universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Achter Abschnitt. Induktion

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

geleistet. Ist K die Kraft, die auf die beiden Rechtecksseiten wirkt, die die Kraftlinien durchschneiden, so ist die Arbeit bei der Drehung um $d\vartheta$ auch dargestellt durch

$$Ka \cdot d\vartheta,$$

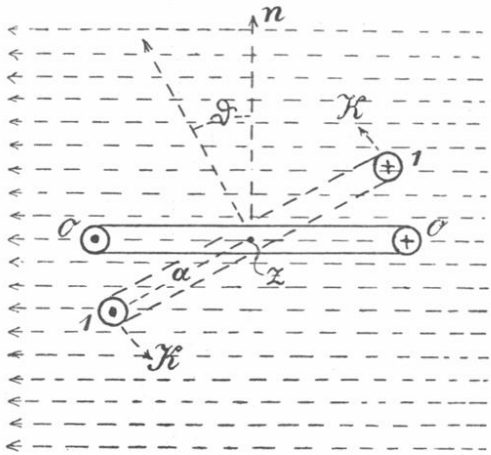

Fig. 107.

wenn a der Abstand der gegenüberliegenden Seiten 1, 1 ist. Wir finden also

$$Ka = \frac{J}{c} F \cdot H \cos \vartheta .$$

Die Rechtecksfläche des Leiters dreht sich, bis $\vartheta = 90^0$ ist.

Achter Abschnitt.

Induktion.

§ 99. Grundgesetze der Induktion.

Faraday (1831) hat zuerst gezeigt, daß in einem Leiter ein Strom entsteht, wenn in der Nähe des Leiters ein zweiter von einem Strome durchflossener Leiter oder ein Magnet bewegt wird. Auch wenn der zweite Leiter nicht bewegt wird, jedoch die Stromstärke in ihm geändert wird, so entsteht in

dem ersten Leiter ein elektrischer Strom. F. E. Neumann hat die Gesetze für diese induzierten Ströme gefunden. Faraday hat später selbst ein Verfahren zur Bestimmung der Richtung und Stärke des induzierten Stromes angegeben, das wegen seiner Anschaulichkeit große Vorzüge besitzt.

ABC (Fig. 108) sei ein geschlossener Leiter in einem magnetischen Felde und DE, $D'E'$ usw. seien die vom Leiter umschlossenen Induktionslinien. Bezeichnen wir mit df ein Element der Fläche, die den Leiter zur Randkurve hat, und mit B_n die zum Flächenelemente senkrechte Komponente der magnetischen Induktion, so entsteht stets dann im Leiter ABC eine elektromotorische Kraft, wenn das Integral

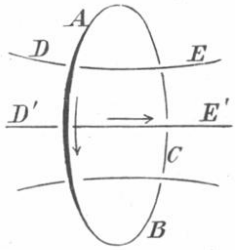

Fig. 108.

$$\mathfrak{Z} = \int \mathfrak{B}_n \cdot df$$

seinen Wert ändert. *In dem Leiter tritt also eine induzierte elektromotorische Kraft auf, wenn die Zahl der von ihm umschlossenen Induktionslinien geändert wird.* Der vom Leiter ABC umschlossene Induktionsfluß kann dadurch geändert werden, daß der Leiter ohne Änderung seiner Form nach Stellen bewegt wird, wo $\mathfrak{B}$ andere Werte hat, oder dadurch, daß bei unveränderlichen Werten von $\mathfrak{B}$ die Gestalt des vom Leiter gebildeten Schließungskreises geändert wird, oder schließlich dadurch, daß bei ruhendem und der Form nach unveränderten Schließungskreise $\mathfrak{B}_n$ verändert wird. Im letzteren Falle handelt es sich bei ruhendem Leiter um eine zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}_n$ an derselben Stelle.

Wir wollen zunächst einige spezielle Fälle der Entstehung induzierter Ströme betrachten. In Fig. 109 sei der von dem Nordpole N eines Magneten ausgehende Induktionsfluß durch gestrichelte Linien angedeutet. AB sei ein ebener geschlossener Stromleiter von rechteckiger oder kreisförmiger Windungsfläche, die zur Ebene der Zeichnung senkrecht stehe. Wird der Leiter seiner Anfangslage parallel liegend in der Richtung des gefiederten Pfeiles dem Nordpole genähert, so nimmt die Zahl der von ihm umschlossenen Induktionslinien zu und in AB entsteht ein Induktionsstrom der angegebenen Richtung.

Ein vom Nordpol aus gegen den Stromleiter in der Richtung der Induktionslinien Blickender sieht den Induktionsstrom entgegen der Bewegung des Uhrzeigers fließen. Würde man den Leiter AB durch eine magnetische Lamelle ersetzen, so würde diese bei der betrachteten Bewegung und Richtung des induzierten Stromes auf der dem Nordpol zugekehrten Seite nordmagnetisch sein. Konstruiert man auf der Windungsebene des Leiters die Normale, deren Richtung mit der Richtung des induzierten Stromes zusammengehört wie die Vorwärtsbewegung und Drehung einer rechtsgängigen Schraube, so hat die Normale die Richtung des gefiederten Pfeiles, der zugleich die Bewegungsrichtung von AB bezeichnet, und der der Richtung des Induktionsflusses entgegengesetzt ist. In bezug auf die letztere Richtung ist also die Änderung des vom Leiter umschlossenen Induktionsflusses

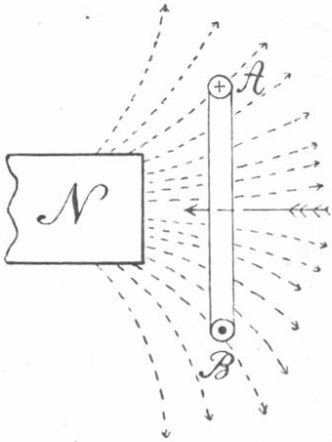

Fig. 109.

$$-\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n \cdot df.$$

Wird der Leiter AB in der entgegengesetzten Richtung bewegt, so ist auch die Richtung des Induktionsstromes die entgegengesetzte, und die positive Normale auf der Windungsfläche des Leiters fällt der Richtung nach mit der Richtung der Induktionslinien zusammen. Dabei nimmt der vom Leiter umschlossene Induktionsfluß ab. Auch bei dieser Bewegung ist die Änderung des die Windungsfläche durchsetzenden Induktionsflusses durch den obigen Ausdruck gegeben. Ferner wird bei dieser Bewegung die dem Nordpole zugekehrte Seite der Windungsfläche durch den Induktionsstrom südmagnetisch.

Bleibt der starre Leiter AB in Ruhe und wird der Nordpol des Magneten von ihm entfernt, so nimmt auch jetzt der vom Leiter umschlossene Induktionsfluß ab; die dem Nordpol zugekehrte Seite der Windungsfläche des Leiters wird südmagnetisch.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für die Induktionswirkungen zweier Stromleiter. Ein Teil eines Stromkreises — des *primären* — sei als kreisförmige Windung vorgestellt, durch die ein konstanter Strom fließt. Dieser Windung (Fig. 110) parallel liege eine zweite — die *sekundäre*. Die gestrichelten Kurven geben den Verlauf der Induktionslinien des primären Leiters $A_1 B_1$. Nähert man den sekundären Leiter $A_2 B_2$ dem primären, oder verstärkt man den primären Strom in $A_1 B_1$ und damit den von ihm erzeugten Induktionsfluß, während $A_2 B_2$ in Ruhe bleibt, so entsteht in $A_2 B_2$ ein Induktionsstrom der angegebenen Richtung.

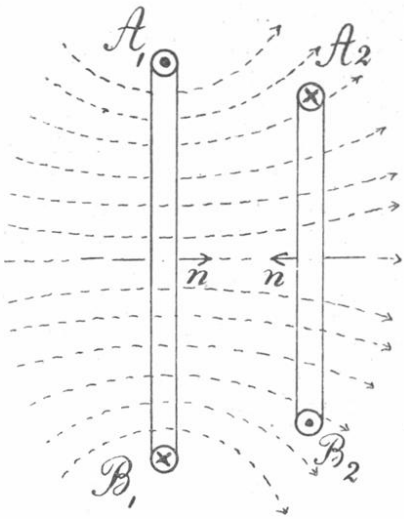

Fig. 110.

Nach dem Lenzschen Gesetze hat der induzierte Strom stets solche Richtung, daß er durch seine elektromagnetische Rückwirkung die Bewegung zu hemmen sucht, durch die er hervorgebracht wird. Allgemein lautet das Lenzsche Gesetz: *Durch welche Zustandsänderung auch ein Induktionsstrom erzeugt sein mag, stets hat er solche Richtung, daß er die Zustandsänderung aufzuheben sucht.*

Um die Richtung des induzierten Stromes in einem Leiterelemente oder einem geradlinigen Leiter zu bestimmen, bedient man sich zweckmäßig der *Dreifingerregel* von Fleming: Zeigt der Daumen der rechten Hand die Richtung der Verschiebung des Leiters, der Zeigefinger die Richtung des induzierenden Magnetfeldes, so gibt der zu den beiden anderen senkrecht ausgestreckte Mittelfinger die Richtung des Induktionsstromes. Die Induktion ist am größten, wenn die drei genannten Richtungen — Leiter, Bewegungsrichtung und Feldrichtung — senkrecht zueinander stehen.

Bezeichnen wir mit ds ein Element des induzierten Leiters

und mit $\mathfrak{E}_s$ die in der Richtung dieses Elementes liegende Komponente der elektrischen Kraft, so ist die im sekundären Leiter induzierte elektromotorische Kraft gleich $\int \mathfrak{E}_s \, ds$, wenn das Integral über alle Elemente des sekundären Leiters erstreckt wird. Das Faradaysche Induktionsgesetz können wir dann in der Form

$$\text{(a)} \qquad \int \mathfrak{E}_s \cdot ds = -\frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n \cdot df$$

darstellen, d. h. *die in einer geschlossenen linearen Leitung induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der negativen Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Induktionsflusses, der vom induzierten Leiter umschlossen wird.*

Helmholtz zeigte (1847), daß sich die Entstehung der Induktionsströme notwendig aus dem Prinzipe der Erhaltung der Energie ergibt. Betrachten wir einen Stromkreis oder einen seiner Teile und nennen wir den Widerstand des Stromkreises R und die Stromstärke J, die von einer inneren elektromotorischen Kraft E, z. B. von einem galvanischen Elemente, im Stromkreise hervorgebracht wird. Bewegt sich der Stromkreis oder einer seiner Teile in einem Magnetfelde, wo $\mu = 1$ und $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ ist, so wird nach S. 365 und Gleichung (b) in der Zeit dt die Arbeit

$$dA = \frac{J}{c}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\, dt$$

geleistet. In der gleichen Zeit wird im Stromkreise die Joulesche Wärme $J^2R \cdot dt$ entwickelt. Ferner ist die vom galvanischen Elemente in dem Zeitelemente dt geleistete Arbeit gleich $EJ \cdot dt$. Wir haben also

$$EJ \cdot dt = J^2R \cdot dt + \frac{J}{c}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\, dt,$$

und demnach

$$\text{(b)} \qquad JR = E - \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt},$$

d. h. die Stromstärke im Leiter ändert sich, wenn der vom Leiter umschlossene Kraftlinienfluß eine Änderung erfährt. Die Gleichung (b) hat die Form des Ohmschen Gesetzes und

$$-\frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}$$

ist die induzierte elektromotorische Kraft. Die Gleichung (b)

bleibt auch bestehen, wenn E kleiner und kleiner wird und im Grenzfalle $E = 0$ ist.

Betrachten wir nur den Fall, daß alle Leiter und Magnete in Ruhe sind und alle Leiter keinen Formveränderungen unterworfen werden, also starr sind, so kann der vom induzierten Leiter umschlossene Induktionsfluß nur dadurch sich ändern, daß die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ an derselben Stelle zeitlich variiert. Für *ruhende Körper* stellen wir das *Induktionsgesetz* (a) dann in der Form dar

$$\text{(c)} \qquad \int \mathfrak{E}_s \cdot ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}_n \, df.$$

Dieses ist die *zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper in der Integralform.* Das über den geschlossenen induzierten Leiter erstreckte Integral $\int \mathfrak{E}_s ds$ ist nicht gleich Null. Demnach kann der Vektor $\mathfrak{E}$ nicht aus einem skalaren Potential wie in der Elektrostatik abgeleitet werden, und bei der Induktion in einem Leiter sind die Kurven der elektrischen Kraft im allgemeinen in sich geschlossen. Würde der induzierte Leiter noch Träger freier elektrischer Ladungen sein, so würden von diesen Kraftlinien ausgehen und endigen. Würde unter solchen Verhältnissen im Leiter nach der Gleichung (c) eine elektromotorische Kraft induziert, so enthielte das elektrische Feld neben Wirbel auch Quellen. Sehen wir von solchen Ladungen ab, so besitzt das nur durch Induktion erzeugte elektrische Feld keine Quellen, sondern nur Wirbel, wir erhalten in diesem Falle ein *quellenfreies Wirbelfeld.*

§ 100. Die Induktionswirkungen zweier Stromkreise. Selbstinduktion.

Wir wollen zunächst nur solche Induktionserscheinungen betrachten, bei denen nur die Leitungsströme zu berücksichtigen sind, d. h. *quasistationäre Ströme.* Der Einfluß der Verschiebungsströme neben den Leitungsströmen tritt erst dann hervor, wenn es sich um Ströme handelt, die mit der Zeit sehr schnell veränderlich sind. Auf die zuerst von H. Hertz erzeugten sehr schnellen Schwingungen sind die für stationäre Ströme erhaltenen Resultate nicht übertragbar. Bei sehr schnellen Schwingungen hat die Stromstärke in einem Quer-

schnitte des Leiters nicht mehr überall denselben Wert, sondern der zentrale Teil des Leiters ist nahezu oder ganz stromfrei, und die Stromleitung geschieht nur noch in den peripherischen Teilen des Querschnittes.

Auch eine Strömung, die zeitlich veränderlich ist, aber doch in geschlossenen Bahnen verläuft, wollen wir als quasistationär ansehen. Wesentlich ist dabei, daß der Strom an allen Teilen seiner Bahn die gleiche Phase hat. Dann darf man voraussetzen, daß das magnetische Feld und die mechanischen Kräfte der quasistationären Ströme in jedem Augenblicke dieselben sind, als wenn in dem betrachteten Augenblicke die Strömung eine stationäre wäre.

Wir betrachten zwei Stromkreise, in denen bzw. die elektromotorischen Kräfte E_1 und E_2, z. B. galvanischer Elemente, wirksam sind, und deren Widerstände R_1 und R_2 sind. Bleibt die Gestalt und Lage jeder der beiden Stromkreise unverändert, und ist dasselbe der Fall mit den Stromstärken, so bleiben auch die Induktionsflüsse unverändert, die von dem einen Stromkreise ausgehen und vom anderen umschlungen werden. Ändert der Stromkreis 1 seine Gestalt, während die Stromstärke in ihm unverändert bleibt, oder ändert sich die letztere bei konstanter Gestalt des Stromleiters, so ändert sich auch der Induktionsfluß, den der Leiter 2 umfaßt. Sofern es sich für die induzierte elektromotorische Kraft im Leiter 2 um einen *quasistationären Vorgang* handelt, gibt die Gleichung (a) auf S. 370

$$\int \mathfrak{E}_{s_2}\, ds_2 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_{1,n}\, df_2 .$$

Nach der Gleichung (i) S. 357 haben wir für den vom Strome 1 herrührenden und vom Stromleiter 2 umschlungenen Induktionsfluß

$$\int \mathfrak{B}_{1,n}\, df_2 = \frac{\mu J_1}{c}\iint \frac{ds_1\, ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r_{12}} .$$

Also erhalten wir

$$\text{(a)} \qquad \int \mathfrak{E}_{s_2}\, ds_2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu J_1}{c^2}\iint \frac{ds_1\, ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r_{12}}\right),$$

wo r_{12} der Abstand des Leiterelementes ds_1 vom Leiterelemente ds_2 ist.

Das Glied

$$\mu \iint \frac{ds_1\, ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r_{12}}$$

hängt allein von der geometrischen Gestalt der Stromkreise und ihrer Lage in bezug aufeinander, sowie von der Permeabilität des sie umgebenden Raumes ab. Wir haben den obigen Ausdruck als den *Koeffizienten der wechselseitigen Induktion* L_{12} des Stromkreises 1 auf den Stromkreis 2 bezeichnet.

