Elemente der theoretischen Physik

Christiansen, Christian
Müller, Johannes Julius Christoph

Leipzig, 1910

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6707

Einleitung.

Der Physiker führt alle Erscheinungen auf Bewegungen zurück, d. h. auf Veränderungen des Ortes mit der Zeit. Wir geben eine kurze Übersicht über die *Bewegungslehre* (*Kinematik*) und behandeln zunächst die Bewegung eines Punktes. Die Reihenfolge aller Orte, welche der Punkt im Raume im Laufe der Zeit einnimmt, heißt seine *Bahn*, und die Strecke, welche er während der Zeit t zurücklegt, ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg s. Als Einheit der Zeit wird die *Sekunde*, als Einheit der Länge das *Zentimeter* gebraucht. In diesen beiden Einheiten lassen sich alle bei Bewegungen auftretende Größen messend bestimmen.

Nach der Gestalt der Bahn unterscheiden wir *geradlinige*, *krummlinige* und *periodische* Bewegungen; bei den letzten kehrt nach einem bestimmten Zeitabschnitt derselbe Bewegungszustand des Punktes wieder, d. h. der Punkt hat wieder dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Richtung der Geschwindigkeit.

Die geradlinige Bewegung kann entweder *gleichförmig* oder *ungleichförmig* sein. Gleichförmig ist die Bewegung des Punktes, wenn er in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurücklegt. Bei einer solchen gleichförmigen Bewegung legt demnach der Punkt in jeder Zeiteinheit denselben Weg zurück, und durch diesen in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg wird die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung gemessen. Legt der Punkt die Strecke s in der Zeit t in gleichförmiger Bewegung zurück, so wird die Geschwindigkeit c dadurch erhalten, daß wir den Weg s in t in gleiche Teile zerlegen, und es ist

$$\text{(a)} \qquad c = \frac{s}{t}.$$

Die Geschwindigkeit ist also eine Länge dividiert durch eine Zeit.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisperipherie mit konstanter Geschwindigkeit, so beschreibt der nach dem Punkte gezogene Radius vektor in gleichen Zeiten gleiche Sektoren. Der Winkel, dessen Fläche in der Zeiteinheit vom Radius vektor beschrieben wird, gibt die Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Kreisbewegung.

Sind s_1, s_2, s_3 usw. die nacheinander zurückgelegten Wege, und sind bzw. t_1, t_2, t_3 usw. die zum Durchlaufen der Wege gebrauchten Zeiten, so ist die gleichförmige Bewegung dadurch definiert, daß

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_3}{t_3} = \ldots,$$

während im Falle der ungleichförmigen Bewegung

$$\frac{s_1}{t_1} \gtreqless \frac{s_2}{t_2} \gtreqless \frac{s_3}{t_3} \gtreqless \ldots,$$

d. h. die Bewegung ist ungleichförmig, wenn sie in keinem Teile gleichförmig ist. s_1/t_1 ist die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit t_1, d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt gleichförmig bewegen müßte, um in der Zeit t_1 den Weg s_1 zurückzulegen. Die mittlere Geschwindigkeit ist durchaus von dem betrachteten Wege abhängig; es erhält aber das Verhältnis $\Delta s / \Delta t$ einen endlichen Grenzwert, wenn Δs und Δt zugleich unendlich klein werden. Dieser Grenzwert wird mit ds / dt bezeichnet und stellt die Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung dar. Die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung ist also durch den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit gegeben und ist der während des Zeitelementes dt erfolgende Zuwachs des Weges, berechnet für die Zeiteinheit.

Für die Geschwindigkeit könnten wir eine besondere Einheit beliebig festsetzen und ebenso für alle anderen Größen, die wir in der Physik durch Messung zu bestimmen suchen. Weil aber jede Erscheinung auf Bewegung von Masse beruht, so kann sie auch durch die *absoluten Einheiten* der *Masse*, *Länge* und *Zeit* bestimmt werden. Als Masseneinheit benutzen wir die Masse des Kubikzentimeters Wasser bei $+ 4^0$ C. oder ein *Gramm*, als Längeneinheit die Länge eines *Zentimeters* und als Zeiteinheit die *Sekunde*. Im Gegensatz zu den absoluten Einheiten heißen alle übrigen *abgeleitete* oder *zusammengesetzte Einheiten*, die auf die absoluten Einheiten zurückgeführt werden können. Die *Dimension* einer abgeleiteten Einheit gibt an, in welcher Weise sich die letztere aus den absoluten Einheiten zusammensetzt. Bezeichnet man allgemein eine Länge mit $[L]$, eine Masse mit $[M]$ und eine Zeit mit $[T]$, so haben wir für die *Dimension der Geschwindigkeit* $[L\,T^{-1}]$.

