universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Dritter Abschnitt. Gleichgewicht und Bewegung flüssiger Körper

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

Dritter Abschnitt.

Gleichgewicht und Bewegung flüssiger Körper.

§ 44. Gleichgewichtsbedingungen.

Der Hauptunterschied zwischen den festen Körpern einerseits und den tropfbar flüssigen und gasförmigen Körpern andererseits besteht darin, daß die letzteren nicht wie die ersteren einen großen Widerstand gegen Formveränderungen leisten, wenn sie auch einen Widerstand den Volumenveränderungen entgegensetzen. Freilich ist eine Kraft erforderlich, um die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse zu verändern, aber der von der Flüssigkeit geleistete Widerstand richtet sich nach der Geschwindigkeit, mit der die Formveränderung vor sich geht, und wird unendlich klein, wenn die Formveränderung sehr langsam vollzogen wird. Wir setzen voraus, daß die Bewegung, durch die der Gleichgewichtszustand erreicht wird, sehr langsam vor sich geht und dürfen daher in der Hydrostatik annehmen, daß die Flüssigkeit gar keinen Widerstand gegen Gestaltsänderungen bietet, wofern diese nicht von Volumenänderungen begleitet sind.

Versucht man dagegen das Volumen von Flüssigkeiten und Gasen zu verkleinern, so zeigen beide ein sehr verschiedenes Verhalten. Sperrt man eine Flüssigkeitsmenge in einem Zylinder durch einen Kolben ab, so zeigt sich auch bei sehr großem Drucke auf den Kolben nur eine sehr geringe Verkleinerung des Volumens, die lange den Beobachtungen entzogen blieb. Aus diesem Grunde bezeichnete man die Flüssigkeiten als *inkompressible Flüssigkeiten.* Die *Gase* dagegen nehmen schon bei einer sehr geringen Änderung des Druckes ein anderes Volumen an. Man nennt daher die Gase, um ihre gemeinsamen Eigenschaften mit den Flüssigkeiten, sowie ihr entgegengesetztes Verhalten zu kennzeichnen, *kompressible Flüssigkeiten.*

Die inkompressiblen Flüssigkeiten, oder kurzweg Flüssigkeiten, besitzen also ein fast konstantes Volumen. Jede unendlich kleine Gestaltsänderung eines unendlich kleinen Teiles

eines solchen Körpers kann nach § 34 betrachtet werden als hervorgebracht durch die Dilatationen a, b und c der Längeneinheit in drei zueinander senkrechten Richtungen. Die Strecken u, v, w in diesen drei Richtungen werden $u(1+a)$, $v(1+b)$, $w(1+c)$. Sind A, B und C die entsprechenden Normalkräfte pro Flächeneinheit, von denen A auf die Fläche vw wirkt, während B und C bzw. auf die Flächen uw und uv wirken, so ist die von den Normalkräften bei der betrachteten Gestaltsänderung geleistete Arbeit

$$Avwua + Buwvb + Cuvwc$$

oder

$$(Aa + Bb + Cc)uvw.$$

Die betrachtete Gestaltsänderung wird im allgemeinen eine Vergrößerung des Volumens zur Folge haben, die

$$uvw(1+a)(1+b)(1+c) - uvw$$

ist. Da a, b und c unendlich klein sind, so wird die Vergrößerung des Volumens bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich

$$(a+b+c)uvw.$$

Gehen wir von der Annahme aus, daß die von den Kräften geleistete Arbeit gleich Null ist, wenn das Volumen nicht geändert wird, so haben wir gleichzeitig

$$Aa + Bb + Cc = 0 \quad \text{und} \quad a + b + c = 0.$$

Diese Gleichungen können nur zusammen bestehen, wenn

$$A = B = C$$

ist. Die für die Spannungskomponenten in § 32 (i) aufgestellten Formeln ergeben

$$X_x = Y_y = Z_z \quad \text{und} \quad Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0,$$

d. h. *innerhalb einer Flüssigkeit, welche einer Verschiebung ihrer Teile, die ohne Änderung des Volumens stattfindet, keinen Widerstand entgegensetzt, sind die tangentialen Druckkräfte gleich Null; in ihr können also nur normale Druckkräfte wirksam sein.*

Gehen wir davon aus, daß die flüssigen Körper nur im Gleichgewicht unter dem Einflusse von Kräften sind, die senkrecht gegen die Oberfläche wirken, so gelangen wir zu dem-

selben Resultat, daß die Normalspannungen gleich groß sein müssen. Wir setzen also

$$Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0,$$

und erhalten aus § 32 (a)

$$P = X_x \cos\alpha, \quad Q = Y_y \cos\beta, \quad R = Z_z \cos\gamma.$$

P, Q und R sind die Komponenten der Spannung für eine Fläche, deren Normale mit den Achsen die Winkel α, β und γ bildet. Die ganze in dieser Fläche wirkende Spannung ist

$$\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2};$$

die Normalkraft N ist durch

$$N = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

bestimmt. Die Tangentialkraft T ist

$$T^2 = (P^2 + Q^2 + R^2) - (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)^2.$$

Durch Einführung der Werte von P, Q und R ergibt sich

$$(X_x - Y_y)^2 \cos^2\alpha\cos^2\beta + (Y_y - Z_z)^2 \cos^2\beta\cos^2\gamma + (Z_z - X_x)^2 \cos^2\alpha\cos^2\gamma = 0,$$

woraus folgt, daß

$$X_x = Y_y = Z_z$$

ist. Aus dem oben angegebenen Ausdrucke für N ergibt sich, daß $N = X_x$ ist, d. h. *in einer Flüssigkeit sind die normalen Druckkräfte in jedem Punkte unabhängig von der Lage des Flächenelementes, auf das sie wirken.* Der auf die Flächeneinheit wirkende Normaldruck ist also nur eine Funktion des Ortes, nicht aber der Lage der Fläche.

Dabei sind nur sogenannte *ideale Flüssigkeiten* betrachtet worden, in denen nicht, wie bei den in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten, jeder Deformation ein Reibungswiderstand entgegengesetzt wird. Berücksichtigen wir auch nicht die später behandelte Kohäsionskraft der Flüssigkeit, so muß die Normalkraft ein Druck sein. Bezeichnen wir diesen Normaldruck gegen die Flächeneinheit mit p, so ist für eine Flüssigkeit

(a) $$X_x = Y_y = Z_z = -p; \quad Z_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0.$$

Ist ϱ die Dichte der Flüssigkeit, so lauten nach § 31 (c) die Gleichgewichtsbedingungen

(b) $$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho Z.$$

X, Y und Z sind die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte; ϱ kann als konstant in der Flüssigkeit angesehen werden. Bei den Gasen ist ϱ eine Funktion des Druckes.

Die Gleichungen (b) können auch in der folgenden Weise hergeleitet werden. Das Parallelepipedon (Fig. 60) hat die Seiten

$$OA = dx, \quad OB = dy, \quad OC = dz.$$

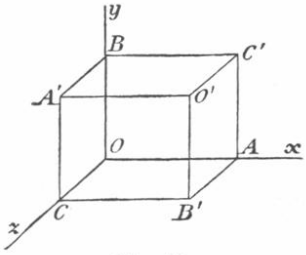


Fig. 60.

Der Druck auf OA' ist $p \cdot dy \cdot dz$, dagegen auf $O'A$ gleich

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\right) \cdot dy \cdot dz.$$

Die Resultierende der beiden Druckkräfte ist der Druck

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz$$

in der Richtung der x-Achse. Außerdem wirkt auf das Parallelepipedon in derselben Richtung die Kraft $\varrho X \cdot dx\, dy\, dz$. Wir erhalten demnach als Gleichgewichtsbedingung

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X\right) \cdot dx\, dy\, dz = 0,$$

woraus sich sogleich die erste der Gleichungen (b) ergibt. Die beiden übrigen Gleichungen werden in ähnlicher Weise hergeleitet.

Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so muß p den Gleichungen (b) genügen. Damit dieses der Fall ist, muß

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial(\varrho X)}{\partial y} = \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\varrho X)}{\partial z}$$

sein. Diese Gleichungen gelten aber, wenn eine Funktion Φ von solcher Beschaffenheit existiert, daß

$$\text{(d)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varrho X, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varrho Y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \varrho Z$$

ist. Die Gleichungen (c) sind die eigentlichen Gleichgewichtsbedingungen. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann p bestimmt werden. Wir haben dann

$$dp = \varrho(X dx + Y dy + Z dz).$$

Haben die Kräfte ein Potential ψ, sodaß

$$X = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

ist, so ergibt sich

(e) $$dp = -\varrho \cdot d\psi.$$

Bei den Gasen ist ϱ eine Funktion von p; bei den Flüssigkeiten wird ϱ als konstant betrachtet. Im letzteren Falle erhalten wir dann

(f) $$p = c - \varrho\psi,$$

wo c eine Konstante ist.

§ 45. Beispiele des Gleichgewichtes flüssiger Körper.

Wir untersuchen zuerst das Gleichgewicht einer Flüssigkeitsmasse, die in einem Gefäße enthalten ist und auf die nur die Schwere einwirkt, deren Beschleunigung g ist. Die Lage der Flüssigkeitsteile sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen z-Achse senkrecht nach oben gerichtet ist; wir haben dann nach der Bezeichnung im vorigen Paragraphen

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Also ist

$$\psi = gz.$$

Da die Dichte ϱ als konstant betrachtet wird, so kann das Gleichgewicht unter dem Einflusse der Schwerkraft eintreten. Nach § 44 (f) ist

$$p = c - g\varrho z.$$

Also ist der Druck in derselben Niveaufläche überall gleich groß.