Die induzierende Wirkung des Stromkreises 2 auf den Stromkreis 1 ist gegeben durch die elektromotorische Kraft

$$\text{(b)} \qquad \int \mathfrak{E}_{s_1}\, ds_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu J_2}{c^2} \iint \frac{ds_1\, ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r_{12}}\right).$$

Der Koeffizient L_{21} der Induktion des Stromkreises 2 auf 1 ist nach S. 357

$$\text{(c)} \qquad L_{21} = L_{12} = \mu \iint \frac{ds_1\, ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r_{12}}.$$

Die Gleichungen (a) und (b) können wir auch darstellen in der Form

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \int \mathfrak{E}_{s_1}\, ds_1 = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}(J_2\, L_{21}), \\ \int \mathfrak{E}_{s_2}\, ds_2 = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}(J_1\, L_{12}). \end{cases}$$

$L_{12} = L_{21}$ ist als der *Koeffizient der gegenseitigen Induktion* zweier Stromkreise bezeichnet. Aus (c) ergibt sich sogleich, daß die Dimension von $L_{21} = L_{12}$ im magnetischen Maße eine Länge ist.

Jede Gestaltsänderung eines der beiden Stromleiter, und jede Änderung der Stromstärke in ihm, ruft zugleich eine Änderung des von ihm selbst umschlossenen Induktionsflusses hervor. Durch beide erwähnten Vorgänge wird also im Leiter selbst eine elektromotorische Kraft induziert. Diese *Selbstinduktion* ergibt sich auch aus den vorigen Gleichungen (a) und (b), wenn wir unter ds_1 und ds_2 die Stromelemente desselben Leiters verstehen. Dabei wollen wir (vgl. S. 360) ds_2 durch die Bezeichnung ds_1' ersetzen und auch für die Entfernung der Stromelemente ds_1 und ds_1' desselben Leiters den Buchstaben r_1 gebrauchen. Wir erhalten dann für die *elektromotorischen Kräfte der Selbstinduktion*

$$
\text{(e)}\quad \begin{cases} \text{für den Stromkreis 1:} \\ \displaystyle\int \mathfrak{E}'_{s_1}\, ds_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu J_1}{c^2}\iint \frac{ds_1\, ds_1' \cos(ds_1, ds_1')}{r_1}\right), \\ \text{für den Stromkreis 2:} \\ \displaystyle\int \mathfrak{E}'_{s_2}\, ds_2 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu J_2}{c^2}\iint \frac{ds_2\, ds_2' \cos(ds_2, ds_2')}{r_2}\right). \end{cases}
$$

Die Glieder

$$
\text{(f)}\quad \begin{cases} L_1 = \mu \displaystyle\iint \frac{ds_1\, ds_1' \cos(ds_1, ds_1')}{r_1} \\ \text{und} \\ L_2 = \mu \displaystyle\iint \frac{ds_2\, ds_2' \cos(ds_2, ds_2')}{r_2} \end{cases}
$$

werden als *Koeffizienten der Selbstinduktion* bzw. des ersten und des zweiten Stromkreises bezeichnet. L_1 und L_2 haben im magnetischen Maßsystem die Dimension einer Länge. Die Gleichungen (f) zeigen, daß der *Selbstinduktionskoeffizient* L eines Stromkreises allein von der geometrischen Gestalt des Stromkreises abhängt und im übrigen der Permeabilität proportional ist.

Berücksichtigen wir die in jedem der beiden Stromkreise durch Selbstinduktion und durch wechselseitige Induktion hervorgerufenen elektromotorischen Kräfte, so gibt das Ohmsche Gesetz die *Induktionsgesetze für zwei Stromkreise* in den Gleichungen

$$
\text{(g)}\quad \begin{cases} J_1 R_1 = E_1 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}(L_1 J_1 + L_{21} J_2), \\ J_2 R_2 = E_2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}(L_2 J_2 + L_{12} J_1). \end{cases}
$$

Setzt man voraus, daß die Induktionskoeffizienten konstant sind, indem die Stromkreise ihre Gestalt behalten und μ sich nicht ändert, so gehen die Gleichungen (g) über in

$$
\text{(h)}\quad \begin{cases} J_1 R_1 = E_1 - \dfrac{L_1}{c^2}\dfrac{dJ_1}{dt} - \dfrac{L_{21}}{c^2}\dfrac{dJ_2}{dt}, \\ J_2 R_2 = E_2 - \dfrac{L_2}{c^2}\dfrac{dJ_2}{dt} - \dfrac{L_{12}}{c^2}\dfrac{dJ_1}{dt}. \end{cases}
$$

§ 101. Die Induktionskoeffizienten.

Bei der Untersuchung veränderlicher elektrischer Ströme, die durch Drahtspulen fließen, sind die Induktionen zwischen

den einzelnen Windungen in einer Spule und zwischen den verschiedenen Spulen von großer Bedeutung. Die Berechnung dieser Induktion ist meist sehr schwierig; wir wollen einen einfachen Fall betrachten. Zwei kreisförmige Leiter (Fig. 111) liegen in zwei parallelen Ebenen, deren Abstand gleich b ist. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Leiter steht zu diesen Ebenen senkrecht. Die Radien der Leiter seien bzw. r_1 und r_2. r_2 sei größer als r_1. Wir berechnen das Integral

$$L_{12} = \int ds_2 \int \frac{ds_1 \cdot \cos\varepsilon}{r},$$

wobei ε der Winkel zwischen den Stromelementen ds_1 und ds_2 ist. Zunächst wird das Integral

$$m = \int \frac{ds_1 \cos\varepsilon}{r}$$

berechnet. Wir haben

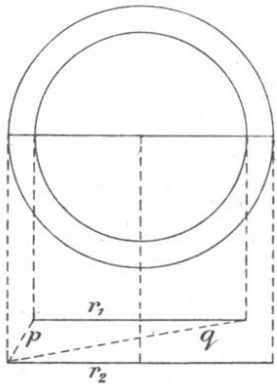

Fig. 111.

$$r^2 = b^2 + r_2{}^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varepsilon + r_1{}^2.$$

Ist p der kleinste und q der größte Abstand zwischen den Punkten der beiden Kreisperipherien, so wird

$$p^2 = b^2 + (r_2 - r_1)^2, \quad q^2 = b^2 + (r_2 + r_1)^2, \quad q^2 - p^2 = 4 r_1 r_2,$$
$$r^2 = p^2 + (q^2 - p^2)\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und

$$m = 2 \cdot \int_0^\pi \frac{r_1 \cos\varepsilon}{\sqrt{p^2 + (q^2 - p^2)\sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon}}\, d\varepsilon.$$

Ist α ein kleiner Winkel, der so gewählt ist, daß $q\alpha$ sehr groß gegen p ist, so können wir setzen

$$m = 2 \cdot \int_0^\alpha \frac{r_1\, d\varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}}} + 2 \cdot \int_\alpha^\pi \frac{r_1 (1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon)}{q \cdot \sin \frac{1}{2}\varepsilon}\, d\varepsilon,$$

$$m = \frac{4 r_1}{q} \cdot \left[\int_0^\alpha \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\frac{4 p^2}{q^2} + \varepsilon^2}} + \int_\alpha^\pi \frac{d\varepsilon}{2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon} - \int_\alpha^\pi \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot d\varepsilon \right],$$

$$m = \frac{4 r_1}{q} \cdot \left[\log \frac{2 r_1 \alpha}{p} - \log \frac{\alpha}{4} - 2\right] = \frac{4 r_1}{q} \left[\log \frac{8 r_1}{p} - 2\right],$$

$$m = 2 \left[\log \frac{8 r_1}{p} - 2\right],$$

wenn b und $r_2 - r_1$ klein sind. Also ist ferner

$$L_{12} = 4 \pi r_2 \left(\log \frac{8 r_1}{p} - 2\right).$$

Nach den Voraussetzungen ist es gestattet, $r_1 = r_2 = R$ zu setzen, sodaß

(a) $$L_{12} = 4 \pi R \left(\log \frac{8 R}{p} - 2\right)$$

wird. Sind zwei Drahtspulen mit den Windungszahlen n_1 und n_2 gegeben, und ist der Mittelwert von $\log p$ für die zwei Windungssysteme gleich $\log P$, so haben wir

(b) $$L_{12} = 4 n_1 n_2 \pi R \left(\log \frac{8 R}{p} - 2\right).$$

Für den Selbstinduktionskoeffizienten L einer einzelnen Spule ergibt sich unter denselben Voraussetzungen, wenn mit n die Anzahl der Windungen bezeichnet wird,

(c) $$L = 4 \pi n^2 R \left(\log \frac{8 R}{P} - 2\right).$$

Der Selbstinduktionskoeffizient ist also dem Quadrate der Windungszahl proportional.

Auf die Berechnung des Induktionskoeffizienten können wir hier nicht weiter eingehen; in den meisten Fällen wird er durch den Versuch bestimmt (vgl. § 102).

Wir wollen unter der Voraussetzung einer quasistationären Strömung den *Selbstinduktionskoeffizienten L eines zylindrischen Leiters* berechnen. Insbesondere nehmen wir an, daß die Stromstärke in allen Teilen des Leitungsquerschnittes die gleiche ist. Den Strom betrachten wir aufgelöst in eine große Zahl von Stromfäden und der Koeffizient der wechselseitigen Induktion zweier Stromfäden ist für $\mu = 1$ nach Gleichung (h) S. 357 durch

$$L_{12} = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds'$$

gegeben, wobei die Integration über alle Elemente des einen und des anderen Leiters zu erstrecken ist. ε ist der Winkel zwischen ds und ds', und r der Abstand dieser Elemente voneinander.

AB und CD seien zwei parallele Linien (Fig. 112), die zusammen mit AC und BD ein Rechteck bilden. Wir setzen $AB = CD = l$ und $CF = s'$. Dann wird zunächst der Wert des Integrals

$$\int_0^l \int_0^l \frac{ds \cdot ds'}{r}$$

bestimmt, weil in dem betrachteten Falle (Fig. 112) $\cos\varepsilon = 1$ ist. Um zunächst den Wert des Integrals

$$P = \int_0^l \frac{ds}{r}$$

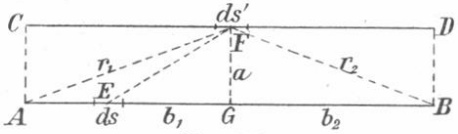

Fig. 112.

zu finden, ziehen wir FG senkrecht zu CD und AB und setzen ferner $FG = a$. Ist $AG = b_1$, $BG = b_2$, $FA = r_1$ und $FB = r_2$, so haben wir

$$P = \int_0^{b_1} \frac{ds}{r} + \int_0^{b_2} \frac{ds}{r},$$

wo s der Abstand eines Punktes auf AB von G ist. Da aber

$$\int \frac{ds}{r} = \int \frac{ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = \log\text{nat}\left(\frac{s}{a} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$P = \log\text{nat}\frac{(r_1 + b_1)(r_2 + b_2)}{a^2} = \log\text{nat}\frac{(AF + AG)(BF + BG)}{a^2}.$$

Ist a im Vergleiche mit l sehr klein, so dürfen wir

$$AF = AG = s' \quad \text{und} \quad FB = GB = l - s'$$

setzen und erhalten dann

$$P = \log\text{nat}\frac{4s'(l - s')}{a^2}.$$

Sodann suchen wir den Wert des Integrals $\int P \cdot ds'$ und erhalten

$$\int_0^l P \cdot ds' = 2l \cdot \left(\log\text{nat}\frac{2l}{a} - 1\right).$$

Somit erhalten wir also für den *wechselseitigen Induktionskoeffizienten zweier gerader paralleler Drähte* von der Länge l und dem Abstande a unter der Voraussetzung einer stationären Strömung und langsamer Stromschwankungen

$$L_{12} = 2l\left(\log\text{nat}\frac{2l}{a} - 1\right).$$

Wir berechnen *den Selbstinduktionskoeffizienten eines Drahtes mit kreisförmigem Querschnitte.*

AB (Fig. 113) sei der Querschnitt eines zylindrischen Leiters, dessen Länge l und dessen Radius R ist. Auf dem ganzen Querschnitte sei die Stromdichte j konstant. Die Stromstärke ist also $J = R^2\pi j$. Wir betrachten zunächst die induzierende Wirkung, die von einem Faden D herrührt, dessen Querschnitt dS ist. Dieser Faden wirkt auf einen anderen Faden, welcher der Zylinderachse parallel ist und durch den Punkt C geht. Wenn $DC = a$ ist, so ergibt sich die induzierende Wirkung aller Stromfäden auf den Stromfaden C nach § 100 (d) aus der Variation des Integrales

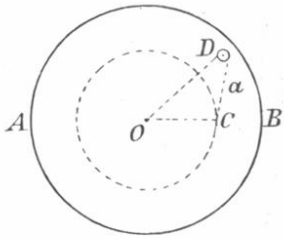

Fig. 113.

$$\frac{j}{c^2}\int dS\cdot 2l\left(\log\text{nat}\frac{2l}{a} - 1\right) = \frac{j}{c^2}\int dS\cdot(M + N\cdot\log\text{nat}\,a),$$

wo die Größen M und N der Kürze wegen eingeführt sind und

$$M = 2l(\log\text{nat}\,2l - 1), \quad N = -2l$$

gesetzt ist. Wir haben zwischen zwei Fällen zu unterscheiden: $OD = r$ kann entweder größer oder kleiner als $OC = r_1$ sein. Zunächst sei $r > r_1$. Die Elemente dS mögen eine ringförmige Fläche mit dem Inhalte $2\pi r\cdot dr$ bilden. Dann ist der Mittelwert von $\log a$ gleich dem Logarithmus der halben Summe des größten und des kleinsten Wertes, den a annehmen kann. Diese Werte sind bzw. $r + r_1$ und $r - r_1$. Der gesuchte Mittelwert ist also $\log r$. Demnach haben wir das Integral

$$\frac{j}{c^2}\cdot\int_{r_1}^{R} 2\pi r\cdot dr\cdot(M + N\log\text{nat}\,r) = \pi\frac{j}{c^2}\{M(R^2 - r_1{}^2)$$
$$+ N[R^2\log\text{nat}\,R - r_1{}^2\log\text{nat}\,r_1 - \tfrac{1}{2}(R^2 - r_1{}^2)]\}.$$

Für den Teil des Zylinders, dessen Abstand von der Achse kleiner als r_1 ist, wird die halbe Summe des größten und kleinsten Wertes für a gleich r_1. Demnach lautet das Integral für diesen Teil

$$\frac{j}{c^2} \cdot \int_0^{r_1} 2\pi r \cdot dr \cdot (M + N \log \operatorname{nat} r_1)$$

$$= \pi \frac{j}{c^2} (M r_1^2 + N r_1^2 \cdot \log \operatorname{nat} r_1).$$

Die Summe der beiden Integrale ist

$$\pi \frac{j}{c^2} \{M R^2 + N(R^2 \log \operatorname{nat} R - \tfrac{1}{2}(R^2 - r_1^2))\}.$$

Um den Mittelwert dieser Größe für alle Längsfasern des Zylinders zu erhalten, müssen wir nur den Mittelwert von r_1^2 aufsuchen, da alle anderen Größen konstant sind. Weil aber

$$\frac{1}{\pi R^2} \cdot \int_0^R r_1^2 \cdot 2\pi r_1 \cdot dr_1 = \tfrac{1}{2} R^2$$

ist, so erhalten wir für den gesuchten Mittelwert

$$\pi \frac{j}{c^2} R^2 [M + N(\log \operatorname{nat} R - \tfrac{1}{4})].$$

Führen wir in diese Gleichung die Werte für

$$M = 2l(\log \operatorname{nat} 2l - 1) \quad \text{und für} \quad N = -2l$$

ein und setzen wir

$$\frac{\pi j R^2}{c^2} = \frac{J}{c^2},$$

so ergibt sich für die Größe, deren Variation die Selbstinduktion ist,

$$2l \frac{J}{c^2} \left(\log \operatorname{nat} \frac{2l}{R} - \tfrac{3}{4}\right).$$

Für den Selbstinduktionskoeffizienten L erhalten wir also

$$L = 2l \left(\log \operatorname{nat} \frac{2l}{R} - \tfrac{3}{4}\right).$$

Dieser Wert für den Selbstinduktionskoeffizienten L gilt auch nur unter der Voraussetzung, daß der Strom über den ganzen Querschnitt des Leiters gleichmäßig verteilt ist, d. h. bei stationärer Strömung und langsamen Wechseln.

