

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

**Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph**

Leipzig, 1910

Siebenter Abschnitt. Elektromagnetismus

wodurch die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen identisch werden. Dadurch finden wir

$$(d) \quad \mathfrak{S}_x = v \cdot \int \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta} \frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta} \frac{d\zeta}{ds} \right) ds.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{S}_y$ und $\mathfrak{S}_z$. Durch Ausführung der Differentiation erhalten wir

$$(e) \quad \mathfrak{S}_x = v \cdot \int \left(\frac{x - \zeta}{r^3} \frac{d\eta}{ds} - \frac{y - \eta}{r^3} \frac{d\zeta}{ds} \right) ds.$$

Durch die Randkurve der magnetischen Lamelle und durch das Moment v ist also die Feldstärke bestimmt. Dieses ergibt sich schon aus dem Umstande, daß das Potential durch den räumlichen Winkel und durch das Moment der Lamelle gegeben ist.

Siebenter Abschnitt.

Elektromagnetismus.

§ 88. Der elektrische Strom.

Im elektrostatischen Felde nimmt das Potential auf einem Leiter einen konstanten Wert an. Verbindet man zwei Leiter miteinander, auf denen die Potentiale verschiedene Werte haben, z. B. die beiden Belegungen eines geladenen Kondensators, die entgegengesetzte und gleiche Menge von Elektrizität enthalten, durch einen Leitungsdraht, so fließt in diesem ein elektrischer Strom vom höheren zum niedrigeren Potential. In dem angelegten Drahte besteht zunächst nicht das elektrostatische Feld im Gleichgewichte, weil seine Enden eben mit Leitern verschiedenen Potentials in Berührung gebracht werden. Sehr schnell nach dem Anlegen des Drahtes wird die Stromstärke schwächer, und sie hört nach kurzer Dauer ganz auf, wenn die Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern ausgeglichen ist und das aus den beiden Leitern und dem Drahte bestehende System an seiner Oberfläche und im Inneren überall dasselbe Potential aufweist. Den in dem betrachteten Falle auftretenden elektrischen Strom, der übrigens nur von sehr

kurzer Dauer ist, bezeichnet man als *Entladungsstrom*. Durch diesen Entladungsstrom wird in dem die Belegungen der Leidener Flasche verbindenden Drahte Wärme entwickelt, auch vermag dieser Strom auf eine in der Nähe des Drahtes aufgestellte Magnethadel eine mechanische Kraft auszuüben, d. h. in der Umgebung des vom elektrischen Strome umflossenen Leiters entsteht ein magnetisches Feld. Zur Untersuchung der Stromgesetze ist ein solcher Entladungsstrom jedoch ungeeignet, weil er nur sehr kurze Zeit andauert und auch nicht konstant ist. Nimmt in dem Zeitelemente dt die Elektrizitätsmenge auf der positiven Belegung des Kondensators um de ab, so dürfen wir als die Stärke J des Entladungsstromes

$$J = \frac{de}{dt}; \quad [J] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}]$$

ansetzen. J ist also nur von sehr kurzer Dauer und auch während dieser nicht konstant, wenn es sich, wie in dem betrachteten Falle, um die Entladung eines Kondensators handelt. Zur Feststellung der Stromgesetze ist die Benutzung eines *stationären Stromes* erforderlich, der sich ergeben würde, wenn die Enden des Verbindungsdrahtes dauernd auf der gleichen Potentialdifferenz gehalten werden. Sehr zweckmäßig zur Herstellung eines stationären Stromes, der längere Zeit hindurch eine konstante Stärke beibehält, sind galvanische Elemente, Akkumulatoren und auch Thermoelemente.

An die Pole eines galvanischen Elementes sei ein *linearer Leiter* angeschlossen, d. h. ein Leiter, dessen Querschnitt q überall gleich und in seinen Dimensionen sehr klein gegen die Länge l sei. Die konstante Potentialdifferenz zwischen den Enden dieses Leiters sei dann $\varphi_1 - \varphi_2$. Nach dem aus den Erfahrungen abgeleiteten Ohmschen Gesetze ist

$$(a) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = JR,$$

indem J die Stromstärke und R der Widerstand des die Pole verbindenden Leitungsdrahtes ist. Nach der Gleichung (a) ist die Potentialdifferenz gleich dem Produkte aus der Stromstärke und dem Widerstande des Leiters.

Der Widerstand R berechnet sich aus der Länge l und dem Querschnitte q

$$(b) \quad R = \frac{l}{\sigma \cdot q},$$

wo σ eine Materialkonstante — die *spezifische elektrische Leitfähigkeit* — ist.

Führt man statt der Stromstärke J die Stromdichte j ein, indem bei gleicher Verteilung der Strömung über den Drahtquerschnitt

$$\frac{J}{q} = j$$

ist, so erhalten wir

$$(c) \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{j}{\sigma}.$$

Die elektrische Feldstärke im Leiter ist gleich

$$\mathfrak{E} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$$

unter der Voraussetzung eines homogenen Leiters von durchweg konstantem Querschnitte. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ wirkt dabei parallel zur Achse des Leiters. Wir finden weiter

$$(d) \quad j = \mathfrak{E} \cdot \sigma.$$

Während die Gleichung (a) das *Ohmsche Gesetz in der Integralform* darstellt, gibt (d) die *differentielle Form* desselben Gesetzes. $\mathfrak{E}$ ist das Potentialgefälle. In einem isotropen Leiter ist die Stromdichte der Feldstärke parallel und proportional. Bei kristallinen Leitern fallen j und $\mathfrak{E}$ im allgemeinen der Richtung nach nicht zusammen. Längs des Leiterelementes dl ist das Gefälle $-(\partial\varphi/\partial l)$ in der Richtung der Strömung. $\mathfrak{E}$ erscheint hier als negativer Gradient eines skalaren Potentials. Ferner ist nach (d)

$$(e) \quad j = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \cdot \sigma, \quad \text{also} \quad \mathfrak{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{j}{\sigma} = \frac{J}{q\sigma}.$$

Durch Integration ergibt sich daraus wieder das Ohmsche Gesetz, indem wir das Integral längs eines Stückes des Leiters vom Punkte P_1 bis P_2 bilden

$$(f) \quad \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E} dl = - \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = J \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{q\sigma}, \quad \text{oder} \quad \varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = J \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{q\sigma} = JR.$$

Bei der stationären Strömung fließt durch alle Querschnitte desselben Leiters in jedem Augenblicke die gleiche Elektrizitätsmenge. Bei jedem Vorgange, durch den Elektrizität entsteht, wird ein gleiches Quantum positiver und negativer Elektrizität

erzeugt; demnach ist bei jedem Vorgange der Elektrizitäts-
erzeugung die gesamte Ergiebigkeit der Quellen gleich Null.
Für den stationären elektrischen Leitungsstrom ist

$$\operatorname{div} j = 0$$

in einem Leiter, wenn j die in der Zeiteinheit durch die
Flächeneinheit des Leitungsquerschnittes strömende Elektrizitäts-
menge ist. An der Trennungsfläche zweier Leiter, deren Seiten
wir mit 2 und 1 bezeichnen wollen, ist

$$(g) \quad (j_n)_1 = (j_n)_2,$$

wobei die Normale von 2 nach 1 positiv sein soll. Dagegen
ist die Strömung durch die Leiteroberfläche, die von Isolatoren
begrenzt wird, gleich Null; an dieser Leiteroberfläche ist also

$$j_n = 0.$$

Nach dem Jouleschen Gesetze wird in der Zeiteinheit im
Widerstande R die Wärme

$$(h) \quad Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) = RJ^2$$

entwickelt. Die in der Zeiteinheit und in der Volumeneinheit
entwickelte Wärme ist

$$(i) \quad j \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^2 \sigma = \frac{1}{\sigma} \cdot j^2.$$

Diese Gleichung stellt das Joulesche Gesetz in der differentiellen
Form dar. Da in der Gleichung (h) J und $(\varphi_1 - \varphi_2)$ in ab-
soluten elektrostatischen Einheiten gemessen werden, so ergibt
sich Q in mechanischem Maße.

§ 89. Der Verschiebungsstrom.

Zu den Leitungsströmen, von denen im vorigen Paragraphen
die Rede war, treten in der Maxwellschen Theorie noch
die *Verschiebungsströme* in dem Dielektrikum. Der von der
einen Kondensatorplatte zur anderen fließende ungeschlossene
Leitungsstrom wird durch den zu gleicher Zeit im Dielektrikum
auftretenden Verschiebungsstrom zu einem geschlossenen Strome.

Betrachten wir noch einmal den geladenen Kondensator,
dessen Belegungen durch einen Leitungsdrah verbunden werden,
so nimmt an der einen Platte A , von der der Leitungsstrom
im Drahte ausgeht, die wahre Elektrizitätsmenge ab, während
sie an der anderen Platte B zunimmt. Von dieser Platte B

aus nimmt dann die Zahl der ins Dielektrikum gehenden Verschiebungslinien zu, indem die gesamte von der Platte ausgehende Verschiebung durch

$$e = \int \mathfrak{D}_n df$$

gegeben ist, wenn $\mathfrak{D}_n$ die zur Platte des Kondensators normale Komponente der Verschiebung ist und e die auf der Platte vorhandene wahre Ladung bedeutet. Ist J die augenblickliche Stärke des Leitungsstromes so haben wir

$$(a) \quad J = \frac{de}{dt} = \int \frac{\partial \mathfrak{D}_n}{\partial t} df.$$

Demnach ist die Stärke des Leitungsstromes, der im Drahte zur Platte B fließt, durch die zeitliche Zunahme der Zahl der von dieser Platte ins Dielektrikum ausströmenden Verschiebungslinien bestimmt. Jede Änderung des Vektors $\mathfrak{D}$ bedeutet eine Änderung der Verschiebung von Elektrizitätsmengen in den Volumenelementen des Dielektrikums, d. h. eine Bewegung von elektrischen Ladungen, die wir allgemein als elektrischen Strom bezeichnen. Durch die zeitliche Änderung der Verschiebung $\mathfrak{D}$ wird die Dichte des sogenannten Verschiebungsstromes gemessen. Wir haben früher (vgl. S. 262) die Größe der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ durch die Flächeneinheit definiert durch

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E},$$

wo ϵ die Dielektrizitätskonstante und $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke ist. Die Dichte des Verschiebungsstromes wird demgemäß

$$(b) \quad \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

In den vorhergehenden Betrachtungen handelt es sich um ruhende Leiter, und nur diese sollen zunächst ins Auge gefaßt werden. Wird der zwischen den Belegungen des Kondensators vorhandene ungeschlossene Leitungsstrom durch den im Dielektrikum auftretenden Verschiebungsstrom zu einem in sich geschlossenen Strome, so ergibt sich, daß *der Leitungs- und der Verschiebungsstrom zusammen eine quellenfreie Strömung ergeben.*

Nach der Maxwell-Hertzschen Theorie sollen *die Verschiebungsströme dieselben elektromagnetischen Wirkungen ausüben*

wie die *Leitungsströme*. Im Sinne dieser Theorie gibt es keine Körper, die vollkommene Isolatoren, und auch keine, die vollkommene Leiter sind. Alle in der Natur vorkommenden Körper müssen als Leiter wie auch als Isolatoren angesehen werden. Somit kommt auch den Leitern eine Dielektrizitätskonstante und den Isolatoren eine Leitfähigkeit zu. Die in den Gleichungen (d) und (i) des vorigen Paragraphen dargestellten Differentialgesetze von Ohm und Kirchhoff gelten nach der Maxwellschen Theorie auch für sehr schnell wechselnde Felder. Die *wahre Stromstärke* setzt sich aus der Stärke des Leitungsstromes und derjenigen des Verschiebungsstromes zusammen. Bezeichnet man also die *wahre gesamte Stromdichte* mit c , so ist

$$(c) \quad c = j + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{E} \sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

In Rücksicht auf die quellenfreie Strömung ist im Inneren jedes Körpers

$$(d) \quad \operatorname{div} c = 0,$$

d. h. der Gesamtstrom ist quellenfrei. Sind ferner c_{n_1} und c_{n_2} die Stromdichten in der Richtung der Normalen zu beiden Seiten der Grenzfläche zweier Körper, so ist

$$(e) \quad c_{n_1} = c_{n_2}.$$

Aus (d) ergibt sich, daß in jedem Körper auch (s. S. 264)

$$\operatorname{div} j = - \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = - \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

ist, d. h. die Divergenz des Leitungsstromes in einem ruhenden Körper ist also durch die auf die Zeiteinheit bezogene Abnahme der Dichte der wahren Elektrizität gegeben. Nur durch den Leitungsstrom kann die Dichte der wahren Elektrizität geändert werden. Ferner ist auch an der Grenzfläche zweier Körper

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{n_1} + \frac{\partial \mathfrak{D}_{n_1}}{\partial t} = j_{n_2} + \frac{\partial \mathfrak{D}_{n_2}}{\partial t}, \\ \text{oder nach S. 264} \\ j_{n_1} - j_{n_2} = - \left(\frac{\partial \mathfrak{D}_{n_1}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{D}_{n_2}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial \eta}{\partial t}, \end{array} \right.$$

d. h. die Differenz der Normalkomponenten des Leitungsstromes zu beiden Seiten der Grenzfläche zweier Körper ist

gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Abnahme der Flächen-dichte der wahren Elektrizität.