Wir bestimmen sodann den Druck in einer Flüssigkeit, welche sich in einem Gefäße befindet, das sich um eine senkrechte Achse A mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die Flüssigkeit möge sich wie ein fester Körper um die Achse A drehen mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie das Gefäß.

Auf ein Flüssigkeitsteilchen im Abstande r von der Achse A wirkt die Schwere und eine Zentrifugalkraft, deren Beschleunigung $\omega^2 r$ ist. Die z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems sei senkrecht nach oben gerichtet und falle mit der Drehungsachse zusammen. Wir haben dann

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g,$$

und das Potential ψ ist

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + g z .$$

Nach § 44 (f) ist der Druck

$$p = c + \varrho(\tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 - g z).$$

Die Flächen konstanten Druckes sind Rotationsparaboloide mit der gemeinsamen Achse A.

Eine dritte Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen machen wir bei der *Bestimmung des Druckes in der Atmosphäre.* Die Schwere sei nach dem Erdmittelpunkte gerichtet; ihre Beschleunigung γ kann ausgedrückt werden durch

$$\gamma = \frac{g a^2}{r^2},$$

wo g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, a der Erdradius und r der Abstand des betrachteten Punktes vom Erdmittelpunkte ist. Wir haben dann

$$\psi = -\frac{g a^2}{r}.$$

Ist die Temperatur konstant, so ist

$$\varrho = k \cdot p,$$

wo k eine Konstante ist. Nach § 44 (e) haben wir dann

$$dp = -kp\,d\psi \quad \text{oder} \quad \log p = c - k\psi .$$

Ist der Druck an der Erdoberfläche p_0 und das Potential daselbst ψ_0, so ergibt sich

$$\log p_0 = c - k\psi_0$$

und ferner

$$\log\left(\frac{p_0}{p}\right) = k(\psi - \psi_0) = \frac{k g a (r-a)}{r}.$$

Ist die Differenz $r - a$ sehr klein im Vergleiche zu a, so können wir

$$\log\left(\frac{p_0}{p}\right) = k g h$$

setzen, wo $h = r - a$ die Höhe des betrachteten Punktes über der Erdoberfläche und k für trockene Luft bei 0° C. gleich $1{,}2756 \cdot 10^{-9}$ ist.

§ 46. Eulers Bewegungsgleichungen.

Die Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten sind sehr schwierig, und es gibt nur sehr wenige Probleme, welche bisher vollkommen gelöst wurden. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir nur die sogenannten idealen Flüssigkeiten betrachten, dabei sehen wir ab von der Reibung zwischen den bewegten Flüssigkeitsteilchen und ferner von den Kohäsions- und Adhäsionskräften, die später behandelt werden sollen. Wir fügen die weitere Annahme hinzu, daß die Flüssigkeiten inkompressibel sind. Unter diesen Voraussetzungen können mehrere Eigenschaften der Bewegung der Flüssigkeiten hergeleitet werden; dagegen ist die Behandlung der Bewegung luftförmiger Körper äußerst schwierig und hat noch so wenige Resultate ergeben, daß wir auf sie nicht weiter eingehen wollen.

Zur vollständigen Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung muß sowohl die Bahn eines jeden einzelnen Flüssigkeitsteilchens als auch der Ort des Teilchens in der Bahn zu jeder Zeit gegeben sein. Die Koordinaten x, y und z des Flüssigkeitsteilchens M müssen als Funktionen der Zeit t gegeben sein.

Leichter ist es von den Geschwindigkeitskomponenten auszugehen. Die Geschwindigkeit u an einem Punkte der Flüssigkeit können wir als Funktion der Zeit t und des Radiusvektor r darstellen, der von einem festen Bezugspunkte nach dem betrachteten Punkte gezogen ist. Wir können also schreiben

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{f}(\mathfrak{r}, t).$$

Die Geschwindigkeit ist also im allgemeinen in einem bestimmten Augenblicke für die einzelnen Punkte der Flüssigkeit verschieden und eine Funktion von r; sie ändert sich aber an demselben Orte auch mit der Zeit t. Dementsprechend können die Komponenten der Geschwindigkeit u als Funktionen der Zeit t und der Koordinaten des betrachteten Punktes dargestellt werden.

Die Änderung der Geschwindigkeit an einem bestimmten Orte in der Flüssigkeit ist durch den Differentialquotienten $\partial u / \partial t$ gegeben. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen handelt es sich aber um die Beschleunigung des Flüssigkeits-

teilchens und demnach um die Änderung, welche die Geschwindigkeit *desselben* Flüssigkeitsteilchens erfährt. Diese Änderung setzt sich aus zwei Teilen zusammen und zwar erstens aus der Änderung, die durch die Verschiebung $u \cdot dt$ des Flüssigkeitsteilchens aus seiner ursprünglichen in die unendlich nahe benachbarte Lage bewirkt wird, und zweitens aus der Änderung, die die Geschwindigkeit am ursprünglichen Orte des Flüssigkeitsteilchens auch ohne die Verschiebung $u \cdot dt$ erfahren würde. Die gesamte Änderung der Komponenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit, d. h. der Komponenten der Geschwindigkeit desselben Flüssigkeitsteilchens können wir also darstellen durch

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \text{usw.}$$

Damit haben wir die Beschleunigungen *desselben* Flüssigkeitsteilchens nach den Richtungen der drei Koordinatenachsen dargestellt. Da

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

ist, so erhalten wir

$$\text{(a)} \qquad \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Ähnliche Gleichungen gelten für

$$\frac{du_y}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{du_z}{dt}.$$

Zur Auffindung der Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit sei aus ihr ein Parallelepipedon $d\omega$ ausgeschnitten, dessen Kanten dx, dy und dz sind, und auf das eine Kraft mit den Komponenten X, Y und Z wirkt. Im Zeitelement dt erhält das Parallelepipedon eine Bewegungsmenge, deren Komponenten

$$\varrho X d\omega dt, \quad \varrho Y d\omega dt, \quad \varrho Z d\omega dt$$

sind, wo ϱ die Dichte bedeutet.

Der im Punkte x, y, z wirkende Druck p erteilt, wie im § 44 gezeigt ist, $d\omega$ im Zeitelemente dt die Bewegungsmengen

$$-\frac{\partial p}{\partial x} d\omega dt, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} d\omega dt, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} d\omega dt.$$

Unter dem Einflusse dieser Kräfte erhält der Körper in der Zeiteinheit einen Zuwachs an Geschwindigkeit, dessen Komponenten

$$\frac{d u_x}{d t}, \quad \frac{d u_y}{d t}, \quad \frac{d u_z}{d t}$$

sind. Wir finden also

$$\text{(b)} \quad \varrho \frac{d u_x}{d t} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \varrho \frac{d u_y}{d t} = \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \varrho \frac{d u_z}{d t} = \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (a) ergibt sich dann

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = X - \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen rühren von Euler her und heißen die *Eulerschen Bewegungsgleichungen.*

Wir fügen noch die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* hinzu, die in folgender Weise gefunden wird. In das betrachtete Parallelepipedon $d\omega$ strömt während des Zeitelementes dt durch die eine Fläche $dy\,dz$ die Flüssigkeitsmenge $\varrho u_x\,dy\,dz\,dt$. Durch die gegenüberliegende Fläche strömt die Menge

$$\left(\varrho u_x + \frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} dx\right) dy\,dz\,dt$$

aus. Die Differenz der Flüssigkeitsmengen, die durch die zwei Flächenelemente strömt und in einem Verluste besteht, wenn $(\partial (\varrho u_x) / \partial x)\,dx$ positiv ist, wird also

$$\frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} d\omega\,dt.$$

Mit Rücksicht auf die beiden übrigen Flächenpaare ergibt sich als gesamte Differenz zwischen den in das Parallelepipedon eintretenden und austretenden Flüssigkeitsmengen

$$\left(\frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho u_z)}{\partial z}\right) d\omega\,dt.$$

Ursprünglich enthielt das Parallelepipedon die Menge $\varrho\,d\omega$, nach Ablauf des Zeitelementes dt enthält es die Menge

$$\left(\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt\right) d\omega.$$

Die Differenz der Flüssigkeitsmengen ist also

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} d\omega\,dt.$$

Hieraus folgt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\text{(d)} \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho u_z)}{\partial z} = 0 .$$

Ist aber die Dichte ϱ der Flüssigkeit konstant, so nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

an.

