Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Neunter Abschnitt. Elektromagnetische Wellen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

und wir finden also als Induktionsgesetz einer stationären und quasistationären Strömung

$$(\mathrm{f})\quad \begin{cases} \int \mathfrak{E}_x\,dx + \mathfrak{E}_y\,dy + \mathfrak{E}_z\,dz \\ = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int (F\,dx + G\,dy + H\,dz) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}_n\,df. \end{cases}$$

Neunter Abschnitt.

Elektromagnetische Wellen.

§ 113. Der Poyntingsche Satz.

Wir gehen aus von den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes (vgl. S. 334 und S. 423)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right)$$

und

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

In ausführlicherer Darstellung lauten diese Gleichungen

$$(\mathrm{a})\quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_x + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_y + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_z + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}\right), \end{cases}$$

und

$$(\mathrm{b})\quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (a) bzw. mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$, und die Gleichungen (b) bzw. mit $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, so ergibt sich durch Addition

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x)\right\}$$
$$=\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{j}_x+\mathfrak{E}_y\mathfrak{j}_y+\mathfrak{E}_z\mathfrak{j}_z)+\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(\mathfrak{E}_x{}^2+\mathfrak{E}_y{}^2+\mathfrak{E}_z{}^2)$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial t}+\mathfrak{H}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial t}+\mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial t}\right).$$

Wir führen einen Vektor $\mathfrak{S}$ ein, dessen Komponenten sind

$$\text{(c)}\qquad \mathfrak{S}_x=\frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z-\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y);\quad \mathfrak{S}_y=\frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x-\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z);$$
$$\mathfrak{S}_z=\frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x).$$

Dann finden wir

$$-\operatorname{div}\mathfrak{S}=(\mathfrak{E},\mathfrak{j})+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{H},\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right),$$

oder

$$-\operatorname{div}\mathfrak{S}=(\mathfrak{E},\mathfrak{j})+\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\,\mathfrak{E}^2)+\frac{\partial}{\partial t}(\mu\,\mathfrak{H}^2)\right\}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dv und integrieren wir über einen beliebigen Raum mit der Oberfläche f, so erhalten wir durch Anwendung des Gaussschen Satzes (S. 232)

$$-\int\mathfrak{S}_n\,df=\int(\mathfrak{E},\mathfrak{j})\,dv+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,dv+\frac{\partial}{\partial t}\int\mu\,\mathfrak{H}^2\,dv\right).$$

Die beiden letzten Glieder dieser Gleichung stellen die zeitliche Änderung der elektrischen und der magnetischen Energie in dem von der Fläche f umschlossenen Raume dar. Nach S. 301 erhalten wir also

$$-\int\mathfrak{S}_n\,df=\int(\mathfrak{E},\mathfrak{j})\,dv+\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m).$$

$\mathfrak{S}_n$ ist die Komponente des Vektors $\mathfrak{S}$ nach der Richtung der Normalen zur Fläche f; die Normale ist dabei positiv vom betrachteten Raume nach außen. Rechnen wir jedoch die Richtung der Normalen positiv von außen nach dem Inneren des betrachteten Raumes, so lautet die Gleichung (c)

$$\text{(d)}\qquad \int\mathfrak{S}_n\,df=\int(\mathfrak{E},\mathfrak{j})\,dv+\frac{\partial}{\partial t}(W_e+W_m).$$

Das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung stellt den Fluß des Vektors $\mathfrak{S}$ durch die Oberfläche in den betrachteten abgeschlossenen Raum dar. $\int(\mathfrak{E},\mathfrak{j})\,dv$ gibt die in dem betrachteten Raume entwickelte Joulesche Wärme Q. Den Vektor $\mathfrak{S}$ kann man als den *Energiestrom* betrachten. *Die Energieströmung durch die Oberfläche des betrachteten abgeschlossenen Raumes in diesen hinein ist dann gleich der zeitlichen Änderung der elektrischen und magnetischen Energie im betrachteten Raume, vermehrt um die daselbst in der Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme.* Dieses ist der Poyntingsche *Satz*, der durch die Gleichung (d) dargestellt und durch den den Gleichungen (c) und (d) die in dem vorigen Satze enthaltene, wohl mögliche aber nicht notwendige Bedeutung gegeben wird.

Der Betrag des Vektors $\mathfrak{S}$ ergibt sich aus

$$\text{(e)} \qquad |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\sqrt{(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y)^2 + (\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z)^2 + (\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x)^2}.$$

Wir haben ferner

$$\cos(\mathfrak{E}, \mathfrak{S}) = \frac{\mathfrak{E}_x\mathfrak{S}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{S}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{E}\,\mathfrak{S}} = 0$$

und auch

$$\cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{S}) = \frac{\mathfrak{H}_x\mathfrak{S}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{S}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{H}\,\mathfrak{S}} = 0.$$

Der Vektor $\mathfrak{S}$ steht also senkrecht auf der Ebene, die wir durch die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ legen.

Die Gleichung (e) können wir auch schreiben

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\sqrt{(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) - (\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_z)^2}$$

oder

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}\cdot\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_z}{\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}}\right)^2}.$$

Demnach finden wir

$$\text{(f)} \qquad |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}\cdot\sqrt{1 - \cos^2(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})} = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}\sin(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})\cdot$$

Demnach ist der *Betrag der Energieströmung*, die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit sich bewegt, oder der *Poyntingsche Strahlungsvektor gleich dem Produkte aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und dem Sinus des von diesen beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels, wenn wir von dem Faktor $c\,/\,4\pi$ absehen.*

Wir wenden den Poyntingschen Satz auf einen geraden stromleitenden Draht an. In Fig. 124 stelle AB den Stromleiter dar; der Strom fließe von A nach B, sodaß die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ dem Drahte parallel gerichtet ist. Die magnetischen

Kraftlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter AB. Der Vektor $\mathfrak{H}$ liegt also in einer zum Leiter senkrechten Ebene. Liegt der Leiter in der z-Achse, so sind $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ gleich Null. Der Vektor $\mathfrak{H}$ liegt dann in einer der xy-Ebene parallelen Ebene. $\mathfrak{H}_z$ ist gleich Null und $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}$. Nach der Gleichung (e) ist

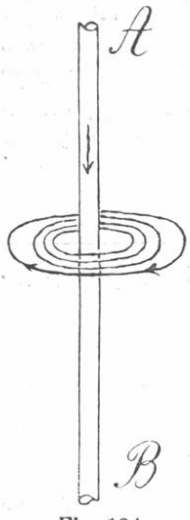

Fig. 124.

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E} \cdot \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2} = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\mathfrak{H}.$$

Dabei erfolgt die Energieströmung senkrecht zur Oberfläche des Drahtes von außen her nach dem Inneren des Drahtes. Hat der Draht die Länge l und einen Querschnitt mit dem Radius a, so ist die Energieströmung in den Draht in der Zeiteinheit

$$2\pi a l \cdot |\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\mathfrak{H} \cdot 2 a \pi l.$$

Da bei einer stationären Strömung

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = 0$$

ist, so kann die in die Oberfläche des Drahtes eingestrahlte Energie nach der Gleichung (d) nur zur Entwickelung der Jouleschen Wärme dienen.