Entsprechend dem Jouleschen Gesetze beträgt die Energie-änderung in der Volumeneinheit des Dielektrikums nach S. 262

$$(g) \quad \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{8\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathfrak{E} \mathfrak{D})}{\partial t}.$$

§ 90. Das magnetische Feld eines linearen Stromleiters.

Oersted fand im Jahre 1820, daß ein elektrischer Strom auf einen in der Nähe befindlichen Magnetpol eine bewegende Kraft ausübt. Befindet sich in der Nähe eines von einem elektrischen Strome durchflossenen geraden Leiters, der ein Teil eines geschlossenen Stromkreises ist, eine Magnetnadel, so kann die Richtung der auf den Nordpol der Nadel ausgeübten bewegenden Kraft nach der folgenden Regel ermittelt werden. Legt man die rechte Hand an den Stromleiter, sodaß die Fingerspitzen die Stromrichtung anzeigen und die innere Handfläche dem Nordpol zugekehrt ist, so wird auf diesen vom Stromleiter in der Richtung des Daumens eine Kraft ausgeübt.

Führt man einen vertikalen Stromleiter senkrecht durch ein Blatt Papier hindurch, und bestreut man dieses mit Eisen-spänen, so ordnen sich die letzteren in konzentrischen Kreisen an, deren Mittelpunkt in der Achse des Stromleiters liegt. Die magnetischen Induktionslinien eines stromdurchflossenen Leiters sind also konzentrische Kreise. Stellt in Fig. 95 der kleinste Kreis den Querschnitt des zur Papierfläche senkrechten Stromleiters dar, und deutet das Kreuz als Schaft des Richtungspfeiles an, daß der Strom von der vorderen Seite der Papierfläche nach hinten fließt, so

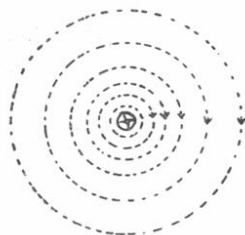


Fig. 95.

werden die Induktionslinien durch die punktierten Kreise dargestellt; sie sind also in sich geschlossene Kurven. Die Pfeilspitzen an diesen Kreisen geben die Richtung der Induktionslinien an. Die Stromrichtung und die Richtung der Induktionslinien gehören zusammen wie die Vorwärtsbewegung und

Drehung einer rechtsgängigen Schraube. Ist der Stromleiter von Luft umgeben, deren Permeabilität μ nahezu gleich 1 ist, so sind die Induktionslinien mit den Kraftlinien identisch.

Die magnetische Feldstärke oder magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ in der Umgebung des geradlinigen Stromleiters hat keine zur Richtung des Stromes parallele Komponente. $\mathfrak{H}$ ist die auf den Einheitspol im Vakuum ausgeübte Kraft. Nach den Beobachtungen ist $\mathfrak{H}$ proportional der Stromstärke J und umgekehrt proportional dem Abstände r des Poles vom Stromleiter. Wir setzen

$$(a) \quad |\mathfrak{H}| = \frac{2J}{cr}$$

und bemerken, daß c eine universelle Konstante ist, die von der Wahl der Einheiten für J und $\mathfrak{H}$ abhängt und über deren Bedeutung später noch die Rede sein wird. Versteht man unter J die im elektrostatischen Maße gemessene Stromstärke, d. i. die elektrostatisch gemessene Elektrizitätsmenge, die in der Sekunde durch den Querschnitt des Leiters fließt, so ist $c = 3 \cdot 10^{10}$, wenn $\mathfrak{H}$ die auf S. 286 eingeführte und auf den Einheitspol wirkende Kraft ist.)

Wird der Angriffspunkt der Feldstärke $\mathfrak{H}$ längs einer der Induktions- oder Kraftlinien bewegt zum Ausgangspunkt zurück, so ist die Arbeit der Kraft $\mathfrak{H}$ längs der geschlossenen Induktionslinie mit dem Radius r

$$\mathfrak{H} \cdot 2r\pi = \frac{4\pi J}{c}.$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein für jede beliebige den Leiter umschließende Kurve. Wir berechnen das Integral

$$\int \mathfrak{H}_s ds,$$

das über alle Elemente einer in sich geschlossenen und den Leiter umschließenden Kurve erstreckt wird. Wir haben dann nach Fig. 96

$$\mathfrak{H}_s ds = |\mathfrak{H}| \cdot ds \cdot \cos(\mathfrak{H}, ds) \quad \text{und} \quad ds \cdot \cos(\mathfrak{H}, ds) = r \cdot d\alpha.$$

Also finden wir

$$(b) \quad \int \mathfrak{H}_s ds = \frac{2J}{c} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{4\pi J}{c},$$

wenn das Integral auf der linken Seite sich auf die geschlossene Kurve bezieht. Umschließt die geschlossene Kurve nicht den Stromleiter, so zeigt eine einfache Betrachtung, daß

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 0$$

ist. Das Linienintegral $\int \mathfrak{H}_s ds$ wird als *magnetomotorische Kraft* bezeichnet. Die Gleichung (b) sagt dann aus: *Die Arbeit, die verrichtet wird, wenn man einen magnetischen Einheitspol um einen vom Strome J durchflossenen Leiter einmal ganz herumbewegt, d. h. die magnetomotorische Kraft dieses Stromleiters, ist gleich $4\pi J/c$.* Die Gleichung (b) stellt die erste *Maxwellsche Gleichung* in der Integralform dar.

Wir wollen noch bemerken, daß die Konstante c in der

Gleichung (b) gleich Eins wird, wenn wir an Stelle der absoluten elektrostatischen Stromeinheit die absolute elektromagnetische Stromeinheit einführen; die letztere ist $3 \cdot 10^{10}$ mal größer als die erstere. Ist i die Stromstärke in elektromagnetischem Maße, so lautet die Gleichung (b)

$$(c) \quad \int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi i.$$

In dieser Gleichung ist $\mathfrak{H}$ in magnetischem Maße gemessen, also ist die Dimension von

$$[\mathfrak{H}] = [L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Somit erhalten wir für die *Dimension der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke*

$$[i] = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Um den Stromleiter (Fig. 95) herum erhalten wir ein *quellenfreies Wirbelfeld*, da die Induktionslinien in sich geschlossene Kurven sind und $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ ist. Nehmen wir an, daß der Leiter sich in Luft, oder besser im Vakuum befindet,

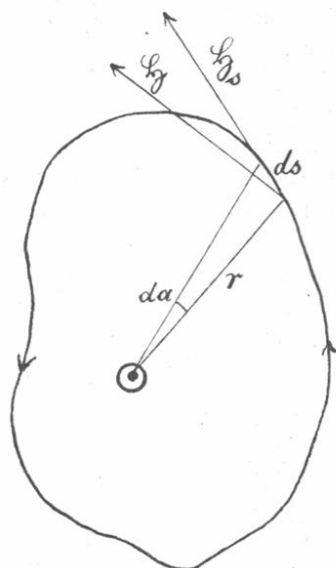


Fig. 96.

so ist $\mu = 1$ zu setzen, und wir haben dann in dem homogenen Medium weder wahren noch freien Magnetismus, indem also $\text{div } \mathfrak{H} = 0$ ist. Induktions- und Kraftlinien, die beide im Vakuum identisch sind, sind in sich geschlossen.

Ist dagegen der Leiter zum Teil von magnetisierbaren Körpern umgeben, und ist also in seiner Umgebung μ nicht konstant, so tritt an den Grenzflächen verschiedener Körper freier Magnetismus auf. Für den Vektor $\mathfrak{B}$ behalten wir auch dann die Gleichung

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{div}(\mu \mathfrak{H}) = 0.$$

Nach § 80 haben wir nur dort freien Magnetismus, wo die Permeabilität μ einen Gradienten hat, also in inhomogenen Körpern oder in ferromagnetischen Körpern, wie auch an der Grenzfläche zweier Körper mit verschiedener Permeabilität.

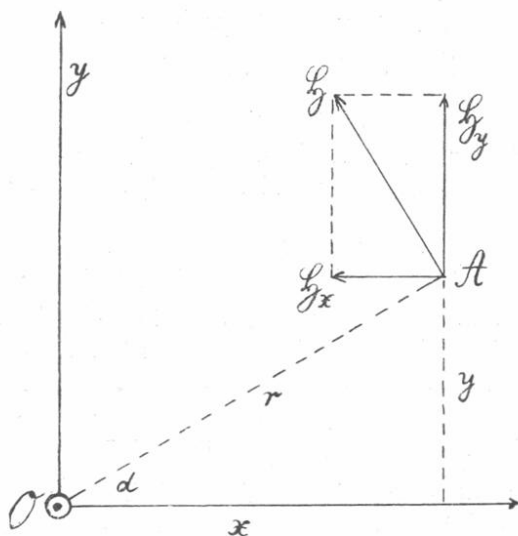


Fig. 97.

Wir ermitteln jetzt das magnetische Potential φ_m im Feld eines geradlinigen Stromleiters, durch den der Strom i fließt. Der kleine Kreis im Punkte O (Fig. 97) stelle den Querschnitt des Stromleiters dar. Der Punkt im Kreise sei die Spitze des Richtungspfeiles und deute an, daß der Strom nach dem Leser hin gerichtet ist. Wir legen ein Koordinatensystem zugrunde,

dessen z -Achse mit der Richtung des Stromes und mit dem Stromleiter zusammenfällt. Zunächst ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Punkte A nach S. 329, Gleichung (a), wenn die Stromstärke durch die absolute elektromagnetische Einheit gemessen wird,

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{r}.$$

Nach Fig. 97 haben wir dann durch Zerlegung von $\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} &= \mathfrak{H}_x = -\mathfrak{H} \cdot \sin \alpha = -\frac{2i}{r} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{2iy}{x^2 + y^2}, \\ -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} &= \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H} \cdot \cos \alpha = \frac{2i}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{2ix}{x^2 + y^2}, \\ -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} &= \mathfrak{H}_z = 0. \end{aligned}$$

Also wird

$$\varphi_m = -2i \arctg \frac{y}{x} + \text{const.}$$

Da $y/x = \tg \alpha$ ist, so erhalten wir auch

$$\varphi_m = -2i\alpha + \text{const.}$$

Bewegt sich der Punkt A einmal um den Stromleiter herum, sodaß α um 2π wächst, so ändert sich φ_m um $-4\pi i$.

§ 91. Die erste Maxwell'sche Gleichung.