§ 102. Methoden zur Bestimmung des Koeffizienten der Induktion.

a) Ist der Induktionskoeffizient L_{12} zweier Drahtspulen S_1 und S_2 bekannt, so kann man den Induktionskoeffizienten L'_{12} zweier anderer Drahtspulen S_1' und S_2' in folgender Weise bestimmen. Vom galvanischen Elemente E (Fig. 114) geht ein Strom J durch die Spulen S_1 und S_1'. Die Spulen S_2 und S_2' werden miteinander verbunden und von den Punkten a und b führen

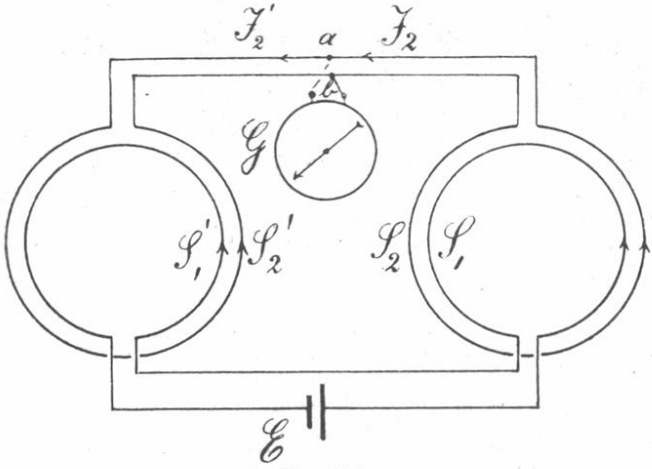

Fig. 114.

Leitungen zum Galvanometer G. Wird der durch S_1 und S_1' fließende Strom plötzlich unterbrochen, so entstehen in S_2 und S_2' die elektromotorischen Kräfte E und E'. J_2 und J_2' seien die Stromstärken der induzierten Ströme in S_2 und S_2', so haben wir nach S. 374 und Gleichung (g)

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_2 J_2 + L_{12} J),$$

$$\mathsf{E}' = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_2' J_2' + L'_{12} J),$$

wenn die Selbstinduktionskoeffizienten der Spulen S_2 und S_2', bzw. mit L_2 und L_2' bezeichnet werden. Wenden wir das Kirchhoffsche Gesetz auf die Stromkreise $S_2\,G$ und $S_2'\,G$ an, so folgt

$$-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_2 J_2 + L_{12} J) = R_2 J_2 + G(J_2 - J_2'),$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_2' J_2' + L_{12}' J) = R_2' J_2' - G(J_2 - J_2'),$$

wenn G der Widerstand des Galvanometers und R_2 und R_2' die Widerstände der Spulen S_2 und S_2' sind. Wir multiplizieren diese Gleichungen mit dt und integrieren von $t = 0$ bis $t = \tau$, wo τ eine sehr kurze Zeit ist. Im Augenblicke $t = 0$ wird der Strom J unterbrochen, dadurch wird im Stromkreise $S_2' G S_2$ ein Strom induziert, der in der kurzen Zeit τ in der Spule S_2 die Elektrizitätsmenge e_2, in S_2' die Elektrizitätsmenge e_2' und im Galvanometer also die Elektrizitätsmenge $e_2 - e_2'$ in Bewegung setzt. Zur Zeit $t = 0$ ist $J = J$, $J_2 = J_2' = 0$ und $e_2 = e_2' = 0$; zur Zeit $t = \tau$ ist der Strom $J = 0$ und der Induktionsstrom ist ebenfalls verschwunden, also $J_2 = J_2' = 0$. Demnach haben wir

$$\frac{1}{c^2} L_{12} J = R_2 e_2 + G(e_2 - e_2'),$$

$$\frac{1}{c^2} L_{12}' J = R_2' e_2' - G(e_2 - e_2'),$$

und daraus ergibt sich

$$e_2 - e_2' = \frac{J}{c^2}\,\frac{\dfrac{L_{12}}{R_2} - \dfrac{L_{12}'}{R_2'}}{1 + \dfrac{G}{R_2} + \dfrac{G}{R_2'}}.$$

$e_2 - e_2'$ ist die durch das Galvanometer fließende induzierte Elektrizitätsmenge, der sogenannte *Integralstrom*. Das Galvanometer gibt keinen Ausschlag, wenn die Widerstände R_2 und R_2' der Gleichung

$$\frac{L_{12}}{L_{12}'} = \frac{R_2}{R_2'}$$

genügen.

b) Die Vergleichung zwischen zwei Selbstinduktionskoeffizienten kann auch folgendermaßen ausgeführt werden. $ABCD$ (Fig. 115) sei eine Wheatestonesche Brücke, im Leiter BD sei ein Galvanometer eingeschaltet. S_1 und S_2 sind zwei Drahtspulen, die in den Brückenzweigen AB und BC eingeschaltet sind und deren Selbstinduktionskoeffizienten verglichen werden sollen. Der bei A eintretende und bei C aus-

tretende Strom verteilt sich in den Leitern und veranlaßt einen Ausschlag der Galvanometernadel. Die Widerstände R_1, R_2, R_1' und R_2' bzw. in AB, BC, AD und DC seien so gewählt, daß kein Strom durch das Galvanometer fließt; dann haben wir

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_1'}{R_2'}.$$

Durch Unterbrechung der Leitung bei E entsteht durch Induktion eine elektromotorische Kraft in S_1 und S_2. Infolgedessen fließt durch das Galvanometer ein Strom mit der

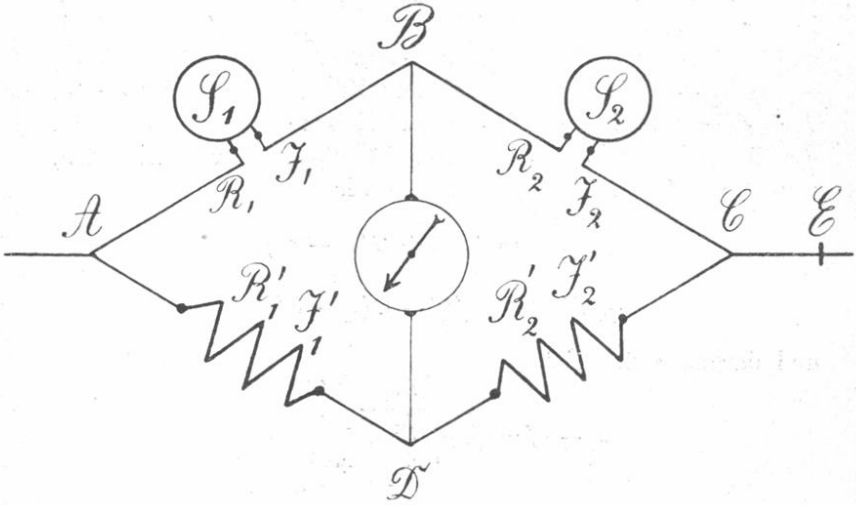

Fig. 115.

Stärke g. J_1, J_2, J_1' und J_2' seien nach Öffnung des Stromkreises bei E bzw. die Stromstärken in den Leitern AB, BC, AD und DC, wobei $J_1 = J_1'$ und $J_2 = J_2'$ ist. Wird der Galvanometerwiderstand mit G bezeichnet, so ist nach den Gleichungen (g) auf S. 374

$$-\frac{1}{c^2}\,\frac{d(L_1 J_1)}{dt} = (R_1 + R_1')J_1 + G\cdot g.$$

$$-\frac{1}{c^2}\,\frac{d(L_2 J_2)}{dt} = (R_2 + R_2')J_2 - G\cdot g.$$

In dem Augenblicke $t = 0$, wo die Leitung bei E unterbrochen wird, fließt derselbe Strom J_0 in AB und BC, demnach wird

$$\frac{1}{c^2} L_1 J_0 = (R_1 + R_1') \int_0^\tau J_1 \, dt + G \int_0^\tau g \, dt,$$

$$\frac{1}{c^2} L_2 J_0 = (R_2 + R_2') \int_0^\tau J_2 \, dt - G \int_0^\tau g \, dt,$$

wenn τ eine sehr kurze Zeit bezeichnet. Der Strom g bringt keine Ablenkung des beweglichen Systems im Galvanometer hervor, wenn

$$\int_0^\tau g \cdot dt = 0$$

ist. Da $J_1 = J_2 + g$ ist, so haben wir auch $J_1 = J_2$, wenn kein Strom durch das Galvanometer fließt, und ferner

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1 + R_1'}{R_2 + R_2'}.$$

Da aber

$$R_1 : R_2 = R_1' : R_2'$$

vorausgesetzt ist, so folgt

$$L_1 : L_2 = R_1 : R_2,$$

d. h. *die Selbstinduktionskoeffizienten der Spulen verhalten sich wie die Widerstände der beiden Zweige, in denen die Spulen eingeschaltet sind.*

Wenn also weder für einen konstanten Strom noch für einen veränderlichen Strom, der durch die Spulen S_1 und S_2 geht, das bewegliche System des Galvanometers einen Ausschlag gibt, so kann nach dem Vorhergehenden leicht das Verhältnis zwischen den Koeffizienten L_1 und L_2 ermittelt werden.

§ 103. Absolute Einheiten.

Nach der Gleichung (c) S. 371 haben wir für die elektromotorische Kraft im elektrostatischen Maße den Ausdruck

$$\int \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t},$$

wo $\mathfrak{Z}$ im magnetischen Maße gemessen ist. Da

$$[\mathfrak{Z}] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}]$$

ist, so hat *die elektromotorische Kraft im elektrostatischen Maße* die Dimension

$$[M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}].$$

Die elektromotorische Kraft im elektromagnetischen Maße ist durch die Veränderung der Zahl der Induktionslinien in der Zeiteinheit gegeben. Ändert sich der von einem Stromkreise umschlossene Induktionsfluß $\mathfrak{Z}$ im Zeitelemente dt um $d\mathfrak{Z}$, so ist im elektromagnetischen Maße die induzierte elektromotorische Kraft gleich $-d\mathfrak{Z}/dt$. Ihre Dimension ist also

$$[M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}].$$

Die *Stromstärke* J im elektrostatischen Maße hat die Dimension (s. S. 323)

$$[J] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}],$$

aber im elektromagnetischen Maße nach der Gleichung (c) auf S. 330

$$[i] = [M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}].$$

Nach dem Ohmschen Gesetze erhalten wir demnach für den *Widerstand* R im elektrostatischen Maße

$$[R] = [L^{-1} T],$$

und für den *Widerstand* r im elektromagnetischen Maße

$$[r] = [L T^{-1}],$$

d. h. in diesem Maßsysteme hat der elektrische Widerstand die Dimension einer Geschwindigkeit.

Bestimmt man dieselbe Elektrizitätsmenge sowohl elektrostatisch, z. B. durch die Coulombsche Drehwage, als auch elektromagnetisch durch ein Galvanometer, so hat man zwei Werte für dieselbe Größe. Im elektrostatischen Maße wird die Elektrizitätsmenge e_s ausgedrückt durch (s. S. 221)

$$e_s [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}],$$

und im elektromagnetischen Maße wird e_m ausgedrückt durch

$$e_m [M^{1/2} L^{1/2}].$$

Auch das Verhältnis zwischen diesen Werten gibt eine Geschwindigkeit, die wir mit c bezeichnet haben, und die zuerst von W. Weber und R. Kohlrausch (1856) gemessen und für die der Wert $c = 3 \cdot 10^{10}$ gefunden ist. Diese Zahl stimmt überein mit der Geschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Die

elektromagnetische Elektrizitätseinheit ist also gleich c elektrostatischen Elektrizitätseinheiten.

Nach S. 242 ist

$$\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Potential}} = \text{Kapazität},$$

und im elektrostatischen Maße wird nach S. 242 die Kapazität durch eine Länge gemessen.

Im elektromagnetischen Maße ist dagegen die Dimension der Kapazität

$$\frac{M^{1/2} L^{1/2}}{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}} = L^{-1} T^2,$$

indem nach dem Ohmschen Gesetze die Potentialdifferenz = Stromstärke × Widerstand ist, und demnach die Dimension des Potentials im elektromagnetischen Maße

$$[M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}] \cdot [L T^{-1}] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}]$$

ist.

In der folgenden Tabelle ist eine Zusammenstellung der Dimensionen der elektrischen Größen gegeben.

Größe	Elektrostatisch	Elektromagnetisch	Elektrostatisch / Elektromagnetisch
Elektrizitätsmenge . .	$M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$	$M^{1/2} L^{1/2}$	$L T^{-1} = c$
Stromstärke	$M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$	$M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}$	$L T^{-1} = c$
Elektrische Feldstärke	$M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}$	$M^{1/2} L^{1/2} T^{-2}$	$L^{-1} T = 1/c$
Widerstand	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$	$L^{-2} T^2 = 1/c^2$
Kapazität	L	$L^{-1} T^2$	$L^2 T^{-2} = c^2$
Selbstinduktion . . .	$L^{-1} T^2$	L	$L^{-2} T^2 = 1/c^2$

Praktische Einheiten.

Anstatt der absoluten Einheiten werden oft, besonders in der Elektrotechnik, die sogenannten praktischen Einheiten gebraucht. Als Einheit der Stromstärke gilt in diesem Systeme ein *Ampere*, das gleich $^1/_{10}$ der elektromagnetischen Stromeinheit ist. Die Einheit des Widerstandes ist ein *Ohm*, das 10^9 absoluten Widerstandseinheiten gleich ist. Ein Ohm ist nahezu gleich dem Widerstande in einem Quecksilberfaden von 106,3 cm Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0° C. Das Ohmsche Gesetz

führt dann zur Einheit der elektromotorischen Kraft: ein *Volt*, das gleich 10^8 absoluten elektromagnetischen Einheiten der Potentialdifferenz ist.

Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist die Menge, die in einer Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters strömt, wenn die Stromstärke ein Ampere beträgt. Diese Einheit bezeichnen wir als ein *Coulomb*. Ein Kondensator, dessen Belegungen die Ladung ein Coulomb haben, während der Spannungsunterschied der Belegungen ein Volt beträgt, hat die Kapazität gleich einem *Farad*; sie ist gleich $10^{-1}/10^8 = 10^{-9}$ absoluten elektromagnetischen Einheiten der Kapazität. Ein Körper, der die Kapazität Eins im absoluten elektromagnetischen Maßsysteme haben soll, bedarf einer Elektrizitätsmenge gleich der Einheit, um das Potential Eins zu erhalten; in dem elektrostatischen Maßsysteme entspricht diesen Größen die Elektrizitätsmenge c und das Potential $1/c$. Die elektrostatische Kapazität des genannten Körpers ist also c^2. Hieraus folgt, daß ein Farad gleich $c^2/10^9$ elektrostatischen Einheiten ist. Da auch die Kapazität ein *Farad* sehr groß ist, so wird in der Regel ein Mikrofarad gebraucht, das ein Milliontel eines Farad ist.

§ 104. Ein Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Der von einem Stromkreise umschlossene Induktionsfluß $\mathfrak{Z}$ ändere sich im Zeitelemente dt um $d\mathfrak{Z}$. Dann ist die im elektromagnetischen Maße gemessene induzierte elektromotorische Kraft durch $-d\mathfrak{Z}/dt$ gegeben. Ist ferner L der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises, so ist die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion im elektromagnetischen Maße durch

$$-\frac{d(Li)}{dt}$$

bestimmt. Wir erhalten also durch Einführung der elektromagnetischen Einheiten nach dem Ohmschen Gesetze die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad ir = -\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} - \frac{d(Li)}{dt}.$$

Setzen wir voraus, daß im Stromkreise nur die innere konstante elektromotorische Kraft E eines galvanischen Elementes vorhanden ist, so haben wir für diesen Stromkreis nach § 100 (h)

$$\text{(b)} \qquad ir = \mathsf{E} - \frac{d(Li)}{dt}.$$

Ist der Selbstinduktionskoeffizient L konstant, so geht diese Gleichung über in

$$ir = \mathsf{E} - L\frac{di}{dt}. \tag{c}$$

Wird zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen, so ist für $t = 0$ auch $i = 0$. Aus (c) erhalten wir

$$\frac{di}{dt} - \frac{\mathsf{E}}{L} + \frac{ir}{L} = 0,$$

und durch Differentiation

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} = 0.$$

Zur Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung setzen wir $i = e^{\alpha t}$ und erhalten dann die Gleichung

$$\alpha^2 + \frac{r}{L}\alpha = 0,$$

der die Werte

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = -\frac{r}{L}$$

genügen. Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (c) nehmen wir

$$i = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t},$$

oder in Rücksicht auf die gefundenen Werte von α_1 und α_2

$$i = A_1 + A_2 e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Da bei dem Stromschluß zur Zeit $t = 0$ auch $i = 0$ ist, so muß $A_1 + A_2 = 0$ sein. Nach einiger Zeit hat der Strom die Stärke $i_0 = \mathsf{E}/r$ nach dem Ohmschen Gesetze angenommen. Wir haben für $t = \infty$ also $i_0 = \mathsf{E}/r$. Also wird

$$i_0 = A_1 = -A_2 = \frac{\mathsf{E}}{r}.$$

Wir finden demnach als Lösung der Differentialgleichung (c)

$$i = \frac{\mathsf{E}}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right), \tag{d}$$

d. h. der Strom nimmt um so schneller seinen schließlichen Wert i_0 an, je größer r/L ist. Sind Drahtspulen mit vielen Windungen auf einem Eisenkerne vorhanden, so kann es eine merkliche Zeit dauern, bis i seinen schließlichen Wert i_0 an-

genommen hat. r/L wird die *Zeitkonstante* des Stromkreises genannt.

