universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Photometrie der Gestirne

Müller, Gustav

Leipzig, 1897

I. Abschnitt. Grundzüge der Theoretischen Astrophotometrie

urn:nbn:at:at-ubi:2-6688

I. ABSCHNITT.

GRUNDZÜGE

DER

THEORETISCHEN ASTROPHOTOMETRIE.

Capitel I.

Die photometrischen Hauptgesetze.

1. Allgemeine Definitionen.

Die Undulationstheorie des Lichtes geht bekanntlich von der Anschauung aus, dass ein sehr elastisches Medium von ausserordentlich geringer Dichtigkeit, der sogenannte Lichtäther, den ganzen Weltraum sowohl als auch die Zwischenräume zwischen den Molekülen der ponderabelen Körper erfüllt. Durch die von einem leuchtenden Gegenstande ausgehenden Impulse werden die unmittelbar benachbarten Theilchen dieses Äthers in Schwingungen versetzt, die Erregung pflanzt sich in dem elastischen Medium nach allen Richtungen mit constanter Geschwindigkeit fort, und die Empfindung, welche durch die das Auge erreichenden Schwingungen in dem Nervensystem hervorgebracht wird, nennen wir Licht. Diese Empfindung wird je nach der Anzahl der Schwingungen, welche in einer bestimmten Zeiteinheit das Auge treffen, verschieden sein. Wir sprechen in diesem Sinne von der Farbe des Lichtes und unterscheiden alle möglichen Nüancen zwischen dem äussersten Roth mit etwa 458 Billionen und dem äussersten Violett mit etwa 727 Billionen Schwingungen in der Secunde. Aber auch bei gleicher Farbe kann der Lichteindruck auf das Auge sehr verschieden sein je nach der Stärke der einwirkenden Impulse. Wir sprechen in diesem Sinne von der Intensität des Lichtes, und diese kann ebenfalls innerhalb sehr weiter Grenzen variiren, von einer kaum wahrnehmbaren Empfindung an bis zu einem Eindrucke, den das menschliche Sehorgan nicht ohne Gefahr zu ertragen vermag. Mit der Bestimmung und Vergleichung der verschiedenen Intensitätsgrade beschäftigt sich die Photometrie.

Die Schwingungen der einzelnen Ätherheilchen werden als geradlinig und senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung vorausgesetzt.

Nach den Principien der Mechanik wird dann die Bewegungsgleichung eines einzelnen Theilchens, dessen Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t mit x bezeichnet sein möge, lauten:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Cx,$$

wo m die Masse des Theilchens und C irgend eine Constante ist. Setzt man noch $\frac{C}{m} = c^2$, so wird:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c^2x.$$

Die Auflösung dieser Differentialgleichung giebt:

$$x = a\cos(ct + b),$$

und für die Geschwindigkeit v des Theilchens folgt daraus:

$$v = \frac{dx}{dt} = -ac\sin(ct + b).$$

Was die Integrationsconstanten a und b anbetrifft, so folgt zunächst, wenn man die Zeit von dem Momente an rechnet, wo das Theilchen die grösste Entfernung von der Gleichgewichtslage erreicht hat, dass für $t = 0$ auch die Geschwindigkeit $v = 0$ sein muss und daher auch $b = 0$ zu setzen ist. Man hat also:

$$x = a\cos ct,$$
$$v = -ac\sin ct.$$

Die Constante a ist, wie man sieht, der Werth, den x zur Zeit $t = 0$ erhält, also der grösste Betrag, um den sich das Theilchen aus der Ruhelage entfernen kann. Man nennt a die Schwingungsamplitude. Die vorstehenden Gleichungen zeigen noch, dass die Bewegung eine periodische ist, und dass sowohl x als v nach Ablauf der Zeit $T = \frac{2\pi}{c}$ immer wieder dieselben Werthe erhalten; die Grösse T heisst die Schwingungsdauer. Führt man dieselbe in die obigen Gleichungen ein, so gehen dieselben über in:

$$x = a\cos\frac{2\pi t}{T},$$

$$v = -a\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Während das betrachtete Äthertheilchen eine ganze Schwingung vollendet, d. h. sich von einer Elongation zur anderen und wieder zurück bewegt,

hat sich die Erregung weiter ausgebreitet, und es wird ein Theilchen geben, welches sich genau in demselben Schwingungszustande befindet, wie das erste. Bezeichnet man die Entfernung der beiden Theilchen mit λ, und ist V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Ätherbewegung, so hat man:

$$\lambda = VT.$$

Die Entfernung λ wird die Wellenlänge des Lichtes genannt.

Unter Intensität des Lichtes im weitesten Sinne versteht man eine Grösse, welche der Energie der Ätherschwingungen proportional ist, und da diese Energie durch die augenblickliche lebendige Kraft der Theilchen gemessen wird, so kann man die Intensität ausdrücken durch $\gamma m v^2$, wo γ eine Constante ist. Je weiter die Theilchen von der Ruhelage entfernt sind, desto mehr nähert sich die lebendige Kraft dem Werthe 0 und wird andererseits am grössten, wenn die Theilchen die Ruhelage passiren. Da aber das Auge nicht im Stande ist, den schnellen Schwingungen zu folgen, so wird nicht die augenblickliche lebendige Kraft in jedem Stadium der Schwingung zur gesonderten Wirkung gelangen, sondern es wird nur der Mittelwerth aus allen Werthen, welche die lebendige Kraft während der Schwingungsdauer T erhalten kann, in Betracht zu ziehen sein. Wir nehmen daher für die Intensität J den Ausdruck an:

$$J = \frac{\gamma m}{T} \int_0^T v^2 \, dt.$$

Durch Substitution des Werthes von v^2 erhält man:

$$J = \frac{\gamma m}{T} a^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} \, dt.$$

Der Werth des Integrales ist $\frac{1}{2}T$; folglich:

$$J = \gamma m \frac{a^2}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

und wenn für T der Werth $\frac{\lambda}{V}$ substituirt und eine einzige Constante Γ eingeführt wird:

$$J = \Gamma V^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V hängt von der Wellenlänge ab; doch sind die Unterschiede zwischen den für die einzelnen Wellenlängen gültigen Geschwindigkeiten so gering, dass man ohne grossen Fehler V als Constante betrachten darf. Man kann dann schreiben:

$$J = K \frac{a^2}{\lambda^2}.$$

Die Intensität eines Lichtes von der Wellenlänge λ wird also gemessen durch das Quadrat der Amplitude, welche die Lichtschwingungen besitzen.

Hat man es nicht mit homogenem Lichte von der Wellenlänge λ zu thun, sondern mit zusammengesetztem Lichte von allen möglichen Wellenlängen, so wird jeder Farbe eine besondere lebendige Kraft, also auch ein besonderer Werth von a angehören. Man müsste also allgemein die Summe der Werthe $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ über alle möglichen Werthe von λ bilden und hätte streng genommen statt des obigen Ausdruckes zu setzen:

$$J = K \sum \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2.$$

Da der Zusammenhang zwischen a und λ nicht genügend bekannt ist und auch die Grenzen, wo die Lichtwirkung beginnt, schwer zu bestimmen sind, so sieht man, dass eine ganz strenge Definition der Lichtintensität eigentlich nicht möglich ist.

2. Das Gesetz vom Quadrate der Entfernung.

Die vorangehenden Definitionen in Verbindung mit dem Gesetze von der Erhaltung der lebendigen Kraft liefern nun unmittelbar den ersten Hauptsatz der Photometrie, den Satz vom Quadrate der Entfernung. Wir haben die von einem leuchtenden Punkte ausgehende Lichtbewegung als eine Reihe von auf einander folgenden Impulsen aufgefasst. Diese Bewegung breitet sich sowohl im freien Äther als auch in allen sogenannten isotropen Mitteln, wie Luft, Glas, Wasser u. s. w., nach allen Richtungen mit einer für jedes Mittel eigenthümlichen constanten Geschwindigkeit aus; nur in den krystallinischen oder anisotropen Medien ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen eine andere, weil die Elasticität des zwischen den Körpermolekülen eingeschlossenen Lichtäthers durch die besondere Gruppirung dieser Moleküle Veränderungen erfährt. Wir sehen zunächst von solchen anisotropen Medien ab und denken uns um einen leuchtenden Punkt zwei Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 construirt; dann befinden sich sämmtliche Theilchen der einen Kugeloberfläche und ebenso sämmtliche Theilchen der anderen in gleichen Schwingungszuständen. Die Schwingungsamplituden seien für die beiden Kugelschalen a_1 resp. a_2. In irgend einem Elemente der ersten Kugelschale, dessen Oberfläche $d\omega$ und dessen Masse $\mu\, d\omega$ sein möge, ist der Mittelwerth der lebendigen Kraft während einer ganzen Schwingung ausgedrückt durch $\frac{1}{2}\frac{\mu\, d\omega}{T}\int_0^T v^2 dt$,

oder nach Einsetzen des Werthes von v^2 und Auflösen des Integrales wie früher durch $\mu d\omega \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 a_1^2$. Will man die lebendige Kraft nicht für ein einzelnes Theilchen, sondern für die ganze Kugel angeben, so hat man, da die Amplitude a_1 für alle Theilchen dieselbe ist, in dem vorstehenden Ausdrucke nur $d\omega$ durch die Kugeloberfläche $4r_1^2\pi$ zu ersetzen und findet demnach für den Mittelwerth der lebendigen Kraft auf der ganzen Kugel während einer Schwingung den Werth $4\mu a_1^2 r_1^2 \frac{\pi^3}{T^2}$. Entsprechend findet man für die zweite Kugeloberfläche den Werth $4\mu a_2^2 r_2^2 \frac{\pi^3}{T^2}$, und da nach dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft die beiden Ausdrücke einander gleich sein sollen, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$a_1 r_1 = a_2 r_2 ,$$

oder in Worten: Die Schwingungsamplituden einer Lichtbewegung an zwei Stellen, deren Entfernungen vom lichterregenden Centrum verschieden sind, verhalten sich umgekehrt wie diese Entfernungen. Nun wird aber nach unserer früheren Definition die Lichtintensität gemessen durch das Quadrat der Schwingungsamplitude; es folgt daher, wenn man die Intensität in einem Punkte der ersten Kugel mit J_1 und in einem Punkte der zweiten Kugel mit J_2 bezeichnet, unmittelbar die Proportion:

$$J_1 : J_2 = r_2^2 : r_1^2 ,$$

d. h. die Intensitäten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen. Dieser Satz, welcher das Fundament der ganzen Photometrie bildet, ist durch zahlreiche Beobachtungen experimentell bewiesen, und es ist von besonderem Interesse, dass durch die Beobachtungen an den Himmelskörpern seine Gültigkeit auch für die enorm grossen Distanzen, die in der Astronomie ins Spiel kommen, festgestellt worden ist.

3. Zusammensetzung der von mehreren leuchtenden Punkten ausgehenden Lichtbewegungen.

Sind statt eines einzigen lichterregenden Centrums deren zwei vorhanden, so fragt es sich, welche Bewegung einem bestimmten Ätherтheilchen unter dem gemeinschaftlichen Einflusse der von beiden Punkten ausgehenden Vibrationen ertheilt wird. Wir wollen der Einfachheit wegen dabei annehmen, dass die beiden Lichtbewegungen gleiche Wellenlängen haben, und wollen ferner noch für das betrachtete Ätherтheilchen gleiche

Schwingungsphase voraussetzen, d. h. uns denken, dass dieses Theilchen unter der alleinigen Wirkung der einen Lichtbewegung seine einzelnen Schwingungen genau zu denselben Momenten beginnen und vollenden würde, wie unter der alleinigen Wirkung der anderen. Die von der ersten Lichtquelle ausgehenden Impulse mögen nun, für sich allein betrachtet, in einem gewissen Momente dem Theilchen die Geschwindigkeit v_1 in einer bestimmten Schwingungsebene ertheilen, und entsprechend möge das Theilchen, falls es nur der zweiten Lichtbewegung ausgesetzt wäre, in demselben Momente die Geschwindigkeit v_2 annehmen und zwar im Allgemeinen in irgend einer anderen Schwingungsebene, die mit der ersteren den Winkel ϑ einschliesst. Dann setzen sich diese beiden Geschwindigkeiten nach den Lehren der Mechanik zu einer resultirenden Geschwindigkeit V zusammen, die gemäss dem Satze vom Kräfteparallelogramm durch die Gleichung ausgedrückt ist:

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \vartheta .$$

Ist der Winkel $\vartheta = 0$, erfolgen also die von beiden leuchtenden Punkten hervorgebrachten Schwingungen in derselben Ebene, so wird $V^2 = (v_1 + v_2)^2$. Ist dagegen $\vartheta = 90^\circ$, so ergiebt sich $V^2 = v_1^2 + v_2^2$, und wenn endlich $\vartheta = 180^\circ$ ist, so folgt $V^2 = (v_1 - v_2)^2$, und in dem speciellen Falle, wo $v_1 = v_2$ ist, $V^2 = 0$. Man sieht also, dass die von zwei Centren ausgehenden Lichtwirkungen sich sowohl verstärken als vermindern, in einem bestimmten Falle sich sogar gänzlich vernichten können. Indessen findet eine derartige gegenseitige Verstärkung oder Verminderung nur dann statt, wenn die von den leuchtenden Punkten hervorgebrachten Ätherschwingungen constant in denselben Ebenen vor sich gehen, d. h. wenn man es mit sogenanntem linear polarisirten Lichte zu thun hat. Handelt es sich aber, wie hier vorausgesetzt werden soll, um natürliches Licht, und versteht man (nach Kirchhoff) unter natürlichem Lichte solches, bei welchem die Äthertheilchen fortwährend ihre Schwingungsrichtung wechseln und zwar so schnell, dass in einem Zeitraume, der für die menschlichen Sinne unwahrnehmbar klein ist, keine Richtung die anderen überwiegt, so wird man die gemeinschaftliche Wirkung der beiden leuchtenden Punkte auf ein gewisses Äthertheilchen für eine bestimmte Zeit ausdrücken müssen durch:

$$\sum (V^2) = \sum (v_1^2) + \sum (v_2^2) + \sum (2 v_1 v_2 \cos \vartheta) ,$$

wo die Summen über alle möglichen Combinationen von v_1 und v_2 innerhalb dieser Zeit zu bilden sind. Da nun ϑ in diesem Falle, nach der obigen Definition von natürlichem Lichte, alle möglichen Werthe zwischen

$+ 1$ und $- 1$ durchlaufen kann, so wird der Mittelwerth für Zeiten, die unsere sinnliche Wahrnehmung verlangt, Null sein, und man hat daher:

$$\sum(V^2) = \sum(v_1^2) + \sum(v_2^2).$$

Nun sind aber diese Summen, wenn man sie sich über die Dauer einer ganzen Schwingung ausgedehnt denkt, unmittelbar proportional den im Vorangehenden als Intensität der Lichtbewegung definirten Grössen. Bezeichnet man daher diese Intensitäten für die beiden einzelnen Bewegungen mit J_1 und J_2 und für die resultirende mit J, so ergiebt sich:

$$J = J_1 + J_2.$$

Dieser Satz lässt sich ohne Schwierigkeit auch auf beliebig viele leuchtende Punkte ausdehnen, und da man sich jede leuchtende Fläche aus lauter leuchtenden Punkten zusammengesetzt denken kann, von denen jeder unabhängig von den anderen eine Wellenbewegung erregt, so folgt ohne Weiteres der wichtige Grundsatz, dass die von einer leuchtenden Fläche hervorgebrachte Lichtintensität der Ausdehnung dieser Fläche proportional ist.

4. Die physiologische Intensität und das Fechner'sche psychophysische Gesetz.

Nach der bisherigen Definition wird die Intensität eines leuchtenden Punktes durch den Mittelwerth der lebendigen Kraft des Äthers während einer Schwingungsdauer gemessen. Denken wir uns an der durch das Licht erregten Stelle unser Auge, so fragt es sich, ob die ganze lebendige Kraft in den Sehnerven wirksam ist, ob wir die ganze lebendige Kraft messen können. Diese Frage ist entschieden zu verneinen; denn ein Theil der Kraft äussert sich als Wärme, ein Theil als chemische Reaction, und nur ein gewisser Theil, der sich zunächst nicht sicher bestimmen lässt, afficirt die Nerven unserer Augen so, dass dadurch der Eindruck des Lichtes hervorgebracht wird. Nennen wir die Intensitäts-Empfindung E, so ist zunächst klar, dass diese Empfindungsgrösse eine Function der objectiven Intensität J ist, also:

$$E = f(J).$$

Wir wissen von der Beziehung zwischen E und J zunächst nur so viel, dass E mit wachsendem J ebenfalls wächst, ferner, dass E bei einem bestimmten Werthe von J verschwindet. Macht man die Annahme, dass unsere Netzhaut überall dieselbe Reizbarkeit besitzt, ferner, dass die Beschaffenheit der Function f von der Lage der gereizten Stelle der Netzhaut unabhängig ist, und denken wir uns zwei leuchtende Punkte,

deren objective Intensitäten oder lebendigen Kräfte durch J_1 und J_2 ausgedrückt sein mögen und welche die Empfindungsgrössen E_1 und E_2 hervorbringen mögen, so ist aus der Gleichheit von E_1 und E_2 nothwendig auch auf die Gleichheit von J_1 und J_2 zu schliessen, ganz gleichgültig, welches die Beschaffenheit der Function f sein mag. Sind die Empfindungsgrössen zweier Lichtquellen verschieden, so können wir nur so viel mit Sicherheit schliessen, dass die eine heller oder schwächer als die andere ist, aber es ist unmöglich anzugeben, um wieviel. Sind wir aber im Stande, durch irgend ein Mittel die lebendige Kraft der einen (der stärkeren) Lichtquelle in messbarer Weise soweit zu ändern, bis die physiologischen Eindrücke für unser Urtheil gleich sind, so können wir aus der Grösse der Veränderung auf das ursprüngliche Verhältniss der lebendigen Kräfte der beiden Lichtquellen schliessen. Hiermit ist die Grundbedingung für die Construction eines brauchbaren photometrischen Apparates ausgesprochen. Wir werden im zweiten Abschnitte ausführlich die Mittel zu besprechen haben, welche uns zu Gebote stehen, um die lebendige Kraft einer Lichtquelle messbar zu verändern. Im Vorigen ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die Empfindungsgrösse nur von der lebendigen Kraft der Lichtbewegung abhängt; dies ist aber nicht der Fall, sondern E hängt auch noch von der Farbe des Lichtes ab, wie auch schon J an und für sich eine Function der Wellenlänge war. Man hat also richtiger:

$$E = \varphi(J, \lambda).$$

In welcher Weise E von der Farbe abhängt, lässt sich nicht mit Sicherheit angeben. So viel ist aber von vornherein klar, dass bei verschiedenen Beobachtern diese Abhängigkeit nicht als gleich vorauszusetzen ist, wie schon daraus zur Genüge hervorgeht, dass bekanntlich partielle Farbenblindheit vorkommt. Handelt es sich um Lichtbewegungen von verschiedener Wellenlänge, so wird man durch blosse Veränderung der lebendigen Kraft der einen zwar die Amplitude der Bewegung, aber nicht zugleich die Wellenlänge ändern können, und es werden daher nie gleichartige Eindrücke auf der Netzhaut hervorgebracht werden. Wir können zwar, namentlich nach einiger Übung, entscheiden, ob von zwei verschiedenfarbigen Lichtquellen derselbe physiologische Reiz ausgeübt wird, aber wir dürfen unter keinen Umständen, ebenso wie bei gleichgefärbten Lichtquellen, von der Gleichheit der Empfindungsgrössen auf die Gleichheit der lebendigen Kräfte schliessen. Bekannt ist das sogenannte Purkinje'sche Phänomen [1]), welches zeigt, dass, wenn zwei farbige Lichteindrücke, welche auf unser Auge den gleichen physiologischen

1) Purkinje, Zur Physiologie der Sinne. Bd. II, p. 109.

Eindruck machen, im gleichen Verhältnisse geschwächt werden, dann bei der geringeren Lichtstärke die blauen Farben deutlich heller erscheinen als die weniger brechbaren. Dove[1]) hat interessante Versuche über den Einfluss einer weissen Beleuchtung auf die relative Intensität verschiedener Farben angestellt und gefunden, dass bei grosser Beleuchtungsstärke die rothen, bei geringerer die blauen Eindrücke überwiegen. Hierher gehört auch die alltägliche Wahrnehmung, dass man in einem dunklen Zimmer zuerst die blauen Gegenstände bemerkt und dann erst die rothen, sowie ferner, dass umgekehrt das Auge den sehr hellen Gegenständen unwillkürlich eine bläuliche Färbung beilegt. Ausführliches über diesen Gegenstand findet man in Helmholtz's physiologischer Optik, wo auch neuere Versuche von A. König[2]) über den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität besprochen sind.

Für die messende Photometrie sind diese Thatsachen von der grössten Bedeutung, und man sieht, dass, so lange es sich um die Messung verschiedenfarbiger Lichtquellen handelt und so lange das menschliche Auge in letzter Instanz zu entscheiden hat, von vornherein der zu erreichenden Genauigkeit gewisse Schranken gesetzt sind, die unter Umständen bei anormalen Augen ziemlich weit sein können. Für die Technik, wo es sich beispielsweise um die Vergleichung von bläulichem elektrischen Lichte und röthlichem Gaslichte handelt, sind diese Fragen von der allerhöchsten Bedeutung, und es wird Aufgabe der Praxis sein, geeignete Methoden zu ersinnen, die eine möglichst sichere Beurtheilung der physiologischen Intensität gestatten. Einen Weg dazu eröffnen die spectralphotometrischen Beobachtungen, bei denen das Licht in seine einzelnen Bestandtheile zerlegt, die Vergleichung in den verschiedenen Farbenbezirken ausgeführt und aus der Summirung der Einzelwirkungen auf das ursprüngliche Verhältniss der lebendigen Kräfte geschlossen wird. Dieser verhältnissmässig neue Zweig der Photometrie hat jedenfalls eine grosse Zukunft und verdient eine immer grössere Beachtung. In der Astrophotometrie ist die Verschiedenheit der Farben ebenfalls eine Quelle der Unsicherheit. Zwar kommen am Himmel keine so erheblichen Farbenunterschiede vor wie im gewöhnlichen Leben; wirklich grüne und blaue Sterne giebt es nicht, und die meisten Sterne besitzen eine gelblich weisse oder weisslich gelbe Färbung. Immerhin sind aber die Unterschiede zwischen einem weissen und einem röthlichen Sterne so erheblich, dass die directe Vergleichung ungemein schwierig ist und insbesondere die Vereinigung

1) Berl. Monatsber. 1852, p. 69.

2) A. König, Über den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei verschiedener absoluter Intensität. (Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Festschrift für H. v. Helmholtz, Hamburg 1891, p. 309.)

der von verschiedenen Beobachtern erhaltenen Resultate mit grosser Vorsicht auszuführen ist. Die Spectralphotometrie würde auch hier der einzig richtige Weg sein; doch stellt sich der allgemeinen Anwendung derselben auf den Himmel ein bedenkliches Hinderniss entgegen in der geringen Lichtstärke der Sterne, welche zunächst nur bei den helleren eine erfolgreiche Vergleichung in den verschiedenen Spectralbezirken gestattet. Wir werden auf diesen Punkt in späteren Capiteln eingehender zurückkommen.

Zu weiteren Betrachtungen über die physiologische Empfindungsgrösse, welche, abgesehen von der Wärmewirkung und der chemischen Reaction, das einzige Mass für die ursprüngliche lebendige Kraft der leuchtenden Punkte giebt, möge zunächst wieder homogenes oder wenigstens weisses Licht vorausgesetzt werden. Es fragt sich nun, wie die Empfindungsgrösse sich ändert, wenn die Intensität des objectiven Lichtes verändert wird. Eine einfache Vorstellung davon giebt die Erscheinung, dass man die Sterne am Tage mit blossem Auge nicht sehen kann, obgleich die absolute Differenz der Intensität der Sterne und des umgebenden Himmelsgrundes am Tage ebenso gross ist, wie in der Nacht. Während wir aber des Nachts nur die Intensität des Sternes und des Himmelsgrundes vergleichen, vergleichen wir am Tage die erleuchtete Atmosphäre mit der Summe von Stern und erleuchteter Atmosphäre, also zwei stärkere Lichteindrücke. Man sieht also, dass das menschliche Auge die Differenz zweier Lichteindrücke anders auffasst, wenn beide durch Hinzufügen eines dritten Lichteindruckes verstärkt worden sind. Dasselbe lehrt der bekannte von Fechner angestellte Versuch mit den auf einer weissen Tafel von einem undurchsichtigen Stabe bei Beleuchtung mit zwei Lichtquellen hervorgebrachten Schatten. Die eine Lichtquelle habe die Intensität h, die andere die Intensität H; dann erhält der durch h hervorgebrachte Stabschatten nur die Intensität H, die umgebende Stelle aber die Intensität $H + h$. Ist nun H im Vergleich zu h sehr klein, so wird das Auge den Schatten noch gut von dem Grunde unterscheiden, bei sehr grossen Werthen von H ist aber der Schatten nicht mehr zu erkennen, und es folgt also hieraus, dass das Auge dieselbe Intensitätsdifferenz je nach Umständen anders auffasst, also keinen richtigen Massstab für Helligkeitsunterschiede abgiebt. Ist eine Tafel von einer Lichtquelle beleuchtet, eine zweite von zwei eben solchen Lichtquellen, so kann man den Unterschied in der Intensität erkennen; wird aber die eine Tafel von 100, die andere von 101 solcher Lichtquellen erhellt, so vermag das Auge keinen Unterschied mehr zu bemerken.

Ganz andere Resultate ergeben sich aber, wenn man zwei Lichtquellen nicht um ein gleiches Plus, sondern in gleichem Verhältnisse verstärkt. Hierher gehört der bekannte Fundamentalversuch von Fechner,

welcher zwei benachbarte Wolkenflächen, deren Helligkeitsdifferenz eben noch merklich war, einmal mit blossem Auge, das andere Mal durch absorbirende Gläser, die also einen bestimmten Procentsatz des ursprünglichen Lichtes beider Wolkenflächen absorbirten, beobachtete. Im zweiten Falle wurde der ursprünglich eben noch merkliche Unterschied der Helligkeit keineswegs geringer, sondern nach dem Urtheile vieler Beobachter mindestens ebenso auffallend, selbst wenn die Abschwächung innerhalb weiter Grenzen modificirt wurde. Allgemein ergiebt sich aus diesen und zahlreichen ähnlichen Versuchen, dass bei den verschiedensten Helligkeitsgraden die Differenz der Intensitäten, welche vom Auge gerade noch unterschieden werden können, nahezu denselben Bruchtheil der ganzen Helligkeit bildet. Fechner[1]) hat dies in dem nach ihm benannten psychophysischen Gesetze zuerst mit voller Klarheit ausgesprochen, obgleich vor ihm schon Andere, namentlich Bouguer, Arago, Masson und Steinheil auf die Bedeutung der Erscheinungen hingewiesen und entsprechende Versuche zur Bestimmung der Empfindungsgrenze angestellt hatten. Nach Bouguer[2]) kann man noch $\frac{1}{64}$ der Lichtstärke unterscheiden; Arago[3]) beobachtete, dass bei Bewegung der leuchtenden Objecte noch feinere Unterschiede bemerkt werden konnten und bestimmte den Lichtquotienten unter den günstigsten Bedingungen zu $\frac{1}{131}$. Masson[4]) fand im Mittel den Factor zu $\frac{1}{100}$, und nahe denselben Werth lieferten die Versuche von Fechner, während Steinheil[5]) aus photometrischen Messungen den etwas abweichenden Werth $\frac{1}{38}$ erhielt.

Ohne näher auf diese Versuche und die damit zusammenhängenden Fragen einzugehen, über welche die Lehrbücher der physiologischen Optik noch manche interessante Einzelheiten enthalten, genügt es für unsere Zwecke hervorzuheben, dass etwa 1 Procent als diejenige Grösse anzusehen ist, welche unter günstigen Umständen noch als Helligkeitsunterschied wahrgenommen werden kann.

Es verdient hier nicht unerwähnt zu bleiben, dass das psychophysische Gesetz auch auf anderen Gebieten der Sinnesempfindungen Gültigkeit hat. So ist nachgewiesen, dass der Unterschied zweier Tonhöhen sich gleich bleibt, wenn das Verhältniss der Differenz der Schwingungsdauern zur ganzen Schwingungsdauer constant ist; und auch bei der Beurtheilung der

---

1) Fechner, Über ein psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. (Abhandl. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 4, p. 455.)

2) Bouguer, Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouvrage posthume. Paris, 1760, p. 25.

3) Arago, Sämmtl. Werke. Deutsche Ausg. von Hankel, Bd. 10, p. 210.

4) Annales de chimie et de physique. Série 3, tome 14, p. 151.

5) Steinheil, Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel. (Denkschriften der K. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Phys. Classe, Bd. II.) München, 1836, p. 80.

Differenzen von Gewichten und Liniengrössen findet Ähnliches statt. Die Allgemeingültigkeit des Gesetzes ist namentlich durch Untersuchungen von E. H. Weber nachgewiesen worden, und es wird daher dieses Gesetz auch häufig als das Weber'sche bezeichnet.

In seiner Anwendung auf die Photometrie lässt sich das Gesetz in der folgenden Form ausdrücken. Ist E die Empfindungsgrösse, welche der objectiven Helligkeit h entspricht, und ist dE die Zunahme der Empfindungsstärke, welche durch einen Zuwachs dh der objectiven Helligkeit hervorgerufen wird, so hat man:

$$dE = c\,\frac{dh}{h},$$

wo c eine Constante ist. Durch Integration folgt:

$$E = c \log h + C.$$

Für zwei andere Werthe E_0 und h_0 hat man ebenso:

$$E_0 = c \log h_0 + C,$$

und daraus folgt:

$$E - E_0 = c \log \frac{h}{h_0}, \quad \text{oder:} \quad h = h_0 e^{\frac{E-E_0}{c}}.$$

Es darf nicht verschwiegen werden, dass das Fechner'sche Gesetz nicht unumschränkte Gültigkeit besitzt, vielmehr eine untere und obere Grenze hat und bei sehr kleinen sowohl als bei sehr grossen Helligkeiten ungenau wird. Fechner hat bereits selbst auf diese Ausnahmen hingewiesen und die untere Grenze durch den Einfluss des subjectiven Eigenlichts des Auges zu erklären versucht. Die Sehnerven werden nämlich nicht nur durch das von aussen kommende Licht gereizt, sondern es findet auch durch innere Einflüsse eine beständige Reizung statt, die bei geschlossenen Augen zwar keinen gleichmässigen Lichteindruck, vielmehr nur einen verschwommenen ungleichmässigen Lichtschimmer hervorbringt, die aber niemals absolute Dunkelheit eintreten lässt. Bezeichnet man dieses Eigenlicht des Auges, welches zu dem von aussen kommenden Lichte sich hinzuaddirt, mit H_0, so müsste das Fechner'sche Gesetz eigentlich in der Form geschrieben werden:

$$dE = c\,\frac{dh}{h + H_0}.$$

Man sieht hieraus, dass der Empfindungszuwachs geringer ist, als wenn H_0 gleich Null wäre, und es ist ohne Weiteres klar, dass die Abweichung von der ursprünglichen Form um so grösser sein muss, je mehr h sich dem Werthe von H_0 nähert, d. h. je geringer die Helligkeit der betrachteten Lichtquelle ist. Fechner und Volkmann haben sogar versucht, die

Intensität des Eigenlichtes zu bestimmen; indessen sind diese Bestimmungen nicht ganz einwurfsfrei und ergeben offenbar zu kleine Werthe. Wenn das Eigenlicht des Auges wirklich vorhanden ist, so muss die objective Intensität eine gewisse Stärke haben, um überhaupt wahrgenommen zu werden. Kleinere Grade der Intensität üben keine Wirkung mehr auf das Auge aus. Fechner hat die kleinste noch erkennbare Beleuchtung die Reizschwelle genannt.

Was die obere Grenze des Fechner'schen Gesetzes anbelangt, so lässt sich dieselbe ebenso wenig wie die untere mit Sicherheit angeben, aber es ist ohne Weiteres klar, dass bei einer gewissen Stärke des Reizes das Sehorgan geschädigt wird. Wir können ohne Schutzmittel nicht das directe Sonnenlicht vertragen, und auch schon bei weniger intensiven Lichtquellen findet eine Überreizung der Nerven statt, bei welcher es nicht mehr möglich ist, Empfindungsunterschiede wahrzunehmen.

Für die Astrophotometrie ist das Fechner'sche Gesetz von der fundamentalsten Bedeutung, und es rechtfertigt sich ganz von selbst eine ausführliche Besprechung desselben an erster Stelle in einem Lehrbuche über Astrophotometrie, weil sich die wichtigsten Folgerungen hinsichtlich des Masses, in welchem photometrische Beobachtungen anzugeben sind, sowie hinsichtlich des Ausgleichungsverfahrens an dasselbe knüpfen. Da es bei allen photometrischen Messungen in letzter Instanz auf die Empfindungsgrösse E ankommt, so sieht man sofort aus der Formel:

$$E = c \log h + C ,$$

dass es nicht die objectiven Helligkeiten (lebendigen Kräfte) selbst, sondern die Logarithmen derselben sind, welche psychisch zur Empfindung kommen, und es ergiebt sich daraus die Nothwendigkeit, die Helligkeitslogarithmen als Mass in die messende Astrophotometrie einzuführen. Schon Fechner hat selbst auf den Zusammenhang seines Gesetzes mit der messenden Astronomie hingewiesen. Bekanntlich sind schon von Alters her die Sterne nach dem Eindrucke, den ihr Licht auf das Auge macht, in gewisse Helligkeitsclassen, sogenannte Sterngrössenclassen, eingetheilt worden, und zwar wurden für die mit blossem Auge sichtbaren Sterne sechs Abtheilungen gewählt mit der Bedingung, dass der Helligkeitsunterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Abtheilungen derselbe sein sollte. Später hat man diese Helligkeitsscala auch auf die teleskopischen Sterne ausgedehnt, und es ist so eine zunächst willkürliche Scala zur Beurtheilung von Helligkeiten der Sterne entstanden. Es fragt sich, ob diese Scala in dem Fechner'schen Gesetze begründet ist? Man denke sich Sterne, welche in dem eben angedeuteten Sinne Repräsentanten der aufeinander folgenden Grössenclassen 1, 2, 3 .... m sind;

ihre objectiven Lichtstärken seien h_1, h_2, h_3 ... h_m und die Empfindungsgrössen E_1, E_2 .... E_m. Nach dem Fechner'schen Gesetze ist:

$$E_m = c \log h_m + C$$
$$E_{m-1} = c \log h_{m-1} + C;$$

also:

$$E_m - E_{m-1} = c \log \frac{h_m}{h_{m-1}}.$$

Wäre nun das Fechner'sche Gesetz auf die Grössenclassen anwendbar, so müsste $E_m - E_{m-1}$ für je zwei beliebige auf einander folgende Grössenclassen constant sein; man müsste also haben:

$$c \log \frac{h_m}{h_{m-1}} = k,$$

oder, wenn man $\frac{k}{c}$ durch eine einzige Constante $\log \frac{1}{\varrho}$ ersetzt:

$$\frac{h_{m-1}}{h_m} = \varrho.$$

In der That haben nun alle bisherigen Untersuchungen ergeben, dass innerhalb gewisser Grenzen das Helligkeitsverhältniss zweier um eine Grössenclasse von einander verschiedenen Sterne als constant anzusehen ist und dass also die Grössenschätzungen als eine Bestätigung des Fechner'schen Gesetzes betrachtet werden können. Im letzten Abschnitte wird ausführlich über diese Untersuchungen berichtet werden; hier genügt es hervorzuheben, dass mit Ausnahme der helleren Grössenclassen, wo etwas stärkere Abweichungen zu bemerken sind, für das Helligkeitsverhältniss zweier auf einander folgenden Classen mit genügender Sicherheit die Zahl 2.5 angenommen werden kann. Wäre das Fechner'sche Gesetz in aller Strenge auf Sterngrössen von den hellsten bis zu den schwächsten Sternen anwendbar, so hätte man streng:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{h_3}{h_4} \cdots = \frac{h_{m-1}}{h_m} = \varrho,$$

oder:

$$\log h_1 - \log h_2 = \log h_2 - \log h_3 = \cdots = \log h_{m-1} - \log h_m = \log \varrho,$$

oder wenn man alle Gleichungen addirt:

$$\log h_1 - \log h_m = (m - 1) \log \varrho.$$

Setzt man, da die Einheit beliebig angenommen werden kann, die Helligkeit eines Sternes erster Grösse gleich 1, so hat man:

$$\log h_m = -(m - 1) \log \varrho,$$

oder:

$$m = 1 - \frac{\log h_m}{\log \varrho},$$

d. h. die ideale Grössenclasse m eines Sternes, dessen Helligkeitsverhältniss zu einem Sterne 1. Grösse durch h_m ausgedrückt ist, wird gefunden, wenn man $\log h_m$ durch eine Constante $\log \varrho$ dividirt und den Quotienten von 1 subtrahirt. Es hat sich in der Photometrie die Bezeichnung mit Sterngrössenclassen so eingebürgert, dass es kaum noch rathsam sein dürfte, dieselbe wieder durch eine andere Schreibweise verdrängen und z. B. alle Angaben in Helligkeitslogarithmen machen zu wollen. Es wird sich daher empfehlen, für die Constante ϱ einen ganz bestimmten Werth einzuführen und als photometrische Sterngrösse denjenigen Werth zu definiren, welcher sich bei der Division der Helligkeitslogarithmen durch den Logarithmus dieser Constanten ergiebt. Man bedient sich jetzt allgemein des Werthes $\log \varrho = -0.4$ oder $\varrho = 0.389$ oder $\frac{1}{\varrho} = 2.512$.

Das Fechner'sche Gesetz ist auch, wie hier noch kurz erwähnt werden soll, für die Ausgleichung der photometrischen Beobachtungen von hoher Bedeutung. Es mögen von einem Sterne eine Anzahl Helligkeitsbestimmungen $h_1, h_2 \ldots h_n$ vorliegen, denen die Empfindungsstärken $E_1, E_2 \ldots E_n$ entsprechen sollen. Der wahrscheinlichste Werth für die Helligkeit des Sternes sei x und die zugehörige Empfindungsstärke sei E_0. Nach dem Fechner'schen Satz hat man dann:

$$E_1 = c \log h_1 + C,$$
$$E_0 = c \log x + C.$$

Mithin ist:

$$E_1 - E_0 = c \log \frac{h_1}{x}.$$

Ebenso wird:

$$E_2 - E_0 = c \log \frac{h_2}{x},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n - E_0 = c \log \frac{h_n}{x}.$$

Die Verschiedenheit der Grössen $E_1, E_2 \ldots E_n$ wird einerseits durch die rein zufälligen, auf der unvollkommenen Urtheilsfähigkeit des Auges beruhenden Messungsfehler bedingt, andererseits durch äussere Einflüsse, wie wechselnde Durchsichtigkeit der Atmosphäre u. s. w., hervorgebracht. Betrachtet man die Grössen $E_1 - E_0$, $E_2 - E_0, \ldots E_n - E_0$ als Beobachtungsfehler und legt der Ausgleichung das Gauss'sche Fehlergesetz zu Grunde, nach welchem die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum werden muss, so ergiebt sich die Gleichung:

$$c^2\left(\log \frac{h_1}{x}\right)^2 + c^2\left(\log \frac{h_2}{x}\right)^2 + \cdots + c^2\left(\log \frac{h_n}{x}\right)^2 = \text{Minimum},$$

und hieraus folgt zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Helligkeitswerthes x die Gleichung:

$$\log \frac{h_1}{x} + \log \frac{h_2}{x} + \cdots + \log \frac{h_n}{x} = 0 ,$$

oder:

$$\log x = \frac{\log h_1 + \log h_2 + \cdots + \log h_n}{n} .$$

Es geht hieraus unmittelbar hervor, dass man bei Ableitung des plausibelsten Helligkeitswerthes aus einer Reihe von Einzelbestimmungen am Rationellsten verfährt, wenn man mit den Helligkeitslogarithmen (oder was dasselbe, mit Sterngrössen) anstatt mit den Helligkeiten selbst operirt.

Auf die Bedeutung dieses Rechnungsverfahrens bei photometrischen Messungen ist schon wiederholt, am Eingehendsten wohl von Seeliger[1]), hingewiesen worden, welcher auch noch eine andere Ausgleichungsformel aufgestellt hat, deren Anwendung sich namentlich dann empfiehlt, wenn die durch äussere Umstände bedingten Messungsfehler die reinen Beobachtungsfehler wesentlich überwiegen. In der Praxis ist das Rechnungsverfahren mit den Helligkeitslogarithmen bereits seit geraumer Zeit und zwar durch Seidel[2]) eingeführt worden, und man kann sagen, dass die Astrophotometrie damit in eine neue Phase der Entwicklung eingetreten ist.

Es ist noch von Interesse zu sehen, welche Genauigkeitsgrenze allen photometrischen Angaben, die in Helligkeitslogarithmen oder Sterngrössen gemacht werden, von vornherein gesetzt ist. Wenn sich h um die Grösse dh ändert, so ändert sich $\log h$ um die Grösse $\frac{dh}{h}$ Mod., und da nach den oben besprochenen Untersuchungen als äusserste Grenze für einen gerade noch erkennbaren Lichtunterschied etwa 1 Procent angenommen werden kann, also $\frac{dh}{h} = \frac{1}{100}$ zu setzen ist, so folgt, dass unter keinen Umständen eine grössere Helligkeitsdifferenz als 0.0043 im Helligkeitslogarithmus oder etwa 0.01 Sterngrössen bestimmt werden kann. In Wirklichkeit ist allerdings eine solche Genauigkeit bei Messungen am Himmel auch nicht angenähert zu erreichen, erstens weil bei der Vergleichung der unruhigen punktförmigen Sternbilder schwerlich eine so grosse Empfindlichkeit in der Beurtheilung von Helligkeitsunterschieden vorausgesetzt werden darf, wie oben angenommen wurde, und zweitens, weil bei allen photometrischen Sternmessungen die äusseren Umstände, insbesondere die schwankende Durchsichtigkeit der Luft, die Extinction in der Atmosphäre u. s. w., einen sehr störenden, schwer controlirbaren Einfluss ausüben.

1) Astron. Nachr. Bd. 132, Nr. 3158.
2) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Bd. 9, Abth. 3.

5. Beleuchtung von Flächen durch leuchtende Punkte. Das Gesetz vom Cosinus des Incidenzwinkels.

Wir haben im Vorangehenden von der objectiven Intensität oder Leuchtkraft einer Lichtquelle gesprochen und die beiden wichtigsten Gesetze aufgestellt, welche für diese Intensität gelten. Indem wir weiter zunächst nur die Nervenfasern des menschlichen Auges als die Licht empfangende Stelle betrachteten, haben wir den Begriff der physiologischen Intensität eingeführt und die dafür geltenden Gesetze besprochen. Wir können aber nicht immer das von einem Punkte ausgehende Licht direct mit dem Auge betrachten, in vielen Fällen wird uns eine Lichtquelle erst indirect, d. h. dadurch, dass sie auf Gegenstände in unserer Umgebung einwirkt, bemerkbar. Wir sagen von einem Körper, der in den Bereich einer Lichtbewegung kommt, er wird von der Lichtquelle beleuchtet oder »es fällt Licht von der Lichtquelle auf denselben«, und wir führen zur näheren Festlegung des Begriffes den Ausdruck Lichtmenge ein. Von dem Standpunkte der Newton'schen Emanationstheorie aus, nach welcher die Empfindung des Lichtes dadurch hervorgebracht wird, dass von einem leuchtenden Körper aus kleine Theilchen mit grosser constanter Geschwindigkeit geradlinig nach allen Richtungen fortgeschleudert werden, hat dieser Ausdruck nichts Befremdendes, da das Licht danach gewissermassen als etwas Greifbares und Materielles aufzufassen ist und das Wort »Menge« ganz von selbst verständlich ist. Für die Undulationstheorie ist der Begriff allerdings fremdartig, aber er ist als ein sehr bequemer immer beibehalten worden und hat sich allgemein eingebürgert. Wir haben danach die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkte auf irgend einen Körper übergeht, als die Summe aller lebendigen Kräfte der Lichtbewegung in den einzelnen Punkten dieses Körpers zu definiren. Es sei P (Fig. 1) ein leuchtender Punkt, in der Entfernung r befinde sich das irgendwie gestaltete zunächst als eben zu betrachtende Element df; es soll die Lichtquantität dq bestimmt werden, welche von P auf df übergeht. Denkt man sich die Pyramide oder den Kegel construirt, welcher df als Grundfläche und P als Spitze hat, und denkt man sich um P zwei Kugeln mit den Radien 1 und r gelegt, so werden diese aus der Pyramide oder dem Kegel die Elemente $d\omega$ und $d\varphi$ herausschneiden. Nach unserer Definition ist die Summe der lebendigen Kräfte in $d\omega$ dieselbe, wie in $d\varphi$

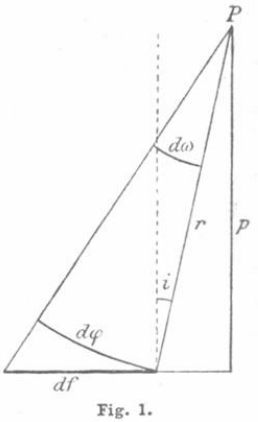

Fig. 1.

und in df, oder auch die auf $d\omega$, $d\varphi$ und df auffallenden Lichtquantitäten sind dieselben. Bezeichnen wir nun, um einen bestimmten Begriff zu fixiren, die Lichtmenge, welche auf die Einheit der Fläche in der Entfernung 1 senkrecht auffällt, mit J, so ist klar, dass auf die ganze Fläche $d\omega$ die Quantität $Jd\omega$ gelangen muss, da die Einzelwirkungen sich ja summiren müssen. Dieselbe Quantität fällt aber auch auf $d\varphi$ und df, und man hat daher das gesuchte $dq = Jd\omega$. Nun ist aber:

$$d\omega : d\varphi = 1 : r^2, \quad \text{und:} \quad d\varphi = df \cos i;$$

mithin:

$$dq = J \frac{df \cos i}{r^2}.$$

Es ist aber auch:

$$\cos i = \frac{p}{r},$$

wenn p das Perpendikel von P auf die Verlängerung von df ist; daher auch:

$$dq = J\, df p \frac{1}{r^3}.$$

Der Winkel i, den die Normale auf dem Elemente df mit der Richtung nach dem leuchtenden Punkte zu bildet, wird der Incidenzwinkel genannt, und die voranstehende Formel bildet eins der wichtigsten Fundamentalgesetze der Photometrie, welches ausspricht, dass die von einem leuchtenden Punkte auf ein ebenes Element ausgesandte Lichtmenge dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional ist.

Die Grösse J, also die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkte auf die Einheit der Fläche in der Einheit der Entfernung senkrecht gelangt, ändert sich von Lichtquelle zu Lichtquelle und ist ein Mass für die Energie des Leuchtens oder der Ätherbewegung, welche von der betreffenden Lichtquelle ausgeht. Man hat diese Grösse auch die Dichtigkeit des Lichtes genannt, ganz im Sinne der Vorstellung, dass das Licht eine Materie ist, die, wenn sie sich von einem Punkte aus strahlenförmig auf verschiedene um diesen Punkt concentrisch gelegte Kugelschalen ausbreitet, naturgemäss auf der inneren dieser Schalen dichter vertheilt ist als auf der äusseren. Sehr glücklich ist diese Bezeichnung im Sinne der Undulationstheorie nicht gerade gewählt, aber sie ist allgemein in die Lehrbücher übergegangen und gewissermassen durch den Sprachgebrauch sanctionirt; sie giebt übrigens eine recht gute Vorstellung von den Vorgängen und kann daher unbedenklich beibehalten werden.

