

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

**Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph**

Leipzig, 1910

Fünfter Abschnitt. Elektrostatik

Die Theorie der Kapillarität ist von Laplace in einem Supplement zum zehnten Buche der *Mécanique céleste* behandelt. Poisson hat ein größeres Werk, betitelt: *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. Paris 1831, herausgegeben. Endlich hat Gauss eine epochemachende Untersuchung über die Kapillaritätstheorie in den *Commentationes soc. scient. Göttingensis*. Vol. VII. 1830. (Werke. Bd. 5 S. 29) veröffentlicht. Neuere ausführliche Werke über die Kapillarität sind: Mathieu, *Théorie de la Capillarité*. Paris 1883. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität, herausgegeben von Wangerin, 1894. Eine sehr ausführliche Darstellung der Kapillaritätstheorie ist von F. Pockels in Winkelmanns Handbuch der Physik I. Bd. 2. Teil, Leipzig 1908, gegeben.

Fünfter Abschnitt.

Elektrostatik.

§ 58. Die elektrischen Grunderscheinungen.

Die Elektrizitätslehre geht von der Beobachtung aus, daß viele Körper durch Reiben die Fähigkeit erlangen, leichte Körper anzuziehen und *elektrisch* zu werden. Gray (1727) zeigte, daß die erwähnte Eigenschaft von einem Körper auf den anderen übertragen werden kann, und daß sich die einzelnen Körper hinsichtlich ihres Leitungsvermögens für Elektrizität unterscheiden. Auch die Metalle, welche die besten Leiter der Elektrizität sind, können durch Reibung elektrisch werden, wenn sie isoliert sind. Man gelangte zu der Vorstellung, daß der elektrische Zustand durch das Vorhandensein eines *Fluidums* bedingt ist, das durch Reibung im Körper gebildet oder freigemacht wird, und das unter gewissen Verhältnissen von einem Körper auf einen anderen übertragen werden kann. Dufay (1733) zeigte zuerst, daß es zwei sogenannte elektrische Zustände gibt oder nach der erwähnten Vorstellung zwei Fluida, die *positive* und die *negative Elektrizität*, und wies zugleich nach, daß gleichartige Elektrizitäten

sich abstoßen und ungleichartige sich anziehen. Reibt man eine Glasstange mit Seidenzeug, so werden beide Körper und auch der sie umgebende Raum in einen eigenartigen Zustand versetzt, sodaß in der Nähe befindliche leichte Körper bewegt werden; wir sagen, daß das Glas und das Seidenzeug *elektrisch* geworden sind, und daß der sie umgebende Raum ein *elektrisches Feld* ist.

Nach der *Zwei-Fluida-Theorie* sind im unelektrischen Körper gleiche und sich neutralisierende Mengen beider Fluida enthalten. Durch Reiben zweier verschiedener Körper aneinander findet ein Überströmen der Fluida zwischen ihnen statt, indem zwischen beiden Körpern gleiche Mengen beider Fluida ausgetauscht werden, sodaß der reibende und der geriebene Körper gleiche Mengen des Fluidums von entgegengesetztem Vorzeichen enthalten. Bei jedem Prozesse, durch den Elektrizität entsteht, werden gleiche Mengen negativer und positiver Elektrizität erzeugt (*Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität*). Nach der von Franklin (1748) aufgestellten *Ein-Fluidum-Theorie* gibt es nur ein elektrisches Fluidum, das in allen Körpern im unelektrischen Zustande in einer gewissen normalen Menge vorhanden sein soll; eine größere oder kleinere Menge als die normale soll dann den einen oder den anderen der beiden elektrischen Zustände bedingen.

Die Hypothese der beiden Fluida hat einen außerordentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Elektrizitätslehre gehabt, indem man unter dem Einflusse der *Fernwirkungstheorie* die elektrischen Fluida als Ausgangspunkte und Angriffspunkte von Kräften betrachtete wie die materiellen Massen als Sitz der Gravitationskraft betrachtet wurden. Poisson ging von dieser Vorstellung bei seinen bahnbrechenden Untersuchungen über die elektrische Verteilung aus, und später hat W. Weber auf ihr seine Theorie der elektrischen Ströme begründet.

Im Gegensatze zu dieser Theorie, die bei ihrer mathematischen Behandlung von der Vorstellung ausgeht, daß die zwischen zwei elektrischen Körpern wirkende Kraft wie die Schwere eine direkte Fernwirkung durch den einflußlosen leeren Raum sei, hat Faraday die Ansicht vertreten, daß die elektrischen Kräfte sich von Teilchen zu Teilchen, also nicht unvermittelt, sondern durch die Wirkung des Zwischenmediums

oder durch gewisse Zustandsänderungen im Zwischenmedium mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen. Nach der Fernwirkungstheorie übt ein elektrischer Körper erst dann eine Kraftwirkung aus, wenn ein anderer elektrischer Körper vorhanden ist, der von dem ersteren angezogen oder abgestoßen werden kann; der elektrische Körper für sich allein ist ohne Einfluß. Nach der von Faraday vertretenen *Nahewirkungstheorie* erzeugt jeder elektrische Körper für sich allein in seiner Umgebung einen eigentümlichen Zustand, indem er den umgebenden Raum — das elektrische Feld — in einen besonderen Zwangs- oder Spannungszustand versetzt, der sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Besonders die Forderung einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Zwangszustandes ist unvereinbar mit den Grundlagen der Fernwirkungshypothese.

§ 59. Die elektrische Feldstärke und der elektrische Kraftfluß.

Ein Metallkörper A sei durch Berührung mit einer geriebenen Glasstange in den elektrischen Zustand versetzt; er sei also von einem elektrischen Felde umgeben. Wir bringen eine kleine Kugel a_1 aus leitendem Material, die ebenfalls durch Berührung mit dem Glasstabe elektrisch gemacht ist, in die Nähe des Körpers A . Dieser übt dann auf a_1 eine Kraft $\mathfrak{R}$ aus, die sich von Ort zu Ort des Feldes sowohl der Richtung wie der Größe nach ändert. Wird die Kugel a_1 nicht mit Glas, sondern mit dem Reibzeug (Seide oder mit Amalgam bestrichenes Leder) in Berührung gebracht und in derselben Weise behandelt wie bei der Berührung mit Glas, so hat die Kraft $\mathfrak{R}$ an allen Stellen des Feldes denselben Betrag wie vorher, aber überall die entgegengesetzte Richtung.

Wir wollen jetzt zwei kleine Kugeln a_1 und a_2 , die durch verschiedene Behandlung mit einem geriebenen Glasstabe in verschiedene elektrische Zustände versetzt sind, nacheinander an denselben Punkt des elektrischen Feldes des Konduktor A und sodann immer nacheinander an andere Punkte des Feldes bringen, so ergibt sich, daß die auf a_1 und a_2 ausgeübten Kräfte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ für jeden Punkt des Feldes in einem unveränderlichen Verhältnisse stehen, indem wir finden, daß

$$\mathfrak{R}_1 : \mathfrak{R}_2 = e_1 : e_2$$

ist. Die skalaren Größen e_1 und e_2 sollen allein von den elektrischen Zuständen der Kugeln a_1 und a_2 abhängen.

Untersucht man die Kräfte, die an zwei verschiedenen Punkten 1 und 2 des Feldes auf die eine der Kugeln, z. B. a_1 , ausgeübt werden, so zeigt sich, daß das Verhältnis der auf dieselbe Kugel ausgeübten Kräfte von dem elektrischen Zustande dieser Kugel unabhängig ist. Sind also $\mathfrak{R}_1'$ und $\mathfrak{R}_1''$ die an den Punkten 1 und 2 auf a_1 , und $\mathfrak{R}_2'$ und $\mathfrak{R}_2''$ die an denselben Punkten auf a_2 ausgeübten Kräfte, so haben wir

$$\mathfrak{R}_1' : \mathfrak{R}_1'' = \mathfrak{R}_2' : \mathfrak{R}_2''.$$

Diesen Beobachtungen entspricht die Annahme, daß wir die Kraft $\mathfrak{R}$ im elektrischen Felde

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E} \cdot e$$

setzen. Dabei bezeichnet die *skalare Größe* e die *elektrische Ladung* einer der Kugeln a oder die auf ihr enthaltene *Elektrizitätsmenge*, und der *Vektor* $\mathfrak{E}$ stellt die *elektrische Feldstärke* dar. Die elektrische Feldstärke ist die auf die Einheit der Ladung oder Elektrizitätsmenge ausgeübte Kraft. Da die Kräfte auf die durch Berührung mit Glas bzw. mit dem Reibzeug elektrisch gewordene Kugel a entgegengesetzt sind, so unterscheiden wir zwischen positiver und negativer Elektrizität, und in willkürlicher Festsetzung nennen wir die mit Seide geriebene Glasstange positiv elektrisch und die Seide negativ elektrisch.

Den erwähnten Erfahrungstatsachen entspricht auch das Resultat der Untersuchungen Coulombs über die mechanische Kraft, die zwei elektrische Körper aufeinander ausüben. Werden zwei kleine Kugeln mit Elektrizität geladen und wird die zwischen ihnen wirkende mechanische Kraft $\mathfrak{R}$ etwa mit der Coulombschen Drehwage gemessen, so kann daraus das Produkt ihrer Ladungen ermittelt werden. Sind e_1 und e_2 die in irgend einer Weise gemessenen Ladungen der beiden kleinen Kugeln, und ist r der Abstand der letzteren, so ist die zwischen den Kugeln wirkende Kraft $\mathfrak{R}$ dem Betrage nach

$$|\mathfrak{R}| = c \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Je nachdem die beiden Ladungen gleichartig oder ungleichartig sind, stoßen sich die Kugeln ab oder ziehen sich an.

Wählt man als Einheit der elektrischen Ladung diejenige, die eine ihr gleiche im Abstände 1 cm sich befindende mit der Kraft eine Dyne abstößt, so wird die Konstante $c = 1$, und wir erhalten im elektrostatischen Maßsysteme

$$(a) \quad |\mathfrak{R}| = \frac{e_1 e_2}{r^2}; \quad [e] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}].$$

Aus dem Coulombschen Gesetze, das für Luft als Isolator durch die Gleichung (a) dargestellt ist, ergibt sich somit der Begriff der Elektrizitätsmenge und der Einheitsladung, den wir für die weiteren Untersuchungen benutzen werden.

Befinden sich die beiden geladenen Kugeln nicht in der Luft, sondern z. B. in einem flüssigen Dielektrikum, wie Petroleum, so ist die zwischen den Kugeln wirkende Kraft eine andere, und zwar eine kleinere geworden. In diesem Falle läßt sich die Kraft darstellen durch

$$(b) \quad |\mathfrak{R}| = \frac{1}{\epsilon} \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

ϵ ist die *Dielektrizitätskonstante* des Isolators, in dem sich die beiden Kugeln befinden. Für die Luft oder besser für den luftleeren Raum ist $\epsilon = 1$. Für alle anderen Isolatoren ist $\epsilon > 1$, d. h. in allen Isolatoren wird unter sonst gleichen Verhältnissen $\mathfrak{R}$ kleiner als in Luft.

Haben die Kugeln in der Luft bzw. die Ladungen e_1 und e_2 erhalten, so sind diese Ladungen auch noch vorhanden, nachdem die Kugeln z. B. in Petroleum getaucht sind. Die den Kugeln durch äußere Mittel zugeführten Ladungen e_1 und e_2 bezeichnet man als ihre *wahren Ladungen* oder *wahren Elektrizitätsmengen*.

Setzt man für Luft als Isolator $|\mathfrak{E}| = e_1 / r^2$, oder für einen anderen Isolator als Luft $|\mathfrak{E}| = 1 / \epsilon \cdot e_1 / r^2$, so ist $\mathfrak{E}$ die Kraft, welche auf die Einheit der elektrischen Ladung oder auf die Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt, die sich im Abstände r von der kleinen mit der Elektrizitätsmenge e_1 geladenen Kugel befindet. Als *Dimension der elektrischen Feldstärke* haben wir

$$\frac{[M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}]}{L^2} = [M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}].$$

Wird eine mit der Einheit der Elektrizitätsmenge versehene kleine Kugel an die verschiedenen Stellen des Feldes

gebracht, so kann die Feldstärke in der ganzen Umgebung eines Leiters A oder die Feldverteilung festgestellt werden. Ist df ein Flächenelement im Felde und $\mathfrak{E}_n$ die zu df senkrechte Komponente der Feldstärke, so heißt

$$(c) \quad d\Phi = \mathfrak{E}_n \cdot df$$

der *elektrische Kraftfluß* durch das Flächenelement df .

Die Darstellung eines Kraftfeldes durch die *Kraftlinien* ist schon auf S. 41 besprochen. Die Kraftlinien sind Kurven, deren Richtungen in jedem Punkte des Feldes mit der Richtung der Feldstärke zusammenfallen. Um ein Bild von der Feldstärke an den verschiedenen Punkten des Raumes oder von der Feldverteilung zu haben, denken wir uns zur Richtung der Feldstärke eine unendlich kleine Flächeneinheit senkrecht gelegt und durch diese soviel Kraftlinien gezogen, wie der Betrag der Feldstärke $\mathfrak{E}$ angibt.

Solange der elektrische Zustand oder die elektrische Ladung des Konduktors A und das ihn umgebende Dielektrikum unveränderlich bleiben, ist auch das von ihm herrührende elektrostatische Feld unveränderlich. Solche mit der Zeit unveränderliche Felder können auch bei einer stationären elektrischen Strömung auftreten, deren Erhaltung einen Energieaufwand bedingt und deren Bestehen mit einer Wärmeentwicklung verbunden ist. Für das elektrostatische Feld ist es jedoch charakteristisch, daß es ohne Aufwendung von Energie bestehen bleibt.

Wir wollen zunächst das von elektrisch geladenen Leitern im Luftraume erzeugte Feld untersuchen und erst später den Einfluß anderer Isolatoren betrachten.

§ 60. Das elektrostatische Potential.

In dem durch die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und z_1 bestimmten Punkte befinde sich die elektrische Ladung e_1 . Im Punkte, dessen Koordinaten x, y und z sind, und der von e_1 den Abstand r_1 hat, befinde sich eine positive Einheitsladung. Die auf diese ausgeübte Kraft oder die Feldstärke ist

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{e_1}{r_1^2} \mathbf{r}_1,$$

wobei $\mathbf{r}_1$ der zu r_1 gehörige Richtungs- oder Einheitsvektor ist.

r_1 habe die Richtung von e_1 nach der betrachteten Einheitsladung hin. Ferner ist

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

Die Feldstärke ist positiv und gleichgerichtet mit r_1 , d. h. sie sucht den Abstand zwischen e_1 und der Einheitsladung zu vergrößern, wenn die beiden letzteren gleichartige Elektrizitätsmengen sind. Im anderen Falle ist $\mathfrak{E}_1$ eine anziehende Kraft, die den Abstand r_1 zu verkleinern strebt.

Die den rechtwinkligen Koordinatenachsen parallelen Komponenten von $\mathfrak{E}_1$ seien X_1 , Y_1 und Z_1 . Dann ist

$$(a) \quad |\mathfrak{E}_1| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}.$$

Die Richtung der Feldstärke bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α_1 , β_1 und γ_1 , dann ist

$$X_1 = |\mathfrak{E}_1| \cdot \cos \alpha_1 = |\mathfrak{E}_1| \cdot \frac{x - x_1}{r_1} = |\mathfrak{E}_1| \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x}.$$

Wir können deshalb die Komponenten von $\mathfrak{E}_1$ darstellen durch

$$(b) \quad X_1 = \frac{e_1(x - x_1)}{r_1^3}, \quad Y_1 = \frac{e_1(y - y_1)}{r_1^3}, \quad Z_1 = \frac{e_1(z - z_1)}{r_1^3}.$$

Sind außer e_1 noch andere punktförmige Ladungen $e_2, e_3 \dots$ vorhanden, so erhalten wir für die Komponenten $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ der gesamten Feldstärke $\mathfrak{E}$

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = \sum_1^h \frac{e_h(x - x_h)}{r_h^3}, \quad \mathfrak{E}_y = \sum_1^h \frac{e_h(y - y_h)}{r_h^3}, \\ \mathfrak{E}_z = \sum_1^h \frac{e_h(z - z_h)}{r_h^3}, \end{array} \right.$$

wobei die Summen über die sämtlichen h Ladungen zu erstrecken sind, die zur Schaffung des Gesamtfeldes beitragen.

Wir finden

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = \sum_1^h e_h \left(\frac{1}{r_h^3} - \frac{3(x - x_h)^2}{r_h^5} \right)$$

und ähnliche Ausdrücke für

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}.$$

Demnach wird, da $(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2 = r_h^2$ ist,

$$(d) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0.$$

In dem von Ladungen freien Luftraume ist also

$$(d') \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Diese Gleichung gilt im ganzen Raume mit Ausnahme der Stellen, wo die punktförmigen Ladungen $e_1, e_2 \dots e_h$ sich befinden. An diesen Stellen würden die Kräfte unendlich groß werden. Punktförmige Ladungen kommen in Wirklichkeit nicht vor. Die Ladungen sind in bestimmten Teilen des Raumes oder auf Flächen angehäuft, und wir unterscheiden eine *räumliche* und eine *flächenhafte Verteilung* der Ladungen. Für solche Ladungen wird die Gleichung (d) zu ändern sein, wozu später der Gauss'sche Satz die Mittel bietet.