Ist $\varphi_1 - \varphi_2$ die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Leiters, so haben wir $\mathfrak{E} l = \varphi_1 - \varphi_2$. Ferner ist nach § 90 (a)

$$\mathfrak{H} = \frac{2J}{ca},$$

also wird

$$2\pi a l \cdot \mathfrak{S} = (\varphi_1 - \varphi_2) J = J^2 R.$$

$\mathfrak{S}$ ist die in die Oberflächeneinheit des Drahtes in der Zeiteinheit eintretende Energieströmung.

Der Poyntingsche Strahlvektor $\mathfrak{S}$ hat für die Lichttheorie besondere Bedeutung, indem wir die Lichtstrahlen als Strömungslinien der Energie auffassen. In der Optik wird die Strahlenrichtung durch den Vektor $\mathfrak{S}$ gegeben.

§ 114. Die Grundgleichungen.

Um aus der Maxwellschen Theorie die Gesetze der Ausbreitung elektrischer Wellen herzuleiten, gehen wir von den

Hauptgleichungen § 113 (a) und (b) für ruhende Körper aus. Setzen wir einen Raum mit konstanter Permeabilität μ und mit unveränderlicher Dielektrizitätskonstante ε voraus, so lauten die Hauptgleichungen

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \dfrac{4\pi}{c} \mathfrak{E} \sigma + \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \end{cases}$$

oder

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_x + \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}, \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_y + \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}, \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = 4\pi\sigma\mathfrak{E}_z + \varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}, \end{cases}$$

und

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = -\mu \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}, \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = -\mu \dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}, \\ c\left(\dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = -\mu \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Wir differentiieren die erste der Gleichungen (b) nach t und erhalten

$$c\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}\right)\right\} = 4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}.$$

Berücksichtigen wir die beiden letzten Gleichungen unter (c), so ergibt sich

$$\frac{c^2}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}\right)\right\} = 4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}.$$

Fügt man auf der linken Seite dieser Gleichung

$$\pm \frac{c^2}{\mu} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial x^2}$$

hinzu, so finden wir

$$c^2\left\{\nabla^2 \mathfrak{E}_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right)\right\} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2},$$

oder

$$\text{(d)} \qquad c^2\left\{\nabla^2 \mathfrak{E}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} \mathfrak{E})\right\} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}.$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$.

Differentiiert man die erste der Gleichungen (c) nach t, so folgt

$$c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = -\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2}.$$

Nach den Gleichungen (b) ist aber

$$c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}\right) = \frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) - \frac{4\pi\sigma c}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y},$$

$$c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) - \frac{4\pi\sigma c}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}.$$

Kombiniert man diese beiden Gleichungen mit der vorhergehenden, so wird

$$\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x\,\partial z}\right)$$
$$- \frac{4\pi\sigma c}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} = 0.$$

Fügt man zum ersten Gliede dieser Gleichung

$$\pm\frac{c^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2}$$

hinzu, so ergibt sich

$$\text{(e)} \qquad c^2\left\{\nabla^2 \mathfrak{H}_x - \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathfrak{H})\right\} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2}.$$

Aus den Gleichungen (c) erhalten wir ferner

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \mu\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathfrak{H}) = 0,$$

d. h. $\operatorname{div}\mathfrak{H}$ ist unabhängig von t.

Differentiiert man die Gleichungen (c) der Reihe nach bzw. nach x, y und z, so finden wir

$$\text{(f)} \qquad \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathfrak{E}) + \sigma\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0.$$

Die Dichte ϱ' der freien Elektrizität ergibt sich nach S. 264 aus

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E}.$$

Also haben wir nach (f)

$$\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\cdot\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho'.$$

Setzt man

$$\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \vartheta,$$

so wird

$$\varrho' = \varrho_0' \cdot e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \tag{g}$$

wenn ϱ_0' die freie Dichte zur Zeit $t = 0$ ist.

Für Nichtleiter ist $\sigma = 0$, also $\varrho' = \varrho_0'$. Besitzt das isotrope Medium ein Leitungsvermögen und enthält es freie Elektrizität, so nehmen div $\mathfrak{E}$ und ϱ' mit der Zeit ab, und das Sinken beider erfolgt um so schneller, je kleiner $\vartheta = \varepsilon / 4\pi\sigma$ ist. Die Zeit ϑ, nach der die ursprüngliche Ladung auf $1/e$ ihres Anfangsbetrages gesunken ist, wird *Relaxationszeit* genannt. Für die Metalle ist ϑ praktisch gleich Null.

§ 115. Ebene Wellen in einem homogenen und isotropen Isolator.

Wenden wir die Gleichungen (d) und (e) des § 114 auf Isolatoren an, schließen wir ferner das Vorhandensein freier Ladungen aus und sehen wir μ als konstant an, so ergibt sich

$$c^2 \cdot \nabla^2 \mathfrak{E}_x = \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} \tag{a}$$

und

$$c^2 \cdot \nabla^2 \mathfrak{H}_x = \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2}. \tag{b}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für die anderen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ genügen also derselben Differentialgleichung, und diese hat die Form

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} \cdot \nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \tag{c}$$

Diese Gleichung stellt eine Wellenbewegung dar, die mit der Geschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ fortgepflanzt wird.

Wir wollen einen *ebenen und homogenen Wellenzug* betrachten und also voraussetzen, daß eine Schar paralleler Ebenen angegeben werden kann, so daß an jeder dieser Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ nach Richtung und Größe übereinstimmen. Diese Ebenen bezeichnen wir als *Wellenebenen*. Die zur Wellenebene Senkrechte heißt die *Wellennormale* und diese falle in die Richtung der z-Achse des Koordinatensystems. Da unter dieser Voraussetzung die Differentialquotienten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$

nach x und y verschwinden, so lauten nach § 114 (b) und (c) die Feldgleichungen, weil im Isolator $\sigma = 0$ ist,

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}; & \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = \dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}; & \dfrac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = -\dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}, \\ 0 = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}; & 0 = \dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Ferner ist, weil wir wahre elektrische Ladungen ausschließen, und magnetische Ladungen nicht vorhanden sind, auch $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ und $\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$, also

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0.$$

$\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_z$ sind also weder von z noch von t abhängig, d. h. die ihnen entsprechenden Felder sind überhaupt konstant. $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_z$ sind aber die parallel zur Wellennormale genommenen, d. h. die *longitudinalen* Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Betrachten wir eine zur z-Achse senkrechte Ebene, bis zu der die Ausbreitung der Wellen noch nicht erfolgt ist, so sind in dieser Ebene $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{H}_z$ gleich Null und also auch überall gleich Null, wenn wir das Vorhandensein eines konstanten elektrischen und magnetischen Feldes parallel zur z-Achse ausschließen, die bzw. durch konstante elektrische Ladungen und durch Magnete oder elektrische Ströme hervorgebracht sein können. Diese Felder würden den Vorgang der Entstehung und Fortpflanzung von Wellen auch nicht beeinflussen, wir können sie also bei der Untersuchung der Wellenerscheinung ganz unberücksichtigt lassen. Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von z und t unabhängig sind, also beide Feldstärken keine periodisch veränderliche Komponente parallel zur Wellennormale haben, so sind *die Wellen transversale.*

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen unter (b)

$$\text{(f)} \qquad -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}, \qquad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}$$

