Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

Duhamel, Jean Marie Constant

1853

Dynamik. Von dem Gleichgewicht und den kleinen Bewegungen eines elastischen Fadens

urn:nbn:at:at-ubi:2-6620

Von dem Gleichgewichte und den kleinen Bewegungen eines elastischen Fadens.

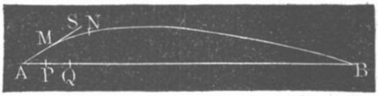
203. Die Aehnlichkeit dieser Aufgabe mit den vorigen hat uns bestimmt, sie hier folgen zu lassen.

Bisher haben wir von der Ausdehnbarkeit der Fäden ganz abgesehen; jetzt dagegen wollen wir Rücksicht darauf nehmen, dass sie fähig sind, sich unter dem Einflusse von Kräften, welche in ihnen eine beliebige Spannung hervorbringen, zu verlängern. Wir werden unsere Betrachtung nur innerhalb solcher Grenzen anstellen, dass der Faden nicht zerreisst und seine vorige Länge wieder annimmt, wenn die Kraft zu wirken aufhört. Die Erfahrung lehrt, dass innerhalb dieser Grenzen die Verlängerung der Spannung proportional ist.

Den natürlichen Zustand des Fadens nennen wir denjenigen, in welchem er von keiner Kraft angegriffen wird. Erzeugt man in einem homogenen Faden, der sich in diesem Zustande befindet, eine der Krafteinheit gleiche Spannung, so verlängert sich die Längeneinheit um ein Stück δ, welches in allen Fällen gegeben sein muss. Läge die der Einheit gleiche Spannung ausserhalb der oben bezeichneten Grenzen, so würde man sie zwar nicht wirklich in dem Faden hervorbringen; aber wegen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wollen wir auch in diesem Falle voraussetzen, dass man uns die Grösse δ giebt, um welche die Längeneinheit sich ausdehnen würde, wenn der Faden dabei innerhalb der Elasticitätsgrenzen bliebe. Nur ist bei jeder besonderen Anwendung zu untersuchen, ob diese Grenzen nicht überschritten werden, in welchem Falle die Erfahrung mit den Ergebnissen unserer Rechnung nicht übereinstimmen könnte.

204. Es stelle AB einen homogenen elastischen Faden vor, dessen Endpunkte A, B fest sind, und welcher eine Spannung τ erleidet, während keine äussere Kraft auf ihn wirkt und folglich alle seine Punkte in der Geraden AB liegen; die Masse seiner Längeneinheit sei ε. Nehmen wir den Punkt A zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Richtung AB zur Axe der x. Lassen wir nur bewegende Kräfte an allen Punkten des Fadens wirken, deren Componenten, auf die Masseneinheit bezogen, an irgend einem Punkt X, Y, Z heissen mögen. Die Aufgabe besteht darin, für irgend einen Punkt des Fadens die drei Coordinatenwerthe zu bestimmen, welche constant sind im Falle des Gleichgewichts und bei der Bewegung von der Zeit t abhängen.

Fig. 17.



Die Kräfte X, Y, Z bewirken eine allgemeine Verrückung. Es sei M die Lage, welche in einem gewissen Augenblick der ursprünglich in P gelegene materielle Punkt einnimmt. Suchen wir zunächst den allgemeinen Ausdruck für die Spannung in diesem Punkt. Zu dem Ende betrachten wir einen zweiten Punkt des Fadens, welcher in dem ursprünglichen Zustande um das unendlich kleine Stück $PQ = \alpha$ von P entfernt war und sich in N befindet in dem Augenblick, wo P in M ist. Die Differenz $MN - PQ$, getheilt durch PQ, giebt die auf die Längeneinheit bezogene Ausdehnung, welche das Element PQ in der Lage MN erfahren hat; und aus dieser findet sich unmittelbar die Zunahme der Spannung.

Die ursprüngliche Abscisse AP des materiellen Punktes P heisse x; die Coordinaten von M seien $x + u$, y, z. Die drei sehr kleinen Grössen u, y, z sind die Unbekannten der Aufgabe; im Falle des Gleichgewichts sind sie Functionen von x, bei der Bewegung Functionen von x und t. Betrachtet man die Bewegung eines und desselben materiellen Punktes, so bleibt x constant; es ändert sich dagegen, wenn man auf eine andere Molekel übergeht.

Der Unterschied $MN - PQ$ ist sehr klein im Vergleich zu PQ; man darf also bei seiner Berechnung nur solche Grössen vernachlässigen, welche gegen PQ sehr klein von zweiter

Ordnung sind. Wir beschränken uns auf die Fälle, wo die Winkel aller Fadenelemente mit der Axe der x sehr klein bleiben, und dürfen deshalb statt MN seine Projection auf diese Axe nehmen. Man hat folglich, wenn u' den Werth des u für den Punkt Q bezeichnet:

$$MN - PQ = u' - u.$$

Nun geht aber u' aus u hervor, indem man $x + \alpha$ statt x setzt, also ist:

$$u' - u = \frac{du}{dx}\alpha.$$

Theilt man diese Verlängerung durch α, so erhält man, auf die Längeneinheit bezogen, $\frac{du}{dx}$ als die positive oder negative Dehnung des ursprünglich in PQ gelegenen Elements oder als die Dehnung des Fadens in dem Punkt mit der ursprünglichen Abscisse x. Die Verlängerung ist dem Zuwachse der Spannung proportional, mithin beträgt dieser $\frac{1}{\delta}\frac{du}{dx}$, und folglich wird die Spannung des Fadens in dem Punkt mit der ursprünglichen Abscisse x zu jeder Zeit ausgedrückt durch:

$$T = \tau + \frac{1}{\delta}\frac{du}{dx};$$

$\frac{du}{dx}$ bezeichnet die partielle Ableitung von u nach x.

