

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

**Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph**

Leipzig, 1910

Sechster Abschnitt. Magnetostatik

Bei der betrachteten Verschiebung bleiben die wahren Ladungen ungeändert und demnach auch die freien Ladungen, solange die Kugeln in einem homogenen Dielektrikum liegen. Also bleiben auch die Dichten η_1' und η_2' der freien Elektrizität auf den Kugelflächen konstant, und demnach kommen für die Variation von φ_1 und φ_2 nur die zweiten Glieder in den oben für φ_1 und φ_2 angegebenen Gleichungen in Frage. Wir finden also

$$\delta A = -\frac{1}{2} e_1 \delta \varphi_1 - \frac{1}{2} e_2 \delta \varphi_2,$$

und hierbei ist

$$\delta \varphi_1 = -\frac{e_2'}{R^2} \delta R \quad \text{und} \quad \delta \varphi_2 = -\frac{e_1'}{R^2} \delta R.$$

Demnach wird

$$\delta A = \frac{1}{2} \frac{e_1 e_2' + e_2 e_1'}{R^2} \delta R = \frac{1}{\epsilon} \frac{e_1 e_2}{R^2} \delta R.$$

Damit sind wir zum Coulombschen Gesetze zurückgekommen, das der Fernwirkungstheorie zugrunde liegt. Auf dem angegebenen Wege ergibt sich dieses Grundgesetz der Fernwirkungstheorie als Folgerung aus den Maxwellschen Anschauungen über die Einwirkung des Dielektrikums.

Sechster Abschnitt.

Magnetostatik.

§ 75. Allgemeine Eigenschaften der Magnete.

Den Griechen war schon bekannt, daß in der Nähe der kleinasiatischen Stadt Magnesia Steine gefunden wurden, welche die Eigenschaft hatten, Eisen anzuziehen und von demselben angezogen zu werden. Wird ein solcher Magneteisenstein in Eisenfeilicht geworfen, so haften die Eisenspäncchen an einzelnen Stellen seiner Oberfläche besonders stark. Durch ein künstliches Verfahren können Eisen und Verbindungen des Eisens mit Kohlenstoff, besonders Stahl, ebenso auch Nickel und Kobalt und gewisse Manganlegierungen der Metalle Zinn,

Aluminium u. a. m., die als Heuslersche Legierungen bezeichnet werden, diese Eigenschaft in hohem Maße annehmen.

Legen wir einen prismatischen oder zylindrischen Magnetstab aus Stahl, dessen Querschnittsdimensionen klein im Verhältnisse zur Länge sind, in Eisenfeilicht, und ziehen wir ihn dann heraus, so haften die Eisenspänchen in büschelförmiger Anordnung besonders an den beiden Enden, während die Mitte frei von Spänchen ist. Die magnetische Kraftwirkung geht hauptsächlich von den Enden des Stabes aus, die wir als *Pole* des Magneten bezeichnen. Jedoch verhalten sich die beiden Enden des Magnetstabes nicht gleichartig. Wird ein Magnetstab horizontal so aufgehängt, daß er sich um eine vertikale durch seine Mitte gehende Achse drehen kann, so nimmt er von selbst eine bestimmte Richtung an, die nahezu mit dem Ortsmeridian zusammenfällt. Bringt man den Magneten aus dieser Richtung heraus, so kehrt er von selbst in dieselbe zurück. Das nach Norden gekehrte Ende des Stabes bezeichnen wir als *Nordpol*, das andere Ende als *Südpol*. Das verschiedene Verhalten der beiden Enden des Magnetstabes können wir auch dadurch kennzeichnen, daß wir den beiden Enden zwei verschiedene Arten von Magnetismus zuschreiben; wir sagen, das Nordende des Stabes hat Nordmagnetismus, das Südende hat Südmagnetismus. *Die gleichnamigen Pole zweier Magnete stoßen sich einander ab, die ungleichnamigen ziehen sich einander an.*

Schwimmt ein Magnetstab auf einer ruhenden Flüssigkeit, so nimmt er unter dem Einflusse einer magnetischen Kraft, etwa des Erdmagnetismus, eine bestimmte Richtung an, aber die Kraft ist nicht imstande, den schwimmenden Magneten in Bewegung zu setzen, wenn die Dimensionen des Magneten sehr klein gegen seine Entfernung vom Sitze der magnetischen Kraft sind. Wir schließen daraus, daß die in jedem Magneten vorhandenen Mengen von Nord- und von Südmagnetismus gleich groß sind. Die eine sei mit $+m$, die andere mit $-m$ bezeichnet, wobei nach Übereinkunft der Nordmagnetismus als positiv gerechnet wird. *Die gesamte Menge von Magnetismus, die ein Magnet enthält, ist also stets gleich Null.*

Wird ein Magnet in Stücke zerbrochen, so entstehen an jeder Trennungsfläche zwei neue Polflächen; jeder Teil ist

wiederum ein vollständiger Magnet. Jeder Magnet ist daher zusammengesetzt aus unendlich vielen sehr kleinen Magneten oder aus *Elementarmagneten*, die sich im Inneren des Magneten kettenförmig aneinander reihen, wobei immer zwei ungleichnamige Pole aneinander liegen. Man kann auch die kleinsten Teilchen eines Magneten, die für sich genommen noch vollständige Magnete sind, als die Moleküle ansehen und dann in diesem Sinne von *Molekularmagneten* sprechen. Auch in jedem Molekularmagneten ist die gesamte Summe des Magnetismus gleich Null.

Für die Anziehung oder Abstoßung magnetischer Pole gilt das Coulombsche Gesetz, von dem nachher die Rede ist. Demnach könnte man annehmen, daß in mehrfacher Beziehung ein Parallelismus zwischen der Elektrostatik und der Magneto- statik, d. i. der Lehre von Kräften ruhender Magnete, bestehen muß, insbesondere zwischen den Größen, die das elektrische Feld und denjenigen, die das magnetische Feld bestimmen. Die Fernwirkungstheorie hat auch für beide Gebiete eine in vielen Punkten übereinstimmende mathematische Behandlung gegeben. Wir haben jedoch schon hervorgehoben, daß es unmöglich ist, eine Menge von Nordmagnetismus oder von Südmagnetismus für sich zu erhalten. *Wahrer Magnetismus tritt daher in keinem Körper auf.* Dagegen haben wir es in der Elektrostatik mit wahren elektrischen Ladungen zu tun.

Im engen Zusammenhange mit diesem Gegensatze zwischen Elektrostatik und Magneto- statik steht die Tatsache, daß wir keine magnetische Leiter haben, und daß also von einem magnetischen Leitungsvermögen, wenigstens in dem Sinne wie in der Elektrizitätslehre, nicht die Rede sein kann. Eben in dem Umstande, daß der Magnetismus sich in keinem Körper durch Leitung ausbreiten kann, wie die Elektrizität in und auf elektrischen Leitern, ist begründet, daß die Analogie zwischen der Behandlung der elektrostatischen und magnetostatischen Erscheinungen nur eine beschränkte sein kann. In allen Körpern kann ein magnetisches Feld im Gleichgewichte bestehen, und alle Körper sind im magnetischen Felde als Isolatoren anzusehen.

§ 76. Das Coulombsche Gesetz.

Mittels der Drehwaage untersuchte Coulomb die Kraft K , die zwischen zwei Magnetpolen wirkt. Er fand, daß *die Kraft K umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der Pole ist. Ferner ist die Kraft abhängig von der Polstärke oder von den in den Polen vorhandenen gedachten Magnetismussmengen.* In der Fernwirkungstheorie ging man nämlich von der Vorstellung aus, daß in jedem der beiden Pole eines Magneten bzw. eine positive Magnetismussmenge $+m$ und eine negative Magnetismussmenge $-m$ enthalten sei. Dann ist die zwischen zwei Polen mit den Magnetismussmengen m_1 und m_2 wirkende Kraft nach dem Coulombschen Gesetze

$$K = c \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wo die Konstante c von der Definition der Einheit der Magnetismussmenge abhängt. Wählt man als *Einheit der Magnetismussmenge oder Polstärke* diejenige, die eine ihr gleiche im Abstände 1 cm mit der Kraft eine Dyne abstößt, so ist $c = 1$ zu setzen, und wir erhalten in diesen Einheiten dann

$$K = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Auch hier können wir in derselben Weise, wie in der Elektrostatik (vgl. S. 220) den Begriff der Feldstärke einführen.

Wie bei den elektrischen Erscheinungen der Einfluß des Dielektrikums berücksichtigt werden mußte, so ist auch auf die zwischen zwei Magnetpolen wirkende Kraft der Zustand und die Beschaffenheit des Mediums zwischen den Polen von Einfluß. In der Fernwirkungstheorie können wir diese Tatsache berücksichtigen, wenn wir

$$(a) \quad K = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

setzen, wo μ die *Magnetisierungskonstante* oder *Permeabilität* ist, die eben der Dielektrizitätskonstanten in der Elektrostatik entspricht. μ ist für das Vakuum gleich 1. Für die Luft und für die *paramagnetischen* Körper überhaupt ist μ wenig größer als 1; für die *diamagnetischen* Körper, wie Wismut, Gold u. a. m. ist μ wenig kleiner als 1. Außerdem gibt es Körper, die

sogenannten *ferromagnetischen Körper* (Eisen, Nickel, Kobalt und gewisse Manganlegierungen) für die μ sehr hohe Werte annimmt und zugleich auch nicht konstant ist, sondern bei demselben Material sich stark mit der Magnetisierung verändert. Für einige Eisensorten (weiches Schmiedeeisen, Dynamostahlguß u. a.) kann μ bis 3000 und mehr betragen. Somit bleibt der Vergleich zwischen der Magnetisierungskonstanten μ und der Dielektrizitätskonstanten ϵ unvollkommen, da letztere nur Werte annimmt, die größer als 1 sind.

Wegen der Übereinstimmung des oben ausgesprochenen Grundgesetzes des Magnetismus mit dem der Elektrostatik können wir eine Reihe von Begriffen und Definitionen aus der Elektrostatik in die Magnetostatik übertragen. Dieses gilt zunächst in bezug auf den Begriff des *magnetischen Feldes*, ferner auf den der *magnetischen Feldstärke* \mathfrak{H} und des *magnetischen Potentials* φ_m . Wie das elektrische Feld, so läßt sich auch das magnetische Feld durch Kraftlinien und Niveauflächen anschaulich darstellen. *Die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} oder auch die magnetische Kraft ist die Kraft, die im Felde auf einen positiven Einheitspol ausgeübt wird.*

Die *Dimension der Polstärke* m ergibt sich aus (a).

$$[m] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}].$$

Ferner ergibt sich die *Dimension der Feldstärke* aus

$$[\mathfrak{H} \cdot m] = [M L T^{-2}],$$

also

$$[\mathfrak{H}] = [M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}].$$

Nicht in allen Fällen ist das magnetische Feld so einfach, daß man es durch einzelne Pole hervorgebracht ansehen kann; bisweilen muß man annehmen, daß die Pole kontinuierlich auf Linien oder Flächen oder im Raume ausgebreitet liegen. In anderen Fällen treten überhaupt keine Pole hervor und doch können wir die Existenz eines magnetischen Feldes nachweisen.