$\mathfrak{E}_x$ bzw. $\mathfrak{H}_z$, so ergeben sich die Beziehungen

$$\text{(g)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch direkt aus (a) und (b), wenn wir beachten, daß die Differentiale nach x und y unter der Voraussetzung ebener homogener Wellen verschwinden. Außer den Gleichungen (e) haben wir noch ferner

$$\text{(h)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2}.$$

Die vier Größen $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$; $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$ gehorchen also der Differentialgleichung (c), deren Integral wir durch

$$\Omega = f(z - v t)$$

darstellen, wenn f eine beliebige Funktion von $(z - v t)$ ist und v eine Konstante bedeutet. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{d f(z - v t)}{d(z - v t)} \frac{\partial (z - v t)}{\partial t} = - v f',$$

wenn f' die erste Ableitung von Ω nach $(z - v t)$ darstellt. Ferner ist

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = - v \frac{d f'}{d(z - v t)} \frac{\partial (z - v t)}{\partial t} = v^2 f''.$$

Da

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = f''$$

ist, so wird nach (c)

$$\frac{c^2}{\varepsilon \mu} = v^2, \quad \text{oder} \quad v = \pm \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (c) lautet also

$$\Omega = f_1(z - v t) + f_2(z + v t),$$

wo f_1 und f_2 beliebige Funktionen bzw. von $(z - v t)$ und $(z + v t)$ sind.

Wir wollen die beiden Teile des Integrals einzeln untersuchen und setzen

$$\Omega_1 = f_1(z - v t), \quad \Omega_2 = f_2(z + v t).$$

Für $t = 0$ ist $\Omega_{1\,(t=0)} = f_1(z)$, also dargestellt durch die Kurve (Fig. 125), wenn wir z als Abszisse und Ω_1 als Ordinate auftragen. Für $z = 0$ und $t = 0$ ist $\Omega_1 = f_1(0)$. Denselben Wert $f_1(0)$ nimmt längs der z-Achse Ω_1 stets dann an, wenn $z - v t = 0$ wird. In jedem Punkte der z-Achse, der dieser Gleichung genügt, tritt der Wert $\Omega_{1\,(t=0)} = f_1(0)$ im Laufe der Zeit auf, d. h. der Wert $\Omega_{1\,(t=0)}$ verschiebt sich mit der Geschwindigkeit $v = c / \sqrt{\varepsilon \mu}$ längs der z-Achse. Dasselbe gilt für alle übrigen Ordinaten der Kurve (Fig. 125), d. h. mit wachsendem t bewegt sich die ganze Kurve ohne Gestaltsänderung in der Richtung der positiven z-Achse. $f_1(z - vt)$ und $f_2(z + vt)$ stellen also Wellen dar, die mit der Geschwindig-

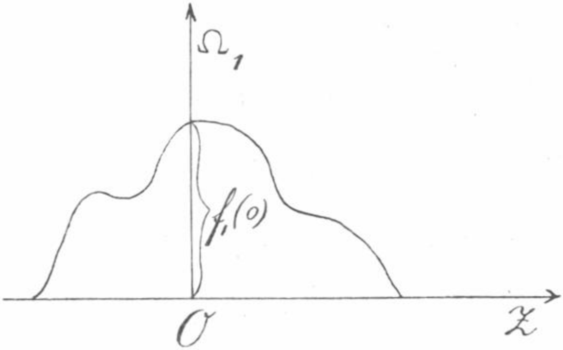

Fig. 125.

keit v bzw. in der Richtung der positiven und der negativen z-Achse fortschreiten.

In einem isotropen Medium ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v von der Gestalt der Kurve (Fig. 125), d. h. von der Form und von der Länge der Welle unabhängig.

Als Integrale der Gleichung (g) erhalten wir also in Rücksicht auf (f)

$$\mathfrak{E}_x = f_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right) + f_2\left(z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)$$

und

$$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(f_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right) - f_2\left(z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right)\right).$$

Demnach stehen die beiden gleichzeitig auftretenden elektrischen und magnetischen Schwingungen $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ senkrecht zueinander. Dasselbe gilt für die beiden anderen Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_x$.

Betrachten wir nur die in der Richtung der positiven z-Achse fortschreitenden Wellen, so haben wir

$$\mathfrak{E}_x = f_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right); \quad \mathfrak{H}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot f_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right).$$

$\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{H}_y$ und die positive z-Achse bilden ein Rechtssystem. Ebenso bilden auch für die in der Richtung der negativen

z-Achse fortschreitende Welle $\mathfrak{E}_x$, $-\mathfrak{H}_y$ und die negative z-Achse ein Rechtssystem.

Betrachten wir also nur die in der Richtung der $+z$-Achse fortschreitenden Wellen, und nehmen wir einfach periodische Schwingungen an, so dürfen wir

$$\text{(h')} \quad \mathfrak{E}_x = A \cos a\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right), \quad \mathfrak{H}_y = A\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos a\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right)$$

setzen. Die zu derselben Schwingung gehörigen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ stehen senkrecht zueinander. Die Gleichungen (d) ergeben im Sinne der Optik eine geradlinig polarisierte Welle.

Ebenso erhalten wir für die beiden anderen zusammengehörigen Komponenten

$$\text{(h'')} \quad \mathfrak{E}_y = A' \cos a\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right), \quad \mathfrak{H}_x = -A'\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos a\left(z' - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right).$$

Beide Wellen sind voneinander unabhängig. Im allgemeinen Falle des gleichzeitigen Vorhandenseins beider Wellen setzen sich diese zu einer elliptisch polarisierten zusammen.

Die elektrische und die magnetische Komponente derselben Welle sind in gleicher Phase. Wenn wir also nur die in der Richtung der $+z$-Achse oder nur die in der Richtung der $-z$-Achse sich fortpflanzende Welle, d. h. nur *fortschreitende Wellen* im Dielektrikum betrachten, so haben die elektrische Kraft und die magnetische Kraft an derselben Stelle und zu gleicher Zeit ihren Höchstwert.

Betrachten wir eine bestimmte zur z-Achse senkrechte Ebene, so tritt nach einer Zeit τ auf dieser wieder derselbe Schwingungszustand auf, wenn

$$\cos a\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t\right) = \cos a\left(z - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} (t + \tau)\right)$$

ist. Dann muß

$$\frac{ac}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tau = 2\pi, \quad \text{oder} \quad \tau = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{ac}$$

sein. τ ist die *Periode* der Schwingung. Die *Schwingungszahl* ν ist

$$\text{(i)} \quad \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{ac}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Wir betrachten jetzt für denselben Zeitpunkt t zwei Wellenebenen, die zu z_1 und z_2 gehören und auf denen derselbe Schwingungszustand ist. Der Abstand der Wellenebenen ist gleich der *Wellenlänge* λ oder ein ganzes Vielfaches derselben. Wir haben, wie vorher,

$$\cos a\left(z_1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right) = \cos a\left(z_2 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}t\right).$$

Dann muß

$$a z_1 = a z_2 - 2\pi$$

oder

$$z_2 - z_1 = \lambda = \frac{2\pi}{a}$$

sein. Führt man den Wert von a in (i) ein, so folgt

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

und

(k) $$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \nu\lambda = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wir können also die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft darstellen durch

(l) $$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = A \cdot \cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right), \\ \mathfrak{H}_y = A\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}_y = A' \cdot \cos 2\pi\left(\frac{z'}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right), \\ \mathfrak{H}_x = -A' \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{z'}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right). \end{cases}$$