In den Gleichungen (c) und (e) sind vier unbekannte Größen u_x, u_y, u_z und p enthalten, zu deren Bestimmung vier Gleichungen vorhanden sind. Zur Bestimmung der bei der Integration auftretenden Konstanten muß der Bewegungszustand der Flüssigkeit für einen bestimmten Zeitpunkt gegeben sein. Ist die Flüssigkeit von einer unbeweglichen Fläche begrenzt, so sind die Komponenten der Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen der Grenzfläche Null. Sind $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$, $\bar{u}_z$ die Geschwindigkeitskomponenten eines Teilchens an der Grenze der Flüssigkeit, und bildet daselbst die Normale der Grenzfläche mit den Achsen die Winkel α, β, γ, so ist

$$\text{(f)} \qquad \bar{u}_x \cos\alpha + \bar{u}_y \cos\beta + \bar{u}_z \cos\gamma = 0 .$$

Wir wollen auch die *vektoranalytische Form der Eulerschen Gleichungen* herleiten. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens sei mit u bezeichnet. Die Geschwindigkeitsänderung *desselben* Flüssigkeitsteilchens ist $d\mathrm{u}/dt$. Diese Änderung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Zunächst betrachten wir einen bestimmten Punkt Q der Flüssigkeit; an diesem Punkte ändert sich die Geschwindigkeit im Zeitelemente dt um einen gewissen Betrag, den wir durch

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} dt$$

darstellen, wobei die Differentiation bei konstantem Orte nur in bezug auf t auszuführen ist. Bewegt sich aber das Flüssigkeitsteilchen während des Zeitelementes dt vom betrachteten Punkte Q in der Richtung u um die Strecke ds zum Punkte Q_1, so gelangt es damit an eine Stelle, wo die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung eine andere ist. Diese Änderung der Geschwindigkeit können wir darstellen durch

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} d s = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} u \cdot d t,$$

indem $\partial \mathfrak{u} / \partial s$ die Änderung von $\mathfrak{u}$ bezogen auf die Längeneinheit ist.

Wir haben aber die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} = \mathfrak{i} \frac{\partial u_x}{\partial s} + \mathfrak{j} \frac{\partial u_y}{\partial s} + \mathfrak{k} \frac{\partial u_z}{\partial s},$$

indem die auf die Längeneinheit bezogene Änderung des Vektors $\mathfrak{u}$ in einer bestimmten Richtung $\mathfrak{s}$ gleich der Vektorsumme der auf die Längeneinheit bezogenen Komponenten ist. Nach Seite 42 schreiben wir die Glieder auf der rechten Seite der letzten Gleichung in der Form

$$\mathfrak{i} \frac{\partial u_x}{\partial s} = \mathfrak{i} (\mathfrak{s}_1 \nabla u_x) = \mathfrak{i} (\mathfrak{s}_1 \nabla) u_x \quad \text{usw.}$$

Dann wird

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} u \, d t = (\mathfrak{s}_1 \nabla) \mathfrak{u} \cdot u \, d t.$$

Dabei stellt $(\mathfrak{s}_1 \nabla) \mathfrak{u}$ die in der Richtung der Strecke $\mathfrak{s}$ auf die Längeneinheit bezogene Änderung der Geschwindigkeit dar. Gehen wir in der Richtung des Vektors $\mathfrak{s}$ zu einem anderen um $d s = u \, d t$ entfernten Punkte über, so ist die Änderung der Geschwindigkeit

$$(\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u} \cdot d t = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} \cdot u \cdot d t.$$

Demnach können wir die Änderung der Geschwindigkeit *desselben* Flüssigkeitsteilchens in der Zeiteinheit durch

$$\frac{d u}{d t} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u}$$

darstellen. Ist p der Druck der Flüssigkeit, so wirkt auf ein Flüssigkeitsteilchen zunächst die Kraft $-p$. Bei Ausschluß äußerer Kräfte würden wir also

$$-\frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u}$$

haben. Ist ferner noch die äußere Kraft $\mathfrak{F}$ wirksam, so haben wir

$$\mathfrak{F} - \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u}. \tag{g}$$

Beachten wir, daß die Komponenten von $(\mathfrak{u}\,\nabla)\,\mathfrak{u}$

$$\text{(h)}\qquad \begin{cases} (\mathfrak{u}\,\nabla)\,u_x = u_x\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_x}{\partial z}, \\ (\mathfrak{u}\,\nabla)\,u_y = u_x\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_y}{\partial z}, \\ (\mathfrak{u}\,\nabla)\,u_z = u_x\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases}$$

sind, so gelangen wir zu den unter (c) aufgestellten Eulerschen Gleichungen.

Die auf die Volumeneinheit bezogene *Ergiebigkeit* der Quellen der Flüssigkeitsströmung ist bei konstanter Dichte ϱ nach (d)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Dieser Ausdruck wird symbolisch dargestellt durch

$$\operatorname{div}\mathfrak{u}$$

und ist als die *Divergenz* des Vektors $\mathfrak{u}$ bezeichnet. Die *Kontinuitätsgleichung* lautet dann

$$\text{(i)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{u} = 0.$$

Die Divergenz ergibt sich, wenn man den Hamiltonschen *Operator* (vgl. S. 42)

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

auf einen Vektor nach den Regeln der skalaren Multiplikation einwirken läßt. Wir erhalten dann

$$\nabla\,\mathfrak{u} = \operatorname{div}\mathfrak{u} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(u_x\mathfrak{i} + u_y\mathfrak{j} + u_z\mathfrak{k}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

§ 47. Transformationen der Eulerschen Gleichungen.

Bei der Bewegung ändert das Parallelepiped mit den ursprünglichen Kanten dx, dy, dz in der Flüssigkeit im allgemeinen nicht nur seinen Ort im Raume, sondern es rotiert auch und ändert zugleich seine Gestalt. Die augenblickliche Bewegung ist durch die Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y, u_z bestimmt; die Rotationen und Formveränderungen werden

folgendermaßen ermittelt. In der Elastizitätslehre ist für die Rotationskomponente h_x eines solchen Elementes der Ausdruck gegeben (s. S. 139)

$$h_x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial z}\right),$$

wenn ζ' und η' die unendlich kleinen Änderungen der Koordinaten z und y bei der Bewegung sind. Wir können $\zeta' = u_z\,dt$ und $\eta' = u_y\,dt$ setzen und erhalten dadurch

$$h_x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) dt.$$

Ist w_x die entsprechende Winkelgeschwindigkeit, so wird $h_x = w_x \cdot dt$ und ferner

$$\text{(a)}\quad w_x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right),\quad w_y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\quad w_z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

w_x, w_y und w_z sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit w bei der Rotation um die drei Koordinatenachsen. In vektoranalytischer Darstellung haben wir

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\,w_x + \mathfrak{j}\,w_y + \mathfrak{k}\,w_z,$$

und nach S. 36 finden wir

$$\text{(a')}\qquad 2\,\mathfrak{w} = \operatorname{rot}\mathfrak{u},$$

d. h. die Rotation der Weggeschwindigkeit u ist gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit.

Findet keine Rotation in der Flüssigkeit statt, so ist

$$w_x = 0,\quad w_y = 0,\quad w_z = 0,$$

oder

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z},\quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x},\quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen sind die Bedingungen für die Existenz einer Funktion φ von x, y, z und t, welche die Eigenschaft hat, daß

$$u_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad u_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad u_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist. Diese Funktion ist von v. Helmholtz als *Geschwindigkeitspotential* bezeichnet, denn die Komponenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit verhalten sich in diesem Falle wie die Komponenten einer Kraft, die ein Potential hat.

Für die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt unter der Voraussetzung der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials die Kontinuitätsgleichung [§ 46 (e)]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi=0.$$

Die Geschwindigkeit u eines Flüssigkeitsteilchens folgt aus

$$u^2=u_x{}^2+u_y{}^2+u_z{}^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Aus den Gleichungen (a) folgt

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial x}-2w_z,\qquad \frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+2w_y.$$

Die erste der drei Eulerschen Gleichungen § 46 (c) lautet demnach

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+2(u_z w_y-u_y w_z)+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Führen wir in diese Gleichung die Geschwindigkeit u ein, so wird

(b)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_x}{\partial t}+2(u_z w_y-u_y w_z)+\frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial x}=X-\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \text{und ebenso ergeben sich die Gleichungen}\\ \dfrac{\partial u_y}{\partial t}+2(u_x w_z-u_z w_x)+\frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial y}=Y-\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t}+2(u_y w_x-u_x w_y)+\frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial z}=Z-\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial z}.\end{cases}$$

Beachtet man, daß nach S. 51 das Vektorprodukt

$$[\mathfrak{w},\mathfrak{u}]=\mathfrak{i}(w_y u_z-w_z u_y)+\mathfrak{j}(w_z u_x-w_x u_z)+\mathfrak{k}(w_x u_y-w_y u_x)$$

ist, so ergibt sich leicht, daß wir die drei Gleichungen (b) in der Vektoranalysis durch die eine Gleichung

(b′)
$$\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}+2[\mathfrak{w},\mathfrak{u}]+\frac{1}{2}\nabla\mathfrak{u}^2=\mathfrak{F}-\frac{1}{\varrho}\nabla p$$

darstellen können, indem die Kraft $\mathfrak{F}$ die rechtwinkligen Komponenten X, Y, Z hat.