Ehe wir zu diesem übergehen, wollen wir noch eine skalare Funktion φ einführen, sodaß

$$(e) \quad \varphi = \sum_1^h \frac{e_h}{r_h}$$

ist. φ ist das *elektrostatische Potential* des Systems punktförmiger Ladungen. Dann ist

$$(f) \quad \mathfrak{E}_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Für die in einer beliebigen Richtung n wirkende Komponente $\mathfrak{E}_n$ der Feldstärke erhalten wir nach (f), da die Richtungen der Koordinatenachsen zunächst willkürliche sind,

$$(g) \quad \mathfrak{E}_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Demnach erscheint die Feldstärke als ein Potentialvektor, indem sie sich als negativer Gradient des Skalars φ darstellen läßt, sodaß wir $\mathfrak{E} = - \nabla \varphi$ setzen dürfen.

Das durch die Gleichung (e) definierte Potential ist eine eindeutige und stetige Funktion der Koordinaten, die in allen Punkten endlich bleibt, mit Ausnahme der Punkte, in denen sich die Ladungen befinden.

Die Bedingung, daß ein Potential vorhanden ist, liegt ausgesprochen in den Gleichungen (vgl. § 8)

$$(h) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}.$$

Da $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ die Komponenten der Feldstärke $\mathfrak{E}$ sind, indem

$$(i) \quad |\mathfrak{E}| = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$

ist, so kann die Bedingung der Existenz eines Potentials nach § 7 auch ausgesprochen werden durch die Gleichung

$$(k) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = 0.$$

Wird also eine Einheitsladung von einem Punkte 1 des elektrostatischen Feldes nach einem Punkte 2 übergeführt, und wirkt längs des Bahnelementes ds die Feldstärke $\mathfrak{E}_s = -\partial \varphi / \partial s$, so ist die bei der betrachteten Bewegung geleistete Arbeit

$$A = \int_1^2 \mathfrak{E}_s ds = - \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi_1 - \varphi_2,$$

d. h. allein abhängig von den Werten der Potentiale in dem Anfangs- und Endpunkte und unabhängig von dem Wege, auf dem die Ladung von dem einen Punkte zum andern übergeführt wird.

Wird die Einheitsladung auf einer geschlossenen Bahn herumgeführt, sodaß der Anfangspunkt 1 und der Endpunkt 2 zusammenfallen, so ist das längs der geschlossenen Bahn s erstreckte Linienintegral

$$\int \mathfrak{E}_s ds = 0.$$

Wäre dieses Integral dem Betrage nach von Null verschieden, so könnte man durch Herumführen der Einheitsladung auf der geschlossenen Bahn unbegrenzt Arbeit aus dem Felde gewinnen. Die Erfahrung zeigt, daß dieses für alle elektrostatischen Felder unmöglich ist. *Das elektrostatische Feld ist also wirbelfrei*, was nach § 7 durch die Gleichung (k) ausgedrückt wird.

Handelt es sich um räumliche und mit der Dichte ρ verteilte Ladungen, so wird das Potential dargestellt durch

$$(l) \quad \varphi = \int \frac{\rho \cdot dv}{r},$$

indem dv ein Raumelement ist.

andere tangential an der Oberfläche liegt. Der Kraftfluß durch das Oberflächenelement ist dann

$$\mathfrak{E}_n \cdot df.$$

Liegt zwischen den Richtungen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_n$ der Winkel α , so ist

$$\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E} \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \cos(r, n) = \frac{\partial r}{\partial n},$$

$$\mathfrak{E}_n = \frac{e}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n}.$$

n ist die auf der Fläche S nach außen hin konstruierte Normale.

Für den Kraftfluß $d\Phi$ durch das Flächenelement df erhalten wir also

$$d\Phi = \mathfrak{E}_n \cdot df = \frac{e}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot df.$$

Konstruiert man um O eine Kugelfläche mit dem Radius r , deren Oberfläche den Punkt A enthält, so ist die Projektion des Elementes df auf diese Kugelfläche gleich

$$df' = df \cdot \cos(r, n) = df \cdot \cos \alpha.$$

Legt man ferner um den Punkt O eine Kugel mit dem Radius Eins, so begrenzen die von O nach dem Umfange von df' gezogenen Radien auf dieser Einheitskugel ein Flächenelement $d\sigma$, das als *räumlicher Winkel* bezeichnet wird, unter dem df' von O aus gesehen wird. Demnach ist $df' = r^2 \cdot d\sigma$. Also wird

$$d\Phi = e \cdot d\sigma.$$

Demnach ist der vom Punkte O mit der Ladung e ausgehende Kraftfluß, der die Fläche S durchsetzt, gleich

$$\Phi = e \cdot \int d\sigma.$$

Dabei sind jedoch zwei Fälle für die weitere Anwendung zu unterscheiden. Liegt zunächst, wie wir angenommen haben, die *Ladung e innerhalb der Fläche S* , so ist $\int d\sigma = 4\pi$, und wir erhalten

$$(a) \quad \int \mathfrak{E}_n df = \Phi = 4\pi e.$$

Liegt dagegen die punktförmige Ladung e (Fig. 67) außerhalb der geschlossenen Fläche S , so ist für diesen Fall $\int d\sigma = 0$, weil S in zwei Teile S_1 und S_2 zerfällt, deren Projektionen

auf die um O gelegte Einheitskugel gleich groß sind. Jedoch sind in Rücksicht auf die Richtung der Flächennormale, deren positive Richtung vom Innenraume nach dem Raume außerhalb der Fläche geht, die beiden von S_1 und S_2 herrührenden gleichen Projektionen auf die Einheitskugel mit entgegen-

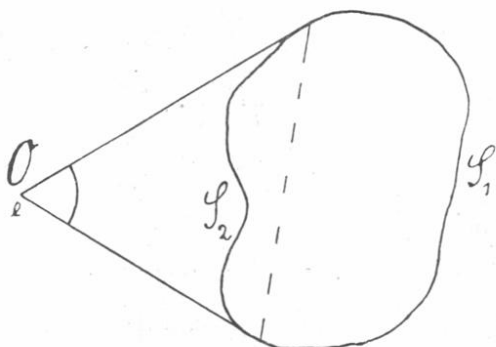


Fig. 67.

gesetzten Vorzeichen zu nehmen. Liegt also die Ladung außerhalb der geschlossenen Fläche S , so ist $\int d\sigma = 0$, und also

$$(b) \quad \Phi = 0.$$

Die Gleichung (a) läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß sich mehrere Ladungen $e_1, e_2 \dots$ im Inneren der geschlossenen Fläche S befinden. Wir erhalten dann für den Kraftfluß Φ , der die Fläche S durchsetzt

$$(c) \quad \int \mathfrak{E}_n df = \Phi = 4\pi(e_1 + e_2 + \dots) = 4\pi \cdot \sum e.$$

Die Gleichung (b) ist als spezieller Fall in (c) enthalten. Die Gleichung (c) stellt den Ausdruck des Gauss'schen Satzes dar: *Der Kraftfluß durch eine geschlossene Fläche ist gleich 4π mal der Summe aller von der Fläche eingeschlossenen Ladungen.* Bezüglich der Gültigkeit des Gauss'schen Satzes sei noch hervorgehoben, daß dieser Satz für jede beliebige die Ladungen $\sum e$ einschließende Fläche ohne Einschränkung gelten muß, weil in der Schlußgleichung (c) der Radiusvektor r von O nach dem Flächenelemente nicht auftritt. Die früher ausgesprochene Einschränkung bezüglich der Entfernung der Fläche S von den Ladungen können wir aus demselben Grunde fallen lassen. Der Satz (c) gilt auch für räumlich und flächenhaft ver-

teilte Ladungen, sofern diese von der Fläche S umschlossen werden.

Bevor wir uns zu einer Anwendung des Gauss'schen Satzes wenden, wollen wir den Nachweis erbringen, daß die Kräfte überall endlich bleiben, wenn wir die Voraussetzung punktförmiger Ladungen fallen lassen und eine räumliche oder flächenhafte Verteilung der Ladungen annehmen. Auf einer Fläche $S_1 S_2$ (Fig. 68) sei die elektrische Ladung mit der Flächendichte η

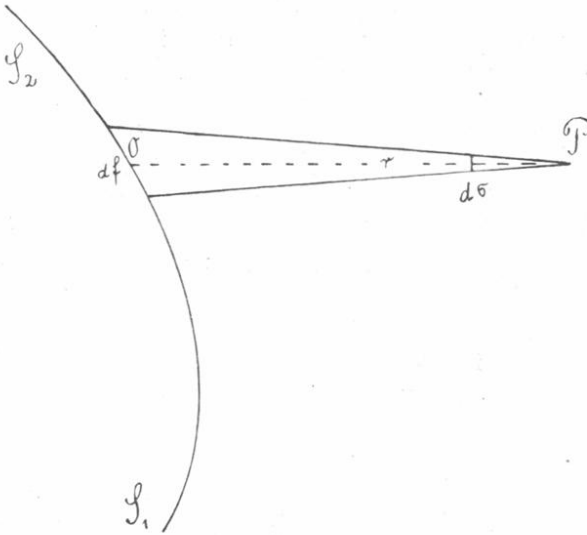


Fig. 68.

verteilt. Wir wollen den Betrag der Feldstärke im Punkte P ermitteln und uns vorstellen, daß dieser Punkt P in der Richtung PO in die Fläche $S_1 S_2$ hineinrückt. Fällt P mit O zusammen, so kann nur durch die auf dem Flächenelemente df um O vorhandene Ladung die Feldstärke unendlich groß werden, weil alle anderen Ladungen von P bzw. O eine endliche Entfernung haben. O sei der Mittelpunkt des Flächenelementes df ; das die Ladung $\eta \cdot df$ enthält. Ist $OP = r$, so rührt von $\eta \cdot df$ in P die Feldstärke $\eta \cdot df / r^2$ her. Wird df von P aus unter dem räumlichen Winkel $d\sigma$ gesehen, so ist diese Feldstärke in P auch durch $\eta \cdot d\sigma$ gegeben. Fällt der Punkt P mit O zusammen, so ist demnach die von $\eta \cdot df$ herrührende Feldstärke in O gleich $\eta \cdot 2\pi$. Rückt also der Punkt P nach O ,

so bleibt der Teil der Feldstärke, der von der Ladung auf df herrührt, endlich, indem sein Betrag gleich $2\pi\eta$ ist. Also hat auch die gesamte Feldstärke in O einen endlichen Wert.

Sieht man eine räumliche Ladung als ein Aufeinander-schichten von flächenhaft verteilten Ladungen an, so ergibt sich, daß auch für jeden Punkt die Feldstärke und das Potential endlich Werte behalten, gleichgültig ob dieser Punkt innerhalb oder außerhalb des mit elektrischer Ladung versehenen Raumes liegt. Liegt der betrachtete Punkt, für den das Potential bestimmt werden soll, im Inneren der räumlich verteilten Ladung, so wird in der Summe, die das Potential darstellt, einer der Abstände r gleich Null und zwar eben für den betrachteten Punkt. Da aber die Elektrizitätsmenge bei endlichem Werte von ρ in diesem Punkte gleich $\rho \cdot dx dy dz$, also von der dritten Ordnung unendlich klein ist, so wird das betreffende Glied der Summe gleich Null. Wenn wir also an die Stelle punktförmiger Ladungen, eine räumlich oder flächenhaft verteilte Elektrizitätsmenge voraussetzen, so *haben die elektrischen Kräfte überall im Raume endliche Werte*. Unter derselben Voraussetzung ist auch das Potential eine überall stetige und endliche Funktion.

§ 62. Anwendung des Gaußschen Satzes.

Wir wenden den Gaußschen Satz an auf die Oberfläche eines unendlich kleinen Parallelepipedon OO' (Fig. 69), dessen

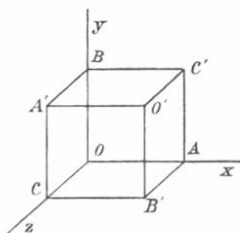


Fig. 69.

Kanten dx , dy und dz den Koordinatenachsen parallel sind. Die Normale sei positiv gerechnet vom Innenraum des Parallelepipedon nach außen. Auf die Seitenfläche OA' wirkt senkrecht die Komponente $-\mathfrak{E}_x$ der Feldstärke und auf die Fläche $O'A$ wirkt senkrecht die Komponente

$$+\mathfrak{E}_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx$$

der Feldstärke. Ebenso wirkt auf OB' senkrecht die Komponente $-\mathfrak{E}_y$ der Feldstärke, und auf $O'B$ die Komponente

$$+\mathfrak{E}_y + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} dy.$$

Der Kraftfluß durch die Flächen OA' und $O'A$ ist zusammengefaßt

$$- \mathfrak{E}_x dy dz + \left(\mathfrak{E}_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Nehmen wir noch die übrigen Flächenelemente OB' , $O'B$, OC' und $O'C$ hinzu, so finden wir für den Kraftfluß durch die Oberfläche des Raumelementes $dv = dx dy dz$

$$(a) \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) dv.$$

Ist das Raumelement dv durch eine Ladung mit der räumlichen Dichte ρ erfüllt, so wird nach dem Gauss'schen Satze

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) dv = 4\pi \rho \cdot dv.$$

und also

$$(b) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 4\pi \rho.$$

Ist also die Feldstärke als Funktion der Koordinaten gegeben, so ist dadurch auch die Lage und Größe der räumlichen Ladung bekannt. Die Gleichung (b) enthält als speziellen Fall die Gleichung (d) des § 60, sie bildet eine Ergänzung zu der letzteren für solche Stellen, an denen sich räumlich verteilte Ladungen befinden.

Der Ausdruck unter (a) gibt uns den Kraftfluß durch die Oberfläche eines unendlich kleinen Parallelepipeton. Jeder von einer endlichen Fläche umschlossene Raum läßt sich in solche Raumelemente zerlegen, und wir erhalten also für den Kraftfluß durch eine endliche geschlossene Fläche

$$(c) \quad \int \mathfrak{E}_n df = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right) dv,$$

oder

$$(c') \quad \int \mathfrak{E}_n df = 4\pi \int \rho dv,$$

wo df ein Element der Oberfläche ist und dv ein Element des von der Fläche umschlossenen Raumes. $\mathfrak{E}_n$ ist die zum Flächenelemente df senkrechte Komponente der Feldstärke. Das Flächenintegral auf der linken Seite der Gleichung ist über alle Elemente der geschlossenen Fläche und das Raumintegral auf der rechten Seite über alle Elemente des von der Fläche umschlossenen Raumes zu erstrecken. Wir erinnern daran,

daß $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$ die rechtwinkligen Komponenten der Feldstärke sind. Die Gleichung (c) ist der Ausdruck des Gauss'schen Integralsatzes, der ein Raumintegral in ein Oberflächenintegral und umgekehrt verwandelt. Die linke Seite der Gleichung (c) ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, und ebenso ist es auch die rechte Seite.

Führt man in die Gleichung (b) nach § 60 (f) das Potential φ ein, so ergibt sich

$$(d) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = -4\pi \varrho.$$

Diese Gleichung wird als Poisson'sche Gleichung bezeichnet, durch die bei gegebenem Potential die Verteilung und Größe der Ladung im Raume ermittelt werden kann. Umgekehrt sind auch durch Angabe der Verteilung der elektrischen Ladungen im Raume das Potential und die Feldstärke bestimmt.

Nach der Gleichung (b) ist die Größe

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}$$

ein Skalar, der vom Koordinatensystem unabhängig ist, und den wir als *Divergenz* von $\mathfrak{E}$ bezeichnen.

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}.$$

Der Gauss'sche Satz kann dann nach der Gleichung (c) in der vom Koordinatensystem unabhängigen Form

$$(e) \quad \int \mathfrak{E}_n df = \int \operatorname{div} \mathfrak{E} dv$$

dargestellt werden.

Wir haben auf S. 225 gefunden, daß das elektrostatische Feld wirbelfrei ist, d. h. daß in ihm keine ringförmig geschlossenen Kraftlinien ohne Anfang und Ende vorhanden sind. Die Kraftlinien gehen von den positiven Ladungen des Feldes aus, die wir daher als *Quellen* des Kraftflusses bezeichnen wollen; sie endigen an dem Sitze der negativen Ladungen, die demgemäß als *Senken* des Feldes bezeichnet werden. *Das elektrostatische Feld stellt sich demnach als ein wirbelfreies Quellenfeld dar, wenn wir die Senken dabei als negative Quellen auffassen.*

Sind die Quellen gleichmäßig über den Raum verteilt, so liefert die Anwendung des Gauss'schen Satzes (e) auf das Raumelement

$$\sum \mathcal{E}_n df = \operatorname{div} \mathcal{E} dv = 4\pi \rho dv,$$

indem ρ die räumliche Dichte im Elemente dv ist. $\sum \mathcal{E}_n df$ ist der durch die Oberfläche des Raumelementes gehende Kraftfluß. Wir erhalten daher

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\sum \mathcal{E}_n df}{dv}.$$

Demnach ist $\operatorname{div} \mathcal{E}$ der vom Vektor $\mathcal{E}$ herrührende Kraftfluß durch die Oberfläche einer unendlich kleinen Volumeneinheit. $\operatorname{div} \mathcal{E}$ wird als die *Ergiebigkeit* des elektrostatischen Feldes bezeichnet. Wir können auch sagen, daß bei räumlicher Verteilung der Elektrizität ihre Dichte ρ durch die auf die Volumeneinheit bezogene Ergiebigkeit des Kraftflusses gegeben wird, indem

$$(f) \quad \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho$$

ist.