Im Vakuum sind $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, also ist

$$v = c = 3 \cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

d. i. gleich der Lichtgeschwindigkeit. *Im leeren Raume ist also die Geschwindigkeit ebener elektromagnetischer Wellen gleich der Lichtgeschwindigkeit. Auch sind die elektromagnetischen Wellen wie die Lichtwellen transversal.*

In einem Dielektrikum, dessen $\varepsilon > 1$ ist und dessen Permeabilität μ von 1 verschieden ist, erhalten wir für den Brechungsindex

(m') $$N = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Da für die meisten Medien, von den ferromagnetischen abgesehen, μ fast gleich 1 ist, so erhalten wir die Maxwellsche Beziehung

$$\text{(m)} \qquad N^2 = \varepsilon\,,$$

d. h. *für Isolatoren, in denen $\mu = 1$ ist, muß nach der elektromagnetischen Lichttheorie das Quadrat des optischen Brechungsindex gleich der Dielektrizitätskonstanten ε sein.*

Ferner haben wir

$$\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_y = 0\,,$$

d. h. die elektrische und magnetische Feldstärke sind normal zueinander; beide sind auch senkrecht zur Wellennormale.

Wir finden auch nach S. 301

$$\text{(n)} \qquad d\,W_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{E}_x^{\,2} + \mathfrak{E}_y^{\,2})\,dv = \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}_x^{\,2} + \mathfrak{H}_y^{\,2})\,dv = d\,W_m\,,$$

d. h. die Energie in jedem Raumelement zerfällt in zwei gleiche Teile elektrischer und magnetischer Energie.

Nach dem Poyntingschen Satze ist die den Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ zugehörige Strahlung (vgl. S. 427) in der Zeiteinheit bezogen auf die Flächeneinheit

$$\frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y = \frac{c}{4\pi} A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \cos^2 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right).$$

Also ist die während einer Schwingungsdauer durch die Flächeneinheit strömende Energie

$$\frac{c}{4\pi} A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \int\limits_0^\tau \cos^2 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) dt = A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{c\tau}{8\pi}.$$

Für die beiden anderen Komponenten erhalten wir ganz ebenso

$$A'^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{c\tau}{8\pi}.$$

Setzen wir für Luft $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, so wird die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende Energie

$$\frac{(A^2 + A'^2)\,c}{8\pi}.$$

Energie und Strahlung der Gesamtwelle ergeben sich als Summe der entsprechenden Beträge beider Teilwellen.

§ 116. Ebene Wellen in Leitern.

Für Leiter fanden wir, daß die Dichte ϱ' der freien Elektrizität, d. h. div $\mathfrak{E}$, allmählich bis auf Null abnimmt. Diese Abnahme geschieht unabhängig von den elektromagnetischen Wellen, die von außen her in den Halbleiter eintreten und sich in ihm ausbreiten. Wir setzen also div $\mathfrak{E} = 0$ und erhalten nach S. 429 und Gleichung (d)

$$\text{(a)} \qquad \nabla^2 \mathfrak{E}_x = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2},$$

und die analogen für $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$.

Ist die Permeabilität μ konstant, so ist div $\mathfrak{H} = 0$, und wir haben ferner nach S. 430 und Gleichung (e)

$$\text{(b)} \qquad \nabla^2 \mathfrak{H}_x = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2},$$

und die analogen für $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$.

Wir wollen auch hier nur eine in der Richtung der z-Achse fortschreitende homogene ebene Welle betrachten. Auch hier erhalten wir zwei voneinander unabhängige Schwingungen, indem der einen die Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$, der anderen die Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_x$ zugehören. Wir wollen hier nur das erste Paar der Komponenten betrachten, dem nach optischen Verhältnissen eine geradlinig nach der y-Achse polarisierte Welle zugehört. Für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ gelten also die Gleichungen, da die partiellen Differentiale nach x und y verschwinden,

$$\text{(c)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial z^2} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen haben die Form der sogenannten *Telegraphengleichung*

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2},$$

oder, wenn

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = v^2 \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \vartheta$$

(vgl. S. 430) gesetzt wird,

$$\text{(d)} \qquad v^2\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial z^2} = \frac{1}{\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2}.$$

Für den Isolator ist $\vartheta = \infty$, für den Leiter ist ϑ endlich.

Als Integral der ersten der Gleichungen (c) nehmen wir

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot e^{\frac{2\pi\iota}{\tau}(t - mz)}, \tag{e}$$

wo τ die Periode der Schwingung bedeutet und m eine Konstante ist. Führen wir den Wert von $\mathfrak{E}_x$ in (c) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{4\pi^2}{\tau^2} m^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{2\pi\iota}{\tau},$$

oder

$$m^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} - \frac{2\sigma\mu\tau\iota}{c^2}. \tag{f}$$

Demnach ist m^2 eine komplexe Größe, also ist auch m komplex. Wir schreiben daher

$$m^2 = \left(\frac{p - q\iota}{c}\right)^2, \tag{g}$$

und erhalten aus (e)

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\tau c}} \cdot e^{\frac{2\pi p\iota}{c\tau}\left\{\frac{tc}{p} - z\right\}}.$$

Setzen wir $c\tau = \lambda$, d. i. die Wellenlänge, welche die Schwingung im Äther haben würde, so wird

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot e^{\frac{2\pi p\iota}{\lambda}\left\{\frac{tc}{p} - z\right\}},$$

oder, wenn wir den reellen Teil dieses Ausdruckes nehmen,

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot \cos 2\pi\left\{\frac{t}{\tau} - \frac{pz}{\lambda}\right\}. \tag{h}$$

Auch hier ergeben sich *reine Transversalwellen*. Das Glied $e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}}$ zeigt aber, daß die Amplitude und damit auch die Energie der Welle mit wachsendem z abnimmt. *Im Leiter findet eine Absorption der Wellen statt, weil ein Teil der elektromagnetischen Energie in Joulesche Wärme verwandelt wird.* q ist der *Absorptionskoeffizient* der Substanz. $\lambda/p = \lambda'$ ist die Wellenlänge in der betrachteten Substanz. Da $\lambda = c\tau$ und $\lambda' = \tau v$ ist, wenn v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Substanz ist, so haben wir $\lambda/\lambda' = c/v = p$, d. h. p ist der *Brechungsexponent* der Wellen beim Übergange aus dem Vakuum in die Substanz.

Aus den Gleichungen (f) und (g) erhalten wir

$$p^2 - q^2 = \varepsilon\mu,$$

$$pq = \sigma\mu\tau,$$

sodaß

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} p = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2}+\varepsilon\right)}, \\ q = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2}-\varepsilon\right)} \end{cases}$$

ist. Demnach ist der Brechungsexponent p von der Schwingungsdauer τ und also auch von der Wellenlänge abhängig. Also ergibt die Maxwellsche Theorie eine Dispersion der Wellen in Leitern und Halbleitern.

Wir bezeichnen jetzt die zu $\mathfrak{E}_x$ gehörige magnetische Kraft $\mathfrak{H}_y$ und setzen zunächst

$$\text{(k)} \qquad \mathfrak{H}_y = B\, e^{\frac{2\pi\iota}{\tau}(t-mz)}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (c) auf S. 429

$$c\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t},$$

also wird

$$B = \frac{c\,m\,A}{\mu},$$

d. h. B ist imaginär.

