Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

Duhamel, Jean Marie Constant

1853

Anhang

urn:nbn:at:at-ubi:2-6620

ANHANG

ZU

DUHAMEL'S LEHRBUCH

DER

REINEN MECHANIK.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

WILHELM WAGNER.

Inhalt des Anhangs.

Gleichgewicht von Systemen mit veränderlicher Gestalt, welche aus starren Systemen zusammengesetzt sind.

1. Wenn nicht alle Punkte eines Systems fest verbunden sind, so kann man nicht alle Kräfte in eine Kraft und ein Paar vereinigen. Zum Gleichgewicht wird jetzt erfordert und genügt es, dass an jedem einzelnen der starren Systeme die Kräfte sich im Gleichgewicht halten, welche auf dasselbe wirken und aus den gegebenen sowie jenen Kräften bestehen, welche aus seiner Verbindung mit den anderen Systemen entspringen. Wir nehmen an, dass die Verbindungen aus biegsamen Fäden oder starren Bändern bestehen, deren Endpunkte an verschiedenen Systemen befestigt sind; ferner mögen einige Körper sich mit ihren Oberflächen gegen einander drücken.

Im Gleichgewicht des Ganzen ist jeder biegsame Faden im Gleichgewicht und wird folglich durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gespannt, so dass jeder von den zwei durch den Faden verbundenen Körpern an dem anderen zieht.

Hat man statt der Fäden vollkommen starre, weder dehnbare noch zusammendrückbare Bänder oder Stäbe, so erheischt ihr Gleichgewicht, dass die Kräfte an den beiden Enden gleich und gerade entgegengerichtet sind; aber sie brauchen nicht im Sinne der Verlängerung zu wirken, sondern jeder Körper kann den anderen drücken.

Wenn zwei Körper sich mit ihren Oberflächen berühren, und diese Oberflächen durch ihren Widerstand nur normale Kräfte aufheben können, so werden im Gleichgewicht beide

Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale mit gleicher Kraft gegen einander gedrückt.

Wenn also die Verbindung durch biegsame Fäden, starre Bänder oder durch Contact von Oberflächen geschieht, so üben je zwei verbundene Körper auf einander unbekannte Wirkungen aus, welche gleich und entgegengesetzt sind. Ebenso müssen in allen anderen Fällen die durch die Verbindungen vermittelten Wirkungen paarweise gleich und entgegengesetzt sein.

Sind die starren Systeme einfache Maschinen wie der Hebel, das Wellrad etc., so stellt ihr Ganzes eine zusammengesetzte Maschine dar.

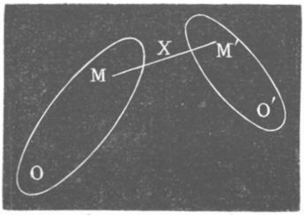
2. Um die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, bildet man für jedes starre System die Gleichungen, deren Zahl zwischen 1 und 6 variiren kann. Indem man die von den Verbindungen ausgeübten Kräfte eliminirt, erhält man diejenigen Gleichungen, denen die gegebenen Kräfte genügen müssen, wenn das zusammengesetzte System im Gleichgewicht stehen soll; und die zur Elimination benutzten Gleichungen bestimmen Grösse und Richtung aller durch die Verbindungen ausgeübten Kräfte.

In dem besonderen Falle, wo das Gleichgewicht eines jeden starren Systems nur eine Gleichung erfordert, und wo aus der Verbindung von je zwei Systemen nur zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte hervorgehen, überzeugt man sich leicht, dass das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte nur eine Bedingungsgleichung hat.

In der That, ist m die Zahl der Systeme, so erhält man m Gleichungen, und es entspringen aus der Verbindung des ersten Systems mit dem zweiten, des zweiten mit dem dritten, etc. $m-1$ unbekannte Kräfte $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$. Von diesen enthält die erste Gleichung X_1, die zweite X_1 und X_2, die dritte X_2 und X_3, etc., endlich die letzte X_{m-1}. Findet man nun X_1 aus der ersten und substituirt in der zweiten; findet man aus dieser X_2 und substituirt in der dritten; etc., so erhält man eine Endgleichung, in welcher nur die gegebenen Kräfte vorkommen. Sie ist die einzige Bedingung des Gleichgewichts, während die vorhergehenden Gleichungen X_1, $X_2, \ldots, X_{m-1}$ bestimmen.

3. Erstes Beispiel. — Auf zwei Hebel, d. i. auf zwei starre Körper, welche um feste Punkte O, O' frei beweglich sind, wirken beliebige Kräfte. Ein biegsamer Faden ist an beiden Körpern in den Punkten M, M' befestigt, und das System befindet sich in einer solchen Lage, dass der Faden gerade ausgespannt ist: man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichts.

Fig. 1.

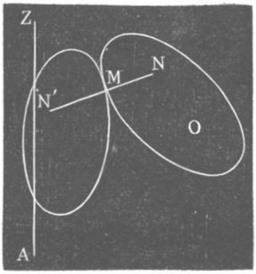


X bezeichne die unbekannte Spannung. Den Hebel MO greifen gegebene Kräfte an und die von M gegen M' gerichtete Kraft X. Man hat für sein Gleichgewicht die bekannten drei Gleichungen, deren jede X in der ersten Potenz enthält. Ebenso steht der Hebel $M'O'$ im Gleichgewicht, während auf ihn gegebene Kräfte wirken und die von M' gegen M gerichtete Kraft X. Für ihn gelten drei neue Gleichungen, deren jede X in der ersten Potenz enthält.

Findet man X aus einer von diesen sechs Gleichungen, so kennt man die Spannung des Fadens, und das Einsetzen in die fünf anderen liefert die Bedingungen, denen die gegebenen Kräfte genügen müssen, wenn das System im Gleichgewicht stehen soll.

4. Zweites Beispiel. — Ein Körper ist frei beweglich um den festen Punkt O, ein anderer um die feste Axe AZ; beide Körper berühren sich in M, und es wirken beliebige Kräfte. Man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichts und die Grösse X des gegenseitigen Drucks in M.

Fig. 2.



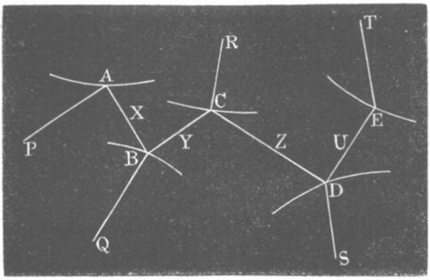
Auf den Körper MO wirken gegebene Kräfte und die längs MN gerichtete Kraft X. Sein Gleichgewicht wird durch drei Gleichungen ausgedrückt, welche X enthalten. Auf den zweiten Körper wirken gegebene Kräfte und die längs MN' gerichtete Kraft X. Sein Gleichgewicht führt zu einer Gleichung, welche X enthält.

Von diesen vier Gleichungen bestimmt eine X, und durch Einsetzen geben die drei anderen die Bedingungen, welchen die gegebenen Kräfte genügen müssen.

5. Drittes Beispiel. — Betrachten wir ein Polygon, das durch starre Geraden gebildet wird, deren Winkel man ohne Widerstand verändern kann, und deren Endpunkte auf gegebenen festen Curven bleiben müssen.

Es stelle $ABCDE$ dieses Polygon vor; P, Q, R, S, T seien die Resultanten der gegebenen Kräfte an A, B, C, D, E.

Fig. 3.



Damit ein beliebiger Eckpunkt im Gleichgewicht sei, so muss die Resultante aller ihn angreifenden Kräfte auf der entsprechenden Curve normal stehen.

Da auch jede Polygonseite im Gleichgewicht sein muss, so wirken an ihren Endpunkten zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte, welche sie aufhebt, indem sie ihnen zwei gleiche Kräfte entgegensetzt. Bezeichnen wir diese von den einzelnen Polygonseiten hervorgebrachten Kräfte durch X, Y, Z, U.

Es seien a, b, c, d, e die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S, T mit den entsprechenden Tangenten machen; α, α' seien die Winkel der in der Geraden AB gerichteten Kräfte X mit den Tangenten in A und B, β, β' die Winkel der Kräfte Y mit den Tangenten in B und C, etc.

Das Gleichgewicht des Punktes A ergiebt:

$$P \cos a + X \cos \alpha = 0;$$

das Gleichgewicht von B liefert:

$$X \cos \alpha' + Q \cos b + Y \cos \beta = 0;$$

für die anderen Punkte erhält man:

$$Y\cos\beta' + R\cos c + Z\cos\gamma = 0,$$
$$Z\cos\gamma' + S\cos d + U\cos\delta = 0,$$
$$U\cos\delta' + T\cos e = 0.$$

Eliminirt man X, Y, Z, U, so bleibt eine Gleichung zwischen den gegebenen Kräften als Bedingung des Gleichgewichts. Die anderen Gleichungen bestimmen die Grösse von X, Y, Z, U. Der Sinn, in welchem diese Kräfte wirken, wird durch die Zeichen der Cosinus von α, α', β, β' etc. bestimmt.

6. Bemerkenswerth ist der besondere Fall, wo eine der Geraden auf einer Curve normal steht. Es sei z. B. BC normal auf der Curve in B, dann ist $\cos\beta = 0$, und die zwei ersten Gleichungen ergeben durch Elimination von X eine Bedingung zwischen P und Q, bei welcher die Gerade AB für sich im Gleichgewicht sein würde. Und in der That hat die Kraft Y keinen Einfluss auf AB, da sie durch den Widerstand der Curve in B aufgehoben wird.

Die drei anderen Gleichungen geben, durch Elimination von Z und U, die Bedingung für das Gleichgewicht des Systems CDE. In dieser Bedingung kommt eine willkürliche Kraft Y vor, welche in C längs BC im einen oder anderen Sinne wirken und keine Verrückung erzeugen kann, weil sie durch den Widerstand in B aufgehoben wird.

Von der Bewegung ohne Rücksicht auf ihre Ursachen.

7. Bevor man die Bewegungen untersucht, welche durch bestimmte Kräfte erzeugt werden, ist es gut die Bewegung an sich zu betrachten unabhängig von jeder Ursache. Hat man sich erst vertraut gemacht mit ihren möglichen Modificationen und mit den Gesichtspunkten, unter welchen sie aufzufassen sind, so wird die Einsicht in die Wirkungsweise der Kräfte leichter. Man hat dann die Schwierigkeiten getrennt, statt sie vereinigt zu lassen.

Zuweilen bedient man sich in der Geometrie der Bewegung zur Erzeugung der Grössen. Aber die Zeit bleibt dabei unberücksichtigt; es kommt nur darauf an, dass die beweglichen Linien oder Flächen gleichzeitig ihre entsprechenden Lagen einnehmen, welche Zeit auch von einer Lage bis zur anderen verfliessen mag. Diese Gleichzeitigkeit ist allein wichtig, und die Bewegung bleibt übrigens unbestimmt.

Wir werden uns dagegen nur mit völlig bestimmten Bewegungen beschäftigen, bei denen die Zeit ein wesentliches Element ist, und wo es sich um die Lagen der verschiedenen Punkte des Systems in jedem Augenblick handelt. Unsere Aufgabe ist also kein Gegenstand der reinen Geometrie. Man könnte aus ihr eine besondere Wissenschaft machen; aber es scheint uns angemessen sie als einen Zweig der Mechanik, der allgemeinen Wissenschaft von der Bewegung, zu betrachten. Bevor man untersucht, welche Bewegung durch Kräfte hervorgebracht wird, muss man wissen was die Bewegung an sich ist; und es soll dies vorläufige Studium als Eingang in die Dynamik dienen. Wir beschränken uns darin auf die elementarsten und allgemeinsten Betrachtungen.

Bewegung eines Punktes.

---

8. Der Begriff der Zeit ist einer von denen, welche sich auf keinen andern zurückführen und folglich auch nicht definiren lassen. Man muss aber die Gleichheit zwischen den Zeitgrössen definiren, damit dieselben messbar und der Rechnung unterwerfbar werden.

Wir nennen zwei Zeitintervalle gleich, wenn zwei identische Körper, welche sich zu Anfang dieser Intervalle in denselben Umständen befanden und durchaus gleichen Wirkungen und Einflüssen unterworfen wurden, am Ende identische Wege durchlaufen haben. Der Begriff der Gleichheit führt zu dem eines beliebigen Verhältnisses.

Die Bewegung eines Punktes heisst gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Wege durchläuft, wie klein auch diese Zeiten sein mögen.

Eine Bewegung, welche weder gleichförmig noch aus gleichförmigen Bewegungen von endlicher Dauer zusammengesetzt ist, wird veränderlich genannt.

9. Geschwindigkeit. — Die gleichförmigen Bewegungen können sich unterscheiden durch die während gleicher Zeit durchlaufenen Wege. Hieraus entspringt die zuerst etwas vage Idee von Geschwindigkeit. Um dies unerlässliche Element in die Rechnung einzuführen ist eine genaue Definition nothwendig, und wir werden unter der Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punktes den Weg verstehen, welchen er in der Zeiteinheit durchläuft, oder das Verhältniss des durchlaufenen Wegs zu der dabei verflossenen Zeit. Der Punkt, dessen Geschwindigkeit durch die Zahl 1 ausgedrückt wird, durchläuft also die Längeneinheit während der Zeiteinheit.

Nach dieser Definition fällt bei derselben Bewegung die

Grösse, welche wir Geschwindigkeit nennen, um so grösser aus, je grösser die Zeiteinheit ist, was sich mit der gewohnten Vorstellung von Geschwindigkeit nicht verträgt; aber der Quotient aus den Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen hängt nicht von der Zeiteinheit ab, denn er ist der Quotient aus den während gleicher Zeit zurückgelegten Wegen.

Die Zahl, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, hängt auch von der Längeneinheit ab und wird um so grösser, je kleiner diese Einheit ist. Diese Bemerkungen über den Einfluss der verschiedenen Einheiten sind nothwendig zur Beurtheilung der Homogenität in den Formeln der Bewegung.

Bemerkung. — Wollte man a priori den Begriff der Geschwindigkeit zulassen und keine Definition davon geben, so müsste man, wie bei der Zeit, die Gleichheit zwischen Grössen dieser Art definiren. Man würde dann die Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen gleich nennen, wenn die während derselben Zeit durchlaufenen Wege gleich sind. Die Addition von Geschwindigkeiten würde man definiren durch die Addition der in derselben Zeit durchlaufenen Wege. Daraus würde folgen, dass das Verhältniss zweier Geschwindigkeiten das der Wege ist, und somit würde die Geschwindigkeit eines Punktes gemessen durch den Weg, den er in der Zeiteinheit durchläuft, wenn man die Geschwindigkeit jenes Punktes zur Einheit nähme, der in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt.

10. Bei der veränderlichen Bewegung kann man unter Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick nicht mehr den, von diesem Augenblick ab, während der Zeiteinheit durchlaufenen Weg verstehen, weil dann die Geschwindigkeit des Beweglichen von den Aenderungen abhängen würde, welche die Bewegung nach dem Augenblicke erleidet, um den es sich handelt.

In der Theorie der Curven kann man wohl als Maass der Kreiskrümmung in einem beliebigen Punkte die Krümmung eines der Einheit gleichen Bogens nehmen; aber bei einer Linie, deren Krümmung nicht der Bogenlänge proportional ist, kann man nicht die in irgend einem Punkt stattfindende Krümmung durch jene eines der Einheit gleichen Bogens messen, der mit diesem Punkt anfängt.

Aehnliches lässt sich sagen über das specifische Gewicht in einem Punkte einer heterogenen Substanz, über die Temperatur in einem Punkte eines ungleich erwärmten Körpers, etc. Auch verfährt man in diesen verschiedenen Fällen auf analoge Weise.