Stellt M (Fig. 116) die Stromspulen eines großen Elektromagneten dar, die mit dem regulierbaren Widerstande W im Stromkreise der galvanischen Batterie E liegen, deren elektromotorische Kraft E ist, so wird beim Übergange der Kurbel vom Kontakte 1 auf 0 der Strom unterbrochen und zugleich wird die Stromspule in sich geschlossen. Bei dieser Unterbrechung entsteht in M, dessen Widerstand r sein soll, eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion und ein Öffnungsstrom. Die Grenzbedingungen lauten hier für $t = 0$

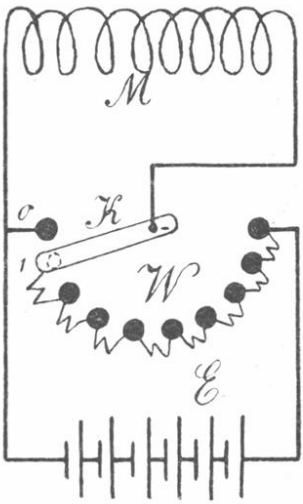

Fig. 116.

$$i = i_0 = \frac{\mathsf{E}}{r + W} = A_1 + A_2,$$

für $t = \infty$

$$i = 0 = A_1.$$

Also wird

$$\text{(e)} \qquad i = i_0 \cdot e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Für $t = L/r$ haben wir

$$e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{1}{e}, \quad \text{also} \quad i = \frac{i_0}{e},$$

d. h. L/r ist die Zeitdauer, nach der die Stromstärke auf $1/e$ ihres Anfangswertes gesunken ist. Nach (e) *nimmt die Stromstärke um so schneller ab, je größer der Widerstand r und je kleiner der Koeffizient der Selbstinduktion ist.*

Aus (e) erhalten wir

$$\int_0^\infty i^2 r\, dt = i_0^2 r \int_0^\infty e^{-\frac{2rt}{L}} dt = \tfrac{1}{2} L i_0^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung gibt einen Ausdruck für die Arbeit, die als Wärme im Leiter auftritt. Demnach haben wir für die *magnetische Energie*, die ein Stromleiter mit der Stromstärke i und der Selbstinduktion L besitzt,

(f) $$W_m = \frac{1}{2} L i^2,$$

d. h. *die magnetische Energie des Stromkreises ist also gleich dem halben Produkte aus dem Selbstinduktionskoeffizienten L in das Quadrat der Stromstärke i* (s. S. 359).

Wir weisen darauf hin, daß L bei Spulen mit Eisenkern in Wirklichkeit nicht konstant ist, sondern von der Induktion des Eisens selbst abhängt.

§ 105. Ein Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und periodisch veränderlicher elektromotorischer Kraft.

Betrachten wir eine Spule (Fig. 117), die im gleichförmigen magnetischen Felde um eine zur Feldrichtung senkrechte Achse rotiert. In der mit O bezeichneten Anfangsstellung ist der

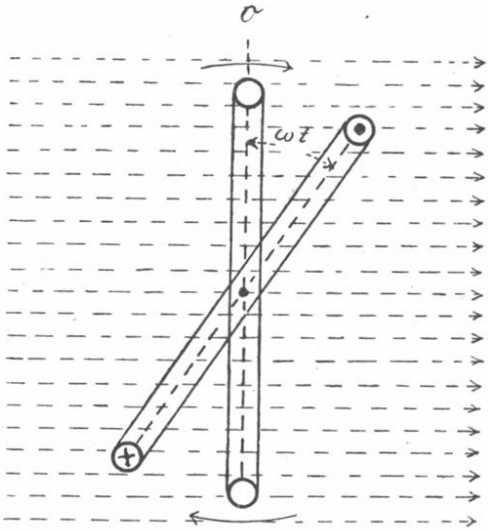

Fig. 117.

durch die Windungsfläche der Spule gehende Induktionsfluß am größten und zwar gleich $\mathfrak{Z}_0$. Nach einer Drehung um den Winkel ωt, wo ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, ist der von jeder Windung umschlossene Induktionsfluß gleich $\mathfrak{Z}_0 \cos \omega t$. Also ist die in der Windung induzierte elektromotorische Kraft gleich

$$-\frac{d(\mathfrak{Z}_0 \cos \omega t)}{dt} = \mathfrak{Z}_0 \, \omega \sin \omega t.$$

Hat die Spule n Windungen, so ist die ihr induzierte elektromotorische Kraft $\mathfrak{Z}_0 \, \omega \, n \sin \omega t$. Die elektromotorische Kraft ist also periodisch veränderlich und hat das *Maximum* oder die *Amplitude* $\mathsf{E}_0 = \mathfrak{Z}_0 \, \omega \, n$. Ist ν die Zahl der Umdrehungen der Spule in der Sekunde und τ die Dauer einer Umdrehung oder einer Periode, so haben wir

$$2\pi\nu = \omega, \quad \text{oder} \quad \frac{2\pi}{\tau} = \omega.$$

Also ist die in einem Zeitpunkte t in der rotierenden Spule induzierte elektromotorische Kraft

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \cdot \sin \omega t = \mathsf{E}_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

L sei der Selbstinduktionskoeffizient der rotierenden Spule. Wir gehen dann aus von der Gleichung (h) auf S. 374, die mit Benutzung der elektromagnetischen Einheiten lautet

$$\text{(a)} \qquad i r = \mathsf{E} - L \frac{di}{dt}.$$

Fügen wir den oben für E erhaltenen Wert ein, so wird

$$i r = \mathsf{E}_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt}.$$

Setzen wir zunächst voraus, daß die elektromotorische Kraft eine beliebige Funktion der Zeit, also $\mathsf{E} = f(t)$ ist, so lautet die Gleichung (a)

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L} i = \frac{1}{L} f(t).$$

Wir gelangen also zu einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

wobei P und Q Funktionen von x oder Konstante sind. Durch die Methode des integrierenden Faktors erhalten wir als Integral dieser Gleichung

$$y = e^{-\int P dx} \cdot \int Q e^{\int P dx} dx + C e^{-\int P dx},$$

wo C eine Integrationskonstante bedeutet. Setzen wir in diese Gleichung für

$$P = \frac{r}{L} \quad \text{und für} \quad Q = \frac{1}{L} f(t),$$

so wird

$$i = \frac{1}{L} \cdot e^{-\frac{rt}{L}} \cdot \int f(t) e^{\frac{rt}{L}} dt + C e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Führen wir hier $f(t) = \mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \sin \omega t$ ein, so wird

$$i = \frac{\mathsf{E}_0}{L} e^{-\frac{rt}{L}} \cdot \int \sin \omega t \cdot e^{\frac{rt}{L}} dt + C e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Da nun

$$\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{1 + a^2}$$

ist, so setzen wir

$$\omega t = x \quad \text{und} \quad a = \frac{r}{L\omega}$$

und erhalten dann

$$i = \frac{\mathsf{E}_0}{L\omega} \frac{\frac{r}{L\omega} \sin \omega t - \cos \omega t}{1 + \left(\frac{r}{L\omega}\right)^2} + C e^{-\frac{rt}{L}},$$

und durch Umformung dieses Ausdruckes

$$i = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t - \frac{L\omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t \right) + C e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Wir setzen nun

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{L\omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} = \sin \varphi$$

und finden schließlich

$$\text{(b)} \qquad i = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) + C e^{-\frac{rt}{L}}.$$

Nach sehr kurzer Zeit ist der Exponentialausdruck in dieser Gleichung unendlich klein. Nach dieser Zeit haben wir dann

$$\text{(c)} \qquad i = \frac{\mathsf{E}_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}},$$

d. h. *zwischen dem Strome i und der elektromotorischen Kraft $\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \sin \omega t$ besteht eine Phasendifferenz vom Betrage φ, und zwar ist*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{r}.$$

Diese Phasendifferenz ist demnach sehr klein, wenn bei konstantem Werte ω der Selbstinduktionskoeffizient L gegenüber dem Widerstande r sehr klein ist. Dagegen erreicht die Phasendifferenz nahezu den Wert $\pi/2$, wenn L gegenüber r sehr groß ist. Bei unveränderlichen Werten von L und r ist die Phasendifferenz φ um so größer, je größer ω oder die Frequenz ν des Wechselstromes ist.

Die Gleichung (c) stellt das *Ohmsche Gesetz für Wechselströme* dar. $\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}$ ist der *Wechselstromwiderstand* oder die *Impedanz*. r wird als *Ohmscher Widerstand* und $L\omega$ als *induktiver Widerstand* oder *Induktanz* bezeichnet. Bei der Berechnung des Wechselstromwiderstandes von Spulen mit Eisenkern ist zu beachten, daß L nicht konstant ist.

Der Mittelwert $(i^2)_m$ von i^2 während einer Periode

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

ergibt sich aus

$$\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau/2} i^2\,dt = \frac{2}{\tau}\frac{\mathsf{E}_0^2}{r^2 + L^2\omega^2}\int_0^{\tau/2}\sin^2(\omega t - \varphi)\,dt.$$

Also ist

$$(i^2)_m = \frac{\mathsf{E}_0^2}{2(r^2 + L^2\omega^2)}.$$

$i_{\text{eff}} = \sqrt{(i^2)_m}$ wird als *effektive Stromstärke* bezeichnet. Nach (c) ist der Höchstwert der Stromstärke

$$i_0 = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}.$$

Wir finden also

$$i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i_0.$$

Ebenso ergibt sich als effektive elektromotorische Kraft

$$\mathsf{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathsf{E}_0.$$

Somit wird

$$i_{\text{eff}} = \frac{\mathsf{E}_{\text{eff}}}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}.$$

Die Leistung des Wechselstromes ist

$$U = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\mathsf{E}\,i\,dt = \frac{\mathsf{E}_0\,i_0}{\tau}\int_0^{\tau}\sin\omega t\cdot\sin(\omega t - \varphi)\,dt.$$

Durch Integration erhalten wir

$$U = \frac{\mathsf{E}_0\, i_0 \cos\varphi}{2} = \mathsf{E}_{\text{eff}} \cdot i_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi\,.$$

$\cos\varphi$ ist der *Leistungsfaktor*, mit dem die *scheinbare Leistung* $\mathsf{E}_{\text{eff}} \cdot i_{\text{eff}}$ multipliziert werden muß, um die *wirkliche Leistung* U zu erhalten.

§ 106. Zwei aufeinander induzierende Stromkreise (Transformator).

Wir gehen aus von den Gleichungen § 100 (h), die bei Benutzung des elektromagnetischen Maßsystems lauten

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} + L_{21} \frac{d i_2}{d t} = \mathsf{E}_1\,,$$

$$i_2 r_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} + L_{12} \frac{d i_1}{d t} = \mathsf{E}_2\,.$$

Im ersten (*primären*) Stromkreise wirke eine periodisch veränderliche elektromotorische Kraft $\mathsf{E}_1 = \mathsf{E}_0 \sin(\omega t)$, während im zweiten (*sekundären*) Stromkreise keine Stromquelle wirksam sei. Dann haben wir

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} i_1 r_1 + L_1 \dfrac{d i_1}{d t} + L_{21} \dfrac{d i_2}{d t} = \mathsf{E}_0 \sin(\omega t)\,, \\[2ex] i_2 r_2 + L_2 \dfrac{d i_2}{d t} + L_{12} \dfrac{d i_1}{d t} = 0\,. \end{cases}$$

Wir ersetzen $\sin\omega t$ durch $e^{\iota\omega t}$, indem für $\sqrt{-1}$ das Zeichen ι gesetzt ist. In dem Resultate ist dann für die Lösung der imaginäre Bestandteil von $e^{\iota\omega t}$ auszusondern. Führen wir dann in die Gleichungen

$$i_1 = a_1\, e^{\iota\omega t} \quad \text{und} \quad i_2 = a_2\, e^{\iota\omega t}$$

ein, so wird

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} (r_1 + L_1\,\iota\,\omega)\, i_1 + L_{21}\,\iota\,\omega\, i_2 = \mathsf{E}_0\, e^{\iota\omega t}, \\ L_{12}\,\iota\,\omega\, i_1 + (r_2 + L_2\,\iota\,\omega)\, i_2 = 0\,. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$(r_1 + L_1\,\iota\,\omega)\, i_1 - L_{21}\,\iota\,\omega \frac{L_{12}\,\iota\,\omega}{r_2 + L_2\,\iota\,\omega}\, i_1 = \mathsf{E}_0\, e^{\iota\omega t},$$

oder, wenn $L_{12} = L_{21}$ gesetzt wird,

$$i_1 \left\{ r_1 + \frac{L_{12}^2\,\omega^2\, r_2}{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2} + \iota\,\omega\, L_1 - \frac{L_2\, L_{12}^2\,\iota\,\omega^3}{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2} \right\} = \mathsf{E}_0\, e^{\iota\omega t}.$$

Wir setzen

$$\frac{L_{12}^2\,\omega^2}{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2} = p^2,$$

ferner

$$r_1 + r_2\,p^2 = r'; \quad L_1 - L_2\,p^2 = L',$$

und finden dann

(b′) $$i_1\,(r' + \iota\,\omega\,L') = \mathsf{E}_0\,e^{\iota\,\omega\,t}.$$

Weiter ergibt sich

$$i_1 = \frac{\mathsf{E}_0\,(\cos\omega\,t + \iota\sin\omega\,t)\,(r' - \iota\,\omega\,L')}{r'^2 + L'^2\,\omega^2},$$

oder bei Aussonderung der imaginären Teile

$$i_1 = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{r'^2 + L'^2\,\omega^2}}\left\{\frac{r'\sin\omega\,t}{\sqrt{r'^2 + L'^2\,\omega^2}} - \frac{L'\,\omega\cos\omega\,t}{\sqrt{r'^2 + L'^2\,\omega^2}}\right\}.$$

Wir setzen jetzt

$$\frac{r'}{\sqrt{r'^2 + L'^2\,\omega^2}} = \cos\varphi_1; \quad \frac{L'\,\omega}{r'} = \operatorname{tg}\varphi_1,$$

und erhalten schließlich

(c) $$i_1 = \frac{\mathsf{E}_0}{\sqrt{r'^2 + L'^2\,\omega^2}} \cdot \sin(\omega\,t - \varphi_1).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (c) auf S. 391, so zeigt sich, daß durch das Hinzufügen des sekundären Stromkreises der Widerstand von r_1 auf r' scheinbar vergrößert und die Selbstinduktion von L_1 auf L' scheinbar vermindert ist. Auch ergibt sich, daß durch den sekundären Kreis eine Verminderung der Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Kraft und dem primären Strome herbeigeführt wird gegenüber dem in § 105 betrachteten Falle.

Aus (b) folgt ferner

$$i_2 = -\frac{L_{21}\,\iota\,\omega}{r_2 + L_2\,\iota\,\omega}\,i_1,$$

oder

$$i_2 = -\frac{\iota\,(r_2 - L_2\,\iota\,\omega)}{\sqrt{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2}}\,p\,i_1.$$

Wir setzen

$$\cos\delta = -\frac{L_2\,\omega}{\sqrt{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = -\frac{r_2}{L_2\,\omega}$$

und erhalten

(d) $$i_2 = p\,i_1\,e^{-\iota\,\delta},$$

oder bei Aussonderung der imaginären Bestandteile nach (b')

$$\text{(e)} \qquad i_2 = \frac{p\,\mathsf{E}_0}{\sqrt{r'^2 + (L'\,\omega)^2}} \cdot \sin(\omega\,t - \varphi_1 - \delta).$$

Die vorstehenden Gleichungen gelten für einen *Wechselstromtransformator*, bei dem die primäre und die sekundäre Spule über einen aus dünnen Eisenblechen hergestellten und in sich geschlossenen Eisenkern geschoben sind. Der Wechselstromtransformator dient dazu, um einen Wechselstrom hoher Spannung in einen anderen von niedriger Spannung und umgekehrt zu verwandeln.

