Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Vierter Abschnitt. Kapillarität

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

d. h. *das Flüssigkeitsvolumen ist direkt proportional der vierten Potenz des Radius des Rohres, ferner umgekehrt proportional der Länge und der Konstanten* μ.

Die Strömung der Flüssigkeiten durch enge Röhren hat Poiseuille zuerst untersucht; er ist zu Resultaten gelangt, die mit der obenstehenden Gleichung übereinstimmen.[1])

Vierter Abschnitt.

Kapillarität.

§ 55. Die Oberflächenenergie.

Die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse, auf welche keine äußeren Kräfte wirken, ist allein durch die Kräfte bestimmt, mit denen ihre Teilchen aufeinander wirken. Ist die Masse sehr groß, so wird sie infolge der gegenseitigen Anziehung der Teilchen Kugelgestalt annehmen; ist dagegen die Masse klein, so wird die allgemeine Massenanziehung keine irgend merkliche Wirkung haben. Gleichwohl hat jede Flüssigkeitsmasse infolge der *Kohäsionskraft* das Bestreben, eine bestimmte Gestalt, und zwar die Kugelgestalt anzunehmen. Aus den über die Wirkungsweise der Kohäsionskraft angestellten Versuchen geht deutlich hervor, daß diese Kraft nur zwischen Teilchen wirksam ist, die sich in sehr geringem Abstande voneinander befinden. Über die Abhängigkeit dieser Kraft vom Abstande der Teilchen ist noch nichts bekannt. Man kann indessen vorteilhaft von der folgenden Betrachtung ausgehen, die in einer verhältnismäßig einfachen Weise zu den Gesetzen der Kapillarität führt.

Um die Gestalt eines kugelförmigen Tropfens irgend einer Flüssigkeit zu ändern, ist eine Arbeit erforderlich. Wenn kein

[1]) Zur Literatur: Lamb, Treatise on the motion of fluids. Cambridge 1879; Auerbach, Die theoretische Hydrodynamik. Braunschweig 1881. Kirchhoffs Mechanik, 15. Vorlesung u. ff.; Basset, Treatise on Hydrodynamics, Cambridge 1888. W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900.

Reibungswiderstand in der Flüssigkeit stattfindet, so kann diese Arbeit nur von den Flüssigkeitsteilchen herrühren, die sich in oder dicht an der Oberfläche befinden; denn auf ein Flüssigkeitsteilchen, das in größerem Abstande von der Oberfläche liegt, können nur die Teilchen wirken, die sich in sehr geringem Abstande von dem betrachteten befinden; diese bleiben entweder an ihren Orten oder werden durch andere ersetzt, die in derselben Weise wirken wie die ersetzten. Die bei der Änderung der Gestalt der Flüssigkeit geleistete Arbeit ist also dazu verwendet, um neue Teilchen zu den vorhandenen in die Oberfläche zu bringen oder, was dasselbe ist, um die Oberfläche zu vergrößern. Wird die Flüssigkeitsoberfläche S um die unendlich kleine Größe dS vergrößert, so ist dazu die Arbeit $C \cdot dS$ nötig; C ist eine konstante Größe und wird als *Kapillaritätskonstante* bezeichnet.

In einer Oberfläche stoßen im allgemeinen zwei Körper zusammen, und C hängt von der Beschaffenheit dieser beiden Körper ab. Bei einem fallenden Regentropfen berühren sich Wasser und Luft in der Oberfläche. An der Oberfläche eines Öltropfens, der nach dem bekannten Plateauschen Versuch in einer Mischung von Wasser und Alkohol schwebt, berühren sich zwei Flüssigkeiten. Berührt eine Flüssigkeit einen festen Körper, so besitzt die gemeinschaftliche Grenzfläche auch eine bestimmte Energie.

Die Kapillaritätskonstante zweier Körper a und b sei C_{ab} und S sei die Fläche, in der sich die beiden Körper berühren. Die potentielle Energie E_p, welche die Oberfläche S besitzt, ist

$$\text{(a)} \qquad E_p = C_{ab} \cdot S.$$

Da $C_{ab} = E_p / S$ ist und die Dimensionen von E_p und S bzw. $L^2 T^{-2} M$ und L^2 sind, so ist die Dimension der Kapillaritätskonstanten $T^{-2} M$.

