kugelflächen haben eine gemeinsame Tangentialebene SS_1 , die durch eine durch den Punkt S und zur Zeichnung senkrechte Gerade gelegt ist. Die Rotationsellipsoide haben die gemeinsame Tangentialebene SS_2 . SS_1 und SS_2 sind bzw. die gebrochene ordent-

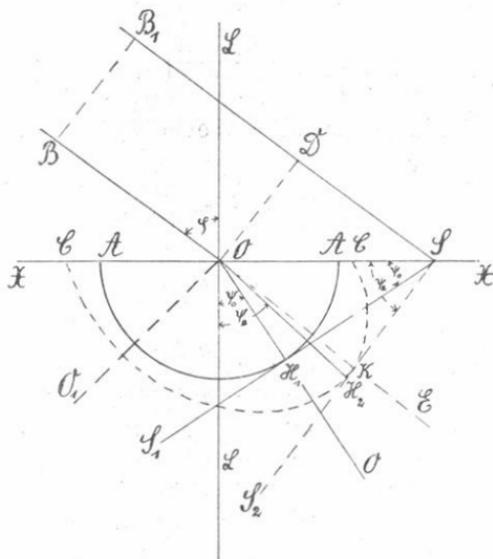


Fig. 145.

liche und außerordentliche Welle. Der gebrochene Strahl stellt die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Strahlenfläche mit dem Berührungspunkte der Wellenebene dar. Demnach ist OH_1 ein ordentlicher und OK ein außerordentlicher Strahl. Der außerordentliche Strahl ist hier der weniger stark brechbare. Der Strahl OH_1 liegt in der Einfallsebene. Jedoch wird der Punkt K im allgemeinen nicht in der Ebene der Zeichnung oder in der Einfallsebene liegen. Dementsprechend ist der außerordentliche Strahl OK durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Die Normale OH_2 zur gebrochenen außerordentlichen Welle SS_2 liegt in der Einfallsebene. Die Fortpflanzung

der ebenen Welle SS_2 erfolgt in der Richtung OH_2 . Der außerordentliche Strahl OK ist nicht senkrecht zur außerordentlichen ebenen Welle SS_2 . Die Wellennormale OH_2 , der außerordentliche Strahl OE und die optische Achse OO_1 liegen in einer Ebene. Die vom Mittelpunkt eines Rotationsellipsoids gefällte Senkrechte auf eine Tangentialebene des Ellipsoids, ferner die Rotationsachse des Ellipsoids und der Berührungspunkt liegen nämlich in einer Ebene, die ein Hauptschnitt des Kristalls ist.

Bezeichnen wir mit n_0 den Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles, mit n_e den des außerordentlichen Strahles und ferner mit N_0 und N_e bzw. die Brechungsexponenten der ordentlichen und der außerordentlichen Welle. Ferner möge V die Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft, \mathfrak{B}_0 und \mathfrak{B}_e mögen die Geschwindigkeiten des ordentlichen und außerordentlichen Strahles und V_0 und V_e bzw. die Geschwindigkeiten der ordentlichen und außerordentlichen Wellenebene sein. Dann ist

$$n_0 = \frac{V}{\mathfrak{B}_0}, \quad n_e = \frac{V}{\mathfrak{B}_e}, \quad N_0 = \frac{V}{V_0}, \quad N_e = \frac{V}{V_e}.$$

Die Brechungswinkel der ordentlichen und außerordentlichen Welle wollen wir bzw. mit ψ_0 und ψ_e bezeichnen; φ ist der Einfallswinkel. Wird das Licht in der Zeit t fortgepflanzt von D nach S , so ist

$$DS = V \cdot t; \quad OH_1 = \mathfrak{B}_0 \cdot t = V_0 \cdot t; \quad OH_2 = V_e \cdot t; \quad OK = \mathfrak{B}_e \cdot t.$$

Also ist

$$\mathfrak{B}_0 = V_0 \quad \text{und} \quad n_0 = N_0.$$

Ferner haben wir

$$OH_1 = \mathfrak{B}_0 \cdot t = V_0 t = OS \cdot \sin \psi_0; \quad OH_2 = V_e \cdot t = OS \cdot \sin \psi_e$$

und ferner

$$DS = V \cdot t = OS \cdot \sin \varphi.$$

Aus diesen Beziehungen finden wir

$$N_0 = \frac{V}{V_0} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi_0} = n_0 \quad \text{und} \quad N_e = \frac{V}{V_e} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi_e},$$

d. h. die *Brechungsexponenten beider Wellen sind gleich den Verhältnissen des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels*. Dabei ist N_0 konstant, während N_e von der Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle abhängt.