Die Lichtmenge oder, wie man sie auch nennt, die wahre oder objective Helligkeit dq des Flächenelementes df ist, wie man leicht sieht, etwas, was nicht direct den Beobachtungen zugänglich ist. Denkt

man sich an Stelle des Elementes df eine photographische Platte oder ein empfindliches Thermoelement, so würde man allerdings in diesen Fällen eine Art Mass für die auffallende Lichtmenge haben, insofern dieselbe andere messbare Wirkungen veranlasste, im ersten Falle die Zerlegung der Silbersalze, im anderen die Ablenkung der Galvanometernadel; aber die Wirkung äussert sich in beiden Fällen nur in Betreff eines kleinen Theiles der von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtbewegung, da entweder nur die sogenannten chemischen Strahlen oder die sogenannten Wärmestrahlen in Thätigkeit treten. Mit dem Auge, das in letzter Instanz wieder unser hauptsächlichstes Hülfsmittel ist, nehmen wir die auf ein Element auffallende Lichtquantität erst indirect durch Vermittlung dieses Elementes wahr, und dabei ist durch allerlei Vorgänge, wie Brechung, Reflexion, Absorption u. s. w. die ursprünglich empfangene Lichtmenge so modificirt, dass schliesslich etwas ganz Anderes in unserem Sehorgan zur Empfindung gelangt.

Geht man von dem oben aufgestellten Beleuchtungsgesetze aus und dehnt die Betrachtung von dem ebenen Flächenelemente auf eine beliebig grosse, beliebig gekrümmte Fläche aus, so ergeben sich eine Menge von interessanten Aufgaben, deren Behandlung in ein eigentliches Lehrbuch des photometrischen Calcüls gehört, und von denen im Hinblick auf die Himmelsphotometrie hier nur die wichtigsten angedeutet werden können. Es sei ein Kreis mit dem Radius a (Fig. 2) von einem Punkte P aus beleuchtet, welcher in der Entfernung $PC = c$ senkrecht über dem Mittelpunkte C des Kreises liegt. Man beschreibe um das Centrum zwei concentrische Kreise mit den Radien r und $r + dr$; ausserdem ziehe man von C aus zwei unendlich nahe, den Winkel $d\varphi$ einschliessende Radien, dann wird ein kleines Flächenelement ausgeschnitten, dessen Grösse gegeben ist durch $r\,d\varphi\,dr$.

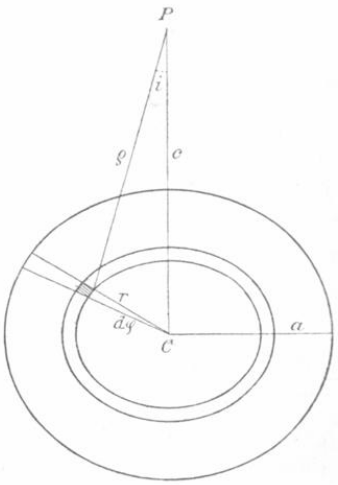

Fig. 2.

Die auf dieses Element fallende Lichtmenge wird, da die Entfernung ϱ vom leuchtenden Punkte $= \sqrt{r^2 + c^2}$ und ausserdem $\cos i = \frac{c}{\sqrt{r^2 + c^2}}$ ist, nach der obigen Formel ausgedrückt durch:

$$dq = \frac{J c\, r\, dr\, d\varphi}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Will man die ganze auf die Kreisfläche fallende Lichtquantität Q kennen, so hat man:

$$Q = Jc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} \frac{r\,dr}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{oder:} \quad Q = 2\pi J \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}}\right).$$

Denkt man sich den Kreis unendlich gross ($a = \infty$), so wird die von dem Punkte P auf die ganze Hemisphäre ausgehende Lichtmenge $Q = 2\pi J$.

Wir wollen nun ganz allgemein eine beliebige geschlossene Fläche betrachten, die als convex angenommen werden soll. Die Fläche wird von dem Punkte P aus beleuchtet (Fig. 3). Denkt man sich einen Kegel mit der Spitze in P, welcher die Fläche umhüllt und dieselbe längs der Curve a, a, a ... berührt, so folgt ohne Weiteres, dass alle jenseits dieser Curve gelegenen Punkte der Fläche überhaupt kein Licht von P erhalten können; sie befinden sich im Schatten. Um P sei eine Kugel mit dem Radius m beschrieben, und es seien an diese Kugel und die Fläche alle gemeinschaftlichen Berührungsebenen construirt. Die dieser umhüllenden conoidischen Fläche und der ursprünglichen Fläche gemeinsamen Punkte b, b, b ... bilden eine Berührungscurve, und da für sämmtliche Elemente dieser Curve p denselben Werth hat, so folgt, dass die Beleuchtung längs dieser Curve umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung der Elemente vom leuchtenden Punkte P ist. Legt man um P eine ganze Schaar von Kugeln, deren Radien immer grösser werden, so findet man neue Berührungscurven und zwar immer engere, bis endlich die Berührungscurve für eine bestimmte Kugel in einen einzigen Punkt übergeht, den sogenannten glänzenden Punkt C, welcher unter allen Punkten der Fläche die grösste Beleuchtung erhält. Er liegt nicht nur dem leuchtenden Punkte am nächsten, sondern der Winkel i hat für ein dort befindliches Element den Maximalwerth $\frac{\pi}{2}$. Legt man durch P und C Ebenen, so schneiden diese die

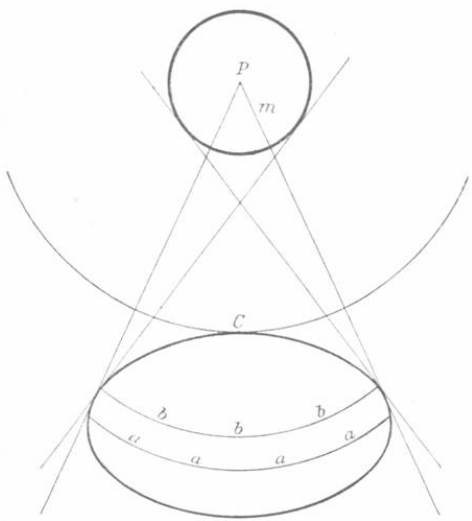

Fig. 3.

Fläche längs Curven, auf welchen die Beleuchtung von C aus beständig abnimmt bis zum Schnittpunkte mit der Berührungscurve a, a, a . . ., wo die Beleuchtung Null wird. Man nennt diese Curven Beleuchtungsmeridiane, während die Berührungscurven Beleuchtungsparallele heissen. Denkt man sich diejenigen Punkte der Fläche mit einander verbunden, in denen die Beleuchtung gleich intensiv ist, so erhält man Curven, welche im Allgemeinen die oben charakterisirten Berührungscurven schneiden werden; man nennt solche Curven gleicher Helligkeit Isophoten. Ist die betrachtete Fläche eine Kugel, so fallen Isophoten und Berührungscurven zusammen; beim Ellipsoide ist dies schon nicht mehr der Fall, denn dort werden auf jeder Berührungscurve immer nur zwei Punkte sein, die von dem leuchtenden Punkte gleich weit entfernt sind, die also gleiche Beleuchtung erhalten.

Man denke sich wieder eine beliebig gestaltete Fläche F, die nach allen Richtungen convex sein möge, von einem leuchtenden Punkte P aus beleuchtet. Es sei von P als Spitze der die Fläche umhüllende Kegel construirt, und es sei mit dem Radius 1 um P eine Kugel gelegt; aus dieser Kugel wird durch den Kegel ein Flächenstück φ herausgeschnitten, und man nennt φ die scheinbare Grösse der Fläche F, von P aus gesehen. Es ist klar, dass auf φ dieselbe Lichtmenge übergeht, wie auf die ganze Fläche F, nur mit dem Unterschiede, dass die Beleuchtung auf der Kugelzone in allen Punkten ganz gleichmässig vertheilt ist, auf der Fläche jedoch nicht. Da nun die auf φ fallende Lichtmenge nach dem Obigen gleich $J\varphi$ ist, so ergiebt sich der wichtige Satz, dass die Lichtquantität, welche eine Fläche F von einem leuchtenden Punkte P aus erhält, proportional ist der scheinbaren Grösse derselben, gesehen von P aus.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich z. B. ganz einfach die Lichtmenge berechnen, welche auf eine Kugel vom Radius a von einem leuchtenden Punkte aus gelangt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel gleich c ist. Der umhüllende Kegel wird in diesem Falle ein gerader Kegel und das Flächenstückchen φ ist eine Kugelcalotte, deren Fläche ausgedrückt ist durch $2\pi\left\{1 - \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right\}$. Man hat also für die Lichtmenge Q, welche auf die Kugel übergeht, den Ausdruck:

$$Q = 2\pi J\left\{1 - \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right\}.$$

Der Satz von dem Zusammenhange zwischen Lichtquantität und scheinbarer Grösse lässt eine vielfache Anwendung zu. So kann man die Aufgabe stellen, alle möglichen Lagen eines leuchtenden Punktes zu ermitteln, bei denen eine Fläche F stets dieselbe Lichtmenge erhält. Wenn Q

constant sein soll, so muss es auch φ sein, und es reducirt sich die Aufgabe daher darauf, alle Lagen von P zu finden, von denen aus gesehen F dieselbe scheinbare Grösse hat. Für eine Kugel ist natürlich der gesuchte Ort wieder eine Kugelfläche, die mit der ersteren concentrisch ist. Man nennt Flächen, von deren sämmtlichen Punkten aus gesehen eine bestimmte Fläche dieselbe scheinbare Grösse hat, Flächen constanter Kegelöffnung.

Es ist hier nicht der Platz, näher auf diese vom rein mathematischen Standpunkte aus höchst interessanten Probleme einzugehen, es soll nur noch kurz der Fall berührt werden, der bei astronomischen Aufgaben am Häufigsten eintreten wird, dass der leuchtende Punkt sehr weit von der erleuchteten Fläche entfernt ist, dass also für alle Elemente der Fläche die Distanz vom leuchtenden Punkte als constant angesehen werden kann. Bezeichnet man hier mit J die Lichtquantität, welche auf die Flächeneinheit senkrecht auffällt, so ist die Quantität, welche auf ein Element df gelangt, ausgedrückt durch:

$$dq = df J \cos i .$$

Der umhüllende Kegel geht in diesem Falle in einen Cylinder über, dessen Axe der Richtung des einfallenden Lichtes parallel ist; die Beleuchtungsgrenze ist die Curve, in welcher die Fläche von diesem Cylinder berührt wird. Fragt man nach den Curven gleicher Beleuchtung, so ist offenbar die Bedingung dafür: $\cos i = \text{const.}$ Lautet die Gleichung der betrachteten Fläche: $F(x, y, z) = 0$, und bildet die Richtung des einfallenden Lichtes mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so wird der Cosinus des Winkels zwischen der Normalen an irgend einem Punkte der Fläche und der Richtung des einfallenden Lichtes bekanntlich durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\cos i = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} .$$

Für ein Ellipsoid, dessen Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

lautet, hat man danach z. B.

$$\cos i = \frac{\frac{x}{a^2}\cos\alpha + \frac{y}{b^2}\cos\beta + \frac{z}{c^2}\cos\gamma}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}} .$$

Da nun für alle Punkte, die gleich stark beleuchtet werden, $\cos i$ constant sein soll, so folgt, dass der Durchschnitt des Ellipsoides mit derjenigen Fläche, welche durch die Gleichung

$$\left[\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right]^2=\text{const.}\left[\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right]$$

repräsentirt wird, eine sogenannte Isophote darstellt. Die vorstehende Gleichung gehört aber einem Kegel zweiten Grades an, dessen Spitze im Mittelpunkte des Ellipsoides liegt. Für den speciellen Fall, wo $i = 90^\circ$ ist, also an der Beleuchtungsgrenze, hat man für den Kegel die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right)^2=0\,,$$

d. h. der Kegel geht dann in zwei zusammenfallende Ebenen über, und die Beleuchtungsgrenze ist eine ebene Ellipse.

Für die Kugel ist es klar, dass bei sehr weit entferntem leuchtenden Punkte, wenn man die Strahlungsrichtung als Axe der Kugel ansieht, die Beleuchtungsgrenze in den Äquator fällt und die Isophoten Parallelkreise sind, ferner dass die Beleuchtung an irgend einem Punkte dem Sinus der Breite proportional ist.

6. Beleuchtung von Flächen durch leuchtende Flächen. Das Lambert'sche Gesetz vom Cosinus des Emanationswinkels.

Anstatt leuchtender Punkte sollen im Folgenden selbstleuchtende Flächen betrachtet werden, und zwar soll ganz allgemein die Lichtquantität ermittelt werden, welche von einer beliebig gestalteten leuchtenden Fläche auf eine andere ebenfalls ganz beliebige Fläche gelangt. Um von dem einfachsten Falle auszugehen und einige neue wichtige Definitionen einzuführen, sei df (Fig. 4) ein kleines ebenes selbstleuchtendes Flächenelement, welches nach allen Richtungen auf die ganze Hemisphäre Licht aussendet. In der Entfernung r von demselben befinde sich ein zweites ebenes Flächenelement do, welches von dem ersteren Licht zugesandt erhält. Die Normalen zu den beiden Elementen mögen mit der Verbindungslinie

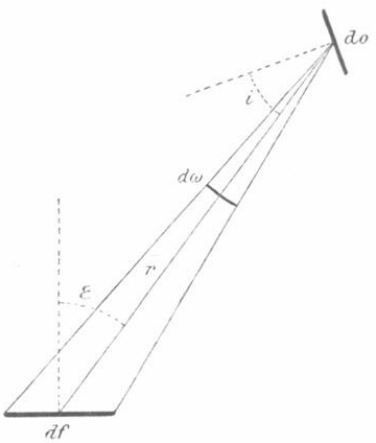

Fig. 4.

derselben die Winkel ε und i einschliessen, von denen der erstere der Emanationswinkel oder Ausflusswinkel genannt wird. Denkt man sich das leuchtende Element aus lauter leuchtenden Punkten zusammengesetzt, von denen jeder einzelne der Ausgangspunkt einer Lichtbewegung sein möge, so wird sich die Wirkung derselben auf do summiren, und man wird daher in erster Linie sagen können, dass die Lichtmenge, welche von df auf do übergeht, proportional sein muss der Grösse des leuchtenden Elementes. Nach dem Früheren muss diese Lichtmenge aber auch noch proportional sein der Grösse des beleuchteten Elementes, dem Cosinus des Incidenzwinkels i und dem umgekehrten Quadrate der Entfernung; ferner muss die Energie der Lichtentwicklung in den einzelnen Punkten von df als constanter Factor J auftreten, und endlich wird die Lichtwirkung auch noch in irgend einer Weise von dem Emanationswinkel ε abhängen. Wir wollen diese Abhängigkeit zunächst ganz allgemein durch die Function $f(\varepsilon)$ bezeichnen.

Die Lichtmenge dL, welche von df auf do übergeht, ist demnach ausgedrückt durch die Formel:

$$dL = J\,df\,do\,\cos i\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)\,.$$

Den Factor J, welcher die Stärke der von dem Elemente df ausgehenden Lichtbewegung charakterisirt, nennt man die Lichtintensität oder Leuchtkraft des Elementes. Betrachtet man nur die Flächeneinheit des beleuchteten Elementes do, so ergiebt sich die Lichtmenge dL', welche von dem leuchtenden Elemente df auf diese Flächeneinheit übergeht, aus der Gleichung:

$$dL' = J\,df\,\cos i\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)\,.$$

Man nennt diese Grösse allgemein die Beleuchtung im Elemente do.

Wird ferner $i = 0$, so fällt das Licht senkrecht auf; man nennt die von dem leuchtenden Elemente df auf die Flächeneinheit senkrecht gelangende Lichtmenge $D = J\,df\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)$ die Dichtigkeit der Beleuchtung. Wird endlich noch statt r die Einheit der Entfernung angenommen, so erhält man die von df auf die Flächeneinheit in der Entfernung 1 senkrecht auffallende Lichtmenge $dq = J\,df\,f(\varepsilon)$; man nennt diese Grösse, welche von der Lage, Grösse und Entfernung des bestrahlten Elementes unabhängig ist, ganz allgemein die unter dem Winkel ε ausgestrahlte Lichtmenge.

Es ist bisher vorausgesetzt worden, dass die Flächenelemente im Verhältniss zu den Entfernungen als sehr klein zu betrachten sind. Nimmt

man sie so klein an, dass alle von irgend einem Punkte von df nach irgend einem Punkte von do gezogenen Linien unter einander parallel sind, so hat man es mit einem unendlich dünnen, unter dem Winkel ε ausgehenden Lichtcylinder zu thun. Eine Ausbreitung des Lichtes im Raume findet nicht statt, und die Flächeneinheit des zur Cylinderaxe senkrechten Querschnittes erhält daher von df in allen Entfernungen die Lichtmenge $J\,df\,f(\varepsilon)$. Diese Grösse wird häufig als Dichtigkeit des unter dem Emanationswinkel ε von df ausgehenden Lichtcylinders bezeichnet, und man sieht, dass diese Bezeichnung mit dem oben gewählten Ausdruck »ausgestrahlte Lichtmenge« gleichbedeutend ist.

Wir wollen uns nun an der Stelle des beleuchteten Elementes do das menschliche Auge denken. Betrachtet man die Wirkung des leuchtenden Elementes df auf dasselbe, so spricht man von der Helligkeit des leuchtenden Elementes df, und zwar unterscheidet man die wirkliche und die scheinbare Helligkeit. Unter der wirklichen Helligkeit versteht man die Lichtquantität, welche die Flächeneinheit des Elementes df senkrecht auf die Flächeneinheit des Auges gelangen lässt, also nach dem Obigen die Grösse: »Dichtigkeit der Beleuchtung dividirt durch die Grösse des Elementes df«. Wenn man daher die wirkliche Helligkeit mit H bezeichnet, so ist

$$H = \frac{D}{df} = J\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)\,.$$

Hat man an Stelle des einen leuchtenden Elementes eine selbstleuchtende Fläche, deren einzelne Elemente df_1, df_2, df_3 ... mit den Leuchtkräften J_1, J_2, J_3 ... begabt sind, ausserdem die Emanationswinkel ε_1, ε_2, ε_3 ... und die Entfernungen r_1, r_2, r_3 ... besitzen, so gelangt von der ganzen Fläche die Lichtquantität

$$J_1\,\frac{1}{r_1^2}\,f(\varepsilon_1)\,df_1 + J_2\,\frac{1}{r_2^2}\,f(\varepsilon_2)\,df_2 + \cdots$$

senkrecht auf die Flächeneinheit des Auges; man spricht dann von einer mittleren wirklichen Helligkeit der leuchtenden Fläche und versteht darunter den Quotienten

$$\frac{J_1\,\frac{1}{r_1^2}\,f(\varepsilon_1)\,df_1 + J_2\,\frac{1}{r_2^2}\,f(\varepsilon_2)\,df_2 + \cdots}{df_1 + df_2 + df_3 + \cdots}$$

oder

$$\frac{\Sigma\left(J\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)\,df\right)}{\Sigma(df)}\,.$$

Um den Begriff der scheinbaren Helligkeit zu fixiren, denke man sich in der obigen Figur um do eine Kugel mit dem Radius 1 construirt, welche aus der Pyramide, die df zur Grundfläche und in do die Spitze hat, das Element $d\omega$ herausschneidet. Man nennt $d\omega$ die scheinbare Grösse des Elementes df und versteht unter der scheinbaren Helligkeit von df die von diesem Elemente ausgehende Dichtigkeit der Beleuchtung, dividirt durch die scheinbare Grösse des Elementes df. Bezeichnet man diese scheinbare Helligkeit mit h, so wird also:

$$h = \frac{D}{d\omega} = \frac{J\,df\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)}{d\omega},$$

und da $d\omega = \frac{df\cos\varepsilon}{r^2}$ ist, so wird:

$$h = \frac{J\,f(\varepsilon)}{\cos\varepsilon}.$$

Man sieht also hieraus, dass die scheinbare Helligkeit eines Flächenelementes von der Entfernung vom Auge ganz unabhängig ist und nur durch die Leuchtkraft und den Emanationswinkel bestimmt wird. Hat man wieder eine leuchtende Fläche statt eines einzelnen Elementes, so bezeichnet man entsprechend wie oben mit mittlerer scheinbarer Flächenhelligkeit den Quotienten aus der gesammten Lichtmenge, welche von der ganzen Fläche senkrecht auf die Flächeneinheit des Auges gelangt, und der scheinbaren Grösse der ganzen Fläche, also die Grösse

$$\frac{\sum\left(J\,\frac{1}{r^2}\,f(\varepsilon)\,df\right)}{\sum(d\omega)}.$$

Wir haben bisher die Abhängigkeit der Lichtwirkung von dem Emanationswinkel ganz allgemein durch die Function $f(\varepsilon)$ bezeichnet. Wenn jeder Punkt des leuchtenden Elementes als Ausgangspunkt einer nach allen Richtungen gleich energischen Lichtbewegung aufzufassen ist, so sollte es auf den ersten Blick scheinen, als müsste das Element nach allen Richtungen dieselbe Lichtmenge ausstrahlen. Diese Ansicht ist in der That von Euler vertreten und von Laplace später acceptirt worden, und sie würde auch durchaus einwurfsfrei sein, wenn das leuchtende Element als eine rein mathematische Fläche angesehen werden dürfte. Dies ist aber keineswegs statthaft, und wir werden sogleich sehen, zu welch gänzlich anderem Beleuchtungsgesetze man gelangt, wenn man die allein richtige Annahme macht, dass bei jedem selbstleuchtenden

Körper das Licht nicht nur von den Oberflächentheilchen ausgesandt wird, sondern auch aus einer gewissen Tiefe unterhalb der eigentlichen Oberfläche herkommt. Nach der Euler'schen und Laplace'schen Anschauungsweise wäre die Function $f(\varepsilon)$ ganz unberücksichtigt zu lassen, und nach den obigen Formeln müsste daher die scheinbare Helligkeit eines leuchtenden Elementes ausgedrückt sein durch $h = \frac{J}{\cos \varepsilon}$, d. h. die scheinbare Helligkeit des Elementes df müsste immer grösser werden, je grösser der Emanationswinkel wird. Danach müsste also eine glühende Metallplatte, von der Seite her betrachtet, viel heller beurtheilt werden, als senkrecht von vorn gesehen, und eine glühende Metallkugel müsste am Rande beträchtlich intensiver erscheinen, als in der Mitte.

Die Euler'sche Vorstellungsweise ist von Lambert in seinem Hauptwerke[1]) über die Photometrie nicht acceptirt worden. Er nahm die von einem Flächenelemente df ausgehende Lichtquantität nicht unabhängig von dem Ausflusswinkel an, sondern stellte das nach ihm benannte Emanationsgesetz auf, wonach die Lichtquantität proportional dem Cosinus des Emanationswinkels sein soll. Danach wäre also $f(\varepsilon) = \cos \varepsilon$ zu setzen; die wirkliche Helligkeit eines leuchtenden Elementes wäre $H = J \frac{1}{r^2}$ und die scheinbare Helligkeit $h = J$. Es würde also das bemerkenswerthe Resultat folgen, dass die scheinbare Helligkeit überall die gleiche wäre. Eine glühende Metallplatte müsste von allen Richtungen aus betrachtet gleich hell erscheinen, und eine leuchtende Kugel würde am Rande eben so hell aussehen wie in der Mitte. Lambert glaubte eine der wichtigsten Stützen für seinen Satz darin zu erblicken, dass die Sonnenscheibe an allen Punkten gleich hell erschiene. Es war ihm unbekannt, dass bereits Bouguer durch genügend zuverlässige Messungen den Beweis erbracht hatte, dass die Randpartien der Sonne beträchtlich lichtschwächer sind, als die Centralpartien; er hatte das Vorhandensein einer Sonnenatmosphäre gar nicht in Betracht gezogen und konnte daher auch nicht zu dem einzig richtigen Schlusse gelangen, dass die Erscheinungen an der Sonne wegen des uncontrolirbaren Einflusses einer unbekannten Sonnenatmosphäre überhaupt nicht zu Gunsten oder Ungunsten irgend welcher Emanationstheorie entscheiden können. Wodurch Lambert speciell zu seinem Emanationsgesetze geführt worden ist, lässt sich nicht mit Sicherheit angeben, soviel aber steht fest, dass er von der Tragweite desselben für die ganze Photometrie überzeugt gewesen ist und dass er Alles ver-

1) Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae (1760). Deutsche Ausgabe von Anding, Leipzig, 1892.

sucht hat, um auf experimentellem und theoretischem Wege die Richtigkeit seines Satzes zu beweisen. Leider verfügte Lambert über durchaus ungenügende Hülfsmittel, und die Versuche, durch Beobachtungen sein Gesetz plausibel zu machen, müssen als durchaus unzureichend bezeichnet werden. An selbstleuchtenden Substanzen, also etwa glühenden Platten oder Kugeln, sind von ihm überhaupt keine Experimente angestellt worden. Auch der Lambert'sche Versuch eines theoretischen Beweises ist wegen der willkürlichen Annahmen, die dabei zu Grunde gelegt sind, als verfehlt zu betrachten, und dasselbe gilt in noch viel stärkerem Grade von den Beweisen, die später Beer[1]) und Rheinauer[2]) zur Stütze des Lambert'schen Gesetzes hinzugefügt haben, und die, wie schon Zöllner[3]) dargethan hat, nur auf einem Kreisschlusse beruhen. Zöllner gebührt ohne Zweifel das Verdienst, zuerst auf die Unhaltbarkeit der bisherigen Versuche, das Lambert'sche Gesetz zu beweisen, aufmerksam gemacht und gleichzeitig den Weg gezeigt zu haben, auf dem man allein zu klaren Anschauungen gelangen konnte. An der Richtigkeit des Gesetzes selbst hielt Zöllner von vornherein fest; er glaubte diese zur Genüge durch alle experimentellen Versuche ausser Zweifel gestellt und er versuchte nur, auf plausiblere Weise als bisher auch theoretisch den Satz zu stützen. Er verwies auf die mit dem Lichte nahe verwandten Erscheinungen der strahlenden Wärme, machte darauf aufmerksam, dass auch bei der Wärmeausstrahlung die Intensität von dem Cosinus des Emanationswinkels abhängt und dass bereits Fourier eine vollkommen ausreichende Erklärung dafür angegeben hatte, indem er annahm, dass nicht nur die an der Oberfläche eines Körpers gelegenen Moleküle, sondern auch die unter der Oberfläche befindlichen als Sitz der Wärmeausstrahlung zu betrachten seien. Indem Zöllner diese Fourier'sche Hypothese auch auf die Lichtausstrahlung selbstleuchtender Oberflächen übertrug, gelangte er zu einem einwurfsfreien Beweise des Lambert'schen Emanationsgesetzes. Damit hat Zöllner einen wichtigen Schritt gethan, dessen Bedeutung für die Entwicklung der theoretischen Photometrie noch viel grösser gewesen wäre, wenn er die weiteren Consequenzen daraus gezogen hätte und nicht auf der ersten Stufe stehen geblieben wäre. In dem Irrthume befangen, dass das Lambert'sche Gesetz durch alle Beobachtungen unanfechtbar nachgewiesen sei, so auch beispielsweise für die Beobachtungen der Planeten durch die photometrischen Messungen Seidel's, glaubte er auch bei zerstreut reflectirenden Substanzen in der

1) Beer, Grundriss des photometrischen Calcüles. Braunschweig, 1854. p. 6.
2) Rheinauer, Grundzüge der Photometrie. Halle, 1862. p. 2.
3) Zöllner, Photometrische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit der Himmelskörper. Leipzig, 1865. p. 12.

weiteren Verfolgung der Fourier'schen Vorstellungen eine Ableitung des Lambert'schen Gesetzes zu finden. Er hat aber dabei einen sehr wichtigen Umstand übersehen, dass nämlich bei den zerstreut reflectirenden Substanzen sowohl beim Eindringen des Lichtes bis zu einer gewissen Tiefe als beim Ausstrahlen eine Absorption stattfindet, welche die Lichterscheinungen wesentlich modificirt. Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen, dass die Berücksichtigung dieser Umstände zu einem wesentlich anderen Gesetze als dem Lambert'schen führt. Soviel hier nur in Kürze über Zöllner's Stellung zum Lambert'schen Emanationsgesetze.

Wir kehren nach dieser Abschweifung zu den selbstleuchtenden Oberflächen zurück und wollen zunächst den strengen Beweis angeben, den zuerst Lommel für das Lambert'sche Emanationsgesetz auf Grund der Fourier'schen Anschauungsweise aufgestellt hat. Dieser Beweis findet sich ganz versteckt in einer Abhandlung Lommel's[1]) über das Fluorescenzlicht, in welcher ausserordentlich wichtige Bemerkungen über die Grundsätze der Photometrie enthalten sind. Es sei (Fig. 5) MN die Oberfläche eines leuchtenden Körpers, $AB = d\varphi$ ein Oberflächenelement. In der Richtung AP, welche mit der Normale AC den Winkel ε bildet, mögen die Strahlen (unter einander parallel) aus dem Körper austreten; dann werden nach der Fourier'schen Anschauung alle diejenigen Volumelemente an der Lichtausstrahlung sich betheiligen, welche in dem schiefen Cylinder enthalten sind, der AB zur Basis hat und dessen Axe der Richtung AP parallel ist. Die Tiefe, aus welcher noch Licht hervordringen kann, hängt von dem Grade der Durchsichtigkeit des leuchtenden Körpers ab. Bei den sogenannten undurchsichtigen Körpern dringt das Licht nur aus ganz geringer Tiefe unter der Oberfläche hervor, sie werden erst in unendlich dünnem Zustande durchsichtig, während z. B. glühende Gasmassen das Licht aus ziemlich tiefen Schichten hervorkommen lassen. Wir wollen uns hier zunächst nur mit Körpern der ersten Gattung beschäftigen und ein kleines Volumelement $mn\mu\nu$ in Betracht ziehen, welches von dem Oberflächenelemente AB um die Strecke $Am = r$ entfernt ist. Die Leucht-

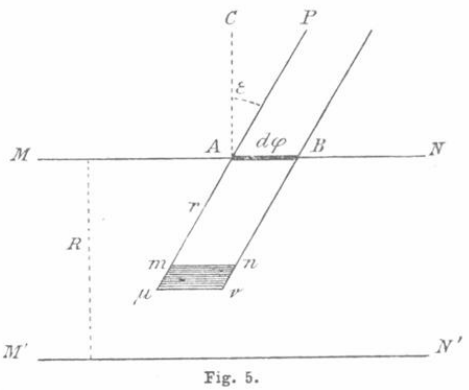

Fig. 5.

1) Wiedem. Annal. Bd. 10, p. 449.

kraft des Körpers, den wir als gleichmässig leuchtend annehmen wollen, sei J, d. h. die Volumeinheit möge in der Entfernung 1 auf die Flächeneinheit senkrecht die Lichtmenge J ausstrahlen, vorausgesetzt, dass keine Absorption stattfindet. Das Volumelement $mn\mu\nu$, dessen Inhalt $= d\varphi\, dr \cos\varepsilon$ ist, würde also ohne Absorption die Lichtquantität

$$q = J\, d\varphi\, dr \cos\varepsilon$$

aussenden. Bezeichnen wir nun die Änderung, welche q auf einem sehr kleinen Wege dr erleidet, mit dq, so ist klar, dass dq negativ sein muss, weil eine Lichtabnahme stattfindet, ferner dass es proportional dem zurückgelegten Wege dr, ebenso proportional der ursprünglichen Energie q sein muss, und endlich, dass es infolge der dem Körper eigenthümlichen Absorption mit einem gewissen Absorptionscoefficienten zu multipliciren ist. Man hat also:

$$dq = -kq\, dr, \quad \text{oder:} \quad \frac{dq}{q} = -k\, dr.$$

Durch Integration über die ganze Strecke r findet man:

$$\log\frac{q_0}{q} = -kr, \quad \text{oder:} \quad \frac{q_0}{q} = e^{-kr},$$

wo q_0 die Lichtquantität ist, welche anstatt der ursprünglichen Quantität q übrig geblieben ist, wenn das Licht des Volumelementes $mn\mu\nu$ den Körper verlässt. Durch Substitution von q hat man:

$$q_0 = J\, d\varphi\, dr \cos\varepsilon\, e^{-kr}.$$

Sämmtliche in dem schiefen Cylinder enthaltenen Volumelemente senden also die Lichtmenge aus:

$$Q = J\, d\varphi \cos\varepsilon \int_0^{\varrho} dr\, e^{-kr},$$

wo die Integration von $r = 0$ an bis zu einem Werthe $r = \varrho$ auszuführen ist, für welchen überhaupt kein Licht mehr aus dem Körper hervordringen kann, für welchen also auch $e^{-k\varrho}$ verschwindend klein sein muss. Die Ausführung der Integration liefert:

$$Q = J\, d\varphi \cos\varepsilon \frac{1}{k}\{1 - e^{-k\varrho}\},$$

und da nach dem eben Gesagten $e^{-k\varrho}$ gleich Null sein soll, so wird:

$$Q = \frac{1}{k} J\, d\varphi \cos\varepsilon.$$

Bei senkrechter Ausstrahlung ($\varepsilon = 0$) würde man haben:

$$Q_0 = \frac{1}{k} J \, d\varphi ;$$

mithin:

$$\frac{Q}{Q_0} = \cos \varepsilon .$$

Es ist hiermit der Lambert'sche Satz vom Cosinus des Emanationswinkels ganz streng bewiesen, allerdings nur für selbstleuchtende Körper und auch bei diesen nur für sogenannte undurchsichtige Substanzen. Würde der durch die Flächen MN und $M'N'$ begrenzte Körper ein durchsichtig glühender sein, so müsste man, um die gesammte von allen Volumelementen des schiefen Cylinders durch $d\varphi$ ausgesandte Lichtmenge zu erhalten, die Integration von $r = 0$ bis $r = \frac{R}{\cos \varepsilon}$ ausführen, wenn R die Dicke des betrachteten Körpers ist. Man erhielte dann:

$$Q = \frac{1}{k} J \, d\varphi \cos \varepsilon \left\{ 1 - e^{-k \frac{R}{\cos \varepsilon}} \right\},$$

ebenso:

$$Q_0 = \frac{1}{k} J \, d\varphi \, \{ 1 - e^{-kR} \},$$

und mithin:

$$\frac{Q}{Q_0} = \cos \varepsilon \, \frac{1 - e^{-k \frac{R}{\cos \varepsilon}}}{1 - e^{-kR}} .$$

Für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 90^\circ$ wird dieser Ausdruck, ebenso wie bei dem einfachen Lambert'schen Emanationsgesetze, gleich 1 resp. gleich 0, und im Allgemeinen nimmt der Werth mit wachsendem ε beständig ab, bleibt jedoch stets grösser als $\cos \varepsilon$. Erst für eine unendlich dicke Schicht geht der Ausdruck in das reine Emanationsgesetz über.

Wir wollen diesen Gegenstand, so interessant er auch namentlich im Hinblick auf das Verhalten aller leuchtenden Flammen und aller glühenden Gasmassen ist, hier nicht weiter verfolgen, sondern kehren zu den sogenannten undurchsichtigen selbstleuchtenden Flächen zurück, für welche das einfache Lambert'sche Emanationsgesetz als gültig nachgewiesen worden ist, um noch einige allgemeine Betrachtungen über die gegenseitige Beleuchtung von Flächen anzuknüpfen und einige specielle Aufgaben zu behandeln, die für die Astrophotometrie von Bedeutung sein können. Beiläufig verdient noch erwähnt zu werden, dass auch experimentell die Anwendbarkeit des Emanationsgesetzes auf die Lichtausstrahlung glühender Metallstreifen, also undurchsichtiger selbstleuchtender Körper, in neuerer Zeit durch Versuche von Möller[1]) in Strassburg ausser Zweifel gestellt worden ist.

1) Elektrotechnische Zeitschrift. Bd. 5, p. 370 und 405.

Es sei f (Fig. 6) eine selbstleuchtende Fläche und F eine andere davon beleuchtete beliebige Fläche; df sei ein Oberflächenelement der ersten, dF ein Element der zweiten Fläche. Ist die Fläche f gleichmässig leuchtend, ist also die Leuchtkraft J in allen Punkten die gleiche, so ist nach den bisherigen Erörterungen die Lichtquantität dL, welche von dem Element df auf das Element dF übergeht, ausgedrückt durch:

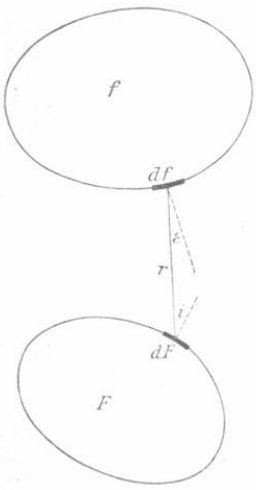

Fig. 6.

$$dL = J\,df\,dF\cos i\cos\varepsilon\,\frac{1}{r^2}\cdot$$

Um die Lichtmenge zu haben, die von dem ganzen Körper f auf das Element dF gelangt, hat man zu summiren über sämmtliche Theilchen von f, die von dF aus frei sichtbar sind, und um endlich die ganze Lichtquantität zu haben, die von f auf F gelangt, hat man eine zweite Summation über alle Theilchen dF zu bilden, auf die von f aus überhaupt Licht gelangen kann. Man hat also für die Lichtmenge L, welche von f auf F gelangt, den Ausdruck:

$$L = J\sum\sum\left(df\,dF\cos i\cos\varepsilon\,\frac{1}{r^2}\right)\cdot$$

Denkt man sich nun umgekehrt F als gleichmässig leuchtende Fläche mit der Leuchtkraft J', so würde entsprechend die Lichtmenge L', welche von F auf f übergeht, gegeben sein durch den Ausdruck:

$$L' = J'\sum\sum\left(dF\,df\cos i\cos\varepsilon\,\frac{1}{r^2}\right),$$

und da die Doppelsummen einander gleich sind, so erhält man unmittelbar: $\frac{L}{L'} = \frac{J}{J'}$, oder den wichtigen Satz: »Die Lichtmengen, welche zwei gleichmässig glühende Körper einander zusenden, verhalten sich wie die Intensitäten des Glühens der beiden Körper«, oder: »Die Lichtquantitäten, welche zwei leuchtende Flächen austauschen, sind den Leuchtkräften proportional.«

Auch hier wird die Anschauungsweise durch Einführung der scheinbaren Grösse wesentlich vereinfacht. Es stelle (Fig. 7) F eine selbstleuchtende Fläche dar, welche das kleine Element df beleuchtet. Von df als Spitze sei der umhüllende Kegel an die Fläche F gelegt, welcher dieselbe längs einer Curve berührt, jenseits deren kein Punkt der Fläche

Licht nach df schicken kann. Construirt man um df als Centrum eine Kugel mit dem Radius 1, so wird aus dieser durch den Kegel ein Stück herausgeschnitten, welches man die scheinbare Grösse der leuchtenden Fläche F nennt. Auf irgend einem Radius liegen die Elemente $d\omega$ und dF. Nach den bisherigen Sätzen ist die Lichtmenge dL, welche von dF auf df übergeht, gegeben durch den Ausdruck:

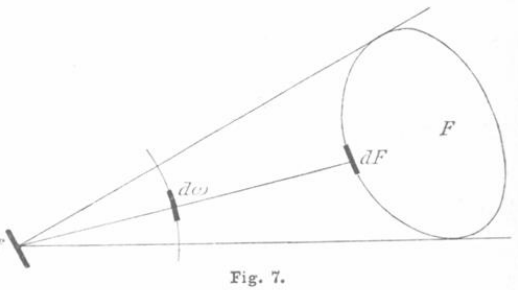

Fig. 7.

$$dL = J\,dF\,df\cos i\cos\varepsilon\,\frac{1}{r^2}\,.$$

Wäre das Element $d\omega$ mit derselben Leuchtkraft J wie die Fläche F selbstleuchtend, so würde es nach df die Lichtmenge $dL' = J\,d\omega\,df\cos i$ senden, da ε in diesem Falle gleich Null wäre. Nun sei aber $d\omega = \frac{dF\cos\varepsilon}{r^2}$; folglich wird $dL = dL'$, und es gelangt also von $d\omega$ dieselbe Lichtmenge auf df wie von dF. Dasselbe gilt von den entsprechenden Elementen der Fläche F und der Hülfskugel, und man kann daher die gesammte Lichtmenge, welche von einer beliebigen Fläche F mit der gleichmässigen Leuchtkraft J auf ein Element df übergeht, ersetzen durch die von der scheinbaren Grösse der Fläche ausgehende Lichtquantität, vorausgesetzt, dass auch die scheinbare Figur überall die Leuchtkraft J besitzt; ja man kann diese Substitution auch dann noch einführen, wenn die leuchtende Fläche nicht gleichmässig leuchtend ist, vorausgesetzt nur, dass man in jedem Punkte der Hülfskugel dieselbe Intensität annimmt, welche in dem entsprechenden Punkte der Fläche herrscht.

Dieser Hülfssatz kann nun dazu benutzt werden, um eine ganze Reihe von Aufgaben zu lösen, welche die Beleuchtung eines horizontalen Elementes durch einen irgendwie gelegenen selbstleuchtenden Kreis oder eine Ellipse, durch ein sphärisches Dreieck, durch eine selbstleuchtende Kugel oder ein Ellipsoid u. s. w. behandeln. Anding hat in seiner deutschen Ausgabe von Lamberts »Photometria« in der Anmerkung zu § 140 darauf aufmerksam gemacht, dass bei allen leuchtenden Flächen, die einen Mittelpunkt haben, die Beleuchtungsaufgabe sich darauf reducirt, die Lichtquantität zu ermitteln, welche die betreffende Fläche auf das horizontale Element sendet, wenn der Mittelpunkt senkrecht über demselben, also im Zenith, liegt.

In der That sei (Fig. 8) F irgend eine Fläche mit Mittelpunkt, dF ein Oberflächenelement, C der Mittelpunkt, df das beleuchtete horizontale Element. Auf der Hülfskugel mit dem Radius 1 um df als Centrum sei $d\varphi$ die scheinbare Grösse von dF, Z sei das Zenith und M die Projection des Mittelpunktes; dann ist in dem sphärischen Dreiecke $ZMd\varphi$ die Seite $Zd\varphi$ gleich dem Incidenzwinkel i, die Seite ZM ist die Zenithdistanz z des Mittelpunktes C; die dritte Seite sei mit v bezeichnet, ferner heisse ϑ der Winkel zwischen v und z. Dann hat man:

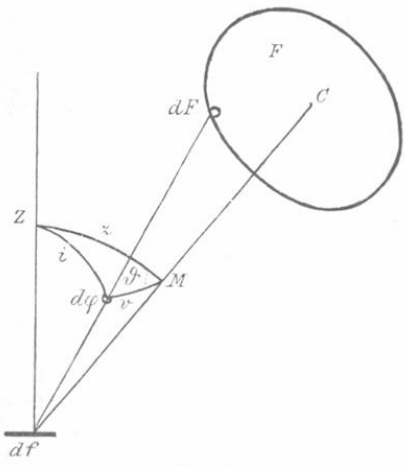

Fig. 8.

$$\cos i = \cos z \cos v + \sin z \sin v \cos \vartheta .$$

Die Lichtquantität, welche von dF nach df gelangt, ist nach dem obigen Hülfssatze ausgedrückt durch:

$$dL' = J\, df\, d\varphi\, \cos i ,$$

oder, nach Substitution von cos i, durch:

$$dL' = J\, df \cos z \cos v\, d\varphi + J\, df \sin z \sin v \cos \vartheta\, d\varphi .$$

Nun giebt es bei einer Mittelpunktsfläche zu jedem Elemente dF ein zweites, für welches v denselben Werth hat, für welches aber ϑ in den Werth $\pi + \vartheta$ übergeht. Bei der Integration über alle Elemente dF fällt also das zweite Glied fort, und man erhält für die gesammte Lichtmenge den Werth:

$$L' = J\, df \int \cos z \cos v\, d\varphi ,$$

und da cos z constant ist, so wird:

$$L' = J\, df \cos z \int \cos v\, d\varphi .$$

Es folgt also der wichtige Satz, dass die Lichtmenge, welche eine Mittelpunktsfläche auf ein horizontales Element wirft, stets proportional dem Cosinus der Zenithdistanz des Mittelpunktes ist. Der Satz gilt sogar noch dann, wenn die eigenthümliche Leuchtkraft J nicht überall die gleiche ist, wenn sie nur symmetrisch zum Mittelpunkte ist; denn dann haben die Oberflächenelemente v, ϑ und v, $\pi + \vartheta$ dieselbe Intensität und das zweite Glied verschwindet bei der Integration ebenfalls. Die gesammte Lichtmenge wird dann, da J nicht constant, sondern irgend eine Function von v und ϑ ist, gegeben durch:

$$L' = df \cos z \int J \cos v\, d\varphi .$$

Aus dem Anding'schen Satze folgt ohne Weiteres, dass alle Beleuchtungsaufgaben bei Mittelpunktsflächen sich auf den Fall $\varkappa = 0$ reduciren, und dass es also bei jeder speciellen Aufgabe auf die Lösung des Integrales: $\int J \cos i \, d\varphi$ ankommt. Denkt man sich nun an die scheinbare Fläche im Zenith eine tangirende Ebene gelegt, so ist $\cos i \, d\varphi$ nichts Anderes als die Projection von $d\varphi$ auf diese Ebene. Ist die leuchtende Fläche z. B. eine Kugel, deren scheinbarer Radius $= s$ ist, so wird die Projection der scheinbaren Fläche auf die erwähnte Tangentialebene ein Kreis mit dem Radius $\sin s$, und die Lichtmenge, welche von der leuchtenden Kugel im Zenith auf das horizontale Element df übergeht, wird nach dem Vorangehenden:

$$L' = J \, df \, \pi \sin^2 s .$$

Befindet sich die Kugel nicht im Zenith, so muss man noch mit dem Cosinus der Zenithdistanz des Mittelpunktes multipliciren, um die Lichtmenge zu finden.

Man sieht, dass durch den Anding'schen Hülfssatz die Lösung von Aufgaben wesentlich erleichtert wird, die bei Lambert und in dem erwähnten Beer'schen Lehrbuche des photometrischen Calcüls einen nicht unerheblichen Aufwand von Rechnungen und Entwicklungen erfordern. So lässt sich sehr einfach die Beleuchtung durch eine sphärische Ellipse bestimmen. Es genügt auch hier wieder der Fall, dass der Mittelpunkt der Ellipse im Zenith liegt. Sind dann s_1 und s_2 die Winkel, unter denen die beiden Halbaxen der Ellipse, von df aus gesehen, erscheinen, so wird die Projection der scheinbaren Fläche auf die Tangentialebene ebenfalls eine Ellipse mit den Halbaxen $\sin s_1$ und $\sin s_2$, und der Inhalt der Projection wird daher:

$$\pi \sin s_1 \sin s_2 .$$

Die von der selbstleuchtenden sphärischen Ellipse auf df gesandte Lichtmenge ist daher:

$$L' = J \, \pi \, df \sin s_1 \sin s_2 ,$$

oder wenn der Mittelpunkt der Ellipse die Zenithdistanz $\varkappa$ hat:

$$L' = J \, \pi \, df \sin s_1 \sin s_2 \cos \varkappa .$$

Ebenso leicht lassen sich die Fälle behandeln, wo die leuchtende Fläche ein sphärisches Dreieck oder ein sphärisches Polygon, eine sichelförmige Figur wie bei den Phasen einer Sonnenfinsterniss u. s. w. ist, ebenso die Fälle, wo die beleuchtete Fläche nicht ein kleines horizontales Element ist, sondern ebenfalls eine beliebig gestaltete Fläche repräsentirt. Eine ausführlichere Behandlung dieser Aufgaben würde den Rahmen dieses

Buches wesentlich überschreiten, und es muss daher auf die Lehrbücher von Lambert und Beer verwiesen werden.