Nach den Gleichungen (i) ist

$$\text{(k')} \qquad \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt[4]{\mu^2(4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2)},$$

also nach (g)

$$m\,c = \frac{p-q\,i}{\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \sqrt[4]{\mu^2(4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2)}.$$

Setzen wir

$$\text{(k'')} \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi\delta}{\tau} = \frac{q}{p},$$

so ergibt sich

$$m\,c = e^{-\frac{2\pi\delta}{\tau}\iota} \cdot \sqrt[4]{\mu^2(4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2)},$$

und ferner

$$B = A\,e^{-\frac{2\pi\delta}{\tau}\iota} \cdot \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2}{\mu^2}}.$$

Führen wir diesen Wert von B in (k) ein, so wird

$$\text{(l')} \qquad \mathfrak{H}_y = A \cdot \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2}{\mu^2}} \cdot e^{\frac{2\pi\iota}{\tau}(t-mz-\delta)},$$

oder

$$\text{(l)} \qquad \mathfrak{H}_y = A \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2+\varepsilon^2}{\mu^2}} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{z}{\lambda'} - \frac{\delta}{\tau}\right).$$

Für $\mathfrak{E}_x$ fanden wir

$$\text{(m)} \qquad \mathfrak{E}_x = A\, e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{z}{\lambda'}\right).$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, daß $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{E}_x$ wellenförmig fortschreiten in der Richtung der $+z$-Achse, und daß ihre Amplituden mit wachsendem z abnehmen. Die zusammengehörigen Schwingungen $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ haben die Phasendifferenz $2\pi\delta/\tau$, und demgemäß ist auch das Größenverhältnis ihrer Amplituden nicht konstant.

Betrachten wir das Eindringen elektromagnetischer Wellen in eine Silberschicht. Die Länge der Wellen sei in Luft $\lambda = 30$ cm, also ist

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 10^{-9}.$$

Für Silber fanden Jäger und Diesselhorst

$$\sigma = 61{,}4 \cdot 10^4 (\text{Ohmzentimeter}^{-1});$$

also ist in absoluten elektromagnetischen Einheiten

$$\sigma = \frac{61{,}4 \cdot 10^4}{10^9} = 61{,}4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}\right).$$

Im elektrostatischen Maßsystem haben wir für das Leitungsvermögen

$$\sigma = 9 \cdot 10^{20} \cdot 61{,}4 \cdot 10^{-5} = 5{,}53 \cdot 10^{17}.$$

Dann wird

$$2\sigma\tau = 11{,}06 \cdot 10^8.$$

Gegen diese Zahl würde wohl die nicht bekannte Dielektrizitätskonstante des Silbers unberücksichtigt bleiben können. Beachten wir noch, daß im betrachteten Falle $\mu = 1$ ist, so wird für die elektrischen Wellen der betrachteten Art

$$p = q = \sqrt{\sigma\tau}$$

zu setzen sein. Führt man diesen Wert für den Absorptionskoeffizienten q in $e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}}$ ein, so zeigt sich, daß in sehr geringer Tiefe unter der Oberfläche des Silbers die Amplitude und damit die Energie der Welle verbraucht ist. Die Versuche von Hertz zeigen auch, daß eine Silberschicht von etwa $^1/_{100}$ mm Dicke für elektrische Wellen undurchlässig ist.

§ 117. Die Grenzbedingungen.

Wir wollen jetzt die Bedingungen für den Übergang einer elektromagnetischen Welle von einem Medium zu einem anderen und für die Reflexion elektromagnetischer Wellen entwickeln.

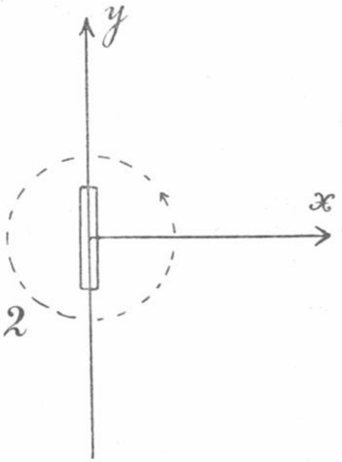

Fig. 126.

Die Trennungsfläche zweier Medien (Fig. 126), denen bzw. die Konstanten $\varepsilon_1 \mu_1 \sigma_1$ und $\varepsilon_2 \mu_2 \sigma_2$ zugehören, liege in der y-z-Ebene des Koordinatensystems, sodaß die Normale zur Trennungsfläche die positive x-Achse ist. Ein Rechteck mit den Seiten dx und dy liege zur Hälfte im einen und zur Hälfte im anderen Medium, und wir wollen voraussetzen, daß dy groß gegenüber dx ist. In Fig. 126 ist die $+z$-Achse nach dem Leser hin gerichtet. Multiplizieren wir die rechte und die linke Seite der dritten der Gleichungen (b) auf S. 429 mit $dx \cdot dy$, so ist

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \frac{4\pi}{c}\left(\sigma\, \mathfrak{E}_z + \frac{\varepsilon}{4\pi}\, \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}\right) dx\, dy .$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt nach S. 333 das Linienintegral der magnetischen Kraft

$$\int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{H}_s\, ds$$

längs des Umfanges des Rechtecks $dx\, dy$ dar. Ferner gibt die rechte Seite der Gleichung die z-Komponente des Gesamtstromes durch das Rechteck $dx\, dy$ multipliziert mit 4π (s. S. 332).

Bezeichnen wir in Rücksicht auf spätere Anwendungen die Komponenten der elektrischen Kraft in dem einen und in dem anderen Medium bzw. mit $X_1\, Y_1\, Z_1$ und $X_2\, Y_2\, Z_2$ und die Komponenten der magnetischen Kraft entsprechend mit $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ und $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2$, so ist das Linienintegral $\int \mathfrak{H}_s\, ds$ längs des Umfanges des Rechteckes

$$\beta_1\, dy - \beta_2\, dy = (\beta_1 - \beta_2)\, dy ,$$

wenn wir die Strecke dx als sehr klein gegenüber dy voraussetzen. Nach (a) ist dann

$$(\beta_1 - \beta_2)\,dy = \frac{4\pi}{c}\left(\sigma_1 Z_1 + \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\,\frac{\partial Z_1}{\partial t}\right)\frac{dx\,dy}{2}$$
$$+ \frac{4\pi}{c}\left(\sigma_2 Z_2 + \frac{\varepsilon_2}{4\pi}\,\frac{\partial Z_2}{\partial t}\right)\frac{dx\,dy}{2},$$

oder

$$(\beta_1 - \beta_2) = \frac{2\pi}{c}\left\{\sigma_1 Z_1 + \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\,\frac{\partial Z_1}{\partial t} + \sigma_2 Z_2 + \frac{\varepsilon_2}{4\pi}\,\frac{\partial Z_2}{\partial t}\right\}dx\,.$$

Im Grenzfalle, wenn $dx = 0$ wird, erhalten wir für $x = 0$

$$\beta_1 = \beta_2\,.$$

Auf demselben Wege ergibt sich an der Trennungsfläche

$$\gamma_1 = \gamma_2\,,$$

d. h. die tangentiellen Komponenten der magnetischen Feldstärke durchsetzen stetig die Grenzfläche.