In der Oberfläche einer Flüssigkeit ist eine bestimmte Spannung vorhanden, die Oberfläche verhält sich wie eine elastische Haut. Die Oberflächenspannung ist der Widerstand der Flüssigkeit gegen eine Vergrößerung der Oberfläche. Liegt auf einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche ein Rechteck $DEFG$, und behalten drei Seiten unverändert ihre Lage, während die vierte Seite FG zugleich mit den in ihr befindlichen Flüssigkeitsteilchen um die Strecke FH in der Richtung EF fortbewegt wird, so ist die Oberfläche um $FG \cdot FH$ vergrößert, und die Oberflächenenergie hat den Zuwachs $C \cdot FG \cdot FH$ erhalten, wenn C die Kapillaritätskonstante ist. Um die betrachtete Bewegung hervorzubringen, muß auf die Längeneinheit von FG eine Kraft K wirken; die geleistete Arbeit ist also auch

$$K \cdot FG \cdot FH.$$

Daraus ergibt sich, daß

(b) $$K = C$$

ist, oder *die Spannung in der Längeneinheit der Flüssigkeitsoberfläche ist numerisch gleich der Kapillaritätskonstanten.* Eine solche Veränderung von Flüssigkeitsoberflächen läßt sich leicht mit den Plateauschen Flüssigkeitshäutchen ausführen.

Existiert eine solche Spannung in der Flüssigkeitsoberfläche, so übt sie einen Druck auf die Flüssigkeit aus. P (Fig. 64) sei ein Punkt in der Oberfläche, die in der Nähe von P konvex sein möge. Durch P werden zwei ebene Schnitte gelegt, welche die im Punkte P konstruierte Normale der Fläche enthalten. Die eine dieser Ebenen möge die Oberfläche in der Kurve PA, die andere in der Kurve PB schneiden. PA und PB liegen rechtwinklig zueinander, und ihre Krümmungsradien R_1 und R_2 sollen die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkte P sein.

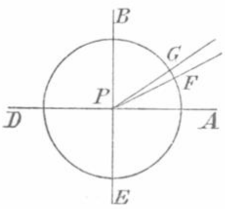

Fig. 64.

Eine dritte durch die Normale von P gelegte Ebene durchschneide die Fläche in der Kurve PF, deren Krümmungsradius R nach dem Eulerschen Satze aus der Gleichung

(c) $$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}$$

bestimmt wird, wenn φ der Winkel zwischen PA und PF ist. Um den Punkt P als Mittelpunkt wird eine Kugel mit unendlich kleinem Radius gelegt, welche die Fläche in der Kurve $AFBDE$ schneidet. Auf ein Element FG dieser Kurve wirkt die Zugkraft $C \cdot FG$ von dem umgebenden Teil der Oberfläche. Wir setzen $FG = r \cdot d\varphi$, dann ist die Zugkraft gleich $Cr \cdot d\varphi$.

Die Richtung der letzteren bildet mit der Normalen der Oberfläche einen Winkel, dessen Kosinus gleich r/R ist; die in der Richtung der Normalen wirkende Kraft ist demnach $(C r^2/R)\,d\varphi$. Die Oberflächenspannung zieht also das Flächenelement $ABDE$ ins Innere der Flüssigkeit mit der Kraft

$$C r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R}.$$

Ist P der Druck auf die Flächeneinheit, so ist also

$$P \pi r^2 = C r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} \quad \text{und} \quad P = \frac{C}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R}.$$

Wird für R der in (c) gegebene Wert eingeführt, so ergibt sich

(d) $$P = C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Wahrscheinlich kommt zu dem gefundenen Druck, der von der Oberflächenkrümmung herrührt, noch ein konstanter Druck M, der auf die Flüssigkeit wirkt, wenn die Oberfläche derselben eben ist. Man kann daher von einem *Normaldrucke* und einem *Krümmungsdrucke* sprechen; der letztere ist der mittleren Krümmung der Oberfläche proportional. Der gesamte von den Kapillaritätskräften herrührende Druck ist also

$$M + C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

wo M und C von der Beschaffenheit der beiden Körper abhängen, die sich in der Oberfläche berühren. Da M aus den Beobachtungen herausfällt, so soll es nicht weiter berücksichtigt werden.

C ist bei 20° C. für die Berührungsfläche zwischen Wasser und Luft 79, Quecksilber und Luft 545, Quecksilber und Wasser 418.

§ 56. Die Gleichgewichtsbedingungen.

Das Gleichgewicht ist in einer Flüssigkeitsmasse vorhanden, wenn die potentielle Energie derselben keine Änderung dadurch erfährt, daß die Lage und Gestalt der Masse unendlich wenig verändert wird. Da die Energie von der

Größe der Oberfläche abhängt, ist es also notwendig, den Zuwachs δS der Oberfläche zu bestimmen. Eine Flüssigkeit A sei von einer anderen B umgeben; beide Flüssigkeiten sollen sich nicht miteinander mischen. Wirken auf die Flüssigkeiten keine äußeren Kräfte ein, so wird A Kugelgestalt annehmen.

