Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Zehnter Abschnitt. Die Elektronentheorie

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

oder

$$z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots$$

ist. Die Gleichungen (c) stellen also *stehende Schwingungen* dar.

Die Knotenpunkte der magnetischen Kraft liegen an den Stellen, wo

$$z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots$$

ist, während die Bäuche sich an den Stellen

$$z = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2} \ldots$$

befinden. *Wir erkennen daraus, daß die Knotenpunkte der magnetischen Kraft mit den Bäuchen der elektrischen Kraft zusammenfallen und umgekehrt* (vgl. S. 435).

Zehnter Abschnitt.

Die Elektronentheorie.

§ 120. Das elektrische Elementarquantum.

Die Maxwellsche Theorie ist besonders zur Darstellung der Erscheinungen des elektromagnetischen Feldes geeignet. Die sich aus ihr ergebende elektromagnetische Theorie des Lichtes reicht jedoch nicht aus, um eine Reihe von Erscheinungen zu erklären, zu denen u. a. die Dispersion des Lichtes, das Zeemansche Phänomen gehören. Eine weitere Fortbildung hat die Maxwellsche Theorie dann durch die Elektronentheorie erhalten. Die Grundgesetze der Elektronentheorie sind wohl zuerst von H. A. Lorentz klar ausgesprochen und sind von ihm auch auf die elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung und auf die Optik der bewegten Körper mit Erfolg angewandt.

Nach der Elektronentheorie sollen die Stellen des Raumes, von denen elektromagnetische Wirkungen ausgehen und an denen diese Wirkungen auftreten, unteilbare Elementarquanten, die *Elektronen*, enthalten. Wir gelangen damit in der Elektrizitätslehre zu einer atomistischen Vorstellung, die schon durch die bei der Elektrolyse auftretenden Vorgänge eingeführt ist.

In den Elektrolyten sind die Elektronen an die ponderablen Atome gebunden. Nach der Hypothese der elektrolytischen Dissoziation kann sich jedes Molekül eines gelösten Salzes in zwei Atome oder Atomgruppen mit entgegengesetzten und dem Betrage nach gleichen Ladungen oder in zwei in der Lösung regellos wandernde Ionen spalten. Durch Wiedervereinigung getrennter Ionen und Spaltung von Molekülen in Ionen bleibt die Zahl der dissoziierten Moleküle nahezu konstant. Wir können uns dabei vorstellen, daß z. B. in einer NaCl-Lösung ein Teil der NaCl-Moleküle in positive Na-Ionen und in negative Cl-Ionen zerlegt wird und zwar dadurch, daß das Na-Atom sich in ein positives Natrium-Ion und in ein negatives Elektron auflöst, das zu dem Chloratom übergeht und dieses zu einem negativen Ion macht. Die Bezeichnung „*Elektron*“ für das Elementarquantum oder Atom der negativen Elektrizität rührt von J. Stoney her.

Bringt man den Elektrolyten zwischen zwei Elektroden, zwischen denen eine Potentialdifferenz besteht, so beginnt eine Bewegung der negativen Ionen nach der Anode und der positiven Ionen nach der Kathode hin. Das negative Ion schlägt sich an der Anode nieder und gibt sein Elektron an die Anode ab, während das positive Ion sich nach der Kathode bewegt und von dieser ein Elektron aufnimmt, um zum neutralen Atom zu werden. Die an die Anode abgegebenen Elektronen gehen von dieser von einem Atome zum anderen über. Wir müssen dementsprechend den Strom im metallischen Leiter, wo chemische Vorgänge neben der Stromleitung nicht auftreten, als eine Bewegung der freien Elektronen durch die Zwischenräume der Atome des festen Leiters ansehen. Während in den Leitern die Elektronen je nach den auftretenden Reibungswiderständen mehr oder weniger frei beweglich sind, werden in den Nichtleitern die Elektronen in bestimmten Gleichgewichtslagen festgehalten. Äußere Kräfte bewirken in den Isolatoren eine sehr geringe Verschiebung der Elektronen aus den Gleichgewichtslagen oder Schwingungen des Elektrons um eine Gleichgewichtslage.

Jeder Valenzwert eines elementaren oder zusammengesetzten elektrolytischen Ions ist mit dem gleichen positiven oder negativen Elementarquantum ε geladen. Dieses Elementarquantum ε hat in Gasen und wahrscheinlich auch in Metallen denselben Wert wie in den Elektrolyten und stellt also eine universelle Konstante dar, die in folgender Weise berechnet werden kann. Nach den Beobachtungen entwickelt die Einheit der Stromstärke in absolutem elektromagnetischen Maße in der Sekunde die Menge 0,0001036 Gramm Wasserstoff. Demnach transportiert 1 Gramm Wasserstoff die Elektrizitätsmenge $9660 \cdot 3 \cdot 10^{10}$, gemessen in absoluten elektrostatischen Einheiten. Nach der kinetischen Gastheorie beträgt die Zahl der Moleküle in einem Kubikzentimeter bei normaler Temperatur und bei normalem Drucke etwa $5 \cdot 10^{23}$, d. i. die Loschmidtsche Zahl. Demnach würde das Elementarquantum ε, in absoluten elektrostatischen Einheiten ausgedrückt, gleich

$$\frac{9660 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{23}} = 5{,}8 \cdot 10^{-10}$$

sein. Aus den experimentellen Messungen von Townsend, J. J. Thomson und Wilson hat sich für ε als genauester Wert $3 \cdot 10^{-10}$ in absoluten elektrostatischen Einheiten ergeben. Diese Messungen beruhen auf der Erscheinung der Bildung von Nebeltröpfchen an Ionen. Wenn man ein Volumen gesättigten Wasserdampfes plötzlich vergrößert, so sinkt infolge der adiabatischen Expansion die Temperatur, und um die im Dampfe vorhandenen Staubteilchen als Kerne bilden sich Nebelbläschen. Sind keine Staubteilchen vorhanden, und wird zur Erzeugung freier Ionen vor der adiabatischen Expansion der Wasserdampf z. B. mit Röntgenstrahlen durchsetzt, so bilden sich nach der Expansion die Nebelbläschen um die freien Ionen und zwar besonders um die negativen Ionen, die überhaupt leichter die Kondensation bewirken als die positiven Ionen. Wilson brachte ein mit Wasserdampf gesättigtes Gas zwischen die parallelen Elektroden eines Plattenkondensators, ionisierte durch Röntgenstrahlen das Gas und bewirkte dann eine adiabatische Expansion. Die um die Ionen gebildeten Nebeltröpfchen sanken in einem Falle allein unter dem Einflusse der Schwerkraft, im anderen Falle wirkte ein elektrisches Feld im gleichen Sinne oder im entgegengesetzten wie die

Schwerkraft auf die fallenden Tröpfchen ein. Durch das Verhältnis der hierbei beobachteten Geschwindigkeiten, ferner durch die Masse des Tröpfchens und aus der Stärke des elektrischen Feldes fand Wilson $\varepsilon = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ absolute elektrostatische Einheiten.