Es sei M in einem gewissen Augenblick der Ort eines Punktes, der mit veränderlicher Bewegung irgend eine Curve beschreibt. Nach einer Zeit θ wird er sich in einem anderen Punkt N befinden, und der Quotient $\frac{MN}{\theta}$ drückt die mittlere Geschwindigkeit aus, mit welcher der Bogen MN durchlaufen wurde. Lässt man nun θ unendlich abnehmen, so nähert sich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{MN}{\theta}$ einem festen Werthe, den wir die Geschwindigkeit des Beweglichen im Punkte M nennen.

In der Sprache der Infinitesimalrechnung heisst also die Geschwindigkeit des Beweglichen in einem gegebenen Augenblick die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe, von diesem Augenblicke ab, einen unendlich kleinen Bogen beschreibt.

Bezeichnet t die Zeit, s die Bogenlängen der beschriebenen Linie, von irgend einem Punkt an gezählt, so ist $\frac{ds}{dt}$ die Grenze von $\frac{MN}{\theta}$. Mithin wird die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn ausgedrückt durch die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit.

11. Es ist zu bemerken, dass der in unendlich kleiner Zeit beschriebene Bogen sich betrachten lässt als das Product dieser Zeit in die Geschwindigkeit zu Anfang derselben. Denn er würde genau das Product der Zeit in die mittlere Geschwindigkeit darstellen, welche sich von der oben definirten Geschwindigkeit zu Anfang des Intervalls nur um eine unendlich kleine Grösse unterscheidet. Man kann auch die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke des Intervalls nehmen. Das Resultat ist von dem gesuchten immer nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden und darf folglich allemal dafür gesetzt werden, wenn es sich nur um die Grenze von Quotienten oder Summen handelt.

So ist der in endlicher Zeit durchlaufene Weg die Grenze der Summe aus den Producten der unendlich kleinen Zeitelemente in die Geschwindigkeiten zu Anfang oder während dieser Elemente. Die Geschwindigkeit, so wie wir sie definirt haben, spielt also dieselbe Rolle bei der veränderlichen Bewegung, wenn man unendlich kleine Wege betrachtet, wie bei der gleichförmigen Bewegung; und dies ist der Grund, welcher die Beibehaltung des Namens rechtfertigt.

12. Endliche Gleichung der gleichförmigen Bewegung. — Die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer geraden oder krummen Linie kann dargestellt werden durch eine Gleichung ersten Grades zwischen der Zeit und Entfernung.

Man bezeichne mit t die Zeit von einem bestimmten Augenblick an, mit x die Entfernung des beweglichen Punktes M von einem festen Anfangspunkt O, die Entfernung und den Anfangspunkt auf der unendlichen Linie $X'X$, welche der Punkt durchläuft, genommen; a sei die Entfernung OA des Ursprungs O von dem Punkte, wo sich das Bewegliche für $t = 0$ befand; endlich sei v die Geschwindigkeit oder der constante Weg, welcher in der Zeiteinheit durchlaufen wird. Gesucht wird eine Gleichung zwischen x und t.

Der Weg während der Zeiteinheit ist v, also vt während der Zeit t. Hat daher die Bewegung die Richtung OX der positiven x, so ist:

$$x = a + vt;$$

hier sind x und a positiv oder negativ nach Lage der Punkte A und M gegen den Ursprung, v ist eine absolute Zahl und t eine positive Zahl, welche den Zeitpunkten nach dem Zeitanfang entspricht.

Man bemerkt aber, dass man die vorstehende Gleichung auch für die Epochen vor dem Zeitanfang beibehalten kann und deshalb nur t negativ zu nehmen braucht.

Ferner kann man dieselbe Gleichung anwenden, wenn die Richtung der Bewegung jener der positiven x entgegengesetzt ist; man muss dann v negativ nehmen. — Auf diese Weise kann die allgemeine Gleichung

$$x = a + vt \tag{1}$$

alle gleichförmigen Bewegungen darstellen.

13. **Differentialgleichung der gleichförmigen Bewegung.** — Bei einer jeden Bewegung wird die Geschwindigkeit durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückt, in dem vorliegenden Falle also durch $\frac{dx}{dt}$.

Nimmt man t zur unabhängigen Variablen, also dt positiv, so ist $\frac{dx}{dt}$ positiv, wenn die Bewegung im Sinne der positiven x stattfindet, und negativ im entgegengesetzten Fall. Schreiben wir daher $v = \frac{dx}{dt}$, so verstehen wir unter v eine positive oder negative Zahl, je nachdem die Bewegung die Richtung der positiven oder negativen x hat. Da übrigens die Wahl des Abscissen- und Zeitanfangs gleichgültig ist, und die gleichförmige Bewegung eine beliebige Beschaffenheit haben kann, so sind alle gleichförmigen Bewegungen in der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

enthalten, wo v eine positive oder negative Constante darstellt.

Sie folgt aus (1) durch Differentiation und umgekehrt diese aus ihr durch Integration, wobei eine willkürliche Constante a eingeht.

14. **Gleichförmig veränderte Bewegung.** — Nach der gleichförmigen Bewegung folgt als einfachste diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit sich gleichförmig, d. h. der Zeit proportional ändert. Sie dient zur Vergleichung der verwickeltsten Bewegungen.

Die Bedingung, dass die Geschwindigkeit v proportional mit der Zeit wachse, ergiebt, dass die Ableitung $\frac{dv}{dt}$ constant sein muss, sowie umgekehrt. Bezeichnet also a irgend eine positive oder negative Constante, so ist die allgemeine Gleichung aller gleichförmig veränderten Bewegungen:

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2} = a, \text{ weil } v = \frac{dx}{dt};$$

hieraus folgt durch Integration:

(1) $$v = at + b = \frac{dx}{dt},$$

wie man schon vorher wissen konnte. Integrirt man neuerdings, so kommt:

(2) $$x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

wo b und c willkürliche Constanten.

Die Zunahmen der Geschwindigkeit sind positiv oder negativ zugleich mit der Constante a, welche den durch die Zeit getheilten Zuwachs der Geschwindigkeit misst, oder den Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit.

Man nennt die Constante a die Acceleration, welche positiv oder negativ sein kann. Die Zeichen von a, b, c in den Gleichungen (1) und (2) sind beliebig.

Von der veränderlichen geradlinigen Bewegung im Allgemeinen.

15. Bisher konnte der Punkt sich auf irgend einer Linie bewegen. Jetzt aber nehmen wir an, um die Schwierigkeiten zu trennen, dass die Bewegung in gerader Linie stattfindet.

Der Begriff der Acceleration, den wir bei der gleichförmig veränderten Bewegung gaben, lässt sich in ähnlicher Weise ausdehnen wie der Begriff von Geschwindigkeit.

Es bezeichne Δv den Zuwachs der Geschwindigkeit, wenn die Zeit von einem gewissen Augenblicke an um Δt wächst. Denken wir uns eine gleichförmig veränderte Bewegung, deren Geschwindigkeit zu Anfang und Ende des Intervalls Δt übereinstimmt mit der Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung. Die Acceleration $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ der Hülfsbewegung stellt die mittlere Acceleration der wirklichen Bewegung während des Intervalls Δt dar, und sie nähert sich einer festen Grenze, wenn Δt gegen die Null abnimmt.

Diese Grenze nennen wir die Acceleration der wirklichen Bewegung in dem betrachteten Augenblick. Ihr Ausdruck ist:

$$\frac{dv}{dt} \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Man sieht leicht, dass sie bei der veränderlichen Bewegung überhaupt für unendlich kleine Intervalle dieselbe Rolle spielt wie bei der gleichförmig veränderten Bewegung. Denn ist $\varDelta t$ unendlich klein, so erhält man:

$$\frac{\varDelta v}{\varDelta t} = \frac{dv}{dt} + \varepsilon,$$

wo ε auch unendlich klein, und folglich:

$$\varDelta v = \frac{dv}{dt} \varDelta t + \varepsilon \varDelta t.$$

Das wirkliche Increment $\varDelta v$ der Geschwindigkeit unterscheidet sich also von $\frac{dv}{dt} \varDelta t$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, welche allemal vernachlässigt werden kann, wenn es sich nur um die Grenze von Summen oder Quotienten handelt. Mithin kann man in allen solchen Fällen das unendlich kleine Increment der Geschwindigkeit so berechnen, als ob die Bewegung sich gleichförmig änderte, und die oben definirte Acceleration der wirklichen Bewegung zu ihrer Acceleration hätte.

Bemerkung. — Wir haben die veränderliche Bewegung überhaupt auf zwei verschiedene Weisen als Grenze successiver Bewegungen von unendlich kleiner Dauer betrachtet. Das eine Mal waren diese elementaren Bewegungen gleichförmig, das andere Mal gleichförmig verändert.

Die ersten Bewegungen besitzen zu Anfang der unendlich kleinen Zeitintervalle einerlei $\frac{dx}{dt}$ oder gleiche Geschwindigkeit mit der wirklichen Bewegung; die zweiten besitzen gleiches $\frac{dx}{dt}$ und gleiches $\frac{d^2x}{dt^2}$, d. h. dieselbe Geschwindigkeit und Acceleration mit ihr. Die ersten Bewegungen haben, wenn man so sagen darf, eine Berührung erster Ordnung mit der vorgelegten Bewegung, und die anderen eine Berührung zweiter Ordnung. Auch kann man, selbst für unendlich kleine Zeit, die Bewegungen erster Art statt der wirklichen Bewegung nur zur Berechnung der Wegzuwachse setzen; während man zur Berechnung der Zunahmen der Geschwindigkeit die anderen Bewegungen nehmen kann.

Krummlinige Bewegung eines Punktes.

16. Richtung der Geschwindigkeit. — Die Definition, welche wir von der Grösse der Geschwindigkeit gaben, ist unabhängig von der Linie (Bahn oder Trajectorie), welche das Bewegliche beschreibt. Wenn aber die Bewegung krummlinig ist, so muss man noch den Begriff der Richtung einführen. Bei der geradlinigen Bewegung hat die Gerade, welche zwei unendlich nahe Lagen des Punktes verbindet, immer eine und dieselbe Richtung, nämlich die Richtung der beschriebenen Geraden, und man nennt diese die Richtung der Bewegung. Bei der krummlinigen Bewegung ändert die Gerade, welche eine bestimmte Lage des Punktes mit einer nach unendlich kleiner Zeit eingenommenen verbindet, ihre Richtung, wenn das Intervall sich verkürzt, und sie strebt gegen eine bestimmte Grenze hin, welche man bisweilen die Richtung der Bewegung in dem betrachteten Augenblick nennt, und welche wir die Richtung der Geschwindigkeit in diesem Augenblick nennen werden. Sie ist offenbar die im Sinne der Bewegung genommene Tangente an die Trajectorie.

Die Cosinus der Winkel, welche sie mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen macht, sind der Grösse und dem Zeichen nach

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds},$$

wenn man ds als den Absolutwerth des Bogenelements betrachtet, und dx, dy, dz als die positiven oder negativen Incremente der Coordinaten x, y, z nach der unendlich kleinen Zeit dt.

17. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. — Wenn mehrere Kräfte auf einen Punkt wirken, so hat die Statik uns gelehrt, sie in eine zusammenzusetzen durch eine einfache geometrische Construction, wobei man die Kräfte in Grösse und Richtung durch Geraden darstellt, welche durch den angegriffenen Punkt gehen. Wenn diese Constructionen vorkommen, ohne dass es sich um Kräfte

handelt, so ist es bequem, analoge Bezeichnungen anzuwenden, welche kurz dasjenige andeuten, was ausserdem langer Umschreibungen bedürfte. In diesem Sinne werden wir zuweilen die Ausdrücke anwenden: Resultante von Geraden, welche, der Grösse und Richtung nach gegeben, von einem Punkt ausgehen; Componenten einer in Grösse und Richtung gegebenen Geraden.

In demselben Sinne verstehen wir die Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten. Um also die Componenten einer gegebenen Geschwindigkeit parallel mit drei gegebenen Geraden zu erhalten, construiren wir auf der Geraden, welche in Grösse und Richtung die zu zerlegende Geschwindigkeit vorstellt, ein Parallelepiped, von dem sie die Diagonale ist und dessen drei Seiten die vorgeschriebenen Richtungen der Componenten haben. Umgekehrt verfährt man bei der Zusammensetzung von drei Geschwindigkeiten; und wie gross auch die Anzahl der gegebenen oder gesuchten Componenten sei, so hat man doch immer nur dieselben Constructionen zu machen wie für Kräfte an einem Punkt. Wenn eine Componente parallel ist mit einer gegebenen Richtung, alle übrigen aber senkrecht darauf sind, so heisst sie die nach dieser Richtung zerlegte oder geschätzte Geschwindigkeit. Sie ist die Projection der Geschwindigkeit auf die gegebene Richtung. In der Folge werden wir den Nutzen dieser Transformationen einsehen. Aber vorläufig ist mit den Benennungen Componenten und Resultanten von Geschwindigkeiten kein anderer als der oben festgestellte Sinn zu verbinden.

18. Componenten der Geschwindigkeit parallel mit den Axen. — Nimmt man die Axen rechtwinklig, so werden die Componenten die Projectionen der Geschwindigkeit. Indem wir den Absolutwerth der Geschwindigkeit nehmen und ihre Richtung so, wie wir übereingekommen sind, nämlich im Sinne der Bewegung, müssen wir die Producte von $\frac{ds}{dt}$ respective in $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ bilden; dies giebt für die Componenten:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

welche Ausdrücke positiv oder negativ sind, je nachdem die

Richtung der Geschwindigkeit mit den positiven Axen spitze oder stumpfe Winkel bildet.

Man sieht leicht, dass die Componenten dieselben Ausdrücke auch bei schiefen Axen behalten.

Denn es sei M irgend eine Lage des Punktes und M' seine Lage nach einer sehr kleinen Zeit; Δx, Δy, Δz seien die Incremente der Coordinaten von M. Das Parallelepiped mit den Kanten Δx, Δy, Δz und der Diagonale MM' strebt gegen ein Parallelepiped hin, dessen Kanten auch mit den Axen parallel sind und dessen Diagonale die Richtung der Tangente hat. Dieses Grenzparallelepiped ist aber demjenigen ähnlich, dessen Diagonale und Kanten die Geschwindigkeit und ihre Componenten darstellen; folglich sind die Quotienten dieser Componenten durch die Geschwindigkeit die Grenzen der Quotienten:

$$\frac{\Delta x}{MM'},\ \frac{\Delta y}{MM'},\ \frac{\Delta z}{MM'},$$

die Quotienten der Componenten durch die Geschwindigkeit sind also:

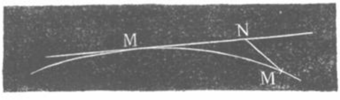
$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}.$$

Multiplicirt man sie mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, so erhält man für die Componenten die vorigen Ausdrücke:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}.$$

Man mag bemerken, dass $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit eines Punktes ist, welcher sich auf der Axe der x bewegt und immer dieselbe Abscisse wie der Punkt im Raum hat. Dasselbe gilt von den zwei anderen Componenten. Daraus sieht man, dass die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes die Geschwindigkeiten seiner rechtwinkligen oder schiefen Projectionen auf den drei Coordinatenaxen sind.

Fig. 4.