Durch die magnetische Kraft wird ein Einheitspol im magnetischen Felde auf einer Bahn bewegt, deren Tangente in jedem Punkte mit der Richtung der Feldstärke zusammenfällt, und die wir als *Kraftlinie* bezeichnen. Wir setzen dabei voraus, daß der Einheitspol ohne Widerstand der Wirkung

der magnetischen Kraft folgen kann, und daß ferner bei der Bewegung des Poles keine merklichen Trägheitskräfte im Spiele sind. Einfacher ist es, einen Papierschirm ins magnetische Feld zu bringen, den wir mit Eisenfeilspänen bestreuen, die durch Induktion magnetisch geworden, sich aneinander reihen und den Verlauf der Kraftlinien übersichtlich darstellen.

Bei der Annahme von Fernkräften tritt das magnetische Feld eines Poles erst dann hervor, wenn wir in die Umgebung dieses Poles einen Einheitspol bringen. Gehen wir jedoch von der Existenz der Nahkräfte aus, so müssen wir annehmen, daß jeder Magnetpol um sich herum ein magnetisches Feld erzeugt und im umgebenden Äther gewisse Zustandsänderungen hervorruft, die auch an einer bestimmten Stelle vorhanden sind, wenn sich gar kein Einheitspol daselbst befindet. Nur um die Feldstärke zu messen, stellen wir uns vor, daß an die betrachtete Stelle des Raumes ein Einheitspol gebracht sei. Das Hineinbringen dieses Einheitspoles wird aber zur Folge haben, daß der ursprüngliche Verlauf der Kraftlinien in allen Fällen Änderungen erfährt, und zwar an der Stelle und in der Nähe des eingebrachten Einheitspoles. Gerade auf dieser Änderung beruht die im Felde auf den Einheitspol ausgeübte Wirkung. Handelt es sich jedoch um starke Felder, die von sehr kräftigen Magnetpolen herrühren, so dürfen wir voraussetzen, daß nur in der nächsten Umgebung des ins Feld gebrachten Einheitspoles eine Änderung des ursprünglichen Feldes eintritt, daß aber schon in sehr geringer Entfernung vom Einheitspole das Feld seine ursprüngliche Stärke behalten hat. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für die Feldstärke denselben Betrag wie durch andere Messungen, die nicht auf der Bestimmung der auf einen Magnetpol ausgeübten ponderomotorischen Kraft beruhen, sondern auf der später zu besprechenden elektromagnetischen Induktion.

§ 77. Das magnetische Feld im Äther.

Ein Magnetfeld möge durch die punktförmigen Pole, deren Stärken $m_1, m_2 \dots$ sei, hervorgebracht sein. Die Feldstärke \mathfrak{S} habe die Komponenten $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$. Die Lage der Pole $m_1, m_2 \dots$ sei bzw. durch die rechtwinkligen Koordinaten

$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ gegeben. Die Stelle, für die wir die Feldstärke \mathfrak{H} ermitteln wollen, sei durch die Koordinaten x, y, z gegeben; sie habe von den Polen $m_1, m_2 \dots$, bzw. die Abstände

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}, \quad \text{usw.}$$

Wir erhalten dann, wie in der Elektrostatik,

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_x = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{m_h(x - x_h)}{r_h^3}, \quad \mathfrak{H}_y = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{m_h(y - y_h)}{r_h^3}, \\ \mathfrak{H}_z = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{m_h(z - z_h)}{r_h^3}. \end{array} \right.$$

Differenzieren wir jetzt \mathfrak{H}_x nach x , \mathfrak{H}_y nach y und \mathfrak{H}_z nach z , so folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = \frac{m_1}{r_1^3} - 3m_1 \frac{(x - x_1)^2}{r_1^5} + \dots$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = \frac{m_1}{r_1^3} - 3m_1 \frac{(y - y_1)^2}{r_1^5} + \dots$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = \frac{m_1}{r_1^3} - 3m_1 \frac{(z - z_1)^2}{r_1^5} + \dots$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich sogleich, daß

$$(b) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Diese Differentialgleichung für die Komponenten der magnetischen Feldstärke spricht ein Gesetz der Nahewirkungen aus. Die Gleichung (b) gilt für das ganze magnetische Feld mit Ausnahme der Stellen, wo sich die Pole $m_1, m_2 \dots$ befinden, weil an diesen Stellen nach (a) die magnetische Kraft unendlich groß wird.

Nach den Betrachtungen, die wir in der Elektrostatik an gestellt haben, ergibt sich leicht, daß auch hier ein Potential φ_m existiert, sodaß die Komponenten der Feldstärke als negative Differentialquotienten der skalaren Funktion φ_m nach den Koordinaten darstellbar sind. Unter der Voraussetzung punktförmiger Pole haben wir

$$(c) \quad \varphi_m = \sum_{n=1}^{n=h} \frac{m_n}{r_n}.$$

Die Komponenten der Feldstärke sind dann aus diesem Potential φ_m ableitbar, indem

$$(d) \quad \mathfrak{S}_x = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_y = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_z = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}.$$

Diejenigen Kräfte, die aus einem skalaren Potential ableitbar sind, genügen den Gleichungen

$$(e) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z}, \quad \text{oder } \text{rot } \mathfrak{S} = 0.$$

Damit haben wir ein *zweites Nahwirkungsgesetz gefunden, dem die magnetische Feldstärke in einem von punktförmigen Polen herrührenden Felde genügen muß.*

Aus (b) ergibt sich noch als Nahwirkungsgesetz für das Potential

$$(f) \quad \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0,$$

oder

$$(g) \quad \nabla^2 \varphi_m = 0,$$

d. h. die Laplacesche Differentialgleichung.

Sind im Raume eine Reihe punktförmiger Pole vorhanden, so gibt die Anwendung des Gauss'schen Satzes die Gleichung

$$(h) \quad \int \mathfrak{S}_n df = 4\pi \cdot \sum m,$$

wenn das Integral auf eine die Pole umschließende Fläche erstreckt wird und \mathfrak{S}_n die an der Fläche genommene Komponente der Feldstärke nach der Richtung der von innen nach außen gezogenen Normalen ist. $\int \mathfrak{S}_n df$ ist der aus der geschlossenen Fläche heraustretende *magnetische Kraftfluß*. Nach der Gleichung (h) ist der aus der geschlossenen Fläche heraustretende Kraftfluß gleich 4π mal der Summe der gesamten von der Fläche umschlossenen Polstärken. Da die gesamte Menge des Magnetismus in jedem Magneten gleich Null ist, so ergibt sich aus (h), daß der gesamte Kraftfluß durch jede Fläche, die einen oder mehrere Magnete umschließt, gleich Null ist. Auch ist der Kraftfluß durch eine geschlossene Fläche, die überhaupt keinen Magneten einschließt, gleich Null. Wir wollen hier dabei zunächst von dem Falle absehen, daß die Fläche einen Magneten durchschneidet.

Führt man einen Einheitspol in dem betrachteten Felde punktförmiger Pole von einem Punkte P auf einer beliebigen

Kurve zum Punkte P zurück, so ist das längs dieser geschlossenen Kurve erstreckte Integral

$$(i) \quad \int_P^P \mathfrak{H} ds = 0,$$

weil durch Bewegung eines magnetischen Poles längs einer geschlossenen Kurve zum Ausgangspunkte zurück niemals Arbeit aus dem magnetostatischen Felde gewonnen werden kann. Das vom Punkte P_1 nach dem Punkte P_2 längs einer Kurve erstreckte Integral

$$\int_1^2 \mathfrak{H} ds$$

nennen wir die *magnetomotorische Kraft*. Die Gleichung (i) spricht dieselbe Bedingung aus, wie die Gleichungen (e).

§ 78. Das magnetische Feld in magnetisierbaren Substanzen.

Dem Vektor \mathfrak{E} der elektrischen Feldstärke entspricht in der Magnetostatik der Vektor \mathfrak{H} der magnetischen Feldstärke oder Kraft. Dem Vektor \mathfrak{D} der elektrischen Verschiebung stellen wir den Vektor \mathfrak{B} der *magnetischen Induktion* gegenüber. Wir führten \mathfrak{D} ein durch die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E},$$

und fanden die Dichte ρ der wahren Elektrizität

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{D}.$$

Der Dielektrizitätskonstanten ϵ entspricht die *magnetische Permeabilität* μ , die durch die Gleichung

$$(a) \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$$

definiert wird und die das magnetische Verhalten eines isotropen Körpers charakterisiert.

μ ist auch als *magnetische Leitfähigkeit* oder als *Koeffizient der magnetischen Induktion* bezeichnet. Die Werte, die μ für die verschiedenen dia- und paramagnetischen Körper annimmt, variieren erheblich weniger als die Beträge der Dielektrizitätskonstante für die verschiedenen Körper. Ferner ist μ bei den

para- und diamagnetischen Körpern konstant und allein von der Natur der Körper abhängig, und unabhängig von der magnetischen Kraft, indem das Verhältnis $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ konstant ist.

Bei den sogenannten *ferromagnetischen Körpern* kann μ zum Teil sehr große Werte annehmen und ist auch in hohem Grade von der magnetischen Feldstärke abhängig. Hierin liegt eine besondere Schwierigkeit der Theorie der Magnetisierung. Bei den schwach magnetisierbaren Körpern wird die Untersuchung der Magnetisierung dadurch erleichtert, daß die magnetisierten Teile aufeinander nur verschwindend geringe Wirkungen ausüben.

Bei einem durch Induktion magnetisch gewordenen ferromagnetischen Körper hängt aber der magnetische Zustand irgend eines seiner Teile keineswegs allein von der von außen her wirkenden magnetischen Kraft ab, sondern auch von den magnetischen Kräften, die die übrigen magnetisierten Teile des Körpers ausüben. Diese letzteren Kräfte werden in gewissen Punkten die äußere magnetisierende Kraft aufheben, in anderen Punkten auch teilweise unterstützen. Je nach der Gestalt des Körpers wird daher der induzierte Magnetismus einen besonderen Wert haben.