Ausgehend von der Elektrizitätsleitung in stark verdünnten Gasen und den sogenannten *Kathodenstrahlen* kam man zu der Annahme, daß die letzteren hervorgehen aus der sehr schnellen fortschreitenden Bewegung von sehr kleinen Partikelchen, die eine negative Elektrizitätsmenge enthalten, auch eine gewisse Trägheit besitzen, die jedoch sehr viel kleiner als die der elektrolytischen Ionen ist. Die im magnetischen Felde beobachtete Ablenkung der Kathodenstrahlen ist so groß wie die Ablenkung eines von der Kathode geradlinig ausgehenden Konvektionsstromes, der aus negativ geladenen Partikeln besteht. Das Verhältnis der elektrischen Ladung zur trägen Masse dieser Partikelchen erwies sich im magnetischen wie auch im elektrischen Felde als unabhängig von dem Material der Kathode und von dem im Entladungsrohr enthaltenen verdünnten Gase. Durch das Entladungspotential wird die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen wesentlich bestimmt, indem die potentielle Energie eines Partikelchens an der Kathodenoberfläche bei hinreichend geringem Drucke im Entladungsrohr vollständig in kinetische Energie des Partikelchens umgewandelt wird. Die vorhin erwähnten Beobachtungen ergaben als mittleren Wert für das Verhältnis der Ladung zur trägen Masse ε / m der Teilchen der Kathodenstrahlen die Zahl $5{,}6 \cdot 10^{17}$. Die sogenannte Faradaysche Konstante, d. h. die von einem Gramm Wasserstoff übertragene Elektrizitätsmenge, ist durch das Verhältnis der Ladung ε zur Masse m_h des Wasserstoffions gegeben, d. h. wir haben

$$\frac{\varepsilon}{m_h} = 9660 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 2{,}9 \cdot 10^{14}.$$

wenn ε in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen wird. Das Verhältnis ε / m_h eines elektrolytischen Wasserstoffions ist also etwa 2000 mal kleiner als das Verhältnis ε / m des Teilchens der Kathodenstrahlen. Wir nehmen daher an, daß jedes Teilchen der Kathodenstrahlen ein elektrisches Elementarquantum als Ladung enthält, daß seine Masse aber nur etwa ein Zweitausendstel der Masse des Wasserstoffions beträgt.

Das Zeemansche Phänomen des Einflusses eines magnetischen Feldes auf die Schwingungsdauer des von einer Lichtquelle ausgesandten Lichtes wird durch die Annahme erklärt, daß die den Linien eines Linienspektrums zugehörigen Lichtschwingungen als Schwingungen der Elektronen angesehen werden können. Auch bei diesen Elektronen steht die Ladung zur Masse in demselben Verhältnisse wie bei den Kathodenstrahlen.

So rechtfertigen also eine Reihe von Erscheinungen die Einführung der atomistischen Hypothese in die Elektrizitätslehre, und wir wollen im nachfolgenden die Elektrizität aus kleinsten elektrischen Elementarquanten zusammengesetzt betrachten.

Aus den vorher mitgeteilten Beobachtungen und Erwägungen geht schon hervor, daß man Ursache gehabt hat, den negativen Elementarquanten, die auf Stoneys Vorschlag kurzweg als Elektronen bezeichnet werden, eine freiere Bewegung zuzuschreiben als den positiven Elementarquanten. Die positive Elektrizität scheint vielmehr unveränderlich mit der Materie verbunden zu sein. Wir können uns vorstellen, daß das neutrale Atom demnach eine bestimmte positive Ladung enthält und ferner ein oder mehrere Elektronen, die, durch elektrische Kräfte beeinflußt, die positive Ladung des Atomes umkreisen. Durch ultraviolette Strahlen, durch Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen, Strahlung radioaktiver Substanzen, ferner durch die Erwärmung auf hohe Temperatur und durch den Stoß der Ionen oder Elektronen kann die Ionisierung eines Gases bewirkt werden, indem sich eine gewisse Anzahl der Atome in positive Ionen und in Elektronen auflöst.

§ 121. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie.

Die Elektronentheorie geht von dem Grundsatze aus, daß der alle Materie durchdringende Äther, in dem nach der Maxwellschen Vorstellung elektrische und magnetische Verschiebungen auftreten können, in vollkommener Ruhe ist. In der Elektronentheorie behalten auch die von Maxwell entwickelten Vorstellungen ihre Gültigkeit, indem die elektromagnetischen Wirkungen mit einer endlichen Geschwindigkeit vom Äther übertragen werden. Die Ausgangs- und Angriffspunkte dieser Wirkungen sind die unteilbaren elektrischen Elementarquanten, und die Wirkungen zwischen diesen werden durch den Äther vermittelt. Die auf ein Elektron wirkende Kraft ist also durch den Zustand des Äthers an der Stelle gegeben, wo sich das Elektron befindet. Der Zustand des Äthers an einer Stelle hängt aber ab von der Lage und der Bewegung der in der Umgebung dieser Stelle vorhandenen Elektronen, indem durch diese Verschiebungen im Äther verursacht werden. Dabei nehmen wir ferner an, daß in allen Körpern überall sich Elektronen vorfinden, und daß sich die Elektronen unabhängig von den Körpern oder zugleich mit diesen bewegen können. Befinden sich die Elektronen in Ruhe, so handelt es sich um eine elektrostatische Erscheinung; durch den Gehalt an Elektronen wird die elektrische Ladung der Körper bestimmt. Der konstante Strom muß als eine Strömung von Elektronen angesehen werden, die in gleichen Abständen mit gleichförmiger Geschwindigkeit aufeinander folgen. Die in gleichförmiger Strömung aufeinander folgenden Elektronen sind auch Ursache der magnetostatischen Erscheinungen. Bei den veränderlichen Strömen handelt es sich um ungleichförmige Bewegungen der Elektronen, und bei den optischen Erscheinungen um periodische Bewegungen der Elektronen.

Wir wenden uns nach diesen Bemerkungen zur Aufstellung der Grundgleichungen der Elektronentheorie.

In Wirklichkeit ist die Verteilung der Elektronen in einem Raume eine diskontinuierliche. Handelt es sich jedoch um die Betrachtung von Entfernungen, die sehr groß im Vergleiche mit dem gegenseitigen Abstande der benachbarten Elektronen sind, so ist es gestattet, eine kontinuierliche Verteilung der Ladung anzunehmen. Von diesem Standpunkte aus dürfen wir annehmen, daß auch hier das Gausssche Theorem gilt. Betrachten wir also eine geschlossene Fläche, und ist $\mathfrak{E}_n$ die zu ihrer Oberfläche senkrechte Komponente der elektrischen Feldstärke, so haben wir nach § 62 (c′)

$$\int \mathfrak{E}_n \cdot df = 4\pi \int \varrho \cdot dv,$$

indem dv ein Volumenelement des betrachteten Raumes, und

df ein Element der Oberfläche des Raumes ist. Wendet man den Gaussschen Satz auf ein Parallelepipedon an in der in § 62 angegebenen Weise, so ergibt sich, daß

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho$$

sein muß. Diese Gleichung gilt überall dort, wo sich ruhende oder in Bewegung begriffene Elektronen befinden.

Im freien Äther dagegen haben wir die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 = \operatorname{div} \mathfrak{E}.$$

Dieselbe Betrachtung können wir mit Bezug auf die magnetischen Kräfte anstellen. Da wir annehmen, daß keine wahre Magnetismusmenge irgendwo existiert, so ergibt sich die zweite Grundgleichung

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung gilt sowohl im Inneren der Elektronen wie auch im freien Äther.

In einem Gebiete des betrachteten Raumes können aus zwei Gründen elektrische Ströme auftreten. Zunächst können sich die Ladungen selbst bewegen, und diesen Transport der Elektrizität durch bewegte und mit Ladung versehene Körper nennen wir einen *Konvektionsstrom.* Ist ϱ die Dichte der Ladung eines Volumenelementes und $\mathfrak{u}$ seine Geschwindigkeit, so haben wir für die Dichte $\mathfrak{k}$ des Konvektionsstromes

$$\mathfrak{k} = \varrho\,\mathfrak{u}$$

in elektrostatischem Maße. Demgemäß haben wir für die Komponenten des Konvektionsstromes in elektromagnetischem Maße

$$\frac{1}{c}\varrho u_x, \quad \frac{1}{c}\varrho u_y, \quad \frac{1}{c}\varrho u_z,$$

wo c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume ist.