Das Verhältnis der Höchstwerte der Stromstärken im primären und sekundären Kreise ist durch

$$\frac{i_{0,1}}{i_{0,2}} = \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{r_2^2 + L_2^2\,\omega^2}}{L_{12}\,\omega}$$

gegeben. Ist r_2 sehr klein gegenüber $L_2\,\omega$, so wird

$$\frac{i_{0,1}}{i_{0,2}} = \frac{L_2}{L_{12}}.$$

Setzen wir voraus, daß der primäre Kreis dieselbe Zahl Induktionslinien des Eisenkernes umschließt wie der sekundäre Kreis, so daß also keine Streuung der Induktionslinien auftritt, so ist

$$\frac{i_{0,1}}{i_{0,2}} = \frac{L_2}{L_{12}} = \frac{n_2}{n_1},$$

wenn n_2 und n_1 bzw. die Windungszahlen der sekundären und primären Spule sind. n_1/n_2 heißt das *Umsetzungsverhältnis* des Transformators, das gleich dem Verhältnis der im primären und im sekundären Kreise durch den periodisch veränderlichen Induktionsfluß induzierten elektromotorischen Kräfte ist.

Ist der sekundäre Stromkreis offen, also $r_2 = \infty$, so wird $p = 0$. Dann ist $r_1 = r'$ und $L_1 = L'$. Wir haben dann

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L_1\,\omega}{r_1}$$

und gelangen damit zurück zu den Gleichungen auf S. 391.

§ 107. Die Entladung eines Kondensators durch einen Leiter mit Widerstand und Selbstinduktion.

Ein Plattenkondensator, der die Kapazität K hat und die elektrische Ladung e enthalten möge, soll durch einen Leiter

mit dem Widerstande R und der Selbstinduktion L entladen werden. Im vorliegenden Falle haben wir es nicht nur mit einem Leitungsstrom, sondern auch mit einem Verschiebungsstrom im Dielektrikum des Kondensators zu tun. Erst durch diesen Verschiebungsstrom wird der Stromkreis geschlossen. Besteht das Dielektrikum aus einer sehr dünnen Schicht, so können wir für die Berechnung der magnetischen Energie des Stromes den Stromkreis als geschlossenen Leitungsstrom ansehen.

Die elektrische Energie des Kondensators ist nach S. 257 durch

$$\tfrac{1}{2} K \varphi^2$$

gegeben, wenn φ die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen ist. Andererseits fanden wir für die magnetische Energie auf S. 389 den Ausdruck

$$W_m = \tfrac{1}{2} \frac{L}{c^2} J^2,$$

wenn wir für $i = J / c$ setzen.

Demnach ist die Energie des Systems, das aus dem Kondensator und dem an seine Belegungen angeschlossenen Leiter besteht,

$$\tfrac{1}{2} K \varphi^2 + \tfrac{1}{2} \frac{L}{c^2} J^2.$$

Wir setzen voraus, daß keine äußeren elektromotorischen Kräfte auftreten. Die im Stromkreise entwickelte Joulesche Wärme muß gleichwertig mit der Abnahme der Energie des Systems sein. Also ist

(a) $$R J^2 = - K \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \frac{L}{c^2} J \frac{dJ}{dt}.$$

Die Stromstärke J ist gleich der Abnahme der auf den Platten des Kondensators befindlichen Ladung e in der Sekunde, also

(b) $$J = - \frac{de}{dt} = - K \frac{d\varphi}{dt}.$$

Demnach finden wir

(c) $$R J = \varphi - \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt}.$$

Legen wir für die elektrischen Größen das elektromagnetische System zugrunde, so lautet diese Gleichung

(c′) $$i r = \varphi' - L \frac{di}{dt},$$

wo φ' die Potentialdifferenz des Kondensators in absoluten elektromagnetischen Einheiten ist.

Die Gleichung (c') würde sich direkt aus der Gleichung (a) des § 105 ergeben haben, wenn wir für E die Potentialdifferenz φ' der Kondensatorbelegungen eingesetzt hätten. Die Gleichung (b) lautet in den Einheiten des elektromagnetischen Maßsystems

$$i = -C\frac{d\varphi'}{dt}, \tag{b'}$$

wenn C die in elektromagnetischen Einheiten gemessene Kapazität des Kondensators ist. Aus den Gleichungen (b') und (c') folgt dann

$$\varphi' + rC\frac{d\varphi'}{dt} + LC\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = 0. \tag{d}$$

Aus dieser Differentialgleichung muß sich die Potentialdifferenz φ' als Funktion der Zeit ergeben. Differentiieren wir die Gleichung (d) nach t und berücksichtigen wir die Gleichung (b'), so ergibt sich auch

$$i + rC\frac{di}{dt} + LC\frac{d^2 i}{dt^2} = 0. \tag{e}$$

Der zeitliche Verlauf der Potentialdifferenz φ', des Stromes i und auch der Ladung e ist durch dieselbe Differentialgleichung dargestellt. Die Gleichung (e) ist eine lineare und homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Integral die Form

$$i = e^{\alpha t}$$

hat. Führen wir diesen Ausdruck für i in die Gleichung (e) ein, so erhalten wir für α die Bedingungsgleichung

$$\alpha^2 + \frac{r}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0.$$

Demnach ist

$$\alpha = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Wir wollen die weitere Betrachtung auf den Fall einschränken, daß r sehr klein ist, und daß das Glied $r^2/4L^2$ gegen $1/LC$ vernachlässigt werden kann. Dann lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (e)

$$i = A_1 e^{-\frac{rt}{2L} + \iota\frac{t}{\sqrt{LC}}} + A_2 e^{-\frac{rt}{2L} - \iota\frac{t}{\sqrt{LC}}},$$

wenn wiederum für $\sqrt{-1}$ das Zeichen ι gesetzt wird. Wir erhalten einen Ausdruck für i in komplexer Form. Sowohl der reelle wie auch der imaginäre Bestandteil dieses Ausdruckes genügt der Gleichung (e).

Als eine Lösung der Differentialgleichung (e) erhalten wir auch

$$i = e^{-\frac{rt}{2L}}\left(A \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + B \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Die Stromstärke ändert sich also periodisch und nimmt mit der Zeit ab.

Wir wollen noch

$$A = a \cos \varphi \quad \text{und} \quad B = a \sin \varphi$$

setzen und erhalten dann

$$\text{(f)} \qquad i = a e^{-\frac{rt}{2L}} \cdot \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right).$$

Die positive Elektrizität der einen Belegung des Kondensators strömt bei der Entladung auf die andere Belegung und nach kurzer Zeit haben die Belegungen des Kondensators ihr Vorzeichen gewechselt. Dann geht eine neue Entladung vor sich usf., sodaß also durch die die Belegungen verbindende Leitung in sehr schneller Folge Ströme wechselnder Richtung fließen. Die Schwingungsdauer τ ergibt sich leicht aus der Gleichung

$$\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\tau + t}{\sqrt{LC}} + \varphi\right),$$

die besteht, wenn

$$\text{(g)} \qquad \frac{\tau}{\sqrt{LC}} = 2\pi \quad \text{oder} \quad \tau = 2\pi\sqrt{LC}$$

ist. Diese von W. Thomson und von G. Kirchhoff zuerst abgeleitete Formel zeigt, daß die Schwingungsdauer um so kleiner ist, je geringer L und C sind.

Das Glied $a e^{-\frac{rt}{2L}}$ stellt die *Amplitude* der Schwingungen dar, die mit wachsender Zeit abnimmt. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Schwingungen, das sogenannte *Dämpfungsverhältnis* ist

$$e^{-\frac{rt}{2L}} : e^{-\frac{r(t+\tau)}{2L}} = e^{\frac{r\tau}{2L}}.$$

Die Dämpfung ist also um so größer, je größer bei gegebener Schwingungsdauer der Widerstand des Schließungskreises, und um so kleiner, je größer die Selbstinduktion ist. Führt man für τ den Wert $2\pi\sqrt{LC}$ ein, so erhalten wir für das Dämpfungsverhältnis den Ausdruck $e^{r\pi\sqrt{C/L}}$.

Im vorhergehenden ist der Fall betrachtet, daß $r^2 < 4L/C$ ist. Ist dagegen $r^2 > 4L/C$, dann sind die beiden Werte von α reell und negativ. Sind $-\alpha_1$ und $-\alpha_2$ diese Werte von α, so lautet die Lösung der Differentialgleichung (e)

$$i = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t},$$

d. h. der Strom i und also auch die Potentialdifferenz φ' nähern sich aperiodisch der Null, wenn r so groß ist, daß $r^2 > 4L/C$.

H. Hertz hat sehr rasche Schwingungen durch Benutzung des in Fig. 118 dargestellten Apparates erhalten, der aus zwei großen Kugeln bei A und B besteht, die an den Enden der Kupferstangen CA und DB befestigt sind. Die beiden anderen Enden der Stangen AC und DB tragen kleine Kugeln, die ungefähr den Abstand 0,5 cm voneinander haben. Die Kugeln werden durch den Induktionsapparat EE geladen; die Entladung findet in dem Raume zwischen den Kugeln C und D statt. Wenn in einem bestimmten Zeitpunkte ein Strom von der Stärke J von A nach B übergeht und wenn das Potential auf A und B bzw. die Werte φ_1 und φ_2 hat, so ist

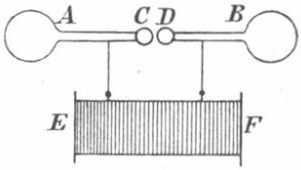

Fig. 118.

$$RJ = \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}.$$

Wird mit K_1 die Kapazität jeder einzelnen der gleich großen Kugeln bezeichnet, so haben wir

$$K_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = -J \quad \text{und} \quad K_1 \frac{d\varphi_2}{dt} = J.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir $K = \frac{1}{2}K_1$ setzen, daß

$$J = -K\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt}$$

ist. Demnach erhalten wir für die Stromstärke dieselbe Differentialgleichung wie oben; wir gelangen damit auch zu demselben Ausdrucke für die Schwingungsdauer τ.

Auf S. 379 fanden wir für L

$$L = 2\,l\left(\log\text{nat}\,\frac{2\,l}{R} - \frac{3}{4}\right).$$

In den Versuchen von Hertz war $l = 150$, $R = 0{,}25$ und also $L = 1902$, wenn alle Längen in Zentimeter ausgedrückt werden. Um die Schwingungsdauer zu berechnen, muß zunächst die Kapazität einer Kugel mit dem Radius 15 cm, die Hertz benutzte, bestimmt werden. Die elektrostatische Kapazität dieser Kugel ist 15. Also haben wir $K_1 = 15$ und $K = 15/2$; ferner ist $C = 15/2 \cdot 1/c^2$, wo $c = 3 \cdot 10^{10}$. Ist nämlich e die Ladung und φ das Potential im elektrostatischen Maße, so ist $K = e/\varphi$. Ist e' die Ladung und φ' das Potential im elektromagnetischen Maße, so ist, wenn $c = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet, $e = ce'$ und $\varphi = \varphi'/c$. Also ist die Kapazität C im elektromagnetischen Maße $C = K/c^2$. Wir finden also für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{1902 \cdot 15}{2 \cdot 9 \cdot 10^{20}}} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\text{Sek.}$$

Bei diesen von Hertz zuerst beobachteten Schwingungen *ist es jedoch nicht mehr zulässig, den Strom als quasistationär anzusehen.* Im Erreger AB (Fig. 118) der Schwingungen ist der Leitungsstrom keineswegs geschlossen und eine wesentliche Rolle spielt der Verschiebungsstrom zwischen den Kugeln C und D des Erregers. Solange wir den Vorgang als einen quasistationären auffassen, nehmen wir keine Rücksicht auf die Energiestrahlung des Erregers, die neben der Jouleschen Wärme die Ursache der Dämpfung bildet. Solange die Strömung im Erreger als quasistationär angesehen wird, tritt als einzige Ursache der Dämpfung die Joulesche Wärme auf.

§ 108. Ein Stromkreis mit Widerstand, Kapazität und Selbstinduktion.

Im Stromkreise Fig. 119, der Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität enthält, wirke eine periodisch veränderliche elektromotorische Kraft

(a) $$\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \cdot \sin \omega t.$$

Wir gehen aus von der Gleichung (c) auf S. 396

$$\text{(b)} \qquad R\,J = \frac{e}{K} - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist noch ein Glied, das die periodisch veränderliche elektromotorische Kraft darstellt, hinzuzufügen. Differentiiert man (b) nach t, und beachtet man, daß

$$J = -\frac{de}{dt}$$

ist, so wird

$$R\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{K}\frac{de}{dt} - \frac{L}{c^2}\frac{d^2J}{dt^2},$$

oder

$$R\frac{dJ}{dt} = -\frac{J}{K} - \frac{L}{c^2}\frac{d^2J}{dt^2}.$$

Gehen wir zum elektromagnetischen Maßsystem über, so ist

$$R = \frac{1}{c^2}r, \quad J = c\,i, \quad K = c^2\,C,$$

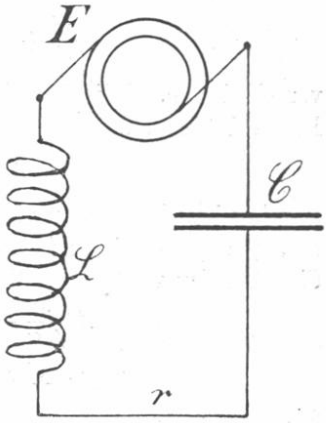

Fig. 119.

also wird, wenn wir jetzt das Glied $\mathsf{E}_0 \sin\omega t$ einfügen, das nach t zu differentiieren ist,

$$\text{(c)} \qquad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{CL}i = \frac{\mathsf{E}_0\,\omega}{L}\cos\omega t.$$

Ist das Glied auf der rechten Seite, die sogenannte *Störungsfunktion*, nicht vorhanden, so ergibt sich wieder die Gleichung (e) auf S. 397. In diesem Falle handelte es sich um eine *freie Schwingung* des Kondensatorkreises. Diese freie Schwingung wird durch das Hinzutreten der periodisch veränderlichen elektromotorischen Kraft gestört, die dem Stromkreise eine Schwingung aufzwingt. Die Gleichung (c) liefert also eine *erzwungene Schwingung* in dem betrachteten Stromkreise.

Das allgemeine Integral der Gleichung (c) hat die Form

$$i = f(t) + F(t),$$

wenn $f(t)$ das allgemeine Integral von (c) für den Fall bezeichnet, daß $\mathsf{E}_0\,\omega\cos\omega t = 0$ ist, und wenn $F(t)$ ein partikuläres Integral der Gleichung (c) mit Störungsglied ist. Da die reellen Teile der Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^2 + \frac{r}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

negativ sind (vgl. S. 397), so muß kurz nach dem Schließen des Stromkreises, wenn der stationäre Zustand eingetreten ist, das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{CL} i = 0$$

verschwinden. Wir behalten dann nur noch das partikuläre Integral übrig, dessen Form durch

$$i = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

gegeben ist. Führt man diesen Ausdruck für i in die Gleichung (c) ein, so ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten A und B die Gleichungen

$$A\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) - Br = 0,$$

$$Ar + B\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) = \mathsf{E}_0.$$

Setzt man dann

$$\text{(d)} \qquad \sin\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + r^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r},$$

so wird

$$\text{(e)} \qquad i = \frac{\mathsf{E}_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Die Phasendifferenz zwischen der elektromotorischen Kraft $\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \sin \omega t$ und dem Strome ist gleich φ, das nach (d) zu bestimmen ist. Die Stromstärke eilt in der Phase der elektromotorischen Kraft nach, wenn $L\omega > (1/C\omega)$ ist; der Strom eilt in der Phase der elektromotorischen Kraft voran, wenn $L\omega < (1/C\omega)$ wird. Selbstinduktion und Kapazität kompensieren sich völlig und die Leitung hat scheinbar nur Ohmschen Widerstand, wenn $L\omega = (1/C\omega)$, d. h. wenn der Selbstinduktionskoeffizient und die Kapazität solche Werte haben, daß die Gleichung

$$\frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

erfüllt ist, wo ν die Frequenz des Wechselstromes bedeutet.