Aus den Gleichungen (b) kann p eliminiert werden. Wird nämlich die zweite der Gleichungen (b) nach z differentiiert, und die dritte nach y, so ergibt sich durch Subtraktion

$$\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{\partial(u_y w_x-u_x w_y)}{\partial y}-\frac{\partial(u_x w_z-u_z w_x)}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Nach (a) ist aber

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0\quad\text{oder}\quad\operatorname{div}\mathfrak{w}=0,$$

und nach der Kontinuitätsgleichung haben wir

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0 .$$

Wir finden demnach

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial w_x}{\partial z} - w_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - w_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

$\partial w_x / \partial t$ gibt die zeitliche Änderung der Komponente w_x der Winkelgeschwindigkeit an demselben Orte. In derselben Weise wie die Änderung der Geschwindigkeit *desselben* bewegten Flüssigkeitsteilchens, stellen wir auch die gesamte Änderung der Winkelgeschwindigkeit dar durch

$$\frac{d w_x}{d t} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial w_x}{\partial z}.$$

Führen wir diesen Wert von $d w_x / d t$ in die letzte Gleichung ein, so wird

$$\text{(c)} \qquad \frac{d w_x}{d t} = w_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Beachtet man, daß in der Vektoranalysis

$$(\mathfrak{w} \nabla)\,\mathfrak{u} = \left(w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{i}\, u_x + \mathfrak{j}\, u_y + \mathfrak{k}\, u_z),$$

so ergibt sich, daß wir die Gleichung (c) und die zwei zugehörigen durch die Gleichung

$$\text{(c')} \qquad \frac{d \mathfrak{w}}{d t} = (\mathfrak{w} \nabla)\,\mathfrak{u} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{F}$$

darstellen können. Kann die Kraft $\mathfrak{F}$ aus einem Potential abgeleitet werden, so ist nach S. 37 $\operatorname{rot} \mathfrak{F} = 0$. Ist ferner die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ in irgend einem Zeitpunkte gleich Null, so wird nach (c') auch

$$\frac{d \mathfrak{w}}{d t} = 0 .$$

Haben also die Kräfte ein Potential und rotiert in einem bestimmten Augenblick ein Flüssigkeitsteilchen nicht, so wird es niemals rotieren.

Auch aus der Gleichung (c) ergibt sich, *daß in einer idealen Flüssigkeit keine Rotation entstehen kann, wenn die Kräfte ein*

Potential haben. In diesem Falle werden die Flüssigkeitsteilchen, die bereits rotieren, auch fernerhin in Rotation bleiben; aber die Teilchen, die nicht von Anfang an rotieren, werden niemals in Rotation geraten. Dieser Satz ist zuerst von H. v. Helmholtz ausgesprochen.

§ 48. Wirbel- und Strömungsbewegungen in einer Flüssigkeit.

Bei den Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeit ist es wichtig zu erfahren, ob eine Rotation der einzelnen Flüssigkeitsteilchen stattfindet oder nicht. Findet eine Rotation statt, so wird sie als *Wirbelbewegung* bezeichnet. Wir haben dann

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} w_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \quad w_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \\ w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad div\, \mathfrak{w} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad div\, \mathfrak{u} = 0.$$

Haben die Kräfte ein Potential, so folgt aus den Gleichungen § 47 (c)

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \frac{d w_x}{d t} = w_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \frac{d w_y}{d t} = w_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{d w_z}{d t} = w_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Sind die Komponenten w_x, w_y, w_z dagegen überall in der Flüssigkeit in einem bestimmten Augenblicke Null, so sind sie nach den Gleichungen (d) zu jeder Zeit Null. In diesem Falle bezeichnen wir die Bewegung als *Strömung*, welche durch die Gleichungen

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

charakterisiert ist. u_x, u_y und u_z besitzen dann nach § 47 ein *Geschwindigkeitspotential* φ, das im allgemeinen von x, y, z und t abhängt. Die *Kontinuitätsgleichung* lautet

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0 .$$

Die Eulerschen Gleichungen § 46 (c) erhalten jetzt die Form

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial x} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ Y = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial y} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ Z = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial z} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Haben die Kräfte ein Potential, sodaß

$$X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{i} X + \mathfrak{j} Y + \mathfrak{k} Z = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = -\nabla \Psi.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{u}^2 = \tfrac{1}{2}\nabla \mathfrak{u}^2 = \tfrac{1}{2}\nabla (\nabla \varphi)^2,$$

indem

$$\mathfrak{u} = -\left(\mathfrak{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\nabla \varphi$$

ist. Demnach können wir die Gleichung (g) in der Vektoranalysis in der Form

$$\text{(g')} \qquad -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \varphi) + \tfrac{1}{2}\nabla (\nabla \varphi)^2 = -\nabla \Psi - \frac{1}{\varrho}\nabla p$$

darstellen, unter der Voraussetzung, daß die Kräfte ein Potential haben. Die Gleichung (g') läßt sich integrieren, und wir finden dann

$$\text{(h')} \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \mathfrak{f}(t) = -\Psi - \frac{p}{\varrho},$$

wo $\mathfrak{f}(t)$ eine Funktion der Zeit allein bedeutet. Diese Gleichung als Integral der Gleichungen (g) können wir auch in der Form

$$\text{(h)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}u^2 + \mathfrak{f}(t) = \Psi + \frac{p}{\varrho}$$

schreiben. Zur Bestimmung von φ und p nehmen wir zu dieser Gleichung noch die Beziehung (f) hinzu. In einem einfach zusammenhängenden Raume ist φ eine eindeutige Funktion des Ortes und der Zeit. Aus der Gleichung (h) können dann φ und dessen Ableitungen, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten, sowie der Druck p bestimmt werden.

Um ein einfaches Beispiel für die zwei Arten der besprochenen Bewegungen zu erhalten, nehmen wir an, daß alle Teilchen einer unendlichen Flüssigkeitsmasse sich in Kreisen bewegen, die der $x\,y$-Ebene parallel sind und deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen. Alle Teilchen, die sich in demselben Abstande von der z-Achse befinden, bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung. Dann ist entsprechend § 41 (e)

$$u_x = -\omega y, \quad u_y = +\omega x, \quad u_z = 0.$$

ω soll nur vom Abstande des Teilchens von der z-Achse abhängig sein. Da

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{x y}{r}\frac{d\omega}{dr} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = +\frac{x y}{r}\frac{d\omega}{dr}$$

ist, so wird die Kontinuitätsgleichung (c) erfüllt. Im allgemeinen findet eine Rotation der einzelnen Teilchen statt, da

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega - \frac{y^2}{r}\frac{d\omega}{dr}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \omega + \frac{x^2}{r}\frac{d\omega}{dr}$$

ist. Wir finden nämlich

$$w_z = \omega + \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr}.$$

w_x und w_y sind gleich Null. Die Gleichungen (d) sind erfüllt, indem w_z allein von r abhängt und u_x, u_y und u_z von z unabhängig sind.

Wir setzen nun fest, daß $w_z = w_0$ für $r < r_0$ und $w_z = 0$ für $r > r_0$ ist. Hierbei ist w_0 eine Konstante. Für $r < r_0$ setzen wir

$$\omega = w_0 + \frac{C}{r^2},$$

wo C eine neue Konstante ist. C muß verschwinden, weil sonst die Teilchen in der Achse eine unendlich große Geschwindigkeit haben würden. Für den Teil der Flüssigkeit, welcher im Inneren eines Kreiszylinders liegt, dessen Radius r_0

ist, und dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, ist demnach $\omega = w_0$. Diese Teilchen der Flüssigkeit rotieren also um die z-Achse als Wirbelachse, gleichsam wie wenn sie einen festen Körper bildeten. Ist dagegen $r > r_0$ und demnach $w_z = 0$, so ist die Winkelgeschwindigkeit ω'

$$\omega' = \frac{C'}{r^2}.$$

Die lineare Geschwindigkeit ist

$$r\,\omega' = \frac{C'}{r},$$

also umgekehrt proportional dem Abstande des Teilchens von der Achse. Da keine Unstetigkeit in der Bewegung der Flüssigkeitsmasse stattfinden soll, so muß für $r = r_0$ auch $w_0 = C' / r_0^2$ sein. Für $r > r_0$ ist demnach

$$r\,\omega' = \frac{r_0^2 w_0}{r}.$$

Wird r_0 unendlich klein, dagegen w_0 unendlich groß, so erhalten wir einen sogenannten *Wirbelfaden.*

Die Wirkung des Wirbelfadens auf die umgebende Flüssigkeit hängt von dem Produkte aus seinem Querschnitte und seiner Winkelgeschwindigkeit ab. Setzen wir $m = \pi r_0^2 w_0$, so ist die Geschwindigkeit h eines Flüssigkeitsteilchens, das nicht dem Wirbel angehört,

$$h = r\,\omega' = \frac{m}{\pi r}.$$

Die Größe $m = \pi r_0^2 w_0$, die als *Stärke des Wirbelfadens* bezeichnet wird, stellt eine unveränderliche und unzerstörbare Eigenschaft des Wirbels dar. Ändert sich der Querschnitt eines Wirbelfadens mit der Zeit, so ändert sich auch die Rotationsgeschwindigkeit w_0, stets bleibt aber m konstant. Die Wirbelachse braucht nicht eine gerade Linie zu sein, sie kann jede beliebige Form haben. Befindet sich die Wirbelachse selbst in Bewegung, so werden die Kreisbahnen der rotierenden Teilchen mit der Achse fortgeführt, wie wenn sie fest mit ihr verbunden wären. Eine Vermischung der dem Wirbel angehörigen Flüssigkeitsteilchen mit den übrigen findet nicht statt. Die Wirbelachse muß in sich selbst zurückkehren oder an der Begrenzung der Flüssigkeit endigen, sie kann nicht im

Inneren einer Flüssigkeit aufhören, weil sonst die Kontinuität der Bewegung aufhören würde.

Die Wirbelfäden sind zuerst von H. v. Helmholtz untersucht, später von William Thomson und mehreren anderen.

§ 49. Stationäre Bewegung mit Geschwindigkeitspotential.