Daneben können auch elektrische Verschiebungen an der Stelle, wo sich das Elektron befindet, auftreten. Die Komponenten des Verschiebungsstromes sind nach S. 327

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t}, \quad \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial Z}{\partial t}.$$

Wir erhalten also aus den Gleichungen (c) auf S. 334

$$\text{(III)} \quad \left\{\begin{aligned} c\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) &= 4\pi \varrho u_x + \frac{\partial X}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) &= 4\pi \varrho u_y + \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) &= 4\pi \varrho u_z + \frac{\partial Z}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Nach dem Vorhergehenden sind die Komponenten des Gesamtstromes

$$\frac{1}{4\pi c}\left(4\pi \varrho u_x + \frac{\partial X}{\partial t}\right), \quad \frac{1}{4\pi c}\left(4\pi \varrho u_y + \frac{\partial Y}{\partial t}\right), \quad \frac{1}{4\pi c}\left(4\pi \varrho u_z + \frac{\partial Z}{\partial t}\right).$$

Vektoranalytisch können wir diese dritte Grundgleichung in der Form

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{k} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$$

darstellen, indem wir die Komponenten von $\mathfrak{E}$ mit X, Y und Z bezeichnet haben.

Bezeichnet man die Zahl der Induktionslinien, die ein Leiter umschließt, mit $\mathfrak{Z}$, so ist die im Leiter induzierte elektromotorische Kraft nach S. 370

$$\int \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}.$$

Wendet man diesen Satz auf ein Rechteck an, das die Seiten dy und dz hat, so ergibt sich in derselben Weise wie auf S. 423

$$\text{(IV)} \quad \left\{\begin{aligned} c\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial \beta}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

oder

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0.$$

§ 122. Die Kraft, die auf eine sich bewegende Ladung wirkt.

Eine Elektrizitätseinheit bewege sich mit der Geschwindigkeit u. Auf diese Elektrizitätsmenge wirken zwei Kräfte, von denen die eine die elektrische Feldstärke ist, die der Stelle zugehört, wo sich die Elektrizitätseinheit gerade befindet. Die andere Kraft rührt vom magnetischen Felde her, indem sich die Einheitsladung bewegt. Diese letztere Kraft können wir in folgender Weise bestimmen. Die auf ein Stromelement $i \cdot d s$ wirkende Kraft ist, wenn φ der Winkel zwischen Stromrichtung und Feldrichtung ist,

$$\mathfrak{H}\, i \cdot d s \cdot \sin \varphi ,$$

indem $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke und i die Stromstärke in elektromagnetischem Maße ist. Kommt der Strom dadurch zustande, daß sich die positive Elektrizität mit der Dichte ϱ und mit der Geschwindigkeit u im Leiter mit dem Querschnitte S bewegt, so ist

$$i = \frac{1}{c} \varrho\, u\, S .$$

Wir erhalten demnach

$$\mathfrak{H}\, i \cdot d s \cdot \sin \varphi = \frac{1}{c} \mathfrak{H}\, \varrho\, u\, S \cdot d s \cdot \sin \varphi .$$

Bezeichnet man mit q die Ladung des Stromelementes, so ist $q = S \cdot d s \cdot \varrho$, also wird

$$\mathfrak{H}\, i \cdot d s \cdot \sin \varphi = \frac{1}{c} \mathfrak{H}\, u\, q \cdot \sin \varphi .$$

Die gesuchte Kraft ist also die Resultierende aus $\mathfrak{E}$ und $1/c \cdot \mathfrak{H}\, u\, q \cdot \sin \varphi$. Bewegt sich die Elektrizitätseinheit in der Richtung der y-Achse mit der Geschwindigkeit u_y, so wirkt auf diese Ladungseinheit in der Richtung der x-Achse die Kraft $1/c \cdot \gamma\, u_y$. Bewegt sich dagegen in der Richtung der z-Achse eine Elektrizitätseinheit mit der Geschwindigkeit u_z, so wirkt auf diese Ladungseinheit in der Richtung der x-Achse die Kraft $-1/c \cdot \beta\, u_z$. Werden also die Komponenten der auf die Elektrizitätseinheit wirkenden elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{F}$ mit (X), (Y) und (Z) bezeichnet, so haben wir

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} (X) &= X + \frac{1}{c}(\gamma\, u_y - \beta\, u_z), \\ (Y) &= Y + \frac{1}{c}(\alpha\, u_z - \gamma\, u_x), \\ (Z) &= Z + \frac{1}{c}(\beta\, u_x - \alpha\, u_y), \end{aligned} \right.$$

oder wir können diese Gleichungen in die eine

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathfrak{u}, \mathfrak{H}]$$

zusammenfassen.

§ 123. Ein sich bewegendes elektrisches System.

Alle Ladungen des Systems sollen sich mit der Geschwindigkeit $u = u_z$ parallel zur z-Achse bewegen, während u_x und u_y gleich Null sind. Der Zustand in einem Punkte (x, y, z) zur Zeit t ist dann derselbe wie der Zustand im Punkte $(x, y, z + u \cdot dt)$ zur Zeit $t + dt$. Ist dieser Zustand durch eine Funktion ψ gegeben, so ist also

$$\psi = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial z} u \cdot dt,$$

oder

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - u \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Die Grundgleichungen (III) ergeben also, wenn wir $u = p \cdot c$ setzen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z} = - p \dfrac{\partial X}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} = - p \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = - p \dfrac{\partial Z}{\partial z} + 4 \pi p \varrho. \end{cases}$$

Ferner gehen die Grundgleichungen (IV) über in

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = p \dfrac{\partial \alpha}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = p \dfrac{\partial \beta}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = p \dfrac{\partial \gamma}{\partial z}. \end{cases}$$

Das betrachtete System ist ein elektrischer Strom, der sich in unveränderlicher Richtung bewegt; die in der Richtung der z-Achse liegende Komponente der magnetischen Kraft dieses Stromes ist gleich Null, d. h. $\gamma = 0$. Demnach werden die beiden ersten der Gleichungen (b) durch den Ansatz

$$\text{(d)} \qquad \beta = p X, \quad \alpha = - p Y$$

erfüllt. Die dritte der Gleichungen (b) ergibt dann

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4 \pi \varrho,$$

d. h. eine Beziehung, die mit der Grundgleichung (I) identisch ist. In Rücksicht auf (d) nehmen die Gleichungen (c) die Form an

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (1 - p^2)\frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = (1 - p^2)\frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Demnach müssen die Kraftkomponenten X, Y, Z aus einem skalaren elektromagnetischen Potential φ ableitbar sein, indem

$$\text{(e)} \qquad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -(1 - p^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist. Aus der Grundgleichung (I) erhalten wir dann

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - p^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\pi\varrho = 0.$$

Die Komponenten der magnetischen Feldstärke sind nach (d)

$$\text{(g)} \qquad \alpha = p\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \beta = -p\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma = 0.$$

Für die Komponenten der elektromagnetischen Kraft, die auf eine Elektrizitätseinheit wirkt, welche an der Bewegung des Systems teilnimmt, erhalten wir nach den Grundgleichungen (V)

$$(X) = X - \frac{u}{c}\beta; \quad (Y) = Y + \frac{u}{c}\alpha; \quad (Z) = Z.$$

Diese Gleichungen können wir auch in der Form

$$\text{(h)} \qquad (X) = -(1 - p^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (Y) = -(1 - p^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$(Z) = -(1 - p^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

schreiben. Auch diese Kräfte sind aus dem Potentiale $(1 - p^2)\varphi$ ableitbar.