Schließlich müssen wir noch beachten, daß die magnetische Induktion \mathfrak{B} der ferromagnetischen Substanzen nicht durch den augenblicklichen Wert der Feldstärke \mathfrak{H} bestimmt ist, sondern auch von den vorausgegangenen Werten von \mathfrak{H} abhängt, sodaß also auch in diesen Körpern \mathfrak{B} und \mathfrak{H} im allgemeinen der Richtung nach nicht zusammenfallen werden. Der induzierte Magnetismus eines ferromagnetischen Körpers ist also durchaus nicht allein von der augenblicklich wirkenden magnetischen Kraft abhängig, sondern auch von den magnetischen Kräften, unter deren Einwirkung früher der Körper gestanden hat. Diese Erscheinung wird als magnetische *Hysteresis* bezeichnet. Im weichen Eisen tritt nach vorausgegangener Magnetisierung ein geringer *remanenter Magnetismus* auf, der auch bei einer veränderlichen magnetischen Kraft seinen Einfluß auf den magnetischen Zustand des Eisens ausübt. Besonders groß ist der Rückstand der Magnetisierung beim Stahl, aus dem *permanente Magnete* hergestellt werden, die ihren Magnetismus eben dieser Erscheinung verdanken. Während

also in einem Isolator die Polarisation mit dem Verschwinden des induzierenden elektrischen Feldes sogleich aufhört, wenn wir von einem nach kurzer Zeit auch verschwindenden Rückstande absehen, so bleibt im Eisen nach dem Aufhören der magnetisierenden Ursache Magnetismus zurück, und der magnetische Zustand des Eisens ist also mehr oder weniger von der Vorgeschichte des Eisens abhängig.

Die ferromagnetischen Substanzen, bei denen also μ nicht konstant ist, sondern von \mathfrak{H} abhängt, nähern sich in ihrem Verhalten den paramagnetischen Körpern, für die μ konstant ist, wenn die magnetische Kraft sehr gering und damit die Permeabilität fast konstant wird, und wenn es sich um Körper, wie weiches Schmiedeeisen, Ankerblech usw. handelt, deren Hysterese nur sehr gering ist.

Den Verschiebungslinien der Elektrostatik entsprechen die *Induktionslinien* der Magnetostatik, die an jeder Stelle des Raumes durch ihre Richtung und Verteilung die Richtung und Größe des Vektors \mathfrak{B} darstellen. Ist \mathfrak{B}_n die Komponente des Vektors \mathfrak{B} , die zum Flächenelemente df senkrecht liegt, so ist $\mathfrak{B}_n \cdot df$ der *Induktionsfluß* durch das Element df . Den Induktionsfluß durch eine endliche Fläche stellt $\int \mathfrak{B}_n \cdot df$ dar. In der Elektrostatik fanden wir, daß die elektrische Verschiebung durch eine geschlossene Fläche (vgl. S. 263) gleich der Summe der wahren Ladungen ist, die von der Fläche umschlossen werden. In der Magnetostatik müßte also der Induktionsfluß durch eine geschlossene Fläche, die um einen magnetisierten Körper gelegt wird oder auch denselben durchschneidet, gleich der Menge des wahren Magnetismus sein, der von der Fläche umschlossen wird. Da aber die Summe der Magnetismusk mengen für jeden Magneten und für jeden Teil eines Magneten gleich Null ist, so muß auch der Induktionsfluß durch eine jede geschlossene Fläche gleich Null sein. Alle Induktionslinien, die einen magnetisierten Körper an seiner Oberfläche verlassen, kehren also durch den umgebenden Raum zu ihm zurück und schließen sich im Inneren des Körpers. *Jede Induktionslinie ist eine in sich geschlossene Kurve.* Dagegen haben die Kurven des Vektors \mathfrak{D} der elektrischen Verschiebung freie Enden an den Leitern, die Träger wahrer Ladungen sind.

Wir finden also für den Induktionsfluß durch eine geschlossene Fläche

$$(b) \quad \int \mathfrak{B}_n df = 0.$$

Das Feld des Vektors \mathfrak{B} ist demnach überall quellenfrei oder \mathfrak{B} ist ein solenoidaler Vektor.

§ 79. Die magnetische Induktion.

Wir wollen den Begriff der magnetischen Induktion \mathfrak{B} noch auf einem anderen Wege in die Theorie einführen.

Zur Untersuchung des Vektorfeldes der magnetischen Induktion \mathfrak{B} in der Nähe elektrischer Ströme, magnetisierter Körper, permanenter Magnete usw. dient eine kleine kreisförmige Windung eines Leiters, der durch zwei parallele und eng zusammengeführte Drähte an ein Schwingungsgalvanometer angeschlossen ist. Bringt man aus weiter Entfernung z. B. einen permanenten Magneten in die Nähe der Windung, oder stellt man in der Umgebung der letzteren einen Stromleiter auf und schließt man den Stromkreis, dem dieser Stromleiter angehört, so entsteht in beiden Fällen in der Windung ein Induktionsstrom, und eine bestimmte Elektrizitätsmenge fließt durch das Schwingungsgalvanometer. Durch den Ausschlag des beweglichen Systems im Galvanometer kann die Menge der in Bewegung gesetzten Elektrizitätsmenge ermittelt werden. Die Theorie des Schwingungsgalvanometers werden wir später behandeln. Wir wollen zunächst an einer und derselben Stelle die Windung in solche Lage bringen, daß bei der vorgenommenen Bewegung des Magneten oder beim Schließen des Stromkreises die Ablenkung des beweglichen Systems des Schwingungsgalvanometers und damit die Elektrizitätsmenge möglichst groß ist.

In Fig. 87 sei AB die Figur eines durch den Mittelpunkt der Windung gelegten Schnittes, die Windung liegt senkrecht zur Fläche der Zeichnung. Die kleinen Kreise bei A und B stellen die Querschnitte des Leitungsdrahtes dar. Der Magnet werde mit seinem Nordpol voran schnell aus weiter Entfernung in der Richtung des gefiederten Pfeiles bis zu der in der Figur angegebenen Stellung bewegt. Dann hat der Induktions-

strom in der Windung AB die angegebene Richtung; der Punkt bei B soll andeuten, daß der Strom bei B aus der Papierfläche heraustritt und bei A eintritt. Die vom Nordpol ausgehenden punktierten Kurven sollen die Induktionslinien andeuten. Die Normale n der

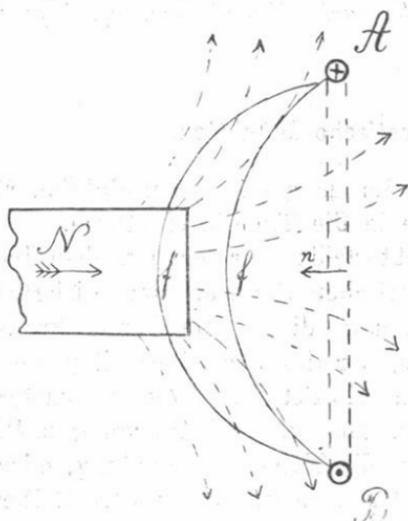


Fig. 87.

Windungsfläche AB und die Richtung des induzierten Stromes sollen zusammengehören wie die Vorwärtsbewegung und Drehung einer rechtsgängigen Schraube.

Nach dem Lenzschen Gesetze ist das von dem Induktionsstrome erzeugte Feld dem Felde des induzierenden Magneten entgegengerichtet.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Windung sich im Luftraume befindet. Nach dem *Faradayschen Induktionsgesetze* ist das *Linien-*

integral der elektrischen Kraft längs des Stromleiters gleich dem Betrage, um den sich die Anzahl der vom Leiter umschlossenen Kraftlinien in der Sekunde verändert. Wir haben also

$$(a) \quad \int \mathfrak{E}_s ds = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{S}_n df.$$

c ist eine universelle Konstante, die von den Maßeinheiten abhängt. Das Integral auf der rechten Seite bezieht sich auf eine beliebige vom Leiter AB (Fig. 87) begrenzte Fläche f , die ganz in Luft liegt. $\int \mathfrak{S}_n df$ ist der magnetische Kraftfluß durch die Fläche f . Die Bedeutung des Minuszeichens auf der rechten Seite wird später erläutert. Nach dem Ohmschen Gesetze ist aber das Linienintegral der elektrischen Kraft gleich der elektromotorischen Kraft im Stromkreise, sodaß

$$\int \mathfrak{E}_s ds = I \cdot R,$$

wo I die Stromstärke und R der Widerstand des Stromkreises ist (s. die Gleichungen (e) und (f) auf S. 324). Wir finden also

$$I = -\frac{1}{cR} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{S}_n df.$$

Die bei einer Änderung des Kraftflusses durch die Fläche f in Bewegung gesetzte und durch das ballistische Galvanometer gemessene Elektrizitätsmenge e ist demnach durch die Gleichung

$$(b) \quad c R e = - \int \mathfrak{S}_n df$$

gegeben, die aus der vorigen durch Integration über den Zeitabschnitt hervorgeht, in welchem die Änderung des Kraftflusses stattfindet. Die Gleichung (a) gilt zunächst nur so lange, als sich die Fläche f in Luft befindet oder streng genommen in einem Raume, dessen Permeabilität gleich Eins ist. Geht die Fläche f durch andere Substanzen, die magnetisierbar sind, so behält die Gleichung (a) ihre Gültigkeit, wenn wir an die Stelle der Feldstärke \mathfrak{S} die magnetische Induktion \mathfrak{B} setzen, sodaß in allen Fällen das Faradaysche Induktionsgesetz durch

$$(c) \quad c R e = - \int \mathfrak{B}_n df$$

dargestellt wird. In den Gleichungen (b) und (c) stellen $\int \mathfrak{S}_n df$ und $\int \mathfrak{B}_n df$ die Beträge dar, um die sich bzw. der Kraftfluß und der Induktionsfluß durch die Fläche f geändert haben. Diese Änderungen können also durch Schließen eines benachbarten Stromkreises, durch Bewegung eines Magneten oder eines ferromagnetischen Körpers bewirkt sein. Dabei sind die linken Seiten der Gleichungen (b) und (c) ganz unabhängig von der Fläche f . Legen wir also durch den Stromleiter als Leitlinie eine andere Fläche f' , so ist unter sonst gleichen Umständen und Vorgängen im magnetischen Felde auch

$$c R e = - \int \mathfrak{B}_n df'.$$

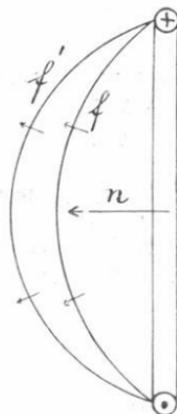


Fig. 88.