Sind innerhalb einer geschlossenen Fläche keine Ladungen vorhanden, so ist im Inneren der Fläche überall die Ergiebigkeit gleich Null. Die Gleichung (e) lautet dann

$$\int \mathcal{E}_n df = 0,$$

weil

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$$

ist. Innerhalb der betrachteten geschlossenen Fläche gilt dann überall die Laplacesche Gleichung

$$(g) \quad \nabla^2 \varphi = 0,$$

die aussagt, daß innerhalb der geschlossenen Fläche das Feld wirbelfrei und quellenfrei ist.

Wir wenden den Gauss'schen Satz jetzt an auf den Fall, in welchem die elektrische Ladung auf einer Fläche mit der Dichte η verteilt ist. Auf dem Flächenelemente df ist dann die Ladung $e = \eta \cdot df$ vorhanden. Wir konstruieren einen Zylinder (Fig. 70) senkrecht zu df , dessen Höhe gegen die Abmessungen der Grundfläche unendlich klein ist. Die Endflächen dieses

Zylinders sind dann ebenfalls gleich df . n sei die Richtung der Normalen der Fläche f . Die beiden Endflächen des Zylinders seien mit 1 und 2 bezeichnet. Die an der Endfläche 1 konstruierte Normale ist vom Innenraum des Zylinders nach außen gezogen und stimmt der Richtung nach mit n überein. Dagegen ist die Normale an der Endfläche 2 entgegengesetzt gerichtet wie n . Bezeichnen wir die Feldstärke an der Endfläche 1 mit $\mathfrak{E}_{n1}$, an der Endfläche 2 mit $\mathfrak{E}_{n2}$, so ist nach dem Gauss'schen Satze

$$(\mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{E}_{n2}) df = 4\pi \eta \cdot df,$$

da der Kraftfluß durch die Mantelfläche des Zylinders bei unendlich kleiner Höhe des Zylinders zu vernachlässigen ist. Wir erhalten also

Fig. 70.

$$(h) \quad \mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{E}_{n2} = 4\pi \eta.$$

Demnach ist die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke beim Durchgange durch eine mit der Dichte η geladene Fläche unstetig und zwar beträgt der Sprung, den die Normalkomponente erfährt, $4\pi \eta$. Ist die Feldstärke als Funktion der Koordinaten gegeben, so ist damit auch die Größe der flächenhaften Verteilung bestimmt.

Beachtet man, daß

$$\mathfrak{E}_{n1} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_{n2} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2$$

ist, so wird

$$(h') \quad -\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2\right\} = 4\pi \eta.$$

$\mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{E}_{n2}$ bezeichnen wir als die *Flächendivergenz* des Vektors $\mathfrak{E}$ an der elektrisch geladenen Fläche, und die Gleichung (h) liefert dann die Beziehung der Flächendivergenz zu der Dichte der Ladung auf der Fläche.

§ 63. Die Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter.

Der Unterschied zwischen den elektrischen *Leitern* und *Isolatoren* besteht darin, daß in den ersteren kein elektrisches

Feld im Gleichgewichte bestehen kann. Auch bei der geringsten Potentialdifferenz tritt in den Leitern eine elektrische Strömung ein, bis die Potentialdifferenzen zwischen den verschiedenen Punkten des Leiters ausgeglichen sind. Die Metalle sind unter allen Verhältnissen Leiter der Elektrizität, und die letztere kann sich durchaus frei in ihnen bewegen und unter dem Einflusse auch der geringsten elektrischen Kräfte entsteht in dem metallischen Leiter ein elektrischer Strom. Soll innerhalb eines metallischen Leiters keine Strömung der Elektrizität stattfinden und elektrostatisches Gleichgewicht herrschen, so muß *im Innern des Leiters die Feldstärke überall gleich Null sein*. Daraus ergibt sich nach den Gleichungen (f) auf S. 224, daß *im Falle des elektrostatischen Gleichgewichtes im Inneren eines Leiters das Potential konstant ist*.

Wir betrachten einen metallischen Leiter, dem eine elektrische Ladung mitgeteilt ist. Die Ladung des Leiters befindet sich nur an seiner Oberfläche. Da nach dem Vorhergehenden im Inneren des Leiters die Feldstärke gleich Null ist, so ist der Kraftfluß, der durch eine beliebige ganz im Inneren des Leiters liegende geschlossene Fläche hindurchgeht, gleich Null, und daher können im Inneren dieser Fläche keine Ladungen sich befinden. Im Inneren und auf der Oberfläche des metallischen Leiters muß das Potential konstant sein, nachdem das elektrostatische Gleichgewicht eingetreten ist. Die Oberfläche des Leiters ist eine Niveauläche und von ihr gehen die Kraftlinien in senkrechter Richtung in den den Leiter umgebenden Raum.

Handelt es sich um eine geschlossene Fläche aus Metall, deren Hohlraum frei von Ladungen ist, so ist nach Eintritt des elektrostatischen Gleichgewichtes im ganzen Hohlraum der Fläche die Feldstärke gleich Null. Die Erfahrung lehrt, daß sich im Inneren eines geschlossenen hohlen Leiters kein elektrisches Feld befindet. Die dem hohlen metallischen Leiter mitgeteilte Ladung kann nach dem Gauss'schen Satze also nur an der Oberfläche vorhanden sein.

Befindet sich ein geladener Leiter A (Fig. 71) im Inneren einer metallischen Schale BC , so wird die Elektrizität in der letzteren verteilt. Ist A positiv geladen, so wird die innere Fläche B negativ elektrisch und die äußere Fläche C positiv

elektrisch. Im Inneren der metallischen Schale BC ist das Potential konstant und die Feldstärke gleich Null. Betrachten wir also im Inneren von BC die geschlossene Fläche D , so ist

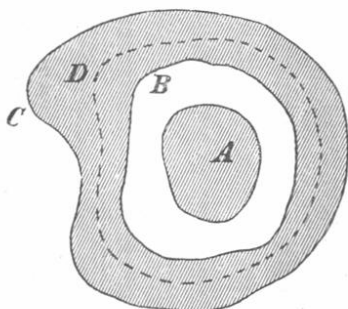


Fig. 71.

der sie durchsetzende Kraftfluß gleich Null. Nach dem Gaußschen Satze muß also die Summe der Ladungen innerhalb D gleich Null sein. Demnach ist die positive Ladung auf A dem Betrage nach gleich der negativen Ladung auf der inneren Fläche B der Schale. Die hier betrachtete elektrische Verteilung nennen wir eine *vollständige Verteilung*. Auf der

äußeren Fläche C ist eine positive Ladung vom gleichen Betrage wie auf A . Von der Oberfläche der metallischen Schale geht demnach ein gesamter Kraftfluß in den umgebenden Raum, der gerade der Ladung entspricht, die mit dem Körper A in das Innere der metallischen Schale gebracht ist. Ferner schützt die Hülle BC ihr Inneres gegen die Einwirkung eines jeden äußeren Feldes.

Ein metallischer Leiter habe eine elektrische Ladung und befinde sich im Luftraum. Im Inneren des Leiters und im Luftraume ist keine elektrische Ladung vorhanden, indem dort überall

$$\varrho = 0 \quad \text{und also} \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\nabla^2 \varphi = 0$$

ist. In der Umgebung des metallischen Leiters ist ein wirbelfreies Feld vorhanden. An seiner Oberfläche und in seinem Inneren ist das Potential konstant; der Gradient des Potentials, d. h. die Feldstärke muß im Inneren des Leiters gleich Null sein.

An der Oberfläche des Leiters haben wir eine flächenhafte Verteilung mit der Dichte η . Nach der Gleichung § 62 (h) ist nämlich

$$\mathfrak{E}_{n1} - \mathfrak{E}_{n2} = 4\pi\eta.$$

Da im Inneren des metallischen Leiters $\mathfrak{E}$ gleich Null ist, so erhalten wir für die an der Oberfläche senkrecht nach außen wirkende Feldstärke $\mathfrak{E}_{n1} = \mathfrak{E}_n$

$$(a) \quad \mathfrak{E}_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi \eta,$$

d. h. die Feldstärke an der Oberfläche des metallischen Leiters ist gleich der Flächendichte η multipliziert mit 4π . Ist das wirbelfreie Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ gegeben, so kann nach der letzten Gleichung die Flächendichte oder die Verteilung der Ladungen ermittelt werden.

§ 64. Der Greensche Satz.

Nach der Gleichung (g) S. 224 muß die Feldstärke $\mathfrak{E}$ als negativer Gradient eines Skalars φ betrachtet werden, indem $\mathfrak{E} = -\nabla \varphi$ gesetzt werden kann. $\nabla \varphi$ entsteht, wenn wir den *Hamiltonschen Operator*

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

auf den Skalar φ einwirken lassen. i, j, k sind die früher (vgl. S. 6) eingeführten Einheitsvektoren. Durch diese Einwirkung entsteht also der Vektor $\mathfrak{E}$.

$$(a) \quad \mathfrak{E} = - \left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = - \nabla \varphi.$$

Läßt man jedoch den Hamiltonschen Operator auf einen Vektor einwirken, so entsteht ein Skalar, indem durch skalare Multiplikation sich ergibt

$$(b) \quad \begin{cases} \nabla \mathfrak{E} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (i \mathfrak{E}_x + j \mathfrak{E}_y + k \mathfrak{E}_z), \\ \nabla \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \text{div } \mathfrak{E}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \text{div } \nabla \varphi &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi, \end{aligned}$$

und demnach

$$\text{div } \mathfrak{E} = - \nabla^2 \varphi.$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ wird dabei als *Laplacescher Operator* bezeichnet [vgl. § 62 (g)].

Wir betrachten jetzt einen Vektor $\mathfrak{A}$, der das Produkt aus dem Skalar Ψ und einem Vektor $\mathfrak{B}$ sein soll, indem

$$\mathfrak{A} = \Psi \mathfrak{B}$$

ist. Dann wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{div} \Psi \mathfrak{B} = \frac{\partial (\Psi \mathfrak{B}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\Psi \mathfrak{B}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\Psi \mathfrak{B}_z)}{\partial z},$$

indem $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$ und $\mathfrak{B}_z$ die Komponenten des Vektors $\mathfrak{B}$ sind. Ferner ergibt sich

$$(c) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \Psi \operatorname{div} \mathfrak{B} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathfrak{B}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathfrak{B}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \mathfrak{B}_z,$$

wobei $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ als die Komponenten des Vektors $\nabla \Psi$ anzusehen sind. Also finden wir

$$\operatorname{div} \Psi \mathfrak{B} = \Psi \operatorname{div} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \nabla \Psi.$$

Wendet man nun auf den Vektor $\mathfrak{A} = \Psi \mathfrak{B}$ den *Gaußschen Satz* an, so ergibt sich nach der Gleichung § 62 (e)

$$(c') \quad \int \Psi \mathfrak{B}_n df = \int (\Psi \operatorname{div} \mathfrak{B} + \mathfrak{B} \nabla \Psi) dv.$$

Dabei ist die Integration links über alle Elemente der geschlossenen Oberfläche zu erstrecken, und das Integral rechts bezieht sich auf alle in der geschlossenen Fläche enthaltenen Raumelemente. Führt man einen neuen Vektor $\nabla \varphi = \mathfrak{B}$ ein, so ergibt sich

$$(d) \quad \int \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \left\{ \Psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi \nabla \Psi) \right\} dv.$$

Dabei ist $\mathfrak{B}$ als Gradient des Skalars φ anzusehen. Wir setzen voraus, daß die Skalare φ und Ψ sowie deren Gradienten in dem von der Fläche f umschlossenen Raume endliche und stetige Funktionen sind. Die Gleichung (d) stellt den Green'schen Satz dar. Vertauschen wir die beiden Skalare φ und Ψ miteinander, so ergibt sich

$$\int \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} df = \int \left\{ \varphi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Psi \nabla \varphi) \right\} dv.$$

Durch Subtraktion der linken und der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen erhalten wir dann

$$(e) \quad \int \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) df = \int (\Psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \Psi) dv.$$

Die Gleichung (d) können wir auch in der Form

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df &= \int \Psi \cdot \nabla^2 \varphi dv \\ &+ \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dv \end{aligned} \right.$$

darstellen.

Der Greensche Satz ist von großer Wichtigkeit für zahlreiche Probleme der Elektrostatik und der Potentialtheorie überhaupt.

Setzen wir in (e) $\Psi = 1$, also

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0,$$

so ergibt sich

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \nabla^2 \varphi dv.$$

Ist nur außerhalb des betrachteten Raumes freie Elektrizität vorhanden, so ist innerhalb dieses von der Fläche f abgeschlossenen Raumes $\nabla^2 \varphi$ nach § 62 (g) gleich Null. In diesem Falle ist

$$(g) \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = 0,$$

wenn das Integral über alle Elemente der geschlossenen Fläche erstreckt wird. Die Gleichung (g) sagt aus, daß die gesamte aus der Fläche f heraustretende Kraftströmung gleich Null ist, indem durch die geschlossene Fläche ebenso viele Kraftlinien eintreten in den abgeschlossenen Raum wie aus diesem heraustreten. Ist aber in dem betrachteten Raume die freie Elektrizität mit der Dichte ϱ verteilt, so ist nach § 62 (d) $\nabla^2 \varphi = -4\pi\varrho$, und wir erhalten

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = -4\pi \int \varrho dv.$$

$\int \varrho dv$ ist die im betrachteten Raume enthaltene Ladung e , sodaß

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = -4\pi e$$

wird. Damit sind wir zum Gauss'schen Satze § 61 (a) zurückgekommen.

Der Greensche Satz kann ferner dazu benutzt werden, um aus der Verteilung der Ladungen das Potential und damit

die Feldstärke zu bestimmen. In der Gleichung (e) bedeuten φ und Ψ Skalare, die nebst ihren ersten Ableitungen im ganzen Raume endlich und stetig sind. Das gesuchte Potential sei φ , und Ψ sei gleich $1/r$, indem r der Abstand von einem beliebigen Punkte A im Raume ist. Damit $1/r$ endlich bleibt, soll der Punkt A durch eine ihn umschließende Kugelfläche von dem übrigen Raume abgesondert werden. f_1 sei die Oberfläche dieser Kugel mit dem Mittelpunkte A . Der Raum, auf den sich die Integration

$$\int (\Psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \Psi) dv$$

in (e) bezieht, ist begrenzt von der Kugelfläche um A und einer Fläche f , die alle im Endlichen liegenden Ladungen umschließt. Über beide Flächen ist auch das auf der linken Seite der Gleichung (e) stehende Flächenintegral zu erstrecken. Rückt die Fläche f ins Unendliche, so verschwindet das über diese Fläche erstreckte Integral

$$\int \left(\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) df = \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} df,$$

indem φ wie $1/r$ und $\partial \varphi / \partial n$ wie $1/r^2$ abnehmen mit wachsender Ausdehnung der Oberfläche, während df zunimmt wie r^2 . Als Flächenintegral bleibt also nur das über die Kugelfläche f_1 erstreckte übrig, wobei die Normale von der Kugelfläche aus nach dem Mittelpunkte gerichtet ist. Wir haben also

$$(h) \quad \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} df_1 = \int \left\{ \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \right\} dv.$$

Wird der Radius der Kugel um A unendlich klein, so verschwindet das Integral

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} df_1,$$

und ferner ist

$$-\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} df_1 = -\int \frac{\varphi}{r^2} df_1 = -4\pi \varphi,$$

indem φ das gesuchte Potential in A ist. Da ferner nach § 62 (d)

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho \quad \text{und} \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

ist, so finden wir aus (h) für das Potential im Punkte A

$$\varphi = \int \frac{\rho \, dv}{r}.$$

§ 65. Die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche einer Kugel und eines Ellipsoids.

Betrachten wir eine isolierte Kugel A im Luftraum, auf welche die elektrische Ladung e übertragen ist, so verteilt sich die Ladung gleichmäßig, und die Flächendichte wird

$$\eta = \frac{e}{4\pi R^2},$$

wenn R der Radius der Kugel ist. Legt man um die Kugel eine mit ihr konzentrische Kugelfläche B mit dem Radius r , so geht durch diese Kugelfläche der Kraftfluß $4\pi e$. Auf der letzteren sind die Kraftlinien gleichmäßig verteilt, und durch die Flächeneinheit der Kugelfläche B mit dem Radius r tritt von innen nach außen der Kraftfluß

$$\frac{4\pi e}{4\pi r^2} = \frac{e}{r^2}.$$

An der Kugelfläche B ist also die Feldstärke

$$(a) \quad \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_r = \frac{e}{r^2}.$$

Das Potential des wirbelfreien Feldes außerhalb der Kugel A wird daher

$$(b) \quad \varphi = \frac{e}{r} + c,$$

wo c eine Konstante bedeutet.

An der Oberfläche der Kugel A selbst und im Innern der Kugel A ist das Potential

$$(c) \quad \varphi_0 = \frac{e}{R} + c.$$

Der von der Oberfläche der Kugel A ausgehende Kraftfluß endigt in Wirklichkeit an Leitern, die sich in der Nähe oder an den Wänden des Beobachtungsraumes befinden, und

bringt auf diesen eine entgegengesetzte Ladung hervor, die dem Betrage nach gleich der auf der Kugel A ist. Die gesamte Elektrizitätsmenge eines elektrischen Feldes muß immer gleich Null sein. Haben die die Kugel umgebenden Leiter von ihr solche Abstände, die unendlich groß sind im Vergleiche mit ihrem Radius, so ist das Potential an diesen Leitern gleich c . Für Messungen dürfen wir in willkürlicher Festsetzung annehmen, daß das Potential der Erde und der mit ihr verbundenen Leiter gleich Null ist. Dadurch sind wir erst in der Lage, das Potential eines Körpers zu messen, da mit den Meßinstrumenten nur die Bestimmung von Potentialdifferenzen möglich ist. Haben also die Wände des Beobachtungsraumes das Potential Null, so wird $c = 0$, und die Potentialdifferenz zwischen der Kugel A und der Erde oder kurzweg das Potential der Kugel A ist

$$\varphi_0 = \frac{e}{R}.$$

Das Verhältnis der Ladung der Kugel zu ihrem Potential nennen wir die *Kapazität* K der Kugel.

$$(d) \quad K = \frac{e}{\varphi_0} = R,$$

d. h. die *Kapazität einer Kugel ist gleich ihrem Radius*, wobei vorausgesetzt werden muß, daß alle anderen Leiter sich in Abständen von der Kugel befinden, die unendlich groß im Vergleiche zu ihrem Radius sind. Nach (d) ist die *Dimension der Kapazität eine Länge*.