Nachdem man den allgemeinen Ausdruck der Spannung kennt, befolgt man denselben Gang wie bei unelastischen Fäden. Die Kräfte, welche auf ein unendlich kleines Element MN wirken, sind die in M und N angreifenden, nach aussen gerichteten Spannungen und die Kräfte

$$\alpha\varepsilon X,\ \alpha\varepsilon Y,\ \alpha\varepsilon Z.$$

Die Richtung MS der Tangente bilde mit den Axen die Winkel λ, μ, ν, dann sind

$$- T\cos\lambda,\quad - T\cos\mu,\quad - T\cos\nu$$

die Componenten der das Element MN in M angreifenden Spannung und

$$T\cos\lambda + d.T\cos\lambda,\quad T\cos\mu + d.T\cos\mu,\quad T\cos\nu + d.T\cos\nu$$

die Componenten der in N angreifenden Spannung.

Mag man nun das Element MN als starr oder als veränderlich ansehen, die Bewegung seines Schwerpunkts geschieht immer so, als ob er die Masse des Elements besässe und alle darauf wirkenden Kräfte ihn angriffen. Für die Bewegung des Punktes M kann man die des Schwerpunktes von MN setzen und erhält dadurch folgende Gleichungen der Bewegung für M:

$$d\,.\,T\cos\lambda + \alpha\varepsilon X = \alpha\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$d\,.\,T\cos\mu + \alpha\varepsilon Y = \alpha\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$d\,.\,T\cos\nu + \alpha\varepsilon Z = \alpha\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wenn man dieselben durch α theilt und auf die Grenze übergeht, so werden ihre ersten Summanden die partiell nach x genommenen Ableitungen von

$$T\cos\lambda,\quad T\cos\mu,\quad T\cos\nu;$$

und diese wollen wir zunächst ausdrücken.

Für $\cos\lambda$ kann man bei Vernachlässigung der sehr Kleinen zweiter Ordnung 1 setzen; dies giebt mit Rücksicht auf den gefundenen Werth von T:

$$\frac{d\,.\,T\cos\lambda}{dx} = \frac{1}{\delta}\,\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Die Werthe von $\cos\mu$, $\cos\nu$ sind sehr klein erster Ordnung, ebenso $\frac{du}{dx}$, man darf daher $T\cos\mu$, $T\cos\nu$ gleich $\tau\cos\mu$, $\tau\cos\nu$ nehmen. Bezeichnet man die Unterschiede der Coordinaten y, z der zwei unendlich nahen Punkte M, N durch dy, dz, so hat man:

$$\cos\mu = \frac{dy}{MN},\quad \cos\nu = \frac{dz}{MN}.$$

Da nun beide Cosinus sehr klein sind und MN sich von PQ oder dx nur um eine gegen dx sehr kleine Grösse unterscheidet, so darf man setzen:

$$\cos\mu = \frac{dy}{dx},\quad \cos\nu = \frac{dz}{dx}$$

und erhält dadurch:

$$\frac{d\,.\,T\cos\mu}{dx} = \tau\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d\,.\,T\cos\nu}{dx} = \tau\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Demnach werden die Gleichungen der Bewegung des Fadens:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen, welche gelten, wenn der Faden unter dem Einflusse der Kräfte X, Y, Z im Gleichgewicht steht:

$$(2)\quad \begin{cases} X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0, \\ Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \\ Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Wenn die Kräfte X, Y, Z Null sind oder von t und x allein abhängen, so lassen sich die Functionen u, y, z unabhängig von einander aus (1) berechnen. Die durch u bestimmte Längenbewegung ist dann unabhängig von der durch y und z bestimmten Querbewegung.

Für $X = Y = Z = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (1) zu:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\delta\varepsilon}\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Diese sind von derselben Form wie die Gleichungen der Bewegung eines Gases in einem cylindrischen Rohre und ergeben analoge Resultate. Man würde finden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in longitudinaler Richtung $\sqrt{\dfrac{1}{\delta\varepsilon}}$ beträgt und $\sqrt{\dfrac{\tau}{\varepsilon}}$ in darauf senkrechter Richtung; die Dauer der Längenschwingungen des Fadens von der Länge l ist $2\,l\sqrt{\delta\,\varepsilon}$, also unabhängig von seiner Spannung; die Dauer der Querschwingungen $2\,l\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\tau}}$.

Längenschwingungen der Stäbe.

205. Um die zur Bestimmung von u dienende Gleichung zu erhalten, bedarf es der Voraussetzung eines biegsamen und dünnen Fadens nicht; sie bleibt deshalb geltend für einen elastischen Stab, in welchem man nur Längenbewegungen betrachtet, die für alle Punkte eines und desselben Querschnitts dieselben sind. Die Verlängerung δ, welche die Längeneinheit durch die Krafteinheit erfährt, steht im umgekehrten Verhältniss mit dem Flächeninhalte des Querschnitts; da aber die Masse ε der Längeneinheit diesem Flächeninhalte direct proportional ist, so bleibt das Product $\delta\,\varepsilon$ unabhängig von der Dicke des Stabes.

Sind beide Enden des Stabes fest, so ist die Dauer seiner Längenschwingungen $2\,l\sqrt{\delta\,\varepsilon}$ wie bei einem elastischen Faden.