Nach der Fig. 88 schließen die Flächen f und f' einen Raum ab. Die Normale n auf f ist nach dem Inneren dieses Raumes gewendet, die Normale n auf f' ist von dem abgeschlossenen Raume nach außen gerichtet. Rechnen

wir die Richtung der Normalen auf den Flächen f und f' positiv vom abgeschlossenen Raume nach außen, so ist das über die Flächen f und f' , d. h. über die Begrenzung des abgeschlossenen Raumes erstreckte Integral

$$(d) \quad \int \mathfrak{B}_n df = 0.$$

Geht also die Fläche f durch beliebige Materialien, so kann die Gleichung (a) in der Form

$$(e) \quad \int \mathfrak{G}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df$$

dargestellt werden, indem jetzt an die Stelle der magnetischen Feldstärke die magnetische Induktion zu setzen ist. Da die Gleichung (e) aber für jede Fläche gilt, die wir durch den Stromleiter als Leitlinie legen, so muß mit Hinweis auf Fig. 88

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df'$$

sein, wenn die Normalen die in der Figur angegebene Richtung haben. Wählt man jedoch wie vorher die Normale positiv von dem durch die Flächen f und f' abgeschlossenen Raume nach außen, so ist für jede geschlossene Fläche

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n df = 0.$$

Demnach muß die Zahl der Induktionslinien, die aus einem Raume durch die ihn umschließende Fläche hervortreten, von der Zeit unabhängig und eine Konstante sein. Geht man von der Annahme aus, daß jeder magnetisierte Körper früher einmal unmagnetisch gewesen ist, so muß die Konstante gleich Null sein. Wir erhalten also wieder die Gleichung (d), die aussagt, daß der Induktionsfluß durch eine geschlossene Fläche stets gleich Null ist, daß also die Induktionslinien in geschlossenen Bahnen verlaufen, oder daß das Feld des Vektors \mathfrak{B} überall quellenfrei ist.

Wir wollen jetzt die Gleichung (d) auf ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 89) mit den Kanten dx , dy und dz anwenden. An der Seitenfläche AB hat die Normale nach außen die Richtung von $-x$, der Induktionsfluß durch die Fläche $AB = dz \cdot dy$ ist also $-\mathfrak{B}_x dy dz$, indem \mathfrak{B}_x die der $+x$ -Achse parallele Komponente von \mathfrak{B} ist. An der Seitenfläche $A'B'$ haben wir den Induktionsfluß

$$\left(\mathfrak{B}_x + \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Die beiden Seitenflächen AB und $A'B'$ liefern also zum Integrale (d) den Beitrag

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Entwickelt man die entsprechenden Ausdrücke für die beiden übrigen Paare von Seitenflächen, so ergibt sich für das betrachtete Parallelepiped

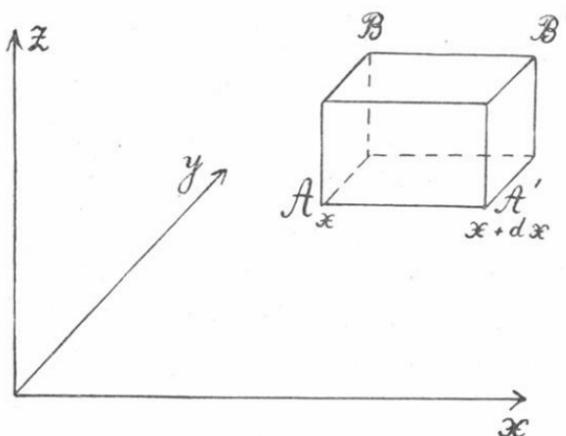


Fig. 89.

$$\int \mathfrak{B}_n df = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Nach (d) ist also

$$(f) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Der Gleichung

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$$

in der Elektrostatik entspricht also in der Magnetostatik für die Dichte ρ_m des wahren Magnetismus die Gleichung

$$(g) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \rho_m = 0.$$

§ 80. Der freie Magnetismus in magnetisierbaren Substanzen.

Wir betrachten zunächst eine Substanz, in der die Permeabilität μ konstant ist. Dann finden wir, weil

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$$

ist, auch

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0,$$

d. h. der Vektor \mathfrak{H} ist in dem betrachteten Medium quellenfrei. Ferner ist daselbst auch für jede in sich geschlossene Linie

$$(b) \quad \int \mathfrak{H}_s ds = 0.$$

Wir können diese Beziehung auch durch

$$(c) \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$$

ausdrücken. In einem Medium konstanter Permeabilität ist also der Vektor \mathfrak{H} der Feldstärke quellen- und wirbelfrei, wenn wir das magnetische Feld herrührend denken von Magneten.

Stellen wir der Gleichung für die Raumdichte der freien Elektrizität

$$\rho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

die Gleichung

$$\rho'_m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}$$

für die Raumdichte des freien Magnetismus gegenüber, so ist ρ'_m in Medien mit konstanter Permeabilität auch gleich Null.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Raum um die magnetischen Körper mit zwei Substanzen 1 und 2 bzw. mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 ausgefüllt sei, und wollen das Verhalten an der Grenzfläche S (Fig. 90) der beiden Körper untersuchen. Wir betrachten einen unendlich flachen Zylinder, dessen Endflächen parallel und unendlich nahe der Grenzfläche S sind. Da für die dem Zylinder zugehörige geschlossene Fläche

$$\int \mathfrak{B}_n d\mathcal{F} = 0$$

nach S. 296 und Gleichung (d) sein muß, so finden wir, wenn dS die Endfläche des Zylinders ist,

$$(d) \quad \mathfrak{B}_{n_1} dS - \mathfrak{B}_{n_2} dS = 0,$$

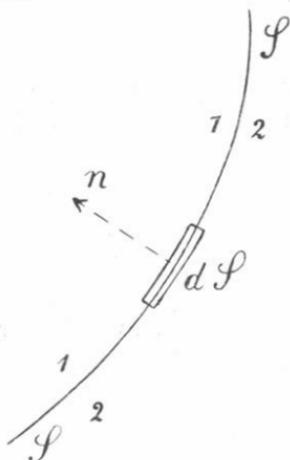


Fig. 90.

wenn die Normale der Grenzfläche vom Körper 2 nach dem Körper 1 hin als positiv gerechnet wird. Demnach durchsetzt die Normalkomponente der Induktion \mathfrak{B} die Grenzfläche stetig. Aus (d) ergibt sich ferner, daß

$$(e) \quad \mu_1 \mathfrak{S}_{n_1} - \mu_2 \mathfrak{S}_{n_2} = 0.$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen derjenigen in der Elektrostatik für den Sprung der Feldstärke an der Grenze zweier Substanzen mit verschiedener Dielektrizitätskonstante. An der Grenzfläche tritt also *freier Magnetismus* auf, dessen Flächendichte η'_m durch

$$4\pi \eta'_m = \mathfrak{S}_{n_1} - \mathfrak{S}_{n_2}$$

gegeben ist. Wir finden

$$(f) \quad \eta'_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \mathfrak{S}_{n_1}.$$

An der Grenzfläche zweier Körper, deren Permeabilitäten verschieden sind, haben wir also Quellen des Vektors \mathfrak{S} .

Da das Linienintegral $\int \mathfrak{S}_s ds$ auch für eine geschlossene Kurve gleich Null ist, die zum Teil im Körper 1 und zum Teil im Körper 2 liegt, so ergibt sich in derselben Weise wie auf S. 266, daß zu beiden Seiten der Grenzfläche die dieser parallelen Komponenten der Feldstärke \mathfrak{S}_{t_1} und \mathfrak{S}_{t_2} einander gleich sind, oder daß die Tangentialkomponenten von \mathfrak{S} die Grenzfläche stetig durchsetzen. Sind also α_1 und α_2 die Winkel, welche die Vektoren \mathfrak{B} und \mathfrak{S} in dem einen und in dem anderen Körper mit der Normalen der Grenzfläche bilden, so lautet das Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien und Induktionslinien

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Ist in dem Medium, das den magnetischen Körper, z. B. einen permanenten Magneten, umgibt die Permeabilität mit dem Orte veränderlich, so ist auch jetzt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0$$

oder

$$\frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \mathfrak{S}_z)}{\partial z} = 0.$$

Also finden wir

$$\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right) + \mathfrak{H}_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

oder

$$(g) \quad \mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} \nabla \mu) = 0.$$

Im Gebiete variabler Permeabilität ist also

$$(h) \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = - \frac{1}{\mu} (\mathfrak{H} \nabla \mu).$$

Demnach ist ein solches Gebiet ein Quellenfeld des Vektors \mathfrak{H} , indem dort freier Magnetismus mit der Raumdichte ρ'_m vorhanden ist, wobei

$$(i) \quad \rho'_m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H} = - \frac{1}{4\pi\mu} (\mathfrak{H} \nabla \mu)$$

ist. Freier Magnetismus tritt nach den Gleichungen (f) und (i) also nur an den Stellen des Feldes auf, wo μ mit dem Orte sich ändert, d. h. also nach (i) in nicht homogenen Körpern und nach (f) an der Grenzfläche zweier Körper mit verschiedener Permeabilität. Wir weisen jedoch darauf hin, daß die Gleichung (i) für die ferromagnetischen Körper wegen der Hysterisis, die auf S. 291 bereits erwähnt ist, nicht gelten kann.

Da das Linienintegral von \mathfrak{H} , erstreckt über eine geschlossene Kurve im Felde magnetischer Körper, stets gleich Null ist, so muß \mathfrak{H} als negativer Gradient eines skalaren Potentials φ_m darstellbar sein. φ_m ist durch die Verteilung des freien Magnetismus bestimmt, und wir haben also

$$(k) \quad \varphi_m = \int \frac{\rho'_m dv}{r} + \int \frac{\eta'_m df}{r}.$$

§ 81. Die Energie des magnetischen Feldes.

Den in der Volumeneinheit enthaltenen Anteil der Energie des elektrostatischen Feldes haben wir (vgl. S. 278) durch das halbe skalare Produkt $\frac{1}{2}(\mathfrak{E} \mathfrak{D})$ dargestellt. Für die Energie im Volumenelemente dv des elektrostatischen Feldes haben wir also den Ausdruck

$$dW_e = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \mathfrak{D}) dv.$$

Da die Vektoren \mathfrak{H} und $1/4\pi \mathfrak{B}$ bzw. den Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{D}

entsprechen, so erhalten wir für die magnetische Energie dW_m im Volumenelemente

$$dW_m = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) dv.$$

Durch Integration über den betrachteten Raum finden wir für die Energie des magnetischen Feldes

$$(a) \quad W_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) dv.$$

Da $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ ist, so ergibt sich

$$(b) \quad W_m = \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 dv.$$

Für die ferromagnetischen Substanzen erfordert das Auftreten des remanenten Magnetismus und der Hysteresis eine gesonderte Betrachtung; für diese Körper können die in (a) und (b) gegebenen Ausdrücke nicht die magnetische Energie darstellen.

Der Gleichung (b) kann man durch Einführung des magnetischen Potentials φ_m unter Voraussetzung konstanter Permeabilität die Form

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)^2 \right] dv$$

geben. Ist neben der magnetischen Energie W_m auch elektrische Energie W_e im Felde vorhanden, so haben wir als Ausdruck der gesamten Energie des Feldes

$$(c) \quad W_e + W_m = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int \varepsilon \mathfrak{E}^2 dv + \int \mu \mathfrak{H}^2 dv \right\}.$$

§ 82. Das Potential eines Magneten.