Die die Kugel umschließenden Niveauflächen sind mit ihr konzentrische Kugelflächen.

Wir betrachten jetzt die Verteilung auf einem *Ellipsoid* mit den Halbachsen a , b und c . Das Ellipsoid habe die Ladung e . Wir wollen von der naheliegenden Annahme ausgehen, daß die Niveauflächen konfokale Ellipsoide sind. Das System dieser Flächen ist durch die Gleichung

$$(e) \quad F = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

gegeben. Die Feldstärke und das Potential φ müssen eine Funktion von λ sein. Wir setzen

$$\varphi = f(\lambda).$$

Dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}.$$

Analoge Ausdrücke gelten für $\partial \varphi / \partial y$ und $\partial \varphi / \partial z$. Demnach erhalten wir

$$(f) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \nabla^2 \lambda.$$

Zur Abkürzung wird

$$A = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}$$

und

$$B = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^3} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^3} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^3}$$

gesetzt. Dann ergibt sich

$$(g) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2 + \lambda} - A \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$$

und

$$(h) \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2 + \lambda)^2} - 2B \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Ähnliche Ausdrücke erhalten wir für

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{und für} \quad \frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$(i) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2 + \lambda} - A \cdot \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + 2B \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 - \frac{8x^2}{A(a^2 + \lambda)^3} = 0.$$

Aus der Gleichung (g) ergibt sich, daß

$$(k) \quad A^2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right] = 4A$$

ist. Ferner erhalten wir aus der Gleichung (i) mit Rücksicht auf (k)

$$(l) \quad A \cdot \nabla^2 \lambda = \frac{2}{a^2 + \lambda} + \frac{2}{b^2 + \lambda} + \frac{2}{c^2 + \lambda}.$$

Die Gleichung (f) können wir nun in Rücksicht auf (k) und (l) in der Form schreiben

$$(m) \quad A \cdot \nabla^2 \varphi = 4 \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \left(\frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right).$$

Außerhalb des Ellipsoids im Luftraume ist $\nabla^2 \varphi = 0$. Bezeichnen wir mit C_1 und C_2 unveränderliche Größen, so ist nach (m)

$$(n) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \frac{C_1}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}$$

und

$$(o) \quad \varphi = - C_1 \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} + C_2.$$

In den Punkten, die von der Oberfläche des Ellipsoids unendlich weit entfernt sind, und für welche also $x = y = z = \infty$ ist, soll φ gleich Null sein. Für diese Punkte ist nach (e) auch $\lambda = \infty$. Das Potential φ in einem beliebigen Punkte (x, y, z) ist

$$(p) \quad \varphi = C_1 \cdot \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}},$$

wobei sich λ aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

ergibt.

Hat das Ellipsoid die Ladung e erhalten, so ist das Potential in einem sehr weit vom Ellipsoid entfernten Punkte gleich $e/\sqrt{\lambda}$. Berechnet man nach (p) das Potential für einen Punkt, der sehr weit vom Ellipsoid entfernt ist, und für den a^2, b^2, c^2 gegen λ sehr klein sind, so ergibt sich durch Vergleichung $C_1 = e/2$. Somit

$$(q) \quad \varphi = \frac{e}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Die Komponenten der zur Niveaufläche senkrechten Feldstärke $\mathfrak{E}_n$ nach den Koordinatenachsen sind gegeben durch

$$\mathfrak{E}_x = - \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \mathfrak{E}_y = - \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = - \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{E}_n$ ist

$$\mathfrak{E}_n = - \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}.$$

In Rücksicht auf die Gleichungen (k) und (q) erhalten wir

$$\mathfrak{E}_n = - \frac{2}{\sqrt{A}} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{e}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Bezeichnet man mit N das vom Mittelpunkte des Ellipsoids auf die im Punkte (x, y, z) an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällte Lot, so ist

$$\sqrt{A} = \frac{1}{N},$$

und damit ergibt sich

$$\mathfrak{E}_n = \frac{e N}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

An der Oberfläche des Ellipsoids selbst ist die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_{n(\lambda=0)} = \frac{e N}{a b c}$$

und also ist dort die Flächendichte

$$(r) \quad \eta = \frac{e N}{4 \pi a b c}.$$

Die Dichte η in einem Punkte der Oberfläche des Ellipsoids ist demnach dem Lote proportional, das vom Mittelpunkte auf die in dem betrachteten Punkte an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällt wird.

Einige spezielle Fälle haben besonderes Interesse. Bei einem *Rotationsellipsoid* ist $a = b$, und für das Potential φ_0 an der Oberfläche des Rotationsellipsoids erhalten wir nach (q)

$$\varphi_0 = \frac{e}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \cdot \sqrt{c^2 + \lambda}}.$$

Demnach ist für $a > c$

$$(s) \quad \varphi_0 = \frac{e}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right),$$

für $a = c$

$$(t) \quad \varphi_0 = \frac{e}{a},$$

und schließlich für $a < c$

$$(u) \quad \varphi_0 = \frac{e}{2\sqrt{c^2 - a^2}} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - a^2}}{c - \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Setzen wir in (s) $c = 0$, so ergibt sich für die *Kapazität einer runden Scheibe*

$$(v) \quad K = \frac{e}{\varphi_0} = \frac{2a}{\pi}.$$

Für ein *gestrecktes Rotationsellipsoid*, dessen Länge $2c$ sehr groß im Vergleiche zum Durchmesser $2a$ des Äquators ist, erhalten wir nach (u)

$$\varphi_0 = \frac{e}{c} \cdot \log \frac{2c}{a}$$

und für die Kapazität

$$(w) \quad K = \frac{e}{\varphi_0} = \frac{c}{\log \frac{2c}{a}}.$$

Demnach ist die *Kapazität eines stabförmigen Leiters*, z. B. eines Drahtes mit kreisförmigem und nach den Enden hin abnehmenden Querschnitte um so kleiner, je geringer bei gegebener Länge $2c$ seine Dicke $2a$ ist.

Die *Oberflächendichte η des Ellipsoids* ist nach der Gleichung (r)

$$\eta = \frac{e}{4\pi a b c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Wird z mittels der Gleichung des Ellipsoids eliminiert und ist c unendlich klein, so ergibt sich für die *Dichte auf einer elliptischen Scheibe* mit den Halbachsen a und b

$$\eta = \frac{e}{4\pi a b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Ist die *Scheibe kreisförmig*, also $a = b$, und setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so folgt

$$\eta = \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

In einem Punkte, dessen Abstand u vom Rande sehr klein ist, wird

$$\eta = \frac{e}{4\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2au}}.$$

Demnach wäre also die Dichte umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Abstände des betrachteten Punktes vom Rande.

§ 66. Elektrische Kraftlinien und Niveauflächen im Luftraume.

Alle Einwirkungen, durch welche Elektrizität hervorgebracht wird, wie Reibung, Verteilung usw., bringen gleich

große Mengen positiver und negativer Elektrizität hervor; man ist deshalb zu der Annahme berechtigt, daß in jedem unelektrischen Körper gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität vorhanden sind. A und B (Fig. 72) seien zwei durch Reibung elektrisierte Körper, die allmählich weiter und weiter voneinander, wie in Fig. 73, entfernt werden; dabei behalten sie ihre gleich großen, aber entgegengesetzten Ladungen. A und B seien isolierte Leiter. Vom Umfange eines Oberflächenelementes df auf A seien die Kraftlinien konstruiert, die auf B ein Flächenelement df' begrenzen. Der von den Kraftlinien und den beiden Elementen df und df' begrenzte Raum ist eine *Kraftröhre*. Ist auf df die Dichte η , auf df' die Dichte η' , so ist

$$\eta \cdot df = \eta' \cdot df'.$$

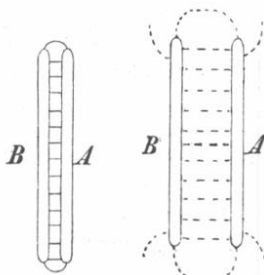


Fig. 72.

Fig. 73.

Dies ergibt sich leicht aus dem Gauss'schen Satze, wenn wir eine Fläche durch df und df' legen, die umhüllt wird von den durch die Begrenzung von df und df' gehenden Kraftlinien. Der von dieser Fläche begrenzte Raum möge in das Innere der Leiter A und B hineinragen und hier abgeschlossen sein durch Flächenelemente, die parallel bzw. zu df und df' sind. Die zur Oberfläche des betrachteten Raumes senkrechte Komponente der Feldstärke ist überall gleich Null; also ist auch die Summe der von der Fläche umschlossenen Ladungen gleich Null, d. h. $\eta \cdot df = \eta' \cdot df'$. Die Oberflächendichten auf den beiden geladenen Konduktoren A und B sind also den Flächen, die von der Kraftröhre auf ihnen abgegrenzt werden, umgekehrt proportional.

Ist der Konduktor A mit der positiven Elektrizitätsmenge e geladen, und wird die Oberfläche von A in e Teile zerlegt, von denen jeder eine Einheit der Elektrizitätsmenge enthält, so zerlegen die von der Umgrenzung der e Teile auf A gezogenen Kraftlinien die Fläche B ebenfalls in e Teile, von denen jeder eine negative Elektrizitätseinheit besitzt.

Hat ein Leiter $ABCD$ (Fig. 74) die Ladung e und das Potential φ , so sind die äquipotentiellen Flächen Kugeln in

einem Abstände, der sehr groß gegen die Dimensionen des Leiters ist. Wird die äquipotentielle Fläche, deren Potential $\varphi - 1$ ist, konstruiert, so ist diese dem Leiter am nächsten an den Punkten A , B und D (Fig. 74). An diesen Punkten ist auch die Feldstärke und ebenso die Oberflächendichte am größten. Dort liegen die Kraftlinien am dichtesten beieinander. Hat der Konduktor nach außen hervortretende Kanten oder Spitzen, so wird an diesen die Dichte sehr groß; die letztere wird unendlich groß an einer vollkommen scharfen Kante.

Hierauf beruht die sogenannte *Spitzenwirkung*; an den Spitzen ist die Dichte der Elektrizität am größten, und daher

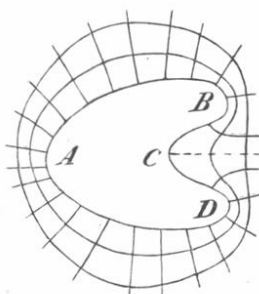


Fig. 74.

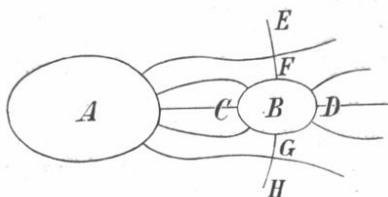


Fig. 75.

strömt die Elektrizität besonders an den Spitzen leicht aus, die sich am Leiter befinden.

Ist A (Fig. 75) ein mit positiver Elektrizität geladener Leiter, B ein isolierter Leiter ohne Ladung, so ist an allen Stellen des Körpers B , die von den von A ausgehenden Kraftlinien getroffen werden, negative Elektrizität vorhanden. Von den anderen Punkten auf B gehen wiederum Kraftlinien aus; die Zahl der auf B treffenden ist der Zahl der von B auslaufenden gleich (vgl. S. 228 (c)). Die Oberfläche von B besteht demnach aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Ladungen. Die Teile sind durch eine um den Körper B verlaufende Kurve getrennt, längs welcher die Oberflächendichte η und also auch die elektrische Feldstärke Null ist. Diese Kurve ist die Schnittlinie zwischen B und einer äquipotentiellen Fläche EH um A .

Nach § 8 sind die *Flächen konstanten Potentials* oder die *Niveauflächen* senkrecht zur Richtung der elektrischen Kraft. Haben wir zwei unendlich nahe benachbarte Niveauflächen, so ist nach § 8 in jedem Punkte der einen die Feldstärke um-

gekehrt proportional dem Abstände der Flächen. Wird von einem Punkte an der Oberfläche eine Kraftlinie $PP_1P_2P_3$ (Fig. 76) gezogen und werden die Punkte P_1, P_2, P_3 usw. so gewählt, daß $\mathfrak{E} \cdot PP_1 = \mathfrak{E}_1 \cdot P_1P_2 = \mathfrak{E}_2 \cdot P_2P_3$ usw., wo $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ die Feldstärken in den Punkten P_1, P_2 bezeichnen, so kann diese Gleichung beliebig weit fortgesetzt werden. Zeichnen wir die Niveaulächen in solcher Weise, daß beim Übergange von der einen Niveauläche bis zur nächsten das Potential stets um denselben Betrag zu oder abnimmt, so ist an jeder Stelle des Raumes $\mathfrak{E}_h \cdot (P_h P_{h+1}) = \text{konst.}$ Je weiter wir uns dann von den wirksamen Massen entfernen, desto größer wird der Abstand der aufeinanderfolgenden Niveaulächen. Ist die Größe der Feldstärke $\mathfrak{E}$ an einer der Niveaulächen gegeben, so ergibt sich ihre Größe an einem anderen Punkte der Figur durch den Abstand der aufeinander folgenden Niveaulächen, und ist die Größe der Feldstärke $\mathfrak{E}$ an der Oberfläche des Körpers gegeben, so kann ihre Größe in jedem anderen Punkte aus der Lage der Niveaulächen bestimmt werden.

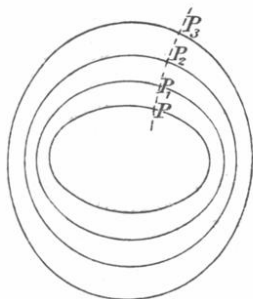


Fig. 76.

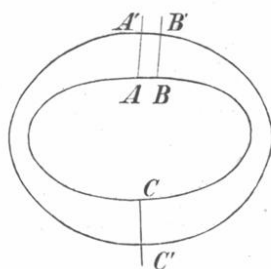


Fig. 77.

ABC (Fig. 77) sei ein Leiter, an dessen Oberfläche das Potential konstant und gleich φ ist, und $A'B'C'$ sei eine äquipotentielle Fläche vom Potential φ_1 . Wir stellen uns vor, daß die Ladungen der einzelnen Flächenelemente, z. B. $AB = df$, nach außen in der Richtung der Kraftlinien bewegt und auf die Fläche $A'B'C'$ übertragen werden. Ist letztere Fläche ein metallischer Leiter, so ist die übertragene Elektrizität auf ihr im Gleichgewichte. Wenn innerhalb der Fläche $A'B'C'$ das Potential φ_1 ist, und außerhalb derselben das Potential seinen

früheren Wert behält, so ist für alle äußeren Punkte die Bedingung $\nabla^2 \varphi = 0$ erfüllt. Die elektrischen Kräfte in AB und $A'B'$ seien bzw. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, so haben wir nach § 62 (e), da AB und $A'B'$ von Kraftlinien begrenzt sind,

$$AB \cdot \mathfrak{E} = A'B' \cdot \mathfrak{E}'.$$

Sind η und η' die Dichten bzw. in AB und $A'B'$, so ist ferner

$$AB \cdot \eta = A'B' \cdot \eta'.$$

Wir finden also

$$\frac{\mathfrak{E}}{\eta} = \frac{\mathfrak{E}'}{\eta'}.$$

Es ist aber $\mathfrak{E} = 4\pi\eta$ und also auch $\mathfrak{E}' = 4\pi\eta'$.

Teilen wir demnach die Oberfläche des Leiters in Elemente, von denen jedes die elektrische Menge Eins enthält, und ziehen wir von der Begrenzung des Elementes aus Kraftlinien, so begrenzen diese eine Röhre. Die Röhre durchschneidet die den Leiter umgebenden Niveaulächen in solcher Weise, daß für alle Flächen

$$\frac{\mathfrak{E}'}{\eta'} = \frac{\mathfrak{E}''}{\eta''} = \dots = \frac{\mathfrak{E}}{\eta}$$

ist. Aus der Gestalt der Kraftröhren erhalten wir ein Bild für die Verteilung der elektrischen Feldstärke im Raume. Somit können wir aus der Verteilung der Kraftlinien direkt die Anziehungs- und Abstoßungskräfte erkennen. Zwei in demselben Sinne laufende Kraftlinien stoßen sich ab, sodaß die Abstoßung der Spannung, die in der Kraftlinie auftritt (vgl. § 33), das Gleichgewicht hält.

§ 67. Kondensatoren.

Wir behandeln zunächst den *Plattenkondensator* (Fig. 78), der aus zwei ebenen und parallelen Metallplatten besteht. Der Abstand der Platten sei sehr klein gegenüber den Dimensionen der Platten. Zwischen den Platten entsteht dann ein fast gleichförmiges elektrisches Feld, indem dort der Kraftfluß für alle Elemente einer den Platten parallelen Ebene gleich groß ist. Auf der einen Platte sei die Flächendichte $+\eta$, sodaß die Ladung dieser Platte $S \cdot \eta$ ist, wenn mit S die Größe der Platte bezeichnet wird. Auf der anderen Platte ist die

Flächendichte $-\eta$ und die Ladung $-S\eta$ vorhanden. Außer diesen Ladungen sind keine weiteren vorhanden. Wir setzen auch voraus, daß die Platten sich im Lufttraume befinden, und daß in ihrer Nähe keine Metallmassen vorhanden sind.