Es können aber auch beide Enden frei, oder das eine Ende kann frei und das andere fest sein. Diese zwei neuen Aufgaben sind nicht schwieriger als die erste. Die Spannung an dem freien Ende ist unveränderlich, und folglich muss man hier beständig $\dfrac{du}{dx} = 0$ haben. Man findet, wenn beide Enden frei sind, die Dauer der Längenschwingungen gerade so gross, als wenn sie fest wären; die Schwingungsdauer wird aber doppelt so gross, wenn ein Ende fest und das andere frei ist. Es findet somit vollständige Analogie zwischen den Längenschwingungen der Stäbe und denen von Gasen in cylindrischen Röhren statt; ein festes Ende des Stabes entspricht einem geschlossenen des Rohres und ein freies Ende einem offenen.

Von den kleinen Bewegungen eines beliebigen Systems Punkte.

206. Ein beliebiges System Punkte, welche in gewissen Verbindungen mit einander stehen, die durch Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden, befinde sich un-

ter dem Einflusse von Kräften, welche auf irgend eine Art von den Coordinaten abhängen, in stabilem Gleichgewicht. Die Zeit soll in den Verbindungsgleichungen und in den Ausdrücken für die Kräfte nicht explicit vorkommen. Entfernt man die Punkte sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage, theilt ihnen sehr kleine Geschwindigkeiten mit und überlässt sie darauf der Wirkung jener gegebenen Kräfte, so werden die Aenderungen ihrer Coordinaten immer sehr klein bleiben, weil das Gleichgewicht stabil war. Wir wollen diese Aenderungen als Functionen der Zeit bestimmen und einige allgemeine Eigenschaften derselben kennen lernen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Systems in irgend einem Augenblick, a, b, c ihre Werthe in der Gleichgewichtslage, μ die Masse dieses Punktes. Setzen wir

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

so sind α, β, γ sehr kleine, mit der Zeit variable Grössen, von welchen die Lage des Punktes μ in jedem Augenblick abhängt. Für einen zweiten Punkt μ' hat man:

$$x' = a' + \alpha', \quad y' = b' + \beta', \quad z' = c' + \gamma',$$

u. s. w. Die Componenten der den Punkt μ angreifenden Kraft mögen X, Y, Z heissen; ihre Werthe für den Punkt μ' seien X', Y', Z', etc. Die gegebenen Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten $x, y, z, x', y', z', \ldots$ seien:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots. \tag{1}$$

Man verlangt die Gleichungen, welche $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch t bestimmen.

Setzt man $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma, \ldots$ statt $x, y, z, \ldots$ in (1), so darf man die Entwickelungen mit der ersten Dimension von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ abbrechen. Hierdurch erhält man, weil $a, b, c, \ldots$ den Gleichungen (1) selbst genügen:

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{dL}{da}\alpha + \frac{dL}{db}\beta + \frac{dL}{dc}\gamma + \frac{dL}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\
\frac{dM}{da}\alpha + \frac{dM}{db}\beta + \frac{dM}{dc}\gamma + \frac{dM}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\
\frac{dN}{da}\alpha + \frac{dN}{db}\beta + \frac{dN}{dc}\gamma + \frac{dN}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;
\end{array}\right. \tag{2}$$

dabei stellen $\frac{dL}{da}$, $\frac{dL}{db}$, ... die Werthe vor, welche $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, ... dadurch annehmen, dass man durchaus $x = a$, $y = b$, ... setzt.

Die Functionen X, Y, Z, X', ... mögen in der Gleichgewichtslage des Systems die Werthe A, B, C, A', ... haben. In einer beliebigen Nachbarlage ist dann:

$$(3). \quad \begin{cases} X = A + \frac{dX}{da}\alpha + \frac{dX}{db}\beta + \frac{dX}{dc}\gamma + \frac{dX}{da'}\alpha' + \cdots, \\ Y = B + \frac{dY}{da}\alpha + \frac{dY}{db}\beta + \frac{dY}{dc}\gamma + \cdots, \\ Z = C + \frac{dZ}{da}\alpha + \frac{dZ}{db}\beta + \cdots, \\ X' = A' + \frac{dX'}{da}\alpha + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

wenn $\frac{dX}{da}$, $\frac{dX}{db}$, ... die Werthe von $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dX}{dy}$, ... für $x = a$, $y = b$, ... bezeichnen.

Weil

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \ldots,$$

so ist die allgemeine Gleichung, welche die Bewegung des Systems bestimmt:

$$(4) \quad \sum \left\{ \left(X - \mu\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \mu\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \mu\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\delta z \right\} = 0,$$

wo die Grössen δx, δy, δz, $\delta x'$, ... den Bedingungen zu genügen haben:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \frac{dN}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die Coëfficienten der Gleichungen (5) unterscheiden sich von denen der Gleichungen (2) um Grössen, welche in Bezug auf α, β, γ, ... linear sind. So hat man z. B.:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dL}{da} + \frac{d^2 L}{da^2}\,\alpha + \frac{d^2 L}{da\,db}\,\beta + \cdots,$$

etc.