Die *Energie des betrachteten Systems* besteht aus zwei Teilen, die wir mit W_e und W_m bezeichnen. W_e ist die elektrostatische und W_m die elektromagnetische Energie. Nach § 81 haben wir

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\,dv$$

und

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dv.$$

Wir erhalten daher

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + (1 - p^2)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dv,$$

$$W_m = \frac{p^2}{8\pi}\int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dv.$$

Für die Differenz $W_e - W_m$ finden wir

$$W_e - W_m = \frac{1-p^2}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + (1-p^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dv.$$

Durch teilweise Integration erhalten wir aus dieser Gleichung in Rücksicht auf (f)

$$W_e - W_m = \frac{1-p^2}{2}\int\varrho\,\varphi\,dv. \tag{i}$$

§ 124. J. J. Thomsons Elektron.

Wir wollen jetzt eine Ladung betrachten, die sich um den Anfangspunkt des Koordinatensystems herum befindet, während im ganzen übrigen Raume keine Ladung vorhanden ist. Die betrachtete Punktladung soll sich in der Richtung der z-Achse bewegen. Das Koordinatensystem soll starr mit der Ladung verbunden sein und sich mit dieser im Raume bewegen. Außerhalb des Koordinatenanfangspunktes haben wir dann nach § 123 (f)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (1-p^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{a}$$

Ersetzen wir z durch $z'\sqrt{1-p^2}$, so lautet die Gleichung (a)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2} = 0.$$

Somit finden wir

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}},$$

oder

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}}} = \frac{A}{R},$$

als Integral von (a)

Die Komponenten der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ ergeben sich aus § 123 (e) und sind

$$X = \frac{Ax}{R^3}, \quad Y = \frac{Ay}{R^3}, \quad Z = \frac{Az}{R^3}$$

indem

$$|\mathfrak{E}| = \frac{Ar}{R^3}, \quad r^2 = x^2+y^2+z^2$$

ist. *Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ wirkt also in der Richtung von r, d. h. ist parallel dem Vektor von dem betrachteten Punkte nach dem jeweiligen Orte des Elektrons.*

Wir finden also

$$\mathfrak{E} = \frac{A\,\mathfrak{r}}{R^3}.$$

Die Ladung im Anfangspunkte des Koordinatensystems sei mit e bezeichnet. Dann haben wir nach dem Gaussschen Satze vgl. S. 231 Gleichung (c′)

$$4\pi e = 2\int_0^{\pi/2} \mathfrak{E}\cdot 2\pi r^2 \sin\Theta\cdot d\Theta,$$

wo Θ der Winkel zwischen r und der z-Achse ist. Der letzten Gleichung können wir die Form

$$e = A\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\Theta\, d\Theta}{\left(1+\frac{p^2}{1-p^2}\cos^2\Theta\right)^{3/2}} = A\cdot\sqrt{1-p^2}$$

geben. Wir finden also, daß

(b) $$\varphi = \frac{e}{\sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}}} = \frac{e}{s}$$

und

(c) $$|\mathfrak{E}| = \frac{e\,r}{\sqrt{1-p^2}\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}\right)^{3/2}}$$

ist. Setzen wir

$$s^2 = (x^2+y^2)(1-p^2)+z^2,$$

so wird

(d) $$\mathfrak{E} = \frac{e\,\mathfrak{r}}{s^3}(1-p^2).$$

Würde das System in Ruhe sein und wäre $u=0$ und also auch $p=0$, so würde die elektrische Kraft

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{e\,\mathfrak{r}}{r^3}$$

sein. Also ist das Verhältnis der elektrischen Kräfte bei einer Bewegung der Ladung und bei ruhender Ladung

$$\frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{E}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}\left(1+\frac{p^2}{1-p^2}\cos^2\Theta\right)^{3/2}}.$$

Dieses Verhältnis ist für $\Theta=0$ gleich $1-p^2$, aber für $\Theta=90^0$ gleich $1/\sqrt{1-p^2}$. Demnach hat die Bewegung zur Folge, daß die Kraftlinien sich aus der Richtung, in der sich die Ladung bewegt, entfernen, und sich zusammendrängen um eine Ebene, die zur Bewegungsrichtung senkrecht steht. Wird die Geschwindigkeit der Bewegung gleich der Lichtgeschwindigkeit, so ist $p = 1$, und dann sind alle elektrischen Kraftlinien zur Bewegungsrichtung senkrecht.

Die Komponenten der magnetischen Kraft werden nach S. 463 Gleichung (g)

$$\alpha = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \frac{e y}{\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}\right)^{3/2}};$$

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \frac{e x}{\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}\right)^{3/2}}; \qquad \gamma = 0.$$

Die magnetische Kraft ist also

$$|\mathfrak{H}| = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \frac{e \sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}\right)^{3/2}}.$$

Der magnetische Vektor $\mathfrak{H}$ liegt also senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons und senkrecht zum Vektor $\mathfrak{r}$, der vom betrachteten Punkte nach dem jeweiligen Orte des Elektrons hinweist. Wir können auch die Komponenten des magnetischen Vektors $\mathfrak{H}$ darstellen durch

$$\alpha = -(1-p^2)\frac{e y}{s^3}\frac{u}{c}; \qquad \beta = (1-p^2)\frac{e x}{s^3}\frac{u}{c}; \qquad \gamma = 0,$$

und demgemäß erhalten wir

$$\text{(e)} \qquad \mathfrak{H} = \frac{(1-p^2)e}{s^3 c} \cdot [\mathfrak{u}, \mathfrak{r}] = \frac{1}{c}[\mathfrak{u}, \mathfrak{E}].$$

Bewegt sich die punktförmige Ladung, so bewegt sich mit ihr das durch die Gleichungen (d) und (e) bestimmte Feld.

Die Komponenten der elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{F}$, die auf die mitbewegte Einheit der Ladung wirkt, sind nach § 123 (h) durch die Ableitungen des Potentiales $(1-p^2)\varphi$ darstellbar. Die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{F}$ kann also als der negative Gradient eines Skalars $(1-p^2)\varphi$ ausgedrückt werden, der als das *Konvektionspotential* ψ

$$\psi = (1-p^2)\varphi$$

bezeichnet wird. Für $p = 0$ geht das Konvektionspotential in das elektrostatische Potential über.

Wir finden

$$\psi = \frac{(1-p^2)\cdot e}{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = -\nabla\Psi.$$

Für die Flächen konstanten Konvektionspotentiales ist

$$s = \sqrt{(x^2+y^2)(1-p^2)+z^2} = \text{konst.},$$

d. h. diese Flächen sind abgeplattete Rotationsellipsoide, deren Mittelpunkt mit der punktförmigen Ladung zusammenfällt und deren Rotationsachse in der Bewegungsrichtung liegt. Das Verhältnis der Rotationsachse zu einer ihr senkrechten Achse ist $(1-p^2)$; die Abplattung wird um so größer, je größer p ist, d. h. je höher die Geschwindigkeit der Ladung ist. Diese Ellipsoide werden als *Heaviside-Ellipsoide* bezeichnet. Senkrecht zu diesen Flächen ist die Kraft, die das Elektron auf eine Ladung ausübt, die sich mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung bewegt.