Im allgemeinen ändert sich die Geschwindigkeit des in Bewegung begriffenen Körpers mit der Zeit; die Geschwindigkeit ist dann eine Funktion der Zeit. Hat der Punkt zur Zeit t' die Geschwindigkeit v' und zur Zeit t'' die Geschwindigkeit v'', so ist $v'' - v'$ der Zuwachs der Geschwindigkeit im Zeitabschnitte t' bis t''. Dieser Zeitabschnitt sei unendlich klein und gleich Δt; die Geschwindigkeitszunahme p, bezogen auf die Zeiteinheit, d. h. die Beschleunigung, ist während der Zeit Δt

$$p = \frac{v'' - v'}{t'' - t'} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad p = \frac{d v}{d t}. \tag{b}$$

Da $v = ds/dt$ ist, so haben wir

$$p = \frac{d^2 s}{d t^2}. \tag{c}$$

Die *Beschleunigung* ist also gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit. Da die Differenz zweier Geschwindigkeiten wieder eine Geschwindigkeit und die Differenz zweier Zeiten ebenfalls eine Zeit ist, so erhalten wir nach (b) für die *Dimension der Beschleunigung*: $[L\,T^{-2}]$.

Nimmt die Geschwindigkeit in jedem Zeitelement um dieselbe Größe zu, so ist die Beschleunigung konstant, und die Bewegung heißt *gleichmäßig beschleunigt*; nur in diesem Falle ist nach unserer Erklärung die Beschleunigung der Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit. Ist dagegen die Beschleunigung veränderlich und eine Funktion der Zeit, so ist die Bewegung *ungleichmäßig beschleunigt.*

Die in der Physik vorkommenden Größen teilt man ein in *Skalare* und *Vektoren.* Skalare sind solche Größen, die bei gegebenen Maßeinheiten allein durch Angabe einer Zahl bestimmt sind. Die Skalare sollen im folgenden durch lateinische Buchstaben bezeichnet werden, wenn es sich um die Anwendung der Vektoranalysis handelt. Zu den Skalaren gehören die Masse, das spezifische Gewicht, die Energie, die Temperatur, das Leitungsvermögen u. a. m. Zur vollständigen Bestimmung der *Vektoren* ist neben der Angabe ihrer *Größe* auch die Angabe ihrer *Richtung* erforderlich. Zu den Vektoren gehören die Begriffe: Kraft, Geschwindigkeit, elektrische Feldstärke u. a. m. Die Vektoren sollen durch deutsche Buchstaben gekennzeichnet werden.

Graphisch wird der *Vektor* dargestellt durch eine Strecke, deren Länge den absoluten Wert oder numerischen Betrag des Vektors und deren Richtung die Richtung des Vektors darstellt. Der eine Geschwindigkeit darstellende Vektor stellt durch seine Länge die Größe, durch seine Richtung die Richtung der Geschwindigkeit dar. Der Anfangspunkt der Strecke gibt den Punkt, auf den sich der Vektor bezieht, und der Pfeil gibt die Richtung des Vektors an.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Vektor, so bezeichnen wir seinen absoluten Wert mit $|\mathfrak{A}|$ oder mit A. Als *Einheitsvektor* bezeichnet man einen Vektor vom Betrage 1. *Jeder Vektor kann als das Produkt eines Skalaren, der die Länge des Vektors oder den Betrag des Vektors angibt, und eines mit ihm der Richtung nach zusammenfallenden Einheitsvektors oder Richtungsvektors dargestellt werden.* Ist $\mathfrak{a}_1$ der Einheitsvektor zu $\mathfrak{A}$, so haben wir $\mathfrak{A} = A\,\mathfrak{a}_1$. Wir setzen fest, daß die Einheitsvektoren als dimensionslose Größen zu betrachten sind, indem wir dem Betrage eines Vektors stets die Dimension des Vektors selbst zuschreiben. Der Einheitsvektor gibt allein die Richtung an.