Die Gleichungen (5) bestimmen eine gewisse Anzahl der Grössen δ als lineare Functionen der übrigen, welche ganz willkürlich bleiben. In diesen linearen Functionen sind die willkürlichen δ mit Coëfficienten behaftet, welche man in zwei Theile zerlegen kann: in einen endlichen Theil, der dadurch erhalten wird, dass man $\alpha = 0$, $\beta = 0$, etc. macht, und in einen anderen, welcher die sehr kleinen Grössen α, β, γ, ... mit Vernachlässigung ihrer zweiten und höheren Dimensionen überall linear enthält. Wollte man den Ausdruck derjenigen δ haben, welche sich auf die Gleichgewichtslage des Systems beziehen, so müsste man sich auf den ersten Theil beschränken.

Substituirt man nun in der Gleichung (4) denjenigen δ, welche aus (5) als lineare Functionen der übrigen gefunden sind, ihre Werthe, so hat man die Coëfficienten der willkürlich bleibenden δ gleich Null zu setzen. Jeder dieser Coëfficienten lässt sich in zwei Summanden zerlegen: in dem ersten, endlichen haben die Kräfte X, Y, Z, ... und die Functionen $\frac{dL}{dx}$, ... jene Werthe, welche sich auf die Gleichgewichtslage beziehen; der andere Summand enthält α, β, γ, ..., $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, ... in allen Gliedern linear, indem man die höheren Dimensionen (auch die Producte von α, β, ... in eine der zweiten Ableitungen) vernachlässigt. Den ersten Summanden würde man durch die Betrachtung des Gleichgewichts allein erhalten; er ist deshalb Null, und es bleibt nur der zweite, welchen man gleich Null zu setzen hat.

Die so erhaltenen Gleichungen muss man mit den Gleichungen (2) verbinden, welche eine gewisse Anzahl von Unbekannten α, β, γ, α', ... als lineare Functionen der übrigen bestimmen. Eliminirt man mittelst (2) diejenigen α, β, γ, ..., deren Zeiger am höchsten sind, und löst die dadurch entstehenden Gleichungen in Bezug auf die zweiten Derivirten auf, so gelangt man schliesslich zu einem Systeme von Gleichungen nachstehender Form mit constanten Coëfficienten und ohne unabhängige Glieder:

$$
(6) \quad \begin{cases}
\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + m_3\alpha' + \cdots, \\
\dfrac{d^2\beta}{dt^2} = n\alpha + n_1\beta + n_2\gamma + n_3\alpha' + \cdots, \\
\dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = p\alpha + p_1\beta + p_2\gamma + p_3\alpha' + \cdots, \\
\dfrac{d^2\alpha'}{dt^2} = m'\alpha + m'_1\beta + m'_2\gamma + m'_3\alpha' + \cdots, \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{cases}
$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der nach der Elimination übrigen α, β, γ, ...

207. Es kann zuweilen nützlich sein, die Grössen α, β, γ, α',... mittelst anderer unabhängiger Variablen u, v, w, . . ., welche ebenfalls sehr klein sind, auszudrücken. Man erkennt leicht, dass die Form der Gleichungen (6) für die Gleichungen zwischen u, v, w, . . . bestehen bleibt. Denn die Ausdrücke für α, β, . . . durch u, v, w, . . . werden nur solche Glieder enthalten, welche in Bezug auf die letzteren Grössen von der ersten Dimension sind. Setzt man nun diese Ausdrücke und ihre zweiten Derivirten nach t in die Gleichungen (6), so erhält man neue lineare Gleichungen, aus welchen sich für $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, . . . Ausdrücke ergeben, die in allen Gliedern u, v, w, . . . linear enthalten.

208. Zusammensetzung der Bewegungen. — Die Form der Gleichungen (6) führt zu einer sehr wichtigen Folgerung.

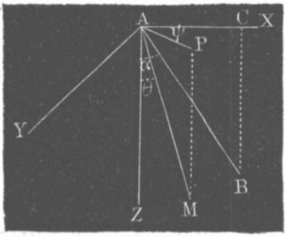
Wenn mehrere Systeme α, β, γ, . . . einzeln genommen jenen Gleichungen genügen, so liefert die Addition aller α, aller β, etc. ein neues System, welches denselben Gleichungen genügt. Der Anfangszustand der Punkte in der durch das letzte System dargestellten Bewegung resultirt aus den Anfangszuständen, welche den partiellen Systemen entsprechen, offenbar dadurch, dass man die mit den Axen parallelen Componenten der Verrückungen und Geschwindigkeiten algebraisch addirt.

Folglich erzeugt ein aus dieser Zusammensetzung mehrerer Anfangszustände resultirender Anfangszustand eine solche Bewegung, dass man in jedem Augenblick den Weg und die Geschwindigkeit irgend eines Punktes erhält, indem man nach den Regeln für Kräfte die Wege und Geschwindigkeiten zusammensetzt, welche in demselben Augenblick den aus den einzelnen Anfangszuständen hervorgehenden Bewegungen entsprechen würden.

209. Anwendung auf das Kegelpendel. — Um die Nützlichkeit dieses Gesetzes zu zeigen, wollen wir es auf das schon früher behandelte Beispiel anwenden.

Betrachten wir einen schweren materiellen Punkt, der gezwungen ist in constanter Entfernung von einem festen Punkt zu bleiben, und den man sehr wenig aus der durch diesen Punkt gehenden Verticalen entfernt hat, unter Ertheilung einer sehr kleinen horizontalen Geschwindigkeit. Diese Aufgabe ist bereits in den Nrn. 236, 237 des ersten Theils gelöst worden; die dortigen Bezeichnungen wenden wir auch bei der neuen Auflösung an.

Fig. 18.