Um die Größe und Richtung der Feldstärke im Luftzwischenraum zwischen den Platten zu bestimmen, beachten wir, daß für das Potential die folgenden Gleichungen bestehen.

1. Im Raume zwischen den Platten ist

$$(a) \quad \nabla^2 \varphi = 0,$$

2. an der Oberfläche der Platten ist

$$(b) \quad \mathfrak{E}_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\eta,$$

indem n die von der Platte nach dem Luftzwischenraum gezogene Normale der Fläche ist.

In Fig. 78 seien S_1 und S_2 die beiden Platten des Kondensators und d der Abstand dieser Platten. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, dessen x -Achse auf der Mitte von S_1 und S_2 senkrecht steht. Ist d sehr klein, so hängt φ allein von x ab, und die Gleichung (a) lautet

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0.$$

Demnach wird

$$(c) \quad \varphi = ax + b.$$

Um die Konstante a zu bestimmen, benutzen wir zunächst die Gleichung (b). An der Platte S_1 fällt die Richtung der Normalen in die x -Achse, während an der Platte S_2 die Normale der x -Achse entgegengerichtet ist. Wir haben also an S_1

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{x=0} = a = -4\pi\eta.$$

Wenden wir die Gleichung (b) an auf die Platte S_2 , so ergibt sich unter Beachtung des Vorzeichens dasselbe. Die Konstante b läßt sich erst dann feststellen, wenn wir den Wert des Potentials von S_2 angeben. Hat das Potential auf S_2 den Wert φ_2 , so wird nach (c)

$$\varphi_2 = -4\pi\eta d + b,$$

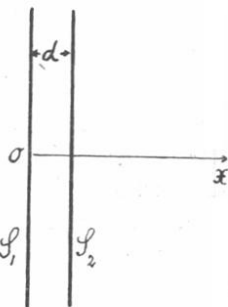


Fig. 78.

und somit ergibt sich

$$(d) \quad \varphi = 4\pi\eta(d-x) + \varphi_2.$$

Ist φ_1 das Potential an der Platte S_1 , so wird

$$(e) \quad \varphi_1 = 4\pi\eta d + \varphi_2.$$

Die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ zwischen den Platten ist gleich $4\pi\eta d$. Das Verhältnis der positiven Ladung zur Potentialdifferenz zwischen der positiv und der negativ geladenen Platte heißt die *Kapazität* K . Wir finden

$$(f) \quad K = \frac{\eta S}{4\pi\eta d} = \frac{S}{4\pi d}.$$

Demnach ist die Kapazität K proportional der Oberfläche der Platten und umgekehrt proportional dem Abstände der Platten.

Da φ nur von x abhängt, so liegt der Vektor der Feldstärke $\mathfrak{E}$ parallel der x -Achse und nach der Gleichung (d) wird

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4\pi\eta.$$

Durch jede zu den Platten parallele Flächeneinheit im Zwischenraum zwischen den Platten gehen $4\pi\eta$ Kraftlinien. In diesem Teil des Feldes sind ferner die Kraftlinien parallel. Das elektrische Feld im Luftzwischenraum ist also *homogen*, wenn wir von den Teilen des Feldes in der Nähe des Randes der Platten absehen. Die entwickelten Gleichungen gelten streng genommen nur für zwei unendlich große Kondensatorplatten.

Wir wenden jetzt die Gleichungen an auf den *Kugelkondensator*. Eine geladene metallische Kugel habe den Radius R_1 und enthalte die Ladung e . Aus Symmetriegründen ist anzunehmen, daß die Ladung gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt ist, sodaß auf dieser die Flächendichte $\eta_1 = e/4\pi R_1^2$ ist.

Durch eine zur Kugel konzentrische Kugelfläche mit dem Radius r geht der Kraftfluß

$$4\pi e = \int dS \cdot \mathfrak{E}_r = 4\pi r^2 \mathfrak{E}_r,$$

sodaß

$$\mathfrak{E}_r = \frac{e}{r^2}$$

ist. Nun soll

$$\mathcal{E}_r = - \frac{d\varphi}{dr}$$

sein, indem ebenso wie die Feldstärke auch das Potential allein von r abhängt. φ muß der Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ genügen. Da aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{x}{r}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{dr} \frac{x^2}{r^3}$$

ist, und ähnliche Gleichungen für die Ableitungen von φ nach y und z gelten, so wird

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Da aber

$$\frac{d(r\varphi)}{dr} = r \frac{d\varphi}{dr} + \varphi$$

und

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = r \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + 2 \frac{d\varphi}{dr}$$

ist, so wird

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}.$$

Weil $\nabla^2 \varphi = 0$ ist, so muß demnach

$$\frac{d(r\varphi)}{dr} = \text{const.}$$

sein. Durch Integration erhält man

$$\varphi = \frac{a}{r} + b,$$

wo a und b Konstante sind. An der Kugelfläche ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{r=R_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R_1} = - \frac{a}{R_1^2} = - 4\pi \eta_1.$$

Demnach ist $a = 4\pi R_1^2 \eta_1$, also gleich der Ladung e auf der Kugel mit dem Radius R_1 .

Die Kugel mit dem Radius R_1 sei umgeben von einer konzentrischen metallischen Kugel, deren Radius R_2 sei. Auf die innere Fläche dieser Kugel trifft der Kraftfluß $4\pi e$, sodaß auf der Innenseite der Kugel die Ladung $-e$ vorhanden ist, während auf der Außenseite die Ladung $+e$ sich befindet, von der in den umgebenden Luftraum wieder der Kraftfluß $4\pi e$

ausgeht. Die Kugel R_2 sei mit der Erde leitend verbunden, dann ist nur auf ihrer Innenseite eine Ladung im Betrage $-e$ vorhanden, sodaß daselbst die Flächendichte

$$\eta_2 = -\frac{e}{4\pi R_2^2}$$

ist. An ihrer Oberfläche ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{r=R_2} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R_2} = +\frac{a}{R_2^2} = -4\pi\eta_2.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen finden wir

$$a = +4\pi R_1^2 \eta_1 = -4\pi R_2^2 \eta_2 = e.$$

Da $\varphi = \varphi_2$ an der Kugel R_2 gleich Null ist, so haben wir

$$0 = \frac{e}{R_2} + b, \quad \text{also} \quad b = -\frac{e}{R_2}.$$

Demnach wird

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{R_2} = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

und das Potential φ_1 auf der inneren Kugel

$$\varphi_1 = e\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = e\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Beide Kugeln zusammen bilden einen Kondensator, dessen Kapazität K

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

ist. Bei sehr geringem Unterschiede zwischen den Radien R_2 und R_1 kann die Kapazität sehr groß werden.

Die elektrische Feldstärke im Zwischenraum zwischen den Kugeln ist

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{e}{r^2},$$

d. h. die Ladung auf der Kugel R_1 wirkt in derselben Weise, wie wenn die Ladung e im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre.

Wird der Kugelradius R_2 unendlich groß, so ist die Kapazität des Kugelkondensators gleich R_1 . Da die gesamte Elektrizitätsmenge im Felde gleich Null sein muß, so befindet sich die Ladung $-e$ in diesem Falle auf entfernten Leitern oder an den Wänden des Zimmers, in dem die Kugel R_1 aufgestellt ist (s. S. 242).

Für einen *Kondensator mit zwei coaxialen Zylinderflächen* A_1 und A_2 erhalten wir das Folgende. Im Luftraume zwischen den Zylinderflächen ist wiederum $\nabla^2 \varphi = 0$. Im vorliegenden Falle werden die Niveaulächen im Luftzwischenraum coaxiale Zylinderflächen sein. Wir legen die z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Richtung der Zylinderachse. Das Potential ist nur eine Funktion des Abstandes r von der Zylinderachse, wobei $r^2 = x^2 + y^2$ ist. Da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d \varphi}{d r} \frac{x}{r}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{d r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{d r} - \frac{x^2}{r^3} \frac{d \varphi}{d r} \text{ usw.}$$

ist, und weil $\partial \varphi / \partial z = 0$ ist, so erhalten wir

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{d r} = \frac{1}{r} \frac{d \left(r \frac{d \varphi}{d r} \right)}{d r} = 0.$$

Das Integral lautet

$$\varphi = c \log r + c_1.$$

Die Radien der Zylinderflächen seien r_1 und r_2 . Auf der inneren Zylinderfläche sei die Flächendichte η_1 und auf der Längeneinheit des Zylinders befinde sich die Ladung $e_1 = 2\pi r_1 \eta_1$. Wir haben dann

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{r=r_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_1} = \frac{c}{r_1} = -4\pi \eta_1,$$

also ist

$$c = -4\pi r_1 \eta_1 = -2e_1.$$

An der inneren Seite des Zylinders, dessen Radius r_2 ist, haben wir

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{r=r_2} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_2} = - \frac{c}{r_2} = -4\pi \eta_2.$$

Also ist auch $c = 4\pi r_2 \eta_2$, d. h. gleich der doppelten Ladung auf der Längeneinheit des Zylinders. Wir finden also

$$\varphi = -2e_1 \log r + c_1.$$

Ist φ_1 das Potential auf dem inneren und φ_2 das Potential auf dem äußeren Zylinder, so wird

$$\varphi_1 = -2e_1 \log r_1 + c_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -2e_1 \log r_2 + c_1,$$

also

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2e_1 \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Die Feldstärke im Luftzwischenraume ist

$$\mathfrak{E}_r = -\frac{d\varphi}{dr} = +\frac{2e_1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\log r_2 - \log r_1}.$$

Die Kapazität des Kondensators, bezogen auf die Längeneinheit des Zylinders, ist

$$K = \frac{e_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2(\log r_2 - \log r_1)}.$$

Da

$$2\pi r_1 \eta_1 = e_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2(\log r_2 - \log r_1)}$$

ist, so wird

$$\eta_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi r_1 (\log r_2 - \log r_1)}, \quad \eta_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{4\pi r_2 (\log r_2 - \log r_1)}.$$

§ 68. Die potentielle Energie eines Systems von Leitern.

Nach der Definition (vgl. S. 38) ist das Potential an einer Stelle A des elektrostatischen Feldes gleich der Arbeit, die entgegen den Kräften des Feldes geleistet werden muß, um die Einheit der Elektrizitätsmenge von einer Stelle, wo das Potential gleich Null ist, also von der Erdoberfläche, nach dem betrachteten Punkte A zu bringen. Wird also von einer Stelle, wo das Potential gleich Null ist, die Elektrizitätsmenge δe an eine Stelle gebracht, wo das Potential gleich φ ist, so ist entgegen den elektrischen Kräften die Arbeit

$$\delta W = \varphi \cdot \delta e$$

geleistet. Wir setzen dabei voraus, daß durch die Bewegung der Elektrizitätsmenge δe das Potential φ nicht verändert wird.

Ist im Punkte A das Potential gleich φ , herrührend von einem mit Elektrizität geladenen Leiter K_1 und gleich φ_2 , herrührend von einem anderen geladenen Leiter K_2 , so ist der Betrag des Potentials in A gleich $\varphi_1 + \varphi_2$. Werden die Ladungen auf den Leitern K_1 und K_2 verdoppelt, so nimmt auch das Potential in A den doppelten Betrag an. Wir weisen darauf hin, daß das Potential in einem Punkte gegeben ist durch

$$\varphi = \int \frac{q \cdot dv}{r};$$

es wächst und nimmt ab in gleichem Verhältnis mit der Raumdichte ρ .

Wir betrachten jetzt mehrere Leiter im Luftraume, die schließlich die Ladungen $e_1, e_2, e_3 \dots e_k$ haben sollen. Die Ladung dieser Leiter sei so ausgeführt, daß die auf ihnen enthaltenen Elektrizitätsmengen gleichmäßig zunehmen und daß während der Ladung in jedem Augenblicke das Verhältnis der zugeführten Elektrizitätsmenge zur schließlich erlangten Elektrizitätsmenge für alle Leiter dasselbe ist. Ist n ein echter Bruch, so sind die Ladungen in einem bestimmten Augenblicke also $ne_1, ne_2, ne_3 \dots$ und demnach haben die Potentiale in demselben Augenblicke die Beträge $n\varphi_1, n\varphi_2, n\varphi_3 \dots$, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ die Endwerte der Potentiale der Leiter sind. Wird dem h^{ten} Leiter im Augenblicke, wo sein Potential $n\varphi_h$ ist, die unendlich kleine Elektrizitätsmenge $e_h \cdot dn$ zugeführt, so ist entgegen den Kräften des Feldes die Arbeit

$$dW_h = n\varphi_h \cdot e_h \cdot dn$$

zu leisten. Führen wir allen k -Leitern des betrachteten Systems entsprechende Elektrizitätsmengen zu, so müssen wir die Arbeit

$$dW = \sum_{h=1}^{h=k} \varphi_h e_h n dn$$

leisten. Bei der vollständigen Ladung wächst n von 0 bis 1, also ist

$$(a) \quad W = \sum_1^k \varphi_h e_h \cdot \int_0^1 n \cdot dn = \frac{1}{2} \sum_1^k \varphi_h e_h.$$

W ist die Arbeit, welche geleistet werden muß, um das System der Leiter so zu laden, daß die Leiter die Potentiale $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_k$ und bzw. die Ladungen $e_1, e_2 \dots e_k$ haben. W ist die *potentielle Energie des Systems der Leiter*.

Handelt es sich um einen einzelnen Leiter im Luftraume, der mit der Ladung e das Potential φ erhalten hat, so ist die in ihm enthaltene potentielle Energie W gleich $\frac{1}{2} \varphi e$. Ist K die Kapazität dieses Leiters, so ist

$$(b) \quad W = \frac{1}{2} \varphi e = \frac{1}{2} K \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{K}.$$

Sind mehrere isolierte Leiter A_1, A_2, A_3 usw. gegeben und wird einem derselben A_1 eine Elektrizitätseinheit mitgeteilt, während die anderen keine Ladung haben, so erhält A_1 ein bestimmtes Potential p_{11} , während die Potentiale von A_2, A_3 usw. bzw. p_{12}, p_{13} usw. sind. Hätte A_2 die Elektrizitätseinheit erhalten, während die übrigen Leiter ohne Ladung geblieben wären, so würde das Potential auf A_2 gleich p_{22} , und die Potentiale auf $A_1, A_3, A_4 \dots$ würden bzw. $p_{21}, p_{23}, p_{24} \dots$ sein. Wird nun dem Leiter A_1 die Ladung e_1 , dem Leiter A_2 die Ladung e_2 usf. mitgeteilt, so werden die Potentiale $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ bzw. der Leiter $A_1, A_2, A_3 \dots$ ausgedrückt durch

$$(c) \quad \begin{cases} \varphi_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 + \dots \\ \varphi_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3 + \dots \\ \varphi_3 = p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Die gesamte Energie des elektrischen Systems ist

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3 + \dots)$$

und also

$$(d) \quad \begin{cases} 2W = p_{11} e_1^2 + p_{22} e_2^2 + p_{33} e_3^2 + \dots + (p_{12} + p_{21}) e_1 e_2 \\ \quad + (p_{13} + p_{31}) e_1 e_3 + (p_{23} + p_{32}) e_2 e_3 + \dots \end{cases}$$

Wird einem der Leiter, z. B. A_1 , eine unendlich kleine Elektrizitätsmenge δe_1 zugeführt, so wird die potentielle Energie des Systems um $\delta W = \varphi_1 \delta e_1$ vermehrt. Dieser Zuwachs der Energie ergibt sich auch aus (d), denn es ist

$$(e) \quad \delta W = (p_{11} e_1 + \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}) e_2 + \frac{1}{2}(p_{13} + p_{31}) e_3 \dots) \delta e_1.$$

Da nun δW in diesem Falle auch gleich $\varphi_1 \delta e_1$ ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (c), daß

$$(f) \quad \delta W = (p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 + \dots) \delta e_1.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen finden wir, daß

$$2p_{21} = p_{21} + p_{12}, \quad 2p_{31} = p_{31} + p_{13}, \dots$$

Also ist

$$p_{21} = p_{12}, \quad p_{31} = p_{13} \quad \text{und allgemein} \quad p_{mn} = p_{nm}.$$

Die elektrische Energie des Systems kann also als homogene quadratische Funktion der Ladungen ausgedrückt werden und soll dann durch W_e bezeichnet werden

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} p_{11} e_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} e_2^2 + \frac{1}{2} p_{33} e_3^2 + \dots + p_{12} e_1 e_2 \\ &\quad + p_{13} e_1 e_3 + p_{23} e_2 e_3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Die Koeffizienten $p_{12}, p_{13} \dots$ werden als *Potentialkoeffizienten* bezeichnet, die durch die Gestalt und gegenseitige Lage der Leiter, sowie durch die physikalische Beschaffenheit des Dielektrikums im Zwischenraume zwischen den Leitern bestimmt sind. p_{mn} ist gleich dem Potential, das der n^{te} Leiter hat, wenn er wie alle andere Leiter ohne Ladung ist, jedoch der m^{te} Leiter die Einheit der Elektrizitätsmenge $e_m = 1$ als Ladung erhalten hat.