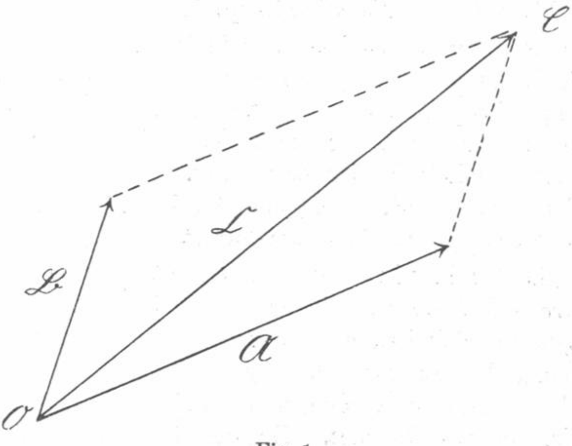

Fig. 1.

Das Verfahren der *Vektoraddition* ergibt sich aus der Zusammensetzung geradliniger Verrückungen. Führt ein Punkt O

eines Körpers gleichzeitig die Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (Fig. 1) aus, so erhalten wir den Endpunkt C der Verrückung dadurch, daß wir am Ende des Vektors $\mathfrak{A}$ eine Strecke konstruieren, die der Richtung und Größe nach mit $\mathfrak{B}$ übereinstimmt. Die Strecke $\mathfrak{C}$ ist die Resultierende der Verrückungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und stellt die geometrische Summe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dar.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Der Punkt O kann auch zunächst die Verrückung $\mathfrak{B}$ ausführen und dann die Verrückung $\mathfrak{A}$; er gelangt auch hierbei nach C. Die Vektoraddition ist von der Reihenfolge der Summanden unabhängig, indem

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

ist.

Soll von einem Vektor $\mathfrak{A}$ der Vektor $\mathfrak{B}$ subtrahiert werden, so addiert man zu $\mathfrak{A}$ einen Vektor vom gleichen Betrage wie $\mathfrak{B}$, aber von entgegengesetzter Richtung. In Fig. 2 ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{B}.$$

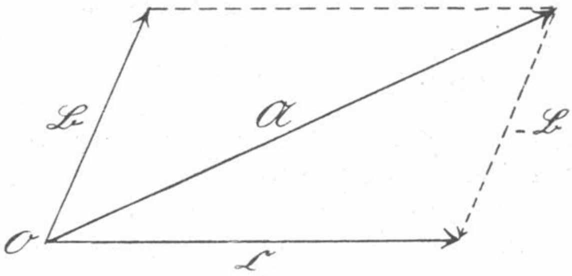

Fig. 2.

Die augenblickliche Lage eines Punktes P (Fig. 3) kann durch den von einem festen Anfangs- oder Bezugspunkte O (Fig. 3) gezogenen Vektor $\mathfrak{s}$ angegeben werden. Durch den Punkt O legen wir drei zueinander rechtwinklige Koordinatenachsen. Die Richtungen der Achsen seien so gewählt, daß eine Drehung der $+x$-Achse in der xy-Ebene auf dem kürzesten Wege in die Richtung der $+y$-Achse und eine Fortbewegung in der Richtung der z-Achse zusammengehören wie die Drehung einer rechtsgängigen Schraube mit ihrer Vorwärtsbewegung. Mit dieser Festsetzung der Achsenrichtungen ist die folgende Regel in Übereinstimmung: Blickt man von einem Punkte der $+z$-Achse aus gegen die xy-Ebene, so muß die x-Achse entgegen der Bewegung des Uhrzeigers gedreht werden, um auf dem kürzesten Wege in die Richtung der $+y$-Achse zu gelangen. Das dadurch definierte Achsensystem soll als *Rechtssystem* bezeichnet werden und soll im nachfolgenden stets zugrunde gelegt werden. Aus einem Rechtssystem geht durch Spiegelung, z. B. an einer der Koordinatenebenen, ein *Linkssystem* hervor.