Ist φ' die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen des Kondensators, so ist

$$i = -C\frac{d\varphi'}{dt},$$

also ist

$$\text{(f)} \qquad \varphi' = \frac{\mathsf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{C\omega\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{\mathsf{E}_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{C\omega\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Zwischen φ' und dem Strome i ist eine Phasendifferenz von $\pi/2$, d. h. von einer Viertelperiode; der Strom eilt nach. Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion ist

$$-L\frac{di}{dt} = -\frac{L\omega\,\mathsf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

oder gleich

$$\text{(g)} \qquad \frac{L\omega\,\mathsf{E}_0 \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

d. h. die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion eilt der Stromstärke in der Phase um eine Viertelperiode nach.

Ferner hat die erzwungene Schwingung i dieselbe Frequenz wie das Störungsglied $\mathsf{E}_0 \sin \omega t$. Nach der Bezeichnung auf S. 390 ist die Frequenz $\nu = \omega/2\pi$. Die dem Stromsysteme zugehörige Frequenz für den Fall, daß das Störungsglied nicht vorhanden ist, d. h. die sogenannte *Eigenfrequenz* des Stromkreises, sei mit ν_0 bezeichnet. ν_0 ergibt sich nach S. 398 aus

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Wäre die elektromotorische Kraft $\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \sin \omega t$ nicht vorhanden, so würde die Frequenz des Stromes gleich ν_0 sein.

Praktisch wichtig ist der besondere Fall, daß die Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ des Störungsgliedes gleich der Eigenfrequenz ν_0 wird, also

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ist. Dann ist

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega,$$

und nach (d) ist

$$\operatorname{tg}\varphi = 0, \quad \text{also} \quad \varphi = 0.$$

In diesem Falle haben wir dann nach (e)

$$i = \frac{\mathsf{E}_0 \sin \omega t}{r},$$

und *der Stromkreis ist in Resonanz mit dem Störungsgliede.* Die letzte Gleichung zeigt, daß bei sehr geringen Werten von r auch bei kleiner elektromotorischer Kraft E_0 eine sehr hohe Stromstärke auftreten kann. Der hier betrachtete Fall würde bei einer Wechselstrommaschine eintreten, an die ein Leitungsnetz mit konzentrischen Kabeln angeschlossen ist, wenn die Umlaufszeit des Polrades und damit die Frequenz der erzeugten elektromotorischen Kraft so weit steigt, daß diese Frequenz der Eigenfrequenz des Leitersystems nahe kommt. Je näher beide Frequenzen zusammenliegen, desto stärker wird das Mitschwingen des Leitersystems und um so mehr verschwindet die Phasendifferenz zwischen der Stromstärke und der elektromotorischen Kraft.

Im Falle der Resonanz ist der Höchstwert der Stromstärke

$$i_0 = \frac{\mathsf{E}_0}{r}.$$

Nach (f) ist dann das Maximum der an den Belegungen des Kondensators auftretenden Potentialdifferenz

$$\varphi_0' = \frac{\mathsf{E}_0}{r C \omega} = \frac{i_0}{C \omega} = i_0 \cdot L \omega,$$

und ebenso das Maximum der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion nach (g)

$$i_0 L \omega.$$

Diese beiden letzteren Teilspannungen, von denen die eine bei eintretender Resonanz fast um eine Viertelperiode dem Strome vorauseilt, während die andere um ebensoviel nacheilt, können sehr hohe Werte annehmen, obgleich die mit dem Strome in gleicher Phase schwingende Spannung der Wechselstrommaschine nur einen mäßigen Wert hat. Für praktische Wechselstrombetriebe können durch Schwingungen, die der Resonanz nahe kommen, bereits sehr hohe Spannungen auftreten, welche die Isolation der Kabel zerstören können.

§ 109. Induktiv gekoppelte Schwingungskreise.

Zwei Schwingungskreise (Fig. 120) sind *magnetisch* oder *induktiv* gekoppelt, die keinen Teil der Strombahn gemeinsam haben, und bei denen die von dem einen Kreise hervorgebrachten Induktionslinien von dem anderen Kreise teilweise umschlungen werden. Je größer die Zahl der Induktionslinien ist, die zugleich von beiden Stromkreisen umfaßt werden, desto enger ist die Koppelung der beiden Stromkreise.

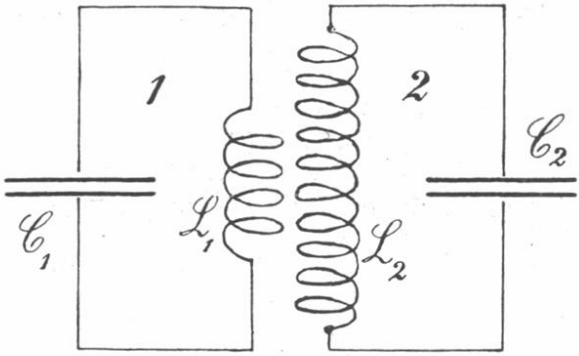

Fig. 120.

Die Widerstände, Selbstinduktionskoeffizienten und Kapazitäten der beiden Stromkreise seien bzw. mit r_1, L_1, C_1 und r_2, L_2, C_2 bezeichnet. L_{12} sei der Koeffizient der wechselseitigen Induktion beider Stromkreise.

Solche gekoppelte Schwingungskreise haben eine große praktische Bedeutung für die drahtlose Telegraphie. In dem einen der beiden Schwingungskreise werden Schwingungen durch eine Funkenstrecke oder durch einen elektrischen Lichtbogen angeregt, sodaß durch Induktion in einem zweiten benachbarten Kreise Schwingungen entstehen, die wiederum auf die Schwingungen des ersten Kreises einwirken. Wir wollen die Vorgänge in den Schwingungskreisen als *quasistationäre* betrachten. Die beiden Schwingungskreise sollen als primärer (Oszillator) und sekundärer (Resonator) unterschieden werden. φ_1' und φ_2' seien die Potentialdifferenzen zwischen den Belegungen der Kondensatoren bzw. im Oszillator und Resonator.

Wir gehen aus von den Gleichungen § 100 (h) und setzen statt E_1 und E_2 bzw. φ_1' und φ_2'. Messen wir ferner die verschiedenen Größen in elektromagnetischem Maße und beachten wir auch, daß

$$i_1 = -C_1 \frac{d\varphi_1'}{dt}, \quad i_2 = -C_2 \frac{d\varphi_2'}{dt}$$

ist, so ergibt sich

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \varphi_1' + C_1 r_1 \frac{d\varphi_1'}{dt} + L_1 C_1 \frac{d^2\varphi_1'}{dt^2} + L_{21} C_2 \frac{d^2\varphi_2'}{dt^2} = 0, \\ \varphi_2' + C_2 r_2 \frac{d\varphi_2'}{dt} + L_2 C_2 \frac{d^2\varphi_2'}{dt^2} + L_{12} C_1 \frac{d^2\varphi_1'}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Nur unter der Voraussetzung einer quasistationären Strömung dürfen wir $L_{12} = L_{21}$ setzen.

Für die Ströme gelten nach (a) die Gleichungen

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + r_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 = 0, \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + r_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 = 0. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\text{(c)} \quad \frac{L_{12} C_2}{L_1 C_1} = k_1 \quad \text{und} \quad \frac{L_{12} C_1}{L_2 C_2} = k_2,$$

und bezeichnen die Frequenzen der Eigenschwingungen beider Kreise bzw. mit ν_1 und ν_2, sodaß nach S. 398

$$\text{(d)} \quad \frac{\omega_1}{2\pi} = \nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2}{2\pi} = \nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}$$

ist. Ferner seien δ_1 und δ_2 die *Dämpfungsfaktoren* beider Kreise, indem

$$\delta_1 = \frac{r_1}{2L_1} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{r_2}{2L_2}$$

ist. Wir wollen annehmen, daß die Widerstände r_1 und r_2 sehr klein sind, und daß die durch diese bewirkte Dämpfung keinen großen Einfluß auf die Schwingungen hat. Dann lauten die Gleichungen (a)

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi_1'}{dt^2} + \omega_1^2 \varphi_1' + k_1 \frac{d^2\varphi_2'}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2\varphi_2'}{dt^2} + \omega_2^2 \varphi_2' + k_2 \frac{d^2\varphi_1'}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen die Eigenschaften zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise zu erhalten, kann man nach M. Abraham folgendermaßen verfahren. Wir setzen

$$\varphi_1' = A_1 e^{\iota\omega t} \quad \text{und} \quad \varphi_2' = A_2 e^{\iota\omega t},$$

und erhalten dann aus (e)

$$\text{(f)} \qquad \begin{cases} A_1(\omega_1^2 - \omega^2) - k_1 A_2 \omega^2 = 0, \\ A_2(\omega_2^2 - \omega^2) - k_2 A_1 \omega^2 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\omega^4(1 - k_1 k_2) - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

Da

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau_1} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{\tau_2}$$

und ferner

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

zu setzen ist, so erhalten wir

$$\tau^4 - \tau^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1^2 \tau_2^2(1 - k_1 k_2) = 0.$$

Wir setzen

$$\text{(g)} \qquad k_1 k_2 = \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = k^2,$$

und bezeichnen k^2 als *Koppelungskoeffizienten.* Dann wird

$$\text{(h)} \qquad \tau^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\tau_1^2 + \tau_2^2 \pm \sqrt{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 + 4k^2\tau_1^2\tau_2^2}\right\}.$$

Das gekoppelte System der beiden Schwingungskreise hat also zwei Eigenschwingungen, deren Schwingungsdauern mit τ' und τ'' bezeichnet werden sollen; τ' und τ'' ergeben sich aus (h). Ist $k^2 = 0$, so würden τ' und τ'' die Schwingungsdauern der beiden Kreise für sich genommen sein. Je größer k^2 ist, desto mehr unterscheiden sich τ' und τ'' von τ_1 und τ_2. Ist $\tau_1 > \tau_2$ und $\tau' > \tau''$, so folgt aus (h), daß

$$\tau' > \tau_1 > \tau_2 > \tau''$$

ist, d. h. *die größere Schwingungsdauer des gekoppelten Systems ist größer, und die kleinere Schwingungsdauer des gekoppelten Systems ist kleiner als die Schwingungsdauern der beiden nicht gekoppelten Systeme.* Aus (h) folgt aber, daß

$$\tau'^2 + \tau''^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2$$

ist.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß *vor der Koppelung zwischen beiden Schwingungskreisen Resonanz bestanden hat*, d. h.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_0,$$

oder, wenn wir die *Schwingungs*zahlen einführen,

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$$

ist. In diesem Falle ist

(i) $$L_1 C_1 = L_2 C_2, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1},$$

und die Perioden τ' und τ'' sind auch jetzt voneinander verschieden, indem nach (h)

(k) $$\tau' = \tau_0 \sqrt{1+k} \quad \text{und} \quad \tau'' = \tau_0 \sqrt{1-k}$$

ist. *Werden also zwei Schwingungskreise, für die Resonanz besteht, miteinander gekoppelt, so ergeben sich zwei verschiedene Perioden, von denen die eine größer, die andere kleiner als die gemeinsame Periode jedes der beiden nicht gekoppelten Schwingungskreise ist.*

Da
$$2\pi\nu' = \omega' = \frac{2\pi}{\tau'} = \frac{2\pi}{\tau_0\sqrt{1+k}},$$
$$2\pi\nu'' = \omega'' = \frac{2\pi}{\tau''} = \frac{2\pi}{\tau_0\sqrt{1-k}}$$

ist, so erhalten wir für die Frequenz ν'

$$\varphi_1' = A_1' \cdot e^{\frac{2\pi\iota t}{\tau_0\sqrt{1+k}}} = A_1' \cdot e^{2\pi\nu'\iota t},$$
$$\varphi_2' = A_2' \cdot e^{\frac{2\pi\iota t}{\tau_0\sqrt{1+k}}} = A_2' \cdot e^{2\pi\nu'\iota t},$$

und für die Frequenz ν''

$$\varphi_1' = A_1'' \cdot e^{\frac{2\pi\iota t}{\tau_0\sqrt{1-k}}} = A_1'' \cdot e^{2\pi\nu''\iota t},$$
$$\varphi_2' = A_2'' \cdot e^{\frac{2\pi\iota t}{\tau_0\sqrt{1-k}}} = A_2'' \cdot e^{2\pi\nu''\iota t}$$

als partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (e).

Aus (f) erhalten wir zur Bestimmung der Konstanten die Gleichung

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{k_1 \nu^2} = \frac{k_2 \nu^2}{\nu_0^2 - \nu^2}.$$

Dementsprechend setzen wir

$$\frac{A_2'}{A_1'} = \frac{\nu_0^2 - \nu'^2}{k_1 \nu'^2} = \frac{\tau'^2 - \tau_0^2}{k_1 \tau_0^2} = \frac{k}{k_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}},$$

und

$$\frac{A_2''}{A_1''} = \frac{k_2 \nu''^2}{\nu_0^2 - \nu''^2} = \frac{k_2 \tau_0^2}{\tau''^2 - \tau_0^2} = -\frac{k_2}{k} = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}.$$

Nach (i) ist also

$$\frac{A_2'}{A_1'} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad \text{und} \quad \frac{A_2''}{A_1''} = -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

Demnach finden wir

$$\varphi_1' = A_1' e^{\omega' \iota t} + A_1'' e^{\omega'' \iota t},$$

$$\varphi_2' = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \{A_1' e^{\omega' \iota t} - A_1'' e^{\omega'' \iota t}\},$$

indem

$$\omega' = 2\pi \nu' \quad \text{und} \quad \omega'' = 2\pi \nu''$$

ist.

Setzen wir ferner für die komplexen Koeffizienten

$$A_1' = A' e^{\iota \beta'} \quad \text{und} \quad A_1'' = A'' e^{\iota \beta''},$$

so erhalten wir schließlich nach Aussonderung der reellen Bestandteile

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} \varphi_1' = A' \cos(\omega' t + \beta') + A'' \cos(\omega'' t + \beta''), \\ \varphi_2' = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \{A' \cos(\omega' t + \beta') - A'' \cos(\omega'' t + \beta'')\}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen allgemein die Potentialdifferenzen der beiden gekoppelten Schwingungskreise, die vor der induktiven Koppelung gleiche Schwingungsdauer gehabt haben und in Resonanz gewesen sind.

Da

$$i_1 = -C_1 \frac{d\varphi_1'}{dt} \quad \text{und} \quad i_2 = -C_2 \frac{d\varphi_2'}{dt}$$

ist, so finden wir aus (l)

$$\text{(m)} \quad \begin{cases} i_1 = C_1 \{A' \omega' \sin(\omega' t + \beta') + A'' \omega'' \sin(\omega'' t + \beta'')\}, \\ i_2 = \sqrt{C_1 C_2} \{A' \omega' \sin(\omega' t + \beta') - A'' \omega'' \sin(\omega'' t + \beta'')\}. \end{cases}$$

Ist der primäre Schwingungskreis zur Zeit $t = 0$ auf die Potentialdifferenz $\varphi_1' = \varphi_0'$ geladen, der sekundäre Schwingungs-

kreis aber ungeladen, und beginnt dann im Zeitpunkte $t = 0$ die Entladung des primären Kreises, so ist für $t = 0$ auch

$$\varphi_2' = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben für die Integrationskonstanten

$$\beta' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad A' = A'' = \tfrac{1}{2}\varphi_0'.$$

Für den betrachteten Fall finden wir also

$$\text{(n)} \quad \begin{cases} \varphi_1' = \frac{1}{2}\varphi_0'(\cos\omega' t + \cos\omega'' t), \\ \varphi_2' = \frac{1}{2}\varphi_0' \cdot \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}(\cos\omega' t - \cos\omega'' t). \end{cases}$$

Demnach ist die im sekundären Schwingungskreise hervorgebrachte Potentialdifferenz um so höher, je größer die Kapazität des primären Kreises und je kleiner die Kapazität des sekundären Kreises gewählt wird. Dieses Ergebnis ist besonders wichtig für die Konstruktion des *Tesla-Transformators.*

Bei schwacher Koppelung dürfen wir nach (k)

$$\tau' = \tau_0(1 + \tfrac{1}{2}k) \quad \text{und} \quad \tau'' = \tau_0(1 - \tfrac{1}{2}k)$$

setzen, sodaß also bei loser Koppelung zwei Schwingungen mit den Perioden τ' und τ'' entstehen, von denen die eine um gerade soviel größer ist als τ_0 wie die andere kleiner ist als τ_0. Dabei ist τ_0 die gemeinsame Periode jedes der beiden nicht gekoppelten Schwingungskreise für sich genommen. Durch Einführung der Schwingungszahlen ν' und ν'' erhalten wir

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{1}{2}k}, \quad \nu'' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{1}{2}k}$$

und folglich für schwache Koppelung

$$\nu'' - \nu' = k\,\nu_0,$$

d. h. in dem betrachteten Falle loser Koppelung ist die Differenz der Schwingungszahlen der Quadratwurzel des Koppelungskoeffizienten proportional. Ferner ist unter denselben Verhältnissen $\nu' + \nu'' = 2\,\nu_0$.