Wir wollen noch einen anderen Ausdruck für das Potential φ ableiten. Die von uns eingeführte Größe φ hat wohl eine Ähnlichkeit mit dem elektrostatischen Potential, aber sie unterscheidet sich von diesem in einem wesentlichen Punkte, indem sie nicht nur von der Größe der Ladung, sondern auch von deren Geschwindigkeit abhängt. Hierzu bemerken wir das Folgende. Die Ladung e möge sich im Punkte O (Fig. 127) befinden und sich in der Richtung OR bewegen. Wir wollen ferner annehmen, daß die Ladung e die Strecke $O'O$ zurückgelegt hat in der Zeit dt, die das Licht gebraucht, um den Weg $O'P = r'$ zurückzulegen. Wir haben dann

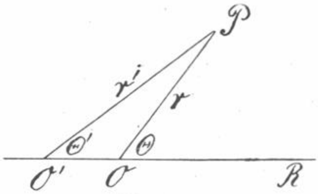

Fig. 127.

$$O'O = u\cdot dt, \quad O'P = c\cdot dt$$

und also

$$O'O = u\cdot\frac{r'}{c} = p\,r'.$$

Ferner bestehen die Gleichungen

$$r\cos\Theta = r'\cos\Theta' - p\,r'; \qquad r\sin\Theta = r'\sin\Theta'.$$

Aus der Gleichung (b) für φ auf S. 465 erhalten wir, da $z = r\cos\Theta$ und $\sqrt{x^2+y^2} = r\cdot\sin\Theta$ gesetzt werden kann,

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(1-p^2)\, r^2 \sin^2 \Theta + r^2 \cos^2 \Theta}}.$$

Führen wir hier r' und Θ' an Stelle von r und Θ ein, so wird

$$\varphi = \frac{e}{r'\,(1 - p\cos\Theta')} = \frac{e\,c}{r'\,(c - u\cos\Theta')}$$

das skalare elektromagnetische Potential einer Punktladung für den Fall, daß $u < c$ und $p < 1$ ist.

Danach könnte es scheinen, als ob das Potential eine gewisse Zeit gebraucht, um sich auszubreiten, weil doch das Potential durch den Abstand bestimmt ist, der zu einer früheren Stellung dieser Ladung gehört, als diejenige ist, welche die Ladung in dem betrachteten Augenblicke einnimmt. Um die Bedeutung des Faktors $c/(c - u\cos\Theta')$ zu erkennen, kann die folgende Betrachtung dienen. Es sei $OQ = dz$ (Fig. 128) ein Linienelement mit der Ladung $e = m \cdot dz$. Wir bestimmen, wie oben, die zu O und Q gehörigen Punkte O' und Q' und setzen $O'Q' = dz'$. Zugleich ist

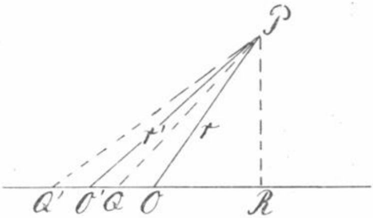

Fig. 128.

$$PR = x, \quad PO = r, \quad PO' = r'.$$

Dann wird, wie oben,

$$O'O = z' - z = p\,r'; \quad x^2 + y^2 + z'^2 = r'^2,$$

also

$$dz' - dz = p \cdot dr' \quad \text{und} \quad z' \cdot dz' = r' \cdot dr',$$

$$dz = dz'\left(1 - p\frac{z'}{r'}\right) = dz'(1 - p \cdot \cos\Theta').$$

Somit finden wir

$$\varphi = \frac{m \cdot dz}{r'\,(1 - p\cos\Theta')} = \frac{m \cdot dz'}{r'}.$$

Wenn sich also die Ladung im Punkte O befindet, so ist doch das Potential durch eine Entfernung r' bestimmt, die zu einer früheren Stellung der Ladung gehört.

§ 125. Abrahams Elektron.

Im § 124 ist eine Annahme über die Gestalt des Elektrons nicht gemacht. Wir wollen nun mit M. Abraham annehmen, daß das Elektron kugelförmige Gestalt hat, und daß an seiner Oberfläche das Potential φ konstant ist. Außerhalb dieser Kugel, deren Radius mit a bezeichnet werde, haben wir nach § 123 (f), indem wir wie in § 124 $z = z'\sqrt{1-p^2}$ setzen,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhalten wir nach § 65 (e) und (q), indem wir

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z'^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

$$\varphi = \frac{A}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}$$

nehmen. Führen wir für z' den Wert $z/\sqrt{1-p^2}$ ein, und setzen wir zugleich

$$c^2(1-p^2) = a^2,$$

so ergibt sich

$$\text{(a)} \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{a^2+(1-p^2)\lambda} = 1,$$

d. h. für $\lambda = 0$ erhalten wir die Gleichung der Kugelfläche. Ferner ist

$$\text{(b)} \qquad \varphi = \frac{A\sqrt{1-p^2}}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}}.$$

Für sehr große Werte von λ wird $\varphi = A/\sqrt{\lambda}$, und also ist nach (a)

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{1-p^2}}}.$$

Hieraus finden wir auf dieselbe Weise wie in § 124

$$e = A\cdot\sqrt{1-p^2},$$

wenn e die Ladung des Elektrons ist. Wir erhalten also nach (b)

$$\text{(c)} \qquad \varphi = \frac{e}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}}.$$

Die Integration ergibt

$$\text{(d)} \qquad \varphi = \frac{e}{2ap} \log \text{nat} \frac{\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}+ap}{\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}-ap}.$$

Das Potential an der Kugeloberfläche ist also für $\lambda = 0$

$$\text{(e)} \qquad \varphi_0 = \frac{e}{2ap} \log \text{nat} \frac{1+p}{1-p}.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{N^2} = \frac{x^2+y^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{(1-p^2)z^2}{\left(a^2+(1-p^2)\lambda\right)^2},$$

so finden wir aus (c) und (a)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{N^2 e x}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{N^2 e y}{(a^2+\lambda)^2\cdot\sqrt{a^2+(1-p^2)\lambda}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{N^2 e z}{(a^2+\lambda)\cdot\{a^2+(1-p^2)\lambda\}^{3/2}}.$$

An der Kugeloberfläche ist $\lambda = 0$, folglich

$$N^2 = \frac{a^4}{x^2+y^2+(1-p^2)z^2}.$$

Also finden wir in bezug auf § 123 (e) für die Punkte der Kugeloberfläche

$$\bar{X} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{e x}{a\left(x^2+y^2+(1-p^2)z^2\right)},$$

$$\bar{Y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{e y}{a\left(x^2+y^2+(1-p^2)z^2\right)},$$

$$\bar{Z} = -(1-p^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{e z(1-p^2)}{a\left(x^2+y^2+(1-p^2)z^2\right)}.$$

Die zur Oberfläche der Kugel senkrechte Kraft ist also

$$\bar{X}\cdot\frac{x}{a} + \bar{Y}\cdot\frac{y}{a} + \bar{Z}\cdot\frac{z}{a} = \frac{e}{a^2}.$$

Demnach ist nach dem Gaussschen Satze die Oberflächendichte η an der Kugeloberfläche konstant.

§ 126. Die Arbeit der elektrischen Kräfte.

Wir berechnen jetzt die *Arbeit der elektrischen Kräfte* und denken uns, daß eine elektrische Ladung, deren Dichte ϱ ist, sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, deren Komponenten u_x, u_y und u_z sein sollen. Die Arbeit B, die die auf die Ladung wirkenden Kräfte in der Zeiteinheit ausführen, ist durch den Ausdruck

$$B = \int \left((X)\varrho u_x + (Y)\varrho u_y + (Z)\varrho u_z\right) dv$$

gegeben. Nach den Grundgleichungen (V) erhalten wir

$$B = \int (X\varrho u_x + Y\varrho u_y + Z\varrho u_z)\, dv.$$

Die Grundgleichungen (III) ergeben ferner

$$B = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, dv$$
$$+ \frac{c}{4\pi}\int \left\{X\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\right\} dv.$$

Durch teilweise Integration und Anwendung der vierten Grundgleichung (IV) finden wir dann *die Energiegleichung*

$$B = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, dv - \frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dv$$
$$- \int \mathfrak{S}_x\, dy\, dz - \int \mathfrak{S}_y\, dz\, dx - \int \mathfrak{S}_z\, dx\, dy,$$

wo $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$ und $\mathfrak{S}_z$ die auf S. 426 eingeführten Komponenten der Energieströmung bedeuten.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich, daß die Arbeit, die die elektrischen Kräfte im Raume v leisten, vermehrt um den Energiestrom, der durch die Begrenzungsfläche aus dem Raume v austritt, gleich der Abnahme der elektromagnetischen Energie des betrachteten Raumes ist, d. h. die Arbeitsleistung der elektrischen Kräfte und die Strahlung geschehen beide auf Kosten der elektromagnetischen Energie.