7. Zerstreut reflectirende Substanzen. Die Bouguer'sche Reflexionstheorie. Das Lommel-Seeliger'sche Beleuchtungsgesetz.

Die Berechnung der Lichtquantität, welche von einem leuchtenden Punkte oder einer leuchtenden Fläche auf eine andere Fläche objectiv gesandt wird, hat, wie schon mehrfach im Früheren betont wurde, im Grossen und Ganzen nur ein theoretisches Interesse, da diese Lichtmenge nicht von unserem Auge direct wahrgenommen wird und auch nur unter bestimmten Voraussetzungen und nur in gewissem Betrage auf andere Weise (durch Photographie, durch elektrische Wirkungen etc.) gemessen werden kann. Für unser Auge wird diese Erleuchtung erst dadurch wahrnehmbar, dass die auffallende Lichtmenge von der beleuchteten Fläche wieder ausgestrahlt wird, und was in unserem Sehorgan zum Bewusstsein gelangt, ist erst die durch Zurückstrahlung mehr oder weniger modificirte ursprüngliche objective Lichtmenge. Wieviel von dem auffallenden Lichte zurückgeworfen wird und nach welchen Gesetzen, hängt einzig und allein von der physischen Beschaffenheit der beleuchteten Substanz ab, und es wird wohl schwerlich möglich sein, ein allgemein gültiges Beleuchtungsgesetz aufzustellen. Ist der beleuchtete Körper optisch vollkommen durchsichtig, so ist klar, dass alles auffallende Licht hindurchgelassen wird und dass überhaupt nichts mehr reflectirt werden kann; einen solchen absolut durchsichtigen Körper würde man seiner äusseren Begrenzung nach überhaupt gar nicht wahrnehmen können. In der Natur giebt es solche absolut durchsichtigen Körper nicht. Je weniger durchsichtig ein Körper ist, desto mehr Licht muss er reflectiren, wenn der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit haben soll. Nach den Fresnel'schen Untersuchungen ist die Lichtquantität L, welche von einer Oberfläche reflectirt wird, wenn die einfallende Lichtmenge L_0 unter dem Incidenzwinkel i auffällt und unter dem Brechungswinkel r eindringt, gegeben durch die Gleichung:

$$L = \tfrac{1}{2} L_0 \left\{ \frac{\operatorname{tang}^2 (i-r)}{\operatorname{tang}^2 (i+r)} + \frac{\sin^2 (i-r)}{\sin^2 (i+r)} \right\},$$

während die in den Körper eindringende Lichtmenge $D = L_0 - L$ sein muss.

Körper, deren Oberfläche nicht so glatt und gleichmässig ist, dass nach allen Richtungen eine regelmässige Reflexion nach den Fresnel'schen Gesetzen stattfinden kann, nennt man zerstreut reflectirende und nimmt

an, dass bei ihnen das auffallende Licht unregelmässig nach allen Richtungen zurückgestrahlt wird. Aber ebenso wenig, wie es vollkommen spiegelnde Substanzen giebt, dürfte es auch vollkommen diffus reflectirende geben, und selbst sehr rauhe Oberflächen zeigen bei grossen Einfalls- und Reflexionswinkeln bekanntlich vollkommene Spiegelbilder. Die zerstreute Reflexion wird wesentlich von der Beschaffenheit der Substanz abhängen, und zwar voraussichtlich in erster Linie von der Absorption, welche das Licht in der Substanz selbst erleidet. Denn dass eine solche Absorption in der That stattfinden muss, folgt schon allein aus dem Vorhandensein einer specifischen Körperfarbe. Seeliger[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, wie instructiv in dieser Beziehung die Betrachtung pulverisirter Farbstoffe ist. Je feiner das Pulver ist, desto weniger intensiv tritt seine Färbung hervor, desto weisslicher erscheint die Farbe, weil das Licht in diesem Falle nur von den allerobersten Schichten zurückgeworfen wird, während die Färbung bei gröberem Pulver, wo das Licht infolge der grossen Zwischenräume tiefer in den Körper eindringen kann, entschieden deutlicher zu bemerken ist.

Das Studium der Lichtausstrahlung zerstreut reflectirender Substanzen gehört zu den schwierigsten Capiteln der Photometrie und ist auch für die Astronomie von der grössten Bedeutung, weil die Planeten und Monde zweifellos das Sonnenlicht zum grössten Theile diffus reflectiren. Lambert hat sich die Lösung des Problems allerdings sehr leicht gemacht, indem er einfach annahm, dass die beleuchteten Elemente des Körpers ihrerseits wieder als selbstleuchtend betrachtet werden dürften und dass daher dasselbe Emanationsgesetz gelten müsse, wie für selbstleuchtende Körper. Man denke sich ein zerstreut reflectirendes Flächenelement ds von einer Lichtquelle (einem leuchtenden Punkte oder einer leuchtenden Fläche) unter dem Incidenzwinkel i beleuchtet. Ist dann L die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit senkrecht auffällt, so erhält ds nach dem Früheren die Lichtquantität $L\,ds\cos i$. Von dieser Lichtmenge wird nun das Element nach jeder Richtung einen gewissen Bruchtheil reflectiren, und es sei die in senkrechter Richtung ausgestrahlte Lichtmenge durch $c\,L\,ds\cos i$ ausgedrückt. Wenn sich nun das diffus reflectirende Element, wie Lambert annimmt, wie ein selbstleuchtendes verhalten soll, so müssen sich nach dem Emanationsgesetze die in verschiedenen Richtungen ausgestrahlten Lichtmengen wie die Cosinus der Emanationswinkel verhalten, und es ist daher die unter dem Winkel ε ausgestrahlte Lichtmenge

$$dq = c\,L\cos i\,ds\cos\varepsilon.$$

1) Sitzungsb. der math.-phys. Classe der K. Bayer. Akad. der Wiss. Bd. 18 (1888), p. 228.

Denkt man sich nun um ds eine Halbkugel mit dem Radius 1 construirt, so wird einem Elemente $d\omega$ derselben die Lichtquantität

$$dQ = dq\, d\omega = c\, L\, ds \cos i \cos\varepsilon\, d\omega$$

zugesandt, und die ganze Halbkugel erhält daher, da sich das Element $d\omega$, wie nebenstehende Figur 9 zeigt, durch $d\varepsilon \sin\varepsilon\, dv$ ausdrücken lässt, die Lichtmenge:

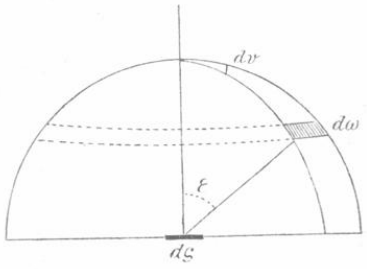

Fig. 9.

$$Q = c\, L\, ds \cos i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varepsilon \sin\varepsilon\, d\varepsilon \int_0^{2\pi} dv,$$

oder:

$$Q = c\, L\, ds \cos i\, \pi\,.$$

Es wird aber diese ganze ausgestrahlte Lichtmenge auch irgend ein Bruchtheil der von dem Element empfangenen Lichtmenge $L\, ds \cos i$ sein, d. h. man wird haben:

$$Q = L\, ds \cos i\, A\,,$$

wo der Factor A, welcher angiebt, wieviel von dem einfallenden Lichte auf eine ganze Halbkugel mit dem Radius 1 ausgestrahlt wird, kleiner als 1 ist und von Lambert die Albedo der Substanz genannt worden ist. Aus den beiden Gleichungen für Q folgt: $c = \frac{A}{\pi}$, und man hat daher das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz für zerstreut reflectirende Substanzen in der bekannten Form:

$$dq = \frac{A}{\pi} L\, ds \cos i \cos\varepsilon\,,$$

oder auch, wenn man eine einzige Constante Γ_1 einführt:

$$dq = \Gamma_1\, ds \cos i \cos\varepsilon\,.$$

Wie man leicht sieht, hat das Lambert'sche Gesetz keinerlei theoretische Berechtigung. Lambert glaubte dasselbe durch Versuche an verschiedenen Substanzen bewiesen zu haben, indessen sind diese Versuche so ungenau und so wenig zahlreich, dass sie kaum etwas zu Gunsten des Lambert'schen Gesetzes entscheiden können. Neuere Versuchsreihen an einer grossen Zahl irdischer zerstreut reflectirender Substanzen von Seeliger[1]) und von Messerschmitt[2]) haben zweifellos festgestellt, dass das Lambert'sche

1) Sitzungsb. der math.-phys. Classe der K. Bayer. Akad. der Wiss. Bd. 18 201.

2) Messerschmitt, Über diffuse Reflexion. Diss. inaug. Leipzig, 1888.

Gesetz nur ganz ausnahmsweise als Annäherung an die Wahrheit betrachtet werden kann, dass die Lichtmenge vom Azimuth abhängig ist etc., und dass es daher für diffus reflectirende Körper aus der Reihe der photometrischen Grundgesetze gestrichen werden muss. Der Umstand, dass dieses Gesetz so lange eine unumschränkte Herrschaft ausgeübt hat, erklärt sich wohl am besten durch die überaus einfache und elegante Form, in welcher es erscheint, und aus dem Mangel an zuverlässigen Beobachtungen, welche gegen dasselbe stimmen konnten. Für die Astrophotometrie schien es zwar durch die Zöllner'schen Messungen am Monde und am Planeten Mars nicht bewiesen, dafür ergaben aber die Seidel'schen Beobachtungen an der Venus eine vollkommene Bestätigung, und unter geeigneten Annahmen über die Oberflächenbeschaffenheiten dieser Himmelskörper liessen sich diese scheinbaren Widersprüche sehr gut auch mit dem Lambert'schen Gesetze vereinigen. Näheres darüber später. Zöllner hat zwar, wie wir gesehen haben, bei den selbstleuchtenden Substanzen den Weg zu einem strengen Beweise des Lambert'schen Emanationsgesetzes gewiesen, indem er die Fourier'sche Anschauungsweise von dem Hervordringen der Wärmestrahlen aus dem Inneren der Körper auch auf die Lichtstrahlen in Anwendung brachte, er hat aber, indem er versuchte, diese Überlegungen bei der Behandlung der nicht selbstleuchtenden Substanzen einzuführen, den Fehler gemacht, nur eine Lichtabsorption bei der Ausstrahlung der Raumelemente aus dem Inneren anzunehmen, nicht aber auch entsprechend eine Lichtschwächung schon bei dem Eindringen des Lichtes in das Innere. Dieser Umstand hat ihn wieder auf das Lambert'sche Gesetz zurückgeführt und ihn verhindert, schon vor 30 Jahren diejenigen Fortschritte in der theoretischen Photometrie anzubahnen, welche wir den neueren Forschungen von Lommel und Seeliger verdanken.

Nicht ohne Interesse ist die Vorstellung, die sich Bouguer von der physikalischen Beschaffenheit der diffus reflectirenden Substanzen gemacht hat. Er nahm an, dass die Oberfläche eines solchen Körpers wegen seiner Rauhheit keine vollkommen geometrische Fläche sein könne, sondern dass sie aus einer zahllosen Menge von kleinen spiegelnden Elementen bestünde, die unter allen möglichen Winkeln gegen die Oberfläche des Körpers geneigt wären und das Licht nach den Gesetzen der Spiegelung zurückwürfen. Bouguer hat diese Anschauungsweise in seinem »Traité d'optique« mit grosser Consequenz durchzuführen versucht, es ist ihm aber nicht gelungen, ein allgemein gültiges Beleuchtungsgesetz für alle zerstreut reflectirenden Substanzen aufzustellen. Seine Theorie gilt heute als veraltet, es verdient aber vielleicht hervorgehoben zu werden, dass Seeliger in neuerer Zeit die Bouguer'sche Vorstellung unter gewissen Voraussetzungen etwas weiter verfolgt hat. Wir denken uns auf eine zerstreut reflectirende

Oberfläche, die im Grossen und Ganzen eine Ebene sein, aber im Speciellen aus lauter kleinen spiegelnden Elementen bestehen möge, aus grosser Entfernung Licht unter dem Incidenzwinkel i auffallend. Dasselbe möge unter dem Emanationswinkel ε wieder ausgestrahlt und von grosser Entfernung aus betrachtet werden. Dann ist klar, dass, wenn die Lichtwirkung einzig und allein in einer Spiegelung bestehen soll, nur solche Elemente dem Beobachter Licht zuschicken können, deren Normale mit der Richtung der ein- und austretenden Strahlen in einer Ebene liegt und den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen halbirt. Dieser Winkel sei x, und die Zahl der kleinen spiegelnden Elemente, die dieser Bedingung genügen und deren Ebenen unter einander natürlich parallel sein müssen, sei n. Dann wird die Lichtmenge, welche das betrachtete Flächenstück dem Beobachter zusendet, proportional der Anzahl der Elemente und ausserdem eine Function des Winkels $\frac{x}{2}$ sein, welche die Abhängigkeit der Intensität des gespiegelten Lichtstrahles von dem Einfallswinkel ausdrückt. Man wird also haben:

$$q = k\, n\, f\left(\frac{x}{2}\right), \tag{1}$$

wo k eine Constante ist.

Man denke sich nun um einen Punkt der Fläche eine Kugel beschrieben, dann wäre in nebenstehender Figur 10 die Richtung des einfallenden Lichtes an der Sphäre durch den Punkt L, die Richtung des ausstrahlenden Lichtes durch R, die Normale zur Fläche durch N und die Normale zu den wirksamen Spiegelelementen durch S markirt. Die Seiten in den sphärischen Dreiecken sind $LS = SR = \frac{x}{2}$, $LN = i$ und $NR = \varepsilon$; ausserdem sei NS, d. h. der Winkel zwischen Normale der wirksamen Spiegel und Normale zur Oberfläche, mit δ bezeichnet. Der Winkel LNR oder die Azimuthdifferenz zwischen dem einfallenden und austretenden Strahle sei A, endlich sei der Winkel LSN mit y bezeichnet. Dann hat man in den drei sphärischen Dreiecken:

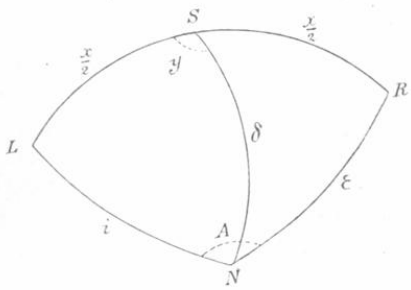

Fig. 10.

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \cos i \cos\varepsilon + \sin i \sin\varepsilon \cos A\,, \\ \cos i &= \cos\frac{x}{2}\cos\delta + \sin\frac{x}{2}\sin\delta\cos y\,, \\ \cos\varepsilon &= \cos\frac{x}{2}\cos\delta - \sin\frac{x}{2}\sin\delta\cos y\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen folgt:

$$\cos i + \cos \varepsilon = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \delta . \tag{3}$$

Nun ist aber:

$$2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos x},$$

oder, wenn man den Werth von $\cos x$ aus der ersten der Gleichungen (2) einträgt:

$$2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos i \cos \varepsilon + \sin i \sin \varepsilon \cos A} .$$

Man erhält daher aus Gleichung (3):

$$\cos \delta = \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos i \cos \varepsilon + \sin i \sin \varepsilon \cos A}} . \tag{4}$$

In den Gleichungen (2) und (4) sind die Grössen x und δ durch die Einfalls- und Emanationswinkel und die Azimuthdifferenz A ausgedrückt. Kennt man also die Form der Function f und kennt auch n, so ist die Lichtquantität durch die Grössen i, ε, A in jedem Falle gegeben. Was die Grösse n anbetrifft, also die Anzahl der in einer bestimmten Richtung spiegelnden Elemente, so hängt diese natürlich vollkommen von der Beschaffenheit der zerstreut reflectirenden Oberfläche ab; man wird aber in jedem Falle eine willkürliche Function φ annehmen können, die n abhängig erscheinen lässt von dem Winkel δ, eigentlich auch noch von dem Azimuth der Normale der kleinen Spiegel. Vernachlässigen wir letztere Abhängigkeit und setzen also willkürlich $n = \varphi(\delta)$, so wird die ausgestrahlte Lichtmenge:

$$q = k \, \varphi(\delta) \, f\left(\frac{x}{2}\right) .$$

In den beiden Fällen, wo die Azimuthdifferenz A zwischen einfallendem und austretendem Strahle 0 resp. 180° ist, werden die Beziehungen sehr einfach. Man hat nach den Gleichungen (2) und (4)

im ersten Falle: $x = i - \varepsilon$ und $\delta = \frac{1}{2}(i + \varepsilon)$,
im zweiten Falle: $x = i + \varepsilon$ und $\delta = \frac{1}{2}(i - \varepsilon)$,

und demnach ergeben sich dann die Beleuchtungsgesetze:

$$q = k \, \varphi\left(\frac{i + \varepsilon}{2}\right) f\left(\frac{i - \varepsilon}{2}\right),$$

$$q = k \, \varphi\left(\frac{i - \varepsilon}{2}\right) f\left(\frac{i + \varepsilon}{2}\right) .$$

Weiter hat Seeliger den Gegenstand nicht verfolgt, und weiter lässt er sich auch nicht verfolgen, wenn man nicht noch speciellere Annahmen über die Anordnung der spiegelnden Einzelelemente machen will. Dazu liegt aber keinerlei Anregung vor, da die ganze Bouguer'sche Vorstellungsweise etwas gekünstelt ist und inzwischen auch durch die von Lommel und Seeliger ausgebaute Absorptionstheorie vollständig verdrängt worden ist.

Wir haben bereits oben gesehen, zu welchen Resultaten bei den selbstleuchtenden Körpern die Annahme, dass das Licht aus einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche hervordringt und auf seinem Wege eine gewisse Absorption erleidet, geführt hat, und werden diese Hypothese nun auch auf die zerstreut reflectirenden Körper ausdehnen, indem wir voraussetzen, dass das auffallende Licht bis zu einer gewissen Tiefe in den Körper eindringt, eine Absorption auf seinem Wege erleidet, von den getroffenen Raumelementen des Körpers wieder zur Umkehr gezwungen wird und endlich auf seinem Rückwege eine neue Schwächung durch Absorption erleidet. Dabei ist noch die Annahme zu Grunde zu legen, dass die einzelnen Volumelemente des Körpers die Fähigkeit haben, das Licht nach allen Seiten mit der nämlichen Intensität zur Umkehr zu bringen, und dass auch die Absorption in allen Richtungen gleich stark ist. Man denke sich den beleuchteten zerstreut reflectirenden Körper als planparallele Platte, und es sei (Fig. 11) dv ein kleines Volumelement im Inneren derselben. Das Licht falle in einer Richtung, die mit der Normale zum Körper den Winkel i einschliesst, auf. Es soll die in der Richtung ε durch das Oberflächenelement ds ausgestrahlte Lichtmenge, oder was nach unseren früheren Definitionen dasselbe ist, die Dichtigkeit des Lichtes in dem unter dem Emanationswinkel ε aus dem Körper austretenden Lichtcylinder gefunden werden. Ist L die Lichtquantität, welche auf die Volumeinheit an der Oberfläche des Körpers von der Lichtquelle gesandt wird, und ist k der Absorptionscoefficient der Substanz für die eindringenden Strahlen, so gelangt zu dem Volumelemente dv infolge der auf dem Wege x im Inneren des Körpers erlittenen Absorption die Lichtquantität:

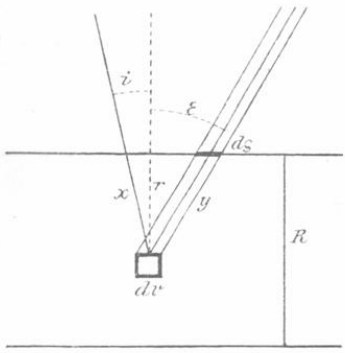

Fig. 11.

$$dq' = L\,dv\,e^{-kx}.$$

Wird nun von dem Elemente dv ein gewisser Bruchtheil dieser auffallenden Lichtmenge, den wir durch den Factor μ (das Diffusionsvermögen des

Körpers) bezeichnen wollen, nach allen Richtungen ringsum zurückgeworfen, so würde die von dv in irgend einer Richtung, also auch unter dem Emanationswinkel ε ausgestrahlte Lichtmenge ausgedrückt sein durch:

$$\frac{\mu}{4\pi} dq' .$$

Da aber auf dem Wege y wieder eine Absorption stattfindet, so wird, wenn der Absorptionscoefficient für die austretenden Strahlen mit k' bezeichnet ist, die von dv unter dem Winkel ε wirklich ausgestrahlte Lichtmenge dq gegeben sein durch die Gleichung:

$$dq = \frac{\mu}{4\pi} dq' \, e^{-k'y} = \frac{\mu}{4\pi} L \, dv \, e^{-(kx + k'y)} .$$

Dass im Allgemeinen der Absorptionscoefficient für die austretenden Strahlen etwas anders sein wird als für die einfallenden, erklärt sich dadurch, dass die Farbe des Lichtes beim Eindringen in die Substanz geändert wird. Ist das auffallende Licht z. B. weisses und der Körper ein blauer, so werden beim Eindringen die rothen, gelben und grünen Strahlen besonders stark absorbirt werden, während nach der Umkehr, wo in der Hauptsache fast nur noch blaue Strahlen übrig sind, die Lichtschwächung geringer sein wird, also $k' < k$.

In der obigen Figur ist $x = \frac{r}{\cos i}$, ferner $y = \frac{r}{\cos \varepsilon}$ und das Volumelement $dv = ds \, dr$; daher hat man:

$$dq = \frac{\mu}{4\pi} L \, ds \, e^{-\left(\frac{k}{\cos i} + \frac{k'}{\cos \varepsilon}\right) r} dr .$$

Um die gesammte Lichtquantität zu haben, welche durch das Oberflächenelement ds in das Auge gelangt, hat man von $r = 0$ bis $r = R$ zu integriren, wenn R die Dicke der Schicht vorstellt, bis zu der überhaupt noch Licht aus der Tiefe hervorkommen kann, für welche also die Grösse $e^{-\left(\frac{k}{\cos i} + \frac{k'}{\cos \varepsilon}\right) R}$ verschwindend klein sein muss.

Man hat also:

$$q = \frac{\mu}{4\pi} L \, ds \int_0^R e^{-\left(\frac{k}{\cos i} + \frac{k'}{\cos \varepsilon}\right) r} dr .$$

Setzt man

$$r \left(\frac{k}{\cos i} + \frac{k'}{\cos \varepsilon}\right) = x ,$$

so wird:

$$dx = \frac{k \cos \varepsilon + k' \cos i}{\cos i \cos \varepsilon} dr ,$$

und mithin:

$$q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{k \cos \varepsilon + k' \cos i} \int_0^R e^{-z \frac{k \cos \varepsilon + k' \cos i}{\cos i \cos \varepsilon}} dz \quad ,$$

oder:

$$q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{k \cos \varepsilon + k' \cos i} \left\{ 1 - e^{-R \frac{k \cos \varepsilon + k' \cos i}{\cos i \cos \varepsilon}} \right\} .$$

Nach unserer obigen Annahme über R ist das zweite Glied verschwindend klein, und man hat daher:

$$q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{k \cos \varepsilon + k' \cos i} .$$

Setzt man noch $\frac{k}{k'} = \lambda$ und bezeichnet $L \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{k'}$ mit Γ_2, so hat man:

$$q = \Gamma_2\, ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} .$$

Im Allgemeinen wird man $k = k'$ setzen können, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen; man hat dann $\lambda = 1$, und erhält das sogenannte Lommel-Seeliger'sche Beleuchtungsgesetz in der einfachsten Form:

$$q = \Gamma_2\, ds \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} .$$

Die scheinbare Helligkeit ergiebt sich nach den Definitionen auf Seite 28 aus der Gleichung: $h = \Gamma_2 \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$, und für den speciellen Fall $i = 0$ folgt die scheinbare Helligkeit:

$$h_0 = \Gamma_2 \frac{1}{1 + \cos \varepsilon} .$$

Für die beiden extremen Annahmen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 90^\circ$ wird:

$$h_0 = \tfrac{1}{2} \Gamma_2 \quad \text{und} \quad h_{90} = \Gamma_2 .$$

Es sollte also nach dem obigen Gesetze die scheinbare Helligkeit der senkrecht beleuchteten ebenen Fläche, wenn sie senkrecht betrachtet wird, halb so gross sein, als wenn sie ganz von der Seite angesehen wird, während nach dem Lambert'schen Emanationsgesetze die scheinbare Helligkeit immer die gleiche sein müsste.

Die obigen Endformeln gelten nur dann, wenn die einzelnen Volumelemente lediglich von aussen Licht erhalten und dasselbe nach den gemachten Voraussetzungen wieder zurückstrahlen. In Wirklichkeit wird aber, da jedes Volumelement das Centrum einer neuen Lichtbewegung werden und das empfangene Licht nach allen Richtungen ringsherum

wieder ausstrahlen soll, auch jedes Element von allen übrigen Nachbarelementen Licht empfangen, und infolge dessen wird der Ausdruck für die Gesammtquantität ziemlich complicirt werden. Lommel[1]) hat diese Anschauungsweise ganz consequent durchgeführt in einer Abhandlung über die diffuse Zurückwerfung und ist zu ausserordentlich verwickelten Ausdrücken gelangt. Beschränkt man sich jedoch nur auf die inneren Reflexe erster Ordnung, so kommt man zu einer verhältnissmässig einfachen Endformel, und es dürfte bei der Wichtigkeit, welche die neue Anschauungsweise für die Entwicklung der theoretischen Photometrie und im Speciellen auch für die Astrophotometrie zweifellos besitzt, wünschenswerth erscheinen, die Ableitung dieser Endformel hier ausführlich mitzutheilen.

Man denke sich wieder den diffus reflectirenden Körper als planparallele Platte von der Dicke R, und es seien (Fig. 12) dv und dv' zwei Volumelemente im Inneren derselben, deren senkrechte Abstände von der Oberfläche r und r' und deren gegenseitige Entfernung ϱ sein mögen. Die Lichtstrahlen sollen parallel unter dem Incidenzwinkel i auffallen und nach dem Austritte aus dem Körper unter dem Emanationswinkel ε von grosser Entfernung aus betrachtet werden. Nach dem Vorausgehenden ist die Lichtquantität, welche von aussen

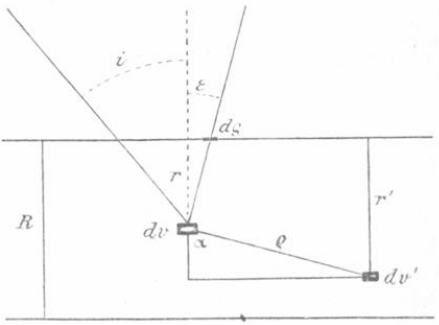

Fig. 12.

bis zu dem Elemente dv gelangt, gleich $L e^{-\frac{kr}{\cos i}} dv$, wenn k der Absorptionscoefficient der Substanz ist. Ebenso erhält das Element dv' von aussen die Lichtmenge $L e^{-\frac{kr'}{\cos i}} dv'$. Nehmen wir nun wie früher an, dass das Element dv' von dieser Lichtmenge einen gewissen Bruchtheil, der durch den Factor μ bezeichnet werden soll, nach allen Seiten ringsum zurückwirft, so wird auch dv einen Theil davon erhalten, der mit Rücksicht auf die Entfernung ϱ und die auf dieser Strecke stattfindende Absorption ausgedrückt wird durch:

$$\frac{\mu}{4\pi} \frac{L\, dv\, dv'\, e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}.$$

1) Sitzungsb. der math.-phys. Classe der K. Bayer. Akad. der Wiss. Bd. 17 (1887), p. 95.

Eine solche Lichtmenge erhält nun dv auch von allen übrigen Volumelementen des Körpers, und es ist daher die gesammte Lichtmenge l, welche auf das Element dv gelangt, gegeben durch die Gleichung:

$$l = L\, e^{-\frac{kr}{\cos i}}\, dv + \frac{\mu}{4\pi} L\, dv \sum\left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}\, dv'\right),$$

wo die Summe über sämmtliche Elemente des Körpers zu bilden ist.

Streng genommen müsste nun auch noch das Licht berücksichtigt werden, welches dv' seinerseits wieder von den andern Elementen erhält und von welchem es ebenfalls einen Procentsatz nach dv wirft; wir wollen aber von diesen Reflexen höherer Ordnung, wie schon oben gesagt, Abstand nehmen.

Von der Lichtmenge l, welche dv erhält, wird nun nach allen Richtungen ein Theil wieder ausgestrahlt, welcher durch den Reflexionscoefficienten μ bezeichnet ist. Die Quantität q, welche unter dem Richtungswinkel ε durch das Oberflächenelement ds parallel austritt, ist unter Berücksichtigung der Absorption im Inneren des Körpers gegeben durch:

$$q = \frac{\mu}{4\pi}\, l\, e^{-\frac{kr}{\cos\varepsilon}},$$

wobei der Absorptionscoefficient im Inneren durchgängig als constant angenommen ist. Nun werfen aber alle Volumelemente, welche in dem schiefen, durch ds und dv gelegten Cylinder sich befinden, Licht durch ds in das Auge. Die Gesammtquantität Q, welche ins Auge gelangt, ist daher:

$$Q = \frac{\mu}{4\pi} \int_{r=0}^{r=R} l\, e^{-\frac{kr}{\cos\varepsilon}},$$

oder wenn man den Werth von l einsetzt und für dv den Werth $ds\, dr$ einführt:

$$Q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \int_0^R dr\, e^{-kr\frac{\cos i + \cos\varepsilon}{\cos i \cos\varepsilon}} + \frac{\mu^2}{(4\pi)^2} L\, ds \int_0^R dr\, e^{-\frac{kr}{\cos\varepsilon}} \sum\left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}\, dv'\right).$$

Ist der Körper undurchsichtig, so dass das Licht nur ausserordentlich wenig in denselben einzudringen vermag, so kann die Dicke

R schon als sehr gross angesehen werden, und man kann direct $R = \infty$ setzen. Man hat dann, da das erste Glied sich leicht berechnen lässt:

$$Q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \left[\frac{\cos i \cos \varepsilon}{k(\cos i + \cos \varepsilon)} + \frac{\mu}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{kr}{\cos \varepsilon}}\, dr \sum \left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}\, dv' \right) \right].$$

Zur Berechnung der Summe im zweiten Gliede denke man sich von dv als Spitze aus einen geraden Kreiskegel mit dem halben Oeffnungswinkel α und der Seitenlänge ϱ construirt und ebenso einen zweiten Kegel mit dem halben Oeffnungswinkel $\alpha + d\alpha$ und der Seitenlänge $\varrho + d\varrho$, so werden die Grundflächen dieser beiden Kegel einen ebenen Kreisring bilden, dessen Flächeninhalt gegeben ist durch:

$$2\pi (r' - r)^2 \operatorname{tang} \alpha \sec^2 \alpha\, d\alpha\,.$$

Das Volumen eines körperlichen Ringes mit dieser Fläche als Basis und mit der Höhe dr' ist dann ausgedrückt durch:

$$2\pi (r' - r)^2 \operatorname{tang} \alpha \sec^2 \alpha\, d\alpha\, dr'.$$

Alle Elemente dieses Ringes, zu denen auch dv' gehört, erhalten von aussen die gleiche Lichtmenge, und man kann daher die obige Summe anstatt über alle einzelnen Elemente dv' sogleich über alle solchen Ringe bilden und dv' direct durch den voranstehenden Werth ersetzen. Da ferner noch $\varrho = (r' - r) \sec \alpha$ ist, so hat man:

$$\sum \left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}\, dv' \right) = 2\pi \sum \left(e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k(r'-r)\sec \alpha} \operatorname{tang} \alpha\, d\alpha\, dr' \right).$$

Setzt man noch $\sec \alpha = y$, mithin $\operatorname{tang} \alpha\, d\alpha = \dfrac{dy}{y}$, so wird:

$$\sum \left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2}\, dv' \right) = 2\pi \sum \left[e^{-\frac{kr'}{\cos i}}\, dr' \frac{e^{-k(r'-r)y}}{y}\, dy \right]$$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{kr'}{\cos i}}\, dr' \int_1^\infty \frac{e^{-k(r'-r)y}}{y}\, dy\,.$$

In Bezug auf r' sind die Integrationsgrenzen eigentlich 0 und R, da aber der Körper undurchsichtig ist, so werden sie, wie oben, 0 und ∞. In Bezug auf α sind die Grenzen, da man sich die Schicht, in welcher dv' liegt, von unbegrenzter Ausdehnung denken kann, 0 und $\dfrac{\pi}{2}$, in Bezug auf y werden sie also 1 und ∞. Setzt man endlich noch $r' - r = x$, mithin $dr' = dx$, so erhalten die Integrationsgrenzen in Bezug auf x die Werthe $-r$ und ∞, und man hat daher, wenn man

noch das Integral in Bezug auf r' in zwei Theile, von $-r$ bis 0 und von 0 bis ∞, theilt:

$$\Sigma\left(\frac{e^{-\frac{kr'}{\cos i}} e^{-k\varrho}}{\varrho^2} dr'\right) = 2\pi \int_{-r}^{0} e^{-\frac{k(x+r)}{\cos i}} dx \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-kxy}}{y} dy$$
$$+ 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{k(x+r)}{\cos i}} dx \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-kxy}}{y} dy$$
$$= 2\pi e^{-\frac{kr}{\cos i}} \int_{0}^{r} e^{\frac{kx}{\cos i}} dx J(x) + 2\pi e^{-\frac{kr}{\cos i}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{kx}{\cos i}} dx J(x),$$

wenn für den sogenannten Integrallogarithmus $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-kxy}}{y} dy$ die übliche Benennung $J(x)$ eingeführt wird.

Bezeichnet man die beiden Glieder der rechten Seite der kürzeren Schreibweise wegen mit $2\pi X$ und $2\pi Y$, so ergiebt sich nun durch Substitution in die frühere Gleichung für Q:

$$Q = \frac{\mu}{4\pi} L\, ds \left[\frac{\cos i \cos \varepsilon}{k(\cos i + \cos \varepsilon)} + \frac{\mu}{2} \int_{0}^{\infty} X e^{-\frac{kr}{\cos \varepsilon}} dr + \frac{\mu}{2} \int_{0}^{\infty} Y e^{-\frac{kr}{\cos \varepsilon}} dr\right].$$

Nun ist:

$$X = e^{-\frac{kr}{\cos i}} \int_{0}^{r} dx\, e^{\frac{kx}{\cos i}} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} e^{-kxy} = e^{-\frac{kr}{\cos i}} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \int_{0}^{r} dx\, e^{\frac{kx(1-y\cos i)}{\cos i}}$$
$$= e^{-\frac{kr}{\cos i}} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{\cos i}{k(1 - y\cos i)} \left(e^{\frac{kr(1-y\cos i)}{\cos i}} - 1\right)$$
$$= \frac{\cos i}{k} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{1 - y\cos i} \left(e^{-kry} - e^{-\frac{kr}{\cos i}}\right).$$

Mithin wird:

$$\int_{0}^{\infty} X e^{-\frac{kr}{\cos \varepsilon}} dr = \frac{\cos i}{k} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{1 - y\cos i} \int_{0}^{\infty} dr \left\{e^{-\frac{kr(1+y\cos \varepsilon)}{\cos \varepsilon}} - e^{-\frac{kr(\cos i + \cos \varepsilon)}{\cos i \cos \varepsilon}}\right\}$$
$$= \frac{\cos i}{k^2} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{1 - y\cos i} \left(\frac{\cos \varepsilon}{1 + y\cos \varepsilon} - \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}\right)$$
$$= \frac{\cos i \cos^2 \varepsilon}{k^2(\cos i + \cos \varepsilon)} \int_{1}^{\infty} \frac{dy}{y} \frac{1}{1 + y\cos \varepsilon}$$
$$= \frac{\cos i \cos^2 \varepsilon}{k^2(\cos i + \cos \varepsilon)} \log\left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon}\right).$$

Ganz in ähnlicher Weise lässt sich das letzte Glied in der obigen Gleichung für Q berechnen. Man findet:

$$\int_0^x Y e^{-\frac{kr}{\cos\varepsilon}} dr = \frac{\cos^2 i \cos\varepsilon}{k^2(\cos i + \cos\varepsilon)} \log\left(\frac{1+\cos i}{\cos i}\right).$$

Durch Substitution erhält man nun endlich:

$$Q = \Gamma_2 ds \frac{\cos i \cos\varepsilon}{\cos i + \cos\varepsilon}\left[1 + \mu' \cos\varepsilon \log\left(\frac{1+\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right) + \mu' \cos i \log\left(\frac{1+\cos i}{\cos i}\right)\right],$$

wo noch gesetzt ist:

$$\Gamma_2 = \frac{1}{4\pi k} \mu L \quad \text{und} \quad \mu' = \frac{\mu}{2k}.$$

Diese Gleichung müsste nun an Stelle des auf Seite 46 entwickelten einfachen Beleuchtungsgesetzes eingeführt werden und würde bei undurchsichtigen, diffus reflectirenden Substanzen das Lambert'sche Emanationsgesetz zu ersetzen haben. Man sieht übrigens aus dieser Form, ebenso wie aus der vereinfachten, dass bei der hier durchgeführten Anschauungsweise auch das Gesetz vom Cosinus des Incidenzwinkels verschwindet, dass vielmehr die Formel in Bezug auf Emanations- und Incidenzwinkel ganz symmetrisch ist, so dass dieselben beliebig mit einander vertauscht werden können. Es würde daraus folgen, dass die Helligkeit ganz unabhängig vom Azimuthe sein müsste, und dass es daher auch gleichgültig wäre, ob Beobachter und Lichtquelle sich auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite der Normale zur Fläche befänden. Man weiss aber, insbesondere durch Beobachtungen von Seeliger und Messerschmitt an einer grossen Reihe von diffus reflectirenden Substanzen, dass dies nicht der Fall ist, und dass im Allgemeinen die zurückgeworfene Lichtmenge am grössten ist, wenn Lichtquelle und Auge im Azimuth um 180° von einander entfernt sind. Es geht daraus hervor, dass auch das neue Lommel-Seeliger'sche Beleuchtungsgesetz keineswegs vollkommen den thatsächlichen Verhältnissen entspricht und nur in gewissen Fällen als eine Näherungsformel zu betrachten ist. Dies lässt sich auch von vornherein schon deswegen erwarten, weil die Annahmen, welche der Theorie zu Grunde gelegt wurden, sicher nicht der Wirklichkeit entsprechen und weil es schwerlich Substanzen geben wird, deren einzelne Theilchen das empfangene Licht mit gleicher Stärke nach allen Richtungen zerstreuen und in denen die Absorption nach allen Seiten gleich gross ist; auch wird man kaum Substanzen finden, bei denen die Ausstrahlung aus dem Innern ganz allein zur Geltung kommt und bei denen keinerlei directe Spiegelung zur Wirkung gelangt. Im Allgemeinen werden beide Licht-

wirkungen zu berücksichtigen sein, und da jede einzelne Substanz je nach der Oberflächenbeschaffenheit und der inneren Anordnung der Theilchen ein verschiedenes Verhalten zeigen wird, so scheint eigentlich jede Hoffnung ausgeschlossen, die Lichterscheinungen bei diffus reflectirenden Körpern durch ein einziges Beleuchtungsgesetz zu umfassen und im gegebenen Falle im Voraus zu berechnen. Immerhin verdient die Lommel-Seeliger'sche Theorie, wenn sie auch das Problem nicht vollständig zu lösen vermag, durch die Exactheit der Annahmen, auf die sie sich stützt, entschiedenen Vorzug vor der Lambert'schen Theorie, welche jeglicher festen Stütze entbehrt.

8. Begriff der Albedo.

Bereits im vorangehenden Paragraphen ist kurz von der Albedo eines Körpers die Rede gewesen. Nach der von Lambert eingeführten Definition ist darunter eine Zahl zu verstehen, welche angiebt, wie sich die von einem beleuchteten Element nach allen Richtungen diffus ausgestrahlte Lichtquantität zu der auffallenden Lichtmenge verhält. Diese Zahl muss, je nach der Beschaffenheit der verschiedenen Substanzen, verschieden sein. Bei einem absolut weissen Körper, d. h. bei einem solchen, der auf die sichtbaren Strahlen nicht die mindeste Absorption ausübt und alles empfangene Licht wieder zurückwirft, wäre die Albedo gleich 1, in allen übrigen Fällen wäre sie kleiner als 1. Lambert hat für eine Anzahl von Substanzen die Albedo bestimmt und findet dieselbe in den meisten Fällen unter 0.5. Nach Zöllner, welcher diese Versuche wiederholt hat, sind aber die Lambert'schen Werthe sämmtlich zu klein, und in der That verdienen die von Zöllner selbst nach zuverlässigeren Methoden ermittelten Albedowerthe grösseres Vertrauen als die Lambert'schen Zahlen. Neuere Untersuchungen in dieser Richtung sind, abgesehen von einigen vereinzelten Bestimmungen von Kononowitsch, nicht bekannt geworden, und man wird daher die Zöllner'schen Angaben zunächst noch acceptiren müssen. Danach ergeben sich für einige Stoffe die folgenden Werthe der Albedo nach der Lambert'schen Definition:

Frischer Schnee	0.78
Weisses Papier.	0.70
Weisser Sandstein . . .	0.24
Thonmergel.	0.16
Quarz	0.11
Feuchte Ackererde. . .	0.08

Vollkommen charakteristisch für diese Substanzen sind die angegebenen Zahlen nicht, weil die Farbe bei diesen Untersuchungen eine wichtige

Rolle spielt. Der Begriff der Albedo ist streng genommen nur gültig für homogenes Licht oder wenn einfallendes und austretendes Licht gleiche Farbe haben, was fast niemals der Fall sein wird. Rationelle Albedobestimmungen müssten bei jeder Substanz in allen möglichen Farben, etwa mit Hülfe des Spectralphotometers, vorgenommen werden, und wenn es sich, wie in der Astrophotometrie, beispielsweise um die Untersuchung einer Planetenoberfläche handelte, so könnte man, abgesehen von einer Menge anderer Umstände, nur dann auf die stoffliche Verwandtschaft mit irgend einer irdischen Substanz schliessen, wenn die Albedowerthe bei beiden untersuchten Körpern für alle Farben übereinstimmten.

Die Lambert'sche Definition der Albedo ist vollkommen correct, so lange man auch das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz gelten lässt. Denn da in diesem Falle das austretende Licht lediglich vom Emanationswinkel abhängt, so hat die Albedo für alle Werthe des Incidenzwinkels denselben Betrag. Wird aber ein anderes Beleuchtungsgesetz, z. B. das Lommel-Seeliger'sche, zu Grunde gelegt, bei welchem das austretende Licht eine Function von Incidenz- und Emanationswinkel zugleich ist, so ergiebt sich für jeden Werth des Incidenzwinkels eine andere Albedo, und die Lambert'sche Definition verliert dann ihre Bedeutung. Seeliger[1]) hat auf diesen Umstand aufmerksam gemacht und eine andere Definition der Albedo in Vorschlag gebracht, welche ganz allgemein für jedes Beleuchtungsgesetz Gültigkeit hat.

Man denke sich ein Flächenelement $d\sigma$ unter dem Incidenzwinkel i von einer Lichtquelle beleuchtet, welche auf die Flächeneinheit senkrecht die Lichtmenge L werfen möge; dann erhält $d\sigma$ die Lichtmenge $L \cos i \, d\sigma$. Wird das zunächst als unbekannt vorausgesetzte Beleuchtungsgesetz mit $f(i, \varepsilon)$ bezeichnet, so ist die Lichtmenge dq, welche das Element $d\sigma$ in der Richtung des Emanationswinkels ε auf ein in der Entfernung 1 senkrecht zu dieser Richtung gedachtes Element ds wirft, gegeben durch:

$$dq = C\, L\, d\sigma\, ds\, f(i, \varepsilon),$$

wo C für jedes Beleuchtungsgesetz $f(i, \varepsilon)$ eine andere Constante ist. Wird nun um $d\sigma$ eine Kugel mit dem Radius 1 construirt, so erhält die ganze Halbkugel die Lichtmenge:

$$q = C\, L\, d\sigma \sum [f(i, \varepsilon) ds].$$

Das Element der Kugel ds lässt sich ausdrücken durch $\sin \varepsilon \, d\varepsilon \, dv$, und man hat daher:

$$q = C\, L\, d\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varepsilon \, d\varepsilon \, f(i, \varepsilon) \int_0^{2\pi} dv = C L \, d\sigma \, 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varepsilon \, d\varepsilon \, f(i, \varepsilon).$$

1) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Bd. 16, p. 430.

Das Verhältniss A dieser ganzen auf die Halbkugel ausgestrahlten Lichtmenge zu der auf $d\sigma$ auffallenden ist mithin:

$$(1) \qquad A = \frac{q}{L \cos i \; d\sigma} = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(i, \varepsilon)}{\cos i} \sin \varepsilon \; d\varepsilon .$$

Es geht hieraus hervor, dass im Allgemeinen A noch vom Incidenzwinkel i abhängt. Nur wenn $f(i, \varepsilon) = \cos i \; \varphi(\varepsilon)$ wäre, wie es z. B. bei dem Lambert'schen Gesetze der Fall ist, würde die obige Definition der Albedo brauchbar sein, in allen anderen Fällen müsste jedesmal der Incidenzwinkel angegeben werden, für den der betreffende Albedowerth gültig sein soll. Man könnte diese Unklarheit vermeiden, wenn man unter Albedo den Werth verstehen würde, den A für senkrecht auffallendes Licht, also für $i = 0$, annimmt. Es ist aber vielleicht noch richtiger, den Seeliger'schen Vorschlag zu acceptiren und unter Albedo den Mittelwerth aller A, die sich für sämmtliche Werthe des Incidenzwinkels i ergeben, zu verstehen. Denkt man sich wieder um das Element $d\sigma$ mit dem Radius 1 eine Kugel construirt, so wäre zur Bildung des gesuchten Mittelwerthes, der mit A' bezeichnet werden soll, die Summe der A für sämmtliche Punkte der Halbkugel zu bilden und durch den Flächeninhalt dieser Halbkugel zu dividiren. Man hat also:

$$A' = \frac{1}{2\pi} \sum A .$$

Zieht man zunächst eine schmale Kugelzone in Betracht, so ist der Inhalt derselben $2\pi \sin i \; di$, die Summe aller für die Zone gültigen A ist daher $2\pi A \sin i \; di$, und die Summe aller für die ganze Halbkugel gültigen A ist mithin $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin i \; di$. Es wird also:

$$A' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin i \; di ,$$

oder nach Substitution des obigen Werthes von A:

$$(2) \qquad A' = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tang} i \; di \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(i, \varepsilon) \sin \varepsilon \; d\varepsilon .$$

Dies ist der Ausdruck für die von Seeliger eingeführte Definition der Albedo. Nimmt man für $f(i, \varepsilon)$ das Lambert'sche Gesetz an, also $f(i, \varepsilon) = \cos i \; \cos \varepsilon$, so wird nach den Formeln (1) und (2) $A = \pi C$ und

$A' = \pi C$; es stimmen also in diesem Falle, wie zu erwarten war, die Lambert'sche und Seeliger'sche Albedo überein.

Substituirt man das Lommel-Seeliger'sche Beleuchtungsgesetz in der vereinfachten auf Seite 46 angegebenen Form:

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon},$$

so erhält man aus Formel (2) den Werth:

$$A' = 2\pi C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \, di \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} d\varepsilon .$$

Zur Auflösung des zweiten Integrales setze man $\cos i + \lambda \cos \varepsilon = x$, also $\sin \varepsilon \, d\varepsilon = -\frac{dx}{\lambda}$; dann erhält man:

$$A' = \frac{2\pi C}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i \, di \left\{ \lambda + \cos i \log \cos i - \cos i \log (\lambda + \cos i) \right\},$$

oder wenn man noch $\cos i = y$ setzt:

$$A' = \frac{2\pi C}{\lambda^2} \left\{ \lambda - \int_1^0 y \, dy \log y + \int_1^0 y \, dy \log (\lambda + y) \right\}.$$

Nach Auflösung der beiden einfachen Integrale wird endlich:

$$A' = \frac{\pi C}{\lambda} \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \log (1 + \lambda) \right\}, \tag{3}$$

wo die sämmtlichen Logarithmen natürliche sind.