Da nach (n)

$$\varphi_1' = \varphi_0' \cos\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} \cos\frac{(\omega' - \omega'')t}{2},$$

$$\varphi_2' = -\varphi_0' \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sin\frac{(\omega' + \omega'')t}{2} \sin\frac{(\omega' - \omega'')t}{2}$$

ist, so wird bei loser Koppelung der Schwingungskreise

$$\varphi_1' = \varphi_0' \cos(\nu'' - \nu')\pi t \cdot \cos(2\nu_0 \pi t),$$

$$\varphi_2' = \varphi_0' \cdot \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sin(\nu'' - \nu')\pi t \cdot \sin(2\nu_0 \pi t).$$

Demnach erhalten wir Schwingungen mit der Schwingungszahl ν_0 und mit periodisch veränderlichen Amplituden. *Im Schwingungssystem treten also Schwebungen auf.* Zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi_1' = \varphi_0'$ und $\varphi_2' = 0$. Die Zeit zwischen zwei Maxima derselben Schwingung ist gleich $1/(\nu'' - \nu')$. Nach einer halben Schwebung, also für $t = (1/2(\nu'' - \nu'))$ ist $\varphi_1' = 0$ und die Amplitude der sekundären Potentialdifferenz $= \varphi_0' \cdot \sqrt{C_1/C_2}$; nach einer weiteren halben Schwebung, also für $t = 1/(\nu'' - \nu')$ sind die Amplituden der Potentialdifferenzen bzw. $-\varphi_0'$ und Null. Ist zur Zeit $t = 0$ die Energie des primären Kreises $\frac{1}{2} C_1 \varphi_0'^2$, so ist dieselbe Energie nach einer halben Schwebung im sekundären Kreise enthalten, indem

$$\tfrac{1}{2} C_2 \varphi_0'^2 \frac{C_1}{C_2} = \tfrac{1}{2} C_1 \varphi_0'^2$$

ist. Die Energie wandert also zwischen den beiden Schwingungskreisen hin und her.

§ 110. Das ballistische Galvanometer.

Für magnetische Messungen und für die Messung einer Elektrizitätsmenge dient das ballistische Galvanometer mit drehbarer Spule im Felde eines permanenten Magneten. Gegenüber den Galvanometern mit beweglichem Magneten (Nadelgalvanometer) besitzen die Drehspulengalvanometer nach dem Prinzipe von Deprez-d'Arsonval den Vorzug sehr geringer Störung durch fremde Magnetfelder besonders dann, wenn das Feld der permanenten Magnete sehr stark ist. Die Schwingungsdauer des beweglichen Systems, d. h. der Spule, soll hinreichend groß sein, um genau die Umkehrpunkte ablesen zu können. Wir betrachten nur geringe Ablenkungen der Spule aus der Nullage, in der die Windungsfläche der Spule den Kraftlinien des Feldes parallel sein möge. H sei die Feldstärke und F sei die Windungsfläche der Spule. Fließt ein

Strom i durch die Spule, und ist diese um den Winkel α aus der Nullage gedreht, so übt das Feld das Drehungsmoment

$$i F H \cdot \cos \alpha$$

aus (vgl. S. 366). Durch die Spulenaufhängung und die Torsion des Aufhängefadens wirkt der Drehung der Spule ein Drehungsmoment $D\alpha$ entgegen. Auf die Bewegung der Spule wirken ferner dämpfend der Luftwiderstand und die in der Spule induzierten Ströme. Die bei der Bewegung in der Spule induzierte elektromotorische Kraft ist nach S. 370 durch $-d\mathfrak{Z}/dt$ gegeben, wo $\mathfrak{Z} = FH \cdot \sin \alpha$ ist. Ist r der Widerstand des Stromkreises, in dem die Spule liegt, so ist die dem Induktionsstrome entsprechende Arbeit in der Zeiteinheit

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{r}.$$

Bezeichnen wir das vom Magnetfelde herrührende dämpfende Drehungsmoment mit D_0, so ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = D_0 \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

woraus wir finden

$$D_0 = \frac{F^2 H^2 \cos^2 \alpha}{r} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Auch die Dämpfung durch den Luftwiderstand dürfen wir proportional der Winkelgeschwindigkeit $d\alpha/dt$ annehmen, also das dieser Dämpfung entsprechende Drehungsmoment etwa gleich $h \cdot d\alpha/dt$ setzen.

Bezeichnen wir mit M das Trägheitsmoment der Drehspule, so ist nach S. 94

$$\mathsf{M} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = i F H \cos \alpha - D\alpha - \left(h + \frac{F^2 H^2 \cos^2 \alpha}{r}\right) \frac{d\alpha}{dt},$$

oder, wenn wir nur kleine Ablenkungen der Drehspule berücksichtigen und $FH = q$ setzen,

$$\text{(a)} \qquad \mathsf{M} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(h + \frac{q^2}{r}\right) \frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = qi.$$

Durch die in der Nullage befindliche Spule erfolge nun ein Stromstoß von sehr kurzer Dauer ϑ. Dabei soll das Trägheitsmoment der Spule so groß sein, daß die Spule am Ende des Zeitabschnittes ϑ nur unendlich wenig sich aus der Nullage bewegt hat, sodaß wir also für $t = 0$ und $t = \vartheta$ auch $\alpha = 0$

setzen dürfen. Für diesen ersten Abschnitt gilt dann mit großer Annäherung die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(h + \frac{q^2}{r}\right)\frac{d\alpha}{dt} = qi.$$

Am Ende des Zeitabschnittes ϑ ist der Strom i bereits wieder gleich Null. Durch Integration erhalten wir dann aus (b)

$$\text{(c)} \qquad \mathsf{M}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = q\int_0^{\vartheta} i \cdot dt,$$

wo das Integral die während des Zeitabschnittes ϑ durch die Spule geflossene Elektrizitätsmenge — den *Integralstrom* — darstellt. $(d\alpha/dt)_0$ stellt die Winkelgeschwindigkeit dar, mit der sich die Spule aus der Nullage bewegt. Für $t = 0$ ist $d\alpha/dt = 0$, und nach sehr kurzer Zeit ϑ darauf bewegt sich die Spule mit der Winkelgeschwindigkeit $(d\alpha/dt)_0$ aus der Gleichgewichtslage. *Nach* (c) *ist die Elektrizitätsmenge, die durch die Spule fließt, proportional der Winkelgeschwindigkeit, mit der die Spule aus der Nullage bewegt wird.*

Nach Ablauf des Zeitabschnittes ϑ ist die Stromstärke $i = 0$, und von jetzt ab gilt für die fernere Bewegung der Spule nach (a) die Gleichung

$$\text{(d)} \qquad \mathsf{M}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(h + \frac{q^2}{r}\right)\frac{d\alpha}{dt} + D\alpha = 0.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$\text{(e)} \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2m\frac{d\alpha}{dt} + n^2\alpha = 0,$$

wenn

$$\text{(e')} \qquad m = \frac{1}{2\mathsf{M}}\left(h + \frac{q^2}{r}\right) \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\frac{D}{\mathsf{M}}}$$

gesetzt wird. Wir nehmen $\alpha = e^{\delta t}$ und erhalten dann

$$\delta^2 + 2m\delta + n^2 = 0,$$

also wird

$$\delta = -m \pm \sqrt{-n^2 + m^2}.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (e) lautet also

$$\text{(f)} \qquad \alpha = \{c_1 e^{\sqrt{m^2-n^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{m^2-n^2}\,t}\} e^{-mt}.$$

Für den Fall, daß $m > n$ ist, wird der Ausdruck $\sqrt{m^2 - n^2} - m$

negativ, und er sei gleich $-\varepsilon$, wo ε eine positive Größe ist. Wir erhalten dann

$$\alpha = c_1 \frac{1}{e^{\varepsilon t}} + c_2 \cdot \frac{1}{e^{(\sqrt{m^2 - n^2} + m)\, t}},$$

d. h. für den Fall $m > n$ wird α immer kleiner, je mehr t anwächst, und für $t = \infty$ wird $\alpha = 0$. *Die Bewegung der Spule ist also keine oszillierende, sondern ist aperiodisch.*

$$2 \frac{\sqrt{\mathsf{M}\, D}}{h + q^2 / r} < 1$$

entspricht dem aperiodischen Falle. Dabei wird durch den Stromstoß die Spule um einen gewissen Winkel aus der Gleichgewichtslage entfernt, und sie kehrt dann ohne Schwingungen auszuführen in die Gleichgewichtslage zurück. Die Rückkehr in diese Lage erfolgt praktisch genommen in endlicher Zeit.

Ist dagegen

$$m < n \quad \text{oder} \quad 2 \frac{\sqrt{\mathsf{M}\, D}}{h + q^2 / r} > 1,$$

so haben wir eine *periodische Bewegung*. Ist $m = n$, so handelt es sich um den *aperiodischen Grenzfall.*

Im Falle $m < n$ wird die Spule zunächst durch den Stromstoß aus der Gleichgewichtslage abgelenkt, und sie führt dann eine Anzahl von Schwingungen mit abnehmender Amplitude aus, bis sie schließlich in die Nullage zurückkehrt. Wir erhalten dann aus (f)

$$\alpha = e^{-mt} \{ c_1\, e^{\iota \sqrt{n^2 - m^2}\, t} + c_2\, e^{-\iota \sqrt{n^2 - m^2}\, t} \}$$

oder

$$\alpha = e^{-mt} \{ (c_1 + c_2) \cos t \sqrt{n^2 - m^2} + (c_1 - c_2)\, \iota \sin t \sqrt{n^2 - m^2} \}.$$

Setzen wir noch $c_1 + c_2 = A$ und $\iota (c_1 - c_2) = B$, so folgt

$$\alpha = e^{-mt} \{ A \cos t \sqrt{n^2 - m^2} + B \sin t \sqrt{n^2 - m^2} \},$$

A und B sind wie die Größen c_1 und c_2 Integrationskonstante. Setzen wir zur Abkürzung $\sqrt{n^2 - m^2} = \delta$, so folgt

$$\text{(g)} \qquad \alpha = e^{-mt} \{ A \cos \delta t + B \sin \delta t \}$$

und also

$$\text{(h)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = e^{-mt} \{ (B\delta - Am) \cos \delta t - (Bm + A\delta) \sin \delta t \}.$$

Da im Augenblicke $t = 0$ auch $\alpha = 0$ ist, so wird $A = 0$. Ferner ist für denselben Zeitpunkt $(d\alpha / dt)_0$ durch (c) gegeben.

Bezeichnen wir die Elektrizitätsmenge

$$\int_{t=0}^{t=\vartheta} i \cdot dt$$

mit Q, so ist $B = qQ/\mathsf{M}\delta$. Somit finden wir

(i) $$\alpha = e^{-mt} \cdot \frac{qQ}{\mathsf{M}\delta} \cdot \sin \delta t$$

und

(k) $$\frac{d\alpha}{dt} = e^{-mt}\{\delta \cos \delta t - m \sin \delta t\} \cdot \frac{qQ}{\mathsf{M}\delta}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit $d\alpha / dt$ der Drehspule wird Null, wenn

$$\operatorname{tg} \delta t = \frac{\delta}{m} \quad \text{und} \quad \sin \delta t = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + m^2}}$$

ist. Wir bezeichnen die erste Elongation mit α_1, und diese trete ein zur Zeit $t = t_1$. Dann ist

$$\operatorname{tg} \delta t_1 = \frac{\delta}{m}; \quad \text{also} \quad t_1 = \frac{1}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{m}.$$

Wir haben auch

$$\operatorname{tg}(\delta t_1 + \pi) = \operatorname{tg} \delta \left(t_1 + \frac{\pi}{\delta}\right) = \frac{\delta}{m},$$

also erfolgt die zweite Elongation α_2 zur Zeit $t_2 = t_1 + \pi / \delta$. Allgemein findet die p^{te} Elongation zur Zeit t_p statt, wobei

$$t_p = t_{p-1} + \frac{\pi}{\delta} = t_1 + (p-1)\frac{\pi}{\delta}$$

ist. *Demnach sind die Schwingungen der Spule isochron; zwischen je zwei aufeinander folgenden Elongationen liegt die Zeitdauer* $\tau = \pi / \delta$.

Für die erste Elongation erhalten wir nach (i)

(l) $$\alpha_1 = \frac{Qq}{\mathsf{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + m^2}} \cdot e^{-\frac{m}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{m}},$$

für die zweite Elongation

$$\alpha_2 = \frac{Qq}{\mathsf{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + m^2}} \cdot e^{-m\left(\frac{1}{\delta} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{m} + \tau\right)}$$

und für die p^{te} Elongation

$$\alpha_p = \frac{Q\,q}{\mathsf{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + m^2}} \cdot e^{-m\left(\frac{1}{\delta}\operatorname{arctg}\frac{\delta}{m} + (p-1)\tau\right)}.$$

Demnach ist

(m) $$\alpha_p = \alpha_1 \cdot e^{-m(p-1)\tau}.$$

Folglich verhalten sich die aufeinander folgenden Ausschläge oder Elongationen wie die Glieder einer geometrischen Reihe, deren Exponent $e^{-m\tau}$ ist, wo τ die Dauer einer halben Schwingung bedeutet. Die Ausschläge α_1, α_2, α_3 ... erfolgen abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten. Wir finden

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} = e^{m\tau} \quad \text{oder} \quad \log\operatorname{nat}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} = m\,\tau.$$

Wir setzen $m\,\tau = \lambda$ und nennen λ das *logarithmische Dekrement* der Schwingungen, das aus einer Reihe von Schwingungen durch Beobachtung der aufeinander folgenden Ausschläge bestimmt werden kann. λ und τ gehören zu den Konstanten des Galvanometers. Nach (e') ist

$$m = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{2\mathsf{M}}\left(h + \frac{q^2}{r}\right).$$

$h + q^2/r$ sei als *Dämpfungskonstante* k bezeichnet. k ist in hohem Grade abhängig von H und kann durch dieses geändert werden, z. B. durch Anbringen eines magnetischen Nebenschlusses am Magneten des Galvanometers. Wir erhalten ferner aus $n^2 = \delta^2 + m^2$ die Gleichung

(n) $$n = \frac{1}{\tau}\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}.$$

Führen wir diese Ausdrücke für m und n in die Gleichung (l) ein, so folgt

(o) $$\alpha_1 = \frac{Q\,q}{\mathsf{M}} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}},$$

und

$$\alpha_p = \alpha_1\, e^{-\lambda(p-1)}.$$

Die Gleichungen (i) und (k) nehmen die Form

$$\alpha = e^{-\frac{\lambda t}{\tau}} \cdot \frac{q\,Q\,\tau}{\pi\mathsf{M}} \cdot \sin\left(\frac{\pi\,t}{\tau}\right),$$

$$\frac{d\,\alpha}{d\,t} = e^{-\frac{\lambda t}{\tau}} \cdot \left\{\pi\cos\left(\frac{\pi\,t}{\tau}\right) - \lambda\sin\left(\frac{\pi\,t}{\tau}\right)\right\} \cdot \frac{q\,Q}{\mathsf{M}\pi}$$

an. Demnach ist die Winkelgeschwindigkeit für $t = 0$ durch

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \frac{qQ}{\mathsf{M}}$$

in Übereinstimmung mit (c) gegeben.

Wir wollen noch *den Fall ungedämpfter Schwingungen* behandeln, wenn die Dämpfungskonstante $k = 0$ ist. Dieses ist annähernd der Fall, wenn wir einen Kondensator durch das Galvanometer, das keinen Nebenschluß hat, entladen. Wir wollen dabei voraussetzen, daß die Spule nicht auf einen Rahmen aus Metall gewickelt ist, durch den sich eine merkliche Dämpfung ergeben würde. Für $k = 0$ haben wir nach (d)

$$\mathsf{M}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + D\alpha = 0.$$

Dieser Differentialgleichung genügte die Funktion

$$\alpha = \sin\left(t\sqrt{\frac{D}{\mathsf{M}}}\right).$$

Demnach ergeben sich Sinusschwingungen. Die Dauer der ungedämpften Schwingung ist

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{\mathsf{M}}{D}},$$

d. h. die Zeit zwischen zwei entgegengesetzt gerichteten Durchgängen durch die Nullage.