Nach S. 327 und Gleichung (c) setzt sich die *Dichte der gesamten Strömung* in einem Körper, indem sowohl ein Leitungs- wie ein Verschiebungsstrom auftreten kann, zusammen aus

$$(a) \quad c = j + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E} + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Die Komponenten der Stromdichte c seien c_x, c_y, c_z . Wir wenden dann die Gleichung (b) auf S. 329

$$(b) \quad \int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi J}{c}$$

an auf das Stromelement $c_z dx dy$, indem wir voraussetzen, daß auch die Verschiebungsströme in bezug auf ihre magnetischen Wirkungen den Leitungsströmen gleich sind. Das Flächenelement $dx dy$ sei in der Figur 98 mit $ABCD$ bezeichnet. Längs der Seite AB wirke die Feldstärke $\mathfrak{H}_x$ in der

Richtung von A nach B . Längs der Seite CD wirkt dann in der Richtung von C nach D parallel zur x -Achse die Feldstärke

$$-\left(\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy\right).$$

Von D nach A hin wirkt in der Richtung der y -Achse die Feldstärke $-\mathfrak{H}_y$ und von B nach C die Feldstärke

$$\left(\mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx\right).$$

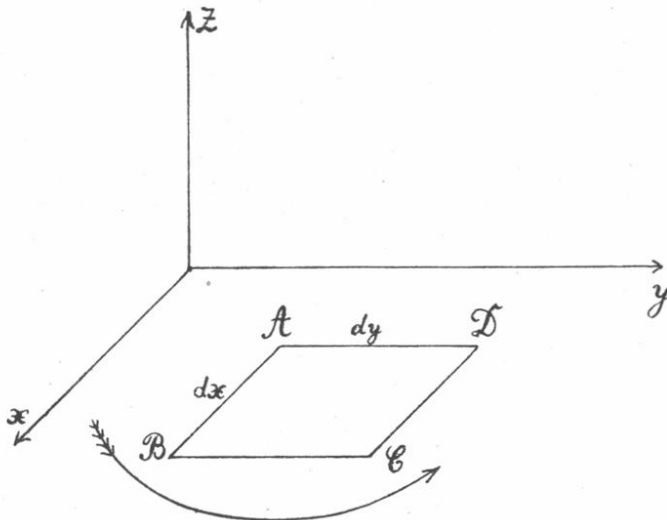


Fig. 98.

Das Integral $\oint \mathfrak{H}_s ds$, bezogen auf den Umfang des unendlich kleinen Rechtecks $ABCD$, wird also

$$\oint_{ABCD} \mathfrak{H}_s ds = \mathfrak{H}_x dx + \left(\mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy\right) dx - \mathfrak{H}_y dy,$$

oder

$$\oint_{ABCD} \mathfrak{H}_s ds = \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) dx dy.$$

Nach der Gleichung (b) erhalten wir also für das Flächenelement $dx dy$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right) dx dy = \frac{4\pi}{c} c_z dx dy.$$

Wir finden damit *das erste Tripel der Maxwellschen Gleichungen* in der allgemeinsten Form durch zyklische Vertauschung der Indizes

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{4\pi}{c} c_x = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \\ \frac{4\pi}{c} c_y = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{4\pi}{c} c_z = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Nach der Darstellung der Vektoranalysis haben wir (vgl. S. 36)

$$(d) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{c},$$

d. h. *der Wirbel der magnetischen Feldstärke ist der gesamten Stromstärke c proportional*. Führen wir für c seinen Wert ein, so erhalten wir die sogenannte *erste Hauptgleichung* in der allgemeinen Form

$$(e) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi j}{c} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}.$$

Handelt es sich nur um einen *Leitungsstrom*, sodaß $\partial \mathfrak{D} / \partial t = 0$ ist, so lauten die Gleichungen (e), indem j_x, j_y , und j_z die Komponenten der Stromdichte j sind,

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4\pi j_x}{c} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \\ \frac{4\pi j_y}{c} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \\ \frac{4\pi j_z}{c} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\}, \text{ oder } \frac{4\pi j}{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}.$$

Da ferner in dem betrachteten Falle $\operatorname{div} j = 0$ ist, so haben wir in anderer Darstellung

$$(g) \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0.$$

Wenn in einem gegebenen Systeme von Leitern die Verteilung der Ströme bekannt ist, und demnach j_x, j_y und j_z gegebene Funktionen von x, y und z sind, so können die magnetischen Kräfte an jedem Punkte des Raumes durch die Gleichungen (f) berechnet werden, sofern keine Magnete vorhanden sind.

§ 92. Elektromagnetische Wirkungen stationärer Ströme.

Wir gehen aus von den Gleichungen (f) des vorigen Paragraphen und betrachten ein System von Leitern in einem Raume konstanter Permeabilität. Die Stromverteilung im Systeme soll gegeben sein, d. h. j_x , j_y und j_z sind gegebene Funktionen des Ortes. Im folgenden handelt es sich um die Ermittlung der Feldstärke aus den für j_x , j_y und j_z gegebenen Werten, d. h. um die Bestimmung des magnetischen Feldes gegebener Stromleiter. Außerhalb der Stromleiter sind j_x , j_y , j_z gleich Null. Für den die Leiter umgebenden Raum kann die Feldstärke aus einem Potential Ψ abgeleitet werden.

Zur Integration der Gleichungen

$$(a) \quad \frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

führen wir drei neue Funktionen F , G und H von x , y und z ein, die sich später als die Komponenten eines *Vektorpotentials* $\mathfrak{P}$ ergeben und die nebst ihren Differentialquotienten nach den Koordinaten im ganzen Raume endlich und stetig sein sollen, da sonst $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$ und $\mathfrak{S}_z$ nicht endlich und stetig sein würden, was im homogenen Medium gelten muß. Wir setzen

$$(b) \quad \begin{cases} \mu \mathfrak{S}_x = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ \mu \mathfrak{S}_y = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \mu \mathfrak{S}_z = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\mu \mathfrak{S} = \mathfrak{P} = \text{rot } \mathfrak{P},$$

wenn mit $\mathfrak{P}$ das Vektorpotential bezeichnet wird, dessen Komponenten F , G und H sind. Dabei ist die Bedingung

$$\frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_z)}{\partial z} = 0$$

erfüllt, oder, weil μ konstant sein soll,

$$\text{div } \mathfrak{S} = 0.$$

Sind F , G und H eine Lösung der Gleichungen (a), so sind auch

$$F + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad G + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad H + \frac{\partial f}{\partial z}$$

eine weitere Lösung, wenn f eine endliche und stetige Funktion der Koordinaten ist. Zur eindeutigen Bestimmung von F , G und H setzen wir noch eine weitere Bedingung fest und drücken diese aus durch die Gleichung

$$(c) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Führen wir jetzt die durch (b) dargestellten Werte der Komponenten von $\mathfrak{S}$ in (a) ein, so folgt

$$\frac{4\pi\mu j_x}{c} = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z}.$$

Fügt man zur rechten Seite dieser Gleichung $\pm \partial^2 F / \partial x^2$ hinzu und berücksichtigt man die Gleichung (c), so folgt

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{4\pi\mu j_x}{c} = -\nabla^2 F, \\ \text{und auf demselben Wege} \\ \frac{4\pi\mu j_y}{c} = -\nabla^2 G, \quad \frac{4\pi\mu j_z}{c} = -\nabla^2 H. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten auch in den Teilen des Raumes, in denen keine Ströme fließen; nur ist für diese Teile

$$j_x = j_y = j_z = 0$$

zu setzen. Mit den Gleichungen (d) ist auch die Bedingung der stationären Strömung

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \operatorname{div} j = 0$$

erfüllt.

Man kann in den Gleichungen (d) die Größen $\mu j_x / c$, $\mu j_y / c$ und $\mu j_z / c$ als räumliche Dichten ϱ ansehen, und nach S. 225 und der Gleichung (d) auf S. 232 erhalten wir dann, wenn das Raumelement mit dv bezeichnet wird,

$$(e) \quad F = \frac{\mu}{c} \int \frac{j_x}{r} dv, \quad G = \frac{\mu}{c} \int \frac{j_y}{r} dv, \quad H = \frac{\mu}{c} \int \frac{j_z}{r} dv,$$

wobei die Integration über den ganzen Raum ausgedehnt werden muß, der von stromleitenden Körpern eingenommen wird.

Während bei dem skalaren Potential

$$\varphi = \int \frac{\varrho dv}{r}, \quad \nabla^2 \varphi = -4\pi \varrho$$

die Dichte ρ ein Skalar ist, haben die Größen j_x , j_y und j_z den Charakter eines Vektors, indem sie die Komponenten des Leitungsstromes sind. F , G , H können demnach als die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{P}$ betrachtet werden, indem

$$(f) \quad \mathfrak{P} = \frac{\mu}{c} \int \frac{j \, dv}{r}$$

ist.

Wir wollen jetzt die Gleichungen (e) anwenden auf einen sehr dünnen oder *linearen Leiter* mit dem Querschnitte q und der Stromstärke J . dl sei ein Längenelement dieses Leiters. Dann ist

$$j_x \cdot dv = j_x q \cdot dl = j \cdot q \cdot \cos(j, x) \cdot dl,$$

und ferner

$$j \cdot q \cdot \cos(j, x) \cdot dl = J \cdot \cos(dl, x) \cdot dl = J \cdot dx.$$

Die Projektionen des Leiterelementes dl auf die Koordinatenachsen sind dabei mit dx , dy und dz bezeichnet.

Das Vektorpotential des betrachteten linearen Stromleiters ist dann

$$(f') \quad \mathfrak{P}' = \frac{J\mu}{c} \int \frac{dl}{r}$$

und seine Komponenten sind

$$\mathfrak{P}'_x = \frac{J\mu}{c} \int \frac{dx}{r}, \quad \mathfrak{P}'_y = \frac{J\mu}{c} \int \frac{dy}{r}, \quad \mathfrak{P}'_z = \frac{J\mu}{c} \int \frac{dz}{r}.$$

Aus (b) folgt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{P}', \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathfrak{P}'.$$

Wir wollen die Wirkungen des Stromes im Vakuum oder in der Luft betrachten, indem wir im letzteren Falle mit großer Annäherung $\mu = 1$ setzen können. Aus (b) ergibt sich

$$(g) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_x = \frac{J}{c} \int \left(\frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) dl, \\ \mathfrak{H}_y = \frac{J}{c} \int \left(\frac{dx}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) dl, \\ \mathfrak{H}_z = \frac{J}{c} \int \left(\frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \frac{dx}{dl} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) dl. \end{array} \right.$$

α, β, γ seien die Richtungskosinus des Stromelementes dl .
Ferner haben wir

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, x) \quad \text{usw.}$$

Bezeichnen wir die Kosinus der Winkel, die r mit den Koordinatenachsen bildet, mit a, b und c , so finden wir

$$(h) \quad \mathfrak{S}_x = \frac{J}{c} \int \frac{dl}{r^2} (\beta c - \gamma b) \quad \text{usw.}$$

Damit sind die Komponenten der Feldstärke in einem Punkte, der vom Leiterelemente dl den Abstand r hat, durch ein Integral dargestellt, das über alle Elemente dl des linearen Leiters zu erstrecken ist.

Aus den Gleichungen (h) darf man entnehmen, daß das einzelne Leiterelement dl zu $\mathfrak{S}_x$ einen Beitrag gibt, der eben durch den Ausdruck unter dem Integral dargestellt wird. Diese Hypothese ergibt, wenn wir die vom Elemente dl herrührenden Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{S}'$ mit $\mathfrak{S}'_x, \mathfrak{S}'_y$ und $\mathfrak{S}'_z$ bezeichnen,

$$(i) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}'_x = \frac{J}{c} \frac{\beta c - \gamma b}{r^2} dl, \\ \mathfrak{S}'_y = \frac{J}{c} \frac{\gamma a - \alpha c}{r^2} dl, \\ \mathfrak{S}'_z = \frac{J}{c} \frac{\alpha b - \beta a}{r^2} dl. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach bzw. mit α, β und γ , so wird

$$\mathfrak{S}'_x \alpha + \mathfrak{S}'_y \beta + \mathfrak{S}'_z \gamma = 0.$$

Multipliziert man ferner die Gleichungen (i) der Reihe nach bzw. mit a, b und c , so folgt durch Addition

$$\mathfrak{S}'_x a + \mathfrak{S}'_y b + \mathfrak{S}'_z c = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, daß in einem Punkte P , der vom Leiterelemente dl den Abstand r hat, eine Feldstärke $\mathfrak{S}'$ wirksam ist, deren Richtung senkrecht zu der durch dl und r gelegten Ebene ist. Im übrigen kann die Richtung von $\mathfrak{S}'$ durch die Rechte-Hand-Regel (vgl. S. 328) ermittelt werden.