Die Seeliger'sche Albedo ist hiernach bei Zugrundelegung des Lommel-Seeliger'schen Beleuchtungsgesetzes in der That vom Einfallswinkel gänzlich unabhängig; sie wird nur durch die Grössen C und λ bestimmt, welche Constanten repräsentiren, die jeder Substanz eigenthümlich sind und von der Reflexions- und Absorptionsfähigkeit derselben abhängen. Sieht man, wie im Früheren, von der Farbenänderung im Innern des Körpers ab und nimmt das Absorptionsvermögen für ein- und austretende Strahlen als gleich an, setzt also $\lambda = 1$, so wird die Albedo einfach gleich πC, also nur durch den Proportionalitätsfactor des Lommel-Seeliger'schen Gesetzes bestimmt.

Capitel II.

Anwendung der photometrischen Grundprincipien auf die wichtigsten Aufgaben der Himmelsphotometrie.

1. Beleuchtung der Planeten und Monde.

Durch die Entwicklungen des vorigen Capitels sind wir in den Stand gesetzt, die Lichterscheinungen derjenigen Himmelskörper theoretisch zu studiren, welche nicht wie die Fixsterne unendlich weit von uns entfernt sind und eigenes Licht besitzen, sondern uns nur durch reflectirtes Sonnenlicht sichtbar werden. Da infolge der Bewegungen im Sonnensystem diese Himmelskörper in sehr verschiedene Entfernungen von der Erde kommen, und ausserdem die Grösse des für uns sichtbaren Theiles der erleuchteten Hälfte, namentlich bei dem Erdmonde und den unteren Planeten, sehr starken Veränderungen unterworfen ist, so schwankt die Lichtmenge, welche von ihnen zu uns gelangt, unter Umständen innerhalb weiter Grenzen, und da wir diese Schwankungen durch photometrische Messungen direct feststellen können, so bietet die Vergleichung der gefundenen Resultate mit den auf theoretischem Wege berechneten Werthen ein vortreffliches Mittel, die Zuverlässigkeit der der Berechnung zu Grunde gelegten photometrischen Grundsätze zu prüfen, freilich nur unter gewissen Voraussetzungen und Einschränkungen. Wir werden annehmen können, dass die meisten Planeten und Monde, ähnlich wie unsere Erde, eine feste oder wenigstens zum Theil feste Oberfläche besitzen, die von einer mehr oder weniger dichten atmosphärischen Hülle umgeben ist. Wir werden ferner voraussetzen müssen, dass die Planetenoberflächen aus verschiedenen Substanzen bestehen, die das auffallende Sonnenlicht in wesentlich verschiedener Stärke zurückwerfen, und dass ferner die Regelmässigkeit der Oberfläche durch mehr oder weniger grosse Erhebungen gestört wird. Wir wissen endlich, dass die Gestalt einiger dieser Himmelskörper nicht unmerklich von der Kugelgestalt abweicht. Aus diesen Gründen können wir von vornherein keine vollständige Darstellung der Beobachtungen durch irgend welche Theorie erwarten, bei der doch immer ein gewisser idealer Zustand der Oberfläche des beleuchteten Körpers vorausgesetzt werden muss. Dazu kommt noch, wie wir im vorigen Capitel bereits

auseinandergesetzt haben, dass bei den irdischen zerstreut reflectirenden Substanzen keines der bisher aufgestellten Beleuchtungsgesetze sich als vollkommen unanfechtbar erwiesen hat, und dass daher etwas Ähnliches auch bei den anderen Himmelskörpern zu erwarten ist.

Wir wollen bei den folgenden Betrachtungen die Planeten und Monde zunächst als vollkommen kugelförmig ansehen, ferner annehmen, dass jede Oberfläche überall dieselbe ihr eigenthümliche mittlere Reflexionsfähigkeit besitzt, endlich wollen wir der Berechnung der von ihnen zurückgeworfenen Lichtquantitäten drei verschiedene Beleuchtungsgesetze zu Grunde legen, indem wir zu den beiden im vorigen Capitel ausführlich behandelten Gesetzen von Lambert und Lommel-Seeliger noch ein drittes hinzufügen, welches im Vorausgehenden bereits ebenfalls kurz erwähnt worden ist, und welches auf der einfachen Vorstellung beruht, dass das von einer selbstleuchtenden oder zerstreut reflectirenden Oberfläche ausgesandte Licht gänzlich vom Emanationswinkel unabhängig und lediglich dem Cosinus des Incidenzwinkels proportional ist. Dieses Beleuchtungsgesetz, welches das Euler'sche genannt werden kann, weil es von diesem Mathematiker am Eingehendsten behandelt worden ist, verdient hier deswegen noch eine besondere Berücksichtigung, weil es bis in die neueste Zeit von vielen Astronomen zur Berechnung der Planetenhelligkeiten benutzt worden ist. Es wird sich später bei der Besprechung der neuesten Ergebnisse der Planetenforschung zeigen, dass dieses Gesetz, wie nach den bisherigen Erörterungen auch von vornherein zu erwarten ist, am Wenigsten von allen den thatsächlichen Verhältnissen entspricht. Die drei in Frage kommenden Beleuchtungsgesetze sind durch die folgenden Formeln repräsentirt, wenn dq die Lichtmenge ist, welche ein unter dem Incidenzwinkel i getroffenes Oberflächenelement ds unter dem Emanationswinkel ε wieder ausstrahlt:

$$dq_1 = \Gamma_1 \, ds \, \cos i \, \cos \varepsilon \qquad \text{(Lambert'sches Gesetz)},$$

$$dq_2 = \Gamma_2 \, ds \, \frac{\cos i \, \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} \qquad \text{(Lommel-Seeliger'sches Gesetz)},$$

$$dq_3 = \Gamma_3 \, ds \, \cos i \qquad \text{(Euler'sches Gesetz)}.$$

Die Constanten hängen von der Intensität des auffallenden Lichtes und ausserdem von der Reflexionsfähigkeit resp. von der Diffusions- und Absorptionsfähigkeit im Innern der betreffenden Substanz ab.

a. Berechnung der von den Phasen eines beleuchteten Himmelskörpers nach der Erde gesandten Lichtmenge. Bestimmung der Albedo.

Es soll nun zuerst die Aufgabe behandelt werden, diejenige Lichtmenge zu berechnen, welche eine Planetenkugel der Erde zusendet bei einer beliebigen Stellung von Sonne, Planet und Erde zu einander. Man denke sich die Mittelpunkte der drei Himmelskörper mit einander verbunden und bezeichne in dem nebenstehenden Dreieck (Fig. 13) die Entfernung Erde—Sonne mit R, die Entfernung Erde—Planet mit Δ und die Entfernung Sonne—Planet mit r, ferner den Winkel am Planeten mit α, dann repräsentirt α die Grösse des verfinsterten Theiles der Planetenkugel und wird daher jetzt allgemein der Phasenwinkel genannt, während Lambert diese Bezeichnung für das Supplement von α gewählt hatte. Der Winkel α lässt sich durch die drei Entfernungen r, Δ, R, deren numerische Werthe für jeden Zeitpunkt aus den astronomischen Ephemeriden entnommen werden können, berechnen. Man hat:

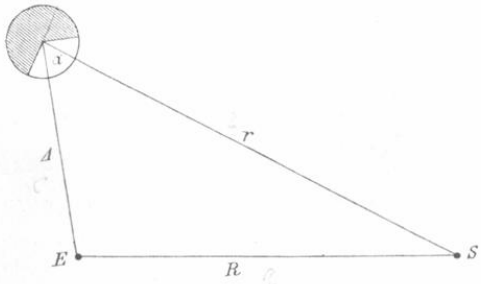

Fig. 13.

$$R^2 = r^2 + \Delta^2 - 2r\Delta \cos \alpha,$$

und mithin:

$$\cos \alpha = \frac{\Delta^2 + r^2 - R^2}{2r\Delta},$$

oder für die logarithmische Rechnung bequemer und bei kleineren Werthen von α empfehlenswerther:

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(R + \Delta - r)(R + r - \Delta)}{r\Delta}}.$$

Man denke sich nun durch den Mittelpunkt des Planeten senkrecht zu der Linie Erde — Planet eine Ebene gelegt. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Planetenkugel sei in Figur 14 durch den Kreis $ABCD$ repräsentirt; senkrecht über M in der Richtung nach E zu befinde sich die Erde, während die Sonne in der Richtung nach S zu stehen möge. Der Bogen grössten Kreises zwischen E und S ist gleich α. Die über $ABCD$ befindliche Halbkugel des Planeten möge durch unendlich nahe liegende Parallelkreise und Meridiane in kleine Flächenelemente getheilt sein; eins derselben sei ds, und der hindurchgehende Meridian

schneide den durch E und S gelegten grössten Kreis im Punkte F. Verbindet man ds mit S und E durch Bogen grössten Kreises, so ist leicht ersichtlich, da bei der grossen Entfernung der Himmelskörper alle auffallenden und ebenso alle zurückgeworfenen Lichtstrahlen als parallel unter einander angesehen werden dürfen, dass der Bogen zwischen ds und S nichts Anderes als der Incidenzwinkel i und ebenso der Bogen zwischen ds und E nichts Anderes als der Emanationswinkel ε ist. Führt man noch andere Coordinaten ein, indem man die Breite des Elementes ds mit ψ und die Länge in dem durch E und S gelegten grössten Kreise, von E aus gezählt, mit ω bezeichnet, so hat man in den beiden bei F rechtwinkligen sphärischen Dreiecken $FSds$ und $FEds$ die Beziehungen:

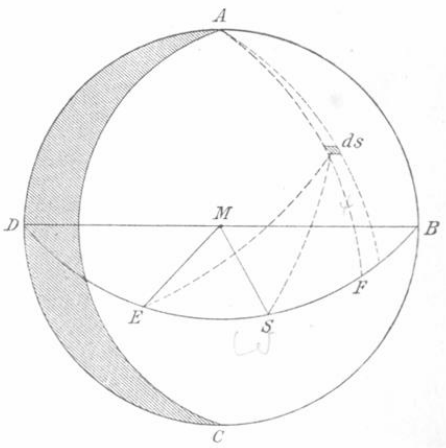

Fig. 14.

$$\cos i = \cos\psi \cos(\omega - \alpha),$$
$$\cos\varepsilon = \cos\psi \cos\omega.$$

Ist endlich noch der Halbmesser der Planetenkugel gleich ϱ, so hat das Oberflächenelement ds in der Meridianrichtung die Grösse $\varrho\, d\psi$ und in dem Parallelkreise die Grösse $\varrho\, d\omega \cos\psi$; mithin ist der Flächeninhalt von $ds = \varrho^2 \cos\psi\, d\omega\, d\psi$.

Setzt man diese Werthe in die obigen drei Beleuchtungsformeln ein, so erhält man für die von einem Planetenoberflächenelemente bei dem Phasenwinkel α nach der Erde ausgestrahlte Lichtmenge die drei Werthe:

$$(1)\qquad \begin{cases} dq_1 = \Gamma_1 \varrho^2 \cos^3\psi\, d\psi \cos(\omega - \alpha) \cos\omega\, d\omega, \\ dq_2 = \Gamma_2 \varrho^2 \cos^2\psi\, d\psi \dfrac{\cos\omega \cos(\omega - \alpha)}{\cos(\omega - \alpha) + \lambda \cos\omega}\, d\omega, \\ dq_3 = \Gamma_3 \varrho^2 \cos^2\psi\, d\psi \cos(\omega - \alpha)\, d\omega. \end{cases}$$

Um die von der ganzen Planetenkugel zur Erde gesandte Lichtquantität zu haben, müssen diese Formeln über den von der Erde aus sichtbaren, von der Sonne beleuchteten Theil der Oberfläche integrirt werden. Wie man aus der obigen Figur ersieht, sind die Integrationsgrenzen in Bezug auf ψ gleich $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, in Bezug auf ω gleich $-\frac{\pi}{2} + \alpha$ und $+\frac{\pi}{2}$.

Behandelt man die verschiedenen Gesetze für sich, so hat man zunächst für das Lambert'sche Gesetz:

$$q_1 = \Gamma_1 \varrho^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega - \alpha) \cos\omega \, d\omega .$$

Es ist aber:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \, d(\sin\psi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sin^2 \psi] \, d(\sin\psi) = \tfrac{4}{3} .$$

Ferner ist einfach:

$$\int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega - \alpha) \cos\omega \, d\omega = \tfrac{1}{2} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, d\omega + \tfrac{1}{2} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega - \alpha) \, d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2} [(\pi - \alpha) \cos\alpha + \sin\alpha] .$$

Daher:

$$q_1 = \Gamma_1 \varrho^2 \tfrac{2}{3} \{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha\} . \tag{2}$$

Für volle Beleuchtung, wenn Sonne, Planet und Erde in einer geraden Linie stehen, wird $\alpha = 0$ und die ausgestrahlte Lichtmenge $q_1^{(0)} = \Gamma_1 \varrho^2 \frac{2}{3} \pi$; man hat daher auch:

$$q_1 = q_1^{(0)} \frac{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}{\pi} . \tag{3}$$

Für das Lommel-Seeliger'sche Gesetz wird die Berechnung nicht ganz so einfach. Man hat:

$$q_2 = \Gamma_2 \varrho^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \, d\psi \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega \cos(\omega - \alpha)}{\cos(\omega - \alpha) + \lambda \cos\omega} \, d\omega .$$

Das erste der beiden Integrale hat den Werth $\frac{\pi}{2}$. Zur Auflösung des zweiten führt man nach Seeliger statt der Constanten λ und α zwei neue Grössen durch die Relationen ein:

$$\sin\alpha = m \sin\mu ,$$
$$\lambda + \cos\alpha = m \cos\mu .$$

Dann wird:

$$q_2 = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{4m} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha + \cos(2\omega - \alpha)}{\cos(\omega - \mu)} \, d\omega ,$$

oder wenn man $\omega - \mu = y$ setzt:

$$q_2 = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{4m} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2} - \mu}^{\frac{\pi}{2} - \mu} \frac{\cos\alpha + \cos(2y + 2\mu - \alpha)}{\cos y} \, dy$$

$$= \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{4m} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2} - \mu}^{\frac{\pi}{2} - \mu} \frac{dy}{\cos y} \Big[\cos\alpha - \cos(2\mu - \alpha) + 2\cos y \Big\{ \cos(2\mu - \alpha)\cos y - \sin(2\mu - \alpha)\sin y \Big\} \Big]$$

$$= \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{2m} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2} - \mu}^{\frac{\pi}{2} - \mu} \frac{\sin\mu \, \sin(\mu - \alpha)}{\cos y} \, dy + \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{2m} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2} - \mu}^{\frac{\pi}{2} - \mu} \cos(y + 2\mu - \alpha) \, dy .$$

Diese Integrationen lassen sich leicht ausführen, und man hat daher endlich:

$$(4) \quad q_2 = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{2} \left\{ \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\mu - \frac{\alpha}{2}\right)}{m} + \frac{\sin\mu \sin(\mu - \alpha)}{m} \log\left[\cot\frac{\alpha - \mu}{2} \cot\frac{\mu}{2} \right] \right\} .$$

Für volle Beleuchtung wird $\alpha = 0$, folglich $\mu = 0$ und $m = 1 + \lambda$, und man hat daher für die von dem voll beleuchteten Planeten nach der Erde ausgestrahlte Lichtmenge $q_2^{(0)}$ den Werth:

$$(5) \quad q_2^{(0)} = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{1 + \lambda} .$$

Von Wichtigkeit zur Bestimmung von q_2 ist die Kenntniss der Grösse λ, d. h. des Verhältnisses der Absorptionscoefficienten für die ein- und austretenden Strahlen. Die Coefficienten werden in den meisten Fällen nicht wesentlich von einander verschieden sein, und man wird daher kaum einen grossen Fehler begehen, wenn man $\lambda = 1$ setzt. Für $\lambda = 1$ wird aber $m \cos\mu = 1 + \cos\alpha$; ferner ist $\operatorname{tang}\mu = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ oder $\mu = \frac{\alpha}{2}$ und $m = 2\cos\frac{\alpha}{2}$. Durch Substitution in (4) erhält man daher:

$$q_2 = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{2} \left\{1 - \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \log\cot\frac{\alpha}{4}\right\}. \tag{6}$$

Für volle Beleuchtung oder $\alpha = 0$ wird die ausgestrahlte Lichtmenge:

$$q_2^{(0)} = \frac{\Gamma_2 \varrho^2 \pi}{2};$$

mithin ergiebt sich:

$$q_2 = q_2^{(0)} \left\{1 - \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \log\cot\frac{\alpha}{4}\right\}. \tag{7}$$

Für das dritte der obigen Gesetze, das Euler'sche, hat man:

$$q_3 = \Gamma_3 \varrho^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \, d\psi \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega - \alpha) \, d\omega,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt:

$$q_3 = \Gamma_3 \varrho^2 \pi \cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Bei voller Beleuchtung wird die ausgestrahlte Lichtmenge $q_3^{(0)} = \Gamma_3 \varrho^2 \pi$, und man hat daher:

$$q_3 = q_3^{(0)} \cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Die im Vorangehenden für die drei betrachteten Beleuchtungsgesetze aufgestellten Formeln geben ganz allgemein die von der ganzen beleuchteten Planetenphase in der Richtung nach der Erde ausgestrahlte Lichtmenge oder nach unseren früheren Definitionen die Lichtquantität, welche auf die Flächeneinheit in der Entfernung 1 senkrecht auffällt. Diese Grösse ist aber der Beobachtung nicht direct zugänglich. Was wir mit dem Photometer oder mit dem Auge messen, ist eine Grösse, die der auf das Fernrohrobjectiv oder die Pupille des Auges senkrecht auffallenden Lichtmenge proportional ist. Will man also die theoretisch berechneten Helligkeitswerthe mit den Beobachtungen vergleichen, so müssen zunächst die oben abgeleiteten Werthe q_1, q_2, q_3 mit dem Factor $\frac{1}{\Delta^2}$ multiplicirt werden, wo Δ die jedesmalige Entfernung des Planeten von der Erde ausdrückt. Ferner ist zu beachten, dass die in den Formeln auftretenden Grössen Γ_1, Γ_2, Γ_3 nur dann als Constanten angesehen werden dürfen, wenn die Entfernung des Planeten von der Sonne nicht merklichen Änderungen unterworfen ist. Es wird nöthig sein, diese Grössen etwas näher zu

betrachten. Nach den Erörterungen im vorigen Capitel ist $\Gamma_1 = \frac{A_1}{\pi} L$ (S. 40), wo A_1 die Lambert'sche Albedo ist. Ferner ist $\Gamma_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu}{k} L$ (S. 51), wo μ und k das Diffusions- und Absorptionsvermögen des beleuchteten Körpers bezeichnen. Nun ist aber für das Lommel-Seeliger'sche Gesetz in seiner einfachsten Form die Seeliger'sche Albedo, die wir A_2 nennen wollen, ausgedrückt durch $\frac{1}{4} \frac{\mu}{k}$, es wird also $\Gamma_2 = \frac{A_2}{\pi} L$. Endlich lässt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie durch die auf Seite 40 angestellte, leicht zeigen, dass $\Gamma_3 = \frac{A_3}{2\pi} L$ ist, wo A_3 dieselbe Bedeutung hat, wie die Lambert'sche Albedo. In allen drei Ausdrücken bedeutet L die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit des Planeten von der Sonne senkrecht ausgestrahlt wird. Betrachtet man die Sonne als eine selbstleuchtende Kugel mit der Leuchtkraft J, so ist nach den Entwicklungen auf Seite 37 $L = J\pi \sin^2 s$, wo s der scheinbare Radius der Sonne ist, vom Planeten aus gesehen. Wir wollen nun statt der Grössen q_1, q_2, q_3 die der Beobachtung zugänglichen Lichtmengen bestimmen, welche von der gesammten beleuchteten Planetenphase senkrecht auf die Flächeneinheit des Fernrohrobjectivs oder der Augenpupille gesandt werden. Bezeichnen wir diese durch Q_1, Q_2, Q_3 und setzen die obigen Werthe für Γ_1, Γ_2, Γ_3 ein, so ergiebt sich, wenn man noch den scheinbaren Halbmesser σ des Planeten, von der Erde aus gesehen, durch die Relation $\sin\sigma = \frac{\varrho}{\Delta}$ einführt:

$$(10)\quad \begin{cases} Q_1 = \frac{2}{3} J A_1 \sin^2 s \sin^2\sigma \{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha\}, \\ Q_2 = \frac{1}{2} J A_2 \pi \sin^2 s \sin^2\sigma \left\{1 - \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \log\cot\frac{\alpha}{4}\right\}, \\ Q_3 = \frac{1}{2} J A_3 \pi \sin^2 s \sin^2\sigma \cos^2\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Für volle Beleuchtung gehen diese Werthe über in:

$$(11)\quad \begin{cases} Q_1^{(0)} = \frac{2}{3} J A_1 \pi \sin^2 s_0 \sin^2\sigma_0, \\ Q_2^{(0)} = \frac{1}{2} J A_2 \pi \sin^2 s_0 \sin^2\sigma_0, \\ Q_3^{(0)} = \frac{1}{2} J A_3 \pi \sin^2 s_0 \sin^2\sigma_0, \end{cases}$$

wo s_0 und σ_0 die scheinbaren Halbmesser von Sonne und Planet zur Zeit der Opposition sind. Aus den Gleichungen (10) und (11) erhält man noch, wenn man statt der scheinbaren Halbmesser wieder die Distanzen einführt:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{Q_1}{Q_1^{(0)}} = \dfrac{A_0^2 r_0^2}{A^2 r^2} \dfrac{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}{\pi}, \\ \dfrac{Q_2}{Q_2^{(0)}} = \dfrac{A_0^2 r_0^2}{A^2 r^2}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\dfrac{\alpha}{2}\log\cot\dfrac{\alpha}{4}\right), \\ \dfrac{Q_3}{Q_3^{(0)}} = \dfrac{A_0^2 r_0^2}{A^2 r^2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Diese Werthe sind direct mit den Resultaten vergleichbar, welche wir durch photometrische Messungen oder Schätzungen erhalten können. Zu ihrer bequemen Berechnung soll die im Anhange mitgetheilte Tafel dienen, welche die Logarithmen der von dem Phasenwinkel abhängigen Factoren und die aus diesen Logarithmen durch Division mit 0.4 hervorgehenden Differenzen in Sterngrössenclassen enthält. Ein Überblick über diese Tafel zeigt, wie stark die nach den verschiedenen Theorien berechneten Helligkeitswerthe von einander abweichen.

Die Formeln (10) oder (11) können noch dazu benutzt werden, die Albedo eines Planeten zu berechnen. Zu diesem Zweck ist es aber zunächst erforderlich, die Grösse J, welche nicht durch Beobachtungen ermittelt werden kann, aus denselben zu eliminiren. Nennen wir L' die Lichtmenge oder Beleuchtung, welche von der Sonne direct auf die Flächeneinheit des Fernrohrobjectivs oder der Augenpupille gesandt wird, so ist ebenso wie oben:

$$L' = J\pi\sin^2 S,$$

wo S der scheinbare Halbmesser der Sonne ist, von der Erde aus gesehen. Den Quotienten $\dfrac{Q}{L'}$, also das Helligkeitsverhältniss des Planeten zur Sonne, bezeichnen wir noch allgemein durch M; dann ergeben sich aus den Gleichungen (10) die folgenden Albedowerthe:

$$(13)\qquad \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2} M \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s \sin^2\sigma} \dfrac{\pi}{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}, \\ A_2 = 2M \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s \sin^2\sigma} \dfrac{1}{1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\dfrac{\alpha}{2}\log\cot\dfrac{\alpha}{4}}, \\ A_3 = 2M \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s \sin^2\sigma} \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Ist das Helligkeitsverhältniss des Planeten in mittlerer Opposition zur Sonne bekannt, welches M_0 heissen möge, so ergeben sich aus (11) die entsprechenden Werthe:

$$(14)\qquad \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2} M_0 \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0}, \\ A_2 = 2 M_0 \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0}, \\ A_3 = 2 M_0 \dfrac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0}. \end{cases}$$

Die Albedowerthe für das Lommel-Seeliger'sche und das Euler'sche Gesetz stimmen nach diesen Formeln mit einander überein, und aus den beiden ersten Gleichungen folgt: $A_2 = \frac{4}{3} A_1$. Es ist aber dabei zu beachten, dass diese Beziehungen nur gelten, wenn in dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze die Grösse $\lambda = 1$ gesetzt werden darf. Für einen beliebigen Werth von λ ergiebt sich statt der zweiten Formel in (11) die folgende:

$$Q_2^{(0)} = \tfrac{1}{4} L' \frac{\mu}{k} \frac{1}{1+\lambda} \frac{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0}{\sin^2 S}.$$

Ferner ist nach Formel (3) auf Seite 55 die Seeliger'sche Albedo bei einem beliebigen Werthe von λ ausgedrückt durch:

$$A_2 = \frac{1}{4\lambda} \frac{\mu}{k} \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \log (1 + \lambda) \right\}.$$

Aus den beiden letzten Formeln erhält man daher den Ausdruck:

$$(15)\quad A_2 = M_0 \frac{1+\lambda}{\lambda} \left\{ 1 - \lambda \log \lambda + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \log (1 + \lambda) \right\} \frac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0},$$

welcher für $\lambda = 1$ unmittelbar in den obigen Ausdruck in (14) übergeht.

Setzt man in (15) $\lambda = \frac{1}{2}$, so wird:

$$A_2 = 2.22\ M_0 \frac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0};$$

für $\lambda = \frac{3}{4}$ wird:

$$A_2 = 2.08\ M_0 \frac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0},$$

und für $\lambda = 2$ wird:

$$A_2 = 1.89\ M_0 \frac{\sin^2 S}{\sin^2 s_0 \sin^2 \sigma_0}.$$

Man sieht also, dass die Werthe der Seeliger'schen Albedo zwar nicht sehr erheblich, aber doch immerhin merklich geändert werden, wenn man die Grösse λ von $\frac{1}{2}$ bis 2 variiren lässt.

Es verdient noch erwähnt zu werden, dass die obigen Formeln (13) oder (14) auch benutzt werden können, um umgekehrt, wenn die Albedo eines Himmelskörpers und seine Helligkeit bekannt sind, den Durchmesser

desselben zu berechnen. In der Praxis ist dies von Bedeutung bei der grossen Zahl der Asteroiden und bei den kleinen Planetenmonden, deren Durchmesser mit den gebräuchlichen Messungsmitteln der Astronomie nicht mit Sicherheit bestimmt werden können. Wir wollen annehmen, dass das Helligkeitsverhältniss eines kleinen Planeten zu einem der Hauptplaneten (beide zunächst in mittlerer Opposition gedacht) durch photometrische Beobachtungen sicher bestimmt wäre; es möge mit H_0 bezeichnet sein. Wir wollen ferner das Verhältniss der Albedowerthe der beiden Gestirne a nennen, die scheinbaren Halbmesser der Sonne, von den beiden Planeten aus gesehen, mit $s_{1,0}$ resp. mit $s_{2,0}$ bezeichnen, ebenso die scheinbaren Radien der beiden Planeten, von der Erde aus gesehen, mit $\sigma_{1,0}$ resp. mit $\sigma_{2,0}$, so ergiebt sich aus den Formeln (14), wenn für beide Himmelskörper dasselbe Beleuchtungsgesetz als gültig angenommen werden darf, zur Bestimmung der unbekannten Grösse $\sigma_{1,0}$ die Gleichung:

$$\sin^2 \sigma_{1,0} = \frac{H_0}{a} \frac{\sin^2 s_{2,0} \sin^2 \sigma_{2,0}}{\sin^2 s_{1,0}} . \tag{16}$$

Ist das Helligkeitsverhältniss H der beiden Planeten nicht für die mittleren Oppositionen, sondern für beliebige Stellungen derselben bekannt, wo ihre Phasenwinkel α_1 resp. α_2 sein mögen, so erhält man statt der einen Gleichung (16) die drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\sin^2 \sigma_1 &= \frac{H}{a} \frac{\sin^2 s_2 \sin^2 \sigma_2}{\sin^2 s_1} \frac{\sin \alpha_2 + (\pi - \alpha_2) \cos \alpha_2}{\sin \alpha_1 + (\pi - \alpha_1) \cos \alpha_1} , \\
\sin^2 \sigma_1 &= \frac{H}{a} \frac{\sin^2 s_2 \sin^2 \sigma_2}{\sin^2 s_1} \frac{1 - \sin \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha_2}{2} \log \operatorname{cot} \frac{\alpha_2}{4}}{1 - \sin \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha_1}{2} \log \operatorname{cot} \frac{\alpha_1}{4}} , \\
\sin^2 \sigma_1 &= \frac{H}{a} \frac{\sin^2 s_2 \sin^2 \sigma_2}{\sin^2 s_1} \frac{\cos^2 \frac{\alpha_2}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha_1}{2}} .
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Man findet also in diesem Falle verschiedene Durchmesserwerthe, je nach dem Beleuchtungsgesetze, welches man der Berechnung zu Grunde legt.

Bei allen vorangehenden Betrachtungen sind die Gestalten der Planeten als vollkommen kugelförmig vorausgesetzt worden, und es tritt daher die Frage auf, in welcher Weise die entwickelten Beleuchtungsformeln modificirt werden, wenn man auf die Abplattung Rücksicht nimmt und ferner noch den Umstand ins Auge fasst, dass die Mittelpunkte von Erde und

Sonne nicht genau in der Aequatorebene des Planeten liegen. Seeliger[1]) hat diese Aufgabe gelöst und die Beleuchtungsformeln ganz allgemein anstatt für die Kugel für das Rotationsellipsoid entwickelt, wobei er sowohl das Lommel-Seeliger'sche als das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz zu Grunde gelegt hat unter der vereinfachenden Annahme, dass die dritten und höheren Potenzen des Phasenwinkels α vernachlässigt werden dürfen. Diese Vereinfachung ist bei den Verhältnissen in unserem Planetensystem im Allgemeinen durchaus statthaft, weil gerade bei denjenigen Planeten, die eine merkliche Abweichung von der Kugelgestalt zeigen, den Jupiter höchstens ausgenommen, die Phasenwinkel nur verhältnissmässig kleine Werthe erreichen können.

Es ist nicht möglich, den Gang der Seeliger'schen Untersuchung hier in voller Ausführlichkeit wiederzugeben; es muss daher auf die Originalabhandlung selbst verwiesen werden. Im Folgenden mögen nur die beiden Endformeln mitgetheilt werden, welche sich bei Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt anstatt der beiden ersten Formeln (10) ergeben:

$$(18)\quad \begin{cases} Q_1 = 2\pi J A_1 \sin^2 s \sin^2\sigma \cos\alpha \{P\cos^2 E + R\sin^2 E\}, \\ Q_2 = \tfrac{1}{2}\pi J A_2 \sin^2 s \sin^2\sigma \left\{1 - \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\log\cot\frac{\alpha}{4}\right\}\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\sin^2 E}. \end{cases}$$

In diesen Formeln sind a und b die beiden Halbaxen des Planeten, unter σ ist hier der scheinbare grosse Halbmesser zu verstehen, P und R sind zwei Grössen, welche nur von der Abplattung abhängen und deren Zahlenwerthe aus einer am Schlusse der Seeliger'schen Abhandlung mitgetheilten Tafel entnommen werden können, und E ist der Erhebungswinkel der Erde über der Äquatorebene des Planeten.

b. Die Lichtvertheilung auf einer Planetenscheibe.

Wir kehren im Folgenden wieder zu der Annahme zurück, dass die Gestalten der Planeten kugelförmig sind, und wollen nun noch einige Betrachtungen über die Lichtvertheilung auf einer erleuchteten Planetenoberfläche anstellen. Es soll also nicht mehr, wie im Vorangehenden, die gesammte Lichtmenge, welche die Planetenphase auf das Fernrohrobjectiv wirft, untersucht werden, sondern die Flächenhelligkeit an irgend einem Punkte der beleuchteten Scheibe. Wenn es gelänge, durch photometrische Messungen die scheinbare Helligkeit an jeder beliebigen Stelle der Oberfläche zu bestimmen, so würde man einerseits ein vortreffliches

1) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Bd. 16, p. 405.

Mittel haben, die verschiedenen Beleuchtungsgesetze einer strengeren Prüfung als bisher zu unterwerfen, und andererseits würde die Möglichkeit gegeben sein, über die Reflexionsfähigkeit an verschiedenen Punkten der Planetenoberflächen und damit auch bis zu einem gewissen Grade über die physische Beschaffenheit dieser Himmelskörper Aufschluss zu erlangen. Leider ist es infolge der Schwierigkeiten, welche sich hauptsächlich wegen der Kleinheit der Planetenscheiben und zum Theil auch wegen der Unvollkommenheit der photometrischen Messungsmethoden entgegenstellen, bisher nicht gelungen, brauchbare Beobachtungen über die Lichtvertheilung auf einer Planetenoberfläche zu erhalten. Es ist bei den meisten Planeten nicht einmal mit Sicherheit entschieden, an welchen Stellen der Oberfläche die grösste oder geringste Helligkeit stattfindet, geschweige denn, dass die Helligkeitsverhältnisse in Zahlenwerthen angegeben werden könnten, und selbst bei dem Monde, der doch in dieser Beziehung weniger Schwierigkeiten bieten sollte, weichen die bisher ermittelten Angaben über die Helligkeitsverhältnisse von hellen und dunklen Stellen, von Rand und Mittelpartien, ganz erheblich von einander ab.

Mit der theoretischen Seite der Frage hat sich vor einiger Zeit Anding[1]) beschäftigt und ist dabei zu einigen Resultaten gelangt, die der Hervorhebung werth sind. Es handelt sich ganz allgemein um die Bestimmung der scheinbaren Helligkeit eines beliebig gelegenen Planetenoberflächenelementes. Nach unseren früheren Definitionen wird die scheinbare Helligkeit h eines Flächenelementes ds erhalten, wenn man die in der Richtung ε von demselben ausgestrahlte Lichtquantität dq durch die scheinbare Grösse des Elementes, also durch $ds \cos\varepsilon$, dividirt. Diese Definition gilt natürlich sowohl für selbstleuchtende als zerstreut reflectirende Flächen. Zieht man wieder die drei verschiedenen Beleuchtungsgesetze in Betracht, wie sie durch die Formeln auf Seite 57 repräsentirt sind, so ergiebt sich die scheinbare Helligkeit eines Planetenoberflächenelementes aus den Gleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} h_1 = I_1 \cos i & \text{(Lambert'sches Gesetz)}, \\ h_2 = I_2 \dfrac{\cos i}{\cos i + \cos\varepsilon} & \text{(Lommel-Seeliger'sches Gesetz)}, \\ h_3 = I_3 \dfrac{\cos i}{\cos\varepsilon} & \text{(Euler'sches Gesetz)}, \end{cases}$$

wobei der Einfachheit wegen bei dem zweiten Gesetze wieder $\lambda = 1$ angenommen worden ist. Führt man statt der Winkel i und ε die

1) Astron. Nachr. Bd. 129, Nr. 3095.

auf Seite 59 erklärten Winkel ω und ψ vermittelst der Relationen $\cos i = \cos\psi \cos(\omega - \alpha)$ und $\cos\varepsilon = \cos\psi\cos\omega$ ein und substituirt für $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ die früheren Werthe, so gehen die obigen Gleichungen über in:

$$(20)\qquad \begin{cases} h_1 = JA_1 \sin^2 s \cos\psi \cos(\omega - \alpha), \\ h_2 = JA_2 \sin^2 s \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \\ h_3 = \frac{1}{2} JA_3 \sin^2 s \cos\alpha \{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\omega\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln lässt sich sofort die theoretisch verlangte Lichtvertheilung bei voller Beleuchtung, also bei $\alpha = 0$, übersehen. Nach der zweiten und dritten Gleichung wird die scheinbare Helligkeit, abgesehen natürlich von Verschiedenheiten der Albedo, an allen Stellen der Planetenscheibe constant. Nach dem Lambert'schen Gesetze wird dagegen die scheinbare Helligkeit proportional dem Werthe $\cos\psi\cos\omega$, sie nimmt also von der Mitte der Scheibe, wo ψ und ω gleich Null sind, beständig nach dem Rande zu ab und wird in unmittelbarer Nähe des Randes, wo ω nahe gleich 90° ist, verschwindend klein. Nach dem blossen Anblicke einer voll beleuchteten Planetenscheibe zu urtheilen möchte man von vornherein geneigt sein, dem Lommel-Seeliger'schen und dem Euler'schen Gesetze vor dem Lambert'schen den Vorzug zu geben. Die scheinbare Helligkeit in der Mitte einer voll beleuchteten Planetenscheibe, welche mit $h_1^{(0)}, h_2^{(0)}, h_3^{(0)}$ bezeichnet werden möge, wird, da ψ, ω und α in diesem Falle gleich Null sind, gegeben durch die Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{cases} h_1^{(0)} = JA_1 \sin^2 s, \\ h_2^{(0)} = \frac{1}{2} JA_2 \sin^2 s, \\ h_3^{(0)} = \frac{1}{2} JA_3 \sin^2 s, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in (20) substituirt, so erhält man ganz allgemein die scheinbare Helligkeit in irgend einem Punkte der Planetenscheibe bei beliebiger Stellung von Sonne, Planet und Erde ausgedrückt im Verhältniss zur centralen scheinbaren Helligkeit in der Opposition. Man hat:

$$(22)\qquad \begin{cases} h_1 = h_1^{(0)} \cos\psi \cos(\omega - \alpha), \\ h_2 = h_2^{(0)} \left\{1 + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)\right\}, \\ h_3 = h_3^{(0)} \cos\alpha \{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\omega\}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich nun in Bezug auf die Helligkeitsvertheilung auf einer Planetenscheibe Folgendes ermitteln. Es stelle

Figur 15 die theilweise beleuchtete scheinbare Planetenoberfläche dar, und der horizontale Durchmesser repräsentire den Durchschnitt mit einer senkrecht zur Papierebene gedachten Ebene, welche die Mittelpunkte von Erde und Sonne (erstere senkrecht über dem Centrum c) enthalte. Sind dann x und y die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes P auf der Planetenscheibe, so hat man (den Radius des Planeten gleich 1 gesetzt):

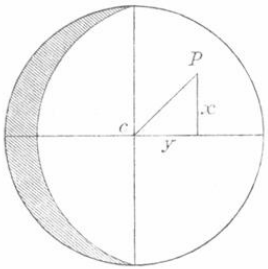

Fig. 15.

$$x = \sin\psi \quad \text{und} \quad y = \cos\psi \sin\omega .$$

Substituirt man diese Werthe in die erste der obigen Gleichungen (22) und bezeichnet den Quotienten $\frac{h_1}{h_1^{(0)}}$ mit a, so ergiebt sich:

$$x^2 \cos^2\alpha + y^2 - 2ya \sin\alpha + (a^2 - \cos^2\alpha) = 0 .$$

Diese Gleichung repräsentirt den geometrischen Ort aller Punkte der Planetenscheibe, welche dieselbe Helligkeit a besitzen. Es ist, wie man leicht sehen kann, die Gleichung einer Ellipse, deren kleine Axe in der obigen y-Axe liegt, deren Centrum von dem Mittelpunkte der Scheibe um das Stück $a \sin\alpha$ entfernt ist und deren Halbaxen die Werthe $\sqrt{1-a^2}$ und $\cos\alpha\sqrt{1-a^2}$ haben. Die Curven gleicher Helligkeit auf einer Planetenscheibe sind also, falls das Lambert'sche Gesetz gilt, im Allgemeinen Ellipsen mit verschiedenen Mittelpunkten; auch die Axen haben verschiedene Werthe, nur ist das Axenverhältniss bei allen Ellipsen constant gleich $1 : \cos\alpha$.

Für die voll beleuchtete Scheibe, also für $\alpha = 0$, gehen die Ellipsen gleicher Helligkeit in Kreise mit dem Radius $\sqrt{1-a^2}$ über, deren Mittelpunkte mit dem Centrum der Scheibe zusammenfallen. Das Maximum der Helligkeit findet im Centrum statt, und die Helligkeit nimmt, wie schon oben erwähnt wurde, nach allen Seiten gleichmässig von der Mitte nach dem Rande zu ab. Für Werthe von α zwischen 0 und 90°, also bei mehr als halb beleuchteter Scheibe, findet das Maximum der Helligkeit nicht im Centrum der Scheibe statt, sondern, wie unmittelbar aus (22) hervorgeht, erhält h_1 den grössten Werth, nämlich $h_1^{(0)}$, für $\psi = 0$ und $\omega = \alpha$, d. h. also in demjenigen Punkte der Scheibe, welcher dem senkrecht von der Sonne beleuchteten Elemente der Oberfläche entspricht. Es wird dann $a = 1$, und die Curve gleicher Helligkeit zieht sich in einen einzigen Punkt, den eben charakterisirten, zusammen. Von diesem Punkte aus nimmt die Helligkeit nach allen Seiten hin ab. An

dem sogenannten positiven, der Sonne zugewandten Rande (in unserer Figur dem rechten Rande) wird $\omega = 90°$, und es folgt daher für einen Punkt in der y-Axe aus (22) für a der Werth $\sin\alpha$, die Helligkeit wird an diesem Rande nicht, wie bei voller Scheibe, gleich 0, und die Ellipse gleicher Helligkeit hat die Axen $\cos\alpha$ und $\cos^2\alpha$; ihr Mittelpunkt ist von dem Centrum der Scheibe um die Strecke $\sin^2\alpha$ entfernt. An dem negativen Rande wird $\omega = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, und daher wird dort nach (22) die Helligkeit gleich Null. Die Ellipse gleicher Helligkeit reducirt sich hier auf eine Halbellipse mit dem Mittelpunkt im Centrum der Scheibe und den Halbaxen 1 und $\cos\alpha$, fällt also mit dem negativen Rande selbst zusammen.

Ist α gerade gleich 90°, ist also die beleuchtete Planetenscheibe ein Halbkreis, so wird $\cos\alpha = 0$, die Ellipsen gleicher Helligkeit gehen, da die halben kleinen Axen derselben gleich Null werden, in gerade Linien über, die zur Beleuchtungsgrenze parallel sind. In der Beleuchtungsgrenze, dem negativen Rande selbst, ist die Helligkeit gleich Null, sie nimmt nach dem positiven Rande hin beständig zu und erreicht das Maximum in diesem Rande, in dem Endpunkte der y-Axe. Wird endlich α noch grösser als 90°, so dass die beleuchtete Planetenscheibe die Gestalt einer Sichel hat, so kommen nur Werthe von ω zwischen $\alpha - \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ in Betracht; für den ersteren wird die Helligkeit gleich Null, und die Curve gleicher Helligkeit fällt also wieder mit dem von der Sonne abgewandten negativen Rande zusammen, für den letzteren wird die Grösse a im Äquator gleich $\sin\alpha$, die Curve gleicher Helligkeit fällt aber nicht mit dem positiven Rande zusammen, sondern ist ein Stück einer Halbellipse, deren Halbaxen $\cos\alpha$ und $\cos^2\alpha$ sind, und deren Mittelpunkt in der Entfernung $\sin^2\alpha$ vom Centrum der vollständig gedachten Scheibe liegt. Die grösste Helligkeit auf der sichelförmigen Planetenscheibe erreicht, da a nie grösser als $\sin\alpha$ werden kann, niemals den Werth 1; es ist also kein Punkt so hell, wie das Centrum der voll beleuchteten Scheibe. Im Allgemeinen folgt aus den Betrachtungen über die nach dem Lambert'schen Gesetze bei irgend einer Phase stattfindende Helligkeitsvertheilung, dass nach dem negativen Rande hin die Helligkeit stets bis Null abnimmt, während nach dem positiven Rande zu, je nach der Gestalt der Phase, entweder Abnahme (aber nicht bis Null) oder Zunahme stattfindet; es wird infolge dessen der positive Rand stets schärfer begrenzt erscheinen müssen als der negative, eine Erscheinung, die allerdings, wie Anding in der erwähnten Schrift hervorgehoben hat, durch die Beugung

am Objectivrande des Fernrohrs erheblich modificirt und zwar zum Theil verwischt werden kann.

Wesentlich anders als nach dem Lambert'schen Gesetze ergiebt sich die Lichtvertheilung auf einer Planetenscheibe, wenn man das Lommel-Seeliger'sche Gesetz in Betracht zieht. Führt man wieder die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Planetenscheibe durch die Relationen $x = \sin\psi$ und $y = \cos\psi \sin\omega$ ein und bezeichnet $\frac{h_2}{h_2^{(0)}}$ wieder mit a, so erhält man aus der zweiten der Gleichungen (22) für den geometrischen Ort der Punkte gleicher Helligkeit die Formel:

$$x^2 + y^2\left\{\frac{1 - 2b\cos\alpha + b^2}{(1 - b\cos\alpha)^2}\right\} = 1\,,$$

wo noch der Abkürzung wegen b eingeführt ist für die Grösse: $\frac{2 - a}{a}$.

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Centrum der Scheibe liegt, deren grosse Halbaxe 1 mit der Verbindungslinie der Pole zusammenfällt, und deren kleine Halbaxe gleich $\frac{1 - b\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2b\cos\alpha + b^2}}$ ist. Die Curven gleicher Helligkeit sind also nach dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze stets Halbellipsen, welche durch die Pole gehen. In Betreff der Lichtvertheilung auf der Scheibe ergiebt sich aus der zweiten Gleichung (22) unmittelbar, dass bei $\alpha = 0$ für alle Werthe von ω die scheinbare Helligkeit $h_2 = h_2^{(0)}$ wird, d. h. das bereits bekannte Resultat, dass die voll beleuchtete Scheibe in allen Punkten dieselbe Helligkeit besitzt. Bei mehr als halb beleuchteter Scheibe, also bei Werthen von α zwischen 0 und 90°, kommen für ω alle Werthe zwischen $-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ und $+\frac{\pi}{2}$ in Betracht, und die Helligkeit nimmt von 0 am negativen Rande bis zu dem Werthe $h_2 = 2h_2^{(0)}$ am positiven Rande continuirlich zu; die Helligkeit im Centrum der Scheibe ist gleich $h_2^{(0)}\left(1 - \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Auch bei halb beleuchteter Scheibe und bei sichelförmiger Gestalt ist die Helligkeit am negativen Rande stets gleich Null und am positiven Rande $= 2h_2^{(0)}$. Die Lichtvertheilung nach dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze unterscheidet sich also ganz wesentlich von der nach dem Lambert'schen Gesetze, insofern das Maximum der Helligkeit stets am positiven Rande liegt und bei allen Phasen denselben Werth, nämlich den doppelten Betrag der Centralhelligkeit bei voller Scheibe, besitzt. Die Abnahme der Helligkeit nach dem negativen Rande bis zu dem Werthe 0 erfolgt im Allgemeinen etwas weniger rasch als die Zunahme am positiven Rande, und der Effect

davon ist, dass der erstere verwaschen, der letztere dagegen scharf begrenzt erscheint. Der Unterschied in dem Aussehen der beiden Ränder muss noch deutlicher in's Auge fallen, als bei der Helligkeitsvertheilung nach dem Lambert'schen Gesetze.