19. Abweichung. — Betrachten wir einen Punkt, der sich irgendwie veränderlich bewegt, und ziehen wir in einem beliebigen Au-

genblick in dem Punkt M, wo er sich auf der Trajectorie befindet, die Tangente. Nehmen wir nun an, in diesem Augenblicke beginne ein zweiter beweglicher Punkt sich von M an auf der Tangente mit der Geschwindigkeit zu bewegen, die wir die Geschwindigkeit des ersten in M nennen, und es seien M', N die gleichzeitigen Lagen beider Punkte nach irgend einer Zeit. Die Gerade NM' zeigt an, um wieviel der erste Punkt von der Lage entfernt ist, die er würde eingenommen haben, wenn seine Geschwindigkeit in Grösse und Richtung constant wie in M geblieben wäre. Die Betrachtung dieser Geraden ist äusserst wichtig für die Untersuchung der Bewegung, vorzugsweise dann, wenn das Zeitintervall zwischen den beiden Lagen M, M' unendlich klein ist. Wir geben ihr den Namen Abweichung. Sie kann sowohl aus dem Gesichtspunkte der Grösse als dem der Richtung betrachtet werden; die Richtung nehmen wir immer von N gegen M' hin. Sie ist demnach vollständig bestimmt, wenn man ihre drei Componenten parallel mit den Axen in Grösse und Zeichen kennt. Diese wollen wir ausmitteln, indem wir die Bewegung als gegeben, d. h. die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes als bekannte Functionen der Zeit t betrachten.

20. Componenten der Abweichung parallel mit den Axen. — Es sei θ ein unendlich kleines Zeitintervall; die Coordinaten von N auf der Tangente sind am Ende desselben:

$$x + \frac{dx}{dt}\,\theta, \quad y + \frac{dy}{dt}\,\theta, \quad z + \frac{dz}{dt}\,\theta.$$

Für die Coordinaten des Punktes M' auf der Trajectorie erhält man nach der Taylor'schen Formel, wenn man unter ε, ε', ε'' unendlich kleine Grössen versteht:

$$x + \frac{dx}{dt}\,\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2},$$
$$y + \frac{dy}{dt}\,\theta + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2},$$
$$z + \frac{dz}{dt}\,\theta + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Zieht man von diesen Coordinaten die ersten ab, so erhält man in Grösse und Zeichen die Componenten der Abweichung NM'; ihre Werthe sind:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2},\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2},\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}+\varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Da θ unendlich klein ist, so kann man die zweiten Summanden weglassen, wodurch sich die Componenten reduciren auf:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\theta^2}{2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\theta^2}{2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\theta^2}{2}.$$

Die Abweichung selbst wird, unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen:

$$\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

21. Richtung der Abweichung. — Unter Richtung der Abweichung in einem beliebigen Punkt M versteht man die Grenze, gegen welche die Richtung NM' hinstrebt, wenn M' sich M nähert. Die Cosinus der Winkel, welche NM' mit den rechtwinkligen Axen bildet, sind immer den Componenten von NM' proportional und haben dieselben Zeichen wie diese; daraus folgt, dass die Richtung der Abweichung mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus den drei Grössen

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}$$

proportional sind und die Zeichen dieser Grössen haben. Die Werthe der Cosinus werden also erhalten, wenn man die vorstehenden drei Grössen theilt durch den Absolutwerth von:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Wäre die Bewegung geradlinig, so würde offenbar die Abweichung nach der Geraden selbst gerichtet sein; und in der That sind in diesem Falle die Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ proportional.

22. Acceleration in der Abweichung. — Mit Vernachlässigung der Grössen, welche in Bezug auf θ von höherer als der zweiten Ordnung und folglich gegen die Abweichung NM' unendlich klein sind, ist der Werth der Abweichung:

$$NM'=\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck wächst wie der Weg eines Punktes, der, von der Ruhe ausgehend, sich gleichförmig beschleunigt bewegt, und dessen Acceleration

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

beträgt. Denkt man sich demnach die Abweichung als durch die Bewegung eines Punktes beschrieben, und bleibt man in der Annäherung bei den Unendlich-Kleinen zweiter Ordnung stehen, welche für die Berechnung der unendlich kleinen Incremente der Geschwindigkeit hinreichen, so kann man sagen, dass die abweichende Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, und dass ihre Acceleration den Werth hat:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Multiplicirt man denselben durch die oben berechneten Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Abweichung mit den Axen macht, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

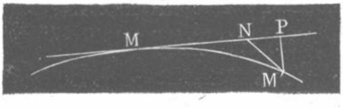
in Grösse und Zeichen als die Componenten dieser Acceleration.

Es ist aber wohl zu beachten, dass diese Acceleration derjenigen Bewegung angehört, durch welche man sich die Abweichung beschrieben denkt, und nicht der wirklichen Bewegung auf der Trajectorie. Es würde natürlich sein, unter der Acceleration dieser Bewegung $\frac{dv}{dt}$ zu verstehen.

23. Die Abweichung zerlegt nach der Tangente und Normale. — Die Componenten der Abweichung parallel mit den Axen werden, mit Vernachlässigung der gegen sie selbst Unendlich-Kleinen, ausgedrückt durch:

$$\frac{\theta^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Fig. 5.



Es sei nun NM' die Abweichung und $M'P$ die Senkrechte aus M' auf die zu M gehörende Tangente. Unserer Definition gemäss sind NP

und PM' die Componenten von NM' nach der Tangente und der Richtung PM'.

Die Tangentialcomponente NP wird man in Grösse und Zeichen erhalten, wenn man die drei mit den Axen parallelen Componenten von NM' auf die Tangente projicirt. Unter fortdauernder Voraussetzung rechtwinkliger Axen sind

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Tangente, im Sinne der Bewegung genommen, mit den Axen macht. Mithin erhält die Tangentialcomponente der Abweichung den Werth:

$$\frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{ds\, dt^2}.$$

Aus der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

folgt aber:

$$dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = ds\, d^2s,$$

deshalb wird der vorstehende Ausdruck:

$$\frac{\theta^2}{2}\frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\theta^2}{2}\frac{dv}{dt}.$$

Er ist der Werth der Tangentialcomponente.

Um die zweite Componente PM' zu berechnen, hat man mit Vernachlässigung der gegen sie unendlich kleinen Grössen, wenn R den Krümmungsradius der Trajectorie für den Punkt M bezeichnet:

$$PM' = \frac{MM'^2}{2R}.$$

Da nun MM' der in der Zeit θ durchlaufene Weg ist, so kann man MM' durch $v\theta$ ersetzen, und erhält mit dem verlangten Grade der Annäherung

$$PM' = \frac{\theta^2}{2}\frac{v^2}{R}$$

als den Ausdruck der Normalcomponente, deren Richtung man in dem Krümmungsradius für den Punkt M nehmen kann.

Man kann die beiden Componenten auch tangentiale und centripetale Abweichung nennen.

Aus ihren Ausdrücken sieht man, dass wenn die Bewegung gleichförmig ist, die Abweichung auf der Trajectorie normal steht. Ist die Bewegung geradlinig, so wird R unendlich, und die Abweichung ist im Sinne der Tangente, also der Bewegung gerichtet.

24. Tangentiale und normale Componente der Acceleration in der abweichenden Bewegung. — Aus den Ausdrücken für die Wege NP und PM' erhalten wir durch Division mit $\frac{\theta^2}{2}$ die gesuchten Componenten dieser Acceleration, nämlich $\frac{d^2 s}{dt^2}$ oder $\frac{dv}{dt}$ als tangentiale und $\frac{v^2}{R}$ als normale Componente.

Man nennt sie auch zuweilen tangentiale und centripetale Acceleration.

Geometrische Bewegung eines starren Körpers.

25. Betrachtet man zwei Lagen eines starren Körpers ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte und die zwischen beiden Lagen verflossene Zeit, so giebt es unzählig viele Arten der Ueberführung des Körpers aus der ersten Lage in die zweite, und man kann sich vornehmen, die einfachsten Arten zu bestimmen.

Es sei die wirklich stattfindende Verrückung des Körpers wie sie wolle, so kann man ihn doch immer auf folgende Art in seine neue Lage bringen. Man betrachte die Gerade, welche die zwei Lagen eines Punktes des Körpers oder eines fest damit verbundenen Punktes verbindet, und bewege diesen Punkt in ihr nach seiner neuen Lage; zugleich lasse man alle anderen Punkte des Körpers bis an die Endpunkte von Geraden fortschreiten, welche parallel und gleich sind mit der ersten; darauf halte man jenen Punkt in seiner neuen Lage fest und drehe den Körper um ihn herum so lange, bis zwei andere Punkte, die mit demselben nicht in gerader Linie liegen, ihre vorgeschriebenen neuen Lagen eingenommen haben: dann ist das Ziel erreicht.

Betrachten wir nun eine jede dieser beiden Bewegungen, Fortschreitung und Drehung, für sich.

Es ist klar, dass der zuerst betrachtete Punkt von der einen Lage in die andere kommen würde, wenn er irgend ein Polygon beschriebe, das in jener anfinge und in dieser aufhörte. Also kann man auch statt der ersten Bewegung eine Folge von anderen Fortschreitungen setzen, welche in Grösse und Richtung durch die Seiten des Polygons dargestellt werden.

Was die Bewegung um den fest gehaltenen Punkt betrifft, so lässt sich zunächst leicht zeigen, dass sie auf unendlich viele Arten in zwei Drehungen um feste Axen zerlegt werden kann. Denn betrachte ich ausser dem festen noch einen beliebigen Punkt in der Lage, in welche ihn die Fortschreitung geführt hat; verbinde ich diese Lage mit derjenigen, in welche der Punkt kommen soll, durch eine gerade Linie; lege ich durch den festen Punkt eine Ebene senkrecht auf diese Linie, und ziehe ich in dieser Ebene durch den festen Punkt irgend eine Gerade: so kann ich offenbar den betrachteten Punkt in seine vorgeschriebene Lage bringen, indem ich den Körper um diese Gerade drehe, denn es sind ja beide Lagen des betrachteten Punktes von dem Mittelpunkt seiner Drehung nothwendig gleich entfernt. Habe ich aber dies erreicht, so befinden sich zwei Punkte des Körpers in den Lagen, welche sie einnehmen sollen, und nun kann der Körper durch Drehung um die Verbindungslinie dieser beiden Punkte in seine vorgeschriebene Lage gebracht werden. Somit ist die Bewegung um den festen Punkt zurückgeführt auf Drehungen um Axen, welche durch diesen Punkt gehen.

Die Sätze, welche wir über Zusammensetzung und Zerlegung solcher Drehungen vortragen werden, sind gezogen aus der *Théorie nouvelle de la rotation des corps* von Poinsot; vorher wollen wir aber noch eine sehr einfache und nützliche Bemerkung machen. Wenn ein Körper sich um eine feste Axe um einen unendlich kleinen Winkel dreht, so hängen die unendlich kleinen Aenderungen der Coordinaten eines Punktes von seinen Coordinaten ab und von den Bestimmungsstücken der Aufgabe. Also werden für einen unendlich nahen Punkt diese Aenderungen von den ersten nur um Unendlich-Kleine gegen sie selbst verschieden sein, und man wird die einen Aenderungen für die anderen setzen können, wenn es sich nur um die Grenze von Summen oder Quotienten handelt. Man darf deshalb, wenn man die unendlich kleine Verrückung eines Körpers bestimmen will, welche durch entsprechende Drehung um eine Axe bewirkt wird, annehmen, der Körper ginge, anstatt von der gegebenen Anfangslage, von einer ihr unendlich nahen Lage aus; die Aenderungen der Coordinaten irgend eines Punktes vom Körper, unter dieser Voraussetzung berechnet, können für die gesuchten genommen werden. Hat man daher einem Körper successive irgend eine endliche Zahl von unendlich kleinen Drehungen zu ertheilen, so kann man sich jede von ihnen als von dem Körper aus seiner Anfangslage vollführt denken, und kann die Summe aller so entstehenden Variationen der Coordinaten irgend eines Punktes betrachten als die Variation, welche die nach einander und in beliebiger Reihenfolge ausgeführten Drehungen bewirken.

Ferner sieht man leicht, dass wenn der Körper sich um denselben unendlich kleinen Winkel um eine der gegebenen unendlich nahe Axe dreht, die Variationen der Coordinaten irgend eines von der Axe endlich entfernten Punktes dadurch nur um Unendlich-Kleine gegen sie selbst alterirt werden. Denn mit Beschränkung auf die Unendlich-Kleinen erster Ordnung sind die Variationen der Coordinaten Producte des unendlich kleinen Winkels in endliche Functionen der Grössen, welche die Axe bestimmen. Und wenn diese Grössen unendlich wenig variiren, so entspringen daraus für die Variationen der Coordinaten unendlich kleine Aenderungen von höherer als der ersten Ordnung.

Wenn also ein starrer Körper successive um beliebig viele Axen unendlich kleine Drehungen macht, so begeht man in dem Ausdruck für die Variationen der Coordinaten irgend eines Punktes keinen Fehler in Bezug auf die Unendlich-Kleinen erster Ordnung, wenn man statt dieses Punktes einen unendlich nahen Punkt und statt der Axen andere unendlich nahe Axen nimmt, und man darf die Reihenfolge der einzelnen Drehungen beliebig abändern. Dieser Vortheile halber zerlegt man immer die Bewegungen während endlicher Zeit in solche, welche während der unendlich kleinen Elemente dieser Zeit ausgeführt werden. Auch wird beinahe Alles, was wir über Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen sagen werden, sich allein auf den Fall beziehen, wo diese Bewegungen unendlich klein sind.

26. Winkelgeschwindigkeit. — Betrachten wir die stetige Drehung eines starren Körpers, und führen wir durch die Axe eine Ebene, welche wir mit dem Körper fest verbinden. Ihre Lage bestimmt die Lagen aller Punkte des Körpers, und kann in jedem Augenblick gegeben sein durch den

Winkel ψ, den sie mit einer festen, durch die Axe gehenden Ebene macht.

Ist die Zunahme dieses Winkels der Zunahme der Zeit proportional, so ist die Winkelbewegung des Körpers gleichförmig. Aber auch die Bewegung irgend eines Punktes ist gleichförmig, und die Geschwindigkeiten der Punkte sind ihren Abständen von der Axe proportional. Unter Winkelgeschwindigkeit des Körpers versteht man in diesem Falle den Winkel, welchen die bewegliche Ebene in der Zeiteinheit beschreibt; sie ist die Geschwindigkeit aller Punkte, welche um die Längeneinheit von der Axe abstehen.

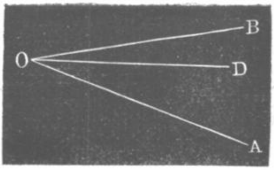
Ist die Winkelbewegung veränderlich, und der Winkel ψ eine gewisse Function der Zeit, so nennt man Winkelgeschwindigkeit in irgend einem Augenblick die Grenze der mittleren Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein unendlich kleiner Winkel von diesem Augenblicke an beschrieben wird. Ihr Werth ist die Ableitung $\frac{d\psi}{dt}$ des Winkels nach der Zeit; und der in unendlich kleiner Zeit beschriebene Winkel kann, mit Vernachlässigung der Unendlich-Kleinen höherer Ordnung, betrachtet werden als das Product der Winkelgeschwindigkeit in diese Zeit.

27. Offenbar kann ein Punkt in demselben Augenblicke nur eine Bewegung haben. Wenn man daher sagt, dass ein Körper gleichzeitig mehr als eine Bewegung habe, so meint man damit, dass der Körper in Bezug auf ein starres System bewegt sei, welches in Bezug auf ein anderes bewegt ist, das selbst wieder bewegt sein kann, etc., bis man endlich auf ein ruhendes System kommt. Daraus resultirt für den Körper eine gewisse Bewegung im Raum, welche stetig ist, wenn die componirenden Bewegungen es sind.

Betrachten wir diese gleichzeitigen Bewegungen während einer gewissen Zeit. Nehmen wir an, der Körper bewege sich zuerst allein und vollende seine Bewegung in Bezug auf das erste System; dann verbinde man den Körper und das erste System fest, und lasse beide ihre Bewegung in Bezug auf das zweite System ausführen; darauf verbinde man das erste und zweite System, und bewege sie in Bezug auf das dritte; etc. Man sieht ein, dass der Körper zuletzt sich in der Lage befinden wird, in die er kommen soll. Die gleichzeitigen Bewegungen bringen ihn also in dieselbe Lage, als wenn er sie nach einander ausführt.