Sind die Geschwindigkeitskomponenten von der Zeit unabhängig oder ändert sich an demselben Punkte in der Flüssigkeit der Bewegungszustand nicht, so ist die Bewegung *stationär*. Ist ein Geschwindigkeitspotential φ vorhanden, so hat man

$$\text{(a)} \qquad u_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo φ eine Funktion von x, y und z allein ist. Dasselbe gilt für das Potential Ψ der Kräfte. Demnach muß die Funktion $\mathfrak{f}(t)$ in § 48 (h) konstant sein. Setzen wir $\mathfrak{f}(t) = C$, so wird

$$\text{(b)} \qquad \Psi + \frac{p}{\varrho} + \tfrac{1}{2} u^2 = C.$$

Wirken keine anderen Kräfte als Druckkräfte im Inneren der Flüssigkeit, so kann man $\Psi = 0$ setzen und erkennt dann, daß die Geschwindigkeit wächst bei der Bewegung des Flüssigkeitsteilchens von Stellen höheren Druckes zu solchen niederen Druckes und umgekehrt.

Für eine Bewegung, bei der ein Geschwindigkeitspotential existiert, hat man als Kontinuitätsgleichung

$$\text{(c)} \qquad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Als Beispiel einer solchen Bewegung betrachten wir eine in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsmasse ruhende Kugel. Die Teilchen der Flüssigkeit, welche vom Kugelmittelpunkte weit entfernt sind, bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung.

Der Kugelmittelpunkt liege im Koordinatenanfangspunkt O; der Radius der Kugel sei R. Die Flüssigkeitsteilchen, deren Abstand r von O unendlich ist, mögen sich mit der Geschwindigkeit v_0 in der mit der positiven z-Achse parallelen Richtung bewegen. Wir setzen das Geschwindigkeitspotential φ

$$\text{(d)} \qquad \varphi = V - v_0 z,$$

wo $V = 0$ für $r = \infty$ sein möge. Dann ist

(e) $$u_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad u_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad u_z = -\frac{\partial V}{\partial z} + v_0 .$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (c) ist

(f) $$\nabla^2 V = 0 .$$

Setzen wir $V = 1/r$ oder gleich einem in bezug auf x, y oder z genommenen Differentialquotienten von $1/r$, so wird die Gleichung (f) erfüllt. Da die Erscheinung rings um die z-Achse herum symmetrisch ist, so wollen wir versuchen, ob durch die Annahme

(g) $$V = C\frac{\partial (1/r)}{\partial z} = -\frac{Cz}{r^3}$$

die Bedingungen erfüllt werden.

An der Kugeloberfläche bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen längs der Oberfläche, und die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung des Radius ist Null, d. h.

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=R} = 0 .$$

Setzen wir

$$\frac{z}{r} = \cos\gamma ,$$

so wird

$$\varphi = -\frac{C\cos\gamma}{r^2} - r\,v_0\cos\gamma$$

und

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2C\cos\gamma}{r^3} - v_0\cos\gamma .$$

Hieraus ergibt sich, daß

(h) $$C = \frac{v_0 R^3}{2}$$

ist. Aus den Gleichungen (d), (g) und (h) folgt, daß

(i) $$\varphi = -\frac{v_0 R^3 z}{2r^3} - v_0 z = -v_0 z\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

Ferner erhalten wir

$$u_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{3v_0 R^3 zx}{2r^5}; \quad u_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{3v_0 R^3 zy}{2r^5};$$

$$u_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{v_0 R^3}{2r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right) + v_0 .$$

Wird

$$u_x^2 + u_y^2 = s^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = q^2$$

gesetzt, so ist

$$s = -\frac{3 v_0 R^3 q z}{2 r^5}.$$

Sind q und z die Koordinaten der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens, so lautet die Bahngleichung

$$\text{(k)} \qquad \frac{dq}{dz} = \frac{s}{u_z}.$$

Bedenkt man, daß $r^2 = q^2 + z^2$ ist, so ergibt sich durch Integration der Gleichung (k)

$$q^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = c.$$

Dieses ist die Gleichung der Stromlinie, wenn c eine Konstante bedeutet. Ist $c = 0$, so wird entweder $r = R$ oder $q = 0$; im ersten Falle erhält man die Gleichung eines größten Kreises, im zweiten die Gleichung der z-Achse.

Der Druck p wird mit Hilfe der Gleichung (b) bestimmt. Da $\Psi = 0$ ist, so wird

$$p = \varrho (C - \tfrac{1}{2} u^2).$$

Es ist jedoch $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$; für einen Punkt an der Kugeloberfläche wird also

$$u = \frac{3 v_0 q}{2 R},$$

und

$$p = C' - \tfrac{9}{8} \varrho v_0^2 \frac{R^2 - z^2}{R^2}.$$

Der Druck p ist demnach auf dem Teile der Kugel, der nach der positiven Seite der z-Achse liegt, ebenso groß wie auf dem nach der negativen Seite der z-Achse gelegenen Teile der Kugel; die bewegte Flüssigkeitsmasse wird daher die Kugel nicht von ihrer Stelle entfernen können. Auf die Kugel braucht also keine Kraft einzuwirken, um sie in der wirbelfreien Strömung einer idealen Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle festzuhalten. Andererseits erfährt eine Kugel, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in unveränderlicher Richtung in einer unbegrenzten, idealen und ruhenden Flüssigkeit bewegt, keinen Widerstand

bei der Bewegung. Dieses scheinbar überraschende Resultat erklärt sich dadurch, daß der Reibungswiderstand nicht berücksichtigt ist.

§ 50. Die Bewegungsgleichungen von Lagrange.

Ein Flüssigkeitsteilchen P befinde sich ursprünglich im Punkte, dessen Koordinaten a, b, c sind; nach Verlauf des Zeitelementes dt sei dasselbe im Punkte x, y, z. x, y, z sind Funktionen von t, a, b und c; ändert sich t allein in diesen Funktionen, so erhalten wir die Bahn eines bestimmten Teilchens. Erteilen wir dagegen den Koordinaten a, b und c alle möglichen Werte und lassen t konstant, so ergeben sich die Örter der verschiedenen Flüssigkeitsteilchen zu derselben Zeit. Wird der Druck mit p und die Dichte der Flüssigkeit mit ϱ bezeichnet, so erhalten wir aus § 46 (b), wenn

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

gesetzt wird,

$$\text{(a)} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Um die in bezug auf x, y und z genommenen Differentialquotienten fortzuschaffen, werden diese Gleichungen bzw. mit

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \quad \frac{\partial y}{\partial a}, \quad \frac{\partial z}{\partial a},$$

mit

$$\frac{\partial x}{\partial b}, \quad \frac{\partial y}{\partial b}, \quad \frac{\partial z}{\partial b}$$

und endlich mit

$$\frac{\partial x}{\partial c}, \quad \frac{\partial y}{\partial c}, \quad \frac{\partial z}{\partial c}$$

multipliziert. Durch Addition ergeben sich dann folgende Gleichungen

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} &\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0, \\ &\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0, \\ &\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen rühren von Lagrange her. Von H. Weber sind Gleichungen aufgestellt worden, die die Vorteile der Eulerschen Gleichungen mit denen der Lagrangeschen Gleichungen vereinigen. (Crelles Journal, **68.** 1868.)

Zu diesen Gleichungen (b) kommt noch eine Beziehung, die ausdrückt, daß das Volumen der Flüssigkeit nicht geändert wird. Die Flüssigkeitsteilchen, welche sich ursprünglich in einem rechtwinkligen Parallelepipedon mit den Kanten da, db und dc befanden, sind zur Zeit t in einem Parallelepiped enthalten, dessen Kanten die Projektionen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial a}da, \quad \frac{\partial y}{\partial a}da, \quad \frac{\partial z}{\partial a}da; \\ &\frac{\partial x}{\partial b}db, \quad \frac{\partial y}{\partial b}db, \quad \frac{\partial z}{\partial b}db; \\ &\frac{\partial x}{\partial c}dc, \quad \frac{\partial y}{\partial c}dc, \quad \frac{\partial z}{\partial c}dc \end{aligned}$$

haben. Der Inhalt des Parallelepipeds zur Zeit t wird also

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \cdot da\,db\,dc.$$

Da die Flüssigkeit *inkompressibel* sein soll, so lautet die *Kontinuitätsgleichung*

$$\text{(c)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1.$$

Zur *Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen* betrachten wir eine Flüssigkeitsmasse, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, die senkrecht nach unten gerichtet ist. Wir haben dann

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$$

und setzen

$$z = c, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

ferner

$$x = r\cos(\varphi + \omega t) = a\cos\omega t - b\sin\omega t,$$
$$y = r\sin(\varphi + \omega t) = b\cos\omega t + a\sin\omega t.$$

Hieraus ergibt sich, daß

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \cos\omega t, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = -\sin\omega t, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = 0;$$
$$\frac{\partial y}{\partial a} = \sin\omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = \cos\omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = 0;$$
$$\frac{\partial z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1.$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\omega^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y\omega^2, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung (c) ist erfüllt, und die Bewegungsgleichungen (b) lauten:

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \varrho\omega^2 a, \quad \frac{\partial p}{\partial b} = \varrho\omega^2 b, \quad \frac{\partial p}{\partial c} = g\varrho.$$

Demnach ergibt sich durch Integration

$$p = C + \varrho\left(\tfrac{1}{2}\omega^2(a^2 + b^2) + g c\right).$$

Diese Lösung der Aufgabe stimmt mit der in § 45 gegebenen überein.