Aus (i) ergibt sich ferner die Beziehung

$$(k) \quad \mathfrak{S}' = \sqrt{\mathfrak{S}'_x{}^2 + \mathfrak{S}'_y{}^2 + \mathfrak{S}'_z{}^2} = \frac{J}{c} \cdot \frac{\sin(r, dl)}{r^2} \cdot dl = i \cdot \frac{\sin(r, dl)}{r^2} dl.$$

Das magnetische Feld einer geschlossenen Stromlinie kann dementsprechend dargestellt werden durch

$$(k') \quad \mathfrak{H} = \frac{J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Damit sind wir zu dem von Biot und Savart ausgesprochenen *Fernwirkungsgesetze* gekommen, das benutzt werden kann, um die von einem beliebigen Systeme linearer elektrischer Ströme herrührende magnetische Kraft zu bestimmen, wenn die Richtung, Stärke und Lage der Ströme im Raume gegeben sind. Das Biot und Savartsche Gesetz läßt sich direkt experimentell nicht prüfen, weil *Elementarströme*, d. h. unendlich kurze, von Strömen durchflossene Leiterelemente nicht herstellbar sind. Jedoch haben die Folgerungen des Gesetzes auf die Wirkungen beliebiger Stromleiter sich überall durch den Versuch bestätigen lassen.

§ 93. Das magnetische Potential linearer Ströme in Luft.

Wir gehen aus von den Gleichungen (g) auf Seite. 337

$$\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c} \int \left(\frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) dl \text{ usw.}$$

Einen geschlossenen Stromleiter betrachten wir als die Randkurve einer nicht geschlossenen Fläche f .

Durch Anwendung des Stokesschen Satzes (vgl. S. 36 Gleichung (g)) wollen wir dieses Integral umformen. Der Satz von Stokes lautet

$$\int \left(X \frac{dx}{dl} + Y \frac{dy}{dl} + Z \frac{dz}{dl} \right) dl = \int \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) n \right] df.$$

l , m und n sind die Richtungskosinus der Flächennormale gegen die Koordinatenachsen.

Wir setzen

$$X = 0, \quad Y = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}$$

und erhalten dann

$$\mathfrak{S}_x = \frac{J}{c} \int \left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos(nx) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(ny) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(nz) \right] df.$$

x, y und z sind dabei die Koordinaten eines Punktes der Fläche f . Da aber

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0$$

ist, so finden wir

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{J}{c} \int df \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \cos(nx) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(ny) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(nz) \right)$$

oder

$$\mathfrak{S}_x = -\frac{J}{c} \frac{\partial}{\partial x} \int df \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(nz) \right).$$

Demnach ergibt sich

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_x = -\frac{J}{c} \frac{\partial}{\partial x} \int df \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \\ \mathfrak{S}_y = -\frac{J}{c} \frac{\partial}{\partial y} \int df \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \\ \mathfrak{S}_z = -\frac{J}{c} \frac{\partial}{\partial z} \int df \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \end{array} \right.$$

Also kann die Feldstärke $\mathfrak{S}$ für jeden Punkt außerhalb des Stromleiters aus einem Potential

$$(b) \quad \psi = \frac{J}{c} \int df \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \text{const.}$$

hergeleitet werden, indem

$$\mathfrak{H}_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ usw.}$$

ist. Das Integral in (a) und (b) ist dabei über eine beliebige von dem Stromleiter als Randkurve begrenzte Fläche zu erstrecken.

Hat der Punkt P (Fig. 99) die Koordinaten ξ, η, ζ , so ist

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

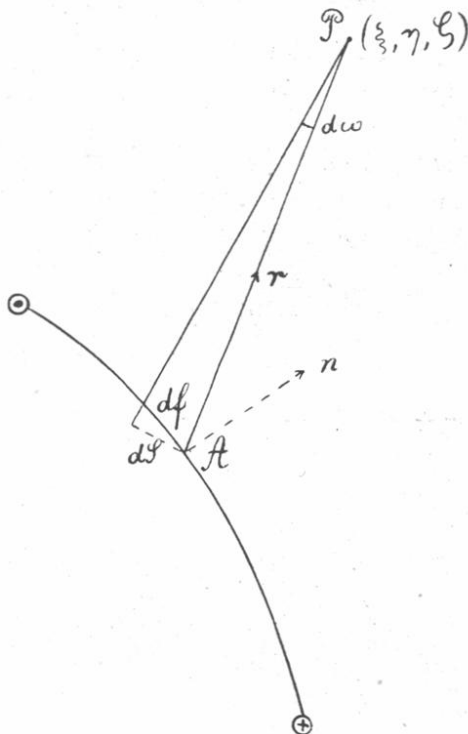


Fig. 99.

Da die Reihenfolge der Differentiationen und Integrationen gleichgültig ist, so haben wir

$$\nabla^2 \Psi = \frac{J}{c} \nabla^2 \int df \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{J}{c} \int df \frac{\partial}{\partial n} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right).$$

Nun ist aber

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

also ist die Gleichung

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = 0$$

erfüllt.

Ferner ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = +\frac{1}{r^2} \cos(n, r),$$

wenn wir als positive Richtung von r diejenige vom Punkte A der Fläche nach P nehmen.

Da aber

$$df \cdot \cos(n, r) = dS \quad \text{und} \quad dS = r^2 d\omega$$

ist, wenn man mit $d\omega$ den körperlichen Winkel bezeichnet, unter welchem df von P aus gesehen wird, so erhalten wir

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df = \int d\omega,$$

und aus (b)

$$(c) \quad \Psi = \pm \frac{J}{c} \int d\omega + \text{const.} = \pm i \int d\omega + \text{const.},$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r mit n einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet.

Für das Potential Ψ eines linearen geschlossenen Stromleiters finden wir also den Ausdruck

$$(c') \quad \Psi = \pm \frac{J}{c} \omega + \text{const.}$$

Vergleichen wir hiermit die Formel für das Potential V einer magnetischen Doppelfläche (s. S. 319)

$$V = v \omega,$$

so finden wir das Resultat: *die magnetische Wirkung eines geschlossenen linearen Stromleiters ist der Wirkung einer beliebig gekrümmten magnetischen Doppelfläche gleichwertig, die von dem Leiter des Stromes begrenzt wird. Das Moment v der Doppelfläche muß überall konstant und gleich J/c sein.*

Auf der Achse eines kreisförmigen Leiters (Fig. 100), die zugleich die x -Achse des Koordinatensystems ist, liegt der Punkt P , für den die Feldstärke bestimmt werden soll. Die scheinbare Größe des Leiters von P aus ist durch

$$\int d\omega = 2\pi \left(1 - \frac{x}{r}\right)$$

gegeben. Wir haben also

$$\mathfrak{H}_x = \mp \frac{2\pi J}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{x}{r}\right) = \pm \frac{2\pi J}{c} \frac{R^2}{r^3}.$$

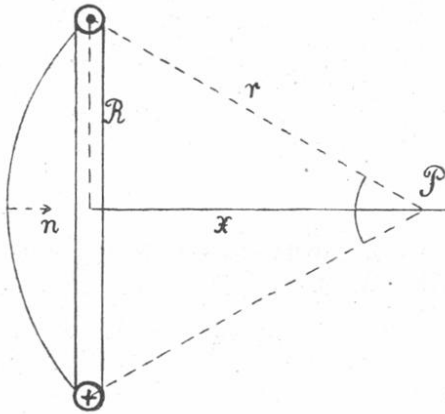


Fig. 100.

Im Kreismittelpunkte ist $\mathfrak{H}_x$, für das wir $\mathfrak{H}$ setzen wollen,

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi J}{c} \frac{1}{R} = \frac{2\pi i}{R}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich auch die *Definition der Einheit der Stromstärke im absoluten elektromagnetischen Maßsystem*. Der Strom hat dann die Stärke Eins, wenn er im Mittelpunkte eines von ihm durchflossenen Drahtkreises mit dem Radius Eins die Feldstärke 2π hervorbringt.

Steht der kreisförmige Leiter vertikal und im magnetischen Meridian, so ist sein Feld senkrecht zum Meridian. H sei die Horizontalintensität des Erdmagnetismus. H und $\mathfrak{H}$ ergeben im Mittelpunkte des Leiters die Resultante R , die mit dem Meridian den Winkel ϑ bildet. Dann ist $H/R = \cos \vartheta$ und $\mathfrak{H}/R = \sin \vartheta$, also $\mathfrak{H}/H = \tan \vartheta$ und

$$\tan \vartheta = \frac{2\pi i}{RH}.$$

Befindet sich im Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters eine sehr kleine Magnetonadel, die um eine vertikale Achse drehbar

ist, so bewirkt der Strom i die Ablenkung ϑ der Nadel aus dem Meridian (*Tangentenbussole*).

Nach dieser Anwendung kehren wir nochmals zur Gleichung (c) zurück. Bewegt sich der Punkt P (Fig. 99) auf der Seite der positiven Normale unendlich nahe an das Flächenelement df heran, so wird dieses von P aus unter dem räumlichen Winkel 2π gesehen. Rückt P durch die Fläche hindurch, so erscheint nunmehr das Flächenelement unter dem Winkel -2π . Demnach erleidet $\int d\omega$, und also auch das Potential, einen Sprung um -4π , wenn sich der Punkt P von der Seite der positiven Normalen nach der Seite der negativen Normalen durch die Fläche hindurch bewegt.

Wir betrachten einen ebenen kreisförmigen Leiter (Fig. 101). Die Fläche f sei die vom Leiter begrenzte ebene Kreisfläche.

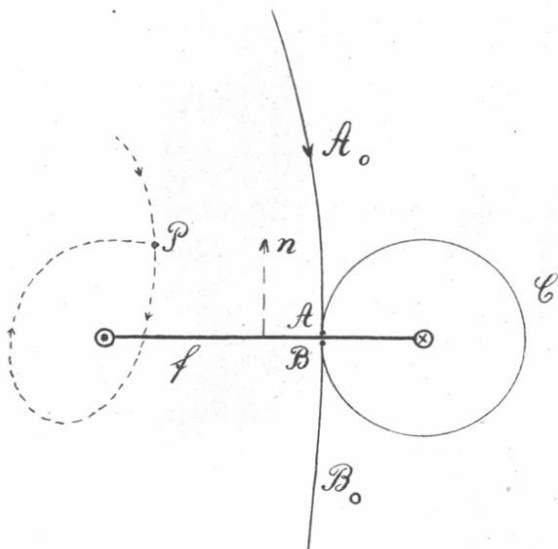


Fig. 101.

n ist bei der festgesetzten Stromrichtung die positive Richtung der Normalen. Wird ein positiver Einheitspol aus unendlicher Ferne über A_0 nach A übergeführt, so ist nach der Gleichung (c) gegen die magnetischen Kräfte des Feldes die Arbeit $2\pi J/c$ zu leisten. Wird dagegen ein positiver Einheitspol aus unendlicher Ferne über B_0 , also in der Richtung $B_0 B$,

nach B bewegt, so ist von außen her gegen die magnetischen Kräfte des Feldes die Arbeit $-2\pi J/c$ zu leisten. A und B liegen unendlich nahe beieinander zu beiden Seiten der Kreisfläche. Wird der Einheitspol von einem sehr weit entfernten Punkte über $A_0 - A - B - B_0$ wieder sehr weit vom kreisförmigen Leiter bewegt, so ist bei dieser Bewegung von außen entgegen den Kräften des Feldes die Arbeit $4\pi J/c$ zu leisten. Würde der Einheitspol auf einer fast geschlossenen Kurve von B über C nach A bewegt, so wäre auch hierbei entgegen den Kräften des Feldes die Arbeit $+4\pi J/c$ zu leisten. Ist das Potential im Punkte P gleich Ψ , und bewegt sich der Einheitspol von P aus durch die Kreisfläche einmal hindurchgehend nach P zurück, so ist das Potential in P gleich $\Psi + 4\pi J/c$. Das Potential ist demnach eine mehrdeutige Funktion. Sind mehrere Stromkreise vorhanden, und bewegt sich ein positiver Einheitspol von einem Punkte P auf einer Bahn, die alle Ströme $J_1, J_2 \dots$ einmal umschlingt, so ist nach der Rückkehr zum Punkte P von außen her die Arbeit $4\pi/c \cdot \sum J$ geleistet. Dabei sind diejenigen Ströme positiv zu rechnen, durch deren Fläche sich der Einheitspol entgegen der positiven Richtung der Normalen n bewegt.