Die Fläche S sei von der Flüssigkeit A aus betrachtet konkav, und bewege sich bei einer unendlich geringen Formveränderung nach der Seite, wo B sich befindet. s sei die Randkurve der Fläche S, und S' sei die Form und Stellung der Fläche S nach eingetretener Formveränderung. Wir bezeichnen die Randkurve von S' mit s' und errichten in allen Punkten von s Normalen auf S, welche die Fläche S' in einer neuen Kurve σ schneiden, die innerhalb s' liegen möge. Wird der unendlich kleine Abstand zwischen σ und s' mit δl bezeichnet, so ist der Teil von S', der zwischen σ und s' liegt, gleich

$$\text{(a)} \qquad \int \delta l \cdot d s .$$

Wir errichten dann in einem Punkte P von S die Normale PP', welche S' in P' durchschneidet, setzen $PP' = \delta \nu$ und ziehen durch P auf der Fläche S zwei Kurven PE und PF, von denen die eine dem Maximum der Krümmung, die andere dem Minimum der Krümmung der Fläche in P entspricht. Durch diese Hauptkrümmungskurven und die beiden unendlich benachbarten wird auf der Fläche S ein Rechteck $PEQF$ abgegrenzt, dessen Seiten $PE = a$ und $PF = b$ unendlich klein sind. Sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, ferner α und β zwei Winkel, so ist

$$a = R_1 \alpha, \quad b = R_2 \beta \quad \text{und also} \quad d S = a \cdot b = R_1 R_2 \alpha \beta .$$

Die in E, Q und F auf S errichteten Normalen schneiden S' in E', Q', F'. Wir setzen $P'E' = a'$, $P'F' = b'$ und erhalten

$$a' = (R_1 + \delta \nu) \alpha, \quad b' = (R_2 + \delta \nu) \beta .$$

Ist S_1' der Teil von S', welchen σ begrenzt, so haben wir

$$d S_1' = a' \cdot b' = [R_1 R_2 + (R_2 + R_1) \delta \nu] \alpha \beta$$

und ferner

$$d(S_1' - S) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta \nu \, d S .$$

Somit ergibt sich

(b) $$S_1' - S = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta \nu \, d S .$$

Der gesamte Zuwachs δS, den S bei der Gestaltsänderung erhalten hat, ist also

(c) $$\delta S = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta \nu \, d S + \int \delta l \cdot d s .$$

Dieser Ausdruck behält seine Gültigkeit, selbst wenn δl und $\delta \nu$ in einzelnen oder allen Punkten der Fläche S negativ werden. Wird die Flüssigkeitsmasse von einer einzigen Fläche begrenzt, so ist die Randkurve s gleich Null; ist die Randkurve fest, so ist $\delta l = 0$. In beiden Fällen lautet die Gleichgewichtsbedingung

(d) $$\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta \nu \, d S = 0 .$$

Da wir den von der Flüssigkeitsmasse eingenommenen Raum als konstant ansehen, so muß

(e) $$\int \delta \nu \, d S = 0$$

sein, da $\int \delta \nu \, d S$ die Vergrößerung des Volumens der Flüssigkeit angibt.

Aus (d) und (e) ergibt sich, daß

(f) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = c$$

ist, wo c eine Konstante bedeutet. Dasselbe Resultat erhält man auch aus § 55 (d), wenn wir beachten, daß der Druck in der Flüssigkeitsmasse konstant sein muß.

Stoßen drei Flüssigkeiten, die sich nicht miteinander mischen, in einer Linie zusammen, so können die drei Kantenwinkel, welche die Flüssigkeitsoberflächen miteinander bilden, bestimmt werden. Solche Verhältnisse treten auf, wenn ein Öltropfen auf einer Wasseroberfläche liegt. Die drei zusammenstoßenden Flüssigkeiten sind Wasser, Öl und Luft. Allgemein seien sie mit a, b und c bezeichnet; die Energie einer Flächeneinheit der Grenzfläche zwischen a und b sei C_{ab}; C_{ac} und C_{bc} haben eine ähnliche Bedeutung. Wir beschränken uns auf die Untersuchung des Falles, wo die Kante eine gerade Linie ist. Die Richtungen der drei Oberflächenspannungen C_{ab}, C_{ac}

und C'_{bc} schließen die Kantenwinkel ein. Das Gleichgewicht ist vorhanden, wenn die drei Kräfte C_{ab}, C_{ac}, C_{bc} im Gleichgewichte sind. α, β, γ seien die drei gesuchten Kantenwinkel, und zwar gehöre α zu a, β zu b und γ zu c. Wir haben dann als Gleichgewichtsbedingung

$$\text{(g)} \qquad \frac{C_{bc}}{\sin\alpha} = \frac{C_{ac}}{\sin\beta} = \frac{C_{ab}}{\sin\gamma}.$$