§ 51. Die Wellenbewegungen.

Die Lagrangeschen Gleichungen können mit Vorteil zur Untersuchung der unter dem Einflusse der Schwerkraft in einer Flüssigkeit stattfindenden Wellenbewegung benutzt werden.

Für die wirkliche Bewegung der Flüssigkeitsteilchen bei der Wellenbewegung haben sich nach den Beobachtungen der Gebrüder Weber (Wilhelm Webers Werke 5) die folgenden Sätze ergeben: *Die Schwingungsbahnen der Teilchen, die in der Nähe der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, sind anscheinend Ellipsen, die nahezu Kreisgestalt haben; mit zunehmender Tiefe wird die elliptische Gestalt der Bahnen immer gestreckter, und schließlich wird die Bahn eine horizontale gerade Linie.* Je tiefer das schwingende Teilchen unter der Oberfläche liegt, desto kleiner ist sowohl der vertikale als auch der horizontale Durchmesser seiner Bahn. Die scheinbare Bewegung, die in dem Fortschreiten der Welle besteht, kommt aus der vorher be-

schriebenen reellen Bewegung der Flüssigkeitsteilchen dadurch zustande, daß die in der horizontalen Fortpflanzungsrichtung hintereinander liegenden Teilchen nacheinander eine schwingende Bewegung annehmen. Hierbei sind niemals zwei oder mehrere der Teilchen, die derselben Welle angehören, gleichzeitig in entsprechenden oder gleich gelegenen Punkten ihrer Schwingungsbahnen, sondern sie gelangen nacheinander in diese entsprechenden Punkte. Zwischen den Schwingungen der nebeneinander liegenden Teilchen ist demnach eine *Phasendifferenz* vorhanden.

Alle Flüssigkeitsteilchen mögen sich in ebenen Kurven, die der xz-Ebene parallel sind, bewegen; die x-Achse sei horizonal, die z-Achse sei senkrecht nach unten gerichtet. Wird also $y = b$ gesetzt, so erhalten wir

$$\frac{\partial x}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0,$$

und

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen § 50 (b) lauten also

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - g\right)\dfrac{\partial z}{\partial a} + \dfrac{\partial P}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - g\right)\dfrac{\partial z}{\partial c} + \dfrac{\partial P}{\partial c} = 0, \end{cases}$$

und die Kontinuitätsgleichung § 50 (c) hat die Form

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} = 1.$$

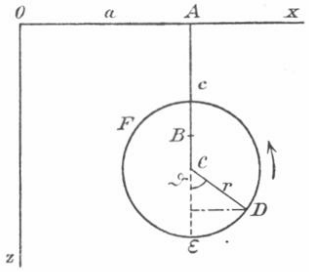


Fig. 61.

Ein Flüssigkeitsteilchen B (Fig. 61), das in der Ruhelage die Koordinaten $OA = a$ und $AB = c$ haben möge, bewege sich auf dem Kreise DFE, dessen Zentrum in C liegt. Das Teilchen befinde sich in D. Der Winkel zwischen CD und der lotrechten Linie sei ϑ. Ferner sei $BC = s$ und $CD = r$. Dann ist

$$\text{(c)} \quad x = a + r\sin\vartheta, \quad z = c + s + r\cos\vartheta, \quad \vartheta = mt + na,$$

wo m und n Konstante sind, und r und s Funktionen von c bedeuten. Wir erhalten also

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + n r \cos\vartheta\,; \quad \frac{\partial z}{\partial a} = - n r \sin\vartheta\,;$$

$$\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{dr}{dc}\sin\vartheta\,; \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{ds}{dc} + \frac{dr}{dc}\cos\vartheta\,.$$

Durch diese Beziehungen erhält die Gleichung (b) die Form

$$\frac{ds}{dc} + n r \frac{dr}{dc} + \left\{\frac{dr}{dc} + n r\left(1 + \frac{ds}{dc}\right)\right\}\cos\vartheta = 0\,.$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von t oder ϑ besteht, so haben wir

(d) $$\frac{ds}{dc} + n r \frac{dr}{dc} = 0\,; \quad \frac{dr}{dc} + n r\left(1 + \frac{ds}{dc}\right) = 0\,.$$

Ferner ergeben sich aus den Gleichungen (a) die Beziehungen

(e) $$\begin{cases} -(m^2 - g n) r \sin\vartheta + \dfrac{\partial P}{\partial a} = 0\,, \\ -m^2 r \dfrac{dr}{dc} - g\left(1 + \dfrac{ds}{dc}\right) - m^2 r\left(1 + \dfrac{ds}{dc}\right)\cos\vartheta\,, \\ -g\dfrac{dr}{dc}\cos\vartheta + \dfrac{\partial P}{\partial c} = 0\,, \end{cases}$$

von denen die letztere infolge der Gleichungen (d) in die Form

(f) $$-(m^2 - g n) r\left\{\frac{dr}{dc} + \left(1 + \frac{ds}{dc}\right)\cos\vartheta\right\} - g + \frac{\partial P}{\partial c} = 0$$

übergeht. Ist der Druck nur von c abhängig, so folgt aus (e) und (f), daß

(g) $$m^2 = g n\,,$$

(h) $$P = g c$$

ist, wenn die Konstante gleich Null gesetzt wird. Der Druck verschwindet also für $c = 0$, was an der freien Oberfläche gelten soll.

Die Bahnen der Teilchen sind Kreise. Braucht ein Teilchen zum Durchlaufen der Bahn die Zeit τ, d. h. ist τ die Schwingungsdauer, so haben wir

$$m = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{2\pi a}{\tau g}\right).$$

Ist λ die Wellenlänge und h die Wellengeschwindigkeit, so ergibt sich

$$h = \frac{\tau g}{2\pi} \quad \text{und} \quad h = \frac{\lambda}{\tau}\,,$$

woraus folgt, daß

(i) $$h = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \text{und} \quad n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist.

Bei der Bewegung beschreibt das Teilchen einen Kreis, dessen Zentrum wenig oberhalb der Ruhelage des Teilchens liegt. Nach der ersten der Gleichungen (d) ist nämlich

$$s = -\tfrac{1}{2} n r^2,$$

wo die Konstante fortfällt, da s und r gleichzeitig verschwinden. Wir haben auch nach (i)

(k) $$s = -\frac{\pi r^2}{\lambda}.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (d) folgt, daß

$$d \log r + n\, d(c + s) = 0$$

ist. Durch Integration erhalten wir

$$\log r + n(c + s) = k,$$

wo k eine Konstante ist. Für ein Teilchen in der Oberfläche ist $c = 0$. Werden die Werte von r und s für dasselbe Teilchen der Oberfläche mit R und S bezeichnet, so ist

$$\log R + n S = k.$$

Wir haben ferner

$$\log\left(\frac{r}{R}\right) + n(c + s - S) = 0.$$

$c + s - S = H$ ist der senkrechte Abstand zwischen dem Mittelpunkte der Bahn des betrachteten Flüssigkeitsteilchens und dem Mittelpunkte der Bahn eines Teilchens in der Oberfläche. Man hat also

(l) $$r = R e^{-\frac{2\pi H}{\lambda}}.$$

Wird ds/dc aus den Gleichungen (d) eliminiert, so erhalten wir

$$dr + nr(dc - nr\,dr) = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\frac{1}{n} \log r + c - \tfrac{1}{2} n r^2 = k'.$$

Für die Teilchen an der Oberfläche ist

$$\frac{1}{n}\log R - \tfrac{1}{2} n R^2 = k'.$$

Demnach wird

(m) $$c = \frac{\lambda}{2\pi}\log\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\pi}{\lambda}(R^2 - r^2).$$

Die freie Oberfläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß ein Kreiszylinder auf der Unterseite einer horizontalen Fläche AB (Fig. 62) rollt, die in der Höhe $OA = \lambda / 2\pi$ über den Mittelpunkten der Bahnen liegt, welche die Teilchen in

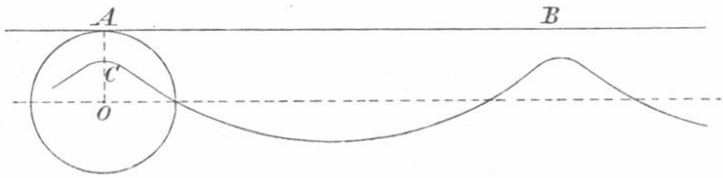


Fig. 62.

der Oberfläche beschreiben. Die freie Oberfläche wird dann von einer geraden Linie, deren Abstand von der Zylinderachse gleich R ist, beschrieben.

§ 52. Innere Reibung.

Bei der Behandlung der Bewegung der flüssigen Körper ist bislang die Reibung zwischen den Flüssigkeitsteilchen nicht berücksichtigt worden. Zwischen den verschieden schnell bewegten Teilchen einer Flüssigkeit findet eine Reibung in verschiedenem Grade statt. Infolge der Reibung ist die Zähflüssigkeit mehr oder weniger groß. Wegen der Reibung der Flüssigkeit muß eine Kraft wirken, um eine Flüssigkeitsschicht an einer anderen mit einer gewissen Geschwindigkeit vorüber zu schieben. Diese Kraft bezeichnet man als die *innere Reibungskraft* oder kurz als die *innere Reibung*. Unter der *äußeren Reibung* versteht man die Kraft, welche wirken muß, um eine Flüssigkeitsschicht an einer festen Wand entlang zu schieben. In den meisten Fällen freilich haften die Flüssigkeiten an der festen Wand mit einer Grenzschicht fest. Wir

wollen die innere Reibung durch die Bewegung der Flüssigkeit zu bestimmen suchen.