§ 94. Der magnetische Kreis.

Ein Ring (Fig. 102) sei mit dicht zusammenliegenden Windungen eines Leiters bewickelt. R sei der mittlere Radius des Ringes, dessen Querschnitt q sein soll. Die Zahl der Windungen sei n . Die mittlere Länge des Ringes ist $l = 2R\pi$. Wir wollen zunächst annehmen, daß der Querschnitt des Ringes klein sei. Durch die Windungen fließe ein elektrischer Strom, dessen Stärke im elektromagnetischen Maße gleich i sei. Bewegt sich ein Einheitspol von P aus in der Richtung des Pfeiles durch das Innere der Windungen nach P zurück, so umschlingt die Bahn n Ströme, und die bei dieser Bewegung von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ geleistete Arbeit ist

$$\mathfrak{H} \cdot 2\pi R = 4\pi n i.$$

Wir finden also

$$(a) \quad \mathfrak{H} = \frac{2ni}{R} = \frac{4\pi ni}{l}.$$

Außerhalb des Ringes ist $\mathfrak{B}$ gleich Null. Alle Induktionslinien und Kraftlinien verlaufen im Inneren des Ringes. Besteht der Ring aus einem Material, dessen Permeabilität gleich μ ist, so ist die magnetische Induktion

$$(b) \quad \mathfrak{B} = \mu \cdot \frac{4\pi n i}{l}.$$

Der vom Strome umflossene Ring stellt einen *vollkommenen magnetischen Kreis* oder ein *Toroid* dar. Der durch den Strom magnetisierte Ring ist ein *polloser Magnet*.

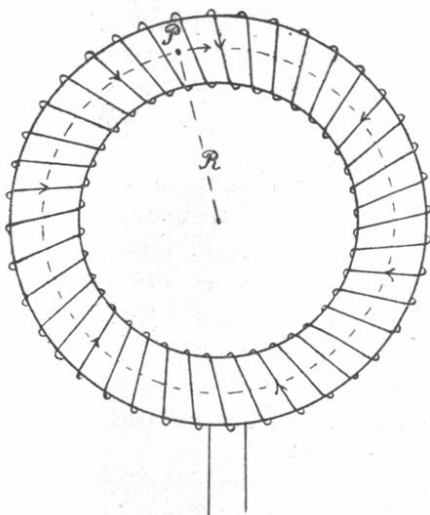


Fig. 102.

Ist der Ringquerschnitt klein gegen die Dimensionen des Ringes, so dürfen wir eine gleichmäßige Verteilung der $\mathfrak{B}$ Linien auf dem Ringquerschnitte q annehmen. Der Induktionsfluß im Ringe ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot q$$

und also

$$(c) \quad \mathfrak{B} = \mu q \cdot \frac{4\pi n i}{l} = \frac{4\pi n i}{\frac{l}{\mu q}}.$$

$4\pi n i$ bezeichnet man als die *magnetomotorische Kraft*. $l/\mu q$ ist der *magnetische Widerstand* des Kreises, indem die Permeabilität μ als *magnetische Leitfähigkeit* angesehen wird. Die Gleichung (c)

stellt das Ohmsche Gesetz für den Magnetismus eines vollkommenen Kreises dar.

Der Ring möge jetzt einen sehr engen Schlitz (Fig. 103) erhalten, dessen Breite gleich l sei. Die mittlere Länge des vom geschlossenen Ringe übrig gebliebenen Teiles sei l_1 . Ist

der Schlitz sehr eng, so werden auch jetzt sämtliche $\mathfrak{H}$ -Linien im Querschnitt q bleiben und nur sehr wenige gehen außerhalb dieses Querschnittes von dem einen Ende zum anderen über. Die sogenannte *magnetische Streuung* wird um so größer, je größer die Breite l des Schlitzes und je kleiner der Querschnitt q ist. Der Spalt sei mit Luft erfüllt, deren Permeabilität mit μ bezeichnet werden soll; μ_1 sei

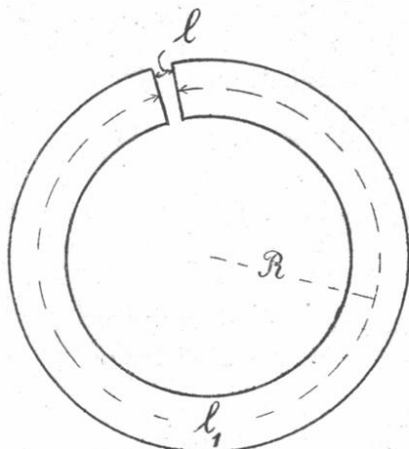


Fig. 103.

die Permeabilität des übrigen Teiles. Da die Divergenz der Induktion $\mathfrak{B}$ gleich Null ist, und nirgend im Kreise $\mathfrak{B}$ -Linien entstehen oder endigen, so ist

$$(d) \quad \mathfrak{B}_1 = \mu_1 \mathfrak{H}_1 = \mu \mathfrak{H} = \mathfrak{B},$$

wenn $\mathfrak{H}$ die Feldstärke im Luftspalte und $\mathfrak{H}_1$ die Feldstärke im übrigen Teile des Kreises ist.

Auch hier haben wir näherungsweise

$$(e) \quad \mathfrak{H} l + \mathfrak{H}_1 l_1 = 4 \pi n i,$$

wobei

$$l + l_1 = 2 R \pi$$

ist. Aus (e) und (d) ergibt sich

$$\mathfrak{H}_1 \mu_1 \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l}{\mu} \right) = 4 \pi n i.$$

Für den Induktionsfluß $\mathfrak{B}$ finden wir also den Ausdruck

$$(f) \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_1 \mu_1 q = \frac{4 \pi n i}{\frac{l}{\mu q} + \frac{l_1}{\mu_1 q}}.$$

Die beiden Glieder im Nenner des letzten Bruches stellen die *magnetischen Widerstände* der beiden Teile des magnetischen Kreises dar.

Wird die Stromstärke i für praktische Berechnungen in Ampere ausgedrückt, so ist zu beachten, daß

1 Ampere = $\frac{1}{10}$ der absoluten elektromagnetischen Einheit der Stromstärke ist.

Die Gleichung (f) lautet dann

$$\mathfrak{B} = \frac{0,4\pi n i}{\frac{l}{\mu q} + \frac{l_1}{\mu_1 q}}.$$

ni stellt die magnetisierenden *Amperewindungen* dar.

Die Gleichung (e) kann auch in folgender Form geschrieben werden

$$\mathfrak{H}_1 (l_1 + l) + (\mu_1 - 1) \mathfrak{H}_1 l = 4\pi n i,$$

wenn die Permeabilität μ des Spaltes gleich 1 gesetzt wird. Ferner ist

$$(g) \quad \mathfrak{H}_1 = \frac{4\pi n i}{l_1 + l} - \frac{l}{l_1 + l} (\mu_1 - 1) \mathfrak{H}_1.$$

Das erste Glied stellt die Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ dar, die im Inneren der Windungen vorhanden war, ehe sich der geschlitzte Ring in dem von den Windungen umschlossenen Raume befand. Die Feldstärke $\mathfrak{H}_1$ im geschlitzten Ringe ist kleiner als $\mathfrak{H}_0$, wenn $\mu_1 > 1$ ist. In den paramagnetischen und ferromagnetischen Körpern wird also infolge einer Entmagnetisierung die Feldstärke $\mathfrak{H}_1$ um den Betrag

$$\frac{l}{l_1 + l} (\mu_1 - 1) \mathfrak{H}_1$$

kleiner als das ursprüngliche Feld $\mathfrak{H}_0$.

Wir bezeichnen als *Entmagnetisierungsfaktor*

$$P = \frac{4\pi l}{l_1 + l}.$$

P ist um so größer, je größer l im Vergleiche zu $l_1 + l = 2R\pi$ ist. Die Gleichung (g) lautet dann

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0 - \frac{(\mu_1 - 1) P \mathfrak{H}_1}{4\pi}.$$

Führen wir noch die magnetische Suszeptibilität κ_1 ein, so ist

$$(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \quad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0 - \kappa_1 P \mathfrak{H}_1 \\ \mathfrak{H}_1 = \frac{\mathfrak{H}_0}{1 + \kappa_1 P}. \end{array} \right.$$

$\kappa_1 \mathfrak{H}_1$ ist nach S. 304 die Magnetisierung $\mathfrak{M}_1$ des geschlitzten Körpers. Also erhalten wir auch

$$(i) \quad \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_0 - P \mathfrak{M}_1.$$

Nimmt κ_1 sehr große Werte an, wie bei den ferromagnetischen Körpern, so wird $\mathfrak{H}_1$ klein im Vergleiche mit $\mathfrak{H}_0$.

Die Gleichung (c) kann auch leicht auf den Fall eines *Schlußjoches* (Fig. 104) angewandt werden, bei dem die Enden eines zylindrischen Stabes s durch ein Joch $\mathcal{J}$ aus weichem

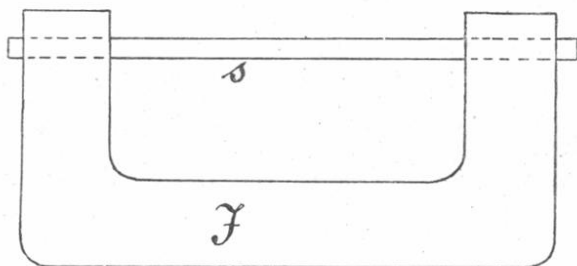


Fig. 104.

Eisen mit großem Querschnitte verbunden sind. Der Eisenstab s , dessen magnetische Induktion und Permeabilität für verschiedene magnetisierende Kräfte oder auch Amperewindungen festgestellt werden soll, befindet sich in einer Spule, durch deren Windungen der magnetisierende Strom fließt. Außerdem sind um den Stab einige sekundäre Windungen gelegt, die mit einem Schwingungsgalvanometer in Verbindung stehen. Jede Änderung des magnetisierenden Stromes bedingt eine Änderung des Induktionsflusses $\mathfrak{B}$ im Eisenkern und damit die Entstehung eines Stromstoßes, dessen Elektrizitätsmenge Q durch das Galvanometer gemessen wird. Aus der Elektrizitätsmenge Q ist $\mathfrak{B}$ zu bestimmen. Sind l , q und μ bzw. Länge, Querschnitt und Permeabilität des Prüfstabes, und setzen wir voraus, daß der magnetische Widerstand des Schlußjoches seiner Kleinheit wegen zu vernachlässigen ist, so haben wir nach (f)

$$\beta = \frac{4\pi n i}{\frac{l}{\mu q}},$$

woraus dann μ ermittelt werden kann.

Die Gleichung (f) kann auch leicht auf den Fall erweitert werden, daß eine magnetische Streuung stattfindet, d. h. der Induktionsfluß an den Stellen, wo Luftspalte im Eisen sich befinden, seitlich heraustritt und die Induktionslinien auch außerhalb des Luftspaltes von dem einen Ende des Ringes zum anderen übergehen. Derartige magnetische Kreise liegen bei der Berechnung des Feldmagneten der elektrischen Maschinen vor. Der Streuungsfaktor kann mit dem ballistischen Galvanometer ermittelt werden, indem man nacheinander um die verschiedenen Teile des magnetischen Kreises einige an das Galvanometer geschlossene sekundäre Windungen legt und für verschiedene magnetisierende Amperewindungen das Verhältnis der Induktionsflüsse an den betrachteten Stellen des magnetischen Kreises feststellt. Auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises kann dann die Gleichung (c) angewandt werden, indem man z. B. bei der elektrischen Maschine die für den Anker, die Luftspalte und den Feldmagneten erforderlichen Amperewindungen gesondert berechnet und die letzteren addiert.