Auch der Stahl ist kein homogener Körper, er besteht aus Eisen und Kohle, die in veränderlichen Verhältnissen in der Masse des Stahles auftreten. Wir können für die weiteren Betrachtungen von der Annahme ausgehen, daß der freie Magnetismus im magnetischen Stahl mit der Raumdichte ρ'_m verteilt ist, und daß in einem Volumenelemente des Stahles eine beliebige Anzahl freier Magnetismuskörper oder Polstärken $\pm m$ vorhanden sind. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Summe aller Magnetismuskörper in jedem Volumenelemente gleich Null ist.

Wir wollen nun zunächst das Potential φ'_m eines unendlich kleinen Teiles eines magnetisierten Stahlstückes bestimmen.



Fig. 91.

Der Mittelpunkt des betrachteten Teiles — eines *magnetischen Moleküls* — sei der Koordinatenanfangspunkt O . Die Magnetismenmenge m in A (Fig. 91) habe in bezug auf O die Koordinaten x, y, z . Wir bestimmen das Potential für den Punkt P , der von O den Abstand r und vom Punkte A den Abstand R hat. Wir haben dann für das magnetische Potential des Moleküls den Ausdruck

$$\varphi'_m = \sum \frac{m}{R}$$

Der Punkt P habe die Koordinaten ξ, η, ζ . Dann ist

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

und

$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

Nun können wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi'_m = \sum \frac{m}{R} &= \frac{1}{r} \sum m + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \right)_{R=r} \sum mx \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \right)_{R=r} \sum my + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \right)_{R=r} \sum mz. \end{aligned}$$

Da

$$\sum m = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{R} \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \right),$$

also für $R = r$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \right)_{R=r} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r}$$

wird, so finden wir

$$(a) \quad \varphi'_m = - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \sum mx + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \sum my + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \sum mz \right).$$

$\sum mx$, $\sum my$ und $\sum mz$ sind die Komponenten eines Vektors, den wir als *magnetisches Moment* bezeichnen; seine Richtung ist

die *magnetische Achse* des magnetischen Moleküls. Bezeichnen wir mit \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y und \mathfrak{M}_z die Komponenten des magnetischen Momentes \mathfrak{M} der Volumeneinheit, so ist, wenn dv das Volumen des Moleküls bedeutet,

$$(b) \quad \sum mx = \mathfrak{M}_x dv, \quad \sum my = \mathfrak{M}_y dv, \quad \sum mz = \mathfrak{M}_z dv,$$

$$\varphi'_m = - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_y + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_z \right) dv.$$

Für das Potential eines endlichen Magneten erhalten wir dann

$$(c) \quad \varphi_m = - \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_y + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_z \right) dv,$$

wobei r der veränderliche Abstand der Volumenelemente dv vom Punkte P ist, und die Integration über alle Volumenelemente des Magneten zu erstrecken ist.

Wir wollen jetzt die Koordinaten eines magnetischen Moleküls mit x , y , z bezeichnen und dementsprechend

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz$$

setzen. Dann ist

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}.$$

Somit ergibt sich für das Potential im Punkte (ξ, η, ζ)

$$(d) \quad \varphi_m = \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_z \right) dx dy dz.$$

Die Normale des Oberflächenelementes df des Magneten bilde mit den Achsen Winkel, deren Kosinus l , m und n sind. Durch teilweise Integration ergibt sich dann

$$(d') \quad \varphi_m = \int \frac{\mathfrak{M}_x l + \mathfrak{M}_y m + \mathfrak{M}_z n}{r} df - \int \left(\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z} \right) \frac{1}{r} dv.$$

Bezeichnet man das magnetische Moment \mathfrak{M} der Volumeneinheit als *Intensität der Magnetisierung* oder kurz als *Magne-*

tisierung, so hat der Vektor \mathfrak{M} nach den Koordinatenachsen die Komponenten \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , \mathfrak{M}_z und in der Richtung der Normalen des Oberflächenelementes die Komponente \mathfrak{M}_n . Ferner ist

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{M},$$

also wird

$$(e) \quad \varphi_m = \int \frac{\mathfrak{M}_n df}{r} - \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{M}}{r} dv.$$

Man kann auch den Vektor \mathfrak{M} der Magnetisierung durch die Gleichung

$$(f) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B} - \mathfrak{H}) = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H}$$

eingeführen. Zu den durch den Vektor \mathfrak{B} gegebenen *Induktionslinien* und den durch den Vektor \mathfrak{H} gegebenen *Kraftlinien* kommt dann als dritte Gruppe im magnetisierten Körper die durch den Vektor \mathfrak{M} gegebenen *Magnetisierungslinien*, die für den magnetischen Zustand des magnetisierten Körpers von besonderer Bedeutung sind. Außerhalb des magnetisierten Körpers im Vakuum bzw. in Luft sind die Induktionslinien mit den Kraftlinien identisch; im Inneren des magnetisierten Körpers sind die Induktionslinien durch das Zusammenwirken der Magnetisierungs- und Kraftlinien bestimmt.

Wir können auch

$$(g) \quad \mathfrak{M} = \kappa \mathfrak{H}$$

setzen, wobei

$$\kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$

als *magnetische Suszeptibilität* bezeichnet wird. Im leeren Raume sind κ und \mathfrak{M} gleich Null.

Nach S. 297 Gleichung (f) folgt aus (f)

$$\operatorname{div} \mathfrak{M} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H},$$

also

$$(h) \quad \operatorname{div} \mathfrak{M} = -\rho'_m,$$

d. h. ρ'_m ist gleich der Summe der Gefälle der Komponenten der Magnetisierung nach den drei Koordinatenachsen. ρ'_m hängt also nicht von dem absoluten Betrage der Magnetisierung ab, sondern von den Variationen der Magnetisierung mit dem

Orte. Die Raumdichte ρ'_m ist Null an den Stellen, wo die Magnetisierung konstant ist. Vergleichen wir ferner die Gleichung (e) mit der Gleichung (k) auf S. 300 für das Potential φ_m , so ergibt sich

$$(i) \quad \eta'_m = \mathfrak{M}_n,$$

d. h. die Flächendichte des freien Magnetismus ist die normal zur Oberfläche genommene Komponente der Magnetisierung.

§ 83. Das Potential einer magnetischen Kugel.

Die Magnetisierungskomponenten \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y und \mathfrak{M}_z können als Funktionen der Koordinaten gegeben sein. Wir wollen voraussetzen, daß \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , \mathfrak{M}_z im Inneren der Kugel *konstant* sind, d. h. die Kugel sei *gleichförmig* magnetisiert. Im Inneren der Kugel ist $\rho'_m = 0$, weil $\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$ ist. Im vorigen Paragraphen fanden wir für das Potential eines Punktes, dessen Koordinaten ξ , η , ζ sind,

$$\varphi_m = - \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_y + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \mathfrak{M}_z \right) dv.$$

x , y , z sind die Koordinaten eines Punktes des Magneten, und wir setzen, wie früher schon ausgeführt ist, $dv = dx dy dz$. Führen wir ferner das gewöhnliche Raumpotential (vgl. S. 100)

$$V = - \int \frac{dx dy dz}{r}$$

ein, in dem V das Potential eines Körpers ist, dessen Masse die Dichte 1 hat, so ergibt sich

$$\varphi_m = \mathfrak{M}_x \frac{\partial V}{\partial \xi} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial V}{\partial \eta} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial V}{\partial \zeta}.$$

Legen wir den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel, so ist für Punkte außerhalb der Kugel nach § 24

$$V_a = - \frac{4\pi R^3}{3r_0}$$

und für Punkte innerhalb der Kugel

$$V_i = - 2\pi (R^2 - \frac{1}{3} r_0^2),$$

wobei $r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ der Abstand des betrachteten Punktes vom Mittelpunkt der Kugel ist.

Da

$$\frac{\partial V_a}{\partial \xi} = \frac{4\pi R^3 \xi}{3r_0^3}$$

ist, und für $\partial V_a / \partial \eta$ und $\partial V_a / \partial \zeta$ sich ähnliche Ausdrücke ergeben, so wird das Potential für Punkte außerhalb der Kugel lauten

$$\varphi_{m,a} = \frac{4\pi R^3}{3r_0^3} (\xi \mathfrak{M}_x + \eta \mathfrak{M}_y + \zeta \mathfrak{M}_z).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial V_i}{\partial \xi} = \frac{4\pi \xi}{3}$$

usw., also ist

$$\varphi_{m,i} = \frac{4\pi}{3} (\xi \mathfrak{M}_x + \eta \mathfrak{M}_y + \zeta \mathfrak{M}_z)$$

das Potential für Punkte innerhalb der Kugel.

Der Vektor \mathfrak{M} der Magnetisierung bilde mit den Achsen Winkel, deren Kosinus λ , μ , ν sind. Ferner sei α der Winkel zwischen \mathfrak{M} und r_0 . Dann ist

$$\cos \alpha = \lambda \cdot \frac{\xi}{r_0} + \mu \cdot \frac{\eta}{r_0} + \nu \cdot \frac{\zeta}{r_0},$$

und damit ergibt sich

$$\varphi_{m,a} = \frac{4\pi R^3 \mathfrak{M}}{3r_0^2} \cos \alpha$$

und

$$\varphi_{m,i} = \frac{4\pi \mathfrak{M} r_0}{3} \cos \alpha.$$

Liegt der Vektor \mathfrak{M} in der Richtung der x -Achse, so wird

$$\varphi_{m,i} = \frac{4\pi \mathfrak{M} \xi}{3}.$$

Die magnetische Kraft im Inneren der Kugel ist dann konstant, indem wir finden

$$\mathfrak{S}_i = -\frac{4\pi \mathfrak{M}}{3}.$$

Außerhalb der Kugel zerlegen wir die Kraft in zwei Komponenten, von denen die eine R in der Richtung des Abstandes r_0 , die andere S senkrecht zu diesem Abstände wirkt. Dabei ist

$$R = -\frac{\partial \varphi_{a,m}}{\partial r_0}, \quad S = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi_{a,m}}{\partial \alpha},$$

also

$$R = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{R^3 \mathfrak{M} \cos \alpha}{r_0^3},$$

$$S = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3 \mathfrak{M} \sin \alpha}{r_0^3}.$$

Die Oberflächendichte des freien Magnetismus ist

$$\eta'_m = \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \cos \alpha.$$

Die resultierende magnetische Kraft oder Feldstärke außerhalb der Kugel ist

$$\mathfrak{H}_\alpha = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3 \mathfrak{M}}{r_0^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2S}{R}.$$

Ist β der Winkel zwischen der Richtung der Kraft \mathfrak{H}_α und der Richtung von r_0 , so haben wir

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{S}{R} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

§ 84. Ein homogener Körper mit konstanter Permeabilität im magnetischen Felde.