Alle Teilchen einer Flüssigkeitsmasse mögen sich in einer zur x-Achse parallelen Richtung bewegen, und alle in demselben Abstande von der xz-Ebene sich befindenden Teilchen sollen dieselbe Geschwindigkeit haben. Die xz-Ebene sei eine ruhende horizontale Wand, und die Geschwindigkeit wächst proportional mit dem Abstande der Teilchen von der xz-Ebene. Infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten der übereinander liegenden Flüssigkeitsschichten entsteht zwischen zwei aneinander grenzenden eine Kraft, welche die schneller sich bewegende Schicht zu verzögern, die langsamer sich bewegende zu beschleunigen sucht. Die Ursache für das Auftreten dieser Kraft liegt in der inneren Reibung der Flüssigkeit. Die Kraft selbst ist als ein in der Grenzfläche der Flüssigkeitsschichten wirkender Zug aufzufassen, dessen Richtung bei der langsameren Schicht mit der Bewegungsrichtung übereinstimmt, bei der schnelleren dagegen der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Diese Zugkraft, oder die Reibungskraft, die sich ergibt, wenn die eine Flüssigkeitsschicht an der anderen hingleitet, hängt außer von der Art der Flüssigkeit und deren Temperatur wesentlich von dem Geschwindigkeitsunterschiede benachbarter Flüssigkeitsschichten ab. Nach Newton ist die Reibungskraft proportional dem *Geschwindigkeitsgefälle*, d. h. der Änderung der Geschwindigkeit bezogen auf die Längeneinheit. Im Gegensatze zu der Reibung zwischen festen Körpern scheint die innere Reibung der Flüssigkeiten unabhängig vom Drucke zu sein. Auch in der Flüssigkeit, in der Reibungskräfte auftreten, gelten die Gleichungen § 31 (d),

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Dabei hängt die Tangentialkraft X_y ab von $\partial u_x / \partial y$, d. h. von dem in der Richtung der y-Achse gemessenen Geschwindigkeitsgefälle. Ebenso hängt die Tangentialkraft Y_x ab von dem Gefälle, das die Geschwindigkeitskomponente u_y in der Richtung der x-Achse erfährt, also von $\partial u_y / \partial x$. Die Tangentialkräfte sind aber den in der Flüssigkeit auftretenden Reibungskräften proportional.

Da Y_x und X_y sowohl durch $\partial u_x / \partial y$ wie durch $\partial u_y / \partial x$ bestimmt sind, so wollen wir setzen

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} X_y = Y_x = \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right), \\ Y_z = Z_y = \mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right), \\ Z_x = X_z = \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Die Konstante μ ist der *Reibungskoeffizient* der Flüssigkeit.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes zu erkennen, betrachten wir ein Flüssigkeitsteilchen, das sich ursprünglich im Punkte x, y, z befunden, und dann eine unendlich kleine Bewegung, deren Projektionen auf die Achsen ξ, η, ζ sind, ausgeführt hat. Dabei wird

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad u_y = \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

und

$$X_y = Y_x = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 2\,\mu \frac{\partial x_y}{\partial t}.$$

Demnach ergibt sich die Tangentialkraft aus der Reibung, die bei einer Bewegung in einem flüssigen Körper entsteht. Wir finden also

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} Z_y = 2\,\mu \dfrac{\partial x_y}{\partial t} = \mu\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right), \\ X_z = 2\,\mu \dfrac{\partial x_z}{\partial t} = \mu\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right), \\ Y_x = 2\,\mu \dfrac{\partial y_x}{\partial t} = \mu\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Nach der Erfahrung ist μ unabhängig vom Drucke. Die Bedeutung der übrigen Größen in (b) ist von selbst einleuchtend.

Mit Hilfe der Formeln (b) kann man die Tangentialkräfte bestimmen, die in der Flüssigkeit zur Überwindung der Reibungswiderstände wirken müssen. Wir wollen nun die Größe der Normalkräfte ermitteln, die zur Ausdehnung einer zähen Flüssigkeit in einer gegebenen Richtung nötig sind.

Die Flüssigkeit bewege sich in einer zu AB parallelen Richtung (Fig. 63). Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, das sich im Abstande y von dieser Linie befindet, sei gleich u_x. Wir können dann setzen

$$u_x = u_0 + \varepsilon y.$$

Nach Verlauf des Zeitelementes dt hat A die Strecke $u_0\,dt$, C die Strecke $(u_0 + \varepsilon \cdot AC)\,dt$ zurückgelegt. CC' stellt die relative Bewegung des Punktes C in bezug auf A dar, und wir haben

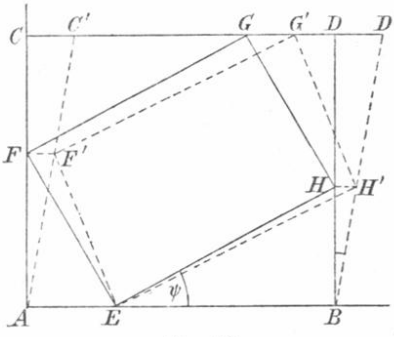


Fig. 63.

$$CC' = \varepsilon \cdot AC \cdot dt.$$

Bezeichnen wir den Winkel CAC' mit $d\varphi$, so ist

(c) $$d\varphi = \varepsilon \cdot dt.$$

Das im Rechteck $ABCD$ beschriebene zweite Rechteck $EFGH$ geht in das Parallelogramm $EF'G'H'$ über, und wir bestimmen die Verlängerungen, welche die Seiten EH und EF dabei erhalten. Der Winkel HEB sei ψ, so ist

$$EH' = EH + HH' \cdot \cos\psi, \quad EF' = EF - FF' \cdot \sin\psi,$$

da HH' und FF' parallel mit AB sind. Ferner ist

$$HH' = BH \cdot d\varphi = EH \cdot \sin\psi \cdot d\varphi,$$
$$FF' = AF \cdot d\varphi = EF \cdot \cos\psi \cdot d\varphi.$$

Also haben wir

$$\frac{EH' - EH}{EH} = \sin\psi\cos\psi\,d\varphi, \quad \frac{EF' - EF}{EF} = -\sin\psi\cos\psi\,d\varphi.$$

Wird die Verlängerung der Längeneinheit von EH mit ds bezeichnet, so ist

(d) $$ds = \sin\psi\cos\psi\,d\varphi;$$

ds ist zugleich die Verkürzung der Längeneinheit von EF.

Um die betrachtete Formveränderung hervorzubringen, muß auf $ABCD$ eine Tangentialkraft T wirken, die

(e) $$T = \mu\varepsilon$$

ist, indem $\varepsilon = \partial u_x / \partial y$ das Geschwindigkeitsgefälle darstellt. Diese Kraft wirkt auf die CD entsprechende Fläche in der Richtung CD, aber auf die AB entsprechende in der Richtung BA; auf die beiden anderen Flächen wirken die Kräfte in den Richtungen CA und BD. Wir bestimmen die auf die Fläche EF wirkende Normalkraft N und setzen in § 30 (a)

$$\alpha = \psi, \quad \beta = \tfrac{1}{2}\pi - \psi, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner

$$X_y = Y_x = T.$$

Während alle anderen Spannungskomponenten Null sind, ergibt sich

(f) $$N = P\cos\psi + Q\sin\psi = 2T\sin\psi\cos\psi.$$

Nach (c) und (d) haben wir

$$ds = \sin\psi\cos\psi \cdot \varepsilon \cdot dt,$$

nach (e) und (f)

$$N = 2\mu\,\varepsilon\sin\psi\cos\psi.$$

Demnach ist

(g) $$N = 2\mu \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Die in der Fläche EH wirkende Spannung ist $-N$. Vorhin ist gezeigt, daß eine Längeneinheit in der Richtung EF die Verlängerung $-ds$ erfährt. Hätte auf die Oberfläche von $ABCD$ eine Normalspannung S gewirkt, so würde diese keinen Einfluß auf die Formveränderungen gehabt haben; aber in EF hätte eine Normalkraft $S+N$, in EH eine Normalkraft $S-N$ gewirkt.

Wirken auf ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind, die Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z, so bringen diese bei der Bewegung teils Formveränderungen, teils Ausdehnung des Volumens hervor. Wie in der Elastizitätslehre setzen wir die räumliche Dilatation $\Theta = x_x + y_y + z_z$, so ist $x_x - \frac{1}{3}\Theta$ der Teil der Ausdehnung in der Richtung der x-Achse, welche hier in Betracht kommt. In derselben Weise setzen wir

$$3S = X_x + Y_y + Z_z,$$

und

$$X_x - S$$

ist der Teil der Normalkraft in der Richtung der x-Achse, der Formveränderung hervorbringt. Mit Hilfe von (g) haben wir

$$X_x - S = 2\mu\left(\frac{\partial x_x}{\partial t} - \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right).$$

Setzen wir endlich für $-S$ eine Größe p, die als Druck be-

trachtet werden kann wegen ihrer Analogie mit dem Drucke in idealen Flüssigkeiten und Gasen, und bedenken wir, daß

$$x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial x_x}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \text{ usw.},$$

so ergibt sich

$$\text{(h)} \qquad X_x = -p + 2\mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Analoge Ausdrücke gelten für Y_y und Z_z.