28. Zwei Drehaxen treffen in demselben Punkte zusammen. — Es sei OA die Richtung einer Axe, um welche ein starrer Körper irgend einen Winkel 2α beschreibt. Wir nehmen die Richtung der Drehaxe immer so, dass einem Menschen, von dessen Füssen diese Richtung zum Kopfe geht, die Drehung von links nach rechts erscheint.

Fig. 6.



OB sei eine zweite Axe, um welche der Körper den Winkel 2β beschreibt, nachdem die erste Drehung vollendet ist. Wir wollen zeigen, dass der Körper auch durch eine einzige Drehung um eine gewisse, durch den Punkt O gehende Axe in seine neue Lage kommen kann.

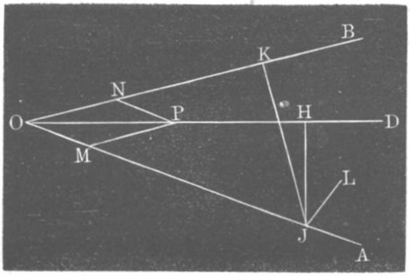
Legen wir durch OA eine Ebene, welche mit der Ebene AOB den Winkel α gegen OB hin macht, und durch OB eine andere Ebene, die gegen OA hin den Winkel β mit AOB bildet. Die Durchschnittslinie OD dieser beiden Ebenen wird nach der ersten Drehung sich in der gegen die Ebene AOB symmetrischen Lage befinden, und durch die zweite Drehung wird sie ihre vorige Lage wieder annehmen. Mithin muss der Körper in seine neue Lage kommen, wenn man ihn um die Axe OD dreht.

Dies findet statt bei jeder Grösse der Winkel 2α, 2β; wir wollen aber insbesondere den Fall untersuchen, wo sie unendlich klein sind. In dem körperlichen Dreieck, das die Kanten OA, OB, OD bilden, ist das Verhältniss der Sinus von BOD, AOD gleich $\sin\alpha : \sin\beta$ oder gleich $\alpha : \beta$, weil α und β unendlich klein sind. Statt der wahren Axe der den beiden successiven Drehungen zu substituirenden Drehung, welche unendlich wenig über die Ebene AOB emporragt, kann ich die ihr unendlich nahe Gerade nehmen, welche in der Ebene AOB selbst liegt und mit OB, OA Winkel bildet, deren Sinus sich verhalten wie $\alpha : \beta$. Diese Gerade ist aber die Diagonale eines Parallelogramms, welches Längen zu Seiten hat, die von O an auf OA und OB proportional mit α und β abgetragen sind.

Es fragt sich nun, in welchem Sinne man den Körper um diese Gerade drehen will, und wie gross der Winkel der Drehung sein muss. Die Richtungen OA, OB waren die beiden Axen, um welche von links nach rechts successive die Winkel 2α, 2β beschrieben werden sollten. Wir werden die Richtung OD der Diagonale zur Axe der zu substituirenden Drehung nehmen, diese also von links nach rechts um OD stattfinden lassen.

Um die Grösse des Drehungswinkels zu bestimmen, wähle ich einen Punkt J auf der Axe OA der ersten Drehung. Dieser Punkt ändert seinen Ort erst bei der zweiten Drehung, und beschreibt dann eine unendlich kleine Gerade JL senkrecht auf der Ebene AOB. Fällen wir die Perpendikel JK, JH auf OB, OD. Die unendlich kleinen Drehungswinkel JKL, JHL verhalten sich wie JH zu JK oder $\sin HOJ$ zu $\sin KOJ$ oder ON zu OP. Die Grösse der Drehung, welche ich statt der beiden successiven Drehungen setzen kann, wird also durch die Diagonale des aus den Seiten α, β und dem Winkel AOB construirten Parallelogramms bestimmt. Um die Richtung OD dieser Diagonale findet diese Drehung von links nach rechts statt.

Fig. 7.

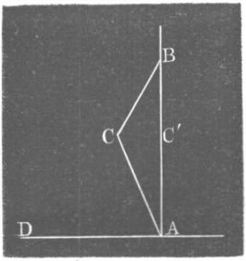


Denkt man sich die drei unendlich kleinen Drehungen um OA, OB und OD während gleicher unendlich kleiner Zeiten gleichförmig ausgeführt, so ist das Verhältniss ihrer Grössen auch das Verhältniss ihrer Winkelgeschwindigkeiten. Somit ergiebt sich der Satz: Wenn ein Körper nach einander während gleicher Zeiten um zwei Axen unendlich kleine Drehungen mit bestimmten Winkelgeschwindigkeiten machen soll, und ich auf den Richtungen beider Axen, von ihrem Durchschnittspunkte an, Längen abtrage, welche den Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen gleich sind, so stellt die Diagonale des ergänzten Parallelogramms, in der Richtung vom Durchschnittspunkte ab, die Axe der resultirenden Drehung und die Grösse ihrer Winkelgeschwindigkeit dar.

Die Zusammensetzung und Zerlegung einer beliebigen Zahl von Drehungen um Axen, welche durch denselben Punkt gehen, geschieht also auf gleiche Weise wie bei Kräften.

29. Parallele Drehaxen. — Betrachten wir zwei parallele Axen mit Richtungen von gleichem Sinn, z. B. seien dieselben senkrecht über eine gewisse Ebene empor gerichtet. Ihre Projectionen auf diese Ebene seien die Punkte A und B, und der Körper möge um die Axe A den Winkel 2α und nachher um die Axe B den Winkel 2β beschreiben. Es sei AC die Spur einer Ebene, welche durch die Axe A geht und mit der Geraden AB den Winkel $CAB = \alpha$ gegen B hin macht; ebenso sei BC die Spur einer anderen Ebene, die durch die Axe B geht und den Winkel $CBA = \beta$ gegen A hin mit BA bildet.

Fig. 8.



Führen wir durch den Punkt C eine Parallele zu den beiden Axen, so wird diese Parallele in ihre anfängliche Lage zurückgekehrt sein, wenn die beiden Drehungen vollzogen sind. Der Körper kann folglich auch in seine neue Lage gebracht werden durch eine Drehung um diese Gerade, und wir wollen diese Drehung von gleichem Sinn nehmen mit den beiden ersten.

Werden die Winkel α, β unendlich klein, so fällt der Punkt C in die Gerade AB, etwa nach C', und theilt diese im umgekehrten Verhältniss der Winkel α, β oder, wenn die Drehungen während gleicher Zeiten geschehen, der Winkelgeschwindigkeiten.

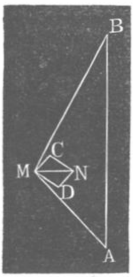
Um die Grösse der resultirenden Drehung und ihre Winkelgeschwindigkeit zu finden, so sei AD die unendlich kleine Linie, welche der Punkt A um B beschreibt. Die unendlich kleinen Winkel ABD und $AC'D$ verhalten sich wie AC' zu AB. Werden daher die Winkelgeschwindigkeiten um A und B respective durch BC' und AC' repräsentirt, so wird es die resultirende Winkelgeschwindigkeit durch AB.

Das Gesetz für die Componirung zweier Drehungen von gleichem Sinn um parallele Axen ist also ganz so wie bei parallelen und gleich gerichteten Kräften. Dieselbe Uebereinstimmung findet auch noch statt bei entgegengesetzten Drehungen; dies erkennt man durch Ableitung aus dem betrachteten Fall oder durch directe Untersuchung.

30. Gegenpaar von Drehungen. — Sind die beiden Drehungen um parallele Axen gleich und von entgegengesetztem Sinn, so hat man nach Poinsot ein Gegenpaar von Drehungen. Wir verstehen unter Hebelarm und Axe eines solchen Gegenpaars den Hebelarm und die Axe eines Gegenpaars von Kräften, welche die Richtungen der beiden Drehaxen haben.

Es sei M irgend ein Punkt des Körpers. Dieser Punkt bewegt sich in einer senkrechten Ebene auf den beiden Axen; und da er durch die beiden successiven Drehungen die unendlich kleinen Geraden MC, CN beschreibt, welche senkrecht auf MA, MB und mit den Längen dieser letzten proportional sind, so gelangt er an den Endpunkt N der Diagonale MN des aus MC, MD construirten Parallelogramms. Nun sind die Dreiecke MCN, AMB ähnlich wegen eines gleichen Winkels zwischen proportionirten Seiten, also ist MN senkrecht auf AB. Aus einem Gegenpaar von Drehungen resultirt demnach eine Fortschreitung im Sinne der Axe dieses Paars, und diese Fortschrei-

Fig. 9.



tung bleibt ungeändert, wie man auch immer das Gegenpaar in seiner Ebene oder in einer parallelen Ebene stellen mag. Die Grösse der Fortschreitung ist für alle Punkte gleich, und man sieht, dass sie z. B. für den Punkt A die Entfernung AB, multiplicirt mit dem Drehungswinkel, beträgt.

Da hiernach jede Fortschreitung sich in zwei Drehungen zerlegen lässt, so könnte man sich auf Betrachtung von Drehungen beschränken.

Fortschreitungen componiren sich wie Kräfte an einem Punkt; also gilt dasselbe für Gegenpaare von Drehungen. Trägt man daher auf der Axe eines jeden Gegenpaars eine Länge ab, welche gleich ist dem unendlich kleinen Drehungswinkel multiplicirt mit dem Hebelarm, so geben diese Längen, wenn man sie wie Kräfte von demselben Punkt an zusammensetzt, in Grösse und Richtung die resultirende Fortschreitung.

Statt einer Drehung um eine Axe A kann man immer eine in Grösse und Richtung identische Drehung um eine andere, mit der ersten parallele Axe B setzen und noch ein Gegenpaar von Drehungen mit dem Hebelarm AB. Denn man kann ja zwei mit der ersten Drehung gleiche und einander entgegengesetzte Drehungen um die Axe B einführen: die Verrückung des Körpers wird dadurch nicht verändert.

31. Allgemeine Reduction einer jeden Bewegung. — Wenn ein Körper irgend welche unendlich kleine Drehungen und Fortschreitungen ausführen soll, so lassen sich dieselben immer reduciren auf eine Drehung um eine gewisse Axe, die durch einen ganz beliebigen Punkt geht, und auf eine Fortschreitung, welche von der Wahl dieses Punktes abhängt.

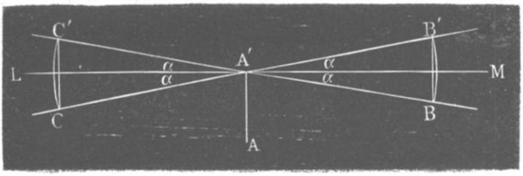
Denn ich setze statt irgend einer Drehung um ihre Axe eine identische Drehung um eine parallele Axe, die durch jenen willkürlich angenommenen Punkt geht, und noch eine Fortschreitung oder ein Gegenpaar von Drehungen, welches abhängt von der Lage der neuen Axe. Die Zusammensetzung aller Drehungen liefert immer eine und dieselbe resultirende Drehung um eine Axe von constanter Richtung, wo auch der

Punkt liegen mag, an den man alle Axen versetzt hat. Aber die anfänglich gegebenen Fortschreitungen oder Drehungspaare geben durch ihre Zusammensetzung mit den durch die Versetzung der Drehaxen eingeführten ein resultirendes Paar oder eine Fortschreitung, veränderlich an Grösse und Richtung.

32. Der besondere Fall, wo die Bewegung parallel ist zu einer Ebene. — Wenn alle Punkte eines Körpers Linien beschreiben, welche zu einer Ebene parallel sind, so kann man durch den Körper einen Schnitt führen mittelst einer festen zu der ersten parallelen Ebene: die Durchschnittsfigur wird sich in dieser festen Ebene bewegen; und da ihre Lage die Lage des Körpers bestimmt, so reicht die Betrachtung ihrer Bewegung hin.

Nun lässt sich leicht darthun, dass, welche unendlich kleine Verrückung auch die Figur erleiden mag, diese doch durch Drehung um einen gewissen Punkt erreicht werden kann. Denn man wird diese Verrückung immer erzielen können durch eine Fortschreitung, welche irgend einen Punkt A in die Lage

Fig. 10.



A' führt, die er einnehmen soll, und durch eine entsprechende Drehung 2α um A'. Ziehen wir durch A' eine Senkrechte LM auf AA' und zwei Geraden, die mit LM den Winkel α machen; ziehen wir noch zwischen diesen die mit AA' gleichen und parallelen Linien BB', CC'.

Die beiden Punkte B, C, wenn man sie sich mit der beweglichen Figur fest verbunden denkt, werden durch die Fortschreitung nach B', C' gebracht; die darauf folgende Drehung führt entweder den Punkt B' nach B oder C' nach C zurück, je nachdem sie den einen oder anderen Sinn hat. Nehmen wir an, es komme B' nach B: dann kann man die Figur in ihre neue Lage bringen, ohne dass B seinen Ort verändert, also durch einfache Drehung um den Punkt B, dessen Lage wir vollständig bestimmt haben. Der Körper wird dabei eine unendlich kleine Drehung um eine Axe ausführen, die durch B geht und senkrecht ist auf der Ebene der Figur.

Euler hat zuerst die Bewegung einer Figur auf einer Kugel untersucht, in welcher Aufgabe die von uns behandelte enthalten ist.

33. Allgemeine Reduction auf eine schraubenförmige Bewegung. — Wir haben bereits eine jede Bewegung auf zwei andere zurückgeführt: auf eine Fortschreitung, welche von dem Punkte abhängt, den man zum Versammlungspunkte aller Drehaxen gewählt hat, und auf eine Drehung, welche in Richtung und Grösse constant ist. Zerlegen wir die Fortschreitung parallel mit der Axe dieser Drehung und senkrecht darauf. Da die Reihenfolge der unendlich kleinen Bewegungen gleichgültig ist, so dürfen wir anfangen mit der zur Axe parallelen Fortschreitung; es bleiben dann noch die senkrechte Fortschreitung und die Drehung auszuführen, welche sich, wie wir in der vorigen Nr. sahen, zusammensetzen in eine Drehung um eine mit der ersten parallele Axe.

Demnach lässt sich jede unendlich kleine Bewegung zurückführen auf Drehung um eine Axe und Fortschreitung parallel mit dieser Axe, eine Bewegung, welche einer Schraube in ihrer Mutter zukommt.

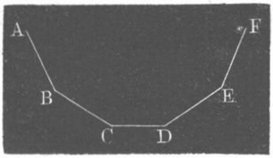
Um diese zur Axe parallele Fortschreitung zu erhalten, braucht man nur die ganze Fortschreitung, welche zu irgend einem Versammlungspunkte aller Drehaxen gehört, auf die resultirende Drehaxe zu projiciren. Sie wird immer dieselbe und ist gleich der gemeinschaftlichen Länge, um welche alle Punkte des Körpers, beim Uebergang in ihre neue Lage, sich von einer und derselben, gegen die Richtung der Axe senkrechten Ebene entfernen; sie ist zugleich die kleinstmögliche Fortschreitung.

Man kann dasselbe Resultat durch Bezugnahme auf Kräfte und Kräftepaare erhalten. In der Statik wurde bewiesen, dass jedes System von Kräften und Kräftepaaren sich auf eine Kraft und ein Paar reduciren lässt, dessen Axe mit der Richtung dieser Kraft parallel ist. Daraus folgt, dass auch jedes System von unendlich kleinen Drehungen und Fortschreitungen reducirt werden kann auf eine Drehung und eine Fortschreitung parallel mit der Axe dieser Drehung.