Ein homogener Körper mit konstanter Permeabilität μ_2 möge sich im Felde permanenter Magnete oder im Erdfelde befinden. Die ursprüngliche Feldstärke sei \mathfrak{H}_0 . Wir haben dann vor dem Einbringen des Körpers ins Feld

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}_0 = \mu_1 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{H}_0 = 0,$$

indem μ_1 die Permeabilität des betrachteten Raumes ist. Demnach ist auch $\operatorname{div} \mathfrak{H}_0 = 0$. Ferner ist $\operatorname{rot} \mathfrak{H}_0 = 0$. Durch die Magnetisierung des homogenen Körpers wird die Feldstärke geändert, die gesamte Feldstärke sei \mathfrak{H} . Da auch

$$\operatorname{div}(\mu_2 \mathfrak{H}) = 0,$$

so wird, weil μ_2 konstant ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Ferner ist auch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0.$$

Wir setzen

$$(a) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}$$

und nennen \mathfrak{F} die Feldstärke des *Zusatzfeldes*. Aus den vorigen Gleichungen ergibt sich sogleich, daß

$$(b) \quad \operatorname{div} \mathfrak{F} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{F} = 0$$

ist. \mathfrak{F} ist aus einem Potential U ableitbar, und demnach können die Komponenten \mathfrak{F}_x , \mathfrak{F}_y , \mathfrak{F}_z dargestellt werden durch

$$(c) \quad \mathfrak{F}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

An der Oberfläche des magnetisierten Körpers ist

$$\mathfrak{B}_{n_1} - \mathfrak{B}_{n_2} = 0.$$

Daselbst ist freier Magnetismus mit der Dichte

$$(d) \quad \eta'_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \mathfrak{S}_{n_1}$$

(vgl. Gleichung (f), S. 299) vorhanden. μ_2 ist die Permeabilität des magnetisierten Körpers und μ_1 die Permeabilität des den Körper umgebenden Raumes. In dem ersteren ist $\rho'_m = 0$, weil μ_2 in ihm konstant sein soll.

Die ursprüngliche Feldstärke \mathfrak{S}_0 sei durch das Potential ψ_m und die gesamte Feldstärke \mathfrak{S} durch das Potential φ_m gegeben, Wir haben dann

$$(e) \quad \varphi_m = \psi_m + U.$$

Da

$$\mathfrak{S}_{n_1} = -\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1$$

ist, wobei die Normale positiv in der Richtung von 2 nach 1 ist, so ergibt sich

$$\eta'_m = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1.$$

Das Potential U erhalten wir aus der Gleichung (k) auf S. 300

$$U = \int \frac{\eta'_m df}{r} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \int \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1 \cdot \frac{1}{r} df,$$

wobei die Integration über die Oberfläche des magnetisch induzierten Körpers zu erstrecken ist.

Nach dem Greenschen Satze (vgl. S. 239) haben wir

$$\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \psi \nabla^2 \varphi dv + \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv.$$

Wir setzen hier

$$\psi = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_m,$$

und beachten, daß $\nabla^2 \varphi_m = 0$ ist. Dann ergibt sich

$$(f) \quad U = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \int \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dv.$$

Nach der Gleichung (d), S. 303, verhält sich also der induzierte Körper wie ein magnetischer Körper, dessen magnetische Momente, bezogen auf die Volumeneinheit

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x},$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y},$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z},$$

sind. Wir finden also

$$U = - \int \left(\mathfrak{M}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dv,$$

und

$$(g) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_x - \mathfrak{F}_{0,x} = \int \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right\} dv, \\ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y - \mathfrak{F}_{0,y} = \int \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right\} dv, \\ \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}_z - \mathfrak{F}_{0,z} = \int \left\{ \mathfrak{M}_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right\} dv. \end{cases}$$

Die Ermittlung der Komponenten der Magnetisierung des induzierten Körpers in einem gegebenen Felde ist meistens schwierig. Sind die Werte von \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y und \mathfrak{M}_z gefunden, so können die vorstehenden Gleichungen zur Bestimmung von \mathfrak{F} dienen, wenn \mathfrak{F}_0 gegeben ist.

An der Oberfläche des Körpers ist nach der Gleichung (f), S. 299,

$$\mathfrak{F}_{n_1} - \mathfrak{F}_{n_2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \mathfrak{F}_{n_1} = 4\pi \eta'_1,$$

oder

$$(h) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1 = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1.$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß sich der betrachtete Körper in der Luft befindet, und wir wollen für diese $\mu_1 = 1$ setzen. In dem mit 2 bezeichneten Raume sei der Körper enthalten, wir setzen $\mu_2 = \mu$. Die Normale n war positiv gerechnet in der Richtung vom Raume 2 nach 1.

Das Potential U im Inneren des Körpers sei mit U_i und außerhalb des Körpers mit U_a bezeichnet. Dann ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_1 = \frac{\partial U_a}{\partial n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_2 = \frac{\partial U_i}{\partial n}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n}\right)_1 = \frac{\partial \psi_m}{\partial n} + \frac{\partial U_a}{\partial n}.$$

An $\partial \psi_m / \partial n$ kann der Index fortbleiben, da es an der Grenzfläche des Körpers stetig ist. Wir erhalten demnach aus (h)

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_a}{\partial n} = -\frac{\mu - 1}{\mu} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial n} + \frac{\partial U_a}{\partial n}\right).$$

Da

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa$$

ist, finden wir weiter

$$(1 + 4\pi\kappa) \left(\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_a}{\partial n}\right) = -4\pi\kappa \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial n} + \frac{\partial U_a}{\partial n}\right),$$

und damit die charakteristische Gleichung für das Potential U eines durch Induktion magnetisierten Körpers

$$(i) \quad (1 + 4\pi\kappa) \frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_a}{\partial n} + 4\pi\kappa \frac{\partial \psi_m}{\partial n} = 0.$$

Zur Bestimmung der Funktion U dienen also die Gleichungen

$$(k) \quad \nabla^2 U = 0$$

im Inneren und außerhalb des Körpers, weil $\text{div } \mathfrak{F} = 0$ ist. Da ferner \mathfrak{F} überall endlich ist, so muß U an der Grenzfläche des Körpers stetig sein, d. h. an der Grenzfläche ist

$$(l) \quad U_i = U_a.$$

Schließlich muß nach (i) an der Oberfläche des Körpers

$$(m) \quad \mu \frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial U_a}{\partial n} = -4\pi\kappa \frac{\partial \psi_m}{\partial n} = (\mu - 1) \mathfrak{S}_{0,n}$$

sein, wo $\mathfrak{S}_{0,n}$ die in der Richtung der Normalen n (vom Körper nach außen hin positiv) wirkende Komponente der ursprünglichen Feldstärke ist.

§ 85. Die Kugel mit konstanter Permeabilität im magnetischen Felde.

Wir stellen die Gleichung $\nabla^2 U = 0$ in Kugelkoordinaten dar, indem wir

$$x = r \sin \alpha \cos \beta, \quad y = r \sin \alpha \sin \beta, \quad z = r \cos \alpha$$

setzen. Dann ist

$$(a) \quad r \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Die Gleichung (m) des vorigen Paragraphen lautet

$$(b) \quad \mu \frac{\partial U_i}{\partial r} - \frac{\partial U_a}{\partial r} = (\mu - 1) \mathfrak{S}_{0,r}.$$

Setzen wir voraus, daß das ursprüngliche Feld gleichförmig ist und die Richtung der z -Achse hat, so ist

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_{0,r} = \mathfrak{S}_0 \cos \alpha.$$

Dadurch ergibt sich aus (a)

$$(c) \quad r \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Führen wir jetzt für U_i und U_a nach S. 306 die Werte

$$U_i = K_1 r \cos \alpha = K_1 z$$

und

$$U_a = \frac{K_2 \cos \alpha}{r^2}$$

ein, wo K_1 und K_2 Konstante sind, so ergibt sich zunächst daß U_i und U_a der Gleichung (c) genügen. An der Oberfläche der Kugel, für $r = R$, soll $U_i = U_a$ sein, d. h.

$$K_1 R = \frac{K_2}{R^2}.$$

Daneben ergibt sich aus (b) zur Bestimmung der Konstanten K_1 und K_2 die Gleichung

$$\mu K_1 + \frac{2K_2}{R^3} = (\mu - 1) \mathfrak{H}_0.$$

Dadurch finden wir

$$K_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0, \quad K_2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 \mathfrak{H}_0.$$

Im Inneren der Kugel wird

$$\mathfrak{F}_z = -\frac{\partial U_i}{\partial z} = -K_1 = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0.$$

Ferner ist daselbst

$$\mathfrak{F}_x = 0, \quad \mathfrak{F}_y = 0.$$

Im Inneren der Kugel erhalten wir also für große Werte von μ ein Zusatzfeld, daß nahezu gleich, aber entgegen gerichtet ist dem ursprünglichen Felde, sodaß unter diesen Verhältnissen das Gesamtfeld im Inneren der Kugel fast gleich Null ist. Das Gesamtfeld im Inneren der Kugel ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{F} = \frac{3}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0.$$

Demnach ergibt sich für die Induktion

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \frac{3\mu}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0.$$

Bei den paramagnetischen Körpern ist $\mu > 1$, also ist auch bei diesen $3\mu/(\mu + 2) > 1$, d. h. in solchen Körpern ist die Zahl der Induktionslinien pro Flächeneinheit größer als die Zahl der \mathfrak{H}_0 - oder ursprünglichen Kraftlinien an derselben Stelle war, ehe der magnetisierte Körper ins Feld gebracht wurde. Bei den diamagnetischen Körpern ist $\mu < 1$ und also $3\mu/(\mu + 2) < 1$, d. h. bei den diamagnetischen Körpern ist die Dichte der Induktionslinien geringer als die Dichte der Kraftlinien des ursprünglich vorhandenen Feldes.

Die Magnetisierung der Kugel ist nach (f) auf S. 304

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0.$$

Da nach der Gleichung (i), S. 305, die Oberflächendichte des freien Magnetismus

$$\eta'_m = \mathfrak{M}_n,$$

so folgt

$$\eta'_m = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathfrak{H}_0 \cos \alpha.$$

α ist der Winkel, den der Kugelradius mit der Richtung des ursprünglichen Feldes \mathfrak{S}_0 bildet. Für $\alpha = 90^\circ$, d. h. am Äquator der Kugel, ist die Dichte des freien Magnetismus gleich Null. Für $\mu > 1$, also für die paramagnetischen Körper, ist η'_m positiv an der Kugelhälfte, die vom Mittelpunkte aus in der Richtung des Feldes \mathfrak{S}_0 liegt.

§ 86. Die Kräfte, welche auf einen Magneten wirken.

Bringen wir einen permanenten Magneten in ein schwaches Magnetfeld, wie in das Erdfeld, so dürfen wir im allgemeinen annehmen, daß die Magnetisierung des Magneten nur unmerklich durch Induktion verändert wird.