Nach der Gleichung (h) hat μ die Dimension $ML^{-1}T^{-1}$. μ ist für viele Flüssigkeiten und Gase bestimmt. Nach den Beobachtungen von Thorpe und Rodger ist für Wasser bei 10^0 $\mu = 0{,}01303$, bei 20^0 $\mu = 0{,}01002$, bei 30^0 $\mu = 0{,}00798$. Für Methylalkohol ergab sich bei 0^0 $\mu = 0{,}00813$, bei 20^0 $\mu = 0{,}00591$. Nach den Versuchen von Kundt und Warburg ist für Luft bei 15^0 $\mu = 0{,}000179$, für Wasserstoff bei 15^0 $\mu = 0{,}0000923$.

§ 53. Die Bewegungsgleichungen für eine zähe Flüssigkeit.

Wir stellen die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit auf, in der innere Reibung stattfindet. Nach § 31 wirken die Spannungskomponenten auf die Volumeneinheit in der Richtung der x-Achse mit der Kraft

$$(X) = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

Ist u_x die Geschwindigkeit des einzelnen Teilchens der Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse, so ist

$$\varrho \frac{d u_x}{d t} = (X) + \varrho X,$$

wo X in der üblichen Bezeichnungsweise die Kraftkomponente in der Richtung der x-Achse bezeichnet. Nach § 52 (b) und (h) erhalten wir

$$\text{(a)} \qquad \varrho \frac{d u_x}{d t} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + \tfrac{1}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Die Gleichung (a) und die analogen, die für die Geschwindigkeiten u_y und u_z bzw. in den Richtungen der y- und z-Achse gelten, rühren von Stokes[1]) her. Außerdem haben wir die Kontinuitätsgleichung:

[1]) Stokes, Cambridge Phil. Tr. 8. S. 297. 1845.

(b) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho u_z)}{\partial z} = 0.$$

Wir setzen voraus, daß die Flüssigkeit inkompressibel ist, und haben

(c) $$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

(d)
$$\begin{cases} \varrho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 u_x + \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varrho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 u_y + \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varrho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 u_z + \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Für $\mu = 0$ erhalten wir wieder die Eulerschen Gleichungen § 46 (c). In der Vektoranalysis können wir die Gleichungen (d) darstellen durch (vgl. S. 181)

(d′) $$\varrho \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + (\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u} \right) = \mu \nabla^2 \mathfrak{u} + \varrho \mathfrak{F} - \nabla p.$$

Erleichtert wird die Lösung auch durch die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit sehr klein ist. In diesem Falle können die Glieder

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \text{ usw.}$$

in den Gleichungen (d) fortgelassen werden. In der Gleichung (d′) würde unter dieser Voraussetzung das Glied $(\mathfrak{u} \nabla) \mathfrak{u}$ gegenüber $\partial u / \partial t$ vernachlässigt werden können, und wir könnten $\partial \mathfrak{u} / \partial t = d\mathfrak{u} / dt$ setzen. Ist die Bewegung als eine *stationäre* anzusehen, so wird auch $d\mathfrak{u} / dt = 0$, und dann lautet die Gleichung (d′)

(e) $$\mu \nabla^2 \mathfrak{u} + \varrho \mathfrak{F} - \nabla p = 0.$$

Sehen wir von der Einwirkung äußerer Kräfte ab, so ist $\mathfrak{F} = 0$ zu setzen, und wir haben

(e′) $$\mu \nabla^2 \mathfrak{u} - \nabla p = 0.$$

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0.$$

Nach (e′) ergeben sich für die Komponenten von $\mathfrak{u}$ die Gleichungen

(f) $$\mu \nabla^2 u_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \nabla^2 u_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \nabla^2 u_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach bzw. nach x, y und z differentiiert, so ergibt sich durch Addition der drei Gleichungen in Rücksicht auf die Kontinuitätsgleichung

(g) $$\nabla^2 p = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen dürfen wir allgemein annehmen, daß die Flüssigkeitsteilchen, welche die Wände berühren, keine relative Bewegung in bezug auf diese haben; an der Grenze der Flüssigkeit muß also

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0$$

sein, wenn $\bar{u}$, $\bar{v}$ und $\bar{w}$ die Geschwindigkeitskomponenten an der Grenzfläche sind. Sind feste Körper in der Flüssigkeit, die sich bewegt, so kann man in der Regel annehmen, daß jedes Teilchen an der Oberfläche des festen Körpers dieselbe Geschwindigkeit hat wie das Flüssigkeitsteilchen, welches die Oberfläche berührt.

§ 54. Die Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt.

Wir betrachten eine langsame Bewegung in einem sehr engen Rohr, das horizontal liegt, sodaß die Schwere die Bewegung nicht beeinflußt. Die Achse des Rohres sei die z-Achse, und alle Flüssigkeitsteilchen mögen sich parallel der z-Achse bewegen. Dann ist

$$u_x = 0, \quad u_y = 0.$$

Nach den Gleichungen (f) des vorigen Paragraphen haben wir dann

(a) $$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \mu \cdot \nabla^2 u_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Ferner ist nach der Kontinuitätsgleichung

(b) $$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

und schließlich gilt auch die Gleichung § 53 (g)

(c) $$\nabla^2 p = 0.$$

Demnach ist

(d) $$\frac{d^2 p}{d z^2} = 0 \quad \text{und} \quad p = f z + p_0,$$

wo f und p_0 Konstante sind. Aus (a) folgt ferner

$$\mu \nabla^2 u_z = f.$$

Da u_z vom Abstande r des betrachteten Flüssigkeitsteilchens von der Achse des Rohres abhängt, so ist, wenn $r^2 = x^2 + y^2$ gesetzt wird, nach Seite 153

$$\nabla^2 u_z = \frac{d^2 u_z}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d u_z}{d r}.$$

Demnach ist

$$\frac{d^2 u_z}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d u_z}{d r} = \frac{f}{\mu}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$u_z = c \cdot \log r + \frac{f r^2}{4 \mu} + u_0.$$

Da u_z für $r = 0$ einen endlichen Wert hat, so muß die Konstante $c = 0$ sein. Also ist

(e) $$u_z = u_0 + \frac{f r^2}{4 \mu},$$

wo u_0 die Geschwindigkeit in der Achse der Röhre ist. Ist für $z = 0$ der Druck gleich p_0 und für $z = l$ der Druck gleich p_1, so haben wir nach (d)

$$f = \frac{p_1 - p_0}{l}.$$

Führen wir diesen Wert für f in die Gleichung (e) ein, so ist

$$u_z = u_0 - \frac{r^2 (p_0 - p_1)}{4 \mu l}.$$

Für alle Flüssigkeitsteilchen, welche die Wand des Rohres berühren, ist $u_z = 0$. Ist R der Radius des Rohres, dann erhalten wir also

$$0 = u_0 - \frac{R^2 (p_0 - p_1)}{4 \mu l}.$$

Somit wird

$$u_z = \frac{(p_0 - p_1)(R^2 - r^2)}{4 \mu l}.$$

Ist m das Flüssigkeitsvolumen, das in einer Sekunde durch einen Querschnitt des Rohres strömt, so haben wir

(f) $$m = \int_0^R 2 \pi r u_z \, d r = \frac{\pi (p_0 - p_1) R^4}{8 \mu l},$$

d. h. *das Flüssigkeitsvolumen ist direkt proportional der vierten Potenz des Radius des Rohres, ferner umgekehrt proportional der Länge und der Konstanten* μ.

Die Strömung der Flüssigkeiten durch enge Röhren hat Poiseuille zuerst untersucht; er ist zu Resultaten gelangt, die mit der obenstehenden Gleichung übereinstimmen.[1])

Vierter Abschnitt.

Kapillarität.

§ 55. Die Oberflächenenergie.

Die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse, auf welche keine äußeren Kräfte wirken, ist allein durch die Kräfte bestimmt, mit denen ihre Teilchen aufeinander wirken. Ist die Masse sehr groß, so wird sie infolge der gegenseitigen Anziehung der Teilchen Kugelgestalt annehmen; ist dagegen die Masse klein, so wird die allgemeine Massenanziehung keine irgend merkliche Wirkung haben. Gleichwohl hat jede Flüssigkeitsmasse infolge der *Kohäsionskraft* das Bestreben, eine bestimmte Gestalt, und zwar die Kugelgestalt anzunehmen. Aus den über die Wirkungsweise der Kohäsionskraft angestellten Versuchen geht deutlich hervor, daß diese Kraft nur zwischen Teilchen wirksam ist, die sich in sehr geringem Abstande voneinander befinden. Über die Abhängigkeit dieser Kraft vom Abstande der Teilchen ist noch nichts bekannt. Man kann indessen vorteilhaft von der folgenden Betrachtung ausgehen, die in einer verhältnismäßig einfachen Weise zu den Gesetzen der Kapillarität führt.

Um die Gestalt eines kugelförmigen Tropfens irgend einer Flüssigkeit zu ändern, ist eine Arbeit erforderlich. Wenn kein

[1]) Zur Literatur: Lamb, Treatise on the motion of fluids. Cambridge 1879; Auerbach, Die theoretische Hydrodynamik. Braunschweig 1881. Kirchhoffs Mechanik, 15. Vorlesung u. ff.; Basset, Treatise on Hydrodynamics, Cambridge 1888. W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900.