Liegt die optische Achse in der Einfallsebene, so liegt auch der außerordentliche Strahl in der Einfallsebene. In Fig. 146 ist dieser besondere Fall dargestellt und zwar für einen positiven Kristall. OO_1 ist die optische Achse des Kristalles. BO

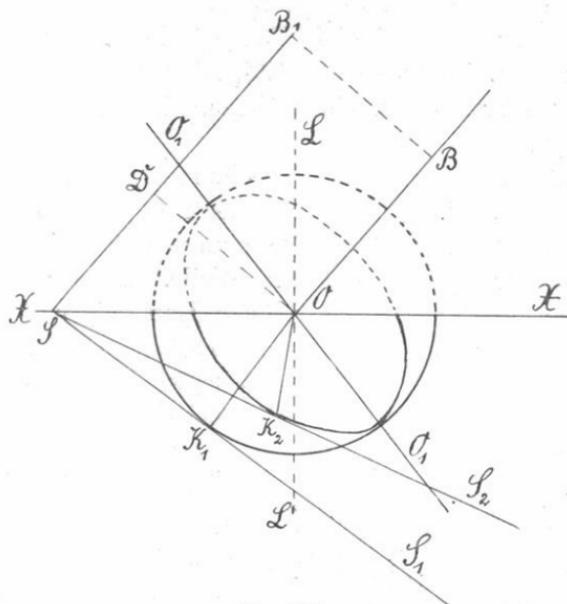


Fig. 146.

und $B_1 S$ stellen die einfallenden Strahlen dar. OK_1 und OK_2 sind bzw. ein ordentlicher und ein außerordentlicher Strahl. In dem betrachteten Falle (Fig. 146) liegt der außerordentliche Strahl in der Einfallsebene. Bei einem positiven Kristalle ist der ordentliche Strahl der weniger stark brechbare.

§ 141. Absorbierende Substanzen.

Die Gesetze der Reflexion von Lichtstrahlen an stark absorbierenden Substanzen mit anomaler Dispersion stehen in einem gewissen Zusammenhange mit den Gesetzen der Reflexion an Metallen. Malus hat nachgewiesen, daß durch einfache Reflexion gewöhnlicher Strahlen an metallischen Flächen geradlinig polarisierte Strahlen nicht entstehen. Fällt nämlich ein natürlicher Lichtstrahl auf eine Metallfläche, so ist der reflektierte Strahl im allgemeinen zum Teil polarisiert. Eine vollständige Polarisation tritt bei der Reflexion an Metall-

flächen niemals ein; nur bei einem bestimmten Einfallswinkel — dem *Haupteinfallswinkel* — tritt ein Höchstwert der Polarisation auf. Fällt ein in der Einfallsebene oder senkrecht zur Einfallsebene polarisierter Lichtstrahl auf eine Metallfläche, so liegt die Polarisationssebene des reflektierten Strahles ebenfalls bzw. in der Einfallsebene oder senkrecht zu dieser. Dabei hängt die Menge des reflektierten Lichtes in den betrachteten Fällen von dem Einfallswinkel ab, und ist stets größer als Null. Bemerkenswert ist besonders, daß die reflektierten Strahlen eine Amplitudenänderung und eine Phasenänderung aufweisen, die für die beiden oben erwähnten Lagen der Polarisationssebene verschieden sind. Bildet also die Polarisationssebene den Winkel δ mit der Einfallsebene so ist der reflektierte Strahl *elliptisch polarisiert*.

Nach der elektromagnetischen Lichttheorie muß die Absorption des Lichtes in allen solchen Substanzen auftreten, die nicht vollkommene Isolatoren sind. In solchen Substanzen wird ein Teil der Energie der Strahlung wegen des Leitungsvermögens in Wärme nach dem Jouleschen Gesetze verwandelt. Statt der auf S. 493 gegebenen Komponenten der Strömung haben wir jetzt als Komponenten (s. S. 327)

$$(a) \quad c_x = \sigma X + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \quad c_y = \sigma Y + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad c_z = \sigma Z + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

für unvollkommene isotrope Isolatoren einzuführen. Setzt man die magnetische Permeabilität $\mu = 1$, so lauten nach S. 429 die Feldgleichungen

$$(b) \quad \frac{4\pi c_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{4\pi c_y}{c} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad \frac{4\pi c_z}{c} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y};$$

$$(c) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Als Grenzbedingungen für den Übergang von einem Medium zum anderen gelten auch hier die auf S. 443 entwickelten Gleichungen, indem die der Grenzfläche parallelen Komponenten der magnetischen und elektrischen Kraft zu beiden Seiten an der Grenzfläche selbst einander gleich sein müssen.

Wir beschränken uns auf diese Bemerkungen über die optischen Eigenschaften absorbierender Körper und verweisen wegen der weiteren theoretischen Untersuchungen auf die Arbeiten von P. Drude.¹⁾

¹⁾ Vgl. P. Drude, Lehrbuch der Optik. 2. Aufl. S. 340 ff.