Zum Ursprung nehmen wir den festen Punkt A, zur Axe der z die Richtung der Schwere und führen die Ebene der x, z durch die Anfangslage AB des Pendels. Es sei M die Lage des materiellen Punktes zu irgend einer Epoche, P die Projection von M auf die Ebene XY, C die Projection von B. Wir setzen:

$$BAZ = \alpha, \quad MAZ = \theta, \quad PAX = \psi, \quad AM = l, \quad AP = r$$

und bezeichnen die parallel mit AY gerichtete Anfangsgeschwindigkeit durch k.

Wir führen die Aufgabe auf zwei andere und einfachere zurück, indem wir den Anfangszustand in folgende zwei zerlegen. Im ersten dieser beiden Anfangszustände denken wir uns den materiellen Punkt in der Lage B ohne Geschwindigkeit;

im zweiten denken wir uns ihn senkrecht unter A aber mit der Anfangsgeschwindigkeit begabt.

Bezeichnen wir in der auf den ersten Anfangszustand folgenden Bewegung durch φ den variablen Winkel des Pendels mit AZ, so ist bei dem hier genügenden Grade der Annäherung nach Nr. 226 des ersten Theils:

$$\text{(a)} \qquad \varphi = \alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Bei der zweiten Bewegung sei ω der Winkel, welchen das Pendel mit AZ bildet. Nach derselben Nr. 226 findet man:

$$\text{(b)} \qquad \omega = \frac{k}{\sqrt{gl}} \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}} = \beta \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

indem man $\frac{k^2}{gl} = \beta^2$ setzt.

Die Gleichungen (a) und (b), welche jeden Augenblick die Lage des Punktes angeben, bestimmen alle Umstände seiner Bewegung.

210. Will man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M kennen, so muss man sein x aus der Gleichung (a) berechnen und sein y aus (b). Die dritte Coordinate unterscheidet sich von l nur um eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung; man könnte sie mittelst der beiden ersten aus der Gleichung der Kugel finden, aber es ist nicht von Interesse dies zu thun.

Man hat:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \sin \omega$$

oder mit Vernachlässigung der sehr Kleinen dritter Ordnung:

$$x = l\varphi, \quad y = l\omega,$$

wenn man die positiven φ und ω auf Seite der positiven x und y zählt. Demnach wird:

$$\text{(c)} \qquad x = l\alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad y = l\beta \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

und da $\tang \psi = \frac{y}{x}$, so folgt:

$$tang\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}\, tang.\, t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Der variable Werth r von AP ergiebt sich, wegen $r^2 = x^2 + y^2$, aus den Gleichungen (c), nämlich:

$$r^2 = l^2\left[\alpha^2\left(cos.\, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2 + \beta^2\left(sin.\, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2\right].$$

Daraus findet man den Werth des Winkels θ, dessen Sinus $\frac{r}{l}$ ist:

$$\theta^2 = \alpha^2\left(cos.\, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2 + \beta^2\left(sin.\, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2.$$

Will man endlich die Projection der Trajectorie auf die Ebene XY kennen, so muss man t zwischen den Gleichungen (c) eliminiren; dies giebt:

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = l^2 \alpha^2 \beta^2,$$

die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen $l\alpha$, $l\beta$.

Diese Resultate stimmen sämmtlich überein mit den im ersten Theile erhaltenen.

Es ist leicht, die Aufgabe in mehreren Beziehungen zu verallgemeinern.

Zunächst könnte die Anfangsgeschwindigkeit eine beliebige, die Kugel tangirende Richtung haben. Man würde sie dann in zwei Componenten zerlegen, eine auf der Anfangslage des Pendels senkrechte und horizontale und eine in der durch die Anfangslage gehenden Verticalebene senkrecht auf das Pendel gerichtete. Die beiden einfachen Bewegungen würden sich nur insofern von den vorigen unterscheiden, als der Anfangszustand der einen aus Verrückung und Geschwindigkeit zugleich bestände.

Liegt der schwere Punkt in dem tiefsten Punkte der verticalen Hauptaxe eines Ellipsoids, so zerlegt man die anfängliche Verrückung in zwei andere, mit den horizontalen Hauptaxen parallele und die Anfangsgeschwindigkeit in zwei mit den verticalen Hauptebenen parallele Seitengeschwindigkeiten. Darauf bestimmt man die Bewegung, welche aus der Verrückung und Geschwindigkeit in einer dieser Ebenen hervorgeht und auf eine Bewegung in dem Krümmungskreise der entsprechenden Hauptellipse hinauskommt. Ebenso bestimmt man die Bewegung auf dem Krümmungskreise der anderen verticalen Hauptellipse aus der anfänglichen Verrückung und Geschwindigkeit in ihrer Ebene; und die Zusammensetzung dieser beiden einfachen Bewegungen giebt die wirkliche Bewegung.

Wenn endlich der schwere Punkt auf irgend einer Oberfläche liegt und sehr wenig von dem Punkte entfernt wird, in welchem die Tangentialebene horizontal ist, so ersetzt man diese Oberfläche durch ein Ellipsoid, welches durch diesen tiefsten Punkt geht und dessen Hauptschnitte hier dieselbe Krümmung und Richtung wie diejenigen der Oberfläche haben; und dann ist die Aufgabe wieder die vorige.

211. Einführung neuer Kräfte. — Die Gleichungen (6) wurden unter der Voraussetzung erhalten, dass man blos die Punkte des Systems aus der Gleichgewichtslage verrückt und ihnen gewisse Anfangsgeschwindigkeiten mittheilt. Durch Einführung neuer Kräfte, welche nur sehr kleine Verrückungen hervorbringen können und selbst sehr klein sind, würde man die Aufgabe verallgemeinern. Dies wollen wir jetzt thun, indem wir jedoch voraussetzen, dass die neuen Kräfte sowohl von der Zeit als von den Grössen α, β, γ, . . . unabhängig sind. Man gelangt in diesem Falle zu bemerkenswerthen allgemeinen Resultaten.