Was endlich das dritte Beleuchtungsgesetz anbelangt, so ergiebt die Substitution der Werthe von x und y in die letzte der Formeln (22) für den geometrischen Ort der Punkte gleicher Helligkeit die Gleichung:

$$x^2 + y^2 \frac{1 - 2a\cos\alpha + a^2}{(a - \cos\alpha)^2} = 1\,,$$

welche wieder einer Ellipse mit den Halbaxen 1 und $\frac{a - \cos\alpha}{\sqrt{1 - 2a\cos\alpha + a^2}}$ angehört, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfange liegt. Die Lichtvertheilung auf der Scheibe selbst ist bei voller Beleuchtung dieselbe wie nach dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze, d. h. es haben alle Punkte die constante Helligkeit $h_3 = h_3^{(0)}$. Bei allen anderen Phasen nimmt auch hier, wie aus der Betrachtung der Gleichung (22) hervorgeht, die Helligkeit nach dem negativen Rande zu beständig ab und ist längs eines unendlich schmalen Streifens verschwindend klein, dagegen wächst die Helligkeit nach dem positiven Rande hin beträchtlich stärker an als nach dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze, sie wird sogar am Rande selbst längs eines unendlich schmalen Streifens bei allen Phasen unendlich gross. Die beiden Ränder müssten also nach dem Euler'schen Gesetze am meisten von einander verschieden erscheinen, und es ist wohl schon bei einer ganz flüchtigen Betrachtung der Planetenoberflächen einleuchtend, dass die durch das Euler'sche Gesetz in Bezug auf die Lichtvertheilung verlangten Verhältnisse in Wirklichkeit nicht vorhanden sind.

Selbstverständlich darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Anordnung der Helligkeit auf einer Planetenscheibe, wie sie sich nach dem Vorangehenden mit Zugrundelegung der verschiedenen Beleuchtungsgesetze ergiebt, nur für den idealen Fall gilt, dass die Oberfläche eine gleichmässig rauhe ist und an allen Punkten dieselbe Reflexionsfähigkeit besitzt. In Wirklichkeit werden die Verhältnisse ganz wesentlich modificirt, und zwar einmal durch das Vorhandensein einer mehr oder weniger dichten Atmosphäre, dann durch die verschiedenen Albedowerthe, welche zweifellos den einzelnen Partien einer Planetenoberfläche zukommen, und endlich nicht zum Wenigsten durch Erhebungen, welche infolge des Schattenwurfes ganz besondere Erscheinungen hervorrufen.

Von der Wirkung der Atmosphäre auf das Aussehen verschiedener Stellen der Planetenscheibe kann man sich nur eine ungefähre Vorstellung machen, wenn man nicht im Stande ist, den Grad ihrer Dichtigkeit in

Rechnung zu bringen. Im Allgemeinen wird bei voller Beleuchtung ein Abnehmen der Helligkeit von der Mitte nach dem Rande hin zu erwarten sein; es kann also durch die Atmosphäre derselbe Effect hervorgebracht werden, der sich nach dem Lambert'schen Gesetze auch ohne Vorhandensein einer Atmosphäre erklären lässt. Bei nicht voll beleuchteter Scheibe würde sich die Wirkung der Atmosphäre in der Weise äussern müssen, dass der von der Sonne abgewandte Rand verwaschen und undeutlich erscheint, während der positive Rand scharf begrenzt ist. Die von den sämmtlichen Beleuchtungsgesetzen geforderte Verschiedenheit im Aussehen der Ränder würde also bei Vorhandensein einer Atmosphäre noch erheblich verstärkt werden.

Ganz uncontrolirbar ist natürlich der Antheil, welchen die verschiedene Albedo der einzelnen Partien an der beobachteten Lichtvertheilung auf einer Planetenscheibe hat. Wenn man nur Stoffe voraussetzt, wie sie auf der Erde vorkommen, so würden Unterschiede bis zum Zehnfachen in der Albedo verschiedener Punkte der Oberfläche gar nichts Auffallendes sein, und es ist klar, dass solche Unterschiede ein wesentlich anderes Aussehen der Planetenscheibe bedingen können, als es bei gleichmässiger Albedo nach den Beleuchtungsgesetzen erwartet werden sollte. Dieser Umstand vereitelt daher allein schon fast vollständig die Möglichkeit, aus der Art und Weise der beobachteten Lichtvertheilung zu Gunsten irgend eines der aufgestellten Beleuchtungsgesetze zu entscheiden.

Was ferner die Wirkung von Erhebungen auf den Planetenoberflächen anbelangt, so kann man sich von derselben nur dann eine ungefähre Vorstellung machen, wenn man die Vertheilung der Erhebungen und ihre Höhen kennt. Denkt man sich an Stelle der in Wirklichkeit stattfindenden unregelmässigen Vertheilung von Bergen eine regelmässige und zwar der Einfachheit wegen in der Art, dass die ganze Oberfläche von continuirlichen Bergzügen bedeckt ist, die in der Richtung der Meridiane verlaufen und die Gestalt von schmalen Wänden besitzen mögen, so werden bei voller Beleuchtung des Planeten die in der Mitte der Scheibe befindlichen Gebirgszüge lichtschwächer erscheinen müssen als die am Rande befindlichen, deren Wände nahezu senkrecht von der Sonne beschienen werden und ausserdem auch nahe senkrecht gegen die Gesichtslinie geneigt sind. Bei nicht ganz beleuchteter Scheibe werden die Gebirge am positiven Rande gar keinen oder nur geringen Schatten werfen; dieser Rand wird infolge dessen voll und scharf beleuchtet erscheinen, während am negativen Rande durch starken Schattenwurf Unterbrechungen in der Lichtintensität eintreten, die einen verwaschenen Eindruck hervorrufen müssen. Stellt Figur 16 einen Querschnitt durch ein kleines Stück der Planetenoberfläche dar mit gleich gross gedachten, in regelmässigen Abständen von einander befindlichen Erhebungen a, b, c, so werden bei voller Be-

leuchtung des Planeten sowohl die beiden Seitenwände jeder Erhebung als auch die zwischen je zweien derselben befindlichen Vertiefungen Licht nach der in der Richtung E stehenden Erde senden. Ist die Sonne dagegen in S, so erhalten die linken Seitenwände überhaupt kein Licht von derselben, und auch die Vertiefungen erscheinen finster, weil sie zum Theil oder ganz im Schatten der benachbarten Erhebungen liegen. Je höher die Berge sind und je geringer die Abstände zwischen ihnen, desto merklicher wird schon bei einer geringen Entfernung von der Opposition die beobachtete Lichtverminderung sein. Dieser Umstand ist nicht unwichtig, weil bei einigen kleinen Planeten ein merkliches Anwachsen der Gesammthelligkeit unmittelbar vor der Opposition und ebenso eine Abnahme nach derselben in den beobachteten Helligkeiten angedeutet zu sein scheint.

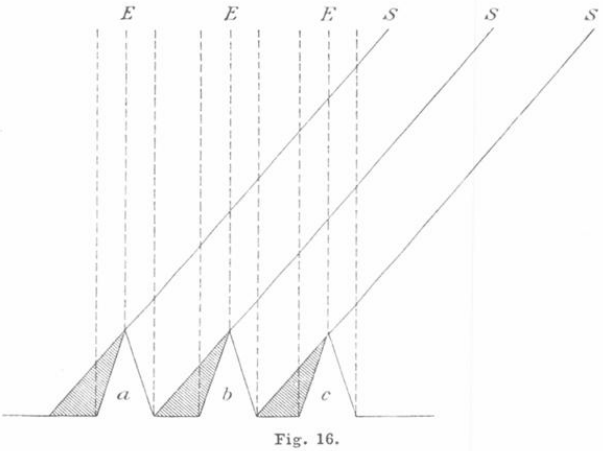

Fig. 16.

Es ist wiederholt die Frage aufgeworfen worden, ob es nicht möglich wäre, unter gewissen plausibelen Annahmen über die Anordnung und die Grössenverhältnisse der Erhebungen auf einer Planetenoberfläche mit Benutzung der bekannten Beleuchtungsgesetze einen theoretischen Ausdruck für die von den Phasen einer Planetenkugel ausgesandte Gesammtlichtmenge abzuleiten. Mit Rücksicht auf die complicirten Verhältnisse, welche sich darbieten, könnte man diese Frage von vornherein verneinen; es ist aber bemerkenswerth, dass ein Versuch zur Lösung der Aufgabe bereits gemacht worden ist und zwar von Zöllner in dem zweiten Abschnitt seiner »Photometrischen Untersuchungen«, welcher die Überschrift trägt »Theorie der relativen Lichtstärke der Mondphasen«. Wenn der Zöllner'sche Versuch auch als verfehlt zu bezeichnen ist, weil die von ihm gemachten Voraussetzungen schwerlich acceptirt werden können, und ausserdem, wie von mehreren Seiten nachgewiesen worden ist, in seinen mathematischen Entwicklungen Fehler enthalten sind, so verdient derselbe doch noch an dieser Stelle eine kurze Besprechung.

Zöllner wendet durchweg das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz an und geht bei seinen Untersuchungen von einem streng beweisbaren Satze

aus, den er in der folgenden Form ausspricht: »Die Erleuchtung eines auf der Erde gelegenen Flächenelementes durch die Phasen der als homogen und kugelförmig angenommenen Mondoberfläche bleibt dieselbe, wenn die Mondkugel durch einen homogenen Kreiscylinder ersetzt wird, dessen Axe senkrecht zu der durch Sonne, Erde und ihn selber gelegten Ebene steht und dessen Höhe sich zu dem, dem Monddurchmesser gleichen, Durchmesser seiner Basis wie 2 zu 3 verhält.« Diesen an und für sich richtigen Satz glaubt Zöllner auch in dem Falle anwenden zu dürfen, wenn Kugel und Cylinder nicht eine gleichmässig rauhe, sondern mit Erhebungen bedeckte Oberfläche haben. Er sagt: »Indem man nun den Einfluss zu ermitteln sucht, welchen eine regelmässige Vertheilung von schattenwerfenden Körpern auf das Phasenerleuchtungsgesetz eines Cylinders ausübt, kann man jederzeit auf der Kugel eine solche unregelmässige Vertheilung jener Körper annehmen, dass sowohl für den Cylinder mit regelmässiger als auch für die Kugel mit unregelmässiger Vertheilung von Erhebungen dasselbe Phasenerleuchtungsgesetz stattfindet.« Er glaubt daher für die irgendwie mit Bergen bedeckte Mondoberfläche einen regelmässig cannelirten Cylinder substituiren zu dürfen, dessen Furchen durch je zwei Ebenen gebildet werden, die unter einem gewissen Winkel gegen einander geneigt sind und sich in einer zur Cylinderaxe parallelen Kante schneiden. Es liegt auf der Hand, dass die Berechtigung zu dieser Substitution strenger dargethan werden müsste, und man wird schwerlich dem Satze zustimmen können, mit dem Zöllner die einleitenden Betrachtungen zu seiner Mondtheorie schliesst: »Die befriedigende Übereinstimmung der auf diese Weise entwickelten Theorie mit den Beobachtungen wird zeigen, dass man zu den bei ihr gemachten Voraussetzungen berechtigt war.«

Unter der weiteren Annahme, dass auf dem cannelirten Cylinder die Anzahl der Erhebungen unendlich gross ist und die Höhe derselben im Verhältnisse zu den Dimensionen des Cylinders sehr klein, ist nun Zöllner zu einer sehr einfachen Formel für die von den Phasen eines solchen Cylinders reflectirte Lichtmenge L gelangt. Bezeichnet nämlich β den Winkel, welchen die Seitenflächen der einzelnen Erhebungen mit ihrer Basis bilden, und wird nach der Lambert'schen Schreibweise statt des Phasenwinkels α das Supplement desselben $v = 180^\circ - \alpha$ eingeführt, so lautet die Zöllner'sche Formel:

$$L = \gamma \left\{ \sin(v - \beta) - (v - \beta) \cos(v - \beta) \right\},$$

wo γ eine Constante ist, die von der Leuchtkraft der Sonne, von den Dimensionen des Cylinders, von seiner Albedo, endlich noch von den Entfernungen desselben von Sonne und Erde abhängt. Für $\beta = 0$ geht die Gleichung unmittelbar in die bekannte Lambert'sche Beleuchtungs-

formel über. Zöllner hat nun gezeigt, dass die von ihm zwischen Vollmond und Quadratur angestellten photometrischen Mondbeobachtungen durch die obige Formel genügend dargestellt werden, wenn man für β den Werth 52° annimmt, und glaubt in der Übereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen den Beweis zu erblicken, dass die bei den theoretischen Entwicklungen vorausgesetzten Einflüsse in der That auf dem Monde vorhanden sind, wenn er auch vorsichtiger Weise bemerkt, dass man sich hüten müsse, der Constanten β hinsichtlich ihrer physischen Bedeutung einen allzu grossen Werth beizulegen.

Neuerdings ist von Searle[1]) und Seeliger[2]) übereinstimmend nachgewiesen worden, dass die mathematischen Entwicklungen Zöllners einen Irrthum enthalten, insofern bei den vorkommenden Integrationen unrichtige Grenzen zur Anwendung gekommen sind. Infolge dessen gilt die obige Zöllner'sche Formel nicht unumschränkt, sondern nur für ein ganz bestimmtes Phasenintervall. Es sind nämlich bei der Behandlung des Problems die beiden Fälle zu unterscheiden, wo $v < 2\beta$ und wo $v > 2\beta$ ist. Nach den Entwicklungen Searles lautet die Formel:

$$L = \gamma 2 \cos\beta \left[\sin(v - \beta) - (v - \beta)\cos(v - \beta)\right],$$

wenn $v < 2\beta$ ist; dagegen:

$$L = \gamma \left[\sin v - v\cos v - 2\beta \sin\beta \sin(v - \beta)\right],$$

wenn $v > 2\beta$ ist. Da die Zöllner'schen Beobachtungen nur bei Werthen von v zwischen 110° und 180° angestellt sind, so hätte bei der Vergleichung mit der Theorie nur die zweite der obigen Formeln zur Anwendung kommen dürfen. Wenn also Zöllner trotzdem mit Benutzung der in seinem Falle unrichtigen ersten Formel die Beobachtungen befriedigend dargestellt hat, so beweist dies nur, dass die Formel weiter nichts als eine brauchbare Interpolationsformel ist, dass ihr aber eine physikalische Bedeutung unter keinen Umständen zuerkannt werden darf.

Seeliger hat noch darauf hingewiesen, dass die Zöllner'sche Annahme einer unendlich grossen Zahl von sehr wenig tiefen Canälen eigentlich nur einer Hypothese über die Oberflächenbeschaffenheit des Cylinders in seinen kleinsten Theilen gleichkomme, und dass daher das Zöllner'sche Resultat auf dasselbe hinauslaufe, als wenn man irgend ein beliebiges nicht näher zu definirendes photometrisches Hauptgesetz zu Grunde gelegt hätte; die Zöllner'sche Formel hätte schon deshalb

1) Proc. of the Amer. Acad. of arts and sciences. Vol. 19, 1884, p. 310.
2) Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellsch. Jahrg. 21, 1886, p. 216.

keinen anderen Werth, als den einer einfachen Interpolationsformel. So interessant und anregend in gewisser Beziehung die Zöllner'schen Untersuchungen zweifellos sind, so wird man nach dem Gesagten doch zu dem Schlusse kommen, dass Zöllner sich umsonst an ein Problem gewagt hat, dessen strenge Lösung aus den verschiedensten Gründen überhaupt nicht möglich ist.

c. Mittlere scheinbare Helligkeit eines Planeten.

In den meisten Lehrbüchern der Photometrie, besonders in dem Lambert'schen Werke und den sich eng an dasselbe anschliessenden Schriften von Beer und Rheinauer, ist der Berechnung der scheinbaren mittleren Helligkeit einer Planetenphase ein grösserer Platz eingeräumt worden, als dieselbe verdient, weil diese Grösse eine nur in der Vorstellung beruhende ist, die mit directen Beobachtungen niemals verglichen werden kann. Uns interessirt an den Planeten eigentlich nur die in unsere Instrumente oder in das Auge gelangende, von der Planetenphase herkommende gesammte Lichtmenge und ferner die Vertheilung der Helligkeit in den einzelnen Punkten der sichtbaren hellen Scheibe, dagegen hat die Angabe einer mittleren scheinbaren Helligkeit so gut wie gar keinen Zweck, zumal wir dieselbe nur unter der zweifellos unrichtigen Annahme berechnen können, dass die Reflexionsfähigkeit an allen Punkten der Planetenoberfläche denselben Werth hat. Es soll im Folgenden nur kurz und mehr der Vollständigkeit wegen auf diesen Punkt eingegangen werden. Nach den Definitionen auf Seite 28 versteht man unter der mittleren scheinbaren Helligkeit einer leuchtenden (oder beleuchteten) Fläche das Verhältniss der von der ganzen Fläche auf die Flächeneinheit (des Objectivs oder des Auges) senkrecht gesandten Lichtquantität zu der scheinbaren Grösse dieser Fläche. Betrachtet man in Figur 15, welche die scheinbare Fläche eines Planeten darstellt, den erleuchteten Theil, so besteht derselbe aus einem Halbkreise mit dem Radius $\frac{\varrho}{\Delta}$ (wenn ϱ der wahre Halbmesser des Planeten und Δ seine Entfernung von der Erde ist) und aus einer Halbellipse mit den Halbaxen $\frac{\varrho}{\Delta}$ und $\frac{\varrho}{\Delta}\cos\alpha$. Die scheinbare Grösse des erleuchteten Theiles ist daher ausgedrückt durch $\frac{\pi}{2}\frac{\varrho^2}{\Delta^2}(1+\cos\alpha)$ oder, wenn man statt $\frac{\varrho}{\Delta}$ wieder den scheinbaren Halbmesser σ einführt, durch $\frac{\pi}{2}\sin^2\sigma\,(1+\cos\alpha)$. Dividirt man mit diesem Werthe in die früheren Formeln (10), welche für die verschiedenen Be-

leuchtungsgesetze die zur Erde gesandten Lichtquantitäten ausdrücken, so erhält man unmittelbar die gesuchten mittleren scheinbaren Helligkeiten:

$$(23)\qquad \begin{cases} H_1 = \frac{4}{3} A_1 J \sin^2 s \dfrac{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}{\pi(1+\cos\alpha)}, \\ H_2 = A_2 J \sin^2 s \dfrac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\log\cot\frac{\alpha}{4}}{1+\cos\alpha}, \\ H_3 = \frac{1}{2} A_3 J \sin^2 s . \end{cases}$$

Bemerkenswerth ist, dass nach dem Euler'schen Gesetze die mittlere scheinbare Helligkeit vom Phasenwinkel ganz unabhängig wird, mithin bei allen Beleuchtungsphasen constant bleibt. Für voll beleuchtete Planetenscheiben erhält man die mittleren scheinbaren Helligkeiten aus den Gleichungen:

$$(24)\qquad \begin{cases} H_1^{(0)} = \frac{2}{3} A_1 J \sin^2 s , \\ H_2^{(0)} = \frac{1}{2} A_2 J \sin^2 s , \\ H_3^{(0)} = \frac{1}{2} A_3 J \sin^2 s . \end{cases}$$

Man sieht, dass die Werthe von $H_2^{(0)}$ und $H_3^{(0)}$ mit den entsprechenden Ausdrücken in den Gleichungen (21) übereinstimmen, was auch ohne Weiteres zu erwarten ist, weil, wie wir gesehen haben, nach dem zweiten und dritten Beleuchtungsgesetze die scheinbare Helligkeit in allen Punkten der voll beleuchteten Scheibe die gleiche sein muss.

d. Beleuchtung der Planetentrabanten.

Wenn man die Lichtquantität berechnen will, welche von einem Planetentrabanten bei beliebiger Stellung von Sonne, Erde, Planet und Satellit nach der Erde gesandt wird, so ist zu beachten, dass diese Lichtmenge sich aus zwei Theilen zusammensetzt, erstens aus dem direct von dem Trabanten zurückgeworfenen Sonnenlichte und zweitens aus demjenigen Lichte, welches vom Planeten selbst nach seinem Satelliten und von diesem wieder nach der Erde reflectirt wird. Der zweite Theil ist im Verhältnisse zum ersten ausserordentlich geringfügig und wird in der Praxis bei photometrischen Messungen kaum merklich sein; indessen bietet die theoretische Behandlung des Falles doch ein gewisses Interesse.

Der Einfachheit wegen soll vorausgesetzt werden, dass die Mittelpunkte der vier in Betracht kommenden Himmelskörper alle in einer und derselben Ebene liegen; ferner sollen die Dimensionen derselben im Verhältnisse zu den Entfernungen als sehr klein angenommen werden. Wir wollen der Berechnung zunächst das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz zu Grunde legen. Ist q' das direct von der Trabantenphase reflectirte

Sonnenlicht, q'' das vom Planeten auf den Trabanten übergehende und von diesem wieder nach der Erde gesandte Licht, so wird die Gesammtmenge Q_1, welche die Flächeneinheit des Fernrohrobjectivs senkrecht von der Trabantenphase erhält, ausgedrückt durch $Q_1 = q' + q''$. Es sei:

α der Phasenwinkel des Trabanten,
A_1 die Albedo des Trabanten,
σ der scheinbare Halbmesser des Trabanten, von der Erde aus gesehen,
s der scheinbare Halbmesser der Sonne, vom Trabanten aus gesehen,

dann erhält man q' unmittelbar aus der ersten der Gleichungen (10). Es ist:

$$q' = \tfrac{2}{3} J A_1 \sin^2 s \sin^2 \sigma \left[\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha\right].$$

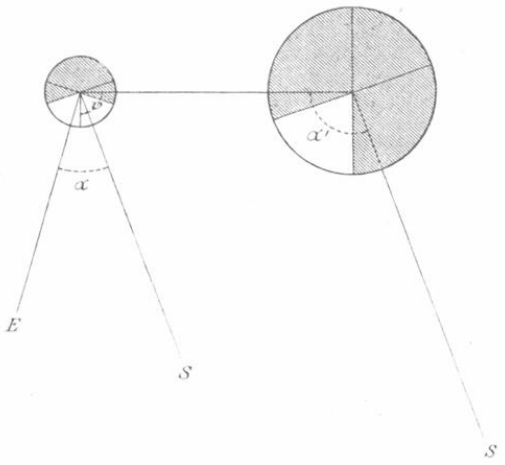

Fig. 17.

Zur Berechnung von q'' denke man sich ein Oberflächenelement ds auf dem Trabanten, welches von dem Planeten Licht erhält. Die Quantität dq, welche von dem ganzen vom Trabanten aus sichtbaren, durch die Sonne beleuchteten Theil der Planetenoberfläche (Fig. 17) auf dieses Element übergeht, falls es senkrecht zur Strahlungsrichtung steht, ist, ebenfalls nach der ersten der Gleichungen (10), ausgedrückt durch:

$$dq = \tfrac{2}{3} J A_1' \sin^2 s' \sin^2 \sigma' \left[\sin \alpha' + (\pi - \alpha') \cos \alpha'\right] ds.$$

Dabei ist:

α' der Phasenwinkel des Planeten in Bezug auf den Trabanten,
A_1' die Albedo des Planeten,
σ' der scheinbare Halbmesser des Planeten, vom Trabanten aus gesehen,
s' der scheinbare Halbmesser der Sonne, vom Planeten aus gesehen.

Nach den bei der Ableitung des Lambert'schen Beleuchtungsgesetzes angestellten Betrachtungen (Seite 40) ist nun die Lichtquantität dq'', welche ein beliebig gelegenes Trabantenelement ds von dem empfangenen Lichte

wieder nach der Flächeneinheit auf der Erde senkrecht sendet, gegeben durch die Gleichung:

$$dq'' = \frac{A_1}{\Delta^2 \pi} dq \cos i' \cos \varepsilon ,$$

wo Δ die Entfernung des Trabanten von der Erde, i' der Incidenzwinkel der als parallel vorausgesetzten, vom Planeten auf das Trabantenelement gelangenden Lichtstrahlen und ε der Emanationswinkel am Elemente ds ist. Um die gesammte Lichtmenge q'' zu haben, ist zu integriren über den vom Planeten beleuchteten, von der Erde aus sichtbaren Theil der Trabantenkugel, der in der obigen Figur durch den Winkel v bezeichnet ist. Ersetzt man i' und ε, wie früher, durch die Winkel ω und ψ, und rechnet die Längen ω von demjenigen Punkte der Trabantenscheibe, über welchem die Erde senkrecht steht, und die Breiten ψ von der durch die Mittelpunkte der vier Himmelskörper gehenden Ebene, so hat man die Relationen:

$$\begin{aligned} \cos i' &= \cos \psi \cos \left[180^\circ - (\alpha' - \alpha) - \omega\right], \\ \cos \varepsilon &= \cos \psi \cos \omega , \\ ds &= \varrho^2 \cos \psi \, d\omega \, d\psi , \end{aligned}$$

wo noch ϱ der wahre Halbmesser des Trabanten ist.

Die Integrationsgrenzen in Bezug auf ψ sind $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, in Bezug auf ω sind dieselben $\frac{\pi}{2} - v$ und $\frac{\pi}{2}$ oder, da $v = \alpha' - \alpha$ ist, $\frac{\pi}{2} - (\alpha' - \alpha)$ und $\frac{\pi}{2}$.

Substituirt man die Werthe von $\cos i'$, $\cos \varepsilon$, dq und ds, so erhält man endlich:

$$q'' = \frac{2}{3\pi} J A_1 A_1' \frac{\varrho^2}{\Delta^2} \sin^2 s' \sin^2 \sigma' \left[\sin \alpha' + (\pi - \alpha') \cos \alpha'\right] \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi \times \int_{\frac{\pi}{2} - (\alpha' - \alpha)}^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \cos \left[180^\circ - (\alpha' - \alpha) - \omega\right] d\omega .$$

Beachtet man noch, dass $\frac{\varrho}{\Delta} = \sin \sigma$ ist, so hat man nach Ausführung der Integrationen:

$$q'' = \frac{4}{9\pi} J A_1 A_1' \sin^2 s' \sin^2 \sigma \sin^2 \sigma' \left[\sin \alpha' + (\pi - \alpha') \cos \alpha'\right] \left[\sin (\alpha' - \alpha) - (\alpha' - \alpha) \cos (\alpha' - \alpha)\right] .$$

Addirt man die Werthe von q' und q'' und setzt noch, was ohne erheblichen Fehler gestattet ist, s und s' einander gleich, so hat man endlich die gesuchte Lichtmenge:

$$Q_1 = \frac{2}{3} JA_1 \sin^2 s \sin^2 \sigma \left[\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha + \frac{2A_1' \sin^2\sigma'}{3\pi} \times \right.$$
$$\left. \left\{\sin\alpha' + (\pi - \alpha')\cos\alpha'\right\}\left\{\sin(\alpha' - \alpha) - (\alpha' - \alpha)\cos(\alpha' - \alpha)\right\}\right].$$

Mit Zugrundelegung des Lommel-Seeliger'schen und des Euler'schen Beleuchtungsgesetzes ergeben sich ohne besondere Schwierigkeiten die entsprechenden Formeln:

$$Q_2 = \frac{1}{2}\pi JA_2 \sin^2 s \sin^2\sigma \left[1 - \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\log\cot\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}A_2' \sin^2\sigma' \times \right.$$
$$\left. \left(1 - \sin\frac{\alpha'}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha'}{2}\log\cot\frac{\alpha'}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha' - \alpha}{2}\cot\frac{\alpha' - \alpha}{2}\log\frac{1+\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2}}\right)\right],$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}\pi JA_3 \sin^2 s \sin^2\sigma \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}A_3' \sin^2\sigma' \cos^2\frac{\alpha'}{2}\sin^2\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right).$$

Die Werthe der Phasenwinkel α und α' lassen sich sehr bequem durch die heliocentrischen, geocentrischen und planetocentrischen Längen der einzelnen Himmelskörper, wie sie in den astronomischen Ephemeriden angegeben sind, ausdrücken.

e. Berechnung des aschfarbenen Mondlichtes.

Eine Aufgabe, welche mit der soeben behandelten grosse Ähnlichkeit hat, bezieht sich auf die Bestimmung des sogenannten aschfarbenen Lichtes des Mondes. Bekanntlich erscheint der von der Sonne nicht direct beleuchtete Theil der Mondscheibe nicht vollkommen dunkel, sondern leuchtet mit einem schwachen Lichte, welches namentlich einige Tage nach dem Neumond mit blossem Auge deutlich wahrzunehmen ist. Dieses Licht rührt von den Sonnenstrahlen her, welche von unserer Erde nach dem Monde hin reflectirt und von diesem wieder nach der Erde zurückgeworfen werden. Seine Berechnung hat deshalb ein besonderes Interesse, weil es unter gewissen vereinfachenden Annahmen möglich ist, daraus einen Werth für die mittlere Reflexionsfähigkeit der Erde abzuleiten. Man denke sich in Figur 18 die Mittelpunkte von Sonne, Mond und Erde in einer Ebene liegend und die Sonnenstrahlen unter sich parallel auf Erde und Mond auffallend. α sei der Phasenwinkel des Mondes und

folglich $\pi - \alpha$ der Phasenwinkel der Erde in Bezug auf den Mond. Der zwischen den Punkten a und b liegende Kreisbogen bezeichnet denjenigen Theil der Erdoberfläche, von welchem überhaupt nur Licht nach dem Monde gelangen kann; ferner bezeichnet der Bogen zwischen c und d denjenigen Theil des Mondes, welcher für einen Beobachter auf der Erde von der Sonne beleuchtet erscheint, dagegen der Bogen zwischen d und e den im aschfarbenen Lichte leuchtenden Theil der Mondscheibe. Wir wollen zunächst wieder das Lambert'sche Beleuchtungsgesetz zu Grunde legen und die folgenden Bezeichnungen einführen:

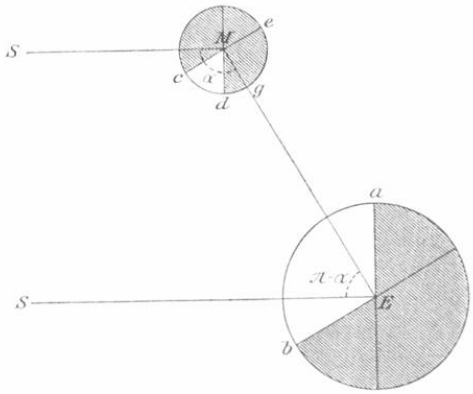

Fig. 18.

A_1' = Albedo der Erde,
S = scheinbarer Halbmesser der Sonne, von der Erde aus gesehen,
σ' = scheinbarer Halbmesser der Erde, vom Monde aus gesehen.

Ist dann dq die Lichtmenge, welche von der gesammten Erdphase senkrecht auf ein Oberflächenelement ds des Mondes geworfen wird, so hat man nach der ersten der Gleichungen (10), da anstatt α hier der Werth $\pi - \alpha$ zu setzen ist:

$$dq = \tfrac{2}{3} J A_1' \sin^2 S \sin^2 \sigma' (\sin\alpha - \alpha \cos\alpha)\, ds\,.$$

Die Lichtquantität dq', welche von diesem Elemente ds nun wieder nach der Erde (senkrecht auf die Flächeneinheit) zurückgeworfen wird, ist nach dem Früheren ausgedrückt durch:

$$dq' = \frac{A_1}{\Delta^2 \pi}\, dq \cos i' \cos\varepsilon\,,$$

wo A_1 die Albedo des Mondes, Δ die Entfernung des Mondes von der Erde, i' der Incidenzwinkel der von der Erde auf ein Mondelement reflectirten Strahlen und ε der Emanationswinkel der von dem Elemente wieder nach der Erde zurückgeworfenen Strahlen ist. In dem vorliegenden Falle müssen die Werthe von i' und ε stets einander gleich sein, und man erhält daher, wenn ε und ds wieder durch die von Punkt g aus auf der Mondoberfläche gezählten Längen ω und durch die auf die Zeichnungsebene bezogenen Breiten ψ ausgedrückt werden, durch Substitution die Gleichung:

$$dq' = \frac{2}{3\pi} J A_1 A_1' \frac{\varrho^2}{\Delta^2} \sin^2 S \sin^2 \sigma' (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \cos^3\psi \cos^2\omega\, d\omega\, d\psi\,.$$

Um die Lichtmenge zu haben, welche von dem ganzen im aschfarbenen Lichte leuchtenden Theile der Mondoberfläche herrührt, hat man die vorstehende Gleichung in Bezug auf ψ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und in Bezug auf ω zwischen $-\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu integriren. Man findet leicht, wenn man $\frac{\varrho}{\Delta}$ noch durch den scheinbaren Halbmesser σ des Mondes (von der Erde aus gesehen) ausdrückt:

$$q' = \frac{4}{9\pi} J A_1 A_1' \sin^2 S \sin^2\sigma \sin^2\sigma' (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Durch photometrische Beobachtungen kann man diese Grösse nicht bestimmen, weil sich das von dem aschfarbenen Theile des Mondes herrührende Licht nicht von dem durch den beleuchteten Theil ausgesandten trennen lässt. Dagegen ist es nicht unmöglich, durch geeignete Methoden die Flächenhelligkeiten gleich grosser Stücke auf dem hellen und dunklen Theile der Mondscheibe mit einander zu vergleichen, und in der That sind derartige Messungen bereits von Zöllner und in neuester Zeit von mir selbst versucht worden. Theoretisch lässt sich die Flächenhelligkeit an jeder beliebigen Stelle auf dem aschfarbenen Theile des Mondes leicht bestimmen. Die scheinbare Helligkeit des Oberflächenelementes ds erhält man nach dem Früheren, wenn man die von demselben nach der Erde gelangende Lichtquantität dq' durch die scheinbare Grösse des Elementes, von der Erde aus gesehen, dividirt. Diese scheinbare Grösse von ds ist aber gleich $\frac{ds\cos\varepsilon}{\Delta^2}$; mithin erhält man die scheinbare Helligkeit h_1' an irgend einem Punkte, der durch die Coordinaten ω und ψ bestimmt ist, aus der Gleichung:

$$h_1' = \frac{dq'\Delta^2}{ds\cos\varepsilon} = \frac{2}{3\pi} J A_1 A_1' \sin^2 S \sin^2\sigma' (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\cos\psi\cos\omega.$$

Dass diese Formel und infolge dessen auch das dabei vorausgesetzte Lambert'sche Gesetz der Wirklichkeit nicht entspricht, geht daraus hervor, dass nach derselben für $\omega = 90°$ h_1' verschwinden müsste, die Helligkeit am Rande also gleich Null sein sollte, während thatsächlich der Rand scharf begrenzt und sogar eher heller als die übrigen Partien der nicht beleuchteten Scheibe erscheint.

Mit Berücksichtigung der anderen Beleuchtungsgesetze erhält man ohne Schwierigkeit für die scheinbare Helligkeit des aschfarbenen Theiles an irgend einem Punkte der Scheibe die Formeln:

$$h_2' = \tfrac{1}{4} J A_2 A_2' \sin^2 S \sin^2 \sigma' \left\{1 - \cos\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\alpha}{2} \log\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right\},$$

$$h_3' = \tfrac{1}{4} J A_3 A_3' \sin^2 S \sin^2 \sigma' \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Man sieht, dass nach diesen beiden Formeln die scheinbare Helligkeit von ω und ψ unabhängig ist und daher in allen Punkten des aschfarbenen Theiles gleich sein sollte, ein Resultat, welches mit der directen Beobachtung jedenfalls besser harmonirt, als das Ergebniss nach der Lambert'schen Theorie.

Hat man durch irgend ein Verfahren das Helligkeitsverhältniss des aschfarbenen Lichtes zu dem beleuchteten Theile des Mondes bestimmt, so geben die soeben abgeleiteten Formeln in Verbindung mit den früheren Gleichungen (22) ein Mittel an die Hand, um einen angenäherten Werth für die mittlere Albedo der Erde abzuleiten. Wir wollen annehmen, dass die beiden verglichenen Stellen der Mondscheibe in der Nähe des Äquators gelegen sind, so dass also $\psi = 0$ zu setzen ist; ferner soll die Länge der auf dem hellen Theile gemessenen Stelle ω, die Länge der auf dem dunklen Theile betrachteten ω' heissen; endlich wollen wir noch die scheinbaren Halbmesser der Sonne S und s, von der Erde und dem Monde aus gesehen, als gleich betrachten, dann erhält man durch Division der obigen Gleichungen in die Gleichungen (22) die Helligkeitsverhältnisse:

$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{h_1'} = \dfrac{3\pi}{2A_1' \sin^2\sigma'} \dfrac{\cos(\omega - \alpha)}{(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\cos\omega}, \\ \dfrac{h_2}{h_2'} = \dfrac{2}{A_2' \sin^2\sigma'} \dfrac{1 + \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \cos\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\log\cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}, \\ \dfrac{h_3}{h_3'} = \dfrac{2}{A_3' \sin^2\sigma'} \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{tang}\omega}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die mittlere Albedo der Erde berechnen. Es darf aber dabei nicht vergessen werden, dass die Formeln nur gelten, wenn die beiden verglichenen Stellen der Mondoberfläche dieselbe Reflexionsfähigkeit besitzen, eine Voraussetzung, die nicht ohne Weiteres acceptirt werden kann. In der Praxis wird man daher gut thun, die Beobachtungen bei verschiedenen Mondphasen und an möglichst vielen Punkten der Mondscheibe anzustellen und aus allen so erhaltenen Werthen der Albedo einen Mittelwerth zu bilden.

2. Beleuchtung eines Systems kleiner Körper. Die Seeliger'sche Theorie des Saturnringes.

Bei einer Reihe von optischen Erscheinungen der Erdatmosphäre tritt die Aufgabe auf, die Lichtmenge zu bestimmen, welche ein Aggregat von unendlich vielen ganz zufällig vertheilten kleinen Körperchen, deren Dimensionen im Verhältniss zu ihren gegenseitigen Entfernungen als klein anzusehen sind, nach einer beliebigen Richtung aussendet, wenn dasselbe in irgend einer anderen Richtung von der Sonne beleuchtet wird. Hierher gehören die Untersuchungen über die Reflexion des Lichtes an den in der Atmosphäre vertheilten Wasserbläschen und die damit im Zusammenhange stehenden Erscheinungen der Morgen- und Abendröthe, ferner die Versuche zur Erklärung der blauen Farbe des Himmels und endlich die Untersuchungen über die Intensität des diffusen Tageslichtes. Alle diese Probleme, deren theoretische Behandlung zum Theil mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist, liegen schon ausserhalb der Grenze des eigentlichen Gebietes der Astrophotometrie und können daher hier mit Fug und Recht unberücksichtigt bleiben. Was die Astrophotometrie im engeren Sinne anbetrifft, so kommt die bezeichnete Aufgabe zur Verwendung bei dem Zodiakallicht, sofern dasselbe als Licht betrachtet werden darf, welches von einer ungeheuer grossen Menge von Meteoroiden zwischen Sonne und Erde reflectirt wird, und vor Allem bei dem Saturnringe, welcher nach der jetzt allgemein acceptirten Maxwell-Hirn'schen Ansicht aus getrennten Theilchen besteht, die sich wie ein dichter Schwarm von Satelliten um den Saturn bewegen. Soweit die Aufgabe unter gewissen vereinfachenden Annahmen überhaupt eine Lösung zulässt, ist sie bisher nur von Seeliger[1]) ausführlich und erschöpfend behandelt worden. Im Folgenden sollen die wichtigsten Ergebnisse dieser theoretischen Untersuchungen wiedergegeben und namentlich etwas ausführlicher auf die Beleuchtung des Saturnringes eingegangen werden.

Man denke sich zunächst ein irgendwie gestaltetes System von einzelnen getrennten Körperchen und führe die Beschränkung ein, dass diese Theilchen sämmtlich gleich gross sind und eine kugelförmige Gestalt besitzen, ferner dass ihre gegenseitigen Abstände gross sind im Verhältniss zu ihren Dimensionen. Diese Beschränkungen erleichtern wesentlich die Lösung der Aufgabe, sie sind aber nicht unbedingt erforderlich; denn,

1) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Bd. 16, p. 405 und Bd. 18, p. 1.

wie Seeliger gezeigt hat, lässt sich auch der allgemeinere Fall behandeln, wo das System aus Kugeln von beliebiger Grösse in beliebigem Mischungsverhältnisse besteht. Es werde endlich noch die Lichtquelle, die Sonne, als ein leuchtender Punkt angesehen.

Wenn ein solcher Schwarm von Körperchen in einer gewissen Richtung beleuchtet wird, so ist klar, dass ein einzelnes bestimmtes Partikelchen im Inneren der Masse einerseits von anderen Theilchen beschattet, andererseits, wenn es von aussen her in einer gewissen Richtung betrachtet wird, durch andere davor liegende Partikelchen theilweise verdeckt werden kann. Die beschatteten und verdeckten Theile sind im Allgemeinen von einander verschieden, nur im Moment der genauen Opposition fallen sie zusammen. Sobald die Opposition vorüber ist, treten zu den verdeckten Partien noch die beschatteten hinzu, und es lässt sich daraus sofort ersehen, dass die Helligkeit einer solchen wolkenartigen Masse in der Nähe der Opposition merklich variiren kann, besonders dann, wenn die Masse wenig durchsichtig ist, die Theilchen also verhältnissmässig nahe bei einander liegen. Diese Lichtänderung in der Nähe der Opposition ist von dem Beleuchtungsgesetze, welches auf die einzelnen Theilchen anzuwenden ist, so gut wie gänzlich unabhängig. Erst bei grösseren Phasen kommt die Form dieses Gesetzes in Frage, und in diesem Falle ist daher die theoretische Behandlung des Problems am schwierigsten und unsichersten.

Ein unendlich kleines Element einer im Inneren der Masse gelegenen Kugel sende, wenn es frei wäre, dem Auge des Beobachters die Lichtmenge dq' zu. Der Radius der sämmtlichen Kugeln sei ϱ. Nun kann dieses Element durch andere Kugeln beschattet oder verdeckt sein, und es wird daher die wirkliche Lichtmenge desselben, die mit dq bezeichnet werde, im Allgemeinen kleiner sein als dq'. Es handelt sich darum, einen Durchschnittswerth für dq zu bestimmen, wenn sehr viele solcher Elemente in Frage kommen. Ist nun p die Anzahl der Fälle, in denen ein Element ganz frei liegt, p' die Anzahl der Fälle, in denen es beschattet oder verdeckt ist, so gelangt von den p Elementen im Ganzen die Lichtmenge pdq', von den p' Elementen dagegen die Lichtmenge Null in das Auge. Der Mittelwerth aller Lichtmengen ist daher:

$$dq = dq' \frac{p}{p + p'},$$

oder, wenn $\frac{p}{p + p'}$ mit w bezeichnet wird:

$$dq = w\, dq'.$$

Sind die Kugeln ganz zufällig innerhalb der Masse vertheilt, so ist w die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unendlich kleines Element im Inneren weder beschattet noch verdeckt ist. In Figur 19 bedeute R einen irgendwie gestalteten Raum, der mit zerstreut reflectirenden Theilchen angefüllt ist; df sei ein unendlich kleines Element. Von df werden zwei Gerade nach der Sonne und nach der Erde gezogen, und um diese als Axe zwei Kreiscylinder construirt gedacht mit den Durchmessern 2ϱ, welche sich an dem unteren Ende durchschneiden. Der von den Cylindern innerhalb der Masse eingeschlossene Raum heisse V. Wenn nun von den sämmtlichen Kugeln, welche in R vertheilt sind, keine einzige so liegt, dass ihr Mittelpunkt in den Raum V fällt, so ist das Element df weder beschattet noch verdeckt. Man kann also w auch definiren als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sämmtliche Kugelmittelpunkte ausserhalb des Raumes V liegen. Die Dimensionen der einzelnen Kugeln mögen im Verhältniss zur Ausdehnung der ganzen Masse R als sehr klein vorausgesetzt sein; dann wird man w für alle Elemente einer und derselben Kugel als nahe gleich annehmen können und hat dann für die von einer ganzen Kugel ausgesandte Lichtmenge die Gleichung:

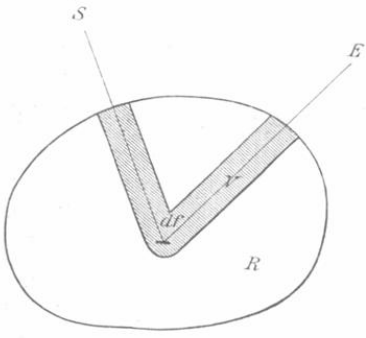

Fig. 19.

$$q = w q' .$$

q' ist die Lichtquantität, welche eine einzelne Kugel nach der Erde ausstrahlen würde, wenn sie isolirt läge. Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen wird aber q' ausgedrückt durch die Formel:

$$q' = \Gamma f(\alpha) ,$$

wo $f(\alpha)$ die Abhängigkeit von dem Phasenwinkel α angiebt, die je nach dem zu Grunde gelegten Beleuchtungsgesetze verschieden ist, und Γ eine Constante bedeutet, die von der Grösse der Kugel, von der Reflexionsfähigkeit u. s. w. abhängt. Die Anzahl der sämmtlichen in R enthaltenen Kugeln sei N. Ist nun diese Anzahl gross, so wird man ohne erheblichen Fehler annehmen dürfen, dass bei zufälliger Anordnung der Theilchen der ganze Raum nahezu gleichmässig mit Kugeln angefüllt ist. Unter dieser Voraussetzung sind in der Raumeinheit $\frac{N}{R}$ Kugeln enthalten, und in einem Volumelemente dv beträgt die Anzahl der Kugeln $\frac{N}{R} dv$. Da nach Obigem die durchschnittliche Lichtmenge, welche eine einzelne Kugel

aussendet, gleich wq' ist, so wird die von dem Volumelemente dv ausgehende Lichtmenge gegeben durch:

$$dQ = \frac{N}{R}\, dv\, wq',$$

oder nach Substitution des Werthes von q' durch:

$$dQ = \Gamma f(\alpha)\, w\, \frac{N}{R}\, dv. \tag{1}$$

Das Volumelement dv kann man sich ersetzt denken durch $dx\,d\sigma$, wo dx das Element der Geraden ist, die von dv nach dem Beobachter hin gezogen ist, und $d\sigma$ die scheinbare Grösse von dv repräsentirt. Man hat also:

$$dQ = \Gamma f(\alpha)\, w\, \frac{N}{R}\, dx\, d\sigma,$$

und daher folgt für die Lichtquantität aller derjenigen Kugeln, welche überhaupt einen Beitrag zu der Helligkeit von $d\sigma$ liefern, der Werth:

$$Q = \Gamma f(\alpha)\, \frac{N}{R}\, d\sigma \int_0^X w\, dx,$$

wobei also $f(\alpha)$ als constant angesehen wird, und X die Länge der Strecke innerhalb der Masse von dem Elemente dv an bis zu der äusseren Begrenzung in der Richtung nach dem Beobachter zu bedeutet.

Die mittlere scheinbare Helligkeit von $d\sigma$, oder, wie man sie auch nennen kann, die Flächenhelligkeit von $d\sigma$, d. h. nach dem Früheren die ausgesandte Lichtquantität, dividirt durch die scheinbare Grösse, wird nun:

$$J = \Gamma f(\alpha)\, \frac{N}{R} \int_0^X w\, dx. \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit w ist eine Function der Lage der betrachteten kleinen Kugel innerhalb des Raumes R und hängt ausserdem noch von den Richtungen nach Sonne und Erde ab; eine Bestimmung dieser Grösse ist nur unter gewissen Voraussetzungen möglich.