34. Stetige Bewegung parallel mit einer festen Ebene. — Wir brauchen in diesem Falle nur die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene zu betrachten. Zerlegen wir die Zeit in unendlich kleine Elemente. Die Bewegung während eines solchen Elements kann, wie gezeigt wurde, betrachtet werden als Drehung um einen bestimmten Punkt, den man den augenblicklichen Mittelpunkt der Drehung nennt; und alle diese Mittelpunkte liegen auf einem ganz bestimmten, in der Ebene festen geometrischen Ort. Diejenigen Punkte der beweglichen Figur, welche nach einander Mittelpunkte der Drehung werden, indem sie zusammenfallen mit den entsprechenden Punkten des auf der Ebene festen Orts, bilden einen in der Figur festen Ort, der sich mit dieser auf der Ebene bewegt. Kennt man seine Bewegung, so wird auch die Bewegung der Figur bekannt.

Es seien A, B, C, D, E, F etc. die successiven Mittelpunkte der Drehung; die Punkte der Figur, welche mit ihnen in dem Augenblick zusammenfallen, wo sie Mittelpunkte werden, seien durch A', B', C', D' etc. bezeichnet. Wenn z. B. B' in B liegt, dann dreht sich die Figur so lange um B, bis C' nach C kommt; darauf rotirt sie um C, bis D' mit D zusammenfällt, und so fort. Folglich haben beide Polygone gleiche unendlich kleine Seiten, und rollen auf einander ohne zu gleiten; dabei nimmt die Figur nach einander alle Lagen ein, welche sie einnehmen soll.

Fig. 11.



Da wir uns die Zeitintervalle unendlich klein denken, so stellen die beiden Polygone zwei bestimmte Curven dar, von denen eine fest und die andere mit der Figur beweglich ist. Diese beiden Curven tangiren einander beständig, indem die bewegliche ihre Bogen auf gleichen Bogen der festen abrollt, so dass kein Gleiten stattfindet.

Wenn man also mit der Figur die Curve fest verbindet, welche den Ort aller augenblicklichen Mittelpunkte in Bezug auf die Figur darstellt, so darf man nur diese Curve ohne Gleiten rollen lassen auf der in der Ebene festen Curve derselben Mittelpunkte: die Figur erhält dadurch ihre wirkliche Bewegung.

Handelt es sich um die Bewegung des ganzen Körpers, so braucht man nur die beiden Cylinderflächen ohne Gleiten auf einander rollen zu lassen, welche sich in jenen Curven auf die feste Ebene projiciren.

35. Stetige Bewegung um einen festen Punkt. — Wir zerlegen sie in unendlich kleine Bewegungen, welche während unendlich kleiner Zeitintervalle ausgeführt werden, und welche man betrachten kann als Drehungen um successive unendlich nahe Axen. Alle diese Axen bilden eine im Raum feste Kegelfläche. Man erhält eine zweite, bewegliche Kegelfläche, wenn man sich jede Axe in der Lage mit dem Körper verbunden denkt, welche sie gegen ihn in dem Augenblicke hat, wo sie zur Drehaxe wird. Beide Kegelflächen tangiren sich beständig mit einer Kante. Sie gleiten aber nicht auf einander, denn die Berührungskante hat als augenblickliche Drehaxe die Geschwindigkeit Null und verrückt sich folglich in einem unendlich kleinen Zeitintervall von erster Ordnung nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, so dass kein Gleiten stattfinden kann. Betrachtet man übrigens die beiden Kegelflächen als Vielkante mit unendlich kleinen Seitenflächen, so fallen immer gleiche Seitenflächen auf einander, mithin rollt die bewegliche Kegelfläche stets ihre Stücke auf gleichen Stücken der festen ab, und folglich ist kein Gleiten möglich.

Man kann demnach die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt durch zwei Kegel bestimmen, welche den festen Punkt zur Spitze haben, indem man den mit dem Körper verbundenen Kegel auf dem im Raume festen, ohne zu gleiten, rollen lässt.

Den vorigen Fall würde man erhalten, wenn man sich den festen Punkt im Unendlichen dächte.

36. Stetige Bewegung im Allgemeinen. — Die unendlich kleinen Bewegungen, in welche man sie zerlegt, lassen sich auf unendlich viele Arten in Fortschreitung und Drehung verwandeln; wir wollen aber diejenige Art voraussetzen, bei welcher die Fortschreitung zur Axe der Drehung parallel

ist. Alle augenblicklichen Axen der Drehung und Gleitung bilden eine im Raum feste Regelfläche und eine andere, welche in dem beweglichen Körper fest ist. Alle Erzeugungslinien der zweiten Regelfläche werden sich nach einander auf die der ersten legen: und zwar wird, wenn man sich die Fortschreitung zuerst ausgeführt denkt, eine Erzeugungslinie der zweiten Fläche durch Drehung mit der entsprechenden Erzeugungslinie der ersten zusammenfallen und auf ihr mit dem Körper fortgleiten; darauf wird sich die bewegliche Regelfläche um sie herum drehen, bis zum Zusammenfallen von zwei nächsten Erzeugungslinien; und so fort.

In dem Augenblicke, wo die Drehung um eine gemeinschaftliche Erzeugungslinie eine zweite Erzeugungslinie mit der entsprechenden der festen Fläche zusammenführt, haben beide Flächen zwei Erzeugungslinien gemeinschaftlich und tangiren sich folglich in der ganzen Ausdehnung derselben. Die Bewegung des Körpers kann demnach hervorgebracht werden durch eine mit dem Körper verbundene Regelfläche, welche sich auf einer anderen, im Raume festen Regelfläche bewegt, dergestalt dass beide Flächen sich beständig mit einer Erzeugungslinie tangiren, und dass die bewegliche Fläche auf der festen rollt und zugleich längs der gemeinschaftlichen Erzeugungslinie gleitet.

Das Verhältniss, in welchem Gleiten und Drehung stehen, hängt von der Natur der Bewegung ab und kann selbst Null sein. Ist eine Fläche abwickelbar, so ist es nothwendig auch die andere, weil die Elemente beider der ganzen Länge nach zusammenfallen.

Wenn der Körper einen festen Punkt hat, so werden die Flächen Kegelflächen, und das Gleiten wird Null.

Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze.

37. Es wird nicht überflüssig sein zu zeigen, wie man die wichtigsten unter den vorstehenden Sätzen über die Bewegung eines festen Körpers durch den Calcul herleiten kann. Wir bestimmen die Lage des Körpers in jedem Augenblick durch die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes O dessel-

ben und durch die Winkel, welche die festen Axen AX, AY, AZ mit drei rechtwinkligen Axen OX', OY', OZ' bilden, die mit dem Körper fest verbunden sind und durch jenen Punkt O gehen.

Die Axen der x', y', z' mögen mit denen der x, y, z Winkel machen, deren Cosinus respective a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sind; die Coordinaten des beliebigen Punktes vom Körper, durch welchen man die Axen der x', y', z' führt, seien ξ, η, ζ, und die Richtung dieser Axen im Körper sei unabhängig gewählt von ihrem Anfangspunkte O. Man hat zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes in beiden Systemen die bekannten Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Wenn wir einen bestimmten Punkt M des Körpers betrachten, so sind x', y', z' constant. Wir wollen nun annehmen, es wachse die Zeit t um eine endliche Grösse Δt, und wollen durch das Zeichen Δ auch die entsprechenden endlichen Incremente der übrigen Variablen andeuten. Dann geben die Gleichungen (1):

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta\xi + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c, \\ \Delta y = \Delta\eta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c', \\ \Delta z = \Delta\zeta + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c''. \end{cases}$$

Die ersten Seiten dieser neuen Gleichungen sind die Componenten der Verrückung des Punktes parallel mit den festen Axen; die ersten Summanden auf der zweiten Seite sind die Componenten der Verrückung von O; und auch die drei letzten Summanden in einer jeden der Gleichungen werden sich leicht interpretiren lassen. Denken wir uns nämlich den Punkt O fest und die Richtung der Axen X', Y', Z' so verändert, dass in der Zeit Δt die Cosinus a, b, c, a', etc. die vorigen Incremente Δa, Δb, etc. erhalten, so bleiben ξ, η, ζ in den Gleichungen (1) constant, und die zweiten Seiten der Gleichungen (2) reduciren sich auf die drei letzten Summanden. Mithin stellen diese zweiten Theile auf der rechten Seite die Componenten der Verrückung dar, welche der Punkt M dann erfährt, wenn man dem Körper um den festen Punkt O eine Bewegung ertheilt, die in der Zeit Δt die Neigungen der Axen

X', Y', Z' gerade so verändert, wie es bei der wirklichen Bewegung geschieht. Es genügt folglich, um jeden Punkt in seine vorgeschriebene Lage zu bringen, dass man den Körper die zwei Bewegungen nach einander ausführen lässt, welche einem jeden Punkt die betrachteten zwei Componenten der Verrückung ertheilen. Somit hat man folgenden Satz:

Jede endliche Verrückung eines starren Systems lässt sich dadurch erreichen, dass man diesem System zunächst eine gemeinsame Fortschreitung ertheilt, bei welcher irgend ein Punkt desselben in seine vorgeschriebene Lage kommt, und dann eine Drehung um diesen Punkt; und zwar bleibt die Drehung unverändert, welchen Punkt man auch für die Fortschreitung wählt, und sie hängt nur von den Aenderungen in der Richtung der Linien des Systems ab.

Es versteht sich von selbst, dass man eben so gut vor der Fortschreitung die Drehung um den Punkt O in seiner alten Lage ausführen kann; die Werthe für Δx, Δy, Δz werden dadurch dieselben, und folglich kommt das System in die vorgeschriebene neue Lage. Uebrigens lässt sich dies unmittelbar durch geometrische Betrachtungen einsehen.

38. Vereinfachung der Bewegung um einen Punkt. — Wir werden zeigen, dass jede Veränderung der Lage eines Körpers, der einen festen Punkt hat, durch Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe erreicht werden kann.

Denkt man sich den Punkt O fest, so ergeben die Gleichungen (2) für Δx, Δy, Δz Werthe, welche Null sind für alle Punkte des Körpers, die den Gleichungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c = 0, \\ x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' = 0, \\ x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Demnach haben alle diese Punkte zu Anfang und zu Ende der Bewegung einerlei Lage. Eliminirt man x' und y' zwischen den Gleichungen (3), so fällt z' von selbst weg; und wenn die daraus resultirende Bedingungsgleichung erfüllt ist, so werden alle Punkte einer gewissen, durch O gehenden Geraden den Gleichungen (3) genügen. Dass nun dies wirklich stattfindet, wird das Folgende darthun.

Die variablen Grössen a, b, c, a', etc. müssen beständig den Gleichungen genügen:

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\ b^2+b'^2+b''^2=1,\ c^2+c'^2+c''^2=1,$$
$$ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0,\ bc+b'c'+b''c''=0.$$

Lässt man a, b, c, etc. um die Incremente $\varDelta a$, $\varDelta b$, etc. wachsen und zieht die vorstehenden Gleichungen ab, so ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{cases} (a+\frac{1}{2}\varDelta a)\varDelta a+(a'+\frac{1}{2}\varDelta a')\varDelta a'+(a''+\frac{1}{2}\varDelta a'')\varDelta a''=0, \\ (b+\frac{1}{2}\varDelta b)\varDelta b+(b'+\frac{1}{2}\varDelta b')\varDelta b'+(b''+\frac{1}{2}\varDelta b'')\varDelta b''=0, \\ (c+\frac{1}{2}\varDelta c)\varDelta c+(c'+\frac{1}{2}\varDelta c')\varDelta c'+(c''+\frac{1}{2}\varDelta c'')\varDelta c''=0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} a\varDelta b+b\varDelta a+a'\varDelta b'+b'\varDelta a'+a''\varDelta b''+b''\varDelta a'' \\ \qquad +\varDelta a\varDelta b+\varDelta a'\varDelta b'+\varDelta a''\varDelta b''=0, \\ a\varDelta c+c\varDelta a+a'\varDelta c'+c'\varDelta a'+a''\varDelta c''+c''\varDelta a'' \\ \qquad +\varDelta a\varDelta c+\varDelta a'\varDelta c'+\varDelta a''\varDelta c''=0, \\ b\varDelta c+c\varDelta b+b'\varDelta c'+c'\varDelta b'+b''\varDelta c''+c''\varDelta b'' \\ \qquad +\varDelta b\varDelta c+\varDelta b'\varDelta c'+\varDelta b''\varDelta c''=0. \end{cases}$$

Multipliciren wir jetzt die Gleichungen (3) respective durch $a+\frac{1}{2}\varDelta a$, $a'+\frac{1}{2}\varDelta a'$, $a''+\frac{1}{2}\varDelta a''$, und addiren sie; zufolge der ersten Gleichung (4) erhalten wir:

$$\begin{aligned} &y'[(a+\tfrac{1}{2}\varDelta a)\varDelta b+(a'+\tfrac{1}{2}\varDelta a')\varDelta b'+(a''+\tfrac{1}{2}\varDelta a'')\varDelta b''] \\ +&z'[(a+\tfrac{1}{2}\varDelta a)\varDelta c+(a'+\tfrac{1}{2}\varDelta a')\varDelta c'+(a''+\tfrac{1}{2}\varDelta a'')\varDelta c'']=0. \end{aligned}$$

Zwei andere Gleichungen ergeben sich, wenn man die Gleichungen (3) mit:

$$b+\tfrac{1}{2}\varDelta b,\ b'+\tfrac{1}{2}\varDelta b',\ b''+\tfrac{1}{2}\varDelta b''$$

und mit:

$$c+\tfrac{1}{2}\varDelta c,\ c'+\tfrac{1}{2}\varDelta c',\ c''+\tfrac{1}{2}\varDelta c''$$

multiplicirt. Man kann also die Gleichungen (3) durch nachstehende ersetzen:

$$(6)\quad \begin{cases} \quad y'(a\varDelta b+a'\varDelta b'+a''\varDelta b''+\frac{1}{2}\varDelta a\varDelta b+\frac{1}{2}\varDelta a'\varDelta b'+\frac{1}{2}\varDelta a''\varDelta b'') \\ +z'(a\varDelta c+a'\varDelta c'+a''\varDelta c''+\frac{1}{2}\varDelta a\varDelta c+\frac{1}{2}\varDelta a'\varDelta c'+\frac{1}{2}\varDelta a''\varDelta c'')=0, \\ \quad z'(b\varDelta c+b'\varDelta c'+b''\varDelta c''+\frac{1}{2}\varDelta b\varDelta c+\frac{1}{2}\varDelta b'\varDelta c'+\frac{1}{2}\varDelta b''\varDelta c'') \\ +x'(b\varDelta a+b'\varDelta a'+b''\varDelta a''+\frac{1}{2}\varDelta b\varDelta a+\frac{1}{2}\varDelta b'\varDelta a'+\frac{1}{2}\varDelta b''\varDelta a'')=0, \\ \quad x'(c\varDelta a+c'\varDelta a'+c''\varDelta a''+\frac{1}{2}\varDelta c\varDelta a+\frac{1}{2}\varDelta c'\varDelta a'+\frac{1}{2}\varDelta c''\varDelta a'') \\ +y'(c\varDelta b+c'\varDelta b'+c''\varDelta b''+\frac{1}{2}\varDelta c\varDelta b+\frac{1}{2}\varDelta c'\varDelta b'+\frac{1}{2}\varDelta c''\varDelta b'')=0. \end{cases}$$

Wir schreiben abkürzend:

$$(7)\begin{cases} c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'' + \frac{1}{2}\Delta c\Delta b + \frac{1}{2}\Delta c'\Delta b' + \frac{1}{2}\Delta c''\Delta b'' = p, \\ a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'' + \frac{1}{2}\Delta a\Delta c + \frac{1}{2}\Delta a'\Delta c' + \frac{1}{2}\Delta a''\Delta c'' = q, \\ b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'' + \frac{1}{2}\Delta b\Delta a + \frac{1}{2}\Delta b'\Delta a' + \frac{1}{2}\Delta b''\Delta a'' = r; \end{cases}$$

daraus folgt wegen (5):

$$(8)\begin{cases} b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'' + \frac{1}{2}\Delta b\Delta c + \frac{1}{2}\Delta b'\Delta c' + \frac{1}{2}\Delta b''\Delta c'' = -p, \\ c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'' + \frac{1}{2}\Delta c\Delta a + \frac{1}{2}\Delta c'\Delta a' + \frac{1}{2}\Delta c''\Delta a'' = -q, \\ a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'' + \frac{1}{2}\Delta a\Delta b + \frac{1}{2}\Delta a'\Delta b' + \frac{1}{2}\Delta a''\Delta b'' = -r. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6), welche mit den Gleichungen (3) gleichbedeutend sind, lassen sich demnach so schreiben:

$$(9)\qquad \begin{cases} qz' - ry' = 0, \\ rx' - pz' = 0, \\ py' - qx' = 0. \end{cases}$$

Man sieht nun leicht, dass diese Gleichungen sich auf zwei reduciren; denn multiplicire ich die erste mit p, die zweite mit q, die dritte mit r, und addire, so erhalte ich eine Gleichung, die ich statt einer der drei setzen kann; und weil diese Gleichung identisch ist, so reduciren sich die drei Gleichungen auf zwei. Es sind demnach unendlich viele Auflösungen möglich, und der Ort der Punkte, welche sie darstellen, ist eine durch O gehende Gerade.