Werden die Gleichungen (c) nach $e_1, e_2, e_3 \dots$ aufgelöst, so ergibt sich

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= q_{11} \varphi_1 + q_{21} \varphi_2 + q_{31} \varphi_3 + \dots \\ e_2 &= q_{12} \varphi_1 + q_{22} \varphi_2 + q_{32} \varphi_3 + \dots \\ e_3 &= q_{13} \varphi_1 + q_{23} \varphi_2 + q_{33} \varphi_3 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Hier bedeuten die Koeffizienten $q_{11}, q_{22}, q_{33} \dots$ die *Kapazitäten* der entsprechenden Leiter. Dabei ist die Kapazität q_{mm} des m^{ten} Leiters gleich derjenigen Elektrizitätsmenge, die auf ihm enthalten ist, wenn er selbst sich auf dem Potential 1 befindet und alle übrigen Leiter auf dem Potential Null sind oder mit der Erde in leitender Verbindung stehen. Die Koeffizienten $q_{13}, q_{23} \dots$ nennt man *Induktionskoeffizienten*. q_{mn} ist die Ladung des n^{ten} Leiters, wenn dieser wie alle übrigen mit der Erde verbunden ist, jedoch mit Ausnahme des m^{ten} Leiters, der auf dem Potential 1 sich befindet. Die weitere Untersuchung zeigt, daß auch $q_{mn} = q_{nm}$ ist, und daß die potentielle Energie des Systems durch die Potentiale ausgedrückt werden kann, indem

$$W_\varphi = \frac{1}{2} q_{11} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} q_{22} \varphi_2^2 + \frac{1}{2} q_{33} \varphi_3^2 + \dots + q_{12} \varphi_1 \varphi_2 \\ + q_{13} \varphi_1 \varphi_3 + q_{23} \varphi_2 \varphi_3 + \dots$$

ist.

$q_{12}, q_{13} \dots$ geben die Elektrizitätsmengen an, die auf den mit der Erde verbundenen Leitern $A_2, A_3 \dots$ enthalten sind, wenn A_1 durch eine ihm mitgeteilte Ladung das Potential $\varphi_1 = 1$ hat. Die Koeffizienten $q_{12}, q_{13} \dots$ sind negativ. Die von A_1 ausgehenden Kraftlinien können entweder nach der Erde verlaufen, oder auf den Leitern A_2, A_3 usw. endigen.

Wenn an ihren Endpunkten auf A_1 positive Ladung vorhanden ist, so müssen ihre Endpunkte auf dem anderen Leiter negative Ladung zeigen.

Dagegen sind die Koeffizienten $p_{12}, p_{13} \dots p_{mn}$ positiv. Sind die Ladungen der Konduktoren $A_2, A_3 \dots$ nämlich

$$e_2 = e_3 = e_4 = \dots = 0,$$

so haben wir

$$\varphi_1 = p_{11} e_1, \quad \varphi_2 = p_{12} e_1 \dots$$

In die Oberflächen der ungeladenen Leiter $A_2, A_3 \dots$ treten ebenso viele Kraftlinien ein als aus. Da die Kraftlinien von Orten höheren Potentials zu solchen niedrigeren Potentials verlaufen, so kann also das Potential eines ungeladenen Leiters in einem elektrischen Felde nicht das größte sein, es liegt zwischen dem größten und kleinsten Potentialwert. Wird der Leiter A_1 mit der Elektrizitätseinheit geladen, so ist sein Potential p_{11} . Im unendlich fernen Punkte ist das Potential gleich Null. Demnach ist

$p_{11} > p_{12}$, überhaupt $p_{nn} > p_{nm}$ und ebenso $p_{mm} > p_{nn}$. Also liegt p_{nm} zwischen p_{nn} und Null, und da p_{nn} positiv ist, so ist auch p_{nm} positiv. Nur dann, wenn der geladene Leiter den ungeladenen umschließt, sind die Potentiale beider gleich. Wenn aber die Leiter außerhalb einander liegen, so ist immer

$$p_{nn} > p_{mn} \quad \text{und} \quad p_{mm} > p_{mn}.$$

§ 69. Die Dielektrizitätskonstante und die elektrische Verschiebung.

Bislang haben wir nur das elektrische Feld im Luftraume betrachtet. Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung solcher Fälle, in denen das elektrische Feld in anderen Isolatoren auftritt. Nach § 67 ist die Kapazität eines Kugelkondensators, wenn der Zwischenraum mit Luft erfüllt ist, durch den Ausdruck

$$\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

gegeben. Faraday hat festgestellt, daß die Kapazität des Kondensators eine andere ist, wenn der Zwischenraum zwischen den Kugeln mit einem anderen Isolator, wie Glas, Schwefel,

Petroleum usw., ausgefüllt wird. Bei gleicher Potentialdifferenz zwischen den Kugeln hängt die Ladung von der Beschaffenheit des Isolators ab, indem die Kapazität

$$K = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

ist, wo die Konstante ε durch die dielektrische Eigenschaft des Isolators bestimmt ist. ε wird als *Dielektrizitätskonstante* bezeichnet. *Die Dielektrizitätskonstante ist das Verhältniß der Kapazität eines Kondensators für einen bestimmten Isolator als Zwischenmedium zu der Kapazität desselben Kondensators im Falle, daß Luft die Zwischenschicht bildet.* Richtiger es ist jedoch, für den luftleeren Raum $\varepsilon = 1$ zu setzen; es hat sich dann gezeigt, daß ε für die Gase wenig größer als 1 ist. So findet man z. B. auf diese Weise für

Glas	$\varepsilon = 5,8-8$;	destilliertes Wasser	$\varepsilon = 76$;
Paraffin	$\varepsilon = 2,3$;	Schwefelkohlenstoff	$\varepsilon = 2,6$;
Schwefel	$\varepsilon = 3,8$;	Petroleum . . .	$\varepsilon = 1,9$;
Schellack	$\varepsilon = 3,5$;	Benzol	$\varepsilon = 2,26$.

Die angegebenen Zahlen sind Mittelwerte; die Angaben verschiedener Beobachter stimmen nicht sehr befriedigend überein. Die Dielektrizitätskonstante aller Gase nimmt mit abnehmender Dichte ab und nähert sich einem Grenzwerte, den wir als die *Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes oder des Äthers* bezeichnen.

Bezogen auf das Vakuum, für das $\varepsilon = 1$, hat Boltzmann gefunden

für Luft . . .	$\varepsilon = 1,000590$;
„ Wasserstoff	$\varepsilon = 1,000264$;
„ Kohlensäure	$\varepsilon = 1,000946$.

Ist eine Kugel in Luft mit der Elektrizitätsmenge e geladen, und wird diese Kugel in ein Dielektrikum, dessen Dielektrizitätskonstante ε ist, getaucht, so ist in der Umgebung der Kugel die Feldstärke $\mathcal{E}$ dem Betrage nach durch

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2}$$

gegeben. Durch die mit der geladenen Kugel konzentrische Kugeloberfläche mit dem Radius R geht der Kraftfluß

$$\mathfrak{E} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon} e.$$

Die auf einem isolierten Leiter vorhandene Menge wahrer Elektrizität wird dadurch nicht verändert, daß wir den Leiter in ein anderes Dielektrikum bringen. Jedoch wird dadurch der von dem Leiter ausgehende Kraftfluß verändert und damit auch die Menge der *freien* auf dem Leiter enthaltenen Elektrizität.

Im luftleeren Raume würde dieser Kraftfluß $4\pi e$ sein. Durch Eintauchen der Kugel in ein Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε , dessen Ausdehnung sehr groß sein soll, wird der von der geladenen Kugel ausgehende Kraftfluß und damit die auf ihr enthaltene freie Elektrizität um so kleiner, je größer ε ist.

In jedem Dielektrikum und überall im elektrostatischen Felde ist das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ wirbelfrei, und $\mathfrak{E}$ ist dort durch den negativen Gradienten eines skalaren Potentials bestimmt. Dabei ist

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e}{r},$$

wenn wir das von einer punktförmigen Ladung herrührende Feld ins Auge fassen. Im Dielektrikum treten demnach die Größen $\varepsilon\mathfrak{E}$ und $\varepsilon\varphi$ an die Stellen bzw. der Größen $\mathfrak{E}$ und φ , die für den Luftraum oder streng genommen für den Äther gelten. Dieses gilt ganz allgemein für beliebig verteilte Ladungen.

Maxwell hat einen neuen Vektor $\mathfrak{D}$ eingeführt, der als *elektrische Verschiebung* bezeichnet wird, und der gleich $\varepsilon/4\pi \cdot \mathfrak{E}$ ist. Wir setzen also

$$(a) \quad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}.$$

Die Bezeichnung des Vektors $\mathfrak{D}$ rührt von folgender Vorstellung her. Das Dielektrikum, das den geladenen Körper umgibt, kann durch die Niveauflächen und die Kraftlinien, zu denen die Kraftlinien vereinigt werden, in Raumelemente geteilt werden. Wirken im Dielektrikum elektrische Kräfte, so werden im Raumelemente die negative und positive Elektrizität in entgegengesetzten Richtungen etwas „verschoben“, indem an der einen Seite des Raumelementes ein Überschuß an positiver, an der anderen Seite ein Überschuß an negativer Elektrizität

auftritt (Fig. 79). Die Fernwirkungen der beiden gleichen, dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Elektrizitätsmengen, die sich an jedem Flächenelemente einer Niveaufläche anhäufen, heben sich gegenseitig auf, sodaß also Elektrizitätsmengen an den Niveauflächen vorhanden sein können, ohne daß ihre Existenz festgestellt werden kann. Dieser Zustand des Dielektrikums wird als *Polarisation* bezeichnet.

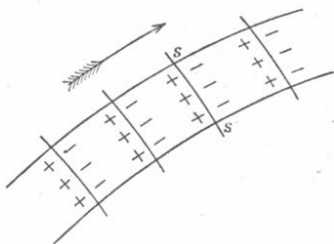


Fig. 79.

Nach der Gleichung § 61 (c) soll der Vektor $\mathfrak{D}$ der Gleichung

$$(b) \quad \int \mathfrak{D}_n \cdot df = \sum e$$

genügen, d. h. *das über eine geschlossene Fläche erstreckte Integral der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}$, oder die gesamte elektrische Verschiebung durch die Fläche ist gleich der Summe der von der Fläche umschlossenen Ladungen.* Für den Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung ist nach der Gleichung (b) die wahre Ladung e maßgebend.

Aus den früheren Sätzen ergibt sich auch, daß an jeder Stelle des Feldes die Feldstärke aus einem Potential ableitbar ist, daß also auch im Dielektrikum überall die Gleichungen § 60 (h)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} = 0$$

gelten. An allen Stellen des Dielektrikums, mit Ausnahme solcher, an denen sich punktförmige oder räumlich oder flächenhaft verteilte Ladungen befinden, ist

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0.$$

An den Stellen, wo die elektrische Ladung mit der räumlichen Dichte ρ verteilt ist, wird

$$(c) \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \frac{4\pi \rho}{\epsilon},$$

indem in der Gleichung § 62 (b) an die Stelle von $\mathfrak{E}$ jetzt $\epsilon \mathfrak{E}$ zu setzen ist. Der Vektor $\mathfrak{D}$ möge die rechtwinkligen Komponenten $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y, \mathfrak{D}_z$ haben, dann ist

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{D}_x, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_y = \mathfrak{D}_y, \quad \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_z = \mathfrak{D}_z,$$

und die letzte Gleichung lautet

$$(d) \quad \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho.$$

Während in dem von elektrischen Ladungen freien Teilen des Isolators das Feld des Vektors $\mathfrak{D}$ quellenfrei ist, gilt bei räumlich verteilten Ladungen im Isolator die Gleichung (d).

$\rho/\varepsilon = \rho'$ heißt die *Dichte der freien Elektrizität*. Nach der Gleichung (c) ist die räumliche Dichte der freien Elektrizität gleich der Divergenz des Vektors $1/4\pi \cdot \mathfrak{E}$, d. h.

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \rho'.$$

Für die Änderung der Normalkomponente der Feldstärke an einer mit der Flächendichte η geladenen Fläche im Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε finden wir (s. S. 234)

$$(d') \quad \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = \frac{4\pi\eta}{\varepsilon}$$

$\eta/\varepsilon = \eta'$ ist die Dichte der freien Elektrizität an der geladenen Fläche. $\mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2}$ kann als die *Flächendivergenz* des Vektors $\mathfrak{E}$ angesehen werden, und dann ergibt sich, daß die Flächendivergenz des Vektors $1/4\pi \cdot \mathfrak{E}$ gleich der Flächendichte η' der freien Elektrizität ist. An der betrachteten Fläche haben wir

$$(e) \quad \mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = \eta.$$

Die Flächendivergenz des Vektors $\mathfrak{D}$ ist also durch die Flächendichte der wahren Ladung bestimmt.

Ist im Dielektrikum ein Leiter eingeschlossen, so ist in seinem Inneren, das frei von Ladungen sein soll, keine elektrische Verschiebung vorhanden; an seiner Oberfläche ist nach dem Inneren hin $\mathfrak{D}_{n_2} = 0$, also ist die Normalkomponente der Verschiebung an der Leiteroberfläche nach außen

$$(f) \quad \mathfrak{D}_{n_1} = \mathfrak{D}_n = \eta.$$

Wir heben nochmals hervor, daß für die Feldstärke und das Potential im Dielektrikum die freien Elektrizitätsmengen zu berücksichtigen sind, während für den Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung die wahre Elektrizitätsmenge maßgebend ist.

Um die Beziehung zwischen der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ hervorzuheben, wollen wir noch

den Fall eines Plattenkondensators betrachten. Haben die Platten die Ladung e erhalten, und wird der Zwischenraum zwischen den Platten mit einem Dielektrikum ausgefüllt, oder besser noch, wird der Kondensator z. B. in ein flüssiges Dielektrikum gebracht und von diesem auf allen Seiten umschlossen, so wird dadurch die elektrische Verschiebung nicht geändert, aber die Feldstärke und das Potential φ werden ε -mal kleiner als in dem Falle, wo sich der Kondensator im Luftraume befindet. Werden aber die Potentiale der Platten beim Eintauchen in das unendliche Dielektrikum konstant gehalten, so bleibt auch die Feldstärke $\mathfrak{E}$ konstant, aber die elektrische Verschiebung und die elektrische Ladung auf den Platten wird ε -mal größer als im Luftraume.

S_1 und S_2 seien die Platten des Kondensators und d sei der Abstand der Platten. Das Dielektrikum, in dem sich der Kondensator befindet, habe die Konstante ε . Die räumliche Dichte zwischen den Platten ist $\rho = 0$. Wir legen wiederum wie in Fig. 78 die x -Achse senkrecht zu S_1 . Das Potential, die Feldstärke und die Verschiebung sind dann allein von x abhängig. Auch hier ist

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0, \quad \text{also} \quad \varphi = ax + b.$$

An der Fläche S_1 ist nach (d')

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = a = -\frac{4\pi\eta}{\varepsilon}.$$

b ist erst bestimmt, nachdem wir das Potential φ_2 der Platte S_2 festgesetzt haben. Ist dieses gleich Null, indem S_2 mit der Erde verbunden ist, so wird

$$0 = -\frac{4\pi\eta}{\varepsilon}d + b,$$

also ist das Potential φ im Zwischenraume zwischen den Platten

$$\varphi = -\frac{4\pi\eta}{\varepsilon}x + \frac{4\pi\eta}{\varepsilon}d,$$

und die Feldstärke $\mathfrak{E}$ daselbst

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{4\pi\eta}{\varepsilon}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D} = \eta.$$

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D} = \eta$ wirken parallel der x -Achse. Das Potential auf S_1 ist

$$\varphi_1 = \frac{4\pi\eta d}{\varepsilon}.$$

Die Kapazität ist

$$K = \frac{\eta S}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

demnach ist durch das Dielektrikum auch die Kapazität ε -mal größer geworden.

§ 70. Inhomogenes Dielektrikum.

Für ein Medium mit variabler Dielektrizitätskonstante gelten zunächst auch die Gleichungen (b), (d), (e) und (f) des vorigen Paragraphen, nämlich

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \mathfrak{D}_n df = \sum e, \\ \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho, \\ \mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = \eta, \\ \text{und an den Oberflächen der Leiter} \\ \mathfrak{D}_n = \eta. \end{array} \right.$$

In jedem Falle sind die Quellen des Vektors $\mathfrak{D}$ die Stellen, an denen sich wahre Elektrizität befindet.

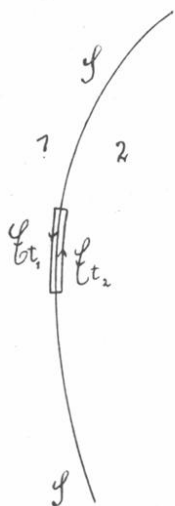


Fig. 80.

Wir betrachten zunächst die Trennungsfläche zweier Körper mit verschiedener Dielektrizitätskonstante, die in einem elektrostatischen Felde liegen. Die Körper mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 grenzen mit der Fläche S (Fig. 80) aneinander. Wir konstruieren uns eine geschlossene Kurve an der Trennungsfläche S , deren Bahnelemente ds_1 und ds_2 sich dicht an S anlegen, sodaß die Kurve eigentlich nur aus diesen Bahnelementen besteht. Da die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in einem elektrostatischen Felde überall wirbelfrei verteilt ist, und das Linienintegral $\int \mathfrak{E}_s ds$ längs einer geschlossenen Kurve verschwindet, so ist, weil $ds_1 = ds_2 = ds$

$$(b) \quad \mathfrak{E}_{t_1} ds = \mathfrak{E}_{t_2} ds, \quad \text{also} \quad \mathfrak{E}_{t_1} = \mathfrak{E}_{t_2},$$

indem $\mathfrak{E}_{t_1}$ und $\mathfrak{E}_{t_2}$ die in den Richtungen der Elemente ds wirkenden Komponenten der Feldstärke sind. Wir finden also, daß die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}$ die Trennungsfläche der beiden Körper mit verschiedenen Dielektrizitätskonstanten stetig durchsetzen.