Aus diesen Gleichungen können α, β, γ im allgemeinen bestimmt werden. Wenn aber die eine der Spannungen, etwa C_{bc}, größer als die Summe der beiden anderen ist, so kann kein Gleichgewicht eintreten. In diesem Falle breitet sich die Flüssigkeit a als eine sehr dünne Schicht aus, welche die Flüssigkeiten b und c trennt; wir haben dann das Verhalten eines Tropfens Terpentinöl auf Wasser.

Der in (g) enthaltene Satz ergibt sich auch aus folgender Betrachtung. Wird die Kante um ein unendlich kleines Stück aus ihrer Lage entfernt, so erhält die Summe der Oberflächenenergien

$$C_{bc} \cdot S_1 + C_{ac} \cdot S_2 + C_{ab} \cdot S_3,$$

wo S_1, S_2 und S_3 die drei Grenzflächen bezeichnen, den Zuwachs

$$C_{bc} \cdot \delta S_1 + C_{ac} \cdot \delta S_2 + C_{ab} \cdot \delta S_3.$$

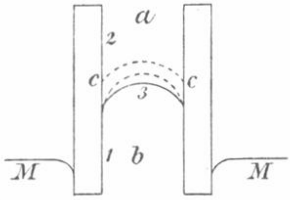

Fig. 65.

Dieser Zuwachs muß gleich Null sein, wenn Gleichgewicht vorhanden ist; wir gelangen damit wieder zu den Gleichungen (g).

Wird ein fester Körper c (Fig. 65) von zwei Flüssigkeiten a und b berührt, so möge die Kante unendlich wenig längs der Oberfläche des festen Körpers verschoben werden. In diesem Falle ist

$$\delta S_1 = -\delta S_2, \quad \delta S_3 = -\delta S_1 \cdot \cos\alpha.$$

und ferner

$$C_{bc} - C_{ac} = C_{ab} \cdot \cos\alpha.$$

Wir haben demnach

$$\text{(h)} \qquad \cos\alpha = \frac{C_{bc} - C_{ac}}{C_{ab}},$$

wo α der sogenannte *Randwinkel* ist.

§ 57. Die Kapillarröhren.

Als Anwendung betrachten wir ein zylindrisches, senkrecht gestelltes Rohr c (Fig. 65), das mit dem unteren Teile in eine Flüssigkeit b getaucht ist; der obere Teil des Rohres befindet sich in Luft, die mit a bezeichnet werden soll. Die Grenzflächen werden wie vorher S_1, S_2 und S_3 genannt. S_1 ist die Berührungsfläche zwischen Flüssigkeit und Rohr, S_2 ist die Berührungsfläche zwischen Rohr und Luft, S_3 ist die Berührungsfläche zwischen Luft und Flüssigkeit. Die Flüssigkeitsoberfläche MM außerhalb des Rohres möge unendlich groß sein; sie kann also als ruhend betrachtet werden, selbst wenn die Oberfläche im Rohre bewegt wird. Die Fläche MM sei die xy-Ebene, die z-Achse sei senkrecht nach oben gerichtet. Ist g die Beschleunigung der Schwerkraft, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, so ist die potentielle Energie eines Flüssigkeitsteilchens $\varrho \cdot dv$ gleich

$$g \cdot \varrho\, dv \cdot z\,.$$

Demnach ist die potentielle Energie der über der xy-Ebene liegenden Flüssigkeitsmasse

$$\iiint g\,\varrho\, z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2} g\,\varrho \iint z^2\, dx\, dy\,,$$

wo x, y, z von nun ab als zur Fläche S_3 gehörig betrachtet werden. Der Teil der potentiellen Energie E_p, dessen Variation hier betrachtet werden muß, ist

$$E_p = \tfrac{1}{2} g\,\varrho \iint z^2\, dx\, dy + C_{ab} S_3 + C_{ac} S_2 + C_{bc} S_1\,.$$

Im Falle des Gleichgewichtes ist $\delta E_p = 0$ oder

$$\text{(a)} \qquad 0 = g\,\varrho \iint z\, dz\, dx\, dy + C_{ab}\,\delta S_3 + C_{ac}\,\delta S_2 + C_{bc}\,\delta S_1\,.$$