Die Gleichungen (9) bestimmen demnach in Bezug auf die Axen X', Y', Z' die Gerade, um welche man den Körper drehen muss, um ihn in diejenige Lage zu bringen, welche er annimmt, wenn der Punkt O fest bleibt und die Cosinus a, b, c, a', etc. um Δa, Δb, etc. wachsen.

Somit ist bewiesen, dass j e d e V e r r ü c k u n g e i n e s s t a r r e n K ö r p e r s e r z i e l t w e r d e n k a n n d u r c h e i n e F o r t s c h r e i t u n g, w e l c h e i r g e n d e i n e n s e i n e r P u n k t e i n d i e v o r g e s c h r i e b e n e L a g e b r i n g t, u n d d u r c h e i n e D r e h u n g u m e i n e g e w i s s e, d u r c h d i e s e n P u n k t g e h e n d e A x e; u n d e s h ä n g t w e d e r d i e R i c h t u n g d i e s e r A x e n o c h d i e G r ö s s e d e s D r e h u n g s w i n k e l s v o n d e m g e w ä h l t e n P u n k t e a b.

Die Cosinus der Winkel, welche die Drehungsaxe mit X', Y', Z' macht, sind proportional mit p, q, r, sie betragen folglich:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Demnach sind die Cosinus derselben Axe mit den Axen der x, y, z:

$$\frac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

39. Grösse der Drehung. — Wir wollen den Winkel kennen, den die Senkrechte beschreibt, welche aus irgend einem Punkte auf die Drehaxe gefällt ist. Wir wählen dazu einen Punkt, welcher auf einer der Axen X', Y', Z' in der Entfernung 1 vom Ursprung O liegt, z. B. auf Z'. Sein Abstand von der Drehaxe ist der Sinus ihres Winkels mit OZ, also $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. Die Strecke zwischen beiden Lagen dieses Punktes beträgt $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, wo Δx, Δy, Δz die Werthe haben, welche die Gleichungen (2) für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, x', y' gleich Null und $z'=1$ ergeben; die Strecke beträgt folglich:

$$\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}.$$

Theilt man diese Länge durch den Abstand des Punktes von der Drehaxe, so ergiebt sich der doppelte Sinus des halben Drehungswinkels; also, wenn ω den ganzen Winkel bezeichnet:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\omega=\frac{\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Ebenso findet man, wenn man den Punkt auf den Axen der y' und x' annimmt:

$$\frac{\sqrt{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+r^2}}$$

und:

$$\frac{\sqrt{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{q^2+r^2}}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}{q^2+r^2}=\frac{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}{p^2+r^2}=\frac{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{p^2+q^2}$$

$$=\frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2+\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2+\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{2(p^2+q^2+r^2)}.$$

Demnach bestimmt folgende Formel den Winkel ω:

(10) $$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\varDelta a^2+\varDelta a'^2+\varDelta a''^2+\varDelta b^2+\varDelta b'^2+\varDelta b''^2+\varDelta c^2+\varDelta c'^2+\varDelta c''^2}.$$

40. Die Verrückungen aller Punkte geben gleiche Projectionen auf die Drehaxe. — Denn denkt man sich eine feste Ebene senkrecht auf diese Axe, so werden alle Punkte des Systems durch die gemeinschaftliche Verschiebung um gleiche Stücke ihr näher kommen oder sich von ihr entfernen. Die Drehung aber ändert die Entfernung von dieser zur Axe senkrechten Ebene nicht. Mithin geben die Verrückungen aller Punkte eine gleiche Projection auf die Axe.

Es folgt hieraus, dass wenn man aus einem und demselben Punkte des Raums Geraden zieht, die parallel und gleich sind mit den Verrückungen aller Punkte des Systems, dass dann die Endpunkte aller dieser Geraden in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Um also die Richtung der Drehaxe zu erhalten, braucht man nur aus einem Punkte drei Geraden zu ziehen, welche gleich und parallel sind mit drei nicht zu einer und derselben Ebene parallelen Verrückungen; dann eine Ebene durch ihre Endpunkte zu legen, und auf diese Ebene eine Senkrechte zu errichten.

Wenn man damit anfängt, das System parallel mit der Axe um ein, der Projection der wirklichen Verrückungen auf die Axe gleiches Stück fortschreiten zu lassen, so ist nur noch eine Bewegung parallel mit einer zur Axe senkrechten Ebene nothwendig. Somit hat man den Satz:

Jede Verrückung eines festen Körpers ist erreichbar durch zwei successive Bewegungen: die erste senkrecht gegen eine Ebene, und die zweite parallel mit dieser Ebene.

41. Bewegung eines Körpers parallel mit einer Ebene. — Wir haben durch eine einfache Construction bewiesen, dass wenn diese Bewegung nicht in einer blossen Fortschreitung besteht, man eine Drehung an ihre Stelle setzen kann. Auch die Rechnung wird dies leicht zeigen.

Nehmen wir die Axen der x, y, x', y' in der gegebenen

Ebene, so kann man die Gleichungen (1) unter der bekannten Form darstellen:

$$x = \xi + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = \eta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

wenn α den Winkel der Axe der x' mit der x-Axe bezeichnet. Man sieht nun leicht, dass es einen Punkt giebt, der vor und nach der Verrückung dieselbe Lage hat; denn man braucht nur x', y' zu bestimmen aus den Bedingungen $\varDelta x = 0$, $\varDelta y = 0$, welche geben:

$$\varDelta\xi + x' \varDelta\cos\alpha - y' \varDelta\sin\alpha = 0,$$
$$\varDelta\eta + x' \varDelta\sin\alpha + y' \varDelta\cos\alpha = 0.$$

Diese Gleichungen liefern nur ein System Werthe für x', y', also nur einen Punkt, der vor und nach der Verrückung dieselbe Lage hat. Seine Coordinaten können niemals unendlich werden, weil ihr gemeinsamer Nenner

$$(\varDelta\cos\alpha)^2 + (\varDelta\sin\alpha)^2$$

ist, und dieser nur dann Null sein kann, wenn

$$\varDelta\cos\alpha = 0, \quad \varDelta\sin\alpha = 0,$$

in welchem Falle der Winkel α sich nicht ändern und die Bewegung also in einer blossen Fortschreitung bestehen würde. Daraus folgt der Satz:

Jede Verrückung eines starren Körpers, dessen Punkte sich nur parallel mit einer festen Ebene bewegen, kann, wenn sie nicht in einer einfachen Fortschreitung besteht, hervorgebracht werden durch Drehung um eine auf dieser Ebene senkrechte Axe.

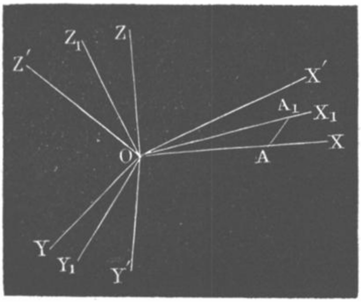
42. Jede Verrückung ist durch eine Schraubenbewegung erreichbar. — Denn jede Verrückung eines Körpers kann erzielt werden durch eine Fortschreitung und eine darauf folgende Drehung um eine Axe von fester Richtung. Statt der einen Fortschreitung kann man zwei sich folgende Fortschreitungen setzen: die eine parallel zu der Axe und von constanter Grösse; die andere senkrecht zur Axe und abhängend, gleich der absoluten Lage dieser Axe, von dem zur Bestimmung der Fortschreitung gewählten Punkte. Diese letzte Fortschreitung und die Drehung zusammen kann man durch eine Drehung um eine parallele Axe ersetzen. Also:

Jede Verrückung eines Körpers kann erreicht werden, wenn man den Körper mit einer gewissen festen Geraden verbindet, ihn längs derselben gleiten und darauf sich um sie drehen lässt; und offenbar kann man diese beiden successiven Bewegungen durch eine Schraubenbewegung ersetzen.

Dieser Satz ist hier für irgend eine endliche Verrückung bewiesen. Vorher war er nur betrachtet worden in dem am allgemeinsten nützlichen Fall einer unendlich kleinen Verrückung.

43. Die Grössen p, q, r haben Beziehungen zu einander, welche bisweilen zur Vereinfachung der Formeln dienen, und welche wir deshalb mittheilen wollen. Es sei O der Ursprung der beweglichen Axen X', Y', Z'; wir denken uns ihn fest, und legen durch ihn drei Axen OX, OY, OZ parallel zu den festen Axen. OJ sei die Axe, um welche man das System drehen kann, um es in die durch die Incremente $\varDelta a$, $\varDelta b$ etc. bestimmte Lage zu bringen; die Cosinus der Winkel, welche OJ mit den Axen X', Y', Z' bildet, sind proportional mit p, q, r. Betrachten wir nun drei Axen, die zuerst mit X, Y, Z zusammenfallen, aber mit X', Y', Z' fest verbunden sind und sich folglich mit ihnen bewegen. Nach der vollbrachten Drehung seien X_1, Y_1, Z_1 die Lagen dieser neuen Axen. Nehmen wir auf OX, OX_1 die der Einheit gleichen Längen OA, OA_1; da der Punkt, welcher vor der Drehung in A war, durch die Drehung nach A_1 kommt, so ist AA_1 senkrecht gegen OJ.

Fig. 12.



Die Axen X', Y', Z' bilden in ihrer neuen Lage dieselben Winkel mit OX_1 wie in der alten Lage mit OX, denn OX_1 ist ja mit ihnen fest verbunden und coincidirte anfänglich mit OX; die Cosinus dieser Winkel sind demnach a, b, c. Mit OX machen X', Y', Z' in der neuen Lage Winkel, deren Cosinus $a + \varDelta a$, $b + \varDelta b$, $c + \varDelta c$ sind. Diese letzten

Cosinus sind die Projectionen von OA auf X', Y', Z', und die ersten sind die Projectionen von OA_1 auf dieselben Axen; folglich stellen $\varDelta a$, $\varDelta b$, $\varDelta c$ die Projectionen der Geraden $A_1 A$ dar auf X', Y', Z' in der neuen Lage, und also sind die Cosinus der Winkel, welche die Richtung $A_1 A$ mit X', Y', Z' bildet, proportional mit $\varDelta a$, $\varDelta b$, $\varDelta c$ und respective von denselben Zeichen. Daraus folgt, weil die Richtungen OJ und $A_1 A$ senkrecht gegen einander stehen, dass:

$$p\varDelta a + q\varDelta b + r\varDelta c = 0.$$

Betrachtet man statt OX die Axen OY und OZ, so erhält man zwei analoge Gleichungen; also hat man die drei Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} p\varDelta a + q\varDelta b + r\varDelta c = 0, \\ p\varDelta a' + q\varDelta b' + r\varDelta c' = 0, \\ p\varDelta a'' + q\varDelta b'' + r\varDelta c'' = 0. \end{cases}$$

Wenn ich nun auch auf jeder der Axen X', Y', Z' einen Punkt in der Entfernung 1 vom Ursprung nehme, und ausdrücke, dass die Gerade, welche seine erste und zweite Lage verbindet, auf OJ senkrecht steht, so erhalte ich folgende drei neue Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} (ap + bq + cr)\varDelta a + (a'p + b'q + c'r)\varDelta a' \\ \qquad + (a''p + b''q + c''r)\varDelta a'' = 0, \\ (ap + bq + cr)\varDelta b + (a'p + b'q + c'r)\varDelta b' \\ \qquad + (a''p + b''q + c''r)\varDelta b'' = 0, \\ (ap + bq + cr)\varDelta c + (a'p + b'q + c'r)\varDelta c' \\ \qquad + (a''p + b''q + c''r)\varDelta c'' = 0. \end{cases}$$

44. Richtungen, auf welchen die Verrückungen aller Punkte gleiche Projectionen geben. — Wir wissen bereits, dass die Projectionen aller Verrückungen auf die Axe gleich sind; es wird aber nicht nutzlos sein zu zeigen, wie man direct zu dieser Einsicht gelangen kann.

Es habe eine gewisse Richtung diese Eigenschaft; die Winkel, welche sie mit den Axen X', Y', Z' bildet, seien λ, μ, ν. Die Verrückung irgend eines Punktes hat parallel mit denselben Axen die Componenten:

$$(13)\qquad \begin{cases} a\varDelta x + a'\varDelta y + a''\varDelta z, \\ b\varDelta x + b'\varDelta y + b''\varDelta z, \\ c\varDelta x + c'\varDelta y + c''\varDelta z; \end{cases}$$

die Projection dieser Verrückung auf die Richtung, um welche es sich handelt, ist demnach:

$$(a\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z)\cos\lambda + (b\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z)\cos\mu \\ + (c\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z)\cos\nu,$$

und es sind nun $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ so zu bestimmen, dass diese Grösse constant bleibt, welche Werthe man auch den Grössen x', y', z' beilegt. Dazu ist es aber nothwendig und hinreichend, dass wenn man in dem vorstehenden Ausdruck für Δx, Δy, Δz die in (2) gegebenen Werthe setzt, dann die Coëfficienten der drei unabhängigen Variablen x', y', z' Null werden. Dies ergiebt die drei Bedingungen:

$$(14)\left\{\begin{aligned}&(a\Delta a + a'\Delta a' + a''\Delta a'')\cos\lambda + (b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'')\cos\mu \\ &\quad + (c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'')\cos\nu = 0, \\ &(a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'')\cos\lambda + (b\Delta b + b'\Delta b' + b''\Delta b'')\cos\mu \\ &\quad + (c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'')\cos\nu = 0, \\ &(a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'')\cos\lambda + (b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'')\cos\mu \\ &\quad + (c\Delta c + c'\Delta c' + c''\Delta c'')\cos\nu = 0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der drei Grössen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Man sieht aber leicht, dass diese Verhältnisse genau die von p, q, r sind; denn schreibe ich diese letzten Grössen an die Stelle der ersten in den Gleichungen (14), so werden sie zufolge (12) Identitäten. Also fällt die durch (14) bestimmte einzige Richtung mit der Drehungsaxe zusammen; welches zu verificiren war.