An der Trennungsfläche der beiden Körper befinde sich keine wahre Elektrizität. Dann ist nach der Gleichung (a) an dieser Fläche

$$(c) \quad \mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = 0, \text{ also } \mathfrak{D}_{n_1} = \mathfrak{D}_{n_2},$$

d. h. die Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{D}$ durchsetzt stetig die Trennungsfläche der Dielektrika.

Aus (c) folgt

$$\frac{\varepsilon_1}{4\pi} \mathfrak{E}_{n_1} = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \mathfrak{E}_{n_2},$$

wenn $\mathfrak{E}_{n_1}$ und $\mathfrak{E}_{n_2}$ die Normalkomponenten der Feldstärke zu beiden Seiten der Trennungsfläche sind. Demnach wird

$$(d) \quad \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \mathfrak{E}_{n_1},$$

In § 62 (h) haben wir gefunden, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{E}$ an einer mit der Dichte η geladenen Fläche im Luft-raum einen Sprung $4\pi\eta$ erfährt. Nach der Gleichung (d) zeigt die Trennungsfläche zweier Dielektrika dasselbe Verhalten wie eine geladene Fläche in einem homogenen Medium. Wir finden, daß die Dichte ω der freien Elektrizität an der Grenzfläche sich ergibt aus

$$(e) \quad 4\pi\omega = \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \mathfrak{E}_{n_1},$$

Überall, wo wahre Elektrizität vorhanden ist, ist auch freie Elektrizität. An der Trennungsfläche zweier Dielektrika kann aber freie Elektrizität auftreten, auch wenn dort keine wahre Elektrizität erzeugt ist.

Im elektrostatischen Felde kann man statt der Kraftlinien auch die *Verschiebungslinien* darstellen, deren Tangente mit der Richtung des Vektors $\mathfrak{D}$ zusammenfällt. Der Betrag des Vektors $\mathfrak{D}$ gibt an jeder Stelle ein Maß für die Zahl der Verschiebungslinien, die durch die Flächeneinheit hindurchgehen. Die Verschiebungslinien beginnen und endigen an den Stellen, wo sich wahre Elektrizitäten befinden. Solange es sich um isotrope Körper handelt, fallen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ der

Richtung nach zusammen und die Verschiebungslinien stimmen mit den Kraftlinien in bezug auf die Richtung überein.

Wir betrachten jetzt den Übergang der Verschiebungslinien bzw. Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Dielektrika (Fig. 81). Für diese Grenzfläche gelten die Gleichungen (c)

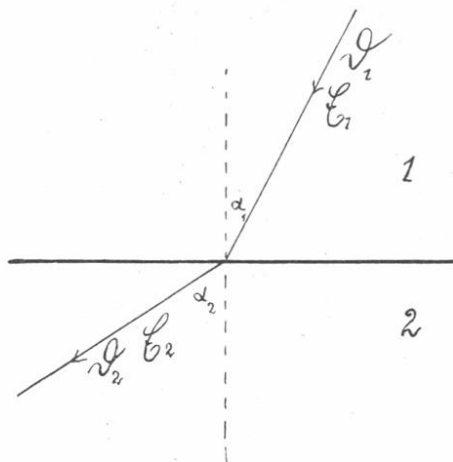


Fig. 81.

und (b). In dem einen und in dem anderen der beiden isotropen Dielektrika fallen die Verschiebungs- und Kraftlinien zusammen. An der Trennungsfläche muß nach (c)

$$\mathfrak{D}_1 \cdot \cos \alpha_1 = \mathfrak{D}_2 \cdot \cos \alpha_2,$$

und nach (b)

$$\mathfrak{E}_1 \cdot \sin \alpha_1 = \mathfrak{E}_2 \cdot \sin \alpha_2$$

sein. Wir finden also

$$(f) \quad \varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2,$$

da

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \mathfrak{E}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_2 = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \mathfrak{E}_2$$

ist. Die Verschiebungs- bzw. Kraftlinien erleiden an der Trennungsfläche zweier Dielektrika eine Brechung. *Das Verhältnis der trigonometrischen Tangente des Einfallswinkels zu derjenigen des Brechungswinkels ist eine Konstante, die gleich dem Quotienten der Dielektrizitätskonstanten ist.* Gehen die Verschiebungs- bzw. Kraftlinien von einem Isolator zu einem anderen mit größerer Dielektrizitätskonstante über, so werden die Linien von der

Normalen fortgebrochen. Die Gleichung (f) erinnert an das Snelliussche Gesetz für die Brechung der Lichtstrahlen, an die Stelle des $\sin$ tritt aber tg . Aus diesem Grunde kann der Fall einer totalen Reflexion der Verschiebungslinien nicht eintreten.

Ist in einem Isolator die Dielektrizitätskonstante ε nicht konstant, sondern eine Funktion der Koordinaten, so ist, wenn keine wahre Elektrizität vorhanden ist, d. h. $\rho = 0$,

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 0,$$

also

$$(g) \quad \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_z)}{\partial z} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\mathfrak{E}_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right).$$

Im homogenen Medium würde die linke Seite dieser Gleichung nach § 69 (c) gleich $4\pi \rho'$ sein. Die Stellen, an denen die Dielektrizitätskonstante veränderlich ist, verhalten sich also wie solche, die in einem homogenen Dielektrikum mit der Raumdichte ρ' der freien Elektrizität geladen sind, indem

$$(h) \quad \rho' = -\frac{1}{4\pi \varepsilon} \left(\mathfrak{E}_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)$$

ist.

Ist an einer Stelle des Körpers mit der variablen Dielektrizitätskonstanten ε wahre Ladung mit der Raumdichte ρ vorhanden, so ist

$$(i) \quad \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon \mathfrak{E}_z)}{\partial z} = 4\pi \rho.$$

Durch Einführung des Potentials erhalten wir

$$(k) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + 4\pi \rho = 0.$$

(§ 71.) Kondensatoren mit inhomogenem Dielektrikum.

1. Wir behandeln einen *Plattenkondensator*, mit zwei Schichten isolierender Substanz, deren Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 sind. Die Trennungsebene zwischen den beiden Dielektrika sei den Platten S_1 und S_2 des Kondensators parallel, deren Abstand d sei (Fig. 82).

Die Dichte der wahren Elektrizität auf S_1 sei $+\eta$, auf S_2 dagegen $-\eta$. Die Dichte der freien Elektrizität auf S_1 ist $+\eta/\epsilon_1$, dagegen auf S_2 gleich $-\eta/\epsilon_2$. An der Trennungsfläche

beider Dielektrika ist freie Elektrizität, deren Dichte ω nach der Gleichung § 70 (e) bestimmt werden kann.

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x -Achse senkrecht in der Mitte von S_1 steht. Im gesamten Dielektrikum ist

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} = 0, \text{ also } \mathfrak{D}_x = \text{konst.}$$

Da an der Oberfläche eines Leiters die normale Komponente der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}_n$ nach § 70 (a) gleich der wahren Flächenladungsdichte ist, so wird für $x = 0$ $\mathfrak{D}_x = \eta$, also ist im Dielektrikum überall $\mathfrak{D}_x = \eta$. Be-

zeichnen wir die Feldstärken in der Richtung der x -Achse mit $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ für das eine und für das andere Dielektrikum, so ist

$$\frac{\epsilon_1}{4\pi} \mathfrak{E}_1 = \frac{\epsilon_2}{4\pi} \mathfrak{E}_2 = \eta,$$

also

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{4\pi}{\epsilon_1} \eta \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{4\pi}{\epsilon_2} \eta.$$

An der Trennungsfläche zeige die Richtung der Normalen vom Dielektrikum 2 nach 1, dann ist an dieser Fläche

$$\mathfrak{E}_{n_1} = -\mathfrak{E}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_{n_2} = -\mathfrak{E}_2.$$

Also erhalten wir nach der Gleichung (e) des § 70

$$\omega = \frac{\eta}{\epsilon_1} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) = \eta \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2}.$$

Ist also $\epsilon_1 > \epsilon_2$, so findet sich auf der Trennungsfläche scheinbar eine positive Ladung.

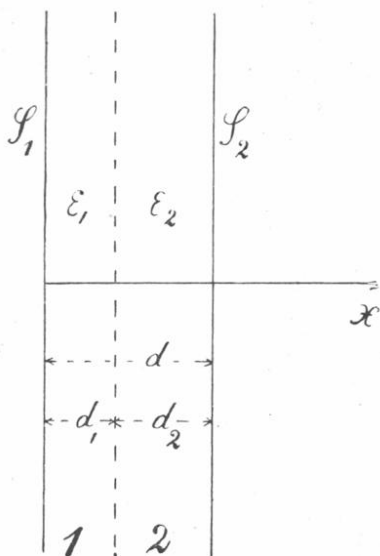


Fig. 82.

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{d_1} \mathfrak{E}_1 dx + \int_{d_1}^d \mathfrak{E}_2 dx = \frac{4\pi\eta}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{4\pi\eta}{\varepsilon_2} (d - d_1),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\eta \left\{ \frac{d}{\varepsilon_2} + d_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \right\}.$$

Also finden wir für die Kapazität K , wenn mit S die Größe jeder der beiden Platten des Kondensators bezeichnet wird,

$$K = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{4\pi (d \varepsilon_1 + d_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1))}.$$

Ist $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}d$, so wird

$$K = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{2\pi d (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Wird $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so erhalten wir die Gleichung für den Plattenkondensator mit einfachem Dielektrikum (vgl. S. 266).

2. Ein *Kugelkondensator* bestehe aus zwei konzentrischen metallischen Kugelflächen (Fig. 83), die durch ein Dielektrikum

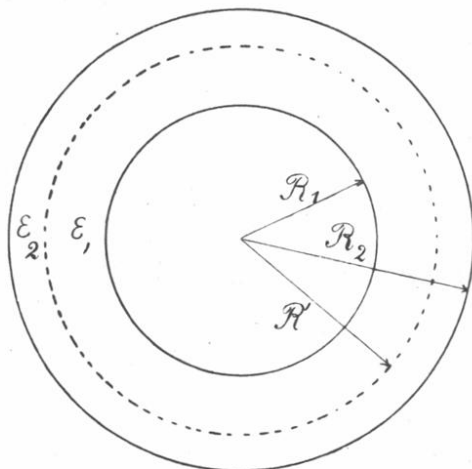


Fig. 83.

getrennt sind, das sich aus zwei Schichten zusammensetzt, indem innerhalb des Raumes mit dem Radius R die Dielektrizitätskonstante gleich ε_1 und außerhalb dieses Raumes die Dielektrizitätskonstante gleich ε_2 ist. Die innere Kugel habe

die Ladung $+e$, die äußere Kugel die Ladung $-e$, sodaß auf der ersteren die Flächendichte der wahren Elektrizität

$$\eta_1 = \frac{e}{4\pi R_1^2}$$

ist, während auf der äußeren Kugel die Flächendichte der wahren Elektrizität

$$\eta_2 = -\frac{e}{4\pi R_2^2}$$

ist. Die Kraftlinien gehen in radialer Richtung durch das Dielektrikum, ohne an der Trennungsfläche gebrochen zu werden. An dieser Trennungsfläche ist aber freie Elektrizität mit der Flächendichte ω vorhanden.

Nach der Gleichung (b), S. 263, ist die gesamte Verschiebung durch jede der konzentrischen im Dielektrikum liegenden Kugelflächen gleich e . Also ist

$$\mathfrak{D}_R = \frac{e}{4\pi R^2},$$

wenn R der Radius dieser Kugelfläche ist. Für $R < R'$ wird

$$\mathfrak{E}_R = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{R^2}$$

und für $R > R'$ wird

$$\mathfrak{E}_R = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{e}{R^2}.$$

Hierbei sind die Bedingungen (b) und (c) des § 70 erfüllt. Die Dichte der freien Elektrizität an der inneren Metallkugel ist

$$\eta' = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{4\pi R_1^2},$$

und an der äußeren Metallkugel

$$\eta'' = -\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{e}{4\pi R_2^2}$$

An der Trennungsfläche mit dem Radius R' haben wir die Dichte ω der freien Elektrizität nach S. 267 Gleichung (e)

$$\omega = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2}) = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \mathfrak{E}_{n_1},$$

und da

$$\mathfrak{E}_{n_1} = -\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{e}{R'^2}$$

ist, indem die Normale von 2 nach 1 zeigt, so wird

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \frac{e}{R'^2}.$$

Demnach ist die gesamte Menge der freien Elektrizität auf der Kugel R' gleich

$$4\pi R'^2 \omega = e \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Dagegen enthalten die Metallflächen bzw. die Mengen freier Elektrizität

$$4\pi R_1^2 \eta' = \frac{e}{\varepsilon_1} \quad \text{und} \quad 4\pi R_2^2 \eta'' = -\frac{e}{\varepsilon_2},$$

sodaß die gesamte Menge der freien Elektrizität gleich Null ist. Im Dielektrikum kann das Potential nur eine Funktion von R sein. Für die Potentialdifferenz zwischen den Kugeln R_1 und R_2 finden wir

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R'} \mathfrak{E}_R dR + \int_{R'}^{R_2} \mathfrak{E}_R dR,$$

also

$$(1) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon_1} \int_{R_1}^{R'} \frac{dR}{R^2} + \frac{e}{\varepsilon_2} \int_{R'}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{e}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{e}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Demnach wird die Kapazität

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ erhalten wir (vgl. S. 254)

$$K = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

§ 72. Die mechanische Kraft und die elektrische Kraft in Isolatoren.

Die Dielektrizitätskonstante ε sei konstant in dem betrachteten Raume. Die Kräfte, die auf das Parallelepiped $dx dy dz = dv$ mit der Dichte ρ in den Richtungen der Koordinatenachsen wirken, sind

$$(a) \quad \rho \mathfrak{E}_x \cdot dv, \quad \rho \mathfrak{E}_y \cdot dv, \quad \rho \mathfrak{E}_z \cdot dv.$$

X_1 , Y_1 und Z_1 seien die Kraftkomponenten, bezogen auf die Volumeneinheit. Dann ist mit Rücksicht auf S. 263 Gleichung (c)

$$X_1 = \mathfrak{E}_x \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right), \quad \text{usw.}$$

Da $\mathfrak{E}$ aus einem Potential φ hergeleitet werden kann (vgl. S. 225, Gleichung (h)), so finden wir

$$X_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left\{ \frac{\partial (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2)}{\partial x} + 2 \frac{\partial (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y)}{\partial y} + 2 \frac{\partial (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z)}{\partial z} \right\}.$$

Die Kraft, die auf die Volumeneinheit dv wirkt, können wir ansehen als herrührend von den Spannungen X_x, Y_y usw. (vgl. S. 136, Gleichung (c)), sodaß sich ergibt

$$(b) \quad \begin{cases} X_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2); & Y_z = Z_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z; \\ Y_y = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_z^2); & Z_x = X_z = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z; \\ Z_z = \frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2); & X_y = Y_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Fällt die x -Achse des Koordinatensystems in die Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$, so haben wir

$$(c) \quad X_x = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2; \quad Y_y = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2; \quad Z_z = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2,$$

während die Tangentialkomponenten verschwinden. In der Richtung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ findet ein Zug S_z statt und in den zu $\mathfrak{E}$ senkrechten Richtungen ein Druck S_d , wobei

$$(d) \quad S_z = S_d = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2$$

ist.

Sind A und B (Fig. 84) zwei metallische Oberflächen, die durch einen Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten ε getrennt sind, und wird zwischen A und B eine Kraft-

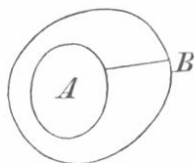


Fig. 84.

linie betrachtet, so wirkt in ihrer Richtung ein Zug S_z und senkrecht zu ihr ein Druck S_d . Auf die Flächeneinheit von A wirkt in der Richtung der nach außen konstruierten Normale ein Zug $\varepsilon/8\pi \cdot \mathfrak{E}^2$. Ist der Zwischenraum zwischen A und B mit Luft ausgefüllt, so ist $\varepsilon = 1$ zu setzen. Auf die Flächeneinheit wirkt in der Richtung der Normalen dann eine Kraft, die gleich

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = 2\pi \eta^2,$$

wenn η die Flächendichte auf A ist. Diese Kraft wird als

elektrostatischer Druck bezeichnet, der unabhängig vom Vorzeichen von η stets senkrecht zur Oberfläche nach außen wirkt.

Die Untersuchung zeigt also, daß die Kraftwirkungen zwischen zwei elektrisierten Körpern als elastische Drucke im Inneren des die Körper trennenden Mediums angesehen werden können. Ist der Isolator elastisch, so kann er durch die in ihm auftretenden Spannungen deformiert werden. Beim Auftreten solcher elastischer Deformationen könnte auch die Dielektrizitätskonstante geändert werden. Eine ausführliche und historische Übersicht über die Theorie der *Elektrostriktion*, um deren Auftreten es sich hierbei handelt, ist von F. Pockels in Grunerts Archiv 12. 1893 gegeben.

§ 73. Das Quadrantenelektrometer.