§ 127. Die elektromagnetische Bewegungsgröße.

In einem Systeme elektrischer Ladungen, die in einer Bewegung begriffen sind, bringt die auf die Ladungen wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ eine Bewegungsmenge hervor. Diese Bewegungsgröße, die vom Systeme in der Zeiteinheit aufgenommen wird, wollen wir mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Für die Komponente $\mathfrak{M}_x$ von $\mathfrak{M}$ in der Richtung der x-Achse haben wir

$$\mathfrak{M}_x = \int (X)\, \varrho\, d\, v = \int \left\{ X + \frac{1}{c} (\gamma\, u_y - \beta\, u_z) \right\} \varrho\, d\, v\,.$$

Die Anwendung der Grundgleichung (I) ergibt, wenn wir zugleich $\mathfrak{M}_x$ in zwei Teile P und Q zerlegen,

$$\mathfrak{M}_x = P + Q\,,$$

wobei

$$P = \frac{1}{4\,\pi} \int X \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\, v\,,$$

$$Q = \frac{1}{c} \int (\gamma\, \varrho\, u_y - \beta\, \varrho\, u_z)\, d\, v$$

ist. Durch teilweise Integration und Anwendung der Grundgleichung (IV) findet man dann

$$P = \frac{1}{8\,\pi} \int\!\!\int (X^2 - Y^2 - Z^2)\, d\,y\, d\,z + \frac{1}{4\,\pi} \int\!\!\int X\, Y\, d\,x\, d\,z$$
$$+ \frac{1}{4\,\pi} \int\!\!\int X\, Z\, d\,x\, d\,y + \frac{1}{4\,\pi\, c} \int \left(Z \frac{\partial \beta}{\partial t} - Y \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) d\, v\,.$$

Ferner finden wir durch Anwendung der Grundgleichung (III) und durch teilweise Integration unter Berücksichtigung der Grundgleichung (II)

$$Q = \frac{1}{8\,\pi} \int\!\!\int (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\, d\,y\, d\,z + \frac{1}{4\,\pi} \int\!\!\int \alpha\, \beta\, d\,x\, d\,z$$
$$+ \frac{1}{4\,\pi} \int\!\!\int \alpha\, \gamma\, d\,x\, d\,y + \frac{1}{4\,\pi\, c} \int \left(\beta \frac{\partial Z}{\partial t} - \gamma \frac{\partial Y}{\partial t} \right) d\, v\,.$$

Durch den Hinweis auf die Gleichungen § 33 (b) sieht man, daß die drei ersten Integrale in den Ausdrücken für P und Q die Wirkungen der Spannungen darstellen, die an die Stelle der wirkenden elektrischen und magnetischen Kräfte gesetzt werden können.

Denken wir uns die Integration erstreckt über den unendlichen Raum, so sind die erwähnten sechs Integrale gleich Null, und wir erhalten

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{4\,\pi\, c} \cdot \frac{d}{d\,t} \int (\beta\, Z - \gamma\, Y)\, d\, v\,.$$

Da dieses Integral im allgemeinen von Null verschieden sein wird, so ergibt sich, daß das *Gesetz der Gleichheit von Wirkung* *und Gegenwirkung* nicht in der Elektronentheorie gilt. Will man jedoch das Bestehen dieses Grundgesetzes in der Elektronentheorie gelten lassen, so muß man annehmen, daß im Systeme der Ladungen *ein elektromagnetischer Impuls* oder eine verborgene *Bewegungsgröße* $\mathfrak{G}$ enthalten ist, deren Komponenten in bezug auf die Volumeneinheit

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}_x = \dfrac{1}{4\pi c}(\gamma Y - \beta Z) = \dfrac{1}{c^2}\mathfrak{S}_x, \\ \mathfrak{G}_y = \dfrac{1}{4\pi c}(\alpha Z - \gamma X) = \dfrac{1}{c^2}\mathfrak{S}_y, \\ \mathfrak{G}_z = \dfrac{1}{4\pi c}(\beta X - \alpha Y) = \dfrac{1}{c^2}\mathfrak{S}_z \end{cases}$$

sind. Diese „elektromagnetische Bewegungsgröße“ ist senkrecht sowohl zur elektrischen wie zur magnetischen Kraft. Der Äther bewegt sich nicht, aber durch die Bewegung der elektrischen Ladungen in ihm tritt eine der Bewegung entgegengesetzte Größe auf, die wir als Bewegungsgröße des Äthers bezeichnen und deren Komponenten

$$\frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}_x\, dv, \quad \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}_y\, dv, \quad \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}_z\, dv$$

sind. Von dem Faktor $1/c^2$ abgesehen, ergeben sich also die Komponenten einfach durch Integration der entsprechenden Komponenten des Strahlvektors (vgl. S. 426) über den Raum.

In derselben Weise wie in § 113 finden wir, daß

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi c}|\mathfrak{E}|\cdot|\mathfrak{H}|\cdot\sin(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}) = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$$

ist. Die Richtung des Vektors $\mathfrak{G}$ ergibt sich aus der folgenden Regel: Hält man die Finger der rechten Hand in die Richtung der elektrischen Kraft und geht die magnetische Kraft senkrecht von der inneren Handfläche aus, so gibt der Daumen die Richtung des Vektors $\mathfrak{G}$.

Man kann auch den Zuwachs des Momentes der Bewegungsgröße z. B. in bezug auf die x-Achse bestimmen. Dann würde sich ergeben, wie man nach dem Vorhergehenden erwarten muß, daß die Momentensumme nicht gleich Null wird für ein unbegrenztes System, wofern man nicht das Moment der elektromagnetischen Bewegungsgröße einführt.

§ 128. Das Moment eines magnetischen Poles und einer Punktladung.

J. J. Thomson hat für dieses Moment einen sehr einfachen Ausdruck aufgestellt, der ein neues Licht auf die Bedeutung der elektromagnetischen Bewegungsgröße wirft. Im Punkte M (Fig. 129) möge sich die Magnetismusmenge m und in E die Elektrizitätsmenge e befinden. Dann ist die elektromagnetische Bewegungsgröße im Punkte P in bezug auf die Volumeneinheit nach (b) des § 125

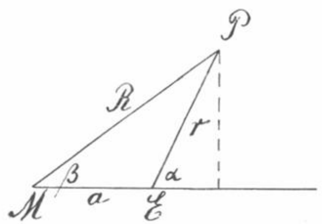

Fig. 129.

$$\frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{e}{r^2} \cdot \frac{m}{R^2} \cdot \sin(\alpha - \beta),$$

wenn MP mit R und EP mit r bezeichnet wird. Diese Bewegungsgröße steht als Vektor senkrecht auf der durch MP und EP gelegten Ebene und ist vom Blatte aus nach innen gerichtet. Die Resultierende der Bewegungsgrößen *aller Punkte P* ist gleich Null. Das Moment aller dieser Bewegungsgrößen ist dagegen nicht gleich Null. Wir bestimmen das Moment für die Achse ME und für eine Kugel um den Mittelpunkt E, deren Radius r kleiner als $ME = a$ ist. Dieses Moment ist

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{m e}{4\pi c}\int_0^r\int_0^\pi \frac{\sin(\alpha - \beta)}{R^2 r^2} r \sin\alpha \cdot 2\pi r \sin\alpha \cdot r\, d\alpha \cdot dr$$

$$= \frac{m e}{2 c}\int_0^r\int_0^\pi \frac{a r \sin^3\alpha}{R^3} d\alpha\, dr = \frac{1}{3}\frac{m e}{c}\frac{r^2}{a^2}$$

für $r < a$. Dagegen ist das Moment für den Raum, der außerhalb der Kugel mit dem Radius $r < a$ liegt,