Befindet sich nur eine einzige Kugel in dem Raume R, so bedeute w_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mittelpunkt derselben ausserhalb des Raumes V oder innerhalb des Raumes $R - V$ liegt. Ist dann ferner w_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zweite Kugel dieselbe

Bedingung erfüllt, während der Mittelpunkt der ersten bereits im Raume $R - V$ liegt, und sind w_3, w_4 . . . . w_N die entsprechenden Werthe für 3, 4 . . . . N Kugeln, so ergiebt sich nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_N.$$

Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine erste Kugel innerhalb von V liegt, ausgedrückt durch $\frac{V}{R}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit w_1 dafür, dass sie ausserhalb von V liegt, gegeben durch:

$$w_1 = 1 - \frac{V}{R}.$$

Liegt aber eine Kugel bereits in R, so bleibt für den Mittelpunkt einer zweiten Kugel nur der Raum $R - k$ übrig, wo $k = \frac{32}{3}\varrho^3\pi$ ist (siehe nebenstehende kleine Figur 20). Da nun die erste Kugel theilweise im Raume V liegen kann, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit w_2, falls ε_1' einen ausserordentlich kleinen positiven echten Bruch bedeutet, ausdrücken durch:

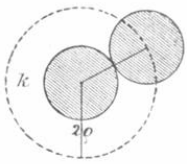

Fig. 20.

$$w_2 = 1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}.$$

Kommt noch eine dritte Kugel hinzu, so bleibt für den Mittelpunkt derselben ein Raum übrig, der grösser ist als $R - 2k$, weil das k der zweiten und dritten Kugel sich mit dem der ersten und zweiten zum Theil deckt. Bezeichnet also ε_2 einen echten Bruch, so ist der für das Centrum der dritten Kugel überhaupt verfügbare Raum $R - 2\varepsilon_2 k$, und da die Kugeln zum Theil wieder in den Raum V hineinreichen können, so wird:

$$w_3 = 1 - \frac{V - 2\varepsilon_2' k}{R - 2\varepsilon_2 k}.$$

Ganz allgemein wird ferner:

$$w_N = 1 - \frac{V - (N-1)\varepsilon_{N-1}' k}{R - (N-1)\varepsilon_{N-1} k},$$

und mithin:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right)\left(1 - \frac{V - \varepsilon_1' k}{R - k}\right) \cdots \left(1 - \frac{V - (N-1)\varepsilon_{N-1}' k}{R - (N-1)\varepsilon_{N-1} k}\right).$$

Eine strenge Berechnung der Grösse w ist im Allgemeinen nicht möglich, wenn die Anzahl der Kugeln sehr gross, das betrachtete System also sehr dicht angenommen werden muss. Nur dann lässt sich ein

Näherungsausdruck einführen, wenn die Materie dünn vertheilt ist, wie man es z. B. bei dem das Zodiakallicht veranlassenden Meteoroidenringe und wahrscheinlich auch bei dem Saturnringe voraussetzen darf. Der Gesammtinhalt aller Kugeln kann in diesem vereinfachten Falle, der hier allein weiter verfolgt werden soll, im Vergleich zu dem ganzen Raume R als klein angesehen werden, und man wird keinen sehr grossen Fehler begehen, wenn man bei der Entwicklung des obigen Ausdruckes von w alle Glieder fortlässt, in denen der ausserordentlich kleine Factor $\frac{k}{R}$ oder eine Potenz desselben auftritt. Man erhält dann einfach:

$$w = \left(1 - \frac{V}{R}\right)^N.$$

Nun kann man die weitere vereinfachende Annahme machen, die jedenfalls in den oben erwähnten Fällen gestattet sein wird, dass $\frac{V}{R}$ klein ist und dass infolge dessen die höheren Potenzen von $\frac{V}{R}$ gegen die erste vernachlässigt werden dürfen; dann wird:

$$\log w = N \log\left(1 - \frac{V}{R}\right) = -N\frac{V}{R},$$

oder:

$$w = e^{-N\frac{V}{R}}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in Gleichung (2) ergiebt sich nun:

$$J = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{R} \int_0^X e^{-N\frac{V}{R}} dx. \tag{3}$$

Diese Gleichung schliesst alle Fälle der Beleuchtung eines Systems kleiner Körper, die nicht allzu dicht vertheilt sind, in sich. Ihre Auflösung ist im Allgemeinen, da V vom Phasenwinkel abhängt, äusserst schwierig, insbesondere bei einer beliebigen unregelmässigen Gestaltung der ganzen Masse, wie sie z. B. beim Zodiakallicht anzunehmen ist. Seeliger hat den Fall einer kugelförmigen homogenen Staubwolke unter der Voraussetzung, dass der Phasenwinkel nicht zu klein ist, ausführlich behandelt und gelangt dabei zu einem verhältnissmässig einfachen Ausdrucke; unter der speciellen Annahme, dass die Masse so dicht ist, dass sie als undurchsichtig betrachtet werden darf, findet er die Gesammtlichtmenge identisch mit der von einer festen Kugel ausgesandten, welche denselben Durchmesser wie die Staubwolke besitzt.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo der Raum R von zwei parallelen Ebenen begrenzt wird, wie man es z. B. beim Saturnringe

annimmt. Ist in Figur 21 H die Gesammtdicke der Schicht, h der senkrechte Abstand eines Volumelementes von der oberen begrenzenden Ebene, sind ferner i und ε die Winkel, welche die Normale zu dieser Ebene mit den Richtungen nach Sonne und Erde hin bildet, so hat man $h = x \cos \varepsilon$ und mithin durch Substitution in (3):

$$J = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \int_0^H e^{-N\frac{V}{R}} dh . \tag{4}$$

Das Volumen V besteht aus vier Theilen, aus den beiden cylindrischen Räumen V_0 und V_1, aus dem beiden Cylindern gemeinsamen Stück G und einem kleinen von der Kugel begrenzten Stück, das ohne Bedenken vernachlässigt werden kann. Für den Fall, dass der Phasenwinkel nicht sehr klein ist, kann man auch das Stück G gegenüber dem Inhalte der beiden Cylinder vernachlässigen und hat dann $V = V_0 + V_1$. Nun kann man angenähert setzen:

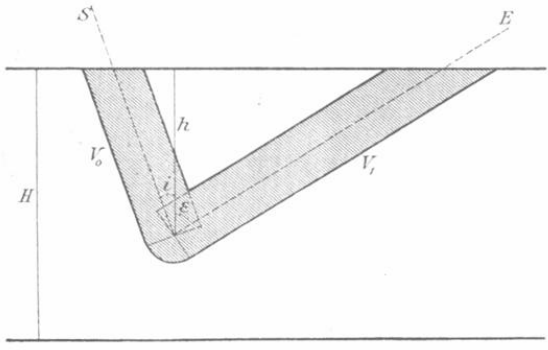

Fig. 21.

$$V_0 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i},$$

$$V_1 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos \varepsilon};$$

mithin ist:

$$V = \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon},$$

und:

$$J = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \int_0^H e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}} dh .$$

Führt man die Bezeichnungen ein $y = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}$, mithin $dy = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} dh$, so folgt:

$$J = \frac{\Gamma f(\alpha)}{\varrho^2 \pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \int_0^V e^{-y} dy ,$$

wo noch die obere Grenze Y gegeben ist durch die Gleichung:

$$Y = \frac{N}{R} \varrho^2 \pi H \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon} .$$

Daraus erhält man sofort, wenn man noch statt $\frac{\Gamma}{\varrho^2 \pi}$ die neue Constante γ einführt:

$$J = \gamma f(\alpha) \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 - e^{-Y}\right), \tag{5}$$

und da das zweite Glied für den Fall, dass der Raum R als nahezu undurchsichtig oder, was dasselbe ist, H als sehr gross angesehen werden darf, zu vernachlässigen ist, so ergiebt sich:

$$J = \gamma f(\alpha) \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} . \tag{6}$$

Dieser Ausdruck stimmt unter der Voraussetzung, dass $f(\alpha)$ als constant zu betrachten ist, mit dem Werthe überein, der für die Flächenhelligkeit eines festen Körpers nach dem Lommel-Seeliger'schen Gesetze gefunden wird.

Die Formeln (5) und (6) werden ungenau bei kleinen Werthen von α, weil dann das beiden Cylindern gemeinsame Stück nicht unberücksichtigt bleiben darf. Von besonderem Interesse ist der Fall $\alpha = 0$. Bei dieser Stellung fallen die beiden Cylinder V_0 und V_1 in einen einzigen zusammen, und das Volumen V lässt sich (wieder mit Vernachlässigung der sehr kleinen Halbkugel am unteren Ende) ausdrücken durch:

$$V = \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i} .$$

Mithin wird aus (4):

$$J_0 = \Gamma f(0) \frac{N}{R \cos i} \int_0^H e^{-\frac{N}{R} \varrho^2 \pi \frac{h}{\cos i}} dh ,$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$J_0 = \gamma f(0) \left\{ 1 - e^{-N \frac{H}{R} \frac{\varrho^2 \pi}{\cos i}} \right\} . \tag{7}$$

Einen wesentlich hiervon verschiedenen Werth erhält man, wenn man die obige Formel (5) auf den Fall $\alpha = 0$ anwendet. Da hierbei $i = \varepsilon$ sein muss, so wird die Flächenhelligkeit, die wir jetzt J_0' nennen wollen, ausgedrückt durch:

$$J_0' = \frac{1}{2} \gamma f(0) \left\{ 1 - e^{-2N \frac{H}{R} \frac{\varrho^2 \pi}{\cos i}} \right\} .$$

Aus der Vergleichung mit Formel (7) folgt dann:

$$\frac{J_0}{J_0'} = 2\,\frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist $\lambda = N\,\frac{H}{R}\,\frac{\varrho^2\pi}{\cos i}$.

Ist das System fast undurchsichtig, also H und demnach auch λ als sehr gross anzusehen, so wird $\frac{J_0}{J_0'} = 2$. Daraus ersieht man, dass bei einem sehr dichten System von kleinen Körpern die Helligkeit in unmittelbarer Nähe der Opposition doppelt so stark anwachsen kann, wie bei einem festen Körper, für welchen das Lommel-Seeliger'sche Beleuchtungsgesetz Gültigkeit hat.

Ist das System nicht als fast undurchsichtig zu betrachten, so wird der Quotient $\frac{J_0}{J_0'}$ stets kleiner als 2, und wenn endlich die Masse äusserst durchsichtig, also λ sehr klein ist, so nähert sich der Bruch $\frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}}$ dem Grenzwerthe $\frac{1}{2}$, und mithin $\frac{J_0}{J_0'}$ dem Grenzwerthe 1. Bei sehr durchsichtigen Massen, wie sie z. B. beim Zodiakallicht in Betracht kommen mögen, wird die Helligkeitszunahme in der Nähe der Opposition nicht so sehr ins Auge fallen.

Es soll nun noch etwas specieller auf die Seeliger'sche Beleuchtungstheorie des Saturnsystems eingegangen werden, welche deshalb von besonderem Interesse ist, weil ihre Ergebnisse durch die neuesten Helligkeitsmessungen des Planeten Saturn in vollem Umfange bestätigt werden. Dass der Saturnring als ein Aggregat von getrennten Massentheilchen zu betrachten ist, dürfte gegenwärtig bei den Astronomen kaum noch auf Widerspruch stossen, nachdem insbesondere durch die Maxwell'schen Untersuchungen festgestellt ist, dass die Annahme eines festen Zustandes wenig Wahrscheinlichkeit für sich hat. Wie schon der blosse Augenschein lehrt, kann der Saturnring nicht als ein vollkommen homogenes Gebilde angesehen werden. Er besteht aus dem der Planetenkugel am nächsten liegenden sogenannten dunklen Ringe, dem sehr hellen inneren Ringe und dem durch die Cassini'sche Trennungslinie davon geschiedenen, etwas schwächeren äusseren Ringe. Die beiden letzten Theile, die hier allein in Betracht zu ziehen sind, wird man als ziemlich dicht und nahezu undurchsichtig voraussetzen dürfen. In voller Strenge ist die Theorie natürlich nicht anwendbar, weil sie eine vollkommen gleichmässige Vertheilung der einzelnen Partikelchen verlangt, während in Wirklichkeit

die Theilchen an einigen Stellen des Ringes dichter, an anderen dünner stehen werden. Auch ist es schwerlich statthaft, den Saturnring als einen vollkommen regelmässigen, von zwei parallelen Ebenen begrenzten cylindrischen Raum zu betrachten. Das Resultat der Untersuchung wird daher nur ein genähertes sein können.

Bei den vorangehenden allgemeinen Betrachtungen war der Raum V berechnet worden mit Vernachlässigung des kugelförmig begrenzten Stückes am Durchschnitt der beiden Cylinder und des den beiden Cylindern gemeinsamen Stückes. Die erstere Vereinfachung wird statthaft sein, da die einzelnen Kugeln gegenüber den Cylindern V_0 und V_1 stets klein sind; dagegen wird es rathsam sein, beim Saturnringe das gemeinsame Stück G mit zu berücksichtigen. Man hat dann:

$$V = V_0 + V_1 - G .$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur für alle diejenigen Volumelemente des Ringes, für welche der zugehörige Raum G gänzlich innerhalb des Ringes liegt und nicht von der oberen Ringebene geschnitten wird. Ist dies letztere der Fall, so bleibt ein Theil von G, der mit Σ bezeichnet werden soll, ausserhalb des Ringes, und es wird dann:

$$V = V_0 + V_1 - G + \Sigma.$$

Nennt man nun h_1 denjenigen Werth von h, für welchen Σ gerade verschwindet, so wird die Flächenhelligkeit des Saturnringes nach Gleichung (4) ausgedrückt durch:

$$(8) \qquad J = \Gamma f(\alpha) \frac{N}{R \cos \varepsilon} \left\{ \int_0^{h_1} e^{-\frac{N}{R}(V_0 + V_1 - G + \Sigma)} dh + \int_{h_1}^{H} e^{-\frac{N}{R}(V_0 + V_1 - G)} dh \right\}.$$

Führt man noch die Elevationswinkel A und A' von Erde und Sonne über der Ringebene ein durch die Relationen $A = 90^0 - \varepsilon$ und $A' = 90^0 - i$, so ist mit ausreichender Genauigkeit:

$$V_0 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\sin A} ,$$

$$V_1 = \varrho^2 \pi \frac{h}{\sin A'} .$$

Die Berechnung der Räume G und Σ ist etwas umständlich und soll hier übergangen werden. Nach den Seeliger'schen[1]) Entwicklungen ist:

1) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Band 16, Seite 477 ff. und 495 ff.

$$G = \frac{4}{3}\varrho^3 \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

und:

$$\Sigma = \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin\alpha \sin A \sin A'} \frac{\varrho^3}{\cos\mu} \left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi\right\},$$

wobei die Grössen μ und φ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\cos A \sin\beta}{\sin A + \sin A'} \sin\alpha,$$

$$\varrho \sin\varphi = \frac{h \cos\mu \sin\alpha}{\sin A + \sin A'}.$$

β ist dabei der Winkel zwischen der durch Saturn, Sonne und Erde gelegten Ebene und der durch Saturn und Erde senkrecht zur Ringebene gelegten Ebene.

Der Grenzwerth h_1 ist endlich nach Seeliger bestimmt durch:

$$h_1 = \frac{\varrho(\sin A + \sin A')}{\sin\alpha}.$$

Man hat nun:

$$V_0 + V_1 - G = \varrho^2\pi h \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} - \frac{4}{3}\varrho^3 \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$V_0 + V_1 - G + \Sigma =$$

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin\alpha \sin A \sin A'} \frac{\varrho^3}{\cos\mu} \left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\varphi\right\} - \frac{4}{3}\varrho^3 \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Da der Phasenwinkel α beim Saturn stets klein ist (im Maximum 6°5), so kann man ohne erheblichen Fehler setzen:

$$1 + \cos\alpha = 2.$$

Ferner sind die Elevationswinkel A und A' stets nur um sehr kleine Beträge von einander verschieden, und man darf daher auch setzen:

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} = 4.$$

Endlich ist der Winkel μ von derselben Ordnung wie α, und man darf daher $\cos\mu$ gleich 1 setzen.

Mit diesen Vereinfachungen ergiebt sich:

$$V_0 + V_1 - G = \varrho^2\pi h \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A \sin A'} - \frac{8}{3}\frac{\varrho^3}{\sin\alpha},$$

$$V_0 + V_1 - G + \Sigma = \frac{4\varrho^3}{\sin\alpha}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\varphi - \frac{2}{3}\right\}.$$

Das zweite Integral in Gleichung (8) lässt sich nun durch Einführung des ersten dieser Werthe leicht berechnen. Man hat:

$$\int_{h_1}^{H} e^{-\frac{N}{R}(V_0+V_1-G)}\,dh$$

$$= \frac{\sin A \sin A'}{\frac{N}{R}\varrho^2\pi(\sin A+\sin A')}\, e^{\frac{8}{3}\frac{N}{R}\frac{\varrho^3}{\sin\alpha}} \left\{ e^{-\frac{N}{R}\varrho^2\pi\frac{\sin A+\sin A'}{\sin A \sin A'}h_1} - e^{-\frac{N}{R}\varrho^2\pi\frac{\sin A+\sin A'}{\sin A \sin A'}H} \right\}.$$

Das zweite Glied in der Klammer ist zu vernachlässigen, weil der Ring als undurchsichtig und mithin H als sehr gross angenommen werden kann. Führt man noch die Bezeichnungen ein:

$$\delta = \frac{32}{3}\frac{\varrho^3\pi}{R},$$

$$\xi = \frac{N\delta}{\sin\alpha},$$

so wird, wenn man den Werth von h_1 substituirt:

$$(10) \qquad \int_{h_1}^{H} e^{-\frac{N}{R}(V_0+V_1-G)}\,dh = \frac{32}{3}\,\frac{\varrho}{\xi\sin\alpha}\,\frac{\sin A \sin A'}{\sin A+\sin A'}\, e^{-\xi\frac{3\pi-2}{8\pi}}.$$

Das erste Integral in Gleichung (8) lässt sich, wenn man die Variable h durch φ ersetzt, in der Form schreiben:

$$\int_0^{h_1} e^{-\frac{N}{R}(V_0+V_1-G+\Sigma)}\,dh = \varrho\,\frac{\sin A+\sin A'}{\sin\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{N}{R}(V_0+V_1-G+\Sigma)}\cos\varphi\,d\varphi,$$

und wenn man die Grösse Φ einführt durch die Substitution:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\sin\varphi - \frac{2}{3}\right\},$$

so wird:

$$(11) \qquad \int_0^{h_1} e^{-\frac{N}{R}(V_0+V_1-G+\Sigma)}\,dh = \varrho\,\frac{\sin A+\sin A'}{\sin\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi\Phi}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Durch Substitution von (10) und (11) in (8) ergiebt sich nun:

$$J = If(\alpha)\,\frac{\varrho(\sin A+\sin A')}{R\delta\sin A}\left\{\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi\Phi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{8}{3}e^{-\xi\frac{3\pi-2}{8\pi}}\right\}.$$

Da $f(\alpha)$ durchweg als nahezu constant angesehen worden ist, so kann man noch den Werth $\frac{\Gamma f(\alpha)\,\varrho}{R\delta}$ durch eine einzige Constante Γ'' ersetzen und erhält dann, mit Einführung der Bezeichnungen:

$$\mathfrak{A} = \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi\Phi} \cos\varphi \, d\varphi \,,$$

$$\mathfrak{B} = \frac{8}{3} e^{-\xi\frac{3\pi-2}{8\pi}} \,,$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \,,$$

die Endgleichung:

$$J = \Gamma'' \mathfrak{C} \frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \,. \tag{12}$$

Der Bruch $\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A}$ unterscheidet sich stets nur wenig von dem Werthe 2, und da $\mathfrak{C}$ von ξ allein abhängt, so folgt ohne Weiteres, dass die Flächenhelligkeit des Saturnringes stets nahezu dieselbe sein muss, mag der Ring ganz schmal erscheinen oder weit geöffnet sein, ein Resultat, welches durch die directen Beobachtungen bestätigt zu werden scheint.

Der Werth von $\mathfrak{A}$ kann nur durch mechanische Quadratur oder durch Reihenentwicklung ermittelt werden. Die Seeliger'schen Abhandlungen enthalten Tafeln, aus denen die numerischen Werthe dieser Grösse, ebenso der Grössen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, für verschiedene Werthe von ξ entnommen werden können. Da ξ vom Phasenwinkel α abhängt, so folgt das wichtige Resultat, dass die Ringhelligkeit mit dem Phasenwinkel variirt. Es ist aber ξ auch von $N\delta$ abhängig, und diese Grösse ist ein Mass für die Dichtigkeit, mit welcher die einzelnen Partikelchen in dem Ringe vertheilt sind. Bezeichnet man nämlich das ganze von sämmtlichen N Kugeln eingenommene Volumen mit K, so ist die Dichtigkeit D der Materie ausgedrückt durch: $D = \frac{K}{R}$. Nun ist aber $K = N\frac{4}{3}\varrho^3\pi$, und da nach Obigem $\delta = \frac{32}{3}\frac{\varrho^3\pi}{R}$ gesetzt war, so ist $D = \frac{1}{8}N\delta$. Für $N\delta = 0.4$ wird z. B. $D = 0.05$, d. h. etwa $\frac{1}{20}$ des gesammten Raumes des Saturnringes würde in diesem Falle mit Materie erfüllt sein.

Seeliger giebt eine Zusammenstellung der Werthe von $\log \mathfrak{C}$ für verschiedene Annahmen von $N\delta$, und es ergiebt sich aus dieser Tabelle, dass die gesammte Lichtvariation innerhalb des in Betracht gezogenen

Phasenintervalles von 0 bis 5° sehr beträchtlich ist, in der Hauptsache aber sich schon in unmittelbarer Nähe von $\alpha = 0$ abspielt, und zwar um so schneller, je kleiner $N\delta$, d. h. je geringer die Dichtigkeit der Ringmaterie angenommen wird.

In der Praxis ist es bisher noch nicht mit Erfolg versucht worden, die Flächenhelligkeit des Saturnringes zu bestimmen. Die vorhandenen zuverlässigen Messungen beziehen sich auf die Lichtquantität, welche das ganze Saturnsystem, also Kugel und Ring zusammen, nach der Erde sendet, und um diese Ergebnisse mit der Theorie zu vergleichen, ist es daher noch erforderlich, das vom Planeten selbst ausgestrahlte Licht zu berechnen. Dabei muss Rücksicht genommen werden auf die theilweise Bedeckung von Ring und Kugel. Ist Q_S die Lichtmenge, welche die frei gedachte Saturnkugel uns zusenden würde, ferner Q_F die Lichtmenge des vom Ringe verdeckten Theiles der Kugel, R die scheinbare Fläche des frei gedachten Ringes, F die scheinbare Fläche des vom Saturn verdeckten Theiles des Ringes, so ist die Gesammthelligkeit des ganzen Systems:

$$Q_B = (R - F)J + Q_S - Q_F, \tag{13}$$

wobei zunächst auf die gegenseitige Beschattung von Ring und Kugel keine Rücksicht genommen ist. Der Einfachheit wegen soll der Saturnkörper als Kugel mit dem scheinbaren Radius a betrachtet werden, ferner soll die Voraussetzung gemacht werden, die in aller Strenge allerdings nur für das Lommel-Seeliger'sche und das Euler'sche Beleuchtungsgesetz und auch für diese nur beim Phasenwinkel 0 gilt, dass nämlich die Planetenscheibe in allen Punkten gleichmässig hell ist; dann kann man setzen:

$$Q_F : Q_S = F : a^2\pi .$$

Bei Anwendung des Lommel-Seeliger'schen Gesetzes ist aber nach Formel (6) S. 62:

$$Q_S = \frac{\Gamma_2 a^2 \pi}{2}\left\{1 - \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\log\cot\frac{\alpha}{4}\right\},$$

und wenn man den Ausdruck in der Klammer mit D bezeichnet, so wird:

$$Q_S - Q_F = \frac{\Gamma_2 D}{2}\left\{a^2\pi - F\right\}.$$

Führt man nun noch die Bezeichnungen ein:

$$X = \frac{R - F}{a^2\pi},$$

$$Y = \frac{a^2\pi - F}{a^2\pi},$$

$$B = \frac{2J}{\Gamma_2},$$

so wird durch Substitution in Gleichung (13):

$$Q_B = \frac{a^2 \pi \Gamma_2}{2} \{BX + DY\}.$$

Nun ist aber nach dem Früheren $\frac{a^2 \pi}{2} \Gamma_2$ nichts Anderes als die Lichtquantität, welche die Saturnkugel allein ohne Ring bei voller Beleuchtung aussendet, und wenn diese $Q_{(0)}$ genannt wird, so ergiebt sich:

$$Q_B = Q_{(0)} \{BX + DY\}. \tag{14}$$

Eine ganz analoge Formel mit anderen Werthen für die Grössen X und Y hat Seeliger auch mit Zugrundelegung des Lambert'schen anstatt des Lommel-Seeliger'schen Gesetzes abgeleitet. Für die verschiedenen Grössen X, Y, D u. s. w. sind von ihm Tafeln berechnet, und es ist noch zu erwähnen, dass bei Berechnung dieser Grössen auch auf die Abplattung des Saturnkörpers Rücksicht genommen ist. Der Schattenwurf von dem Ringe auf den Saturn und umgekehrt ist von Seeliger ebenfalls in Rechnung gezogen, und es sind für die Grössen X und Y kleine Correctionen abgeleitet worden, die jedoch in der Praxis ohne Bedenken vernachlässigt werden dürfen, weil sie im Vergleich zu der bei photometrischen Messungen erreichbaren Genauigkeit verschwindend klein sind. Setzt man noch

$$\frac{\sin A + \sin A'}{\sin A} \mathfrak{C} X = m,$$

ferner

$$DY = n,$$

und führt statt der Grösse $\frac{2\Gamma'}{\Gamma_2}$ eine neue Constante γ ein, so wird:

$$Q_B = Q_{(0)} \{\gamma m + n\},$$

oder endlich, wenn man y statt $Q_{(0)}$ und x statt $\gamma Q_{(0)}$ schreibt:

$$Q_B = mx + ny. \tag{15}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich jede beobachtete Helligkeit des ganzen Saturnsystems auf die Helligkeit bei verschwundenem Ringe reduciren.

Die photometrischen Erscheinungen, welche der dunkle Saturnring zeigt, sind von Seeliger ebenfalls theoretisch verfolgt worden unter der Annahme, dass dieser Theil des Ringes aus Partikelchen besteht, welche weniger dicht angeordnet sind, als in dem hellen Ringe, so dass das Licht theilweise durchscheinen kann.

Eine directe Stütze erhält diese Annahme durch Beobachtungen des Trabanten Japetus, wenn derselbe durch den Schatten des Saturnsystems hindurchgeht. Eine derartige Beobachtungsreihe ist neuerdings von Barnard ausgeführt worden, und es folgt aus den Beobachtungen, dass der dunkle Ring in den dem Planeten am nächsten liegenden Theilen fast ganz durchsichtig ist, und dass die Undurchsichtigkeit erst mit der Annäherung an den hellen Ring allmählich zunimmt. Eine ausführlichere Behandlung dieses Problems ist vor Kurzem von Buchholz[1]) versucht worden.

Die Seeliger'schen Betrachtungen führen noch zu dem Schlusse, dass die Theilchen des dunklen Ringes eine etwas andere Reflexionsfähigkeit haben müssten, wie die des hellen Ringes, und Seeliger macht darauf aufmerksam, dass nach den bisherigen Beobachtungen im Laufe der Zeit Veränderungen innerhalb des Saturnringes vor sich gegangen zu sein scheinen, und zwar dass möglicher Weise die Albedo der den dunklen Ring bildenden Theilchen sich vergrössert hat.

3. Die Verfinsterungen der Jupitersatelliten.

Die Anwendung der photometrischen Hauptgesetze bietet noch ein besonderes Interesse in dem Falle der Verfinsterung eines Himmelskörpers durch einen anderen. Hierher gehören die Lichterscheinungen des Mondes während einer totalen Mondfinsterniss und die Bedeckungen der Satelliten von ihren Hauptplaneten. Die erstere Aufgabe scheint auf den ersten Blick die einfachere zu sein, weil es sich dabei nur um drei Himmelskörper (Sonne, Mond und Erde) handelt, und die ganze Erscheinung sich zu der Zeit abspielt, wo die Mittelpunkte derselben sich in einer geraden Linie befinden. In Wirklichkeit aber ist die theoretische Behandlung dieses Problems deshalb erschwert, weil bei der verhältnissmässig geringen Entfernung des Erdsystems von der Sonne diese letztere nicht als leuchtender Punkt, sondern als eine Scheibe von ungleichmässiger Helligkeit angenommen werden muss, und weil ferner die complicirte Form der Schattengrenze auf dem Monde, ausserdem die Wirkung des Halbschattens streng in Rechnung zu ziehen sind.

Eine vollständige Lösung dieser interessanten Aufgabe ist erst in allerneuester Zeit von v. Hepperger[2]) und noch eingehender und erfolg-

1) Astron. Nachr. Bd. 137, Nr. 3280.

2) Sitzungsb. der Wiener Akad. der Wiss. Math.-naturw. Classe. Bd. 104, Abth. IIa, p. 189.

reicher von Seeliger[1]) versucht worden, nachdem Letzterer bereits früher gelegentlich einer Besprechung[2]) der Arbeiten von Brosinsky und Hartmann über die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen die Frage kurz berührt hatte. Da eine ausführliche Darlegung der theoretischen Entwicklungen den Rahmen dieses Buches erheblich überschreiten würde, so muss hier der blosse Hinweis auf die genannten Arbeiten genügen. Übrigens hat sich die praktische Photometrie mit dem Problem der Mondverfinsterung bisher so gut wie gar nicht beschäftigt, und erst vor Kurzem ist von Very[3]) ein erster Versuch gemacht worden, die Helligkeitsvertheilung auf der verdunkelten Mondscheibe durch wirkliche photometrische Messungen anstatt durch blosse Schätzungen zu bestimmen.

Was nun die zweite der oben erwähnten Aufgaben, das Studium der Verfinsterungen der übrigen Planetentrabanten, anbelangt, so ist die photometrische Beobachtung dieser Phänomene, wie zuerst Cornu[4]) nachgewiesen hat, speciell im Jupitersystem, deshalb von ausserordentlicher Bedeutung, weil daraus mit viel grösserer Sicherheit als bisher der Zeitpunkt bestimmt werden kann, zu welchem sich der Trabant in einem gewissen Stadium der Verfinsterung befindet, und weil daher auch die praktische Verwendung der Jupitertrabantenbedeckungen zu Längenbestimmungen eine ganz neue erhöhte Wichtigkeit erlangt hat. Die theoretische Seite dieses Problems ist sehr ausführlich von Obrecht[5]), Wellmann[6]) und Anding[7]) behandelt worden mit voller Berücksichtigung aller dabei ins Spiel kommenden Factoren. Ersterer hat dabei eine gleichmässige Vertheilung der Helligkeit auf der Trabantenscheibe vorausgesetzt, die sowohl durch das Lommel-Seeliger'sche als auch durch das Euler'sche Beleuchtungsgesetz, jedoch nur bei voller Beleuchtung, gefordert wird, die beiden anderen haben ihren Betrachtungen das Lambert'sche Gesetz zu Grunde gelegt. In einer Besprechung der Obrecht'schen Arbeit hat Seeliger[8]) noch einige wichtige Bemerkungen über die Bedeutung

1) Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wiss. II. Classe, Bd. 19, Abth. II, p. 385.

2) Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft. Jahrg. 27 (1892), p. 186.

3) Astrophysical Journal. Vol. II, p. 293.

4) Comptes Rendus. Tome 96, p. 1609.

5) Annales de l'Observ. de Paris. Mémoires, tome 18. (Siehe auch Referat darüber: Viertelj.-Schrift der Astr. Ges. Jahrg. 20 (1885), p. 176.)

6) Wellmann, Zur Photometrie der Jupiters-Trabanten. Berlin 1887.

7) Anding, Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. Preisschrift der Univ. München. München 1889.

8) Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft. Jahrg. 20 (1885), p. 176.

verschiedener Beleuchtungsgesetze für das vorliegende Problem hinzugefügt.

Die strenge Lösung der Aufgabe führt zu ziemlich complicirten Entwicklungen. Unter gewissen Voraussetzungen gelangt man aber zu verhältnissmässig einfachen Ausdrücken, die im Folgenden etwas näher betrachtet werden sollen.

Die Aufgabe selbst ist zunächst folgendermassen zu präcisiren. Ein Jupitertrabant tritt in den Schatten seines Planeten; dabei wird allmählich ein immer grösseres Stück seines Scheibchens verfinstert, bis er zuletzt ganz unsichtbar wird. Bei dem ersten Trabanten beträgt die ganze Dauer des Phänomens $4^m\,19^s$, bei dem vierten $16^m\,27^s$. Es soll nun die Helligkeitsabnahme des Trabanten als Function der Zeit ermittelt werden.

Streng genommen müsste man zunächst auf die Bewegungsverhältnisse im Jupitersystem Rücksicht nehmen. Bei der verhältnissmässig kurzen Dauer der Erscheinung wird aber kein grosser Fehler entstehen, wenn man die Verschiebung der Schattengrenze auf dem Trabanten der Zeit proportional setzt. Zur weiteren Vereinfachung werde die Gestalt der Trabanten als kugelförmig angesehen, ferner werde die Wirkung der Jupiteratmosphäre ausser Acht gelassen. Zweifellos wird durch dieselbe eine Brechung und Schwächung der Sonnenstrahlen hervorgebracht, und die Schattengrenze auf dem Trabanten wird infolge dessen nicht scharf erscheinen; aber bei der gänzlichen Unkenntniss von der Höhe und Dichtigkeit dieser Atmosphäre fehlt jeder Anhalt für eine rechnerische Berücksichtigung ihres Einflusses. Bei der grossen Entfernung des Jupitersystems von der Sonne wird es ohne merklichen Fehler erlaubt sein, alle von einem beliebigen Punkte der Sonne nach einem beliebigen Punkte des Satelliten gelangenden Strahlen als parallel unter einander zu betrachten; man kann also die Sonne als eine punktförmige Lichtquelle ansehen und braucht auf die Wirkung des Halbschattens keine Rücksicht zu nehmen. Die Schattengrenze, welche durch den Durchschnitt des Kernschattenkegels des Jupiter mit der Trabantenkugel entsteht, projicirt sich auf der Trabantenscheibe als eine Linie von gewisser Krümmung. Da der Trabant im Verhältniss zur Jupiterkugel sehr klein ist, so kommt nur ein kleines Stück dieser Curve in Frage, und dieses Stück darf ohne allzu grossen Fehler als geradlinig angesehen werden. Sieht man ferner von dem Phasenwinkel, der beim Jupitersystem bis zu 12° steigen kann, ganz ab und berücksichtigt nur den Fall der vollen Beleuchtung, so reducirt sich das ganze Problem auf die folgende Aufgabe: Es soll die Helligkeitsabnahme einer beleuchteten Kreisscheibe ermittelt werden, wenn dieselbe von einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit über sie hinweg gehenden geradlinig begrenzten dunklen Schirme bedeckt wird.

Die Figur 22 stelle die scheinbare Trabantenscheibe dar; der Radius derselben sei r, und der kürzeste Abstand der Schattengrenze vom Mittelpunkte heisse a. Die Coordinaten irgend eines kleinen Elementes der Scheibe, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen y-Axe mit der Geraden a zusammenfällt, mögen x und y sein. Die scheinbare Helligkeit irgend eines Elementes der Scheibe wird im Allgemeinen bei voller Beleuchtung eine Function des Abstandes vom Centrum sein. Die Lichtquantität, welche durch ein solches Element zu dem Beobachter gelangt, wird also ausgedrückt werden können durch:

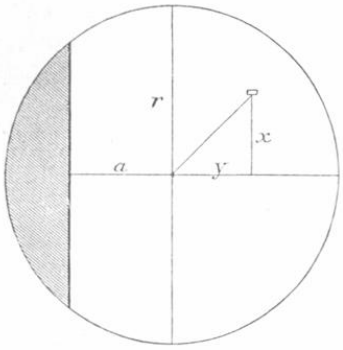

Fig. 22.

$$dq = \gamma f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy\,,$$

wo γ eine Constante ist, und wo das Beleuchtungsgesetz, von welchem die scheinbare Helligkeit abhängt, zunächst noch unbestimmt gelassen werden soll. Die gesammte Lichtmenge, welche der Trabant in dem Moment aussendet, wo die Schattengrenze auf der Scheibe den kürzesten Abstand a vom Centrum hat, ist daher, falls mehr als die Hälfte der Scheibe beleuchtet ist:

$$Q = 2\gamma \int_{-a}^{r} dy \int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2})\, dx. \tag{1}$$

Es sollen nun die bekannten Beleuchtungsgesetze auf diese Gleichung angewendet werden. Nach den Formeln (22) (S. 69) ist beim Lambertschen Gesetze die scheinbare Helligkeit eines Elementes einer Planetenscheibe[1]), für den Fall, dass der Planet voll beleuchtet ist, ausgedrückt durch:

$$h_1 = C \cos\psi \cos\omega\,,$$

wo C eine Constante bedeutet. Es ist also in der obigen Gleichung $\cos\psi \cos\omega$ statt $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ zu setzen. Die Winkel ψ und ω hängen mit den Coordinaten x und y nach den Erläuterungen auf Seite 70, wenn alle Distanzen in demselben Masse wie der scheinbare Radius r ausgedrückt werden, durch die Relationen zusammen:

$$x = r \sin\psi\,,$$
$$y = r \cos\psi \sin\omega\,.$$

1) Das Licht, welches vom Planeten auf den Trabanten reflectirt und von diesem wieder nach der Erde geworfen wird, ist hier gänzlich zu vernachlässigen.

Daraus ergiebt sich:

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = \cos\psi\cos\omega = \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r^2}},$$

und durch Substitution in (1) wird:

$$Q = 2\gamma\int_{-a}^{r} dy \int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}} dx \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r^2}}. \tag{2}$$

Um das zweite Integral aufzulösen, ist zunächst y als constant anzunehmen. Setzt man $1-\frac{y^2}{r^2} = b$ und $\frac{1}{r^2} = c$, so wird:

$$\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r^2}} = \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx\sqrt{b-cx^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{b-cx^2} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\arcsin x\sqrt{\frac{c}{b}}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2}}$$

$$= \frac{r}{2}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)\arcsin 1$$

$$= \frac{r\pi}{4}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right).$$

Damit erhält man aus Gleichung (2):

$$Q = \frac{\gamma r\pi}{2}\int_{-a}^{r}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)dy,$$

oder endlich:

$$Q = \frac{\gamma\pi}{2r}\left\{r^2(r+a) - \frac{1}{3}(r^3+a^3)\right\}. \tag{3}$$

Wäre die Scheibe ganz unbedeckt, so würde man zu setzen haben $a = r$, und erhielte dann die Lichtmenge:

$$Q_0 = \frac{\gamma\pi}{2r}\,\frac{4}{3}\,r^3. \tag{4}$$

Durch Division von (3) und (4) wird dann endlich:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\,\frac{a^3}{r^3},$$

oder, wenn man die neue Bezeichnung $\frac{a}{r} = \cos\varphi$ einführt:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos^3\varphi. \tag{5}$$

Wird also die Helligkeit des Trabanten während der Dauer einer Verfinsterung in Einheiten der Helligkeit ausgedrückt, welche derselbe vor dem Beginn der Verfinsterung hat, so giebt die Gleichung (5) die Abhängigkeit der augenblicklichen Lichtstärke von dem Werthe von a an, oder, da a der Zeit proportional ist, die Abhängigkeit von der Zeit. Für die Mitte der Verfinsterung ist $a = 0$ zu setzen, und man erhält dann aus (5) $\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2}$, die Lichtstärke ist also auf die Hälfte herabgesunken. Dies ist auch von vornherein zu erwarten, da, wie wir früher gesehen haben, nach dem Lambert'schen Beleuchtungsgesetze die scheinbare Helligkeit auf einer Planetenscheibe von der Mitte nach allen Seiten hin gleichmässig abnimmt.

Ist die Schattengrenze über die Mitte der Scheibe hinausgerückt, also weniger als die Hälfte des Trabanten erleuchtet, so erhält man die zugehörigen Werthe von Q aus den Formeln (3) und (5), wenn man a negativ rechnet.

Bei Anwendung des Lommel-Seeliger'schen und des Euler'schen Beleuchtungsgesetzes wird die Bestimmung der Lichtcurve noch einfacher. Denn in beiden Fällen ist bekanntlich bei voller Beleuchtung des Trabanten die scheinbare Helligkeit an allen Punkten der Scheibe gleich, und die Function $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ kann daher gleich 1 gesetzt werden. Die Gleichung (1) geht dann sofort in die folgende über:

$$Q = 2\gamma \int_{-a}^{r} dy \int_{0}^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx = 2\gamma \int_{-a}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy. \tag{6}$$

Nach Ausführung der einfachen Integration hat man:

$$Q = \gamma \left[y\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin \frac{y}{r} \right]_{y=-a}^{y=r},$$

und, wenn man wieder wie oben $\frac{a}{r} = \cos\varphi$ setzt:

$$Q = \gamma r^2 \{\pi + \sin\varphi \cos\varphi - \varphi\}. \tag{7}$$

Für die Helligkeit bei unbedeckter Scheibe ergiebt sich, da $a = r$ ist:

$$Q_0 = \gamma r^2 \pi,$$

und mithin wird endlich:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\pi - \varphi + \sin\varphi \cos\varphi}{\pi}. \tag{8}$$

Selbstverständlich reducirt sich auch hier für die Mitte der Verfinsterung,

d. h. für $a = 0$, die Helligkeit auf die Hälfte des ursprünglichen Betrages. Zur Vergleichung der beiden durch die Formeln (5) und (8) repräsentirten Lichtcurven kann man die Werthe von $\frac{Q}{Q_0}$ für verschiedene Werthe von a, d. h. für verschiedene Stadien der Bedeckung, berechnen. Man erhält so z. B. die folgenden Werthe:

$\frac{a}{r}$	$\frac{Q}{Q_0}$ Lambert'sches Gesetz	Diff.	$\frac{Q}{Q_0}$ Lommel-Seeliger-sches und Euler'sches Gesetz	Diff.	$\frac{a}{r}$	$\frac{Q}{Q_0}$ Lambert'sches Gesetz	Diff.	$\frac{Q}{Q_0}$ Lommel-Seeliger-sches und Euler'sches Gesetz	Diff.
1.0	1.000	7	1.000	19	0.0	0.500	75	0.500	64
0.9	0.993	21	0.981	33	— 0.1	0.425	73	0.436	63
0.8	0.972	33	0.948	42	— 0.2	0.352	70	0.373	61
0.7	0.939	43	0.906	48	— 0.3	0.282	66	0.312	60
0.6	0.896	52	0.858	54	— 0.4	0.216	60	0.252	56
0.5	0.844	60	0.804	56	— 0.5	0.156	52	0.196	54
0.4	0.784	66	0.748	60	— 0.6	0.104	43	0.142	48
0.3	0.718	70	0.688	61	— 0.7	0.061	33	0.094	42
0.2	0.648	73	0.627	63	— 0.8	0.028	21	0.052	33
0.1	0.575	75	0.564	64	— 0.9	0.007	7	0.019	19
0.0	0.500	75	0.500	64	— 1.0	0.000		0.000	

Betrachtet man die Werthe von a als Abscissen, die zugehörigen Helligkeitswerthe als Ordinaten, so sieht man, dass die beiden den obigen Zahlenreihen entsprechenden Curven sich bei $a = 0$ schneiden, und dass die dem Lambert'schen Gesetze zugehörige in der ersten Hälfte der Verfinsterung oberhalb, in der zweiten unterhalb der anderen Curve liegt. Bei $a = -0.5\,r$ ist nach dem Lambert'schen Gesetze die Lichtstärke des Trabanten, in Grössenclassen ausgedrückt, um 2.02 geringer als vor Beginn der Verfinsterung, nach den anderen Gesetzen nur um 1.77. Bei $a = -0.8\,r$ werden die entsprechenden Zahlen 3.88 und 3.21 Grössenclassen u. s. w. Wenn es möglich wäre, die Helligkeiten der Trabanten noch in diesem vorgerückten Stadium der Verfinsterung mit einiger Sicherheit zu messen, so liesse sich aus solchen Beobachtungen ein Urtheil darüber gewinnen, welches von den zu Grunde gelegten Beleuchtungsgesetzen den Vorzug verdient. Beide Curven zeigen das Charakteristische, dass die Ordinaten sich am schnellsten um die Mitte der Erscheinung ändern, und dass an dieser Stelle ein Wendepunkt

punkt vorhanden ist. Dies lässt sich auch unmittelbar aus den Gleichungen (3) und (7) ableiten, wenn man die zweiten Differentialquotienten nach a bildet. Man hat aus (3) sofort:

$$\frac{d^2 Q}{da^2} = -\frac{a\gamma\pi}{r},$$

und da der zweite Differentialquotient einer Function verschwinden muss, wenn die betreffende Curve einen Wendepunkt haben soll, so sieht man, dass die dem Lambert'schen Gesetze entsprechende Lichtcurve für $a = 0$, d. h. also in der Mitte der Verfinsterung, einen solchen besitzt.

Aus Gleichung (7) wird entsprechend nach kurzer Rechnung:

$$\frac{d^2 Q}{da^2} = -\frac{2a\gamma}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

und es folgt daher auch für die durch (7) repräsentirte Lichtcurve ein Wendepunkt bei $a = 0$.

Seeliger hat noch ganz allgemein gezeigt, dass, wie auch die Form der Function $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ beschaffen sein möge, die Lichtcurve des Trabanten während der Verfinsterung stets einen Wendepunkt für $a = 0$ besitzen muss. In der That ergiebt sich aus Gleichung (1) sofort:

$$\frac{dQ}{da} = 2\gamma \int_0^{\sqrt{r^2 - a^2}} f(\sqrt{a^2 + x^2})\, dx.$$

Daraus folgt dann weiter:

$$\frac{d^2 Q}{da^2} = 2\gamma \left\{ -\frac{a f(r)}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \int_0^{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial a}\, dx \right\}. \tag{9}$$

Nun kann man schreiben:

$$\frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial a} = 2a \frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial (a^2)},$$

und da allgemein gilt:

$$\frac{\partial f(u + v)}{\partial u} = \frac{\partial f(u + v)}{\partial (u + v)},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial a} = 2a \frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial (a^2 + x^2)}.$$

Führt man noch die neue Variable z ein durch die Substitution $a^2 + x^2 = z^2$, woraus folgt $dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}$, so wird:

$$\frac{\partial f(\sqrt{a^2 + x^2})}{\partial a}\,dx = 2a\,\frac{\partial f(z)}{\partial (z^2)}\,\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}\,dz$$

$$= a\,\frac{\partial f(z)}{\partial z}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

$$= a\,\frac{f'(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}\,dz.$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung (9) ein und beachtet, dass für z die Integrationsgrenzen r und a sind, so erhält man:

$$\frac{d^2 Q}{da^2} = -\,2a\gamma\left\{\frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \int_a^r \frac{f'(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}}\,dz\right\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet jedenfalls für $a = 0$, und es findet sich also an dieser Stelle unter allen Umständen ein Wendepunkt; es ist aber nicht nothwendig, dass dies der einzige Wendepunkt ist, den die Lichtcurve haben kann. Seeliger hat nachgewiesen, dass, wenn das Beleuchtungsgesetz z. B. die willkürliche Form hätte $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = x^2 + y^2$, die allerdings durchaus unwahrscheinlich ist, weil nach ihr die scheinbare Helligkeit in der Mitte der Scheibe gleich Null sein müsste, dann drei Wendepunkte anstatt des einen auftreten.

Der Umstand, dass jedes beliebige Beleuchtungsgesetz auf eine Lichtcurve führt, die in der Mitte der Verfinsterung einen Wendepunkt besitzt, an dieser Stelle also gradlinig verläuft, lässt es für die praktische Verwerthung von photometrischen Beobachtungen eines solchen Phänomens empfehlenswerth erscheinen, wie schon von Cornu hervorgehoben worden ist, die Messungen sämmtlich auf denjenigen Moment zu reduciren, wo die Lichtstärke des Trabanten halb so gross ist, wie vor dem Beginn der Verfinsterung, d. h. also auf den Zeitpunkt, wo der Mittelpunkt der Trabantenscheibe durch den Mantel des Tangentenkegels hindurchgeht, welcher vom Mittelpunkte der Sonne aus an den Jupiter gelegt werden kann.

Capitel III.
Die Extinction des Lichtes in der Erdatmosphäre.