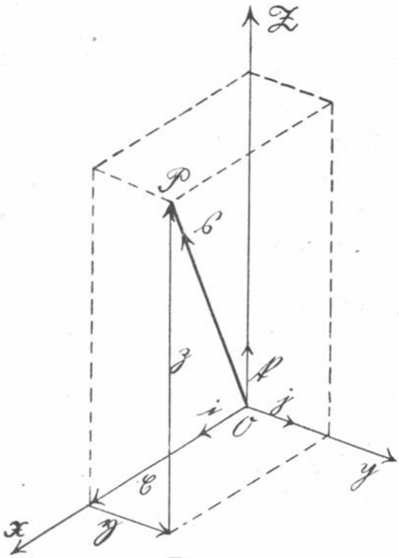

Fig. 3.

Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{s}$ sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$. Also ist

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z}.$$

Die absoluten Beträge der drei Komponenten seien x, y und z. Um hervorzuheben, daß die Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ als Vektoren anzusehen sind, und daß ihnen ein bestimmter Betrag und eine bestimmte Richtung zukommt, setzen wir

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i}\,x\,, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{j}\,y\,, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{k}\,z\,.$$

$\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ sind hierbei *Richtungs-* oder *Einheitsvektoren,* die der Richtung nach bzw. mit der x-, y- und z-Achse des Koordinatensystems zusammenfallen. Wir haben also

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{i}\,x + \mathfrak{j}\,y + \mathfrak{k}\,z.$$

Aus der Fig. 3 ergibt sich leicht, daß man durch Aneinandertragen der Strecken $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in beliebiger Reihenfolge von O aus stets nach P gelangt.

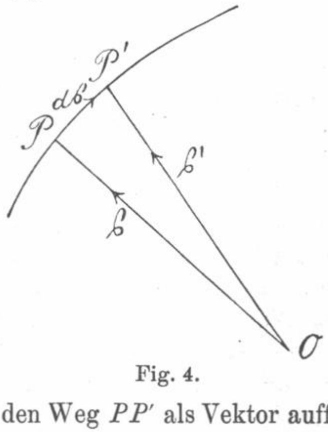

Fig. 4.

Bewegt sich der Punkt P (Fig. 4) während des Zeitelementes dt von P nach P', so müssen wir auch den Weg PP' als Vektor auffassen und daher mit $d\mathfrak{s}$ bezeichnen.

Sind dx, dy und dz die absoluten Beträge der Projektionen von $d\mathfrak{s}$ auf die Koordinatenachsen, so wird

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{i}\,dx + \mathfrak{j}\,dy + \mathfrak{k}\,dz.$$

Zum Punkte P' gehöre der Vektor $\mathfrak{s}'$. Dann ist $\mathfrak{s} + d\mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$. Die Geschwindigkeit ist ebenfalls ein Vektor. Die Richtung der Geschwindigkeit ist durch die Tangente an der Bahn im betrachteten Punkte gegeben, oder mit Bezug auf Fig. 4 durch das Bahnelement PP'. Die Geschwindigkeit ergibt sich der Größe und Richtung nach aus

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \mathfrak{i}\frac{dx}{dt} + \mathfrak{j}\frac{dy}{dt} + \mathfrak{k}\frac{dz}{dt}.$$

Demnach sind

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit nach den drei Koordinatenachsen. Diese Zerlegung der Geschwindigkeit entspricht der Darstellung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten. dx/dt ist die Geschwindigkeit, mit der sich der betrachtete Punkt von der yz-Ebene entfernt. Statt der Bewegung des Punktes im Kurvenelement führen wir drei andere Bewegungen ein, die zu demselben Resultate führen, nämlich eine Bewegung des Punktes in der x-Achse mit der Geschwindigkeit dx/dt, sodann eine Bewegung der x-Achse mit der Geschwindigkeit dy/dt in der Richtung der y-Achse, wobei die x-Achse ihrer Anfangslage parallel bleibt, und endlich eine Bewegung der xy-Ebene in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit dz/dt, wobei die xy-Ebene ihrer Anfangslage parallel bleibt.