Bei gedämpften Schwingungen fanden wir

$$\tau = \frac{\lambda}{m} = \frac{2\lambda\mathsf{M}}{k},$$

oder nach (n)

(p) $$\tau = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{n} = \tau_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}.$$

Demnach nimmt die Schwingungsdauer τ mit der Dämpfung zu. Aus der Gleichung (o) erhalten wir

$$\alpha_1 = \frac{Qq}{\mathsf{M}} \cdot \frac{\tau_0}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}}$$

und also

(q) $$Q = \frac{\mathsf{M}\pi}{q\tau_0} \cdot \alpha_1 \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Ist die Dämpfung praktisch genommen gleich Null, so finden wir

$$Q = \frac{\mathsf{M}\pi}{q\tau_0}\alpha_1 = p \cdot \alpha_1, \tag{r}$$

wenn mit $p = \mathsf{M}\pi/q\tau_0$ der ballistische Reduktionsfaktor bezeichnet wird.

§ 111. Die Widerstandsmessung.

Zur Widerstandsmessung hat W. Weber neben anderen Methoden auch eine Drahtspule benutzt, die um eine vertikale Achse gedreht wird. In der Anfangslage möge die Windungsebene der Spule senkrecht zum magnetischen Meridian liegen; die Spule werde dann um 180° gedreht. Die Spule ist mit einem Galvanometer verbunden und der Widerstand des gesamten Schließungskreises ist r. Bildet in einem bestimmten Augenblicke die Spule mit der Anfangslage den Winkel α, so ist die Zahl der Kraftlinien, die durch die Windungsebene der Spule gehen, gleich $F\mathsf{H}\cos\alpha$, wenn der gesamte Flächeninhalt der Windungen mit F und die Horizontalintensität des Erdmagnetismus mit H bezeichnet wird. Ist ferner L der Selbstinduktionskoeffizient des Stromkreises, so haben wir entsprechend der Gleichung (a), S. 390

$$ir = -\frac{d(F\mathsf{H}\cos\alpha)}{dt} - \frac{d(Li)}{dt}. \tag{a}$$

Da α bei der Bewegung der Spule anwächst von 0 bis π, und i sowohl bei Beginn der Bewegung als auch sogleich nach dem Aufhören der Bewegung gleich Null ist, so haben wir

$$r = \frac{2F\mathsf{H}}{Q},$$

wenn mit Q die gesamte Elektrizitätsmenge bezeichnet wird, die durch die Leitung geflossen ist. Wird Q mit einem ballistischen Galvanometer mit schwingendem Magneten gemessen, so ist die Kenntnis der Horizontalintensität H zur Bestimmung von r nicht erforderlich. Q kann auch nach der Gleichung (q) auf S. 417 ermittelt werden.

W. Webers Methode des Rotationsinduktors. Eine große Drahtspule dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\alpha/dt$ um ihren vertikalen Durchmesser. Durch den Erd-

magnetismus wird in der Spule eine periodisch veränderliche elektromotorische Kraft induziert. Wir haben nach (a)

$$i r = F \mathsf{H} \omega \sin \alpha - L \frac{d i}{d t},$$

wo F und H dieselbe Bedeutung wie vorher haben. Der in der geschlossenen Spule (Fig. 121) fließende periodisch veränderliche Strom wirkt auf eine im Mittelpunkte der Spule aufgehängte Magnetnadel und erteilt dieser eine dauernde Ablenkung, die beobachtet wird.

Setzen wir $F \mathsf{H} \omega = \mathsf{E}_0$ und $\mathsf{E} = F \mathsf{H} \omega \sin \alpha$, so erhalten wir nach der Gleichung (b), S. 391

$$i = \frac{F \mathsf{H} \omega}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin (\omega t - \varphi) + C e^{-\frac{r t}{L}},$$

wo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \omega}{r}$$

ist. Dauert die Bewegung längere Zeit, so verschwindet das exponentielle Glied; wir nehmen daher auf dasselbe keine Rücksicht.

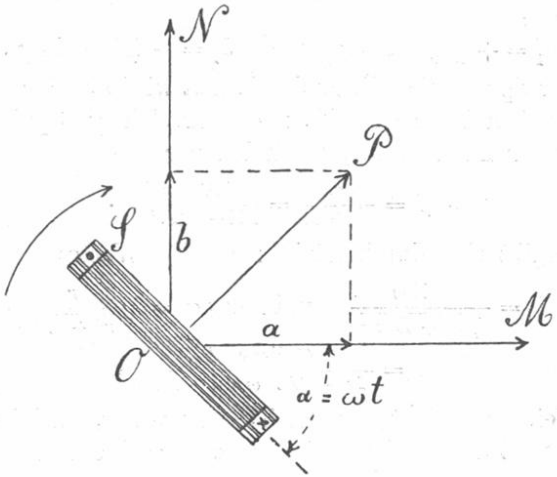

Fig. 121.

In Fig. 121 ist $O N$ der magnetische Meridian, zu dem die Richtung $O M$ senkrecht liegt. Die Spule S rotiere aus der Anfangslage $O M$ in der Richtung des Pfeiles; der in ihr fließende Strom übt auf den Nordpol der Nadel die Kraft $O P$

aus. Wir setzen $OP = Gi$, wo G die Galvanometerkonstante bedeutet. OP hat die Komponenten

$$\text{nach der Richtung } OM\text{: } a = G i \sin\alpha,$$
$$\text{„ „ „ } ON\text{: } b = G i \cos\alpha.$$

Die Mittelwerte dieser Komponenten sollen mit a_1 und b_1 bezeichnet werden. Dann ist

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G i \sin\alpha\, d\alpha, \quad b_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G i \cos\alpha\, d\alpha.$$

Da aber

$$\int_0^{2\pi} \sin\alpha \sin(\alpha - \varphi)\, d\alpha = \pi \cos\varphi,$$

und

$$\int_0^{2\pi} \cos\alpha \sin(\alpha - \varphi)\, d\alpha = -\pi \sin\varphi$$

ist, so erhalten wir, wenn

$$i_0 = \frac{F \mathsf{H} \omega}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$$

gesetzt wird,

$$a_1 = +\tfrac{1}{2} i_0 G \cos\varphi \quad \text{und} \quad b_1 = -\tfrac{1}{2} i_0 G \sin\varphi.$$

Der in der Spulenmitte liegende Magnet wird aus dem Meridian nach derselben Seite gedreht, nach der sich die Spule bewegt. Ist β der Drehungswinkel, so finden wir

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_1}{\mathsf{H} + b_1} = \frac{i_0 G \cos\varphi}{2\mathsf{H} - i_0 G \sin\varphi}.$$

Daraus ergibt sich durch Einführung des Wertes

$$i_0 = \frac{F \mathsf{H} \omega}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{G F \omega \cos^2\varphi}{2r - G F \omega \sin\varphi \cos\varphi}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von r, nachdem φ ermittelt ist. Ist φ sehr klein, also $L\omega$ klein gegenüber r, so wird

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{G F \omega}{2r} \quad \text{und} \quad r = \frac{G F \omega}{2 \operatorname{tg}\beta}.$$

Angewandt ist diese Methode von Lord Rayleigh und A. Schuster[1]), sowie von H. Weber.

[1]) Proc. Roy. Soc. **32.** S. 104 u. ff. 1881.

L. Lorenz' Methode der Widerstandsmessung. Eine Metallscheibe ABC (Fig. 122) mit dem Radius a drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse; außen um die Scheibe herum sei eine Drahtspule EF gelegt, die von einem elektrischen Strome mit der Stärke i durchflossen wird, der von der galvanischen Batterie H herrührt. Der Strom ruft eine magnetische Kraft hervor, deren zur Ebene der Scheibe senkrechte Komponente gleich $m\,i$ gesetzt werden kann, wo m

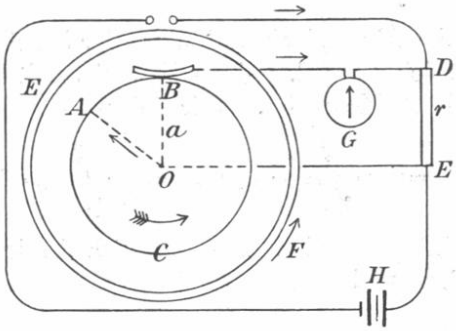

Fig. 122.

eine Funktion des Abstandes vom Scheibenzentrum O und auch der Anzahl der Windungen der Spule EF ist. Rotiert die Scheibe von B nach A, und fließt der Strom in EF in derselben Richtung, so ist die in der Scheibe induzierte elektromotorische Kraft vom Mittelpunkte nach der Peripherie gerichtet. In B schleift eine Feder am Scheibenrand, die durch die Leitung $BGDEO$ mit der zur Scheibe im Mittelpunkte O senkrechten Achse verbunden ist. DE ist der Leiter, dessen Widerstand r bestimmt werden soll. Leitet man den Batteriestrom auch durch den Widerstand DE, so kann man durch Veränderung der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe erreichen, daß kein Strom durch die Leitung fließt, die r mit der Scheibe verbindet. In diesem Falle zeigt die Nadel des Galvanometers keine Ablenkung. Wir haben dann, wenn mit E die in der Scheibe induzierte elektromotorische Kraft bezeichnet wird,

$$\mathsf{E} = r\,i,$$

wo mit i der durch den Widerstand r fließende Strom bezeichnet wird. Zur Bestimmung von E denken wir uns die

Scheibe durch einen Ring BAC und einen geradlinigen Leiter OA ersetzt. Der Kreislauf $OABGDEO$ wird in die beiden Teile OAB und $BGDEOB$ zerlegt. Die Anzahl der durch den letzteren gehenden Kraftlinien wird bei der Bewegung nicht geändert, dagegen erhält die Anzahl der durch den ersteren Teil gehenden Kraftlinien in der Zeiteinheit den Zuwachs

$$\int_0^a m i \varrho \omega \cdot d\varrho = i\omega \cdot \int_0^a m \varrho \cdot d\varrho,$$

wenn mit ϱ der Abstand eines Punktes der Scheibe vom Mittelpunkte O bezeichnet wird. Dieser Zuwachs stellt die induzierte elektromotorische Kraft dar. Wir haben also

$$r i = i\omega \cdot \int_0^a m \varrho \cdot d\varrho; \quad r = \omega \cdot \int_0^a m \varrho \cdot d\varrho.$$

Ist n die Zahl der Umdrehungen der Scheibe in der Sekunde, so ist $\omega = 2\pi n$ und

$$r = n \cdot \int_0^a m \cdot 2\pi \varrho \, d\varrho.$$

Das Integral gibt den Koeffizienten L_0 der Induktion, welche die Spule EF auf die Scheibe ABC hervorbringt, oder auch die Zahl der Kraftlinien, welche die Scheibe durchsetzen, wenn in der Spule EF der Strom $i = 1$ fließt. Wir finden also

$$r = n L_0.$$

Zur Bestimmung von r ist also die Zahl n der Umdrehungen erforderlich, bei denen kein Strom durch G fließt.

§ 112. Die zweite Maxwellsche Gleichung.

Die zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper (vgl. Gleichung (c) auf S. 371)

$$\text{(a)} \qquad \int \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}_n \, df$$

wollen wir jetzt in differentieller Form darstellen und das Faradaysche Induktionsgesetz verallgemeinern. Wir betrachten ein unendlich kleines Parallelogramm OA mit den Seiten dy

und dz, das der yz-Ebene parallel liegt. In Fig. 123 ist die $+x$-Achse nach vorne gerichtet. Das Integral $\int \mathfrak{B}_n df$, bezogen auf das Parallelogramm OA, gibt

$$\int \mathfrak{B}_n df = \mathfrak{B}_x dy dz = \mu \mathfrak{H}_x dy dz.$$

Die linke Seite der Gleichung (a), bezogen auf den Umfang des Parallelogramms OA, ergibt

$$\int \mathfrak{E}_s ds = \mathfrak{E}_y dy + \left(\mathfrak{E}_z + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} dy\right) dz - \left(\mathfrak{E}_y + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} dz\right) dy - \mathfrak{E}_z dz,$$

also

$$\int \mathfrak{E}_s ds = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) dy dz.$$

Die Anwendung der Gleichung (a) auf das Parallelogramm OA liefert also

(b) $$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y}.$$

In derselben Weise ergibt sich auch

(b) $$\begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{cases}$$

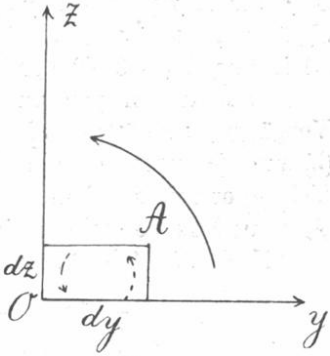

Fig. 123.

Die Gleichungen (b) heißen *das zweite Tripel der Maxwellschen Gleichungen.* In der Vektorschreibweise kann *die zweite Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper* durch

(c) $$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{dt}$$

dargestellt werden.

Nach der Maxwellschen Theorie gelten die Gleichungen (b) und (c), die die Beziehung zwischen der Änderung der Zahl der Induktionslinien und der induzierten elektromotorischen Kraft ausdrücken, für alle Punkte des Raumes und auch für solche, in denen gar kein Leiter vorhanden ist. Vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie muß man annehmen, daß durch Änderung des Induktionsflusses elektrische Kräfte im Raume auch dann hervorgerufen werden, wenn gar keine Leiter vorhanden sind. Der Leiter dient nur als Mittel zum Erkennen

des elektrischen Feldes oder zum Nachweise eines elektrischen Spannungszustandes im Felde.

Differentiiert man die drei Gleichungen (b) der Reihe nach bzw. mit x, y und z und addiert man, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_z)}{\partial z}\right\}=0$$

und also ist

$$\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu\mathfrak{H}_z)}{\partial z}=\text{const.}$$

Nach S. 297 ist aber diese Konstante gleich Null, weil in den magnetischen Körpern kein wahrer Magnetismus vorhanden ist. Wir gelangen also wieder zu der Gleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{B}=0.$$

Sind die Komponenten $\mu\mathfrak{H}_x$, $\mu\mathfrak{H}_y$ und $\mu\mathfrak{H}_z$ von der Zeit unabhängig, so kommen wir von den Beziehungen (b) zu den Gleichungen § 60 (h) der Elektrostatik.

Beschränken wir uns auf stationäre und quasistationäre Vorgänge, so können wir den allgemein gültigen Gleichungen (b) und (c) noch eine andere Form durch Einführung des Vektorpotentials geben, dessen Komponenten (vgl. S. 335) mit F, G und H bezeichnet sind.

Nach den Gleichungen (b) S. 335 erhalten wir

$$\text{(d)}\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right)&=\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)&=\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)&=\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn wir

$$\text{(e)}\qquad \mathfrak{E}_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t},\quad \mathfrak{E}_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial G}{\partial t},\quad \mathfrak{E}_z=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

setzen. Ist χ eine eindeutige Funktion von x, y, z, so würde auch der Ansatz

$$\mathfrak{E}_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial x}\ \text{usw.}$$

den Gleichungen (d) genügen. Wir wollen die spezielle Lösung (e) beibehalten. Da $\mathfrak{E}_s$ die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$, und ds die Komponenten dx, dy, dz hat, so ist

$$\mathfrak{E}_s\,ds=\mathfrak{E}_x\,dx+\mathfrak{E}_y\,dy+\mathfrak{E}_z\,dz,$$

und wir finden also als Induktionsgesetz einer stationären und quasistationären Strömung

$$(f)\quad \begin{cases} \int \mathfrak{E}_x\,dx + \mathfrak{E}_y\,dy + \mathfrak{E}_z\,dz \\ = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int (F\,dx + G\,dy + H\,dz) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}_n\,df. \end{cases}$$

Neunter Abschnitt.

Elektromagnetische Wellen.

§ 113. Der Poyntingsche Satz.

Wir gehen aus von den Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes (vgl. S. 334 und S. 423)

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right)$$

und

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}.$$

In ausführlicherer Darstellung lauten diese Gleichungen

$$(a)\quad \begin{cases} \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_x + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_y + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathfrak{j}_z + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial t}\right), \end{cases}$$

und

$$(b)\quad \begin{cases} \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (a) bzw. mit $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$, und die Gleichungen (b) bzw. mit $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, so ergibt sich durch Addition