Das *Quadrantenelektrometer* (Fig. 85) enthält eine flache zylindrische Büchse, die durch zwei aufeinander senkrechte Schnitte in Quadranten zerlegt ist. Die beiden Quadranten *A* sind unter sich metallisch verbunden, ebenso auch die Quadranten *B*. Im Inneren der Büchse schwebt horizontal die metallische Nadel, die sich um die Achse der Metallbüchse drehen und an einem Metallfaden aufgehängt sein kann. In der Ruhelage liegt die Nadel *C* symmetrisch in bezug auf die Schlitz zwischen den Quadranten. Die Elektrizitätsmengen auf den Quadranten und der Nadel wollen wir mit e_a , e_b und e_c bezeichnen. Ferner sollen φ_a , φ_b und φ_c die Potentiale der Quadranten und der Nadel sein. Dann können wir nach § 68 (h) setzen

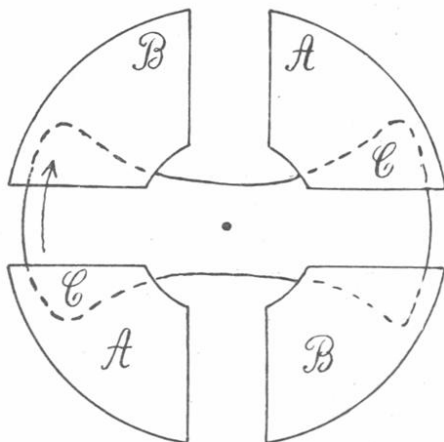


Fig. 85.

$$e_a = q_a \varphi_a + q_{ba} \varphi_b + q_{ca} \varphi_c,$$

$$e_b = q_{ab} \varphi_a + q_b \varphi_b + q_{cb} \varphi_c,$$

$$e_c = q_{ac} \varphi_a + q_{bc} \varphi_b + q_c \varphi_c.$$

Dabei bedeuten q_a , q_b und q_c die Kapazitäten der Leiter A , B und C ; $q_{ba} = q_{ab}$, $q_{ac} = q_{ca}$, $q_{bc} = q_{cb}$ sind die Induktionskoeffizienten.

Die Energie des geladenen Systems ist nach S. 257

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_a e_a + \varphi_b e_b + \varphi_c e_c) = \frac{1}{2}\{\varphi_a^2 q_a + \varphi_b^2 q_b + \varphi_c^2 q_c \\ + 2\varphi_a \varphi_b q_{ab} + 2\varphi_b \varphi_c q_{bc} + 2\varphi_a \varphi_c q_{ac}\}.$$

Die Kapazitäten und Induktionskoeffizienten werden im allgemeinen von der Lage der Nadel C gegen A und B abhängen. Von den Rändern der Nadel abgesehen, ist das Feld zwischen Nadel und Quadranten gleichförmig. Auch bleibt die Verteilung der Kraftlinien im Felde bei einer Drehung der Nadel unverändert, wenn der Abstand des Randes der Nadel von dem Umfange der Quadrantenbüchse groß ist im Vergleiche zum Abstände der Nadel vom Plattenpaare jedes Quadranten und zur Breite des Schlitzes zwischen den Quadranten. Wir wollen annehmen, daß sich die Nadel in der Richtung des Pfeiles, also vom Quadranten A nach B hin, um den kleinen Winkel ϑ gedreht habe. Je größer ϑ ist, desto größer wird der von der Nadel überdeckte Teil des Quadranten B . Näherungsweise dürfen wir setzen

$$q_a = \bar{q}_a - k \vartheta, \quad q_b = \bar{q}_b + k \vartheta,$$

wenn $\bar{q}_a$ und $\bar{q}_b$ die Kapazitäten in der Ruhelage der Nadel sind. Die Konstante k ist proportional der Dielektrizitätskonstanten des Mediums, in dem sich Nadel und Quadranten befinden. Dagegen ist $q_c = \text{konstant}$, solange die den Schlitzen gegenüberliegende Fläche der Nadel der Größe nach sich nicht ändert. q_{bc} ist die Elektrizitätsmenge, die auf der Nadel C induziert wird, wenn $\varphi_a = \varphi_c = 0$, aber $\varphi_b = 1$ ist. Ist $\bar{q}_{bc}$ der Induktionskoeffizient in der Ruhelage der Nadel, so ist nach einer Drehung der Nadel um den kleinen Winkel ϑ

$$q_{bc} = \bar{q}_{bc} - k \vartheta.$$

Ferner ist

$$q_{ac} = \bar{q}_{ac} + k \vartheta.$$

Dagegen bleibt bei einer Drehung der Nadel der Induktionskoeffizient q_{ab} zwischen den Quadranten konstant.

Das Drehungsmoment, das den Winkel ϑ zu vergrößern strebt, können wir darstellen durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = & \frac{1}{2} \varphi_a^2 \frac{\partial q_a}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \varphi_b^2 \frac{\partial q_b}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \varphi_c^2 \frac{\partial q_c}{\partial \vartheta} \\ & + \varphi_a \varphi_b \frac{\partial q_{ab}}{\partial \vartheta} + \varphi_b \varphi_c \frac{\partial q_{bc}}{\partial \vartheta} + \varphi_a \varphi_c \frac{\partial q_{ac}}{\partial \vartheta}, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{2} \varphi_a^2 k + \frac{1}{2} \varphi_b^2 k - \varphi_b \varphi_c k + \varphi_a \varphi_c k.$$

Bezeichnen wir dieses Drehungsmoment mit Θ , so ist

$$(a) \quad \Theta = k(\varphi_a - \varphi_b) \left\{ \varphi_c - \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b) \right\},$$

oder

$$(b) \quad \Theta = \frac{k}{2} \left((\varphi_b - \varphi_c)^2 - (\varphi_a - \varphi_c)^2 \right).$$

Das Drehungsmoment Θ ist unabhängig von der Stellung der Nadel und allein abhängig von den Potentialdifferenzen zwischen der Nadel und den Quadranten. Wenn $\varphi_b - \varphi_c$ dem Betrage nach größer ist als $\varphi_a - \varphi_c$, so ist Θ positiv. Die Nadel bewegt sich demgemäß nach dem Quadranten hin, dessen Potential von ihr am stärksten abweicht.

Verbindet man die Nadel bzw. deren Aufhängefaden durch einen Metalldraht mit dem Quadranten A , so ist $\varphi_a = \varphi_c$, und also nach (b)

$$(c) \quad \Theta = \frac{k}{2} (\varphi_b - \varphi_c)^2.$$

Nach (a) können wir Θ auch darstellen durch

$$\Theta = k(\varphi_a - \varphi_b) \left\{ (\varphi_c - \varphi_a) + \frac{1}{2}(\varphi_a - \varphi_b) \right\}$$

Ist bei der Messung $\varphi_c - \varphi_a$ immer sehr groß gegenüber $\varphi_a - \varphi_b$, so nimmt der vorige Ausdruck die Form

$$(d) \quad \Theta = k(\varphi_a - \varphi_b)(\varphi_c - \varphi_a)$$

an. Hält man dann während der Messung z. B. $\varphi_a - \varphi_b$ konstant, so ist Θ und damit die Torsion des Aufhängefadens der Nadel proportional $\varphi_c - \varphi_a$.

§ 74. Die Energie des elektrostatischen Feldes.

Ist das elektrostatische Feld einmal erzeugt, so ist zu seiner Erhaltung kein Energieaufwand erforderlich; es hat die Eigenschaft, sich mit der Zeit nicht zu ändern. Diese letztere Eigenschaft kommt jedoch auch den elektrischen Feldern stationärer elektrischer Ströme zu, aber diese sind mit Wärmeentwicklungen in den Leitern verbunden und können daher nicht ohne eine Energiezufuhr von außen bestehen (s. S. 222).

Im § 68 ist lediglich vom Standpunkte der Fernwirkungstheorie ein Ausdruck für die potentielle Energie eines geladenen Leiters entwickelt. Als Sitz der Energie wird dabei der Leiter bzw. seine Oberfläche angesehen, indem die Fernwirkungstheorie die elektrische Ladung der Körper als ein wesentliches Merkmal für den Zustand der Körper ansieht. Demgegenüber betrachtet die Nahewirkungstheorie das vom elektrischen Zwangszustande ergriffene Dielektrikum als den Sitz der elektrischen Energie. Nach dieser Auffassung ist nicht der Leiter der Träger des elektrischen Zustandes, sondern vielmehr das Medium, das den Leiter umgibt und in dem das elektrostatische Feld sich ausbildet. Daher müssen vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie auch die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die Verschiebung $\mathfrak{D}$ im Raume um den geladenen Leiter als wesentlich und bestimmend für den elektrischen Zustand des letzteren angesehen werden.

Die Verschiebung $\mathfrak{D}$ ist gleich $\epsilon/4\pi \cdot \mathfrak{E}$ gesetzt; dieser entgegen wirkt eine Kraft im Dielektrikum, die die Trennung der Elektrizitäten zu verhindern sucht. Bei einer unendlich kleinen Verschiebung $d\mathfrak{D}$ wird die Arbeit

$$\mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{E}$$

geleistet.

Wird die Verschiebung von Null bis zum Betrage $\mathfrak{D}$ ausgeführt, so ist also in der Volumeneinheit ein Arbeitsaufwand

$$\int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_0^{\mathfrak{E}} \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{E} = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D})$$

erforderlich. *Die in der Volumeneinheit enthaltene potentielle Energie ist also durch das halbe skalare Produkt aus der Feld-*

stärke $\mathfrak{E}$ und der Verschiebung $\mathfrak{D}$ gegeben. Für die im Felde eines Leiters enthaltene potentielle Energie erhalten wir also

$$(a) \quad W = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon \mathfrak{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) dv.$$

wobei die Integration über alle Raumelemente des Feldes zu erstrecken ist.

Handelt es sich um einen *Kugelkondensator*, dessen Dielektrizitätskonstante ε ist, so ist

$$\mathfrak{D}_R = \frac{e}{4\pi R^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_R = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{R^2}.$$

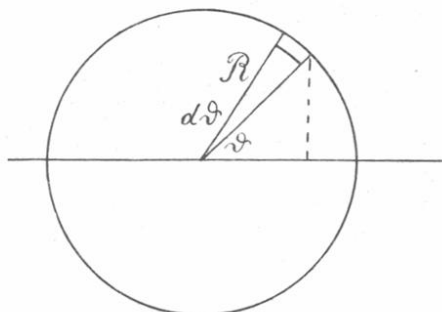


Fig. 86.

Stellen wir das Volumenelement dv (Fig. 86) durch Einführung eines Polarkoordinatensystems dar durch

$$dv = R^2 \sin \vartheta \cdot dR \cdot d\vartheta \cdot d\alpha,$$

so wird

$$W = \frac{1}{8\pi \varepsilon} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{e^2 \sin \vartheta d\vartheta dR d\alpha}{R^2}$$

und

$$W = \frac{e^2}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Nach der Gleichung (1) auf S. 273 ist die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Also wird in Übereinstimmung mit der Gleichung (b) auf S. 257

$$W = \frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

In der Gleichung (a) kann in dem skalaren Produkte $(\mathfrak{E} \mathfrak{D})$ für den wirbelfreien Vektor $\mathfrak{E}$ der negative Gradient des skalaren Potentials φ eingeführt werden. Demnach erhalten wir

$$W = -\frac{1}{2} \int (\nabla \varphi \mathfrak{D}) dv.$$

Benutzen wir zur Umformung die aus dem Gaußsschen Satze abgeleitete Gleichung (c') auf S. 238, und setzen wir

$$\nabla \varphi = \nabla \Psi \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{D},$$

so wird

$$\int \varphi \mathfrak{D}_n df = \int (\varphi \operatorname{div} \mathfrak{D} + \nabla \varphi \mathfrak{D}) dv,$$

also

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \operatorname{div} \mathfrak{D} dv - \frac{1}{2} \int \varphi \mathfrak{D}_n df.$$

Hierbei ist $\mathfrak{D}_n$ die nach außen gerichtete normale Komponente an der Fläche f , die den Raum umschließt, über den das erste Integral zu erstrecken ist.

Wir betrachten eine Reihe von Leiter in einem homogenen Dielektrikum; die Potentiale sind auf ihnen konstant und seien $\varphi_1, \varphi_2 \dots$. Wahre und freie Elektrizität ist nur auf der Oberfläche der Leiter. Im Dielektrikum ist $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$. An der unendlichen Grenzfläche, die den Raum mit den Leitern umschließt, ist $\varphi = 0$ und $\mathfrak{D}_n = 0$. An den Oberflächen der Leiter, über die dann das Flächenintegral zu erstrecken ist, ist $\mathfrak{D}_n = -\eta$, indem die Normale n vom Dielektrikum in das Innere des Leiters positiv zu rechnen ist. Wir erhalten also

$$(b) \quad W = \frac{1}{2} \int \varphi \eta df.$$

Dabei ist das Potential φ allein durch die freien Ladungen bestimmt. Sind $e_1, e_2 \dots$ die wahren Ladungen der Leiter, so können wir die letzte Gleichung in der Form

$$(c) \quad W = \frac{1}{2} (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^h \varphi_h e_h$$

schreiben. Damit gelangen wir wieder zu dem Ausdrucke für die potentielle Energie eines geladenen Leiters, den wir in § 68 nach der Fernwirkungstheorie abgeleitet haben.

Handelt es sich um einen Kondensator, dessen Belegungen

durch die Elektrizitätsmengen $+e$ und $-e$ zu den Potentialen φ_1 und φ_2 geladen sind, so ist

$$W = \frac{1}{2} e (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{e^2}{2K} = \frac{1}{2} K (\varphi_1 - \varphi_2)^2,$$

indem K die Kapazität des Kondensators ist. Demnach ist die Energie des elektrischen Feldes des Kondensators umgekehrt proportional der Kapazität K , solange die Ladung e unverändert bleibt; sie ist jedoch proportional der Kapazität K , wenn die Potentialdifferenz konstant bleibt.

Wir betrachten zwei sehr kleine Kugeln mit metallischer Oberfläche, die bzw. die Elektrizitätsmengen e_1 und e_2 enthalten, sodaß ihre Oberflächendichten bzw. η_1 und η_2 sind. Beide Kugeln befinden sich in einem *homogenen* Dielektrikum, sodaß der Abstand R ihrer Mittelpunkte sehr groß ist gegen die Radien der Kugeln. Die Energie des Systems der beiden Kugeln ist dann nach (c) gleich

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 e_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 e_2.$$

φ_1 und φ_2 sind die Potentiale der freien Ladungen, die auf den Kugelflächen vorhanden sind. Wenn diese freien Ladungen bzw. mit

$$e_1' = \frac{e_1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad e_2' = \frac{e_2}{\varepsilon}$$

bezeichnet werden, und η_1' und η_2' bzw. die Dichten der elektrischen Ladungen an den Kugeloberflächen sind, so können wir die Potentiale φ_1 und φ_2 darstellen durch

$$\varphi_1 = \int \frac{\eta_1' \cdot d f_1}{r_{11}} + \int \frac{\eta_2' \cdot d f_2}{R}; \quad \varphi_2 = \int \frac{\eta_1' \cdot d f_1}{R} + \int \frac{\eta_2' \cdot d f_2}{r_{22}},$$

oder

$$\varphi_1 = \int \frac{\eta_1' \cdot d f_1}{r_{11}} + \frac{e_2'}{R}; \quad \varphi_2 = \int \frac{\eta_2' \cdot d f_2}{r_{22}} + \frac{e_1'}{R},$$

wenn nach der Voraussetzung der Radius der Kugeln gegenüber dem Abstände R zu vernachlässigen ist. Wir denken uns jetzt, daß die beiden Kugeln unendlich wenig in der Richtung der Verbindungslinie verschoben seien. Die bei dieser Bewegung von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit δA ist gleich der Abnahme der potentiellen Energie, also gleich $-\delta W$. Wir haben demnach

$$\delta A = -\delta W = -\frac{1}{2} \delta (\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2).$$

Bei der betrachteten Verschiebung bleiben die wahren Ladungen ungeändert und demnach auch die freien Ladungen, solange die Kugeln in einem homogenen Dielektrikum liegen. Also bleiben auch die Dichten η_1' und η_2' der freien Elektrizität auf den Kugelflächen konstant, und demnach kommen für die Variation von φ_1 und φ_2 nur die zweiten Glieder in den oben für φ_1 und φ_2 angegebenen Gleichungen in Frage. Wir finden also

$$\delta A = -\frac{1}{2} e_1 \delta \varphi_1 - \frac{1}{2} e_2 \delta \varphi_2,$$

und hierbei ist

$$\delta \varphi_1 = -\frac{e_2'}{R^2} \delta R \quad \text{und} \quad \delta \varphi_2 = -\frac{e_1'}{R^2} \delta R.$$

Demnach wird

$$\delta A = \frac{1}{2} \frac{e_1 e_2' + e_2 e_1'}{R^2} \delta R = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e_1 e_2}{R^2} \delta R.$$

Damit sind wir zum Coulombschen Gesetze zurückgekommen, das der Fernwirkungstheorie zugrunde liegt. Auf dem angegebenen Wege ergibt sich dieses Grundgesetz der Fernwirkungstheorie als Folgerung aus den Maxwellschen Anschauungen über die Einwirkung des Dielektrikums.

Sechster Abschnitt.

Magnetostatik.

§ 75. Allgemeine Eigenschaften der Magnete.

Den Griechen war schon bekannt, daß in der Nähe der kleinasiatischen Stadt Magnesia Steine gefunden wurden, welche die Eigenschaft hatten, Eisen anzuziehen und von demselben angezogen zu werden. Wird ein solcher Magneteisenstein in Eisenfeilicht geworfen, so haften die Eisenspäncchen an einzelnen Stellen seiner Oberfläche besonders stark. Durch ein künstliches Verfahren können Eisen und Verbindungen des Eisens mit Kohlenstoff, besonders Stahl, ebenso auch Nickel und Kobalt und gewisse Manganlegierungen der Metalle Zinn,