Zunächst sieht man leicht, dass die Differentialgleichungen der neuen Bewegung sich von den Gleichungen (6) nur durch Hinzufügung constanter Glieder unterscheiden. Denn man muss in der Gleichung (4) die Kräfte X, Y, Z um die respectiven Componenten der neuen Kräfte vermehren, und wenn man nun denselben Gang wie in Nr. 206 befolgt, so zeigt sich, dass die zweiten Seiten der Gleichungen (6) nur um solche Glieder vermehrt werden, von denen jedes eine der neuen Componenten in der ersten Dimension enthält und constant ist.

Die Differentialgleichungen der neuen Bewegung sind demnach:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = H + m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + m_3\alpha' + \ldots, \\
\dfrac{d^2\beta}{dt^2} = K + n\alpha + n_1\beta + \ldots, \\
\dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = L + p\alpha + p_1\beta + \ldots, \\
\dfrac{d^2\alpha'}{dt^2} = H' + m'\alpha + m'_1\beta + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Sie ergeben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Functionen von t, und die willkürlichen Constanten sind aus dem Anfangszustand zu bestimmen.

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man auch den neuen Gleichgewichtszustand des Systems nach Einführung der neuen Kräfte finden. Man braucht sich nur $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ constant zu denken: die zweiten Seiten werden dadurch gleich Null gesetzt und ergeben die gesuchten Werthe für die Verrückungen aller Punkte, welche dem neuen Gleichgewichte entsprechen.

212. Die Gleichungen (7) lassen sich auf dieselbe Form bringen wie die Gleichungen (6), wenn man

$$
(8)\quad \alpha = \alpha_1 + \xi,\ \beta = \beta_1 + \eta,\ \gamma = \gamma_1 + \zeta,\ \alpha' = \alpha'_1 + \xi', \ldots
$$

setzt und die Constanten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$
(9)\quad \begin{cases}
H + m\alpha_1 + m_1\beta_1 + m_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\
K + n\alpha_1 + n_1\beta_1 + n_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (7) gehen dann durch Substitution der durch (8) gegebenen Werthe für $\alpha, \beta, \ldots$ in nachstehende über:

$$
(10)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = m\xi + m_1\eta + m_2\zeta + m_3\xi' + \ldots, \\
\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = n\xi + n_1\eta + n_2\zeta + \ldots, \\
\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = p\xi + p_1\eta + p_2\zeta + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{cases}
$$

welche sich von (6) nur dadurch unterscheiden, dass die Variablen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sind statt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Man bemerkt, dass die durch (9) bestimmten Werthe von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ gerade diejenigen sind, welche sich auf das neue Gleichgewicht des Systems nach Einführung der neuen Kräfte beziehen, und dass folglich $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die Verrückungen der Punkte in Bezug auf diese Gleichgewichtslage darstellen.

Die Gleichungen (8) lassen sehen, dass die Anfangswerthe von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \ldots$ denen von $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \ldots$ gleich sind, während die Anfangswerthe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ selbst denen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, vermindert respective um $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$, gleich sind.

Weil die Gleichungen (10) für $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ genau dieselben Werthe liefern wie die Gleichungen (6) für die dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wenn nur die Anfangswerthe dieser beiden Reihen von Variablen und ihrer ersten Derivirten respective übereinstimmen, so hat man folgendes merkwürdige und einfache Theorem:

Wenn irgend ein System von Punkten sehr wenig aus einer stabilen Gleichgewichtslage verrückt wird und man es ausserdem durch neue, constante und sehr kleine Kräfte angreift, so ist die Bewegung eines jeden Punktes in Bezug auf seine neue Gleichgewichtslage unter dem Einflusse der ersten und zweiten Kräfte zusammen dieselbe wie diejenige, welche unter dem Einflusse nur der ersten Kräfte in Bezug auf die alte Gleichgewichtslage stattfinden würde, wenn man das System in einen Anfangszustand versetzen wollte, welcher in Bezug auf diese Lage so wäre, wie der gegebene Anfangszustand in Bezug auf die neue Gleichgewichtslage ist.

Dieser Lehrsatz ist unabhängig von der Zahl und den gegenseitigen Entfernungen der Punkte; er besteht mithin noch, wenn man ihr System als stetig ansehen darf. Er hat folglich Geltung für alle kleinen Bewegungen der Flüssigkeiten und elastischen festen Körper.

213. Man kann a priori diesen Satz einsehen, zu dem eine sehr einfache Rechnung uns geführt hat. Die neue Gleichgewichtslage des Systems nach Einführung der neuen Kräfte

liegt sehr nahe bei der alten. Deshalb werden sich die Gleichungen, welche die Bewegung bestimmen, die aus einer Verrückung des Systems aus seinem neuen Gleichgewichtszustande entspringt, nicht von den Gleichungen (6) unterscheiden; denn die Coëfficienten könnten in beiden Systemen von Gleichungen nur um Grössen von demselben Range wie α, β, ... verschieden sein, und wir vernachlässigen die aus diesen Unterschieden hervorgehenden Glieder. Demnach würden gleiche Verrückungen der Punkte aus jedem der beiden Gleichgewichtszustände Bewegungen erzeugen, welche respective für jeden Punkt übereinstimmen; und damit ist das vorige Theorem bewiesen.