(§ 95.) Das magnetische Feld eines zylindrischen Leiters.

Wir betrachten einen Raum, in dem μ konstant ist und sich ein sehr langer und geradliniger Leiter von durchweg konstantem Querschnitt befindet. Der Leiter sei zylindrisch und sein Querschnitt habe den Radius R . Wir wollen ferner voraussetzen, daß der Leiter in der z -Achse des Koordinatensystems liege, und daß $j_x = j_y = 0$ ist. Nach den Gleichungen (b) auf S. 335 und (e) auf S. 336 haben wir dann

$$(a) \quad \mu \mathfrak{H}_x = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \mu \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \mu \mathfrak{H}_z = 0;$$

$$(b) \quad H = \frac{\mu}{c} \int \frac{j_z \cdot dv}{r}.$$

Auf einer Zylinderfläche, deren Achse mit der z -Achse zusammenfällt, ist H konstant; eine solche Fläche ist also eine Niveauläche für das Vektorpotential H . Wir wollen einen

Schnitt der xy -Ebene mit der Zylinderfläche betrachten (Fig. 105) und in der Schnittkurve von einem Punkte P dieser Kurve zu dem unendlich benachbarten Punkte P_1 derselben Kurve übergehen. Dabei ist

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy = 0,$$

indem dx und dy die Projektionen des Linienelementes PP_1 auf die x - und y -Achse sind. Dann erhalten wir aus (a)

$$\mathfrak{H}_x : \mathfrak{H}_y = dx : dy,$$

d. h. die Richtung der Kraftlinien im Punkte P

fällt mit PP_1 zusammen. Demnach sind die magnetischen Kraftlinien durch die Schnittkurven gegeben, welche die mit der z -Achse bzw. dem geradlinigen Leiter coaxialen Zylinderflächen mit einer Schar Ebenen bilden, die der xy -Ebene parallel sind. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ergibt sich aus

$$(c) \quad \mathfrak{H} = \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Richtung von $\mathfrak{H}$ erhalten wir nach der auf S. 328 gegebenen Regel.

Die Quadratwurzel auf der rechten Seite der Gleichung (c) stellt den Differentialquotienten $\partial H / \partial n$ dar, der nach der Richtung der Normalen der Niveauläche genommen wird, für die H konstant ist. Also ist

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial r} = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$$

und demnach schreiben wir

$$(d) \quad \mathfrak{H} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Diese Gleichung ergibt sich übrigens sogleich aus den Gleichungen (a), wenn wir einen Punkt betrachten, in dem die Kraftlinie die x - oder die y -Achse durchschneidet. Die Feld-

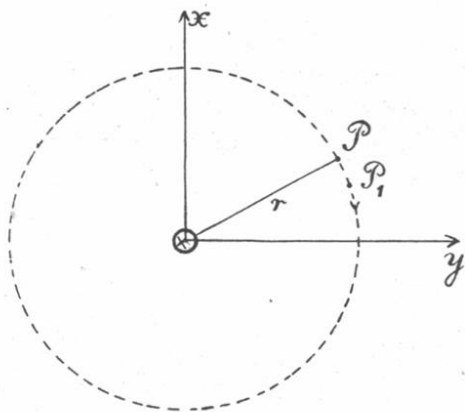


Fig. 105.

stärke $\mathfrak{H}$ wird also als negativer Gradient des Vektorpotentials H in der Richtung des Radius r dargestellt.

Wir wollen jetzt einen geradlinigen zylindrischen Leiter betrachten, dessen Achse mit der z -Achse des Koordinatensystems zusammenfällt. Im betrachteten Raume sei die Stromdichte j_z in konzentrischen Schichten konstant, also nur abhängig von der Entfernung r des betrachteten Punktes von der z -Achse. Auch hier ist $j_x = j_y = 0$. Dementsprechend sind auch F und G gleich Null. Wir wollen dabei voraussetzen, daß im ganzen Raume μ konstant ist. Nach der Gleichung (d) auf S. 336 ist dann

$$(e) \quad \nabla^2 H = - \frac{4\pi\mu j_z}{c}.$$

H ist nur eine Funktion von r , d. h. des Abstandes des betrachteten Punktes von der z -Achse. Auf eine Funktion H , die durch die Differentialgleichung (e) dargestellt ist, können wir den Gauss'schen Satz (s. Gleichung (c'), S. 231) anwenden, d. h.

$$\int \frac{\partial H}{\partial n} df = - \frac{4\pi\mu}{c} \int j_z \cdot dv$$

setzen. Das Integral auf der linken Seite bezieht sich auf die Oberfläche eines geschlossenen Raumes, während das Integral auf der rechten Seite über alle Elemente dieses Raumes zu erstrecken ist. Die letzte Gleichung wenden wir an auf einen ringförmigen Raum, der von zwei zur xy -Ebene parallelen Ebenen, die den Abstand dz voneinander haben, und von zwei unendlich nahe benachbarten Zylinderflächen eingeschlossen wird, die den Radien r und $r + dr$ zugehören und deren Achse in der z -Achse liegt. Dann ist

$$\int \frac{\partial H}{\partial n} df$$

für die innere Seite des Ringes dargestellt durch

$$\frac{dH}{dr} 2\pi r dz,$$

und für die äußere Seite des Ringes durch

$$\left\{ \frac{dH}{dr} \cdot r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dH}{dr} \cdot r \right) dr \right\} 2\pi dz.$$

Also wird

$$\left\{ \frac{dH}{dr} \cdot r + \frac{d}{dr} \left(\frac{dH}{dr} \cdot r \right) dr \right\} 2\pi dz - \frac{dH}{dr} 2\pi r dz \\ = - \frac{4\pi\mu}{c} j_z \cdot 2\pi r \cdot dr dz,$$

oder

$$(f) \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{dH}{dr} r \right) = - \frac{4\pi\mu j_z}{c} r.$$

Damit haben wir an Stelle der Differentialgleichung (e) eine andere erhalten, in der nur die unabhängige Veränderliche r vorkommt.

Wir wollen zunächst annehmen, daß der Leiter ein Vollzylinder mit dem Radius R ist, auf dessen Querschnitte j_z überall konstant ist. Die Stromstärke ist dann $R^2 \pi j_z = J$. Für den Leiter selbst erhalten wir durch Integration von (f)

$$H_i = C' \log r - \frac{\pi\mu j_z r^2}{c} + C_1.$$

Für die Punkte im Inneren des Leiters muß $C' = 0$ sein, weil sonst für $r = 0$ die Funktion H und die magnetische Kraft unendlich groß würden. Wir finden also

$$H_i = - \frac{\pi\mu j_z r^2}{c} + C_1.$$

In den Punkten außerhalb des Leiters ist $j_z = 0$, und für diese haben wir nach (f)

$$H_a = C \cdot \log r + C_2.$$

An der Oberfläche des Leiters ist H stetig, indem dort $H_a = H_i$ ist. Wir erhalten daher die Bedingungsgleichung

$$- \frac{J\mu}{c} + C_1 = C \log R + C_2.$$

Ferner geht an der Oberfläche des Leiters dH_i/dr stetig über in dH_a/dr , sodaß

$$- \frac{2\pi\mu j_z R}{c} = \frac{C}{R}$$

ist. Also wird

$$C = - \frac{2\mu J}{c}$$

und

$$C_2 = C_1 - \frac{J\mu}{c} + \frac{2J\mu}{c} \log R.$$

Somit finden wir

$$H_i = - \frac{\pi \mu j_z r^2}{c} + C_1$$

und

$$H_a = \frac{2\mu J}{c} \log \frac{R}{r} - \frac{\mu J}{c} + C_1.$$

Im Abstände r von der Achse des Leiters, wobei $r < R$ sein soll, erhalten wir für die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H}_i = - \frac{1}{\mu} \frac{dH_i}{dr} = \frac{2\pi j_z r}{c} = \frac{2\pi j_z r R^2}{R^2 c} = \frac{2Jr}{R^2 c}.$$

Für die Punkte außerhalb des Leiters ist

$$\mathfrak{H}_a = - \frac{1}{\mu} \frac{dH_a}{dr} = \frac{2J}{cr}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (a) auf S. 329.

Wir betrachten jetzt einen *hohlen zylindrischen Leiter*, dessen innerer Radius R_2 und dessen äußerer Radius R_1 ist. Für die im Hohlraume des Leiters liegenden Punkte, für die $j_z = 0$ ist, haben wir als Integral der Gleichung (f)

$$H = c \log r + c_0.$$

Da aber für $r = 0$ die Funktion H und demnach auch die magnetische Kraft unendlich groß sein würde, so ist $c = 0$ und also H konstant. Im Hohlraume des Leiters ist die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ gleich Null.

Im Inneren des Leiters haben wir

$$H_i = c_1 \log r - \frac{\pi \mu j_z r^2}{c} + c_2,$$

und außerhalb des Leiters

$$H_a = c' \log r + c''.$$

Da $H_i = H_a$ sein muß für $r = R_1$, so folgt

$$c_1 \log R_1 - \frac{\pi \mu j_z R_1^2}{c} + c_2 = c' \log R_1 + c''.$$

Auch geht dort dH_i/dr stetig über in dH_a/dr , sodaß

$$\frac{c_1}{R_1} - \frac{2\pi \mu j_z R_1}{c} = \frac{c'}{R_1}; \quad c_1 - c' = \frac{2\pi \mu j_z R_1^2}{c}.$$

An der inneren Fläche ist ebenfalls dH/dr stetig, indem

$$0 = \frac{c_1}{R_2} - \frac{2\pi \mu j_z}{c} R_2; \quad c_1 = \frac{2\pi \mu j_z R_2^2}{c}$$

ist. Die beiden letzten Gleichungen ergeben also

$$c' = -\frac{2\pi\mu j_z}{c}(R_1^2 - R_2^2) = -\frac{2\mu J}{c},$$

wenn wir $(R_1^2 - R_2^2)\pi j_z = J$ setzen. Also ergibt sich

$$H_a = -\frac{2\mu J}{c} \log r + c'',$$

d. h. der gleichmäßig vom Strome durchflossene Hohlzylinder wirkt auf äußere Punkte so, als ob der ganze Strom in der Achse des Zylinders fließen würde.

Ferner ist

$$H_i = \frac{2\pi\mu j_z R_2^2}{c} \log r - \frac{\pi\mu j_z r^2}{c} + c_2.$$

Auch an der Innenseite des Leiters ist H stetig. Dies ergibt eine weitere Gleichung zur Bestimmung der Konstanten. Wir finden für den Raum außerhalb des Leiters

$$\mathfrak{H}_a = -\frac{1}{\mu} \frac{dH_a}{dr} = \frac{2J}{cr},$$

und für den vom Leiter eingenommenen Raum

$$\mathfrak{H}_i = -\frac{1}{\mu} \frac{dH_i}{dr} = \frac{2\pi j_z}{c} \cdot \frac{r^2 - R_2^2}{r}.$$

$\mathfrak{H}_i$ ist am größten an der Außenfläche des Leiters, an der inneren Fläche ist $\mathfrak{H}_i = 0$.

§ 96. Die Wechselwirkung zweier geschlossener linearer Stromkreise.

Wir betrachten zwei geschlossene lineare Stromleiter, deren Stromstärken J_1 und J_2 sind. Ersetzen wir den Stromleiter 2 durch eine magnetische Lamelle, deren Moment $v_2 = J_2/c$ ist, so sind die Komponenten der Feldstärke nach S. 322 und Gleichung (d)

$$(a) \quad \mathfrak{H}_x = v_2 \int \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} \frac{dy_2}{ds_2} - \frac{\partial r^{-1}}{\partial y_2} \frac{dx_2}{ds_2} \right) ds_2 \text{ usw.}$$

wenn ds_2 ein Element der Randkurve der magnetischen Schale ist, und dx_2 , dy_2 , dz_2 die rechtwinkligen Komponenten von ds_2 sind.