Ist s die Länge der Schnittlinie der Fläche S_3 mit der inneren Fläche des Rohres, ist ferner φ der Winkel zwischen ds und der xy-Ebene, und werden alle Punkte der Oberfläche S_3 um dasselbe unendlich kleine Stück δz gehoben, wo δz konstant sein soll, so haben wir

$$\delta S_3 = 0\,, \quad \delta S_1 = -\,\delta S_2 = \int \cos\varphi\, \delta z\, ds$$

Die Gleichung (a) lautet dann

(b) $$g\varrho\iint z\,dx\,dy = (C_{ac} - C_{bc})\int \cos\varphi\,ds.$$

Die Flüssigkeit wird demnach durch die Differenz der Spannungen in den Berührungsflächen S_2 und S_1 getragen.

Behält dagegen die Schnittlinie s ihre Lage und wölbt sich nur die Fläche S_3 mehr, so ist nach § 56 (c)

$$\delta S_3 = \int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta v\,dS_3$$

und ferner

$$\delta S_1 = \delta S_2 = 0,$$

wobei δv ein Element der Normalen ist, das zwischen den Flächen S und S' liegt.

Für $\delta z\,dx\,dy$ kann $\delta v\,dS_3$ gesetzt werden, und also folgt aus der Gleichung (a)

$$\int\left\{g\varrho z + C_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}\delta v\,dS_3 = 0.$$

Da δv eine willkürliche Größe ist, so haben wir

(c) $$g\varrho z + C_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0.$$

Wird die Krümmung der Oberfläche durch die Differentialquotienten von z in bezug auf x und y ausgedrückt, so ergibt sich aus (c) eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Gestalt der Oberfläche. Ist der Randwinkel außerdem gegeben, so ist die Oberfläche vollkommen bestimmt.

Ist der Querschnitt des Rohres kreisförmig und sehr eng, so kann man näherungsweise annehmen, daß

$$R_1 = R_2 = \frac{r}{\cos\alpha}$$

ist, wo r der Radius des Rohres und α der Randwinkel ist. Die Höhe z, bis zu der die Flüssigkeit emporsteigt, ist dann

$$z = -\frac{2\,C_{ab}\cdot\cos\alpha}{g\varrho r}.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Gleichung (b), wenn

$$\iint z\,dx\,dy = \pi r^2 z,\quad \int\cos\varphi\,ds = 2\pi r$$

gesetzt und die Gleichung § 56 (h) benutzt wird.

Die Theorie der Kapillarität ist von Laplace in einem Supplement zum zehnten Buche der Mécanique céleste behandelt. Poisson hat ein größeres Werk, betitelt: Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831, herausgegeben. Endlich hat Gauss eine epochemachende Untersuchung über die Kapillaritätstheorie in den Commentationes soc. scient. Göttingensis. Vol. VII. 1830. (Werke. Bd. 5 S. 29) veröffentlicht. Neuere ausführliche Werke über die Kapillarität sind: Mathieu, Théorie de la Capillarité. Paris 1883. F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität, herausgegeben von Wangerin, 1894. Eine sehr ausführliche Darstellung der Kapillaritätstheorie ist von F. Pockels in Winkelmanns Handbuch der Physik I. Bd. 2. Teil, Leipzig 1908, gegeben.

Fünfter Abschnitt.

Elektrostatik.

§ 58. Die elektrischen Grunderscheinungen.

Die Elektrizitätslehre geht von der Beobachtung aus, daß viele Körper durch Reiben die Fähigkeit erlangen, leichte Körper anzuziehen und *elektrisch* zu werden. Gray (1727) zeigte, daß die erwähnte Eigenschaft von einem Körper auf den anderen übertragen werden kann, und daß sich die einzelnen Körper hinsichtlich ihres Leitungsvermögens für Elektrizität unterscheiden. Auch die Metalle, welche die besten Leiter der Elektrizität sind, können durch Reibung elektrisch werden, wenn sie isoliert sind. Man gelangte zu der Vorstellung, daß der elektrische Zustand durch das Vorhandensein eines *Fluidums* bedingt ist, das durch Reibung im Körper gebildet oder freigemacht wird, und das unter gewissen Verhältnissen von einem Körper auf einen anderen übertragen werden kann. Dufay (1733) zeigte zuerst, daß es zwei sogenannte elektrische Zustände gibt oder nach der erwähnten Vorstellung zwei Fluida, die *positive* und die *negative Elektrizität*, und wies zugleich nach, daß gleichartige Elektrizitäten