Dieselbe Betrachtung läßt sich auch durchführen für die elektrische Feldstärke im Anschluß an die Gleichungen (c) auf S. 429; wir erhalten dann für die Teile der Trennungsfläche, die zur x-Achse normal liegen,

$$Y_1 = Y_2 \quad \text{und} \quad Z_1 = Z_2 \quad \text{für} \quad x = 0\,.$$

Demnach müssen die tangentiellen Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke sich an der Trennungsfläche stetig verhalten.

Wir müssen auch annehmen, daß in Wirklichkeit die Konstanten ε_1, μ_1, σ_1 an der Grenzfläche nicht plötzlich bzw. in die Werte ε_2, μ_2, σ_2 überspringen, sondern daß vielmehr eine freilich unendlich dünne Übergangsschicht vorhanden ist, in der die einen Werte stetig in die anderen übergehen. Auch für die Übergangsschicht gelten die Gleichungen (b) und (c) auf S. 429, und alle in diesen Gleichungen auftretende Differentialquotienten nach x, y und z müssen endliche Werte behalten. Ist also die Übergangsschicht der y-z-Ebene parallel, so müssen an ihr

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}$$

endlich sein. Bei einer unendlich dünnen Übergangschicht muß dann auch die Differenz der Komponenten

$$\beta = \mathfrak{H}_y, \quad \gamma = \mathfrak{H}_z, \quad Y = \mathfrak{E}_y, \quad Z = \mathfrak{E}_z$$

zu beiden Seiten der Schicht unendlich klein sein. Wir finden auch auf diesem Wege, daß die der Trennungsfläche parallelen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke an der unendlich dünn angenommenen Grenzfläche stetig sind.

Aus der ersten der Gleichungen (c) auf S. 429 folgt dann auch, daß $\mu(\partial \mathfrak{H}_x / \partial t)$, oder, da $\mu = 1$ ist, $\partial \mathfrak{H}_x / \partial t$ an der in der y-z-Ebene liegenden Grenzfläche stetig ist. Wir haben also in anderer Bezeichnung an der Grenzfläche auch $\alpha_1 = \alpha_2$, d. h. *auch die zur* (unendlich dünn vorgestellten) *Trennungsfläche senkrechte Komponente der magnetischen Feldstärke ist für* $\mu = 1$ *stetig.*

Da

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}$$

in der unendlich dünnen Grenzschicht stetig sind, so muß nach der ersten der Gleichungen (b) auf S. 429

$$4\pi \sigma_1 X_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial X_1}{\partial t} = 4\pi \sigma_2 X_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial X_2}{\partial t}$$

sein, indem X_1 und X_2 die zur Trennungsfläche senkrechten Komponenten der elektrischen Feldstärke sind. Also ist

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon_1}{4\pi} X_1 - \frac{\varepsilon_2}{4\pi} X_2\right\} = \sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2 .$$

Handelt es sich um Isolatoren, so ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2}{4\pi} = \text{const.}$$

Der Ausdruck in den Klammern der vorletzten Gleichung stellt die Differenz der Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung zu beiden Seiten der Trennungsfläche dar. Also ist

$$\varepsilon_1 X_1 - \varepsilon_2 X_2 = 4\pi \eta ,$$

indem η die Flächendichte der wahren Ladung ist. Enthält die Grenzfläche keine wahre Ladung, so ist

$$\varepsilon_1 X_1 = \varepsilon_2 X_2 .$$

An der Grenzfläche ist für $\eta = 0$ die Normalkomponente der elektrischen Verschiebung stetig. Während also das Produkt εX an der Grenzfläche stetig ist, ist *die zur Grenzfläche normale Komponente der elektrischen Feldstärke unstetig.*

In Rücksicht auf das Bestehen der Hauptgleichungen (b) und (c) auf S. 429 sind von den sechs Grenzbedingungen nur vier voneinander unabhängig. Die sechs Grenzbedingungen lauten für $x = 0$:

$$Y_1 = Y_2\,, \quad Z_1 = Z_2\,, \quad \beta_1 = \beta_2\,, \quad \gamma_1 = \gamma_2\,,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 X_1 = \varepsilon_2 X_2\,.$$

Sind μ_1 und μ_2 voneinander verschieden, so bleiben doch die zur Trennungsfläche senkrechten Komponenten der magnetischen Induktion stetig beim Durchgange durch die Trennungsfläche.

§ 118. Die Schwingungen von H. Hertz.

H. Hertz hat in einem geradlinigen Leiter sehr rasche Schwingungen hervorgerufen, die in dem umgebenden Isolator ebenfalls Schwingungen veranlassen. Er behandelte das Problem der ungedämpften Schwingungen nach der Maxwellschen Theorie, und wir können uns über die Natur der Schwingungen nach Hertz in folgender Weise eine Vorstellung machen.

Der Mittelpunkt eines geradlinigen Leiters, wo sich die Funkenstrecke befindet, falle in den Koordinatenanfangspunkt; der Leiter selbst liege in der z-Achse des Koordinatensystems. Man kann von der Annahme ausgehen, daß im geradlinigen Leiter eine elektrische Ladung hin und her schwingt. Es handelt sich dann um die Untersuchung des elektromagnetischen Feldes dieser im Leiter schwingenden punktförmigen Ladung. Unter diesen Verhältnissen liegt der Symmetrie wegen die elektrische Kraft in der durch die z-Achse bzw. durch den Leiter gelegten Meridianebene, und sie hängt allein von z und vom Abstande $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ des betrachteten Punktes von der z-Achse ab. Die magnetische Kraft muß dementsprechend eine zur Meridianebene senkrechte Komponente haben.

Ein Punkt des Feldes hat vom Koordinatenanfangspunkt den Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und von der Schwingungsrichtung bzw. von der z-Achse den Abstand $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Die Entfernung r bilde mit der z-Achse den Winkel ϑ, dann ist

$$z = r \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \varrho = r \sin\vartheta\,.$$

Setzen wir voraus, daß im Felde des Oszillators $\sigma = 0$ und $\varepsilon = \mu = 1$ ist, so lauten die Gleichungen (b) und (c) auf S. 429

$$c\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}, \quad c\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{d t},$$

$$c\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}, \quad c\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t},$$

$$c\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}, \quad c\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}.$$

Zur Lösung dieser Gleichungen setzen wir

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = -\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}; \\ c\,\mathfrak{H}_x = -\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial y \partial t}, \quad c\,\mathfrak{H}_y = +\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial t}, \quad c\,\mathfrak{H}_z = 0, \end{cases}$$

wobei Γ eine Funktion nur von t und r ist, die der Gleichung

$$\text{(b)} \qquad c^2 \nabla^2 \Gamma = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}$$

genügen muß. Führen wir r und t als unabhängige Veränderliche ein, so ist zunächst nach S. 253

$$\nabla^2 \Gamma = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 (r\Gamma)}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \Gamma}{\partial r},$$

also wird

$$\nabla^2 \Gamma = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\Gamma)}{\partial r^2},$$

und wir erhalten also

$$c^2 \frac{\partial^2 (r\Gamma)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (r\Gamma)}{\partial t^2}.$$

Wir setzen

$$\Gamma = \frac{q\,l}{r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

wo l eine Länge bedeutet. Γ wird im Schwingungsmittelpunkte oder Nullpunkte des Koordinatensystems unendlich groß. Γ stellt Wellen dar, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = \lambda / \tau$ ausbreiten.