Die unsere Erde umgebende Lufthülle übt auf das von den Gestirnen zu uns gelangende Licht eine absorbirende Wirkung aus. Die Sterne erscheinen uns in der Ebene schwächer als auf hohen Bergen, und auf diesen wieder schwächer, als es ohne das Vorhandensein einer Atmosphäre der Fall sein würde, und auch an ein und demselben Orte variirt die Helligkeit eines Sternes mit seiner Erhebung über den Horizont. Je weiter er vom Zenith entfernt ist und je grösser der Weg ist, den die Lichtstrahlen in der Erdatmosphäre zu durchlaufen haben, desto stärker ist auch die Absorption, welche dieselben erfahren. Aus den photometrischen Messungen geht hervor, dass in unmittelbarer Nähe des Horizontes ein Stern bereits mehr als 95 Procent von seinem ursprünglichen Lichte eingebüsst hat und um mehrere Grössenclassen schwächer erscheint als im Zenith.

Es ist klar, welch wichtige Rolle die Extinction in der Astrophotometrie spielt, und dass eine möglichst genaue Bestimmung dieses Reductionselementes eine der ersten Grundbedingungen für die Ausführung von brauchbaren photometrischen Messungen am Himmel ist. Der Gegenstand ist daher auch stets mit dem grössten Eifer sowohl auf theoretischem als auch auf praktischem Wege verfolgt worden, und wir besitzen bereits eine ziemlich umfangreiche Litteratur über denselben. Leider stellen sich einer vollkommenen Lösung der Aufgabe Hindernisse verschiedener Art entgegen, die zum Theil ganz unüberwindlich sind. Sie beruhen einmal auf der nicht genügenden Kenntniss der Ausbreitung unserer Atmosphäre und des Gesetzes, nach welchem die Dichtigkeit derselben mit der Höhe abnimmt, dann aber vor Allem auf den Veränderungen, denen die Zusammensetzung unserer Lufthülle infolge der meteorologischen Vorgänge beständig unterworfen ist. Temperatur, Luftdruck und Feuchtigkeitsgehalt der Luft wechseln ohne Aufhören und modificiren die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre. Man wird daher nicht nur an verschiedenen Orten der Erdoberfläche, sondern auch an demselben Orte zu verschiedenen Jahreszeiten, unter Umständen sogar zu verschiedenen Stunden des Tages, eine andere Wirkung der Extinction erwarten können. Dazu kommt der gänzlich uncontrolirbare Einfluss, den namentlich in den tieferen Schichten der Atmosphäre locale Verhältnisse, unter anderen die Anwesenheit von Staub- und Rauchpartikelchen, ausüben. Erschwerend

wirkt auch der Umstand, dass beim Durchgange des Lichtes durch die Atmosphäre neben der Quantität desselben auch die Qualität Änderungen erleidet, indem die verschiedenen Strahlengattungen, aus denen es zusammengesetzt ist, ungleich durch die Luftschichten beeinflusst werden. Die Wahrnehmung, dass alle Gestirne, wenn sie in die Nähe des Horizontes kommen, röthlich gefärbt erscheinen, deutet darauf hin, dass die brechbareren Lichtstrahlen viel mehr durch die Atmosphäre absorbirt werden als die rothen; infolge dessen werden auch die Extinctionserscheinungen verwickelter, wenn man es nicht mit homogenem Lichte zu thun hat, sondern, wie es bei den Sternbeobachtungen der Fall ist, mit zusammengesetztem.

Eine einheitliche Theorie kann allen diesen störenden Einflüssen unmöglich gerecht werden, und man wird sich daher begnügen müssen, den theoretischen Betrachtungen einen idealen mittleren Zustand der Erdatmosphäre zu Grunde zu legen. Eine gewisse Verwandtschaft des Problems mit dem Refractionsproblem springt sofort in die Augen; es liegt daher nahe, diejenigen Annahmen über die Constitution der Atmosphäre, welche allgemein bei der Behandlung der Refraction acceptirt worden sind, auch auf die Extinction anzuwenden, d. h. also in erster Linie vorauszusetzen, dass die Atmosphäre aus concentrischen Schichten besteht, deren Dichte und Absorptionsvermögen nach einem regelmässigen Gesetze von der Erdoberfläche nach aussen zu abnimmt.

Zwei Fragen sind es vornehmlich, die uns bei dem vorliegenden Probleme interessiren: 1) Nach welchem Gesetze nimmt die Helligkeit eines Sternes vom Zenith bis zum Horizonte ab? und: 2) Welches würde die Lichtintensität eines Sternes sein, wenn die Atmosphäre gar nicht vorhanden wäre? Die Beantwortung der ersten Frage ist für die praktische Astrophotometrie von der höchsten Bedeutung, weil davon die Möglichkeit abhängt, Messungen von Sternen, die verschiedene Zenithdistanzen haben, mit einander zu vergleichen. Die zweite Frage hat mehr theoretisches als praktisches Interesse; ihre Beantwortung verspricht Aufschluss darüber, wie die raumdurchdringende Kraft unserer Fernröhre ohne Vorhandensein der Atmosphäre zunehmen und welcher Gewinn der Astronomie eventuell schon durch Errichtung von festen Beobachtungsstationen auf hohen Bergen erwachsen würde.

Lambert[1]) und Bouguer[2]), die beiden Begründer der wissenschaftlichen Photometrie, sind die ersten gewesen, welche das Extinctionsproblem theoretisch und praktisch zu lösen versucht haben. Die von ihnen

1) Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Deutsche Ausgabe von E. Anding, Heft 2, p. 64. (Ostwald's Klassiker Nr. 32.)

2) Bouguer, Traité d'optique. Livre III, section 4, p. 315.

abgeleiteten Formeln haben bis heutigen Tages Bedeutung behalten, und der aus den Bouguer'schen Messungen hervorgehende Werth des Durchlässigkeitscoefficienten der Erdatmosphäre gilt als einer der besten für diese wichtige Constante.

Eine noch eingehendere und rationellere Behandlung hat das Problem durch Laplace[1]) erfahren, welcher sich dabei streng an die der Refractionstheorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen angeschlossen hat. Seine Theorie ist in neuerer Zeit in einigen Punkten durch Maurer[2]) und Hausdorff[3]) modificirt worden, ohne dass damit jedoch ein wesentlicher Fortschritt erzielt worden wäre.

Im Folgenden sollen die einzelnen Extinctionstheorien etwas näher behandelt werden, und es wird sich empfehlen, unmittelbar daran eine kurze Besprechung der wichtigsten Ergebnisse der praktischen Astronomie auf diesem Gebiete anzuschliessen, insbesondere die von Seidel in München, sowie die von mir in Potsdam und auf dem Säntis ausgeführten Arbeiten mit den Resultaten der Theorie zu vergleichen. Auch wird es wünschenswerth sein, wenigstens in aller Kürze auf die wichtigen Untersuchungen Langley's einzugehen, in welchen die Frage von einem ganz neuen interessanten Gesichtspunkte aus betrachtet wird.

1. Die Lambert'sche Extinctionstheorie.

Es stelle in Figur 23 $A\,A'\,B\,B'$ die von parallelen Ebenen begrenzte Schicht eines vollkommen homogenen Mittels dar, und ab bezeichne den Weg eines Lichtstrahles durch diese Schicht. Man kann sich die absorbirende Wirkung des Mittels so denken, dass der Lichtstrahl beim Durchlaufen einer unendlich kleinen Strecke ds stets einen gleich grossen Theil von derjenigen Intensität, die er am Anfange der Strecke besass, verliert. Drückt man diesen Lichtverlust durch den constanten Factor λ aus, nennt die Intensität des Lichtstrahles, wenn er im Punkte P angelangt ist, i und wenn er im Punkte P' nach Durchlaufen des Weges ds angelangt

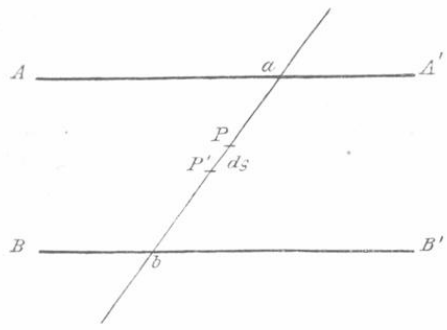

Fig. 23.

1) Laplace, Mécanique céleste. Vol. IV, p. 282.

2) Maurer, Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astron. Refraction. Diss. inaug. Zürich, 1882.

3) Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss. Jahrg. 1895, Heft 4, p. 401.

ist, $i - di$, so hat man ohne Weiteres: $di = -\lambda i$. Die Grösse λ ist unendlich klein, und man kann sie durch die ebenfalls unendlich kleine Grösse ds ersetzen, wenn man diese letztere mit einer gewissen positiven Constante ν multiplicirt. Dann erhält man:

$$di = -\nu ds\, i, \tag{1}$$

oder durch Integration:

$$\log i = -\nu s + \text{Const.},$$

mithin:

$$i = Ce^{-\nu s}.$$

Bedeutet noch J die Intensität des Lichtstrahles beim Eintritte in die Schicht im Punkte a, wo s gleich Null ist, so hat man $J = C$ und mithin $i = Je^{-\nu s}$. Die Grösse ν, welche für das betrachtete homogene Mittel charakteristisch ist, nennt man den Extinctions- oder Absorptionscoefficienten der Substanz. Ersetzt man noch $e^{-\nu}$ durch eine andere Constante c, so geht die Gleichung in die allgemein gebräuchliche über:

$$i = Jc^s. \tag{2}$$

Darin heisst c der Transmissions- oder Durchlässigkeitscoefficient der Substanz; er bezeichnet das Verhältniss der nach Durchlaufen der Wegeinheit austretenden Lichtmenge zu der in dieselbe eindringenden. Ist das Medium, in welches der Lichtstrahl eintritt, nicht homogen, so bleibt ν keine Constante, sondern ändert sich von Punkt zu Punkt auf dem Wege s; man wird im Allgemeinen haben $\nu_s = f(s)$. Aus der Gleichung (1) folgt dann:

$$\log i = -\int \nu_s ds + \text{Const.},$$

und wenn man das Integral zwischen den Grenzen 0 und s bildet, wobei zu beachten, dass $\log i$ für $s = 0$ in $\log J$ übergeht, so hat man:

$$\log \frac{i}{J} = -\int_0^s \nu_s ds. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist unmittelbar auf das Extinctionsproblem anwendbar, wenn man die Erdatmosphäre aus lauter unendlich schmalen, concentrischen Luftschichten zusammengesetzt denkt, deren Absorptionsfähigkeit von der Erdoberfläche an mit der Höhe beständig abnimmt. Ist das Gesetz dieser Abnahme bekannt, so lässt sich die Aufgabe streng lösen. Lambert hat nun die vereinfachende Voraussetzung gemacht, dass der Weg des Lichtstrahles durch die Atmosphäre als geradlinig zu betrachten sei. In aller Strenge ist diese Annahme nur für solche Strahlen zulässig, die senkrecht in die Atmosphäre eindringen, also für Sterne im Zenith des

Beobachtungsortes. Je weiter die Sterne vom Zenith entfernt sind, desto stärker weicht der Weg der Lichtstrahlen infolge der Brechung in den einzelnen Luftschichten von der geraden Linie ab, und in unmittelbarer Nähe des Horizontes ist die Refractionskrümmung bereits sehr merklich. Dadurch, dass Lambert die Brechung in der Atmosphäre vernachlässigt, findet er die Weglängen durchgängig zu klein, und daher müssen auch die nach seiner Formel berechneten Extinctionen im Allgemeinen zu klein sein; indessen ist der Fehler vom Zenith bis zu wenigen Graden über dem Horizont kaum merklich.

In der nebenstehenden Figur 24 bedeute AA die Oberfläche der Erde, BB die Grenze der Atmosphäre. Die Höhe der letzteren sei mit H bezeichnet und der Radius der Erde mit R. PO sei der Weg eines Lichtstrahles, welcher bei P in die Atmosphäre eindringt und in O die Erdoberfläche erreicht; derselbe bilde mit der Zenithrichtung CO den Winkel z. Endlich sei M ein Punkt auf dem Wege des Lichtstrahles, dessen Abstand vom Erdmittelpunkte $R + h$ heissen möge. Bezeichnet man noch die Strecke MO mit s, so hat man in dem Dreieck MOC:

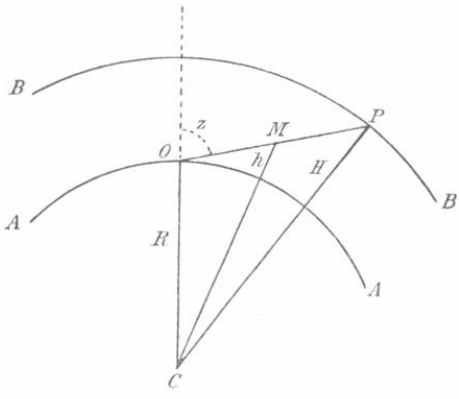

Fig. 24.

$$(R + h)^2 = R^2 + s^2 + 2Rs\cos z,$$

woraus sich ergiebt:

$$s = -R\cos z \pm \sqrt{R^2\cos^2 z + h^2 + 2Rh}.$$

Da s eine positive Länge sein muss, so kann nur das positive Vorzeichen der Wurzelgrösse in Frage kommen. Setzt man noch $h^2 + 2Rh = y^2$, so wird:

$$s = -R\cos z + \sqrt{y^2 + R^2\cos^2 z},$$

und durch Differentiation:

$$ds = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + R^2\cos^2 z}}.$$

Wir wollen nun die Helligkeit eines Lichtstrahles beim Eintritt in die Atmosphäre J und bei der Ankunft an der Erdoberfläche J_z nennen, ferner

noch die ganze Weglänge in der Atmosphäre mit S bezeichnen; dann erhält man aus Gleichung (3) unmittelbar:

$$\log \frac{J_z}{J} = -\int_0^S \nu_s ds = +\int_S^0 \nu_s ds,$$

oder wenn man den obigen Werth von ds substituirt:

$$\log \frac{J_z}{J} = \int_{s=S}^{s=0} \nu_s \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + R^2 \cos^2 z}}.$$

An der Erdoberfläche (für $s = S$) wird h und mithin auch $y = 0$; an der Grenze der Atmosphäre dagegen (für $s = 0$) geht h in H über, und der entsprechende Werth von y, der mit Y bezeichnet werden möge, wird $= \sqrt{H^2 + 2RH}$. Mithin kommt:

$$\log \frac{J_z}{J} = \int_0^Y \nu_s \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + R^2 \cos^2 z}}. \tag{4}$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2 \cos^2 z}} = \frac{\sec z}{\sqrt{R^2 + y^2 + y^2 \tan g^2 z}}$, oder durch Reihenentwicklung

$$= \sec z \left[(R^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(R^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} y^2 \tan g^2 z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(R^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} y^4 \tan g^4 z - \cdots \right];$$

folglich ergiebt sich aus (4) die Gleichung, welche unter dem Namen der Lambert'schen Extinctionsgleichung bekannt ist:

$$\log \frac{J_z}{J} = A \sec z - \frac{1}{2} B \sec z \tan g^2 z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} C \sec z \tan g^4 z - \cdots, \tag{5}$$

wo die Coefficienten A, B, C ... die Werthe haben:

$$A = \int_0^Y \frac{\nu_s y\,dy}{(R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$B = \int_0^Y \frac{\nu_s y^3\,dy}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \int_0^Y \frac{\nu_s y^5\,dy}{(R^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ u. s. w.}$$

Für das Zenith eines Beobachtungsortes geht die Lambert'sche Extinctionsformel (5), wenn man die Helligkeit des Sternes im Zenith mit J_0 bezeichnet, in den einfachen Ausdruck über:

$$\log \frac{J_0}{J} = A. \tag{6}$$

Der Coefficient A ist also der Logarithmus der Zahl, welche angiebt, wievielmal schwächer ein Stern im Zenith eines Beobachtungsortes erscheint, als wenn gar keine Atmosphäre vorhanden wäre. Man nennt diese Zahl gewöhnlich den Transmissionscoefficienten der gesammten Erdatmosphäre.

Aus den Gleichungen (5) und (6) erhält man noch:

$$(7)\quad \log J_0 - \log J_z = A(1-\sec z) + \frac{1}{2} B \sec z \tan g^2 z - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} C \sec z \tan g^4 z + \cdots.$$

Diese Form ist für die praktische Verwendung in der Astrophotometrie die bequemste. Sie liefert unmittelbar die sogenannte Zenithreduction, die man meistens durch $\varphi(z)$ bezeichnet, d. h. die Grösse, die zu einem bei beliebiger Zenithdistanz beobachteten Helligkeitslogarithmus hinzugefügt werden muss, um den für das Zenith gültigen Helligkeitslogarithmus zu erhalten. Die Coefficienten A, B, C ... in der Lambert'schen Formel lassen sich nur dann berechnen, wenn man eine Annahme über die Höhe der Erdatmosphäre und über die Änderung des Absorptionscoefficienten ν_s mit der Länge des durchlaufenen Weges macht. Lambert hat dieses Verfahren nicht eingeschlagen, sondern nur darauf hingewiesen, dass man auf rein empirischem Wege, aus photometrischen Beobachtungen eines und desselben Sternes in verschiedenen Höhen über dem Horizonte, numerische Werthe für die Coefficienten A, B, C ... ableiten kann. Auf diese Weise erhält man allerdings eine Formel, die den Gang der Extinction ziemlich gut bis nahe an den Horizont darstellt; aus mehrjährigen photometrischen Messungen in Potsdam sind für die beiden ersten Coefficienten der Lambert'schen Formel die Werthe gefunden worden:

$$A = -0.080441,$$
$$B = -0.0000911.$$

Es ist aber klar, dass die so bestimmte Lambert'sche Extinctionsformel nur den Werth einer blossen Interpolationsformel haben kann, und dass ihr keinerlei physikalische Bedeutung zukommt.

Beiläufig bemerkt, ergiebt sich mit dem angeführten Zahlenwerthe von A aus (6) der Transmissionscoefficient der gesammten Erdatmosphäre zu 0.8309, d. h. die Atmosphäre absorbirt 17 Procent von dem senkrecht in sie eindringenden Lichte.

2. Die Bouguer'sche Extinctionstheorie.

Weit gründlicher als von Lambert ist das Extinctionsproblem von Bouguer behandelt worden. Obgleich auch er den Weg des Lichtstrahles

in der Atmosphäre als geradlinig annimmt, so hat doch seine Endformel einen höheren Werth als den einer blossen Interpolationsformel, weil er seine Theorie auf eine bestimmte Voraussetzung über die Abnahme der Dichtigkeit mit der Höhe der Atmosphäre gründet. Die aus seinen Untersuchungen hervorgehende Extinctionstabelle (Traité d'optique, p. 332) weicht bis zu Zenithdistanzen von mehr als 80° noch nicht merklich von den besten neueren Extinctionstabellen ab. Sein Verfahren ist das folgende. Es stelle (Fig. 25) AA die Erdoberfläche dar, GG die Grenze der Atmosphäre, BB eine beliebige Schicht derselben in dem Abstande x von der Erdoberfläche. O ist ein Punkt der Erdoberfläche, C der Mittelpunkt derselben, der Erdradius heisse a. Bouguer nimmt nun für die ganze Atmosphäre das Mariotte'sche Gesetz als gültig an, er vernachlässigt die Temperaturabnahme mit der Höhe und setzt also ganz allgemein: $\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}$, wenn ϱ und p Dichtigkeit und Druck an irgend einem Punkt der Atmosphäre, ϱ_0 und p_0 die entsprechenden Grössen an der Erdoberfläche vorstellen.

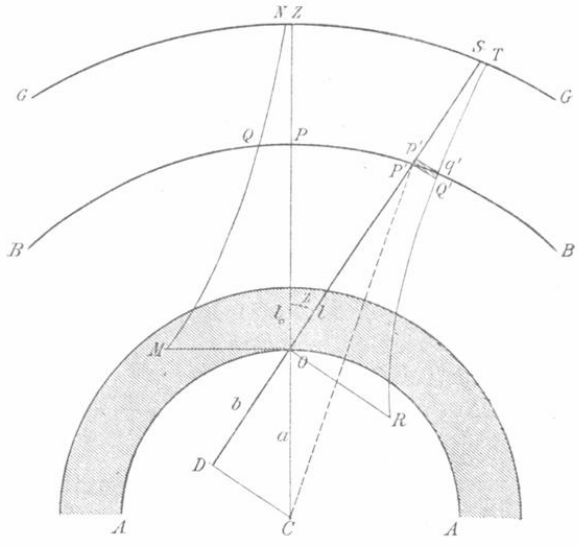

Fig. 25.

Auf der nach dem Zenith Z gerichteten Linie OZ, die als Abscissenaxe betrachtet werden soll, mögen nun in den einzelnen Punkten die zugehörigen Dichtigkeiten ϱ als Ordinaten aufgetragen werden; durch die Endpunkte derselben sei eine Curve MQN gelegt, die an der Grenze der Atmosphäre, wo die Dichtigkeit unendlich klein ist, die Abscissenaxe fast berührt. Die von dieser Curve und der Axe OZ begrenzte Fläche $OMNZ$ ist offenbar der gesammten über dem Beobachtungsorte O ruhenden Luftmasse proportional, und ebenso ist das Flächenstück $PQNZ$ dem in P geltenden Luftdrucke oder, was dasselbe ist, der über P befindlichen Luftmasse proportional. Da nach dem Mariotte'schen Gesetz diese beiden Flächenstücke sich wie die zugehörigen Ordinaten MO und QP verhalten sollen, so ergiebt sich leicht, dass die Curve MQN eine logarithmische Linie sein muss, deren Gleichung die Form hat: $y = \varrho_0 q^x$, wo q eine

Constante bedeutet. Diese Curve hat die besondere Eigenschaft, dass in allen Punkten derselben die Subtangente $y\frac{dx}{dy}$ einen constanten Werth hat. Die Fläche $OMNZ$ wird ausgedrückt durch das bestimmte Integral $\int_{y=0}^{y=\varrho_0} y dx$, und da aus der Gleichung der Curve ohne Weiteres folgt: $\frac{dy}{y} = dx \log q$, so wird die gesammte über O ruhende Luftmasse gegeben durch $\frac{\varrho_0}{\log q}$. Bouguer denkt sich nun die gesammte Atmosphäre ersetzt durch eine gleichmässig absorbirende Schicht, welche überall die an der Erdoberfläche herrschende Dichtigkeit ϱ_0 besitzt. Bezeichnet man die Höhe derselben mit l_0, so wird die ganze Luftmasse über O auch ausedrückt durch $\varrho_0 l_0$, und es folgt daher, dass die Höhe der homogenen Atmosphäre gleich ist $\frac{1}{\log q}$, d. h. gleich dem constanten Werthe der Subtangente $y\frac{dx}{dy}$. Der numerische Werth dieser Subtangente lässt sich angenähert aus Beobachtungen des Luftdruckes in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche bestimmen, und Bouguer hat selbst aus Beobachtungen von De la Hire für die Höhe der homogenen Atmosphäre die Zahl 3911 Toisen = 7623 Meter abgeleitet, ein Werth, der, wie auch schon Bouguer selbst aus eigenen Beobachtungen geschlossen hat, ein wenig zu klein sein dürfte.

Es sei nun weiter SO der als geradlinig angenommene Weg eines Lichtstrahles, der mit der Zenithrichtung ZO den Winkel z bildet. Trägt man wieder in jedem Punkte der Linie SO senkrecht zu ihr die der betreffenden Luftschicht entsprechende Dichtigkeit auf und legt durch die Endpunkte dieser Senkrechten eine Curve, so repräsentirt die Fläche $ORTS$, die mit F bezeichnet werden möge, die gesammte Luftmasse, welche das Licht bei der Zenithdistanz z zu passiren hat. In der von Bouguer substituirten homogenen Atmosphäre durchläuft das Licht die Weglänge l, und es kann daher die gesammte Luftmasse auch durch $\varrho_0 l$ ausgedrückt werden, so dass man hat $F = \varrho_0 l$.

Es handelt sich nun darum, den Flächeninhalt F zu berechnen. Die Linie SO werde über O hinaus verlängert und vom Erdmittelpunkte C eine Senkrechte CD auf diese Linie gefällt; das Stück OD möge mit b bezeichnet sein. Wir betrachten nun das Flächenelement $P'Q'p'q'$. Man hat:

$$(P'D)^2 = (P'C)^2 - (CD)^2,$$

oder:

$$(P'D)^2 = (a + x)^2 - (a^2 - b^2) = b^2 + 2ax + x^2.$$

Mithin wird:

$$d(P'D) = P'p' = \frac{(a+x)\,dx}{\sqrt{b^2 + 2ax + x^2}}.$$

Die Strecke $P'Q'$ entspricht der Luftdichtigkeit im Punkte P'; wir wollen die Dichtigkeit in irgend einem Punkte nach Bouguer mit $\varrho_0 (1-u)$ bezeichnen, wo u an der Erdoberfläche den Werth 0 und an der Grenze der Atmosphäre den Werth 1 hat; dann ist das Flächenelement $P'Q'p'q'$ gegeben durch:

$$\frac{\varrho_0 (1-u)(a+x)\,dx}{\sqrt{b^2 + 2ax + x^2}},$$

und die gesammte Fläche F wird bestimmt durch:

$$F = \varrho_0 \int_{u=0}^{u=1} \frac{(1-u)(a+x)\,dx}{\sqrt{b^2 + 2ax + x^2}}. \tag{8}$$

Um x als Function von u zu haben, beachte man, dass nach dem Obigen $l_0 = y\frac{dx}{dy}$ und $y = \varrho_0 (1-u)$ zu setzen ist. Daraus folgt: $dy = -\varrho_0\,du$, wobei das negative Zeichen zu vernachlässigen ist, weil es nur aussagt, dass y wächst, wenn u abnimmt, und weil es hier nur auf die absolute Weglänge ankommt. Man hat daher:

$$dx = \frac{l_0\,du}{1-u},$$

und daraus durch Reihenentwicklung und Integration:

$$x = l_0 \left\{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots\right\}.$$

Substituirt man die Werthe von dx und x in die obige Gleichung für F und entwickelt die Quadratwurzel im Nenner in eine Reihe, so findet man nach Ausführung der Integration:

$$F = \varrho_0 l_0 \left[\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{2b^3} l_0 + \left(a^3 l_0 - ab^2 l_0 - \frac{1}{3}a^2b^2 + \frac{1}{3}b^4\right)\frac{l_0}{2b^5} \cdots\right].$$

Aus der Figur ergiebt sich, dass $b = a\cos z$ ist. Führt man diesen Werth ein und ersetzt noch nach Obigem F durch das Product $\varrho_0 l$, so erhält man endlich:

$$l = l_0 \left[\sec z - \frac{l_0}{2a}\operatorname{tang}^2 z \sec z + \left(l_0 - \frac{1}{3}a\cos^2 z\right)\frac{l_0 \operatorname{tang}^2 z}{2a^2\cos^3 z} \cdots\right]. \tag{9}$$

Diese Gleichung ermöglicht es, für jede Zenithdistanz die Weglänge in der supponirten homogenen Atmosphäre zu berechnen, falls die Höhe derselben l_0 als bekannt vorauszusetzen ist. Bis zu Zenithdistanzen von etwa

82° erhält man daraus l genau genug, wenn man sich auf die drei ersten Glieder der Reihe beschränkt. Darüber hinaus wird die Berechnung unsicher, und für $z = 90°$, also im Horizonte, versagt die Formel gänzlich. Um die Weglänge im Horizonte zu berechnen, hat Bouguer die Gleichung (8) unter der Berücksichtigung, dass $b = 0$ wird, entwickelt, und findet so für die gesuchte Grösse die unendliche Reihe:

$$(2al_0)^{\frac{1}{2}} - \frac{al_0 - 3l_0^2}{6(2al_0)^{\frac{1}{2}}} - \frac{7a^2l_0^2 - 18al_0^3 + 15l_0^4}{120(2al_0)^{\frac{3}{2}}} - \ldots .$$

Mit Zugrundelegung des oben erwähnten Werthes von $l_0 = 3911$ Toisen hat Bouguer eine Tafel berechnet, aus welcher für jede Höhe eines Gestirnes die Weglänge in der homogenen Atmosphäre, ausgedrückt in Toisen, entnommen werden kann.

Die Einführung der homogenen Atmosphäre und die Berechnung der Weglängen in derselben ermöglicht nun sofort die Lösung des Extinctionsproblems. Für ein homogenes Medium gilt die einfache Gleichung $i = Jc^s$, worin s die durchlaufene Wegstrecke, c den sogenannten Transmissionscoefficienten für die Längeneinheit, J die Helligkeit beim Eintritte und i die Helligkeit beim Verlassen der Strecke s bedeutet. Nennt man nun J_z die an der Erdoberfläche beobachtete Lichtstärke eines Sternes bei der Zenithdistanz z, J seine Helligkeit ausserhalb der Atmosphäre, so hat man für die homogen gedachte Atmosphäre:

$$J_z = Jc^l . \tag{10}$$

Für das Zenith wird:

$$J_0 = Jc^{l_0} , \tag{11}$$

und daraus folgt:

$$l_0 \log c = \log \frac{J_0}{J} .$$

Das Verhältniss $\frac{J_0}{J}$ der Helligkeit eines Sternes im Zenith zu seiner Helligkeit ausserhalb der Atmosphäre nennt man, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt ist, den Durchlässigkeitscoefficienten der gesammten Atmosphäre. Bezeichnet man denselben mit p, so hat man $\log p = l_0 \log c$. Aus (10) und (11) folgt:

$$\log \frac{J_0}{J_z} = (l_0 - l) \log c ,$$

mithin:

$$\log \frac{J_0}{J_z} = - \log p \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right) . \tag{12}$$

Dies ist die Bouguer'sche Extinctionsgleichung in derjenigen Form, welche für die Berechnung am bequemsten ist. Setzt man für $\frac{l}{l_0}$ den Werth aus (9) ein, so sieht man, dass die Bouguer'sche Formel mit der Lambert'schen in der Form nahe übereinstimmt. Während aber die Lambert'sche Theorie an dem wichtigsten Punkte stehen bleibt und die Bestimmung der einzelnen Coefficienten lediglich den Beobachtungen überlässt, hat die Bouguer'sche Formel physikalische Bedeutung, und das einzige hypothetische Element bleibt die Ermittelung der Höhe l_0 der homogenen Atmosphäre. Der Transmissionscoefficient p kann nach der Gleichung (12) aus zwei Helligkeitsmessungen desselben Gestirnes bei verschiedenen Zenithdistanzen bestimmt werden, wenn die zugehörigen Weglängen nach (9) berechnet sind. Bouguer hat selbst aus photometrischen Beobachtungen des Vollmondes bei Zenithdistanzen von 70°7 und 23°8 den Werth $p = 0.8123$ abgeleitet und mit Hülfe dieses Werthes eine Tabelle berechnet, aus welcher die Helligkeiten eines Sternes bei beliebigen Zenithdistanzen entnommen werden können, wobei die Helligkeit ausserhalb der Atmosphäre mit 10000 bezeichnet ist. (Traité d'optique, p. 332.)

Die Bouguer'schen Tabellen gelten für einen Beobachtungsort im Niveau des Meeres, und die Weglänge l_0 entspricht der ganzen Masse der Atmosphäre. Für einen höher gelegenen Beobachtungsort ist die darüber befindliche Luftmasse geringer und die Helligkeit der Sterne wird grösser. Auch die Abnahme der Lichtstärke vom Zenith nach dem Horizonte zu ist an einem solchen Beobachtungsorte geringer. Betrachtet man den Punkt P, so ist die darüber ruhende Luftmasse repräsentirt durch die Fläche $PQZN$; man kann sich dieselbe wieder ersetzt denken durch eine homogene Luftmasse von der Dichtigkeit ϱ_0, deren Höhe l_0' sein möge. Es verhalten sich aber die über P und O befindlichen Luftmassen wie die Dichtigkeiten an diesen beiden Orten oder auch wie die entsprechenden Barometerstände, welche b und b_0 heissen mögen. Man hat also:

$$\varrho_0 l_0' : \varrho_0 l_0 = b : b_0 ,$$

und daher:

$$l_0' = \frac{b}{b_0} l_0 .$$

Man kann demnach für jeden Ort, dessen Barometerhöhe b gegeben ist, die Höhe der entsprechenden homogenen Atmosphäre berechnen, wenn die für das Meeresniveau geltende Höhe l_0 bekannt ist. Die Weglängen l' am Beobachtungsorte P für beliebige Zenithdistanzen ergeben sich aus Gleichung (9), wenn man l_0 durch $\frac{b}{b_0} l_0$ ersetzt, und man kann daher für jeden Ort mit Leichtigkeit die Zenithreduction $\varphi(z)$ vorausberechnen.

Ist noch J_0' die Zenithhelligkeit eines Sternes am Beobachtungsorte P, so ist nach Gleichung (11) $J_0' = Jc^{l_0'}$ oder $\log \frac{J_0'}{J} = l_0' \log c$. Da aber auch $\log \frac{J_0}{J} = l_0 \log c$ ist, so hat man:

$$\log \frac{J_0'}{J} : \log \frac{J_0}{J} = l_0' : l_0 = b : b_0 .$$

Bezeichnet man die Grösse $\frac{J_0'}{J}$, d. h. den Transmissionscoefficienten der über P befindlichen Luftmasse, mit p', so wird:

(13) $$\log p' : \log p = b : b_0 ,$$

d. h. die Logarithmen der Transmissionscoefficienten für zwei Beobachtungsorte verhalten sich wie die entsprechenden Barometerstände.

3. Die Laplace'sche Extinctionstheorie.

Wie schon oben bemerkt wurde, schliesst sich die von Laplace aufgestellte Extinctionstheorie eng an die Refractionstheorie an und unterscheidet sich von der Lambert'schen und Bouguer'schen Behandlung des

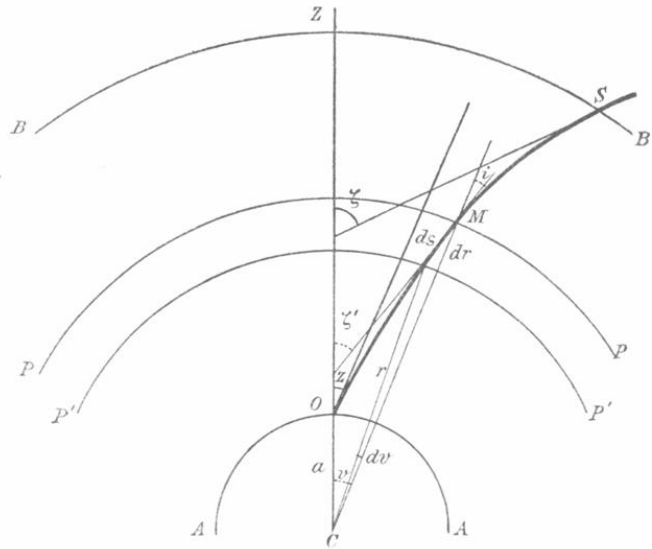

Fig. 26.

Problems wesentlich dadurch, dass sie auf die Krümmung des Weges, welchen die Lichtstrahlen in der Atmosphäre durchlaufen, Rücksicht nimmt. Es bedeute in Figur 26 AA die Erdoberfläche, BB die Grenze der Atmosphäre, $PPP'P'$ eine unendlich dünne Schicht derselben, deren Abstand

vom Centrum der Erde r sein möge. In S trete ein Lichtstrahl in die Atmosphäre und erreiche in O die Erdoberfläche. Der Winkel, den die Tangente an die Refractionscurve im Punkte S mit der Zenithrichtung OZ bildet, ist die wahre Zenithdistanz ζ, während der Winkel der Tangente im Punkte O mit der Richtung OZ die scheinbare Zenithdistanz z darstellt. Streng genommen müsste die wahre Zenithdistanz auch von dem Punkte O aus gerechnet werden, indessen ist der Unterschied bei der verhältnissmässig geringen Höhe der Atmosphäre und der mässigen Krümmung der Refractionscurve, sowie bei der bedeutenden Entfernung der Himmelskörper nur geringfügig und selbst beim Monde fast ganz zu vernachlässigen. Der Lichtstrahl trifft die in Betracht zu ziehende Schicht in M, der Einfallswinkel an der Grenze der Schicht sei i, und der innerhalb derselben zurückgelegte Weg, der als geradlinig aufzufassen ist, sei ds. Nennt man noch μ den Brechungsexponenten aus dem luftleeren Raume in die betrachtete Schicht, so gilt die bekannte der Refractionstheorie zu Grunde liegende Gleichung:

$$r\mu \sin i = \text{Const.} \tag{14}$$

Für einen Punkt der Erdoberfläche geht i in die scheinbare Zenithdistanz z über, r in den Erdhalbmesser a, und der Brechungsexponent erhält den Werth μ_0; man hat also auch:

$$a\mu_0 \sin z = \text{Const.} \tag{15}$$

Nennt man die Helligkeit des Lichtstrahles, wenn er in M angelangt ist J_z, so hat man nach Gleichung (1):

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\nu ds,$$

wo ν der Absorptionscoefficient der unendlich schmalen Luftschicht $PPP'P'$ ist. Man kann sich nun vorstellen, dass die Absorption durch die sämmtlichen Massentheilchen hervorgebracht wird, auf welche der Lichtstrahl beim Durchlaufen der Strecke ds trifft, und es ist daher klar, dass die Absorption um so grösser sein wird, je grösser die Anzahl der im Wege stehenden Partikelchen ist, d. h. je dichter das Medium ist. Man wird daher den Absorptionscoefficienten der Dichtigkeit ϱ proportional annehmen dürfen und erhält dann durch die Substitution $\nu = k\varrho$ die Gleichung:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -k\varrho\, ds. \tag{16}$$

Die Weglänge ds lässt sich nach der Figur ausdrücken durch:

$$ds = \frac{dr}{\cos i};$$

mithin wird:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -k\varrho\frac{dr}{\cos i}. \tag{17}$$

Wir wollen nun, um den Zusammenhang zwischen Extinction und Refraction näher darzulegen, die Refractionscurve betrachten und zunächst in ds eine Tangente an dieselbe legen, welche mit der Normalen OZ den Winkel ζ' bilden möge. Dann ist $\zeta' = v + i$, mithin $d\zeta' = dv + di$. Man nennt $d\zeta'$ das Element der Refraction. Aus Gleichung (14) ergiebt sich durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} + \cot i\, di = 0,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} + \cot i\left(di + \frac{dr}{r}\operatorname{tang} i\right) = 0.$$

Nun ist aber $\operatorname{tang} i = \frac{r dv}{dr}$; folglich:

$$\frac{d\mu}{\mu} + \cot i\,(di + dv) = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der obigen Gleichung für $d\zeta'$:

$$d\zeta' = -\frac{d\mu}{\mu}\operatorname{tang} i.$$

Zwischen dem Brechungsexponenten μ eines Mediums und seiner Dichtigkeit ϱ besteht irgend eine Beziehung, und zwar nimmt die Emanationstheorie des Lichtes an, dass der Werth von $\mu^2 - 1$ (die sogenannte brechende Kraft) der Dichtigkeit proportional ist. Laplace hat diese Auffassung acceptirt, und es ist daher zu setzen:

$$\mu^2 - 1 = c\varrho.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{c d\varrho}{2\mu^2},$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung für $d\zeta'$ einsetzt:

$$d\zeta' = -\frac{c\sin i}{2\mu^2\cos i}d\varrho.$$

Aus den Gleichungen (14) und (15) folgt noch:

$$\sin i = \frac{a}{r}\frac{\mu_0}{\mu}\sin z,$$

und daher kommt:

$$d\zeta' = -\frac{ca\mu_0\sin z}{2r\mu^3\cos i}d\varrho. \tag{18}$$

Um $d\varrho$ in dieser Gleichung durch andere Grössen auszudrücken, muss man das Gesetz kennen, nach welchem die Luftdichtigkeit mit der Höhe über der Erdoberfläche abnimmt. Man hat dabei Folgendes zu beachten. Es seien p und ϱ Luftdruck und Dichtigkeit an einem Punkte der Atmosphäre, der vom Erdmittelpunkte die Entfernung r besitzt, g sei die entsprechende Schwere; dann ist die Änderung des Luftdruckes dp für eine Änderung des Abstandes dr bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$dp = -g\varrho\, dr,$$

und da nach dem Gravitationsgesetze $g = g_0\left(\frac{a}{r}\right)^2$ ist, wo g_0 die Schwere an der Erdoberfläche bezeichnet, so wird:

$$dp = -g_0\left(\frac{a}{r}\right)^2 \varrho\, dr.$$

Nennt man noch l_0 die Höhe einer Luftsäule von der Dichtigkeit ϱ_0, welche dem an der Erdoberfläche stattfindenden Drucke p_0 das Gleichgewicht hält, so ist:

$$p_0 = \varrho_0 g_0 l_0 .$$

Die Grösse l_0 stellt also wie früher die Höhe dar, welche die Atmosphäre haben würde, wenn sie durchweg die Dichtigkeit der untersten Schichten besässe. Es folgt nun:

$$\frac{dp}{p_0} = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varrho}{\varrho_0 l_0}\, dr . \tag{19}$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetz, welches Laplace ebenso wie Bouguer für die ganze Atmosphäre als gültig annimmt, ohne die Temperatur abnahme mit der Höhe zu berücksichtigen, ist aber:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0},$$

und folglich auch:

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{d\varrho}{\varrho_0} .$$

Durch Substitution in (19) wird daher:

$$d\varrho = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\varrho}{l_0}\, dr,$$

und wenn man diesen Werth in (18) einsetzt, so ergiebt sich:

$$d\zeta' = \frac{c\mu_0}{2 l_0 \mu^3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin z\, \frac{\varrho\, dr}{\cos i} . \tag{20}$$

Die beiden Gleichungen (17) und (20) geben nun eine Beziehung zwischen Extinction und Refraction. Man erhält durch Elimination von $\frac{\varrho dr}{\cos i}$ sofort:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\frac{2kl_0}{c\mu_0}\,\frac{\mu^3}{\left(\frac{a}{r}\right)^3}\,\frac{d\zeta'}{\sin z}.$$

Die Grösse $\frac{\mu^3}{\left(\frac{a}{r}\right)^3}$ wird ohne erheblichen Fehler gleich 1 gesetzt werden dürfen; denn bei der verhältnissmässig geringen Ausbreitung der Erdatmosphäre unterscheidet sich r nur wenig von a, und der Brechungsexponent μ weicht ebenfalls nur wenig von der Einheit ab (an der Grenze der Atmosphäre ist $\mu = 1$, an der Erdoberfläche ist $\mu_0 = 1.000294$). Daher wird:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\frac{2kl_0}{c\mu_0}\,\frac{d\zeta'}{\sin z},$$

oder wenn man $\frac{2kl_0}{c\mu_0}$ durch eine neue Constante K ersetzt:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\frac{K}{\sin z}\,d\zeta'. \tag{21}$$

Dies ist die sogenannte Laplace'sche Extinctionsformel. Integrirt man dieselbe über die sämmtlichen Schichten der Atmosphäre, nennt die Helligkeit des Lichtstrahles ausserhalb der Atmosphäre J und bezeichnet mit »Refraction« den Gesammtbetrag der Refraction bei der Zenithdistanz z, so erhält man:

$$\log\frac{J_z}{J} = -\frac{K}{\sin z} \times \text{Refraction}.$$

Nun wird allgemein der Werth der Refraction gegeben durch den Ausdruck $\alpha_z \operatorname{tang} z$, wo der Zahlenwerth von α_z aus den bekannten Refractionstafeln zu entnehmen ist. Man hat daher auch:

$$\log\frac{J_z}{J} = -K\alpha_z \sec z. \tag{22}$$

Für $z = 0$ geht diese Gleichung über in:

$$\log\frac{J_0}{J} = -K\alpha_0. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) erhält man endlich, wenn man den Transmissions-

coefficienten der gesammten Atmosphäre $\frac{J_0}{J}$ wie früher mit p bezeichnet, die Laplace'sche Zenithreduction $\varphi(z)$ in der Form:

$$\varphi(z) = \log \frac{J_0}{J_z} = -\log p \left\{\frac{\alpha_z}{\alpha_0} \sec z - 1\right\}. \tag{24}$$

Aus der Refractionstheorie ergiebt sich noch, dass die Grösse α_z durch eine Reihe ausgedrückt werden kann, die nach Potenzen von $\tang^2 z$ fortschreitet. Man hat nämlich:

$$\alpha_z = \alpha_0 \{1 + a \tang^2 z + b \tang^4 z + c \tang^6 z + \cdots\},$$

wo die Coefficienten a, b, c ... Constanten sind, deren numerische Werthe je nach den Hypothesen, die man über die Abnahme der Temperatur in der Atmosphäre machen will, verschieden sind. Setzt man den Werth für α_z in die obige Gleichung (22) ein, so geht dieselbe über in:

$$\log \frac{J_z}{J} = -K\alpha_0 \sec z - K\alpha_0 a \sec z \tang^2 z - K\alpha_0 b \sec z \tang^4 z - \cdots,$$

welche der Form nach ganz mit der Lambert'schen Extinctionsformel (5) übereinstimmt.

Stellt man den Laplace'schen Ausdruck der Extinction (24) dem Bouguer'schen (12) gegenüber, so sieht man, dass die beiden vollkommen identisch werden, wenn man das Verhältniss der Weglängen $\frac{l}{l_0}$ durch $\frac{\alpha_z}{\alpha_0} \sec z$ ersetzt. Die Laplace'sche Grösse $\alpha_z \sec z$ entspricht also der jedesmaligen Weglänge in der homogen gedachten Atmosphäre, wenn die Weglänge im Zenith als Einheit gewählt ist. Da aber die Laplace'sche Theorie auf die Krümmung des Weges Rücksicht nimmt, so ist einleuchtend, dass die so ausgedrückten Weglängen den Vorzug vor den Bouguer'schen verdienen, und dass hierin der Fortschritt der Laplace'schen Extinctionstheorie zu erblicken ist. Bis zu Zenithdistanzen von etwa 85° weichen übrigens die Bouguer'schen Werthe nur so unbedeutend von den Laplace'schen ab, dass es für die Praxis vollkommen gleichgültig ist, welche man benutzt. In jedem Falle setzt die Berechnung der Zenithreduction $\varphi(z)$ die Kenntniss des Transmissionscoefficienten p voraus, der durch Beobachtungen desselben Gestirnes in verschiedenen Zenithdistanzen ermittelt werden kann.

Die gebräuchlichen Refractionstafeln geben die Werthe von α_z für einen gewissen mittleren Zustand der Atmosphäre, also für einen bestimmten Barometerstand und eine bestimmte Temperatur. So gelten die Bessel'schen Tafeln für einen Luftdruck von 751.5 Millimeter und für 9°3 Celsius. Um die Werthe α_z für einen beliebigen anderen Zustand der Atmosphäre

zu erhalten, hat man nach Bessel die mittleren Werthe mit dem Ausdrucke $(B \times T)^A \gamma^\lambda$ zu multipliciren, wo A und λ Grössen sind, die von der scheinbaren Zenithdistanz abhängen, während B dem Barometerstande proportional ist, γ von der Temperatur der Luft (der äusseren Temperatur) und T von der Temperatur am Barometer (der inneren Temperatur) abhängt. Alle diese Grössen sind von Bessel in Tafeln gebracht, und es ist daher leicht, die Werthe α_z und daher auch die Zenithreduction $\varphi(z)$ für jeden Beobachtungsort zu berechnen, wenn man ausserdem den Transmissionscoefficienten für denselben kennt. Da aber $\log p = -K\alpha_0$ ist und $K = \frac{2kl_0}{c\mu_0}$, endlich noch l_0 dem Luftdrucke p_0 proportional ist, so folgt, ebenso wie bei der Bouguer'schen Extinctionstheorie, dass der Logarithmus des Transmissionscoefficienten dem jedesmaligen Barometerstande proportional ist und daher für jeden Ort im Voraus berechnet werden kann, wenn er für irgend einen Ort, z. B. für das Meeresniveau, aus Beobachtungen bestimmt worden ist.