Da alle Verrückungen gleiche Projectionen auf der Axe haben, so folgt, dass alle Verrückungen, welche mit der Axe einen gleichen, vom rechten verschiedenen Winkel machen, also auch alle parallelen Verrückungen einander gleich sind, und umgekehrt.

45. Gleichungen für die Axe der Drehung und Gleitung. — Die Punkte dieser Axe zeichnen sich vor allen anderen dadurch aus, dass ihre Verrückungen nur in der Richtung der Axe selbst geschehen. Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Verrückung eines beliebigen Punktes mit den Axen X, Y, Z macht, sind proportional mit Δx, Δy, Δz; und die Cosinus der Winkel, welche die Drehaxe mit denselben Axen macht, sind proportional mit:

$$ap + bq + cr,\ a'p + b'q + c'r,\ a''p + b''q + c''r.$$

Demnach werden die auf der gesuchten Axe liegenden Punkte bestimmt durch die Gleichungen:

$$(15)\quad \frac{\Delta x}{ap+bq+cr}=\frac{\Delta y}{a'p+b'q+c'r}=\frac{\Delta z}{a''p+b''q+c''r};$$

und ersetzt man hier Δx, Δy, Δz durch ihre in (2) gegebenen Werthe, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades zwischen x', y', z' und den Daten der Aufgabe, welche die gesuchte Gerade in Bezug auf die Axen X', Y', Z' darstellen. Wir wollen aber diese beiden Gleichungen auf die einfachste Form zurückführen; deshalb schreiben wir zunächst die vorstehenden so:

$$\frac{(a+\frac{1}{2}\Delta a)\Delta x}{(a+\frac{1}{2}\Delta a)(ap+bq+cr)}=\frac{(a'+\frac{1}{2}\Delta a')\Delta y}{(a'+\frac{1}{2}\Delta a')(a'p+b'q+c'r)}$$
$$=\frac{(a''+\frac{1}{2}\Delta a'')\Delta z}{(a''+\frac{1}{2}\Delta a'')(a''p+b''q+c''r)}.$$

Durch Addition der Zähler und Nenner ergiebt sich wieder ein gleicher Bruch. Die Summe der Nenner, wegen der ersten Gleichung (12) und

$$ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0,$$

reducirt sich auf p. Die Gleichungen (2) ergeben die Summe der Zähler gleich $h+qz'-ry'$, wenn man setzt:

$$(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta=h.$$

Demnach sind die Quotienten (15) gleich $\dfrac{h+qz'-ry'}{p}$.

Verfährt man in Bezug auf die Buchstaben b und c ebenso, wie wir in Bezug auf a gethan haben, so zeigt sich, dass die Quotienten (15) auch den neuen Ausdrücken gleich sind:

$$\frac{i+rx'-pz'}{q},\ \frac{k+py'-qx'}{r},$$

während die Grössen h, i, k durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$h=(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta,$$
$$i=(b+\tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta\xi+(b'+\tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta\eta+(b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta\zeta,$$
$$k=(c+\tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta\xi+(c'+\tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta\eta+(c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'')\Delta\zeta.$$

Die Gleichungen der gesuchten Axe sind also:

$$\frac{h+qz'-ry'}{p}=\frac{i+rx'-pz'}{q}=\frac{k+py'-qx'}{r}.$$

Wir wollen Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit p, des zweiten mit q, des dritten mit r multipliciren und dann die neuen Zähler und Nenner addiren; dies liefert den gleichen Bruch:

$$\frac{ph + qi + rk}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Die Werthe von h, i, k ergeben, mit Rücksicht auf (11):

$$ph + qi + rk = (ap + bq + cr)\Delta\xi + (a'p + b'q + c'r)\Delta\eta$$
$$+ (a''p + b''q + c''r)\Delta\zeta.$$

Theilt man aber die zweite Seite dieser Gleichung durch $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, so erhält man die Projection der Verrückung des Ursprungs auf die Drehaxe. Wird diese Projection durch v bezeichnet, so hat man:

$$ph + qi + rk = v\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Demnach haben die Projectionen der Axe auf den von den Axen X', Y', Z' gebildeten Ebenen nachstehende Gleichungen:

$$\frac{h + qz' - ry'}{p} = \frac{i + rx' - pz'}{q} = \frac{k + py' - qx'}{r} = \frac{v}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

oder:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} qz' - ry' &= v\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - h, \\ rx' - pz' &= v\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - i, \\ py' - qx' &= v\frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - k. \end{aligned}\right.$$

46. Man kann sich in allen bisherigen Rechnungen die Verrückungen unendlich klein und während gleicher unendlich kleiner Zeiten ausgeführt denken; alle Incremente werden dann Differentiale, und die bisher erhaltenen Gleichungen ergeben Relationen zwischen den Grenzen der Differenzquotienten der Variablen oder zwischen ihren Differentialen. Man erhält diese Relationen, indem man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung vernachlässigt, und das Zeichen Δ mit d vertauscht. Damit aber die Homogenität sichtbar hervortrete, so werden wir p, q, r in den vorigen Formeln, wenn sie unendlich klein sind, durch pdt, qdt, rdt darstellen. Uebrigens lassen sich die zu findenden Relationen direct aus den Gleichungen (1) herleiten durch Differentiation und ähnliche

Rechnungen wie die für endliche Verrückungen gemachten. Theilt man die Verrückungen und ihre Componenten Δx, Δy, Δz durch Δt, so geben diese Quotienten an der Grenze die Geschwindigkeiten und deren Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; und da die Geschwindigkeiten und Verrückungen sich nach denselben Regeln zusammensetzen, so sieht man ohne Mühe, dass alle für die Verrückungen gefundenen Sätze, wenn man auf die Grenze übergeht, analoge Sätze für die Geschwindigkeiten der Punkte des Körpers liefern. Wir werden diese Sätze rasch hinter einander vornehmen.

Unendlich kleine Bewegung eines starren Systems.

47. Differenziirt man die Gleichungen (1) der Nr. 37 nach t, und betrachtet x', y', z' als constant, so ergiebt sich:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind die mit X, Y, Z parallelen Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Systems, der in Bezug auf die Axen X', Y', Z' die constanten Coordinaten x', y', z' hat.

Sie gehen aus den Gleichungen (2) derselben Nummer hervor, indem man durch Δt dividirt und auf die Grenze der Quotienten übergeht, wenn Δt sich der Null nähert.

48. Componenten der Geschwindigkeit in der Richtung der beweglichen Axen. — Die Componente parallel mit X' erhält man durch Multipliciren der Gleichungen (1) mit a, a', a'' und Addiren; die Componenten parallel mit Y' und Z' ergeben sich auf dieselbe Weise, nur dass man mit b, b', b'' und c, c', c'' multiplicirt. Wir werden diese Componenten respective durch u, v, w bezeichnen. Die Com-

ponenten der Geschwindigkeit des beweglichen Ursprungs seien h, i, k, setzen wir also:

$$(2)\qquad \begin{cases} a\dfrac{d\xi}{dt} + a'\dfrac{d\eta}{dt} + a''\dfrac{d\zeta}{dt} = h, \\ b\dfrac{d\xi}{dt} + b'\dfrac{d\eta}{dt} + b''\dfrac{d\zeta}{dt} = i, \\ c\dfrac{d\xi}{dt} + c'\dfrac{d\eta}{dt} + c''\dfrac{d\zeta}{dt} = k, \end{cases}$$

dann finden wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} u = h + qz' - ry', \\ v = i + rx' - pz', \\ w = k + py' - qx', \end{cases}$$

während p, q, r durch die Gleichungen gegeben werden:

$$\begin{aligned} p\,dt &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'', \\ q\,dt &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'', \\ r\,dt &= b\,da + b'\,da' + b''\,da''. \end{aligned}$$

Die ersten Summanden auf der rechten Seite in den Gleichungen (3) sind die Geschwindigkeitscomponenten der gemeinsamen Fortschreitung; und folglich sind die Geschwindigkeitscomponenten, welche von der Drehung um den fest gedachten Ursprung herrühren:

$$qz' - ry',\quad rx' - pz',\quad py' - qx'.$$

49. Augenblickliche Drehaxe. — Die Punkte, deren Geschwindigkeit in der Bewegung um den fest gedachten Ursprung Null ist, ergeben sich aus den drei nachstehenden Gleichungen, von denen aber nur zwei von einander unabhängig sind:

$$(4)\qquad qz' - ry' = 0,\quad rx' - pz' = 0,\quad py' - qx' = 0.$$

Sie liegen demnach auf einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und mit den Axen X', Y', Z' Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$(5)\qquad \frac{\pm p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{\pm q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

wobei man entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen zusammen nehmen muss.

Man nennt diese Gerade die augenblickliche Drehaxe, weil man annehmen darf, dass die Bewegung während einer unendlich kleinen Zeit um sie stattfindet, da die Fehler, welche aus dieser Annahme hervorgehen, für Punkte in endlicher Entfernung von der Axe unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.

Man kann also jede unendlich kleine Bewegung um einen festen Punkt betrachten als Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe.

Und folglich kann man jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers betrachten als resultirend aus einer Fortschreitung und einer Drehung um eine feste Axe.

50. Grösse der Winkelgeschwindigkeit. — Bei der Bewegung um eine feste Axe ist die Winkelgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit irgend eines Punktes, getheilt durch dessen Abstand von der Axe. Nimmt man den Punkt auf der Axe Z' in der Entfernung 1 vom Ursprung, dessen Coordinaten also sind:

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 1,$$

so ergeben die Formeln (3) seine Geschwindigkeitscomponenten parallel mit den Axen X', Y', Z' gleich q, $-p$, 0; seine Geschwindigkeit ist demnach $\sqrt{p^2 + q^2}$. Sein Abstand von der Drehaxe ist der Sinus des Winkels dieser Axe und der Axe Z' oder $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. Folglich ist der Werth der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \tag{6}$$

51. Drehrichtung. — Es bleibt noch die Drehrichtung des Systems zu bestimmen, oder, was dasselbe ist, die Richtung der Drehung, welche in irgend einer auf der Axe senkrechten Ebene stattfindet. Dazu hat man nur nöthig zu untersuchen, ob die oberen oder unteren Zeichen der Ausdrücke (5) der Richtung der Axe dieser Drehung entsprechen. Wir betrachten deshalb die Ebene, welche durch den Ursprung senkrecht auf die Drehaxe geführt ist, und wir wollen suchen die Richtung der Axe für die Drehung zu bestimmen, welche der Leitstrahl vom Ursprung nach irgend einem Punkt x', y', z' dieser Ebene in derselben Ebene aus-

führt. Dieser Punkt bewegt sich, von irgend einer seiner Lagen an, in der Richtung seiner Geschwindigkeit, welche mit den Axen X', Y', Z' Winkel macht, deren Cosinus proportional sind mit u, v, w und mit diesen Grössen gleiche Zeichen haben. Um also die Axe der von dem Leitstrahl ausgeführten Drehung zu erhalten, braucht man nur in den Formeln (2) auf Seite 12 des ersten Theils statt der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ die des Leitstrahls und statt der Richtung $(\alpha'\beta'\gamma')$ die der Geschwindigkeit zu setzen. Daraus folgt, dass die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Drehaxe mit X', Y', Z' macht, dieselben Zeichen haben wie die Ausdrücke

$$y'w - z'v, \quad z'u - x'w, \quad x'v - y'u;$$

und es fragt sich nur noch, ob die Zeichen dieser letzten übereinstimmen mit denen von p, q, r oder ihnen entgegengesetzt sind.

Um dies zu entscheiden, nehmen wir der Einfachheit wegen $z' = 0$, dann ist:

$$u = -ry', \quad v = rx',$$

und der dritte von den vorstehenden Ausdrücken wird:

$$r(x'^2 + y'^2),$$

also von demselben Zeichen wie r. Man muss folglich in den Ausdrücken (5) die oberen Zeichen nehmen.

Demnach sind die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Drehaxe mit den Axen X', Y', Z' bildet, in Grösse und Zeichen:

$$(7) \qquad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Multiplicirt man diese drei Cosinus mit der Winkelgeschwindigkeit, so erhält man ihre Componenten um die Axen X', Y', Z'. Sie sind in Grösse und Zeichen:

$$(8) \qquad p, \; q, \; r.$$

52. Augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung. — Der Satz der Nr. 42 gilt für jede Bewegung eines Körpers, also auch wenn diese Bewegung unendlich klein ist; man hat folglich den schon früher geometrisch erwiesenen Satz:

Jede unendlich kleine Bewegung eines Körpers lässt sich hervorbringen durch Drehung um eine Axe und Gleiten längs dieser Axe.

Diese augenblickliche Axe der Gleitung und Drehung lässt sich noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten. Substituirt man nämlich den unendlich kleinen Wegen, die man sich in gleichen Zeiten durchlaufen denkt, die Geschwindigkeiten, so erhält man den vorigen Satz folgendermaassen ausgedrückt:

Man kann die Geschwindigkeiten aller Punkte eines Körpers in einem beliebigen Augenblick betrachten als resultirend aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, welche gleich und parallel sind mit einer gewissen Geraden, und von den Geschwindigkeiten, welche diese Punkte bei einer gewissen Drehung um eine, mit jener Geraden parallele Axe haben würden.

Die zur Axe parallele Componente ist die Projection der Geschwindigkeit des beweglichen Ursprungs auf die Axe. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung beträgt $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, und die Richtung der Axe macht mit X', Y', Z' Winkel, deren Cosinus proportional sind mit p, q, r und die Zeichen dieser Grössen haben.

53. Gleichungen für die augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung. — In Nr. 45 haben wir die Gleichungen dieser Axe für eine beliebige endliche Bewegung gegeben; aus ihnen gehen die gesuchten hervor, indem man durch Δt dividirt und auf die Grenzen übergeht. Die dortigen Grössen p, q, r gehen dann in diejenigen über, welche wir jetzt durch dieselben Buchstaben bezeichnen; h, i, k werden die Componenten der Geschwindigkeit des Ursprungs im Sinne der Axen X', Y', Z', und wir wollen diese auch durch h, i, k bezeichnen; endlich v, welches die Verrückung des Ursprungs, geschätzt im Sinne der Axe, darstellte, wird die Geschwindigkeit des Ursprungs, geschätzt nach derselben Richtung, oder die gleitende Geschwindigkeit. Wir werden sie durch denselben Buchstaben darstellen, und ihre Componenten parallel mit X', Y', Z' durch v', v'', v'''. Die Gleichungen der augenblicklichen Axe der Drehung und Gleitung werden nun in Bezug auf die beweglichen Axen:

$$(9) \qquad \begin{cases} qz' - ry' = v' - h, \\ rx' - pz' = v'' - i, \\ py' - qx' = v''' - k. \end{cases}$$

In Bezug auf die festen Axen erhält man ihre Gleichungen, indem man für x', y', z' ihre Werthe in x, y, z setzt. Somit ist die Lage dieser Axe sowohl im Körper als gegen ein festes Coordinatensystem in jedem Augenblick bestimmt, wenn die Grössen ξ, η, ζ, a, b, c, a', etc. gegebene Functionen der Zeit sind.

Die Gleichung der Oberfläche, welche den Ort dieser Axen im Körper darstellt, würde man erhalten, wenn man die Zeit aus den Gleichungen der Axe zwischen x', y', z' eliminirte; und die Gleichung der anderen Fläche, welche den Ort dieser Axen im Raume darstellt, würde sich ergeben durch Eliminiren der Zeit aus den Gleichungen der Axe zwischen x, y, z.