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{2}{3}\frac{m e}{c}\frac{a}{r} \quad \text{für} \quad r > a.$$

Das gesamte Moment $\mathfrak{M}$ ist also die Summe beider für $r = a$, d. h.

$$\mathfrak{M} = \frac{m e}{c}.$$

In M (Fig. 130) befinde sich ein Magnetpol m und in E die elektrische Ladung e, die sich in der Zeit dt von E nach E'

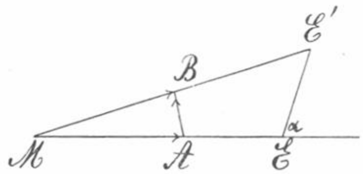

Fig. 130.

bewegt, wobei EE' mit der Verlängerung von $ME = r$ den Winkel α bildet. Das Moment sei anfangs durch

$$MA = \frac{m\,e}{c}$$

gegeben. Nach Verlauf des Zeitelementes dt wird es durch MB dargestellt, das der Länge nach gleich MA ist; MB aber bildet mit MA den Winkel $EE' \cdot \sin\alpha \,/\, ME$. Also ist zu MA als Zuwachs das Moment

$$AB = \frac{m\,e}{c}\,\frac{EE' \cdot \sin\alpha}{r}$$

hinzugekommen. Setzen wir $EE' = u \cdot dt$, so beträgt der Zuwachs des Momentes in der Zeiteinheit

$$\frac{m\,e}{c} \cdot \frac{u \sin\alpha}{r}.$$

Wenn wir davon ausgehen, daß das Moment der Bewegungsmenge des ganzen Systems unveränderlich ist, so muß auf das materielle System, das die elektrische und magnetische Ladung trägt, ein gleich großes Moment in entgegengesetzter Richtung wirken. Nimmt man an, daß dieses Moment durch ein Kräftepaar hervorgebracht wird, das am Hebelarme ME wirksam ist, so ist die entsprechende Kraft

$$\frac{m\,e\,u \sin\alpha}{c\,r^2}.$$

Dieses ist in Übereinstimmung mit dem Gesetze von Biot und Savart.

§ 129. Die elektromagnetische Masse.

Wir haben gefunden, daß ein sich mit konstanter Geschwindigkeit u bewegendes elektrisches System sowohl Energie als Bewegungsmenge besitzt; obwohl es keine materielle Masse enthält, verhält es sich doch wie eine in Bewegung begriffene materielle Masse. Ist das System symmetrisch in bezug auf die z-Achse, so ist die Bewegungsmenge durch den Ausdruck

$$|\mathfrak{G}_z| = G = \frac{1}{4\pi c}\int(\beta X - \alpha Y)\,dv$$

gegeben. Dann finden wir nach § 123 (e) und (g)

$$\text{(a)} \qquad G = \frac{u}{4\pi c^2}\int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right)dv\,.$$

Nach § 123 (f) hängt φ auch von u ab. Erfährt die Geschwindigkeit des Systems im Zeitelement dt den Zuwachs du, so ergibt sich durch Anwendung der Grundgesetze der Mechanik für die in der Richtung der Bahn wirkende Kraft F_s

$$\frac{dG}{du}\cdot\frac{du}{dt} = F_s\,.$$

dG/du bezeichnen wir als die *longitudinale scheinbare Masse* m_s

$$\text{(b)} \qquad m_s = \frac{dG}{du}\cdot$$

Nehmen wir ferner an, daß eine Kraft F_r auf das System in einer Richtung r wirkt, die zur Bewegungsrichtung senkrecht ist, so ändert sich die Richtung der Bewegungsmenge im Zeitelemente dt um den Winkel $d\alpha$, und wir haben

$$G\cdot d\alpha = F_r\cdot dt\,.$$

Nach der allgemeinen Bewegungslehre ist

$$F_r = \frac{m_r\cdot u^2}{r}\,,$$

wo m_r die *transversale scheinbare Masse* bedeutet und r der Krümmungsradius der Bahn ist.

Im Falle der longitudinalen scheinbaren Masse handelt es sich um eine Geschwindigkeit, die der Richtung nach konstant bleibt, deren Betrag jedoch sich ändert. Handelt es sich jedoch um eine konstante, aber der Richtung nach veränderliche Geschwindigkeit, so sprechen wir von transversaler scheinbarer Masse.

Wir finden also

$$G\cdot d\alpha = \frac{m_r\,u^2\cdot dt}{r}\cdot$$

Zugleich ist

$$d\alpha = \frac{u \cdot dt}{r}.$$

Also wird

(c) $$m_r = \frac{G}{u}.$$

Im allgemeinen sind die beiden scheinbaren Massen des Systems nicht einander gleich.

Aus der Gleichung (a) kann G bestimmt werden, und dann ergeben sich aus (b) und (c) die Massen, die durch ϱ und u ausgedrückt werden können. Man kann jedoch, wie Abraham gezeigt hat, auf einem kürzeren Wege zu demselben Ziele gelangen.

Ändert sich der Bewegungszustand eines Systems von Elektronen, so ist damit meistens eine Ausstrahlung elektrischer Wellen verbunden, wozu ein gewisser Aufwand an Energie erforderlich ist. Ist die Änderung des Bewegungszustandes nur gering und geht sie langsam vor sich, so können wir von der erwähnten Strahlung absehen. Ist F die ganze auf das System wirkende Kraft und liegt F in der Bewegungsrichtung, so kann man nach den Gesetzen der allgemeinen Bewegungslehre, die auch für die Elektronentheorie gelten, in bezug auf die Bewegungsmenge setzen

$$dG = F \cdot dt,$$

oder, da nur u als veränderlich betrachtet werden kann

(d) $$\frac{dG}{du} \cdot \frac{du}{dt} = F.$$

Ist W die Energie des gesamten Systems, so haben wir

$$dW = Fu \cdot dt,$$

oder

(e) $$\frac{dW}{du}\frac{du}{dt} = Fu.$$

Aus (d) und (e) finden wir

(f) $$\frac{dW}{du} = u \cdot \frac{dG}{du}.$$

Die magnetische Energie des Systems ist

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2 + \beta^2)\,dv,$$

oder in Rücksicht auf § 123 (g)

$$W_m = \frac{p^2}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} dv.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (a), so folgt

$$G = \frac{2}{u}\cdot W_m. \tag{g}$$

Hieraus erhalten wir

$$2\frac{a W_m}{du} = G + u\cdot\frac{dG}{du}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (f) ergibt sich, wenn wir beachten, daß

$$W = W_e + W_m$$

ist,

$$\frac{d(W_e - W_m)}{du} = -G.$$

Führen wir hier den für $(W_e - W_m)$ in § 123 (i) gefundenen Ausdruck ein, so ergibt sich

$$G = -\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left((1-p^2)\cdot\int\varrho\,\varphi\,dv\right).$$

Wenden wir diese Gleichung auf Abrahams Elektron an, für das φ konstant auf einer Kugel mit dem Radius a ist und bei dem sich die Ladung e auf der Kugel befindet, so wird

$$\int\varrho\,\varphi\,dv = \varphi\int\varrho\,dv = \varphi\,e.$$

Führen wir nun für φ den Wert φ_0 aus § 125 (e) ein, so ergibt sich

$$G = -\frac{e^2}{4ac}\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p^2}{p}\log\operatorname{nat}\frac{1+p}{1-p}\right) = \frac{e^2}{2ac}\left(\frac{1+p^2}{2p^2}\log\operatorname{nat}\frac{1+p}{1-p} - \frac{1}{p}\right).$$