Auch durch den Leiter 1 sei eine magnetische Lamelle begrenzt, deren Moment $v_1 = J_1/c$ ist. Ein Punkt dieser Lamelle habe von der anderen Lamelle den Abstand r und habe die rechtwinkligen Koordinaten x_1 , y_1 , z_1 . Dann ist

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Wir haben demnach

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} = -\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r^{-1}}{\partial y_2} = -\frac{\partial r^{-1}}{\partial y_1}.$$

In einem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Lamelle des Stromleiters 1 ist also nach (a) die vom zweiten Stromleiter herrührende Feldstärke

$$(a') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_x = \nu_2 \int \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial y_1} \frac{dx_2}{ds_2} - \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1} \frac{dy_2}{ds_2} \right) ds_2, \\ \text{oder} \\ \mathfrak{H}_x = \nu_2 \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dx_2}{r} - \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dy_2}{r} \right) \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Demnach erhalten wir für die Komponenten der magnetischen Induktion im Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, herrührend vom Stromleiter 2,

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_{2,x} = \frac{J_2}{c} \mu \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dx_2}{r} - \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dy_2}{r} \right), \\ \mathfrak{B}_{2,y} = \frac{J_2}{c} \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dx_2}{r} - \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dx_2}{r} \right), \\ \mathfrak{B}_{2,z} = \frac{J_2}{c} \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{dy_2}{r} - \frac{\partial}{\partial y_1} \int \frac{dx_2}{r} \right). \end{array} \right.$$

Man kann jetzt einen Vektor

$$(c) \quad \mathfrak{P}'_2 = \frac{J_2 \mu}{c} \int \frac{d\mathfrak{s}_2}{r}$$

eingeführen, indem die Integration auf der rechten Seite über alle Elemente des Stromleiters 2 zu erstrecken ist. Wir bezeichnen in Übereinstimmung mit der Gleichung (f') auf S. 337 $\mathfrak{P}'_2$ als das *Vektorpotential des linearen Stromleiters 2* in einem Punkte, der von den Leiterelementen ds_2 den Abstand r hat. Wir setzen voraus, daß im ganzen Raume μ konstant ist. Die Komponenten dieses Vektors sind dann

$$\mathfrak{P}'_{2,x} = \frac{J_2 \mu}{c} \int \frac{ds_2 \cdot \cos(ds_2, x)}{r} = \frac{J_2 \mu}{c} \int \frac{dx_2}{r} \quad \text{usw.}$$

Da J_2 konstant sein soll, so finden wir aus (b)

$$\mathfrak{B}_{2,x} = \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,z}}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,y}}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{B}_{2,y} = \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,x}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,z}}{\partial x_1},$$

$$\mathfrak{B}_{2,z} = \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,y}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathfrak{P}'_{2,x}}{\partial y_1}.$$

Wir können also schreiben

$$(d) \quad \mathfrak{B}_2 = \text{rot } \mathfrak{P}'_2.$$

Nach dem Satze von Stokes (s. S. 37) ist aber

$$(e) \quad \int \mathfrak{P}_2' d\mathfrak{s}_1 = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{P}_2' df_1 = \int \mathfrak{B}_{2,n} df_1,$$

wobei das erste Integral sich auf alle Elemente des Stromleiters 1 bezieht, und die beiden anderen Integrale über alle Flächenelemente der zu diesem Leiter 1 gehörigen magnetischen Doppelfläche zu erstrecken sind. Ferner ist

$$(f) \quad \int \mathfrak{P}_2' d\mathfrak{s}_1 = \int \mathfrak{P}_{2,s_1}' ds_1 = \frac{\mu J_2}{c} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r},$$

wo $\mathfrak{P}_{2,s_1}'$ die Komponente des Vektorpotentials $\mathfrak{P}_2'$ des zweiten Leiters nach ds_1 ist. Also wird

$$(g) \quad \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{P}_2' df_1 = \int \mathfrak{B}_{2,n} df_1 = \frac{\mu J_2}{c} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}.$$

Dabei bezieht sich im letzten Gliede dieser Gleichung das erste Integral auf alle Elemente ds_1 des ersten Leiters und das zweite auf alle Elemente ds_2 des zweiten Leiters. r ist der Abstand der Elemente ds_1 und ds_2 voneinander. $\int \mathfrak{B}_{2,n} df_1$ ist der vom ersten Leiter umschlossene Induktionsfluß, den der im zweiten Leiter fließende Strom J_2 hervorbringt. Die Größe

$$\mu \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r} = \mu \iint \frac{(d\mathfrak{s}_1, d\mathfrak{s}_2)}{r}$$

ist der Permeabilität des Raumes proportional und hängt sonst nur von der Form der beiden Stromkreise und deren gegenseitigen Lage ab. Wir bezeichnen diese Größe als den *Koeffizienten* $L_{2,1}$ der Induktion des Stromkreises 2 auf den Stromkreis 1 und setzen

$$(h) \quad L_{2,1} = \mu \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir für den Induktionsfluß $\int \mathfrak{B}_{1,n} df_2$, den der im ersten Leiter fließende Strom durch die vom zweiten Leiter umrandete Fläche sendet,

$$(i) \quad \int \mathfrak{B}_{1,n} df_2 = \frac{\mu J_1}{c} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}.$$

Auch in diesem Falle können wir setzen

$$(k) \quad \int \mathfrak{B}_{1,n} df_2 = \frac{J_1 L_{1,2}}{c},$$

und dabei ist

$$(1) \quad L_{1,2} = L_{2,1}.$$

$L_{1,2}$ ist also der Induktionsfluß, der durch die Fläche des einen Leiters gesandt wird durch einen Strom im anderen Leiter, dessen Stromstärke gleich der absoluten elektromagnetischen Einheit ist.

§ 97. Die magnetische Energie eines Systems linearer Stromleiter.

Die Energie W_m eines magnetischen Feldes kann nach S. 301 dargestellt werden durch

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) dv,$$

wobei die Integration über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken ist. Im Raume befindet sich ein beliebiges elektrisches Stromsystem. Wir wollen die magnetische Energie dieses Systems durch ein Integral darstellen, das über den von den Strömen erfüllten Raum zu erstrecken ist. Nach den Gleichungen (b) auf S. 335 und (f) auf S. 337 ist

$$(a) \quad \mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{P},$$

indem $\mathfrak{P}$ das Vektorpotential eines beliebigen im Endlichen liegenden elektrischen Stromsystems darstellt. Wir finden also

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H}, \text{rot } \mathfrak{P}) dv.$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, betrachten wir die Divergenz des Vektorproduktes $\text{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Vektoren sind. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x). \end{aligned}$$

Führen wir die Differentiation aus, so wird

$$\begin{aligned} \text{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] &= -\mathfrak{A}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} \right) - \mathfrak{A}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} \right) \\ &\quad - \mathfrak{A}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} \right) + \mathfrak{B}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathfrak{B}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{B}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Somit finden wir

$$\operatorname{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{rot} \mathfrak{B}.$$

Also können wir schreiben

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}) dv - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} [\mathfrak{H}, \mathfrak{B}] dv.$$

Durch Anwendung des Gauss'schen Satzes (vgl. S. 232) können wir für das letzte Glied dieser Gleichung schreiben

$$- \frac{1}{8\pi} \int [\mathfrak{H}, \mathfrak{B}]_n df.$$

Dehnt sich das Feld der im Endlichen liegenden Stromleiter bis ins Unendliche aus, so verschwindet dieses Integral an der Grenze des Feldes, und wir erhalten unter diesen Verhältnissen

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}) dv,$$

oder nach der Gleichung (f) auf S. 334

$$(a') \quad W_m = \frac{1}{2c} \int (\mathfrak{B}, j) dv.$$

Handelt es sich um ein System linearer Leiter, so ist das Volumen dv des Leiterelementes ds gleich $q \cdot ds$ zu setzen, indem q der Querschnitt des Leiters ist. Dann ist die zu einem der Leiter mit der Stromstärke J gehörige Energie W'_m

$$W'_m = \frac{1}{2c} \int (\mathfrak{B}', J) ds = \frac{J}{2c} \int \mathfrak{B}'_s ds,$$

indem $\mathfrak{B}'_s$ die nach der Richtung des Leiterelementes genommene Komponente des Vektorpotentials $\mathfrak{B}'$ ist. Nach dem Satze von Stokes (vgl. S. 37) haben wir (s. S. 337)

$$(b) \quad \int \mathfrak{B}'_s ds = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{B}' df = \int \mathfrak{B}_n df,$$

d. h. gleich dem vom Stromleiter umschlossenen Induktionsfluß. Also ist

$$(c) \quad W'_m = \frac{J}{2c} \int \mathfrak{B}_n df,$$

d. h. die magnetische Energie eines Systems geschlossener Stromleiter ergibt sich, wenn wir den Induktionsfluß, den jeder der Leiter umschließt, mit der zugehörigen Stromstärke J multiplizieren und die Summe dieser Produkte durch $2c$ dividieren.

Betrachten wir ein System von zwei Stromleitern, so setzt sich die magnetische Energie W_m aus mehreren Teilen zusammen, und zwar zunächst aus denen, die den beiden Induktions-

flüssen entsprechen, die jeder der Ströme durch die vom anderen umschlossene Fläche sendet. Diese beiden Induktionsflüsse sind nach (g) und (i) des vorigen Paragraphen

$$(c') \quad \frac{\mu J_2}{c} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\mu J_1}{c} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}.$$

Die entsprechenden Beträge der magnetischen Energie sind nach (c) einander gleich, und zwar

$$W_{1,2} = \frac{J_1 J_2}{2c^2} L_{1,2} \quad \text{und} \quad W_{2,1} = \frac{J_1 J_2}{2c^2} L_{1,2}.$$

Hinzukommen noch die Beträge W_1 und W_2 der magnetischen Energie, die den beiden Induktionsflüssen zugehören, die jeder der beiden Ströme durch die von seinem eigenen Leiter umrandete Fläche sendet. Diese Induktionsflüsse ergeben sich, wenn wir in dem Integrale

$$\iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}$$

mit ds_1 und ds_2 Elemente desselben Leiters bezeichnen. Sind ds_1 und ds_1' die Elemente des einen Leiters, und ds_2 und ds_2' die Elemente des anderen Leiters, so haben wir für die Induktionsflüsse, die jeder der beiden Ströme durch die Fläche des eigenen Leiters sendet,

$$\frac{\mu J_1}{c} \iint \frac{ds_1 ds_1' \cos(ds_1, ds_1')}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\mu J_2}{c} \iint \frac{ds_2 ds_2' \cos(ds_2, ds_2')}{r},$$

wo r die Entfernung der Leiterelemente desselben Stromkreises voneinander ist. Der Wert der Integrale hängt allein von der Form der Stromkreise ab. Wir setzen

$$(d) \quad \mu \iint \frac{ds_1 ds_1' \cos(ds_1, ds_1')}{r} = L_1; \quad \mu \iint \frac{ds_2 ds_2' \cos(ds_2, ds_2')}{r} = L_2$$

und nennen L_1 und L_2 die *Selbstinduktionskoeffizienten* der beiden Stromkreise. Dann ergibt sich

$$(e) \quad W_1 = \frac{J_1^2}{2c^2} L_1 \quad \text{und} \quad W_2 = \frac{J_2^2}{2c^2} L_2,$$

und demnach ist die magnetische Energie des Systems der beiden Stromkreise

$$(f) \quad W_m = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} J_1^2 L_1 + J_1 J_2 L_{12} + \frac{1}{2} J_2^2 L_2 \right\}.$$

Sind die beiden Stromkreise starr und die beiden Ströme J_1 und J_2 konstant, so wird bei einer relativen und unendlich

kleinen Bewegung der beiden Stromkreise von den elektrodynamischen Kräften die Arbeit

$$(g) \quad \delta W_m = \frac{J_1 J_2}{c^2} \delta L_{12}$$

geleistet. Entgegen den elektrodynamischen Kräften des Systems ist bei der betrachteten Bewegung die Arbeit

$$- \frac{J_1 J_2}{c^2} \delta L_{12}$$

geleistet. Wir können diesen Ausdruck ansehen als die Variation eines *elektrodynamischen Potentials*

$$- \frac{J_1 J_2 \mu}{c^2} \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(d s_1, d s_2)}{r},$$

das zuerst von F. E. Neumann abgeleitet ist.