214. Uebereinanderlagerung der Wirkungen. — Die Form der Gleichungen (10) zeigt, dass ξ, η, .. gleich sind respective mit $\xi^1 + \xi^2$, $\eta^1 + \eta^2$, .., wenn man sich die Anfangswerthe ξ^1_0, η^1_0, .., $\frac{d\xi^1_0}{dt}$, $\frac{d\eta^1_0}{dt}$, .. gleich den wirklichen Anfangsverrückungen und Geschwindigkeiten des Systems denkt, und die anderen Anfangswerthe ξ^2_0, η^2_0, .. gleich $-\alpha_1$, $-\beta_1$, .. sowie $\frac{d\xi^2_0}{dt}$, $\frac{d\eta^2_0}{dt}$, .. gleich Null nimmt. Nun stellen $\alpha_1 + \xi^2$, $\beta_1 + \eta^2$, .. diejenigen mit den Axen parallelen Entfernungen der Punkte von ihrer alten Gleichgewichtslage dar, welche unter dem Einflusse der neuen Kräfte ohne anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit stattfinden. Ferner sind die Grössen ξ^1, η^1, .. gleich den Werthen, welche die Gleichungen (6) für die dortigen α, β, .. ergeben würden; sie stellen folglich diejenigen Entfernungen der Punkte von ihrer alten Gleichgewichtslage dar, welche aus dem wirklichen Anfangszustand resultiren, wenn blos die alten Kräfte wirken. Da nun die wahren α, β, .. gleich sind respective mit $\alpha_1 + \xi$, $\beta_1 + \eta$, .., so sieht man, dass

die gesuchte Bewegung durch Uebereinanderlagerung zweier anderen Bewegungen entsteht: von diesen wird die eine durch den gegebenen Anfangszustand ohne Einführung der neuen Kräfte erzeugt, die andere dagegen durch Einführung dieser Kräfte ohne anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit.

Die erste dieser beiden Bewegungen kann nach Nr. 208

auf unendlich viele Arten zerlegt werden; man überzeugt sich leicht, dass dies auch bei der zweiten der Fall ist.

Die Form der Gleichungen (9) zeigt nämlich Folgendes: Wenn man eine jede der Grössen H, K, L, . . . in dieselbe Anzahl beliebiger Theile, welche auch Null sein können, zerlegt; wenn man zunächst nur die ersten Theile nimmt, darauf nur die zweiten und so fort, so bilden die Summen der verschiedenen α_1, der verschiedenen β_1, . . ., welche den partiellen Systemen genügen, die Auflösung der Gleichungen (9). Zerlegt man nun die neu eingeführten Kräfte in eine beliebige Anzahl Gruppen, so geben die vollständig bekannten Glieder, welche diese Gruppen in den einzelnen Systemen von Gleichungen der entsprechenden neuen Gleichgewichtslagen liefern, durch ihre Addition respective die Grössen H, K, L,... Mithin geben die Werthe von α_1, β_1, . . . , welche einer jeden dieser Gruppen entsprechen, wenn man sie respective addirt, die durch die Gesammtheit der neu eingeführten Kräfte hervorgebrachten Verrückungen. Da sich nun die Wirkungen der Verrückungen addiren, so addiren sich die von den verschiedenen Kräftegruppen erzeugten Wirkungen.

215. Integration der Gleichungen. — Integriren wir jetzt die Gleichungen (6), auf welche alle Fälle zurückkommen, und deren Anzahl n jener der unabhängigen Coordinaten gleich ist.

Eine Auflösung derselben erhält man durch die Annahme:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin(rt + s), \\
\beta &= R_1 \sin(rt + s), \\
\gamma &= R_2 \sin(rt + s), \\
\alpha' &= R_3 \sin(rt + s), \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in den Gleichungen (6) gehen R_1, R_2, . . . nur in der ersten Dimension ein; und man erkennt leicht, dass die Elimination von R_1, R_2, . . . eine Endgleichung ergiebt, welche in Bezug auf die Unbekannte r^2 vom Grade n ist. Die n Werthe, welche diese Endgleichung für r^2 liefert, müssen alle positiv und ungleich ausfallen; denn ausserdem würden die Ausdrücke für die Unbekannten α, β, γ, . . . Exponentialgrössen oder ganze Functionen von t in sich aufnehmen, welche beide mit der Zeit wachsen, was der Voraussetzung eines stabilen Gleichgewichts zuwider wäre. Davon muss man jedoch die besonderen Fälle ausnehmen, in welchen die Coëfficienten der wachsenden Glieder vermöge des Anfangszustandes Null sind.

Von den $2n$ Werthen, welche sich für r ergeben, berücksichtigen wir blos die positiven, weil die durch die negativen Werthe gegebenen Auflösungen in den anderen enthalten sind.

Jeder Werth von r bestimmt ein einziges System Werthe für R_1, R_2, ..., es sei denn, dass es unendlich viele derselben giebt.

Multiplicirt man die vorstehenden Werthe von α, β, γ, ... mit einer willkürlichen Constante R, so hat man wieder eine Auflösung der Gleichungen (6), und es stecken dann in jeder Unbekannten α, β, ... die zwei willkürlichen Constanten R, s. Indem man die so erhaltenen Auflösungen für jeden der n Werthe von r addirt, gelangt man zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen (6), welche $2n$ willkürliche Constanten R, R', ..., s, s', ... enthält. Sie wird durch folgende Formeln gegeben:

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = R \sin(rt + s) + R' \sin(r't + s') + \cdots, \\ \beta = RR_1 \sin(rt + s) + R'R'_1 \sin(r't + s') + \cdots, \\ \gamma = RR_2 \sin(rt + s) + R'R'_2 \sin(r't + s') + \cdots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Die $2n$ Constanten sind aus den Anfangswerthen von α, β, γ, α', ..., $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ... zu bestimmen.