Für die transversale scheinbare Masse m_r des Elektrons erhalten wir also

$$m_r = \frac{G}{u} = \frac{e^2}{2ac^2}\left(\frac{1+p^2}{2p^3}\log\operatorname{nat}\frac{1+p}{1-p} - \frac{1}{p^2}\right),$$

oder, da

$$\log\frac{1+p}{1-p} = 2\left(\frac{p}{1} + \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \dots\right)$$

ist, so finden wir

$$m_r = \frac{2e^2}{3ac^2}\left\{1 + \frac{6}{3\cdot5}p^2 + \frac{9}{5\cdot7}p^4 + \frac{12}{7\cdot9}p^6 + \dots\right).$$

Ist die Geschwindigkeit des Elektrons sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, so erhalten wir für die transversale Masse

$$m_0 = \frac{2\,e^2}{3\,a\,c^2},$$

$$m_r = m_0 \left(1 + \frac{6}{3 \cdot 5} p^2 + \frac{9}{5 \cdot 7} p^4 + \frac{12}{7 \cdot 9} p^6 + \dots\right).$$

Die transversale Masse wächst stark an, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons zunimmt, und sie bleibt unveränderlich, wenn $p = 1$ ist, d. h. die Geschwindigkeit des Elektrons gleich der Lichtgeschwindigkeit wird. Im allgemeinen sind diese Ergebnisse mit den Resultaten der Experimentaluntersuchungen von Kaufmann in Übereinstimmung.

Ferner erhalten wir

$$m_s = \frac{d\,G}{d\,u} = -\,\frac{e^2}{4\,a\,c^2}\frac{d^2}{d\,p^2}\left(\frac{1-p^2}{p}\log\operatorname{nat}\frac{1+p}{1-p}\right).$$

Daraus finden wir

$$m_s = \frac{e^2}{2\,a\,c^2\,p^2}\left\{-\frac{1}{p}\log\operatorname{nat}\frac{1+p}{1-p} + \frac{2}{1-p^2}\right\}.$$

Die Ausrechnung des Ausdruckes in der Klammer ergibt dann für die longitudinale scheinbare Masse

$$m_s = \frac{2\,e^2}{3\,a\,c^2}\left\{1 + \frac{6}{5} p^2 + \frac{9}{7} p^4 + \dots\right\}$$

oder

$$m_s = m_0 \left(1 + \frac{6}{5} p^2 + \frac{9}{7} p^4 + \dots\right).$$

Auch für sehr geringe Geschwindigkeiten des Elektrons wird

$$m_s = m_0\,.$$

Die experimentelle Grundlage für die mathematische Behandlung der Elektrostatik ist von Coulomb gegeben. Poisson hat eine Reihe elektrostatischer Probleme behandelt und die allgemeinen Methoden zur Lösung derselben gegeben. Sir William Thomson (Lord Kelvin) hat dieselben Probleme teilweise nach neuen höchst sinnreichen Methoden behandelt; seine Abhandlungen sind besonders für das Selbststudium zu empfehlen (Reprint of Papers. 2 ed. 1884). Faraday (1837) entwickelte Anschauungen über die elektrische Polarisation oder Verschiebung. Auf Grund dieser Vorstellungen gab Maxwell seine Behandlung der Elektrizitätslehre (Treatise on

Electricity and Magnetism 1873, deutsch von B. Weinstein, 1883). In einer anderen Form hat H. v. Helmholtz die Elektrostatik behandelt und neue Probleme gelöst. Seine Abhandlungen finden sich in Wiedemanns Annalen.

Die Theorie des Magnetismus geht parallel mit der Theorie der Elektrostatik. Fast dieselben Autoren und zum Teil auch dieselben Werke behandeln beide Abschnitte.

Die Theorie der elektrischen Ströme hat Ampère in seiner Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, Paris 1825, behandelt. Dieses Werk bildet die Grundlage für die ganze neuere Entwicklung der Theorie der elektrischen Ströme. Die neuen von Faraday entwickelten Vorstellungen über die magnetischen und induzierenden Wirkungen der elektrischen Ströme sind von Maxwell mathematisch formuliert in seinem Werke: Treatise on Electricity and Magnetism 1873. Gauss, W. Weber, F. E. Neumann, Kirchhoff und Lorenz gingen von Ampères Theorie bei ihren Untersuchungen aus. Wir sind bei der Behandlung des Gegenstandes der Darstellung, die Maxwell in seinem Werke: Elektrizität und Magnetismus, deutsche Übersetzung von B. Weinstein, gegeben hat, gefolgt und haben uns dabei teilweise angeschlossen an die neuere und erweiterte Darstellung der Maxwellschen Theorie, die von A. Föppl und M. Abraham (Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1907) gegeben ist. Eine ausgezeichnete Darstellung der Maxwellschen Theorie hat auch E. Cohn in seinem Werke: *Das elektromagnetische Feld*, Leipzig 1900, geliefert. Von E. Cohn sind auch Erweiterungen der Maxwellschen Theorie entwickelt in bezug auf die ferromagnetischen Körper, die bewegten Medien und die kristallinischen Medien. Von den älteren Darstellungen der Maxwellschen Theorie erwähnen wir noch L. Boltzmanns Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, Leipzig 1891 u. 1893.

Die Grundlagen der Theorie der elektrischen Schwingungen in Konduktoren verdanken wir William Thomson und G. Kirchhoff (Pogg. Ann. **121**). Maxwell und Lorenz zeigten, daß auch in Isolatoren elektrische Schwingungen auftreten können. Durch die Versuche von H. Hertz hat die Lehre von den elektrischen Schwingungen eine große Ausdehnung und Bedeutung erlangt. Hieran schließen sich die Untersuchungen über die elektromagnetische Strahlung, die durch Einführung der *Elektronentheorie* ein weites Gebiet umfassen. Die Grundlagen der Elektronentheorie sind von H. A. Lorentz (Enzykl. d. math. Wissensch. **V**. 1904 S. 2) entwickelt. Eine hervorragende Darstellung der Elektronentheorie und der elektromagnetischen Strahlung ist von M. Abraham im zweiten Bande seiner Theorie der Elektrizität (Leipzig u. Berlin, 1908) gegeben. Zum Aufbau der Elektronentheorie haben J. J. Thomson, O. Heaviside, W. Voigt, E. Riecke, A. Sommerfeld, W. Wien, P. Drude, A. H. Bucherer u. a. m. Beiträge geliefert.

Elfter Abschnitt.

Die optischen Eigenschaften durchsichtiger isotroper Körper und durchsichtiger Kristalle.

§ 130. Einleitung.

Je mehr Erscheinungen in der Lehre vom Lichte auftreten und je mehr Beziehungen zwischen dem Lichte und anderen Naturerscheinungen gefunden werden, um so schwieriger wird es, eine Theorie des Lichtes zu entwickeln. Nach der *Emissionstheorie* des Lichtes, die im allgemeinen Newton zugeschrieben wird und von ihm mathematisch behandelt ist, wird die Energie durch Lichtkörperchen übertragen, die von dem leuchtenden zu dem beleuchteten Körper wirklich übergehen. Die Lichtkörperchen vermögen dabei ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Form der Energie, die sie in sich aufnehmen können, mit sich fort zu führen. Im vorigen Jahrhundert reichte die Emissionstheorie aus, die bekannten Erscheinungen zu erklären. Allein die Emissionstheorie ließ sich nur sehr schwer weiter entwickeln; dies trat besonders im Anfange des vorigen Jahrhunderts bei den großen Entdeckungen in der Optik hervor, die wir Young, Fresnel und Malus verdanken. Im Gegensatze zur Emissionstheorie entwickelte Fresnel seine erste Form der *Undulationstheorie*, die ursprüng-