4. Die Maurer'sche Extinctionstheorie.

In neuerer Zeit ist von J. Maurer in Zürich eine Bearbeitung des Extinctionsproblems versucht worden, welche ebenfalls die Refractionstheorie zu Hülfe nimmt, sich aber von der Laplace'schen Behandlung im Wesentlichen darin unterscheidet, dass sie für die Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten μ einer Luftschicht und der zugehörigen Dichte ϱ den Ausdruck acceptirt:

$$\mu - 1 = c\varrho,$$

während Laplace nach den Anschauungen der Emanationstheorie des Lichtes die Dichtigkeit proportional der sogenannten brechenden Kraft $\mu^2 - 1$ setzt. Obgleich die Frage noch keineswegs endgültig entschieden ist, so sprechen doch die meisten Untersuchungen, besonders die von Dale und Gladstone, Landolt, Mascart angestellten, mehr zu Gunsten der ersteren Beziehung, und der von Maurer eingeschlagene Weg hat daher seine volle Berechtigung.

Die Laplace'sche Grundgleichung (16) der Extinction gestaltet sich mit der Maurer'schen Annahme um in:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = C(\mu - 1)\, ds, \tag{25}$$

wenn noch $-\frac{k}{c}$ durch eine neue Constante C ersetzt ist. In Figur 27 ist M ein Punkt auf dem Wege des Lichtstrahles durch die Atmosphäre

an der Grenze zweier unendlich dünnen Schichten derselben; der in der unteren Schicht durchlaufene Weg sei ds. Verlängert man die Tangenten an die Wegcurve und fällt von C aus die Senkrechten CD und CE auf dieselben, so ist, wenn CD mit t bezeichnet wird, $CE = t + dt$. Der Winkel zwischen den Tangenten ist gleich dem Element der Refraction, welches mit $d(\text{Refr.})$ bezeichnet werden soll. Man hat nun in dem unendlich schmalen Dreieck MEF mit genügender Genauigkeit:

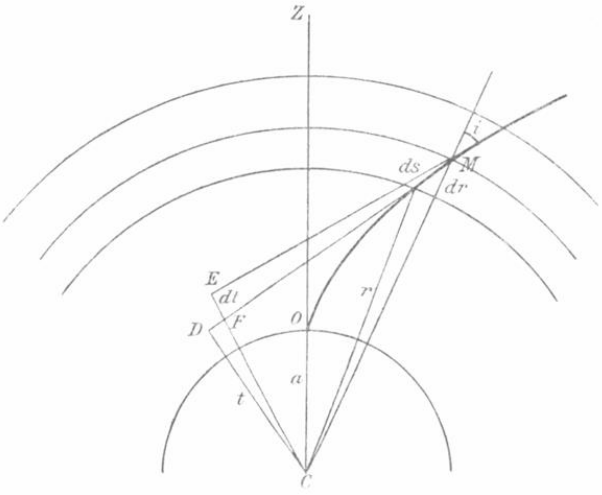

Fig. 27.

$$d(\text{Refr.}) = \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} .$$

Ferner ist:

$$ds = \frac{dr}{\cos i} = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - t^2}} ,$$

oder auch:

$$ds = \frac{t\,dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \frac{r\,dr - t\,dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} ,$$

mithin auch:

$$ds = t\,d(\text{Refr.}) + \frac{r\,dr - t\,dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} .$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung (25) ein und erlaubt sich die Vereinfachung, in dem Factor $\mu - 1$ statt des von Schicht zu Schicht veränderlichen Werthes von μ überall einen Mittelwerth μ' einzuführen, so erhält man durch Integration über die ganze Atmosphäre:

$$(26)\quad \log \frac{J_z}{J} = -\,C(\mu' - 1)\left[\int t\,d(\text{Refr.}) + \int \frac{r\,dr - t\,dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}\right]_{\text{Erdoberfläche}}^{\text{Grenze der Atmosphäre}} ,$$

wo J wieder die Helligkeit ausserhalb der Atmosphäre bedeutet, und wo die Integrale zwischen denjenigen Grenzen in Bezug auf r, t und die Refraction zu nehmen sind, die der Erdoberfläche und der Höhe der gesammten Atmosphäre entsprechen. Da $t = r \sin i$ oder mit Berücksich-

tigung der Gleichungen (14) und (15) $t = \frac{a\mu_0 \sin z}{\mu}$ ist, so sind die Grenzen in Bezug auf t an der Erdoberfläche $a \sin z$ und an der Grenze der Atmosphäre $a\mu_0 \sin z$. In Bezug auf r sind die Grenzen, wenn die Höhe der Erdatmosphäre mit H bezeichnet wird, resp. a und $a + H$. Der Werth des zweiten Integrales wird dann

$$= \sqrt{(a + H)^2 - a^2\mu_0^2 \sin^2 z} - a \cos z .$$

Das erste Integral hat nach Substitution des Werthes von t die Form $a \sin z \int \frac{\mu_0}{\mu} d(\text{Refr.})$. Da μ an der Grenze der Atmosphäre $= 1$, an der Erdoberfläche $= 1.000294$ ist, so wird man keinen sehr grossen Fehler begehen, wenn man den veränderlichen Quotienten $\frac{\mu_0}{\mu}$ innerhalb des Integralzeichens durch den constanten Werth $\frac{\mu_0 + 1}{2}$ ersetzt; damit wird aber der Werth des ersten Integrales sofort

$$= a \frac{\mu_0 + 1}{2} \sin z \times \text{Refr.},$$

wenn man unter »Refr.« die für die gesammte Atmosphäre bei der scheinbaren Zenithdistanz z gültige Refraction versteht. Man hat nun:

$$(27)\quad \log \frac{J_z}{J} = -C(\mu' - 1)\left[a \sin z \frac{\mu_0 + 1}{2} \times \text{Refr.} + \sqrt{(a+H)^2 - a^2\mu_0^2 \sin^2 z} - a \cos z\right].$$

Für $z = 0$ geht dieselbe über in:

$$(28)\quad \log \frac{J_0}{J} = -C(\mu' - 1)H,$$

und es folgt daher durch Subtraction, wenn man wieder den Transmissionscoefficienten $p = \frac{J_0}{J}$ einführt:

$$(29)\quad \varphi(z) = \log \frac{J_0}{J_z}$$

$$= -\log p \left[\frac{a}{H}\left\{\frac{\mu_0 + 1}{2} \sin z \times \text{Refr.} + \sqrt{\left(1 + \frac{H}{a}\right)^2 - \mu_0^2 \sin^2 z} - \cos z\right\} - 1\right].$$

Dies ist die Maurer'sche Endformel der Extinction. Sie hat vor der Laplace'schen den Vorzug, dass sie bis zum Horizont anwendbar bleibt, während

jene für $z = 90^\circ$ unendlich grosse Werthe für $\varphi(z)$ ergiebt. Der schwache Punkt der Maurer'schen Theorie liegt darin, dass sie durch Einführung eines mittleren Werthes für μ jeder Hypothese über die Änderung des Brechungsexponenten von Luftschicht zu Luftschicht aus dem Wege geht. Die Maurer'sche Formel wird daher in diesem Sinne auch nur als eine Interpolationsformel zu betrachten sein. Die Anwendung derselben verlangt übrigens noch eine bestimmte Annahme über das Verhältniss der Atmosphärenhöhe zum Erdradius. Maurer schlägt dafür die Zahl $\frac{1}{100}$ vor und vertritt die Ansicht, dass wenn auch wirklich die Atmosphäre sich weiter als etwa 64 Kilometer ausbreiten sollte, die jenseits dieser Grenze befindlichen Luftschichten bereits so unendlich dünn sein müssten, dass ihr Einfluss auf die Refraction und Extinction unter allen Umständen zu vernachlässigen wäre.

5. Vergleichung der Theorien mit den Beobachtungsergebnissen. Die Durchlässigkeitscoefficienten der Erdatmosphäre.

Die Bestimmung der für die praktische Astrophotometrie überaus wichtigen Zenithreductionen ist auch auf rein empirischem Wege versucht worden und zwar zuerst von Seidel in München. Derselbe benutzte dazu die Helligkeitsvergleichungen, welche er in den Jahren 1844—1848 zwischen den Fixsternen erster Grösse mit Hülfe des Steinheil'schen Prismenphotometers angestellt hatte. Indem er das am häufigsten beobachtete Sternpaar (Wega und Capella) auswählte, ermittelte er zunächst aus denjenigen Vergleichungen, wo die Zenithdistanzen beider Sterne nahe gleich waren, einen vorläufigen Werth für das wahre Helligkeitsverhältniss derselben und erhielt dann mit Zugrundelegung dieses Werthes aus den übrigen Beobachtungen eine Reihe von Bestimmungen für verschiedene Differenzen $\varphi(z_1) - \varphi(z_2)$, aus denen sich durch ein Näherungsverfahren eine vorläufige Extinctionstabelle ableiten liess. Mit Anwendung dieser vorläufigen Tabelle auf die anderen beobachteten Sternpaare ergab sich dann durch wiederholte Ausgleichungen und Interpolationen die definitive Extinctionstabelle[1]), welche die sämmtlichen Messungen relativ am besten darstellte. Seidel hat diese Tafel später noch an einem grösseren Beobachtungsmaterial, welches sich auf 208 Fixsterne von der ersten bis zur fünften Grössenclasse erstreckte, geprüft, wobei sich aber keine Veranlassung zu irgend welchen Änderungen herausgestellt hat[2]).

1) Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Classe, Bd. 6, p. 581.
2) Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Classe, Bd. 9, p. 503.

Wesentlich abweichend von dem Seidel'schen Verfahren ist dasjenige, welches von mir bei der empirischen Ableitung der Extinctionstabelle für Potsdam in den Jahren 1879—1881 angewandt worden ist. Mit Hülfe des Zöllner'schen Photometers wurden fünf hellere Sterne (α Cygni, η Ursae majoris, δ Persei, α Aurigae und α Tauri) bei möglichst vielen Zenithdistanzen mit dem Polarstern verglichen, für welchen wegen der geringen Änderungen seiner Höhe über dem Horizonte $\varphi(z)$ nahezu constant angenommen werden kann. Aus dem sehr umfangreichen Beobachtungsmaterial wurde nun zunächst für jeden einzelnen Stern durch ein graphisches Verfahren eine Extinctionscurve bestimmt, und aus der Vereinigung dieser fünf Einzelcurven wurde dann nach Ausgleichung der Differenzen die mittlere Extinctionstabelle für Potsdam bis zur Zenithdistanz 80° hergeleitet. Bei grösseren Zenithdistanzen als 80° war das Verfahren etwas anders. Es wurden helle Gestirne, meistens Planeten, beim Auf- oder Untergange beobachtet. Aus der Vergleichung je zweier Messungen desselben Objectes ergaben sich dann Werthe von $\varphi(z_1) - \varphi(z_2)$ für alle möglichen Werthe der Zenithdistanzen z_1 und z_2 zwischen 80° und 88°, aus denen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate der wahrscheinlichste Verlauf der Extinctionscurve zwischen 80° und 88° Zenithdistanz ermitteln liess. Beide Curventheile wurden endlich an einander gefügt, und so entstand die Extinctionstabelle für Potsdam [1]). Es ist noch zu erwähnen, dass die Messungen für den zweiten Theil ohne Ausnahme an aussergewöhnlich klaren Tagen angestellt worden sind, während die Vergleichungen der fünf Sterne mit dem Polarstern auch an mittelmässig guten Tagen ausgeführt wurden. Infolge dessen entsprechen die beiden Theile der Tabelle streng genommen nicht ein und demselben mittleren Luftzustande. Für die praktische Verwendung der Tabelle wird diese kleine Ungleichmässigkeit eher zum Vortheil als zum Schaden sein, weil man es im Allgemeinen streng vermeiden wird, photometrische Beobachtungen in der Nähe des Horizontes bei anderem als dem allerbesten Luftzustande auszuführen, während man sich nicht scheuen wird, in Höhen über 10° auch bei weniger ausgezeichneter Luft zu beobachten. Dagegen darf bei allen theoretischen Untersuchungen, die sich auf die Potsdamer Tabelle stützen, diese Ungleichmässigkeit, wie es bereits mehrfach geschehen ist, durchaus nicht ausser Acht gelassen werden.

Bei der Ableitung der einzelnen Extinctionscurven für die fünf Sterne ergaben sich Unterschiede zwischen denselben, die im Zusammenhange

1) Publ. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam. Bd. 3, p. 285.

mit der Farbe dieser Sterne zu stehen schienen. Die gesammte Lichtabnahme vom Zenith bis zu 80° Zenithdistanz war am grössten bei den gelben und röthlichen Sternen, am kleinsten bei den weissen, während man von vornherein wegen der stärkeren Absorption der blauen Strahlen in der Atmosphäre eher das Gegentheil hätte erwarten sollen. Vielleicht ist diese Erscheinung, deren Realität noch weiterer Bestätigung bedarf, durch physiologische Einflüsse zu erklären.

Die Vergleichung der mittleren Potsdamer Extinctionstabelle mit der Münchener zeigt im Grossen und Ganzen eine sehr befriedigende Übereinstimmung. Von 0 bis 50° Zenithdistanz sind die Seidel'schen Werthe zwar durchgängig etwas kleiner, von 55° bis 79° etwas grösser als die Potsdamer, so dass man auf systematische Unterschiede schliessen könnte; indessen ist der numerische Betrag der Differenzen so geringfügig, dass er für die praktische Anwendung gar nicht in Betracht kommt, und dass bis zu Zenithdistanzen von etwa 80° beide Tabellen als durchaus gleichwerthig anzusehen sind. Für grössere Zenithdistanzen als 80° verdient die Potsdamer Tafel zweifellos den Vorzug, weil sie auf einer grösseren Anzahl von Beobachtungen in der Nähe des Horizontes beruht.

Bei Benutzung der empirischen Extinctionstabellen (der Münchener oder Potsdamer), deren Brauchbarkeit auch an anderen Beobachtungsorten in der Nähe des Meeresniveaus zur Genüge nachgewiesen ist, wird selbstverständlich ein, so weit das Auge zu beurtheilen vermag, klarer und dunstfreier Himmel vorausgesetzt. Jede Staub- oder Dunstschicht muss eine beträchtlich stärkere Lichtabnahme bedingen, und der Standpunkt des Beobachters (ob auf freiem Felde oder auf einem erhöhten Punkte oder inmitten einer grossen Stadt, wo Rauch- und Staubtheilchen fast nie fehlen) ist von der grössten Wichtigkeit. Zweifellos werden auch bei scheinbar ganz reinem Himmel Schwankungen in der Absorptionswirkung der Atmosphäre vorkommen, die durch Änderungen des Luftdruckes, der Temperatur und namentlich des Feuchtigkeitsgehaltes hervorgerufen werden; man sollte infolge dessen zu verschiedenen Jahreszeiten an ein und demselben Orte Unterschiede in den Extinctionswerthen erwarten. Indessen sind diese Schwankungen verhältnissmässig so gering, dass sie nicht erheblich die unvermeidliche Unsicherheit der photometrischen Messungen übersteigen dürften. Das Richtigste wäre es, für jede Beobachtungsreihe durch besondere Messungen den Verlauf der Extinctionscurve zu bestimmen. Da aber ein derartiges Verfahren einen verhältnissmässig grossen Zeitaufwand erfordert, so wird man nur ausnahmsweise davon Gebrauch machen können. In den meisten Fällen wird man sich doch mit der mittleren Extinctionstabelle begnügen müssen, wobei nach Möglichkeit die Vorschrift innezuhalten ist, die Beobachtungen so

zu arrangiren, dass grosse Unterschiede in den Zenithdistanzen überhaupt nicht vorkommen. Auch Vergleichungen von Gestirnen in sehr verschiedenen Azimuthen sind, wenn irgend angängig, zu vermeiden, weil erfahrungsmässig locale Verhältnisse, z. B. die Anwesenheit von grossen Wassermengen oder ausgedehnten Wäldern, den regelmässigen Verlauf der Extinction stören können. Im Allgemeinen wird man behaupten dürfen, dass bei Anwendung der mittleren Extinctionstabelle innerhalb des Intervalles von 0 bis 60° Zenithdistanz selten ein Fehler hervorgebracht werden kann, der gegenüber der Ungenauigkeit der photometrischen Messungen selbst irgendwie ins Gewicht fiele.

Zur Vervollständigung sei noch erwähnt, dass ausser an den beiden in der Ebene gelegenen Orten München und Potsdam, auch noch auf einem 2500 Meter hohen Berggipfel (dem Säntis in der Schweiz) die Extinctionscurve durch ein umfangreiches Beobachtungsmaterial von mir empirisch bestimmt worden ist[1]). Es wurde dabei das gleiche Beobachtungsverfahren wie in Potsdam eingeschlagen, nur mit dem Unterschiede, dass mehr Sterne (13 statt 5) benutzt und alle so weit wie möglich bis zum Horizonte verfolgt wurden. Das Säntismaterial ist daher weit homogener als das Potsdamer, und da ausserdem auf dem hohen Berge gleichmässigere Durchsichtigkeitsverhältnisse vorausgesetzt werden dürfen als in der Ebene, so eignet sich dieses Material am besten zu theoretischen Untersuchungen über die Extinction.

Im Anhange sind die mittleren Extinctionstabellen für Potsdam und für den Säntis ausführlich mitgetheilt, und zwar sind die Zenithreductionen $\varphi(z)$ sowohl in Helligkeitslogarithmen als in Grössenclassen angegeben.

Es fragt sich nun, wie sich die empirisch bestimmten Extinctionstabellen zu den Ergebnissen der theoretischen Forschung verhalten. Wir haben gesehen, dass die Endgleichungen der verschiedenen Theorien sämmtlich auf die Form gebracht werden können:

$$\log \frac{J_0}{J_z} = - \log p \, [F(z) - 1].$$

Darin bedeutet p durchweg den Transmissionscoefficienten der ganzen Atmosphäre, und $F(z)$ ist eine Function der Zenithdistanz, die je nach den Annahmen über die Constitution der Atmosphäre nach den einzelnen Theorien verschiedene Zahlenwerthe haben kann.

Sieht man von der Lambert'schen Interpolationsformel ab, so giebt die folgende kleine Tabelle eine Übersicht der verschiedenen Werthe

1) Publ. d. Astrophys. Obs. zu Potsdam. Bd. 8, p. 1.

von $F(z)$ oder, was dasselbe ist, der Weglängen in der homogen gedachten Atmosphäre, sowie gleichzeitig der daraus berechneten Werthe der Zenithreductionen $\varphi(z)$, wobei für den Transmissionscoefficienten p der Werth 0.835 zu Grunde gelegt ist. Argument dieser Tabelle, welche für Orte in der Nähe des Meeresniveaus gilt, ist die scheinbare Zenithdistanz. In der letzten Columne stehen zur Vergleichung die der Potsdamer mittleren Extinctionstabelle entnommenen Werthe von $\varphi(z)$.

Scheinbare Zenithdistanz	Bouguer		Laplace		Maurer		Potsdamer empirische Tabelle
	$F(z)$	$\varphi(z)$	$F(z)$	$\varphi(z)$	$F(z)$	$\varphi(z)$	$\varphi(z)$
0°	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
10	1.015	0.001	1.015	0.001	1.014	0.001	0.000
20	1.064	0.005	1.064	0.005	1.064	0.005	0.004
30	1.155	0.012	1.154	0.012	1.154	0.012	0.011
40	1.305	0.024	1.304	0.024	1.300	0.023	0.024
45	1.414	0.032	1.413	0.032	1.406	0.032	0.035
50	1.556	0.044	1.553	0.043	1.546	0.043	0.048
55	1.742	0.058	1.739	0.058	1.728	0.057	0.067
60	1.990	0.078	1.993	0.078	1.972	0.076	0.092
65	2.350	0.106	2.354	0.106	2.315	0.103	0.128
70	2.900	0.149	2.899	0.149	2.824	0.143	0.180
72	3.200	0.172	3.201	0.172	3.108	0.165	0.208
74	3.580	0.202	3.579	0.202	3.442	0.191	0.241
76	4.060	0.240	4.060	0.240	3.864	0.224	0.282
78	4.690	0.289	4.694	0.289	4.397	0.266	0.332
80	5.560	0.357	5.563	0.357	5.084	0.320	0.394
81	6.130	0.402	6.129	0.402	5.506	0.353	0.432
82	6.820	0.456	6.818	0.456	6.001	0.392	0.477
83	7.670	0.522	7.676	0.523	6.573	0.436	0.533
84	8.770	0.608	8.768	0.608	7.252	0.490	0.607
85	10.200	0.721	10.196	0.720	8.048	0.552	0.707
86	12.140	0.872	12.125	0.871	8.987	0.625	0.846
87	14.877	1.087	14.835	1.083	10.114	0.714	1.045
88	19.030	1.412	18.835	1.397	11.438	0.817	(1.333)

Aus dieser Zusammenstellung geht zunächst hervor, dass die Bouguer'schen und Laplace'schen Werthe bis zu Zenithdistanzen von etwa 85° vollkommen miteinander übereinstimmen und erst von da an grössere Abweichungen ergeben, wie auch von vornherein zu erwarten ist, weil Bouguer für $z = 90°$ einen endlichen Werth von $\varphi(z)$ berechnet, während die Laplace'sche Theorie dafür einen unendlich grossen Werth ergiebt. Die Maurer'sche Theorie liefert durchweg kleinere Werthe als die beiden

anderen. Die Vergleichung der theoretischen Werthe von $\varphi(z)$ mit der Potsdamer empirischen Extinctionstabelle zeigt für Bouguer und Laplace im Allgemeinen eine sehr befriedigende Übereinstimmung, da die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung bis zu 87° Zenithdistanz niemals den Betrag von 0.04 im Helligkeitslogarithmus oder von 0.1 Grössenclassen merklich übersteigen. Zwar spricht sich in diesen Differenzen ein systematischer Charakter aus, indem die beobachteten Werthe bis zur Zenithdistanz 84° durchweg grösser, darüber hinaus durchweg kleiner sind als die nach den Theorien berechneten; aber dieser systematische Charakter ist wohl lediglich auf die oben erwähnte Ungleichmässigkeit der Potsdamer Extinctionstabelle zurückzuführen; er verschwindet gänzlich, wie vor Kurzem von Kempf[1]) nachgewiesen ist, wenn man die Laplace'sche Theorie auf die beiden Theile der Potsdamer Tabelle getrennt anwendet. Was die Maurer'sche Theorie betrifft, so genügt dieselbe nach der obigen Tabelle den Beobachtungen in keiner Weise. Wollte man nach dieser Theorie eine leidliche Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Extinctionswerthen $\varphi(z)$ erzielen, so müsste man für den Transmissionscoefficienten p statt der benutzten Zahl 0.835 einen viel kleineren Werth (etwa 0.768) zu Grunde legen. Nach allen bisherigen Untersuchungen ist aber ein so kleiner Werth des Transmissionscoefficienten so gut wie ausgeschlossen.

Die Laplace'sche Theorie verdient jedenfalls vor allen anderen den Vorzug, und da die Berechnung der Extinctionswerthe mit Benutzung der bekannten Refractionstafeln ausserordentlich einfach ist, so steht ihrer allgemeinen Anwendung auf photometrische Messungen Nichts im Wege. Ihre Brauchbarkeit ist übrigens nicht nur für Beobachtungsorte in den untersten Schichten der Atmosphäre, sondern, wie meine Untersuchungen auf dem Säntis gezeigt haben, auch für eine Meereshöhe von 2500 Meter dargethan. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist in den höheren Luftschichten sogar noch besser als in der Ebene, wahrscheinlich weil dort ein idealerer Zustand der Atmosphäre stattfindet, namentlich alle verunreinigenden Bestandtheile, wie Staub und Dunst, gänzlich fehlen.

Ein Überblick über die im Anhange mitgetheilten Extinctionstabellen für Potsdam und den Säntis zeigt noch unmittelbar den Unterschied zwischen einer niederen und höheren Beobachtungsstation. Bei einer Zenithdistanz von 70° ist die Helligkeit eines Sternes am Meeresniveau um 0.45 Grössenclassen, dagegen auf einem 2500 Meter hohen Berge nur um 0.26 kleiner als im Zenith; bei 80° Zenithdistanz beträgt die

1) Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. Jahrg. 31 (1896), p. 12.

Lichtabschwächung gegenüber dem Zenith in der Ebene ungefähr eine Grössenclasse, auf dem Berge nur 0.64; bei 88° Zenithdistanz endlich hat ein Stern von seiner Zenithhelligkeit an der unteren Station eine volle Grössenclasse mehr eingebüsst als auf der oberen. Der Umstand, dass man auf einem hohen Berge in der Nähe des Horizontes mit blossem Auge mehr Sterne sieht als in der Ebene, lässt den Anblick des gestirnten Himmels daselbst etwas fremdartig erscheinen und verleitet leicht zur Überschätzung des Durchsichtigkeitszuwachses. Im Zenith selbst ist der Helligkeitsgewinn, wenn man aus den unteren Schichten der Atmosphäre in die höheren aufsteigt, verhältnissmässig unbedeutend; nach der Theorie dürfte die Zenithhelligkeit eines Sternes an einem 2500 Meter hohen Beobachtungsorte noch nicht um 0.1 grösser sein als in der Ebene. Eine directe empirische Bestimmung dieses Betrages wäre im hohen Grade erwünscht. Bisher ist eine solche erst einmal und zwar im Jahre 1894 von Kempf und mir durch gleichzeitige Beobachtungen in Catania und auf dem Gipfel des Ätna versucht worden; doch ist dieser Versuch, dessen Ergebnisse noch nicht veröffentlicht sind, keineswegs als entscheidend zu betrachten. Soviel steht fest, dass die mehrfach aufgestellte Frage, ob die Errichtung von festen Observatorien auf hohen Bergen zu empfehlen sei, verneint werden müsste, falls es sich lediglich um die Zunahme der Sternhelligkeit handelt, weil der Gewinn von wenigen Zehntel Grössenclassen, noch dazu erst bei niedrigem Stande der Sterne, in keinem Verhältnisse zu den beträchtlichen Kosten und der schwierigen Unterhaltung solcher Stationen stehen würde.

Was nun noch die Frage nach der Helligkeit der Gestirne ausserhalb der Erdatmosphäre betrifft, so lässt sich dieselbe natürlich nur auf Grund der Theorien aus Beobachtungen in verschiedenen Zenithdistanzen beantworten, und es existirt bereits eine ziemlich grosse Anzahl von Bestimmungen des Transmissionscoefficienten p für verschiedene Beobachtungsorte. Die wichtigsten derselben sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt mit Angabe des Beobachters, der Station, der Höhe derselben über dem Meere und des zugehörigen mittleren Barometerstandes. Da die absorbirende Luftmasse an den einzelnen Stationen sehr verschieden ist, so sind die in Columne 5 mitgetheilten direct ermittelten Coefficienten noch auf den Barometerstand 760 Millimeter, also auf die ganze Atmosphäre, reducirt worden; die reducirten Werthe finden sich in der vorletzten Columne, und in der letzten Columne ist der Helligkeitsbetrag in Grössenclassen angegeben, um welchen das senkrecht in die Atmosphäre eindringende Licht eines Sternes am Meeresniveau geschwächt erscheint.

Beobachter	Beobachtungs-Station	Höhe über dem Meere in Metern	Bar.	Beobacht. Transmiss.-Coefficient.	Transm. für eine Atmosphäre	Absorbirte Lichtmenge in Sterngrössen
			mm			
Bouguer[1]	Croisic (Bretagne)	—	760	0.812	0.812	0.23
Pritchard[2]	Cairo	33	759	0.843	0.843	0.19
Trépied[3]	Paris	59	758	0.810	0.809	0.23
Wolff[4]	Bonn	62	756	0.806	0.805	0.24
Pritchard[2]	Oxford	64	756	0.791	0.790	0.26
Abney[5]	Derby	—	754	0.850	0.849	0.18
Müller[6]	Potsdam	100	752	0.835	0.833	0.20
Stampfer[7]	Wien	202	744	0.824	0.821	0.21
Seidel[8]	München	529	716	0.804	0.793	0.25
Abney[5]	Grindelwald	1057	676	0.838	0.820	0.22
Langley[9]	Casa del Bosco am Ätna	1440	660	0.90	0.886	0.13
Müller[10]	Säntis	2504	569	0.879	0.842	0.19
Abney[5]	Faulhorn	2683	546	0.921	0.892	0.12
Müller und Kempf[11]	Ätnaobservatorium	2942	540	0.880	0.835	0.20
Langley[12]	Mount Whitney	3543	500	0.92	0.881	0.14

Die Zahlenangaben für den Transmissionscoefficienten der ganzen Atmosphäre in der obigen Tabelle sind nicht als gleichwerthig anzusehen. Während einige derselben, so namentlich die Münchener und Potsdamer, aus einem sehr grossen Beobachtungsmaterial hergeleitet sind, beruhen andere nur auf vereinzelten Messungen, und die Langley'schen Werthe gründen sich sogar nur auf wenige nicht sehr zuverlässige Helligkeitsschätzungen. Zur Ableitung eines Mittelwerthes müsste man den einzelnen Angaben verschiedene Gewichte beilegen, wobei eine gewisse Willkür nicht zu vermeiden wäre. Als ein brauchbarer Durchschnittswerth für den Transmissionscoefficienten p dürfte sich die Zahl 0.835 empfehlen;

1) Bouguer, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729, p. 163.
2) Memoirs of the R. Astr. Soc. Vol. 47, p. 416.
3) Comptes Rendus. Tom. 82, p. 559.
4) Wolff, Phot. Beob. an Fixsternen aus den Jahren 1876—1883. Berlin 1884, p. 34.
5) Phil. Trans. of the R. Soc. of London. 1893, p. 24—42. Die obigen Werthe sind aus den a. a. O. mitgetheilten Beobachtungen von mir berechnet worden.
6) Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam. Band 8, p. 32.
7) Entnommen aus der unter 4) citirten Abhandl. von Wolff, p. 31 u. 32.
8) Abh. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Classe, Bd. 6, p. 619.
9) American Journal of science. 3 Ser. Vol. 20, p. 38.
10) Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam. Bd. 8, p. 39.
11) Noch nicht publicirt.
12) Professional papers of the Signal Service. No. 15, p. 155.

daraus würde folgen, dass die Sterne ausserhalb der Erdatmosphäre um rund 0.2 Grössenclassen heller erscheinen als im Zenith eines Beobachtungsortes im Niveau des Meeres bei besonders günstigem Luftzustande.

6. Die selective Absorption der Atmosphäre. Die Langley'schen Untersuchungen.

Die Extinction des Lichtes in der Erdatmosphäre ist nicht für alle Strahlengattungen dieselbe, vielmehr übt die Lufthülle eine selective Absorption aus, welche sich in zweifacher Weise äussert. Zunächst werden Strahlen von gewisser Wellenlänge fast vollständig von dem in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampf aufgehalten. Es treten daher an bestimmten Stellen des Spectrums Absorptionslinien, ähnlich den bekannten Fraunhofer'schen Linien, auf, welche je nach der Quantität des vorhandenen Wasserdampfes und der Länge des in der Atmosphäre von den Lichtstrahlen durchlaufenen Weges in Bezug auf Intensität und Breite variiren. Diese Wirkung ist eine discontinuirliche und erstreckt sich über ein verhältnissmässig kleines Gebiet im gelben und rothen Theile des Spectrums. Eine bemerkenswerthe Schwächung im Gesammtlichte eines Sternes wird durch diese Absorptionsstreifen nicht hervorgebracht.

Wesentlich anders ist die zweite Art der selectiven Absorption, welche sich continuirlich über das ganze Spectrum ausdehnt und in der Weise zu Tage tritt, dass die blauen und violetten Strahlen stärker ausgelöscht werden als die grünen, und diese wieder stärker als die gelben und rothen. Wenn man diese Absorption als eine rein mechanische ansieht, hervorgebracht durch die in der Luft befindlichen Partikelchen der verschiedensten Art, welche eine allgemeine Diffraction verursachen, so erklärt sich der continuirlich wechselnde Grad der Lichtschwächung im Spectrum durch die Beziehung, welche zwischen den Dimensionen dieser Partikelchen und der Wellenlänge existirt. In welchem Betrage sich die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für die einzelnen Strahlengattungen ändert, geht aus der folgenden Tabelle hervor, in welcher die zuverlässigsten Werthe der Transmissionscoefficienten zusammengestellt sind. Die von mir für Potsdam gefundenen Resultate[1]) beruhen auf Vergleichungen des Sonnenspectrums und des Spectrums einer Petroleumflamme mit Hülfe des Spectralphotometers, die Abney'schen[2]) Zahlen sind aus Helligkeitsvergleichungen

1) Astr. Nachr. Bd. 103, No. 2464 und Publ. des Astrophys. Obs. zu Potsdam. Bd. 8, p. 7, Anmerkung.

2) Phil. Trans. of the R. Soc. of London. 1887, p. 251—283. NB. Die Werthe sind aus Mascart's Traité d'optique, Tome III, p. 372, entnommen.

verschiedener Theile des Sonnenspectrums mit dem Gesammtlichte der Sonne abgeleitet, und die Langley'schen[1]) Angaben gründen sich auf Messungen mit dem Bolometer, sind also eigentlich streng genommen nicht direct mit den anderen Werthen vergleichbar, weil sie sich auf die Wärmewirkung der Sonne, nicht auf die Lichtwirkung beziehen. Die in der Tabelle angeführten Zahlenwerthe für die verschiedenen Wellenlängen sind aus den betreffenden Reihen durch Interpolation gewonnen worden und können um einige Einheiten der letzten Decimale unsicher sein.

Wellenlänge	Müller	Abney	Langley	Wellenlänge	Müller	Abney	Langley
760 $\mu\mu$	—	0.954 7	0.838 7	560 $\mu\mu$	0.819 11	0.843 22	0.750 12
740	—	0.947 7	0.831 7	540	0.808 13	0.821 26	0.738 14
720	—	0.940 8	0.824 7	520	0.795 14	0.795 30	0.724 16
700	—	0.932 9	0.817 8	500	0.781 17	0.765 36	0.708 19
680	0.881 10	0.923 9	0.809 9	480	0.764 24	0.729 43	0.689 24
660	0.871 10	0.914 10	0.800 8	460	0.740 34	0.686 49	0.665 28
640	0.861 11	0.904 12	0.792 9	440	0.706	0.637 56	0.637 33
620	0.850 10	0.892 11	0.783 11	420	—	0.581 59	0.604 39
600	0.840 10	0.878 16	0.772 11	400	—	0.522	0.565
580	0.830 11	0.862 19	0.761 11				

Die Müller'sche und Langley'sche Reihe zeigen trotz der merklichen Unterschiede in den absoluten Werthen der Transmissionscoefficienten eine auffallende Übereinstimmung in dem Gange der Zahlen, während bei der Abney'schen Reihe nach dem brechbareren Ende des Spectrums zu die Differenzen beträchtlich stärker anwachsen als bei den anderen Reihen. Bei Müller und Langley sind die Logarithmen der Transmissionscoefficienten, abgesehen von den etwas unsicher bestimmten Werthen an den beiden Enden des sichtbaren Spectrums, sehr nahe proportional den umgekehrten Quadraten, bei Abney dagegen ungefähr proportional den umgekehrten vierten Potenzen der Wellenlängen.

Weitere Bestimmungen dieser wichtigen Constanten sind im hohen Grade erwünscht. Soviel ist jedenfalls sicher, dass die rothen Strahlen nur etwa 10 Procent des Lichtes beim Durchgange durch die ganze Erdatmosphäre verlieren, die blauen und violetten dagegen 40 Procent, und dass nach dem Ultraviolett zu die absorbirende Wirkung der Atmosphäre ausserordentlich rasch anwächst. Es können in dem Lichte der Sterne sehr wohl auch Strahlengattungen enthalten sein, deren Durchlässigkeits-

1) Professional papers of the Signal service. No. 15, p. 151.

coefficienten so klein sind, dass sie bereits in den ersten Schichten der Atmosphäre gänzlich ausgelöscht werden und überhaupt nicht bis zur Erdoberfläche gelangen. Daraus würde aber folgen, dass das Gesammtlicht eines Sternes ausserhalb der Atmosphäre viel grösser sein könnte, als man gewöhnlich annimmt, und dass die auf Seite 138 zusammengestellten Transmissionscoefficienten nur obere Grenzwerthe für die Lichtdurchlässigkeit der Atmosphäre repräsentiren würden. Dieses Bedenken haben bereits Forbes[1]) und Crova[2]) geäussert, und Ersterer hat die Wirkung der Atmosphäre mit der eines rothen Glases verglichen, welches bei geringer Dicke noch alle Strahlengattungen passiren lässt, dagegen bei zunehmender Dicke nur den rothen Strahlen leichten Durchgang gestattet, so dass man den Durchlässigkeitscoefficienten für das Gesammtlicht um so grösser finden würde, aus je dickeren Stücken des Glases man denselben bestimmte. Langley[3]) hat diesen Einwurf noch präciser in mathematischer Form begründet und glaubt zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass alle bisherigen Bestimmungen der Gesammtenergie (Licht oder Wärme) ausserhalb der Atmosphäre beträchtlich von der Wahrheit entfernt sind, und dass der Energieverlust bei senkrechtem Strahlendurchgange anstatt der gewöhnlich angenommenen 18 Procent wahrscheinlich etwa 40 Procent betragen wird.

Da der Gegenstand für die Astrophotometrie von nicht unerheblichem Interesse ist, so soll hier noch etwas näher darauf eingegangen werden.

Es sei L die Gesammtintensität des Lichtes eines Sternes ausserhalb der Atmosphäre. Dieses Licht bestehe aus n verschiedenen Strahlengattungen, deren Helligkeiten vor dem Eintritte in die Atmosphäre B_1, B_2, B_3 ... B_n sein mögen. Dann hat man:

$$L = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n.$$

Nimmt man nun an, dass die im Vorangehenden erörterten Extinctionstheorien für homogenes Licht strenge Gültigkeit besitzen, und nennt die Transmissionscoefficienten der ganzen Atmosphäre für die einzelnen Strahlengattungen c_1, c_2, c_3 .... c_n, so wird die Helligkeit J_z des Sternes bei der Zenithdistanz z, wenn man die durchlaufene Luftmasse mit γ bezeichnet, nach der Bouguer'schen Theorie ausgedrückt durch:

$$J_z = B_1 c_1^\gamma + B_2 c_2^\gamma + B_3 c_3^\gamma + \cdots + B_n c_n^\gamma.$$

Nun war früher ganz allgemein gesetzt worden: $J_z = J p^\gamma$, wo p der Transmissionscoefficient für das Gesammtlicht des Sternes und J die Helligkeit ausserhalb der Atmosphäre ist, wie sie durch Extrapolation

1) Phil. Trans. of the R. Soc. of London. 1842, p. 225.
2) Annales de chimie et de physique. Série 5, t. 11, p. 433 und t. 19, p. 167.
3) American Journal of science. 3. Ser. Vol. 28, p. 163.

aus den Beobachtungen ermittelt wird. Für zwei verschiedene Zenithdistanzen z_1 und z_2, denen die Luftmassen γ_1 und γ_2 entsprechen mögen, hat man daher:

$$J_{z_1} = Jp^{\gamma_1} = B_1 c_1^{\gamma_1} + B_2 c_2^{\gamma_1} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_1},$$
$$J_{z_2} = Jp^{\gamma_2} = B_1 c_1^{\gamma_2} + B_2 c_2^{\gamma_2} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_2}.$$

Erhebt man die erste Gleichung zur Potenz γ_2, die zweite zur Potenz γ_1 und dividirt die beiden Gleichungen durch einander, so erhält man:

$$J^{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{(B_1 c_1^{\gamma_1} + B_2 c_2^{\gamma_1} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_1})^{\gamma_2}}{(B_1 c_1^{\gamma_2} + B_2 c_2^{\gamma_2} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_2})^{\gamma_1}}.$$

Für den Quotienten $\frac{L}{J}$ ergiebt sich daher der Werth:

$$(30)\quad \frac{L}{J} = \frac{(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)(B_1 c_1^{\gamma_2} + B_2 c_2^{\gamma_2} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_2})^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}}}{(B_1 c_1^{\gamma_1} + B_2 c_2^{\gamma_1} + \cdots + B_n c_n^{\gamma_1})^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}}}.$$

Wir wollen annehmen, dass die Zenithdistanz z_2 grösser ist als z_1; dann ist auch $\gamma_2 > \gamma_1$, und wir können setzen $\gamma_2 = m\gamma_1$, wo $m > 1$ ist. Mithin wird $\gamma_2 - \gamma_1 = (m-1)\gamma_1$ und ferner:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{1}{m-1},$$
$$\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1_1} = \frac{m}{m-1}.$$

Führt man endlich noch der bequemeren Schreibweise wegen die Bezeichnungen ein:

$$c_1^{\gamma_1} = b_1, \quad c_2^{\gamma_1} = b_2, \quad \ldots \quad c_n^{\gamma_1} = b_n,$$

so erhält man aus der obigen Gleichung (30) durch Substitution die neue Gleichung:

$$(31)\quad \left(\frac{L}{J}\right)^{m-1} = \frac{(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)^{m-1}(B_1 b_1^m + B_2 b_2^m + \cdots + B_n b_n^m)}{(B_1 b_1 + B_2 b_2 + \cdots + B_n b_n)^m}.$$

Die linke Seite der Gleichung werde mit Z_m bezeichnet, und es sei zunächst m eine ganze Zahl. Bildet man dann entsprechend den Werth Z_{m-1}, so ergiebt sich:

$$(32)\quad \frac{Z_m}{Z_{m-1}} = \frac{L}{J} = \frac{(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)(B_1 b_1^m + B_2 b_2^m + \cdots + B_n b_n^m)}{(B_1 b_1 + B_2 b_2 + \cdots + B_n b_n)(B_1 b_1^{m-1} + B_2 b_2^{m-1} + \cdots + B_n b_n^{m-1})}.$$

Zähler und Nenner dieses Bruches lassen sich in der Form schreiben:

$$\text{Zähler} = B_1^2 b_1^m + B_2^2 b_2^m + B_1 B_2 (b_1^m + b_2^m) + \cdots,$$
$$\text{Nenner} = B_1^2 b_1^m + B_2^2 b_2^m + B_1 B_2 (b_1 b_2^{m-1} + b_2 b_1^{m-1}) + \cdots.$$

Durch Subtraction erhält man daraus:

(33) $\text{Zähler} - \text{Nenner} = B_1 B_2 (b_1 - b_2)(b_1^{m-1} - b_2^{m-1}) + \cdots$.

Nun ist ohne Weiteres klar, dass, wenn $b_1 > b_2$ ist, dann auch $b_1^{m-1} > b_2^{m-1}$ sein muss, und ebenso, wenn $b_1 - b_2$ eine negative Zahl ist, auch $b_1^{m-1} - b_2^{m-1}$ negativ sein muss. Unter allen Umständen ist das Product der beiden Grössen positiv, und da dasselbe auch für die weiteren Glieder der oberen Reihe gilt, so folgt, dass die Differenz Zähler — Nenner ebenfalls eine positive Grösse ist und mithin $L > J$ wird. Damit ist also, wenigstens für ganze m, erwiesen, dass die wirkliche Gesammtintensität eines Sternes vor dem Eintritte in die Atmosphäre stets grösser ist, als die aus Beobachtungen bei verschiedenen Zenithdistanzen nach der Theorie berechnete Helligkeit J, und dass mithin die auf Seite 138 mitgetheilten Transmissionscoefficienten in der That, wie von Langley behauptet worden ist, nur Maximalwerthe für diese Constante repräsentiren können. Auch für beliebige Werthe von m lässt sich der Beweis führen, dass $L > J$ ist, indem man nachweist, dass $\frac{d(Z_m)}{dm}$ beständig wächst. Aus Gleichung (33) geht noch hervor, da die Grösse $b_1^{m-1} - b_2^{m-1}$ und die entsprechenden Factoren der weiteren Glieder dem absoluten Betrage nach um so grösser werden, je grösser m ist, dass die Differenz zwischen Zähler und Nenner und demnach auch der Quotient $\frac{L}{J}$ mit wachsendem m zunehmen muss. Man sollte demnach erwarten, dass die nach der Theorie berechneten Werthe von J verschieden ausfallen, je nachdem man Beobachtungen mit einander combinirt, bei denen der Unterschied der Zenithdistanzen klein oder gross ist. Wenn man z. B. die Helligkeitsmessung eines Sternes im Zenith successive mit Messungen bei den Zenithdistanzen 60°, 65°, 70°, 75°, 80° etc. vereinigte, so müssten sich die daraus bestimmten Werthe von J beständig kleiner ergeben oder, was dasselbe ist, die ermittelten Transmissionscoefficienten der Atmosphäre müssten anwachsen. Nun zeigt aber eine sorgfältige Prüfung der beiden zuverlässigsten empirischen Extinctionstabellen, der Seidel'schen sowohl wie der Potsdamer, davon keine Spur, im Gegentheil findet bis zu einer gewissen Zenithdistanz gerade das Umgekehrte statt, und man könnte schon daraus mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen, dass der Fehler, den man bei der Berechnung der Helligkeit der Sterne ausserhalb der Atmosphäre unter Anwendung der gewöhnlichen Extinctionstheorien begeht, nicht beträchtlich sein kann, jedenfalls nicht so gross, wie Langley annimmt. Seeliger[1]) hat sich

[1]) Sitzungsber. der math.-phys. Classe der K. Bayer. Akad. der Wiss. Bd. 21, 1891, p. 247.

neuerdings etwas eingehender mit diesem Gegenstande beschäftigt und den Versuch gemacht, aus den Abweichungen zwischen der Potsdamer Extinctionstabelle und den nach der Laplace'schen Theorie berechneten Helligkeitswerthen einen Schluss zu ziehen auf den wahren Transmissionscoefficienten der Atmosphäre. Er findet, indem er die Langley'schen Durchlässigkeitscoefficienten für die verschiedenfarbigen Strahlen zu Grunde legt, dass die Helligkeit der Sterne ausserhalb der Atmosphäre noch nicht um 7 Procent grösser sein kann, als die Theorien ergeben, und dass die absorbirte Lichtmenge zwar mehr als 18 Procent, wie gewöhnlich angenommen wird, aber gewiss weniger als 25 Procent betragen muss. Seeliger macht auch darauf aufmerksam, dass die physiologischen Wirkungen der einzelnen Farben, auf die es doch bei der optischen Photometrie fast ausschliesslich ankommt, sich auf eine verhältnissmässig schmale Zone im Gelb und Grün concentriren, die an Wirkung die übrigen Partien im Spectrum so sehr übertrifft, dass fast nur sie allein berücksichtigt zu werden braucht; dadurch wird der fragliche Fehler wahrscheinlich noch mehr verringert.

Eine ganz strenge Widerlegung der Langley'schen Bedenken ist damit freilich noch nicht gegeben; es ist nur ihre Unwahrscheinlichkeit plausibel gemacht worden. Mit einiger Sicherheit liesse sich die wirkliche Sternhelligkeit ausserhalb der Atmosphäre nur dann ermitteln, wenn es gelänge, auf sehr hohen Bergen möglichst zahlreiche absolut zuverlässige photometrische Messungen zur Bestimmung der Extinction zu erhalten. In einer Höhe von 4000 bis 5000 Meter, wo bereits mehr als ein Drittel der gesammten Luftmasse unterhalb des Beobachters liegt, müssten nach der Langley'schen Auffassung bereits Strahlungen zur Wirkung kommen, die gar nicht mehr bis zu den alleruntersten Schichten der Atmosphäre gelangen; es müsste daher auch an einem solchen Punkte aus sorgfältigen Extinctionsbeobachtungen ein Transmissionscoefficient für die ganze Atmosphäre hervorgehen, der bereits merklich kleiner wäre, als die an tiefen Stationen gefundenen. Die wenigen bisher in dieser Richtung auf hohen Bergen angestellten rein photometrischen Untersuchungen, sowie die bei weitem zahlreicheren, wenn auch nicht so zuverlässigen actinometrischen Messungen zeigen nichts dergleichen, und man wird daher wohl berechtigt sein, den Langley'schen Einwendungen keine allzu grosse praktische Bedeutung beizumessen.