216. Zerlegung der Bewegung in einfache Schwingungen. — Die besonderen Bewegungen des Systems, welche einem jeden der n Werthe r, r', ... entsprechen, besitzen einige merkwürdige Eigenschaften. Betrachten wir z. B. die erste Bewegung, nehmen also:

$$\begin{aligned} \alpha &= R \sin(rt + s), \\ \beta &= RR_1 \sin(rt + s), \\ \gamma &= RR_2 \sin(rt + s), \\ \alpha' &= RR_3 \sin(rt + s), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

Da die Verrückungen α, β, γ in constanten Verhältnissen stehen, wie auch t sein mag, so folgt, dass die Bewegung des

Punktes, dem sie angehören, geradlinig ist; dasselbe gilt für alle übrigen Punkte. Man sieht ferner, dass die Bewegung periodisch ist, und dass die Dauer der Periode $\frac{2\pi}{r}$ beträgt. Demnach machen alle Punkte geradlinige Schwingungen von gleicher Dauer, welche sie zu gleicher Zeit beginnen und beendigen, und ihre Wege stehen in constanten Verhältnissen.

Der blosse Anblick der Gleichungen (11) lehrt nun folgenden Satz:

Jede Bewegung eines Systems Punkte von endlicher Anzahl, die sehr wenig aus einer stabilen Gleichgewichtslage verrückt wurden, kann betrachtet werden als hervorgehend aus der Zusammensetzung der verschiedenen einfachen Schwingungen, deren das System fähig ist.

Die Anzahl dieser Schwingungen ist gleich jener der unabhängigen Coordinaten, wenn nicht unendlich viele dadurch möglich werden, dass Unbestimmtheit von R_1, R_2, ... eintritt. Die Schwingungen einer und derselben einfachen Schwingungsart geschehen in derselben Periode; ihre verschiedenen Richtungen und die Dauer der Periode hängen einzig und allein von der Natur des Systems ab, während ihre Amplituden und die Coëfficienten, mit welchen sie in der allgemeinen Auflösung auftreten, von dem Anfangszustande abhängen.

217. Betrachten wir als Beispiel den sehr einfachen Fall eines Punktes, welcher nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist und auf einer beliebigen Oberfläche bleiben muss. Entfernt man denselben aus seiner Gleichgewichtslage an der tiefsten Stelle der Oberfläche und ertheilt ihm eine sehr kleine Geschwindigkeit, so kann er je nach seinem Anfangszustand unendlich viele verschiedene Curven beschreiben. Da aber nur zwei Coordinaten unabhängig sind, so kann der bewegliche Punkt auch nur zwei Arten einfacher Schwingungen ausführen, und zwar finden dieselben statt in den beiden Krümmungslinien für den tiefsten Punkt der Oberfläche. Jede andere Bewegung geht aus der Verbindung dieser beiden in den passenden Verhältnissen hervor. Wenn alle Krümmungshalbmesser in diesem Punkte gleich wären, so könnte

jeder senkrechte Schnitt der Ort einfacher Schwingungen sein, und es würde somit unendlich viele Arten derselben geben.

218. Wenn die verschiedenen Wurzeln r, r',... der Bestimmungsgleichung für r unter einander commensurabel sind, so durchläuft das System periodisch dieselben Zustände.

Denn es bezeichne μ das grösste gemeinschaftliche Gemäss aller r, so werden sich wenigstens zwei r angeben lassen, die wir durch $h\mu$, $h'\mu$ bezeichnen wollen, so dass h, h' zu einander relative Primzahlen sind. Damit nun die Werthe von α, β, ... periodisch nach Verlauf eines Zeitintervalls θ wiederkehren, so müssen die Producte $r\theta$ sämmtlich Vielfache von 2π sein. Man muss also insbesondere für die durch $h\mu$, $h'\mu$ bezeichneten Werthe von r haben:

$$h\mu\theta = 2\pi k, \quad h'\mu\theta = 2\pi k',$$

während k, k' ganze Zahlen vorstellen. Diese müssen sich aber zu einander verhalten wie h, h', und weil h, h' relative Primzahlen, so sind diese selbst die kleinsten brauchbaren Werthe für k, k'. Man erhält bei dieser Annahme:

$$\theta = \frac{2\pi}{\mu};$$

ein kleinerer Werth von θ würde den beiden Werthen $h\mu$, $h'\mu$ für r nicht genügen. Es liegt aber auf der Hand, dass dieser Werth von θ, mit irgend einem der n Werthe von r multiplicirt, ein Vielfaches von 2π giebt: er ist also die Dauer der Periode.

Sie würde unendlich werden für $\mu = 0$, d. h. wenn kein gemeinschaftliches Gemäss für alle r existirte. In diesem Falle ist daher die Bewegung nicht periodisch, und das System kann sich niemals in zwei identischen Zuständen bezüglich der Lagen und Geschwindigkeiten befinden; denn geschähe dies einmal, so würden alle auf den ersten der beiden identischen Zustände gefolgten wiederkehren, und die Bewegung wäre mithin periodisch.