Da

$$c\,\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r \partial t}\frac{y}{r}$$

und

$$c\,\mathfrak{H}_y = +\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r \partial t}\frac{x}{r}$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r\,\partial t}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r\,\partial t}\sin\vartheta\,,$$

oder

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi q l}{c r \tau}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right) - \frac{1}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)\right\}\sin\vartheta\,.$$

Für Werte von r, die klein gegen λ sind, also für Punkte die dem Mittelpunkte des Erregers nahe liegen, finden wir

$$\mathfrak{H} = -\frac{2\pi q l}{c r^2 \tau}\cos\frac{2\pi t}{\tau}\cdot\sin\vartheta\,,$$

d. h. die magnetische Feldstärke wird durch das Gesetz von Biot und Savart bestimmt. Im Leiterelemente l schwankt der Strom dabei zwischen den Beträgen $\pm 2\pi q / c\tau$.

Für sehr große Werte von r haben wir

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi^2 q l}{\lambda^2 r}\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r}{c}\right)\cdot\sin\vartheta\,.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist senkrecht zur Meridianebene, d. h. zu der durch ϱ und z gelegten Ebene.

Wir wollen jetzt die Komponenten der elektrischen Feldstärke bestimmen. Für einen Punkt (x, y), der von der z-Achse den Abstand ϱ hat, setzen wir $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ zu einer Kraft P zusammen, die senkrecht zur z-Achse wirkt. Dann ist

$$P = \mathfrak{E}_x\cdot\frac{x}{\varrho} + \mathfrak{E}_y\cdot\frac{y}{\varrho}\,,$$

und, weil

$$\mathfrak{E}_x = \left(-\frac{\partial^2\Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{xz}{r^2}\,,\quad \mathfrak{E}_y = \left(-\frac{\partial^2\Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{yz}{r^2}$$

ist, so finden wir

$$\text{(c)}\qquad P = \left(-\frac{\partial^2\Gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,.$$

In der Schwingungsrichtung, d. h. für die z-Achse, ist $P = 0$. Ferner ist

$$\text{(d)}\qquad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial r^2}\frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{\partial\Gamma}{\partial r}\frac{r^2+z^2}{r^3}\,.$$

Für kleine Werte von r finden wir

$$\mathfrak{E}_z = \frac{q\,l\,(r^2-3z^2)}{r^5}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Setzt man

$$\Pi = q\,l \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

so wird

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Π ist das Potential eines elektrischen Doppelpunktes, dessen Ladung q mit der Periode τ zwischen $+l$ und $-l$ längs der z-Achse auf und ab bewegt wird. Das Potential Π gilt für Punkte, die dem Schwingungsmittelpunkte sehr nahe liegen und für die r klein gegen λ ist.

In der xy-Ebene selbst haben wir für kleine Werte von r

$$\mathfrak{E}_z = \frac{q\,l}{r^3} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Ferner ist für kleine Werte von r

$$P = -\frac{3\,q\,l}{r^3} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Für alle Punkte, die in der durch die Funkenstrecke gelegten xy-Ebene liegen, ist $\vartheta = 90^0$, also $P = 0$.

Für große Werte von r erhalten wir aus (c)

$$P = \frac{q\,l}{r}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta,$$

und aus (d)

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{q\,l}{r}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) \sin^2\vartheta.$$

Da

$$P \sin\vartheta + \mathfrak{E}_z \cos\vartheta = 0$$

ist, so ist die Richtung der elektrischen Kraft senkrecht zu r. In großen Entfernungen von der Mitte des Leiters ist die Welle eine reine Transversalwelle, indem die elektrische und die magnetische Kraft senkrecht zu r sind.

In der xy-Ebene, d. h. in einer durch die Funkenstrecke zum Leiter senkrechten Ebene nimmt $\mathfrak{E}_z$ zuerst sehr schnell und zwar mit der dritten Potenz der Entfernung ab, für größere Abstände nimmt $\mathfrak{E}_z$ langsamer und zwar umgekehrt proportional der Entfernung ab.

Das von H. Hertz gegebene graphische Verfahren zur Darstellung des elektromagnetischen Feldes findet sich in

Wied. Ann. **36.** 1888. S. 1. In größerer Entfernung vom Leiter ergeben sich in Übereinstimmung mit den obigen Gleichungen äquidistante kugelförmige Wellen.

§ 119. Die Reflexion ebener Wellen an Metallen. Stehende Wellen.

Wir wollen jetzt nach dem von M. Abraham angegebenen Verfahren den Fall betrachten, daß ein ebener und homogener Wellenzug die Oberfläche eines metallischen Leiters senkrecht trifft. Die Wellen wollen wir durch die reellen Teile komplexer Ausdrücke darstellen. Die Grenzfläche des Metalles gegen das Vakuum sei die xy-Ebene. Wir haben dann nach den Gleichungen (k) und (l) auf S. 436

$$\mathfrak{E}_x = A_e \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{z}{c} - t\right)} = \mathfrak{H}_y,$$

da im Vakuum $\varepsilon = \mu = 1$ ist. Dabei müssen die elektrische Kraft, die magnetische Kraft und die Fortschreitungsrichtung ein Rechtssystem bilden. A_e ist die Amplitude der einfallenden Welle.

Für die reflektierte Welle haben wir

$$-\mathfrak{E}_x = A_r \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(-\frac{z}{c} - t\right)} = \mathfrak{H}_y,$$

indem A_r die Amplitude der reflektierten Welle ist.

Die Komponente $\mathfrak{E}_x$ der ins Metall eingedrungenen Welle, deren Amplitude mit A_d bezeichnet werden soll, können wir nach der Gleichung (h) auf S. 439 darstellen durch

$$\mathfrak{E}_x = A_d \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot \cos\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{zp}{c} - t\right),$$

und die Komponente $\mathfrak{H}_y$ nach der Gleichung (l') auf S. 440 durch

$$\mathfrak{H}_y = A_d \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{2\pi\iota\delta}{\tau}} \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}} \cdot \cos\frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{zp}{c} - t\right).$$

Demnach haben wir im Metalle

$$\mathfrak{E}_x = A_d \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{zp}{c} - t\right)},$$

$$\mathfrak{H}_y = A_d \cdot e^{-\frac{2\pi q z}{\lambda}} \cdot e^{-\frac{2\pi\iota\delta}{\tau}} \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}} \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{zp}{c} - t\right)}.$$

An der Grenzfläche, d. h. für $z = 0$, müssen die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ stetig sein, d. h. es gelten die Bedingungen

$$A_e - A_r = A_d\,,$$
$$A_e + A_r = A_d \cdot e^{-\frac{2\pi\iota\delta}{\tau}} \cdot \sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}}\,.$$

Nach der Gleichung (k′) und (k″) S. 440 finden wir, daß

$$e^{-\frac{2\pi\iota\delta}{\tau}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} - \iota\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

und

$$\sqrt[4]{\frac{4\sigma^2\tau^2 + \varepsilon^2}{\mu^2}} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\mu}.$$

Also wird

$$A_e - A_r = A_d,$$
$$A_e + A_r = A_d\frac{p - \iota q}{\mu}.$$

Daraus ergibt sich

$$A_e = \frac{A_d}{2}\cdot\frac{p - \iota q + \mu}{\mu},$$

$$A_r = \frac{A_d}{2}\cdot\frac{p - \iota q - \mu}{\mu},$$

oder

$$\frac{A_r}{A_e} = \frac{p - \iota q - \mu}{p - \iota q + \mu}.$$

Um für den senkrechten Einfall das *Reflexionsvermögen* R

$$R = \frac{(A_r)^2}{(A_e)^2}$$

zu erhalten, müssen wir den komplexen Ausdruck für A_r/A_e mit dem konjugiert komplexen multiplizieren. Dann ergibt sich

$$R = \frac{(p-\mu)^2 + q^2}{(p+\mu)^2 + q^2}. \tag{a}$$

In den Gleichungen bedeutet p den Brechungsindex beim Übergange der Wellen vom Vakuum in das Metall. q ist der Absorptionskoeffizient. Nach der Maxwellschen Theorie muß die Gleichung (a) für alle isotropen Körper, für Isolatoren wie für Metalle, gelten.