Im *Elektrodynamometer* haben wir eine feste Spule und eine drehbar aufgehängte Spule; die Windungsebenen beider Spulen stehen in der Nulllage senkrecht zueinander. Fließt derselbe Strom nacheinander durch beide Spulen, indem diese bei einer Strommessung in Reihe geschaltet sind, so suchen sich die Windungsebenen beider Spulen parallel zu stellen, d. h. die drehbare Spule bewegt sich in solche Lage, daß möglichst viele der von der festen Spule hervorgerufenen Induktionslinien durch ihre Windungsebene hindurchgehen. Wir wollen als den Stromleiter J_1 die feste Spule ansehen, während der Strom J_2 durch die bewegliche Spule fließen soll. Dann können wir δW_m nach dem Vorhergehenden darstellen durch

$$\delta W_m = \frac{J_1 J_2}{c^2} \delta L_{12} = \frac{J_2}{c} \delta \int \mathfrak{B}_{1,n} df_2.$$

Bezeichnen wir die Zahl der Induktionslinien, die durch die vom zweiten Leiter umrandete Fläche vom Strome J_1 gesandt werden, mit $\mathfrak{B}$, so ist also

$$\delta W_m = \frac{J_2}{c} \delta \mathfrak{B}.$$

Zur Anwendung betrachten wir einen kreisförmigen Leiter mit dem Radius R und der Stromstärke J_1 (Tangentenbusssole). In

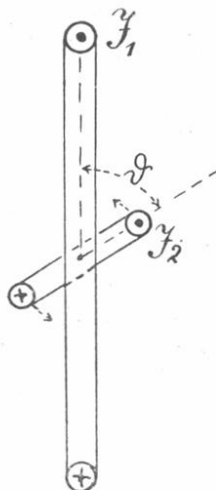


Fig. 106.

seinem Mittelpunkte (Fig. 106) sei drehbar ein kreisförmiger Leiter mit der Fläche S aufgehängt, und J_2 sei die Stromstärke in diesem Leiter. Die Dimensionen der vom zweiten Leiter umschlossenen Fläche S seien klein gegen die vom ersten Leiter umrandete Fläche. Die Ebenen der beiden Kreise bilden miteinander den Winkel ϑ . Dann sendet der Strom J_1 durch S den Induktionsfluß nach S. 343

$$\mathfrak{B} = \frac{2\pi J_1}{cR} \mu S \cdot \cos \vartheta.$$

Also wird das auf den Stromleiter J_2 ausgeübte Drehungsmoment

$$- \frac{2\pi J_1 J_2}{c^2 R} \mu S \cdot \sin \vartheta.$$

Dieses Drehungsmoment sucht den Winkel ϑ zu verkleinern.

§ 98. Die auf einen Stromleiter im magnetischen Felde ausgeübte Kraft.

Wir betrachten jetzt einen Stromleiter im Magnetfelde und nehmen an, daß die Permeabilität in der Umgebung des Leiters $\mu = 1$ ist.

Für das Potential Ψ der magnetischen Kraft eines linearen Stromleiters fanden wir auf S. 340 die Gleichung

$$\Psi = \frac{J}{c} \int df \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r},$$

wenn wir von der Integrationskonstanten absehen, deren Bedeutung sich leicht aus den Bemerkungen auf S. 344 ergibt. Die letzte Gleichung können wir auch in der Form

$$\Psi = \frac{J}{c} \int df \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos(nx) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \cos(ny) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \cos(nz) \right)$$

darstellen. Hierbei ist r der Abstand des betrachteten Punktes P , für den das Potential Ψ bestimmt werden soll, von einem Punkte (x, y, z) der vom Stromleiter begrenzten Fläche. Die Koordinaten des Punktes P seien ξ, η, ζ . In diesem Punkte befinde sich ein Einheitspol. Das von dem letzteren herührende Potential im Punkte A der Fläche f , der von P den

Abstand r hat, ist dann $1/r$. Ferner hat die von P aus in A wirkende Feldstärke die Komponenten

$$\mathfrak{S}_x' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_y' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_z' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Also erhalten wir

$$(a) \quad \Psi = -\frac{J}{c} \int df \left\{ \mathfrak{S}_x' \cos(nx) + \mathfrak{S}_y' \cos(ny) + \mathfrak{S}_z' \cos(nz) \right\}$$

oder

$$(b) \quad \Psi = -\frac{J}{c} \int \mathfrak{S}_n' df,$$

indem $\mathfrak{S}_n'$ die zu df senkrecht stehende Komponente der Feldstärke ist. Das Integral der letzten Gleichung stellt die Gesamtheit $\mathfrak{N}$ der Kraftlinien dar, die vom Einheitspol herührend durch die vom Stromleiter umschlossene Fläche hindurchgehen. Wir finden also

$$(c) \quad \Psi = -\frac{J}{c} \mathfrak{N}.$$

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn an die Stelle des Einheitspoles ein System von Magnetpolen oder ein wirklicher Magnet tritt. Die Gleichung (c) stellt zugleich die potentielle Energie eines geschlossenen linearen Stromes im Felde eines Magneten dar. *Die potentielle Energie eines geschlossenen linearen Leiters im Felde von Magneten ist also gleich dem negativen Produkte aus der Stromstärke und der Zahl der vom Leiter umschlossenen Kraftlinien des Magneten.* Demnach sucht der bewegliche Teil eines Stromkreises stets in solche Lage zu gelangen, daß die Zahl der von ihm umschlossenen Kraftlinien möglichst groß wird. Diese Lage ist die des stabilen Gleichgewichtes, wenn die Richtung der vom frei drehbaren Stromleiter, z. B. einer Spule, hervorgerufenen und umschlossenen Kraftlinien mit der Richtung der magnetischen Kraft des Feldes zusammenfällt.

Wir berechnen jetzt die Arbeit, die bei der Bewegung eines Stromleiters im magnetischen Felde geleistet wird.

Nach den Gleichungen (g) auf S. 337 erhalten wir für die von einem linearen Leiter auf den Magnetpol m ausgeübte Kraft die Komponenten

$$\alpha = \frac{Jm}{c} \int \left(\frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - \frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) dl,$$

$$\beta = \frac{Jm}{c} \int \left(\frac{dx}{dl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \frac{dz}{dl} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) dl,$$

$$\gamma = \frac{Jm}{c} \int \left(\frac{dy}{dl} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \frac{dx}{dl} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) dl.$$

Demnach dürfen wir annehmen, daß das Element dl des Stromleiters, dessen Komponenten dx, dy, dz sind, auf den Magnetpol eine Kraft ausübt, deren Komponenten

$$(d) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{Jm}{c} \left(dz \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} - dy \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right), \\ \beta' = \frac{Jm}{c} \left(dx \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - dz \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right), \\ \gamma' = \frac{Jm}{c} \left(dy \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - dx \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) \end{cases}$$

sind. Nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergeben sich damit sogleich auch die Komponenten der Kraft, die vom Pole m auf das Leiterelement ausgeübt wird.

Das Leiterelement liege in der Richtung der z -Achse, sodaß also $dl = dz$, und $dx = dy = 0$ ist. Es werde in der Richtung der y -Achse um die Strecke δy verschoben parallel zu seiner Anfangslage. Dann wird von den magnetischen Kräften des Feldes die Arbeit geleistet

$$- \beta' \cdot \delta y = \frac{Jm}{c} dz \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cdot \delta y.$$

Dabei gibt das Produkt $dz \cdot \delta y$ die Größe des vom Leiterelemente überstrichenen Flächenelementes $d\sigma$. Wir können also für den letzten Ausdruck schreiben

$$- \beta' \cdot \delta y = - \frac{Jm}{c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma$$

oder

$$\beta' \cdot \delta y = \frac{Jm}{c} \frac{d\sigma}{r^2} \cos(r, x).$$

Da die x -Achse normal zu $d\sigma$ ist, so stellt $d\sigma \cdot \cos(r, x) / r^2$ die scheinbare Größe $d\omega$ des Flächenelementes $d\sigma$ vom Pole m aus gesehen dar. Wir erhalten also für die Elementararbeit in dem betrachteten Falle

$$\beta' \cdot \delta y = \frac{Jm}{c} d\omega.$$

Ferner ist

$$m \cdot d\omega = m \frac{d\sigma \cos(r, x)}{r^2}$$

die Anzahl $\delta \mathfrak{N}$ der Kraftlinien, die vom Leiterelemente dx bei seiner Verschiebung im Felde geschnitten werden. Bezeichnen wir die bei dieser Verschiebung von den Kräften des magnetischen Feldes geleistete Arbeit mit δA , so finden wir also

$$(e) \quad \delta A = \frac{J}{c} \cdot \delta \mathfrak{N}.$$

Diese Gleichung gilt auch für eine beliebige Verschiebung eines Leiterelementes im magnetischen Felde eines Poles oder eines Magneten, wenn $\delta \mathfrak{N}$ die Anzahl der Kraftlinien ist, die vom Leiterelemente bei der Verschiebung geschnitten werden. Soll das Leiterelement dl entgegen den Kräften des magnetischen Feldes verschoben werden, so ergibt sich die hierzu erforderliche Arbeit in Übereinstimmung mit (c) des vorigen Paragraphen direkt aus der Gleichung (b).

Zur Anwendung betrachten wir einen Stromleiter, der die Form eines Rechtecks hat, und in einem gleichförmigen Felde drehbar ist. H sei die Stärke des Feldes. Fig. 107 stellt einen Schnitt senkrecht zur Drehungsachse z des Stromleiters dar. Die Spule habe sich aus der mit 0 — 0 bezeichneten Anfangslage um den Winkel ϑ gedreht. n sei die Normale zur Rechtecksfläche F des Stromleiters. Die punktierten Linien geben die Richtung des gleichförmigen magnetischen Feldes an. In der Stellung 1 — 1 ist die Zahl der vom Stromleiter umschlossenen Kraftlinien gleich $F \cdot H \sin \vartheta$. Demnach wird von den magnetischen Kräften bei einer Drehung des Leiters um den Winkel $d\vartheta$ die Arbeit

$$\frac{J}{c} F H \cos \vartheta \cdot d\vartheta$$

geleistet. Ist K die Kraft, die auf die beiden Rechtecksseiten wirkt, die die Kraftlinien durchschneiden, so ist die Arbeit bei der Drehung um $d\vartheta$ auch dargestellt durch

$$K a \cdot d\vartheta,$$

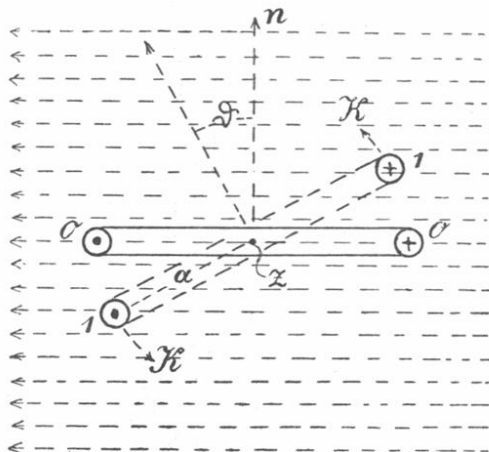


Fig. 107.

wenn a der Abstand der gegenüberliegenden Seiten 1, 1 ist. Wir finden also

$$K a = \frac{J}{c} F \cdot H \cos \vartheta.$$

Die Rechtecksfläche des Leiters dreht sich, bis $\vartheta = 90^\circ$ ist.

Achter Abschnitt.

Induktion.

§ 99. Grundgesetze der Induktion.

Faraday (1831) hat zuerst gezeigt, daß in einem Leiter ein Strom entsteht, wenn in der Nähe des Leiters ein zweiter von einem Strome durchflossener Leiter oder ein Magnet bewegt wird. Auch wenn der zweite Leiter nicht bewegt wird, jedoch die Stromstärke in ihm geändert wird, so entsteht in