Da der Stahl nicht als homogener Körper anzusehen ist, so kann man sich den magnetisierten Stahl durch eine unendliche Schar von Flächen zerlegt denken, sodaß auf jeder von ihnen freier Magnetismus mit der Dichte η'_m vorhanden ist. Denken wir uns den Stahlmagneten durch drei Scharen von Ebenen, die bzw. den Koordinatenebenen parallel sind, in Volumenelemente $dv = dx dy dz$ zerlegt, so würde auf den Grenzflächen des Volumenelementes freier Magnetismus anzunehmen sein. Jedoch muß stets die gesamte Menge des Magnetismus in jedem Volumenelemente gleich Null sein. Wir betrachten also jedes Volumenelement als den Träger einer Doppelbelegung von freiem Magnetismus.

Da die Flächendichte η'_m des freien Magnetismus gleich der nach der Richtung der Flächennormale genommenen Komponente der Magnetisierung ist, so ist auf der Fläche OA' (Fig. 92) der freie Magnetismus $-dy dz \mathfrak{M}_x$ vorhanden, wenn \mathfrak{M}_x die x -Komponente der Magnetisierung an dem betrachteten Flächenelemente ist. Auf der Fläche $O'A$ ist der freie Magnetismus $+dy dz \mathfrak{M}_x$ vorhanden. Sind \mathfrak{S}_x , \mathfrak{S}_y und \mathfrak{S}_z die Komponenten der magnetischen Kraft in O , so wirkt in der Richtung der x -Achse auf die Fläche OA' die Kraft

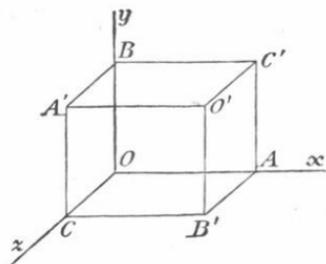


Fig. 92.

$$- dy dz \mathfrak{M}_x \mathfrak{S}_x,$$

und auf die Fläche OA die Kraft

$$+ dy dz \mathfrak{M}_x \left(\mathfrak{S}_x + \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} dx \right).$$

Beide zusammen ergeben die Resultierende

$$\mathfrak{M}_x \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Das Flächenelement $OB' = dx dz$ hat den freien Magnetismus $- dx dz \mathfrak{M}_y$, und das Flächenelement $O'B$ die freie Magnetismusmenge $+ dx dz \mathfrak{M}_y$. Auf OB' wirkt in der Richtung der x -Achse die Kraft

$$- dx dz \mathfrak{M}_y \mathfrak{S}_x$$

und auf das Flächenelement $O'B$ die Kraft

$$+ dx dz \mathfrak{M}_y \left(\mathfrak{S}_x + \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} dy \right).$$

Beide Komponenten ergeben die Resultierende

$$\mathfrak{M}_y \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} dx dy dz.$$

In derselben Weise erhalten wir von den Flächenelementen OC' und $O'C$ die Resultierende

$$\mathfrak{M}_z \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z} dx dy dz.$$

Wir bilden die Summe der drei Resultierenden, integrieren über den ganzen vom Magneten eingenommenen Raum und erhalten für die Kraft X , die den Magneten in der Richtung der x -Achse zu bewegen sucht,

$$(a) \quad X = \iiint \left(\mathfrak{M}_x \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für Y und Z .

Wir nehmen an, daß das magnetische Feld von einem Systeme von Magneten herrührt. Die Feldstärke \mathfrak{S} ist dann als negativer Gradient eines skalaren Potentials Ψ darstellbar, und wir haben

$$\mathfrak{S}_x = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{S}_y = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{S}_z = - \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x}.$$

Somit finden wir

$$(b) \quad X = \iiint \left(\mathfrak{M}_x \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial x} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial x} \right) dx dy dz.$$

Wir bestimmen jetzt das *Moment der Kräfte*, die den Magneten um eine der Koordinatenachsen, z. B. um die x -Achse, zu drehen suchen, unter der Voraussetzung, daß die magnetischen Kräfte konstant sind. Der Punkt O (Fig. 92) habe die Koordinaten x, y, z . Auf die Fläche BO' wirkt in der Richtung der z -Achse die Kraft, deren Moment in bezug auf die x -Achse

$$\mathfrak{M}_y dx dz \cdot \mathfrak{S}_z \cdot (y + dy).$$

Die auf OB' wirkende Kraft hat in bezug auf dieselbe Achse das Moment

$$- \mathfrak{M}_y dx dz \cdot \mathfrak{S}_z \cdot y.$$

Bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung ist das resultierende Moment

$$\mathfrak{M}_y \cdot \mathfrak{S}_z \cdot dx dy dz.$$

Die auf die Flächen $O'C$ und CO' wirkenden Kräfte bringen um die x -Achse das Moment

$$- \mathfrak{M}_z \cdot \mathfrak{S}_y \cdot dx dy dz$$

hervor. Somit erhalten wir für das Moment D_x , das den Magneten um die x -Achse zu drehen sucht,

$$(c) \quad D_x = \iiint (\mathfrak{M}_y \mathfrak{S}_z - \mathfrak{M}_z \mathfrak{S}_y) dx dy dz.$$

Für die Drehungsmomente um die beiden anderen Achsen erhalten wir auf demselben Wege

$$D_y = \iiint (\mathfrak{M}_z \mathfrak{S}_x - \mathfrak{M}_x \mathfrak{S}_z) dx dy dz,$$

$$D_z = \iiint (\mathfrak{M}_x \mathfrak{S}_y - \mathfrak{M}_y \mathfrak{S}_x) dx dy dz.$$

Ist der Magnet nur der Einwirkung des Erdmagnetismus unterworfen, so darf man die magnetische Kraft, sowohl der Größe als auch der Richtung nach, als konstant ansehen. $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y$ und \mathfrak{S}_z sind dann von x, y, z unabhängig, also ist

$$X = Y = Z = 0.$$

Der Schwerpunkt eines Magneten bewegt sich nicht unter der Einwirkung des Erdmagnetismus. Dagegen wirkt ein Drehungsmoment auf ihn, das in folgender Weise bestimmt werden kann.

Das magnetische Moment des Magneten sei \mathfrak{M}_0 ; die Richtung von \mathfrak{M}_0 gegen die Koordinatenachsen sei durch die Winkel bestimmt, deren Kosinus l, m, n sind. Wir haben dann

$$\mathfrak{M}_0 l = \int \mathfrak{M}_x dv, \quad \mathfrak{M}_0 m = \int \mathfrak{M}_y dv, \quad \mathfrak{M}_0 n = \int \mathfrak{M}_z dv.$$

Dann wird

$$D_x = \mathfrak{M}_0 (\xi_z m - \xi_y n), \quad D_y = \mathfrak{M}_0 (\xi_x n - \xi_z l), \\ D_z = \mathfrak{M}_0 (\xi_y l - \xi_x m).$$

Daraus folgt, daß

$$D_x \xi_x + D_y \xi_y + D_z \xi_z = 0 \quad \text{und} \quad D_x l + D_y m + D_z n = 0$$

ist, d. h. *das resultierende Drehungsmoment steht sowohl senkrecht zur magnetischen Kraft als auch zur magnetischen Achse des Magneten.*

Ist die Richtung der magnetischen Kraft der x -Achse parallel, liegt ferner die magnetische Achse des Magneten in der x - y -Ebene und bildet sie mit der x -Achse den Winkel α , so wird

$$(d) \quad D_x = 0, \quad D_y = 0, \quad D_z = -\mathfrak{M}_0 \xi_x m,$$

oder

$$D_z = -\mathfrak{M}_0 \xi_x \sin \alpha.$$

Ist der Magnet im Erdfelde um eine vertikale Achse drehbar, so ist das Moment, das den Winkel α zwischen der magnetischen Achse und dem magnetischen Meridian zu vergrößern sucht, gleich $-\mathfrak{M}_0 H \sin \alpha$, wo H die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus bedeutet. Ist ferner ω die Winkelgeschwindigkeit des Magneten und M sein Trägheitsmoment, so ist nach § 22 (c)

$$d(M\omega) = -\mathfrak{M}_0 H \sin \alpha \cdot dt,$$

oder, weil

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

ist,

$$M \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\mathfrak{M}_0 H \sin \alpha.$$

Ist der Winkel α sehr klein, so ergibt sich für die Schwingungsdauer des Magneten nach § 22

$$\tau = \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{H \mathfrak{M}_0}}.$$

§ 87. Gleichförmige und ungleichförmige Magnetisierung. Magnetische Lamellen.

Bei einem *gleichförmig magnetisierten Körper* hat der Vektor der Magnetisierung überall dieselbe Größe und dieselbe Richtung; demnach ist in solchen Körpern nach S. 304 und Gleichung (h) $\rho'_m = 0$. In einem gleichförmigen Magneten ist die Richtung der magnetischen Achse durch die in allen Teilen des Magneten konstante Richtung der Magnetisierung gegeben. Das magnetische Moment eines gleichförmigen Magneten ist

$$M = \mathfrak{M} \int dv = \mathfrak{M} v,$$

d. h. das magnetische Moment eines gleichförmigen Magneten ist gleich dem Produkte aus der Magnetisierung und dem Volumen des Magneten.

Bei einer *ungleichförmigen Magnetisierung* sind die Komponenten des magnetischen Momentes M

$$M_x = \int \mathfrak{M}_x dv, \quad M_y = \int \mathfrak{M}_y dv, \quad M_z = \int \mathfrak{M}_z dv.$$

Das magnetische Moment hat für die verschiedenen Richtungen im Magneten verschiedene Werte. Für den Höchstwert des Momentes erhalten wir

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Diesen Wurzelausdruck kann man kurzweg als das magnetische Moment des ungleichförmig magnetisierten Körpers ansehen und die Richtung dieses Momentes durch die Gleichungen

$$\cos(M, x) = \frac{M_x}{M}, \quad \cos(M, y) = \frac{M_y}{M}, \quad \cos(M, z) = \frac{M_z}{M}$$

definieren.

Wir betrachten einen gleichförmig magnetisierten Faden, etwa einen in der Längsrichtung magnetisierten feinen Stahldraht. An den Enden des Fadens ist freier Magnetismus mit

der Flächendichte η'_m vorhanden. Nach S. 305 und Gleichung (i) haben wir $\eta'_m = \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}$. Für das Potential dieses Fadens auf einen Punkt, der vom positiven Ende um r_1 , vom negativen Ende um r_2 entfernt ist, haben wir

$$\varphi_m = q \mathfrak{M} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

wobei q der sehr kleine Querschnitt des Fadens ist. Das Potential eines solchen Fadens ist also nur von der Lage der Endpunkte des Fadens abhängig, jedoch von der Gestalt des Fadens ganz unabhängig.

Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, noch das Potential einer *magnetischen Doppelfläche* oder einer *magnetischen Lamelle* zu berechnen. Wir betrachten eine dünne Stahlplatte, die auf der einen Seite N freien Magnetismus mit der Dichte

$+\eta'_m$, auf der anderen Seite S freien Magnetismus mit der Dichte $-\eta'_m$ hat. In einem beliebigen Punkte A der Seitenfläche N (Fig. 93) sei die Normale konstruiert, welche die Fläche S in B schneidet. Die Flächendichte des freien Magnetismus in A ist $+\eta'_m$, in B dagegen $-\eta'_m$. Wir setzen $AB = e$ und nennen $\eta'_m e = v$ das Moment der Doppelfläche an der betrachteten Stelle. Ist die Dicke der Platte sehr klein, während die Flächendichte sehr groß ist, so hat v einen endlichen Wert, und wir haben dann eine „*magnetische Lamelle*“.

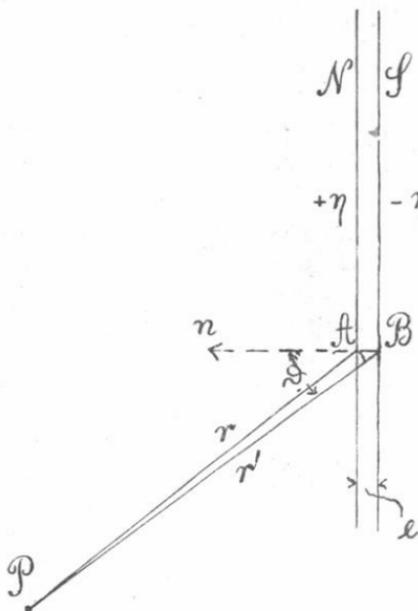


Fig. 93.

Das Potential der magnetischen Lamelle ist gleich der Summe der Potentiale seiner beiden Belegungen. Wir berechnen für einen Punkt P das Potential dV , das von einem Elemente df der Doppelfläche herrührt. Wir haben

$$dV = \frac{\eta'_m df}{r} - \frac{\eta'_m df}{r'} = \eta'_m \cdot df \cdot \frac{r' - r}{r r'},$$

wobei r die Entfernung des Punktes P vom Elemente mit der Flächendichte $+\eta'_m$ und r' die Entfernung des Punktes P vom Elemente mit der Flächendichte $-\eta'_m$ bedeutet. Die Normale der Doppelfläche sei positiv von der Seite der negativen Belegung nach der Seite der positiven Belegung hin. Dann ist, weil $r' - r = e \cos \vartheta$, und e sehr klein ist,

$$dV = \frac{v \cdot df}{r^2} \cdot \cos \vartheta.$$

Bezeichnen wir mit $d\omega$ den räumlichen Winkel, unter welchem df von P aus gesehen wird, so ist

$$d\omega = \frac{df \cos \vartheta}{r^2}$$

und

$$(a) \quad dV = v \cdot \frac{df \cos \vartheta}{r^2} = v \cdot d\omega,$$

d. h. *das Potential eines Elementes df der Doppelfläche in einem Punkte P ist gleich dem Produkte aus dem Momente v der Doppelfläche und dem räumlichen Winkel, unter dem df von P aus gesehen wird.*

Bezeichnen wir mit V das Potential der ganzen Lamelle, so ist

$$(b) \quad V = v \cdot \omega,$$

wenn ω der räumliche Winkel ist, unter welchem die Lamelle von P aus erscheint. ω können wir als die *scheinbare Größe der Lamelle* im Punkte P bezeichnen. Wir haben dann das Resultat: *Das Potential einer magnetischen Lamelle in einem äußeren Punkte, der der Lamelle selbst nicht angehört, ist gleich dem Produkte aus dem Momente der Lamelle und ihrer scheinbaren Größe im betrachteten Punkte.* Dabei ist noch keine Rücksicht auf das Vorzeichen genommen. Die scheinbare Größe ist an sich eine positive Größe. Das Potential ist jedoch nach (a) positiv oder negativ, je nachdem der Winkel ϑ spitz oder stumpf ist, oder je nachdem man von P aus die positive oder negative Seite der Lamelle sieht. Das Potential und demnach auch die Wirkung der betrachteten magnetischen Lamelle nach außen ist also nur von der Gestalt ihres Randes,

nicht aber von der Gestalt ihrer Fläche abhängig. Daraus ergibt sich leicht eine Reihe bemerkenswerter Sätze.

Liegt der Punkt P_1 (Fig. 94) unendlich nahe an der Lamelle auf der positiven Seite, so ist das Potential daselbst

$V_1 = 2\pi v$; dagegen ist das Potential im Punkte P_2 , der der Doppelfläche auf der negativen Seite unendlich nahe liegt, gleich $-2\pi v$. Demnach erhalten wir

$$(c) \quad V_1 - V_2 = 4\pi v,$$

d. h. das Potential ändert sich beim Durchgange des Punktes P durch die Doppelfläche unstetig, und zwar wächst das Potential der magnetischen Lamelle beim Durchgange des Punktes P durch die Lamelle von der Seite der negativen Belegung zur Seite der positiven Belegung sprunghaft um $4\pi v$. Bewegt man von P_2 einen positiven Einheitspol längs einer Kurve über P nach P_1 , so ist entgegen der magnetischen Kraft die Arbeit

$4\pi v$ zu leisten; das Potential ist in P_1 um $4\pi v$ größer als in P_2 . Befindet sich die magnetische Doppelfläche in einem Medium, dessen Permeabilität gleich μ ist, so sind die rechten Seiten der Gleichungen (b) und (c) noch durch μ zu dividieren.

Wir bestimmen jetzt die Feldstärke in dem die magnetische Lamelle umgebenden Raum. Die Normale n der Lamelle bilde mit den Koordinatenachsen Winkel, deren Kosinus l , m und n sind. Ein Punkt der Lamelle habe die Koordinaten ξ , η und ζ , und der Punkt außerhalb der Lamelle, für den

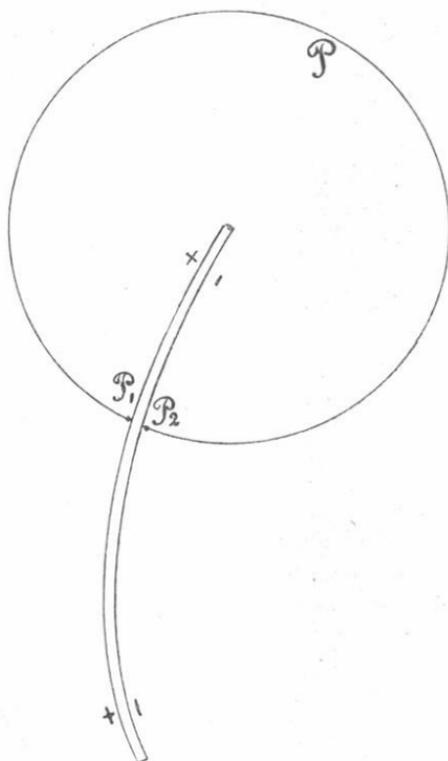


Fig. 94.

die Feldstärke bestimmt werden soll, habe die Koordinaten x, y und z . Wir haben dann (s. Fig. 93)

$$\cos \vartheta = \cos(n, r) = l \frac{x - \xi}{r} + m \frac{y - \eta}{r} + n \frac{z - \zeta}{r},$$

wo

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

ist. Nach (a) ist das Potential

$$V = \nu \int \frac{(x - \xi)l + (y - \eta)m + (z - \zeta)n}{r^3} df.$$

Da

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{r^3}$$

ist, so erhalten wir

$$V = \nu \int \left(l \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi} + m \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta} + n \frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta} \right) df.$$

Die Komponente \mathfrak{S}_x der Feldstärke ist

$$\mathfrak{S}_x = - \frac{\partial V}{\partial x},$$

also

$$\mathfrak{S}_x = \nu \int \left(l \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \xi^2} + m \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \eta \partial \xi} + n \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \zeta \partial \xi} \right) df,$$

weil

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = - \frac{\partial r^{-1}}{\partial \xi}$$

ist. Wenn die Lamelle nicht den Punkt (x, y, z) enthält, so wird r niemals Null. Wir haben dann

$$\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \zeta^2} = 0$$

und

$$\mathfrak{S}_x = \nu \int \left[m \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \xi \partial \eta} + n \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \xi \partial \zeta} - l \left(\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial \zeta^2} \right) \right] df.$$

Wir wenden den Satz von Stokes an [(vgl. S. 36 und Gleichung (g))]

$$\int \left(X \frac{\partial \xi}{\partial s} + Y \frac{\partial \eta}{\partial s} + Z \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right) ds = \int \left[l \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \right) + m \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + n \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) \right] df.$$

Dabei setzen wir

$$X = 0, \quad Y = \nu \cdot \frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta}, \quad Z = -\nu \cdot \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta},$$

wodurch die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen identisch werden. Dadurch finden wir

$$(d) \quad \mathfrak{S}_x = v \cdot \int \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial \zeta} \frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial r^{-1}}{\partial \eta} \frac{d\zeta}{ds} \right) ds.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für \mathfrak{S}_y und \mathfrak{S}_z . Durch Ausführung der Differentiation erhalten wir

$$(e) \quad \mathfrak{S}_x = v \cdot \int \left(\frac{x - \zeta}{r^3} \frac{d\eta}{ds} - \frac{y - \eta}{r^3} \frac{d\zeta}{ds} \right) ds.$$

Durch die Randkurve der magnetischen Lamelle und durch das Moment v ist also die Feldstärke bestimmt. Dieses ergibt sich schon aus dem Umstande, daß das Potential durch den räumlichen Winkel und durch das Moment der Lamelle gegeben ist.

Siebenter Abschnitt.

Elektromagnetismus.

§ 88. Der elektrische Strom.

Im elektrostatischen Felde nimmt das Potential auf einem Leiter einen konstanten Wert an. Verbindet man zwei Leiter miteinander, auf denen die Potentiale verschiedene Werte haben, z. B. die beiden Belegungen eines geladenen Kondensators, die entgegengesetzte und gleiche Menge von Elektrizität enthalten, durch einen Leitungsdraht, so fließt in diesem ein elektrischer Strom vom höheren zum niedrigeren Potential. In dem angelegten Drahte besteht zunächst nicht das elektrostatische Feld im Gleichgewichte, weil seine Enden eben mit Leitern verschiedenen Potentials in Berührung gebracht werden. Sehr schnell nach dem Anlegen des Drahtes wird die Stromstärke schwächer, und sie hört nach kurzer Dauer ganz auf, wenn die Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern ausgeglichen ist und das aus den beiden Leitern und dem Drahte bestehende System an seiner Oberfläche und im Inneren überall dasselbe Potential aufweist. Den in dem betrachteten Falle auftretenden elektrischen Strom, der übrigens nur von sehr