Wenden wir die Gleichung (a) auf die Reflexion an metallischen Flächen an, so ist zunächst nach den Bemerkungen auf S. 441 $p = q = \sqrt{\sigma\tau}$ zu setzen. Schließen wir auch die ferromagnetischen Körper aus, so können wir $\mu = 1$ setzen. Dann wird

$$R = \frac{2\sigma\tau - 2\sqrt{\sigma\tau} + 1}{2\sigma\tau + 2\sqrt{\sigma\tau} + 1},$$

oder, wenn 1 gegenüber $\sigma\tau$ unberücksichtigt bleibt,

$$\text{(b)} \qquad R = \frac{\sqrt{\sigma\tau} - 1}{\sqrt{\sigma\tau} + 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}.$$

Diese Gleichung gilt nach den Beobachtungen von E. Hagen und Rubens (Ann. d. Phys. **11**. 1903. S. 873; Ber. d. Berl. Akad. 1903. S. 269) für Wellen im Ultrarot bei allen Metallen mit Ausnahme des Wismut. Die Untersuchungen von E. Hagen und Rubens beziehen sich auf Wellen von $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ cm Länge, für die also ε sicher gegen $2\sigma\tau$ vernachlässigt werden kann. Die oben angegebene Formel für R wird also sicher auch für alle elektromagnetischen Wellen gelten, deren Wellenlänge größer als die von E. Hagen und Rubens gebrauchte ist. Besonders muß hervorgehoben werden, daß die Gleichung (b) auch für die ferromagnetischen Körper gilt, bei denen die Permeabilität doch stark veränderlich ist. Man muß demnach schließen, daß für rasch wechselnde Felder μ nicht sehr verschieden von 1 sein kann.

Was die von H. Hertz erzeugten Schwingungen von 60 cm Wellenlänge betrifft, so ist also für diese

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = \frac{60}{3 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Handelt es sich um die Reflexion dieser Wellen an einer Fläche aus Zink, so ist für das letztere $\sigma = 1{,}4 \cdot 10^{17}$ in absoluten elektrostatischen Einheiten zu setzen. Also ist $\sigma\tau = 2{,}8 \cdot 10^{8}$. Demnach ist für diese Reflexion $R = 1$, d. h. die Metalle müssen die auf ihre Oberfläche fallenden Hertzschen Wellen fast vollständig reflektieren.

Den elektrischen und magnetischen Vektor der senkrecht auffallenden Welle können wir, wenn $A_e = A_r = A$ für $R = 1$ gesetzt wird, darstellen durch

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{z}{c} - t\right)} = \mathfrak{H}_y,$$

und für die reflektierte Welle durch

$$\mathfrak{E}_x = -A \cdot e^{\iota \frac{2\pi}{\tau}\left(-\frac{z}{c}-t\right)} = -\mathfrak{H}_y .$$

Bezeichnen wir die x-Komponenten der elektrischen Kräfte der einfallenden und der reflektierten Welle bzw. mit X_e und X_r, und die Komponenten der magnetischen Kräfte bzw. mit β_e und β_r, so haben wir infolge der Reflexion die Feldstärken

$$X_e + X_r = A \cdot e^{-\iota \frac{2\pi t}{\tau}} \cdot \left\{e^{\iota \frac{2\pi z}{\lambda}} - e^{-\iota \frac{2\pi z}{\lambda}}\right\},$$

$$\beta_e + \beta_r = A \cdot e^{-\iota \frac{2\pi t}{\tau}} \cdot \left\{e^{\iota \frac{2\pi z}{\lambda}} + e^{-\iota \frac{2\pi z}{\lambda}}\right\}.$$

Folglich wird

$$X_e + X_r = 2A\iota \cdot e^{-\iota \frac{2\pi t}{\tau}} \cdot \sin\frac{2\pi z}{\lambda},$$

$$\beta_e + \beta_r = 2A \cdot e^{-\iota \frac{2\pi t}{\tau}} \cdot \cos\frac{2\pi z}{\lambda}.$$

Gehen wir jetzt zum reellen Teil der rechten Seiten dieser Gleichungen über, so wird

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} X_e + X_r = 2A \cdot \sin\dfrac{2\pi z}{\lambda} \cdot \sin\dfrac{2\pi t}{\tau}, \\ \beta_e + \beta_r = 2A \cdot \cos\dfrac{2\pi z}{\lambda} \cdot \cos\dfrac{2\pi t}{\tau}. \end{cases}$$

Demnach sind die Amplituden der resultierenden elektrischen und magnetischen Kräfte räumlich veränderlich. Die Amplitude der elektrischen Kraft verschwindet an den Stellen, für welche

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = 0,\ \pi,\ 2\pi\ \ldots,$$

oder

$$z = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda\ \ldots$$

ist. Diese Werte von z geben die Lage der *Knotenpunkte* der elektrischen Schwingung. In der reflektierenden Metallfläche liegt der erste Knoten der elektrischen Schwingung. Die *Wellenbäuche* der elektrischen Schwingung haben wir an den Stellen, wo

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\ \ldots,$$

oder

$$z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots$$

ist. Die Gleichungen (c) stellen also *stehende Schwingungen* dar.

Die Knotenpunkte der magnetischen Kraft liegen an den Stellen, wo

$$z = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots$$

ist, während die Bäuche sich an den Stellen

$$z = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2} \ldots$$

befinden. *Wir erkennen daraus, daß die Knotenpunkte der magnetischen Kraft mit den Bäuchen der elektrischen Kraft zusammenfallen und umgekehrt* (vgl. S. 435).

Zehnter Abschnitt.

Die Elektronentheorie.

§ 120. Das elektrische Elementarquantum.

Die Maxwellsche Theorie ist besonders zur Darstellung der Erscheinungen des elektromagnetischen Feldes geeignet. Die sich aus ihr ergebende elektromagnetische Theorie des Lichtes reicht jedoch nicht aus, um eine Reihe von Erscheinungen zu erklären, zu denen u. a. die Dispersion des Lichtes, das Zeemansche Phänomen gehören. Eine weitere Fortbildung hat die Maxwellsche Theorie dann durch die Elektronentheorie erhalten. Die Grundgesetze der Elektronentheorie sind wohl zuerst von H. A. Lorentz klar ausgesprochen und sind von ihm auch auf die elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung und auf die Optik der bewegten Körper mit Erfolg angewandt.

Nach der Elektronentheorie sollen die Stellen des Raumes, von denen elektromagnetische Wirkungen ausgehen und an denen diese Wirkungen auftreten, unteilbare Elementarquanten, die *Elektronen*, enthalten. Wir gelangen damit in der Elek-