Die Geschwindigkeit eines Punktes kann sich der Größe und der Richtung nach ändern. Während des Zeitelementes dt wachse die Geschwindigkeit von $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{v}'$ an. Bei der Annahme von endlichen Kräften unterscheiden sich $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}$ nur unendlich wenig in bezug auf Größe und Richtung voneinander Wir bezeichnen die Änderung der Geschwindigkeit während des Zeitelementes dt mit $d\mathfrak{v}$ und setzen

$$d\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' - \mathfrak{v},$$

indem der Vektor $d\mathfrak{v}$ die geometrische Differenz der Vektoren $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}$ ist. Die Beschleunigung ist der Größe und Richtung nach durch den Vektor

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$$

gegeben. Durch die Komponenten in den Achsenrichtungen kann $\mathfrak{b}$ dargestellt werden in der Gleichung

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathfrak{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathfrak{k}\frac{d^2z}{dt^2},$$

indem

$$\mathfrak{b}_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \mathfrak{b}_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \mathfrak{b}_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

die Komponenten der Beschleunigung nach den Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems sind.

Führt ein Körper während des Zeitelementes dt gleichzeitig zwei Bewegungen aus, die durch die Vektoren $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ gegeben sind, so ist der gesamte während des Zeitelementes dt zurückgelegte Weg

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s}_1 + d\mathfrak{s}_2,$$

indem $d\mathfrak{s}$ die Diagonale eines Parallelogramms ist, dessen Seiten $d\mathfrak{s}_1$ und $d\mathfrak{s}_2$ sind. Wir können uns dabei vorstellen, daß der betrachtete Punkt zuerst die eine der beiden Strecken und dann die andere durchläuft, oder auch daß er gleichzeitig beide Bewegungen ausführt. Auch kann jede Bewegung in zwei oder mehrere Komponenten zerlegt werden.

Der Körper hat die beiden voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten $d\mathfrak{s}_1 / dt$ und $d\mathfrak{s}_2 / dt$, und die gesamte oder resultierende Geschwindigkeit wird

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{s}_2}{dt}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2.$$

$\mathfrak{v}$ wird ebenfalls durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen Seiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ sind. Führen wir die rechtwinkligen Komponenten der Bewegungen ein, so können wir

$$d\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{i}\,dx_1 + \mathfrak{j}\,dy_1 + \mathfrak{k}\,dz_1$$

und

$$d\mathfrak{s}_2 = \mathfrak{i}\,dx_2 + \mathfrak{j}\,dy_2 + \mathfrak{k}\,dz_2$$

setzen.

Die Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit in den Richtungen der Achsen des Koordinatensystems sind

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt}$$

und der Betrag der resultierenden Geschwindigkeit wird

$$v = |\mathfrak{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Da die Beschleunigung der Zuwachs einer Geschwindigkeit ist, so wird die resultierende Beschleunigung in derselben Weise bestimmt. Wir haben

$$\mathfrak{b} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{s}_2}{dt^2},$$

wobei

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} = \mathfrak{i}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \mathfrak{j}\frac{d^2y_1}{dt^2} + \mathfrak{k}\frac{d^2z_1}{dt^2}$$

und

$$\frac{d^2\mathfrak{s}_2}{dt^2} = \mathfrak{i}\frac{d^2x_2}{dt^2} + \mathfrak{j}\frac{d^2y_2}{dt^2} + \mathfrak{k}\frac{d^2z_2}{dt^2}$$

ist.

$\mathfrak{b}$ wird durch die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds dargestellt, dessen Seiten

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \text{ usw.}$$

sind.

Sind die Koordinaten des in Bewegung begriffenen Punktes als Funktionen der Zeit gegeben, so erhält man die Gleichung der Bahn dadurch, daß man die den gleichen Zeiten t entsprechenden Punkte x und y bestimmt. Ist z. B.:

$$x = f_1(t) \quad \text{und} \quad y = f_2(t),$$

so muß zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen x und y die Variable t aus beiden Gleichungen durch irgend eine mathematische Operation eliminiert werden.

Nach diesen rein kinematischen Betrachtungen wenden wir uns jetzt zur Betrachtung der Ursachen der Bewegungen und knüpfen dabei an Galileis Untersuchungen über den freien Fall an.