54. **Virtuelle Verrückung eines starren Körpers. Gleichungen des Gleichgewichts.** — Die Formeln (3) der Nr. 48, welche die Geschwindigkeitscomponenten für irgend einen Punkt eines bewegten Körpers ausdrücken, liefern unmittelbar die Componenten der virtuellen Geschwindigkeiten aller Punkte dieses Körpers; und die Anwendung des allgemeinen Princips der Statik wird die Gleichungen ergeben, welche für das Gleichgewicht von Kräften an einem freien starren Körper nothwendig und hinreichend sind. In der That, wenn ein starrer Körper aus einer Lage in eine unendlich nahe Lage übergeht, so kann man annehmen, dass alle seine Punkte unendlich kleine Strecken gleichförmig durchlaufen, mit Geschwindigkeiten, welche den Längen dieser Strecken proportional sind. Die Componenten dieser virtuellen Wege sind die Producte der bei ihrem Durchlaufen verflossenen Zeit θ in die durch die Formeln (3) gegebenen Geschwindigkeitscomponenten. Demnach ist die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte, deren Componenten X, Y, Z, X', Y', Z', etc. sind:

$$\theta \Sigma [X(h + qz' - ry') + Y(i + rx' - pz') + Z(k + py' - qx')].$$

Damit Gleichgewicht stattfinde, so muss nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten diese Summe Null sein für jede Verrückung, wenn man durch θ dividirt; sie muss also Null sein für alle Werthe der sechs Grössen h, i, k, p, q, r, da man sich den Körper ganz frei denkt. Dazu ist aber nothwendig und hinreichend, dass die Coëfficienten einer jeden von diesen sechs Grössen Null seien, woraus die Gleichungen folgen:

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma Z = 0;$$
$$\Sigma(y'Z - z'Y) = 0,\ \Sigma(z'X - x'Z) = 0,\ \Sigma(x'Y - y'X) = 0.$$

Die Axen der x', y', z' konnte man beliebig im Raume annehmen. Man kann sie also mit den Axen der x, y, z zusammenfallen lassen. Dadurch werden die drei letzten Gleichungen:

$$\Sigma(yZ - zY) = 0,\ \Sigma(zX - xZ) = 0,\ \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Zum Schlusse empfehlen wir dem Leser die Abhandlung von Rodrigues „*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire.*“ Dieselbe steht im fünften Theile des Journals von Liouville.

Geschwindigkeit und Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes.

---

55. Hat ein Punkt eine gewisse stetige Bewegung in Bezug auf ein starres System, und hat dieses System selbst eine stetige Bewegung im Raume, so sagt man, der Punkt besitze eine absolute stetige Bewegung, die aus den beiden anderen zusammengesetzt sei. Man würde, von einem beliebigen Zeitpunkte angefangen, die Lage des Punktes nach irgend einer Zeit erhalten, indem man ihn fest mit dem System verbände und dieses sich während einer gleichen Zeit bewegen liesse; dann müsste man den Punkt in dem unbeweglichen System sich bewegen lassen, bis er die vorgeschriebene relative Lage einnähme. Natürlich könnte man auch in umgekehrter Ordnung verfahren.

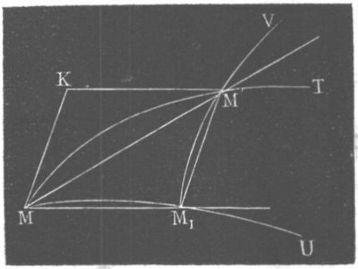
Am bequemsten bestimmt man die beiden componirenden Bewegungen, indem man sich dreier, mit dem System fest verbundener Axen bedient. Die relative Lage des Punktes wird dann durch seine Coordinaten in Bezug auf diese Axen gegeben, und die Bewegung des Systems durch die successiven Lagen derselben Axen. Kennt man die beiden componirenden Bewegungen, so sind die Coordinaten des Punktes in Bezug auf die beweglichen Axen bekannte Functionen der Zeit, sowie auch die Coordinaten des beweglichen Ursprungs und die Neigungen dieser Axen gegen feste Axen.

Wir wollen nun sehen, wie man für die resultirende oder zusammengesetzte Bewegung des Punktes die beiden wichtigen Elemente, Geschwindigkeit und Abweichung, bestimmen kann.

56. G e s c h w i n d i g k e i t in der zusammengesetzten Bewegung. — Es sei M die Lage des Punktes in einem

gewissen Augenblick; MU die Trajectorie desjenigen Punktes des Systems, welcher in demselben Augenblick mit M zusammenfällt, und M_1 seine Lage nach einer unendlich kleinen Zeit θ; $M_1 V$ die Lage, welche nach dieser Zeit die mit dem starren System verbundene Linie einnimmt, auf welcher sich unser Punkt bewegt, oder mit anderen Worten die Lage der relativen Trajectorie; $M_1 M'$ der Bogen, welchen der Punkt auf dieser Curve während der Zeit θ zurückgelegt hat. Die Lage des Punktes nach der Zeit θ ist dann M', und seine absolute Trajectorie wird eine Linie $MM'T$ sein, die durch M und M' geht.

Fig. 13.



Verbinde ich die Punkte M, M', M_1 durch Geraden und lasse die Zeit θ gegen Null abnehmen, so haben diese Geraden zu Grenzen ihrer Richtungen die Tangenten an den drei Curven MU, MT und $M_1 V$, die letzte Curve in ihrer Grenzlage gedacht, bei welcher M_1 in M liegt. Für die Verhältnisse der Seiten des Dreiecks $MM'M_1$ gelten dieselben Grenzen wie für die Verhältnisse der Bogen MM_1, M_1M', MM', welche während der Zeit θ durchlaufen werden, der erste durch den Punkt des Systems, der sich in M befand, der zweite durch unseren beweglichen Punkt in seiner relativen Bewegung, und der dritte durch denselben Punkt in seiner zusammengesetzten Bewegung. Dividire ich aber diese drei Bogen durch θ, so sind die Grenzen der drei Quotienten die Geschwindigkeiten in den drei Bewegungen, zu der Zeit wo das Bewegliche in M ist. Die Verhältnisse dieser Geschwindigkeiten sind also die Grenzen für die Verhältnisse der Seiten in dem Dreieck MM_1M'.

Um die hierin enthaltene Lösung unserer ersten Aufgabe einfach auszusprechen, bilden wir das Parallelogramm $MM_1M'K$. Die Grenzrichtung der mit M_1M' parallelen Seite MK ist die in M an die relative Trajectorie gezogene Tangente, und das Parallelogramm hat zur Grenze ein Parallelogramm, dessen Seiten in M Tangenten an die relative Trajectorie des Beweglichen und an die Trajectorie des mit diesem in M coïncidirenden Punktes des Systems sind, und proportionale Längen haben mit den Geschwindigkeiten beider Punkte auf beiden Curven.

Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

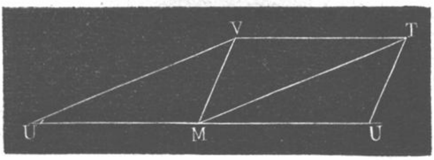
Die Geschwindigkeit des Beweglichen in seiner zusammengesetzten Bewegung wird in Grösse und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen beide Seiten in Grösse und Richtung die relative Geschwindigkeit des Beweglichen und die absolute Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems darstellen.

Oder kurz ausgedrückt nach der in Nr. 17 gegebenen Definition des Zusammensetzens von Geschwindigkeiten:

Die Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung ist die Resultante aus den Geschwindigkeiten in der relativen Bewegung und in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems.

57. Relative Geschwindigkeit. — Die Seiten MV, MU des Parallelogramms $MUTV$ sollen in M respective die relative Trajectorie und die Trajectorie des coïncidirenden Punktes des Systems tangiren, und ihre Längen sollen die Geschwindigkeiten in beiden Bewegungen darstellen. Wir haben gesehen, dass dann die Diagonale MT in Grösse und Richtung die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung des Punktes im Raume darstellt.

Fig. 14.

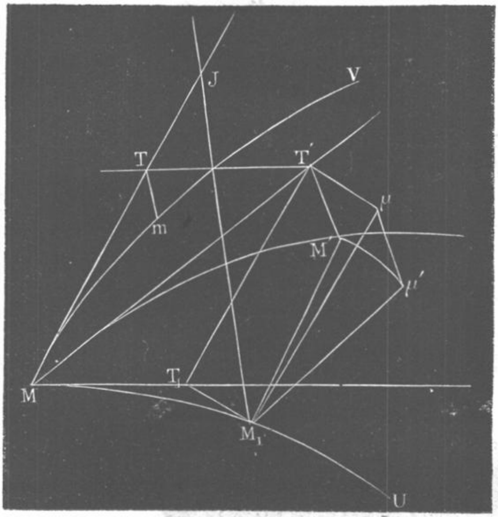


Verlängere ich aber MU um $MU' = MU$, so wird MV die Diagonale des Parallelogramms auf MU' und MT. Ich kann also sagen:

Die relative Geschwindigkeit eines Punktes in Bezug auf ein bewegtes starres System ist die Resultante aus seiner absoluten und einer anderen Geschwindigkeit, welche gleich und entgegengesetzt ist der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems.

58. **Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung.** — Es sei M die Lage des beweglichen Punktes in einem gewissen Augenblick; MV die Linie, auf welcher er sich in dem Systeme bewegt, oder seine relative Trajectorie; MU die Linie, welche der dem System angehörende Punkt M beschreibt. Nach einer unendlich kleinen Zeit θ befinde sich das Bewegliche auf seiner relativen Trajectorie in m, und

Fig. 15.



der Punkt M des Systems in M_1. MT, MT_1 seien diejenigen Stücke von den Tangenten an diesen beiden Curven, welche in der Zeit θ mit den in M stattfindenden Geschwindigkeiten würden gleichförmig beschrieben werden.

Die Abweichung in der relativen Bewegung des Punktes, nach der Zeit θ, ist Tm; in der Bewegung des Punktes M des Systems ist sie $T_1 M_1$.

Die Diagonale MT' des Parallelogramms TMT_1T' giebt die Richtung der Tangente an die absolute Trajectorie des Beweglichen; und die Länge von MT' stellt zugleich die Geschwindigkeit auf dieser Curve dar, so dass MT' der Weg ist, welchen während der Zeit θ ein Punkt durchläuft, der sich auf dieser Tangente mit der Geschwindigkeit bewegt, die das Bewegliche in M auf seiner absoluten Trajectorie hat.

Will man daher die Abweichung des Beweglichen in seiner zusammengesetzten oder absoluten Bewegung haben, so braucht man nur den Punkt T' zu verbinden mit der Lage, welche das Bewegliche nach der Zeit θ auf seiner absoluten Trajectorie einnimmt, oder, mit anderen Worten, mit seiner wirklichen Lage im Raume. Diese wirkliche Lage nun zu bestimmen wird uns leicht fallen nach dem, was wir über die Bewegung der Systeme gesagt haben.

Betrachten wir deshalb zunächst das System während der Zeit θ als unbeweglich; der Punkt M gelangt dann in die Lage m, und hier denken wir uns ihn mit dem System fest verbunden. Nun bewegen wir das System so, wie es sich in der That während der Zeit θ bewegt, und diese Bewegung zerlegen wir in eine gemeinsame Fortschreitung, welche M nach M_1 führt, und in eine Drehung um eine gewisse Axe $M_1 J$, deren Richtung, sowie die Grösse des Drehungswinkels, nur von der Richtungsänderung der Linien des Systems abhängt. Da θ unendlich klein ist, so darf diese Axe mit der augenblicklichen Drehaxe vertauscht werden, und kann man den um $M_1 J$ zu beschreibenden Winkel betrachten als das Product der Zeit θ in die der Lage M entsprechende Winkelgeschwindigkeit des Systems. Wir haben nun den mit dem Systeme verbundenen Punkt m zu verfolgen.

Die Fortschreitung MM_1 bewirken wir durch die beiden anderen MT_1, $T_1 M_1$. Die Fortschreitung MT_1 führt die Gerade MT in die Lage $T_1 T'$; die andere Fortschreitung $T_1 M_1$ bringt sie in die Lage $M_1 \mu$, wenn $T' \mu$ gleich und parallel mit $T_1 M_1$. Ziehe ich dann noch $\mu \mu'$ gleich und parallel mit Tm, so ist μ' die Lage von m nach vollbrachter Fortschreitung. Vollführe ich nun die nothwendige Drehung um $M_1 J$, so beschreibt der Punkt μ' einen gewissen Kreisbogen $\mu' M'$ senkrecht auf der Ebene $JM_1 \mu'$, dessen Radius die Senkrechte aus μ' auf die Axe $M_1 J$ ist. Nachdem diese Drehung vollbracht ist, so befinden sich alle Punkte in den Lagen, welche sie bei der wirklichen Bewegung nach der Zeit θ einnehmen; M' ist die absolute Lage des Beweglichen, und folglich ist $T' M'$ die gesuchte Abweichung.

Das geschlossene Polygon $T' \mu \mu' M'$ zeigt, dass $T' M'$ die Resultante ist von den Linien $T' \mu$, $\mu \mu'$, $\mu' M'$, diese in den

Richtungen genommen, nach welchen sie von T' aus durchlaufen werden. $T'\mu$ ist die parallel zu sich selbst versetzte Abweichung $T_1 M_1$; $\mu\mu'$ ist die ebenso versetzte Abweichung Tm. Was die dritte Linie $\mu' M'$ betrifft, so hat ihre Richtung zur Grenze die Senkrechte auf diejenige Ebene, welche geht durch die Grenzrichtung von $M_1 J$, also durch die augenblickliche Drehaxe, und durch die Grenzrichtung von $M_1\mu'$, welche zugleich die Grenzrichtung von $M_1\mu$, und zwar darum ist, weil $\mu\mu'$ unendlich klein von der zweiten und $M_1\mu'$ von der ersten Ordnung. Folglich darf man die Linie $\mu' M'$ betrachten als senkrecht auf der Ebene, welche Parallelen enthält zu der augenblicklichen Drehaxe und zu der Richtung MT der relativen Geschwindigkeit des Beweglichen.

Es ist wichtig, dass man bemerkt, dass der Sinn dieser Richtung der Sinn der augenblicklichen Drehung des Systems ist. Wollte man sie also betrachten als die Axe einer directen Drehung in der Ebene, auf welcher sie senkrecht steht, so würde diese Drehung von der augenblicklichen Axe gegen die Richtung der relativen Geschwindigkeit hin stattfinden.

Es bleibt uns nur noch übrig, das Maass der Grösse $\mu' M'$ zu finden. Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems, v_r die relative Geschwindigkeit, und δ den Winkel ihrer Richtung mit der augenblicklichen Drehaxe, so ist der Radius des durch μ' beschriebenen Kreisbogens $M_1\mu' . \sin\delta$, wofür man $M_1\mu . \sin\delta$ oder $\theta v_r \sin\delta$ setzen darf; der Mittelpunktswinkel ist $\theta\omega$, und folglich:

$$\mu' M' = \theta^2 \omega v_r \sin\delta.$$

Die Aufgabe ist jetzt vollständig gelöst, und das Resultat lässt sich so aussprechen:

Die Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung ist die Resultante von drei Linien. Davon sind die beiden ersten die Abweichungen in der relativen Bewegung des Punktes gegen das System, und in der Bewegung desjenigen Punktes vom System, welcher mit dem Beweglichen in dem betrachteten Augenblick coïncidirt. Die dritte Linie steht senkrecht auf einer Ebene, die parallel ist mit der augenblicklichen Axe des Systems und mit der relativen Geschwindigkeit des Punktes, und sie hat den Sinn der augenblicklichen Drehung des Systems. Oder mit anderen Worten, sie hat die Richtung der Axe einer Bewegung, welche auf dem kürzesten Wege die Richtung der augenblicklichen Axe in die Richtung der relativen Geschwindigkeit des Punktes führt. Die Grösse dieser dritten Linie ist das Product des Quadrats der unendlich kleinen Zeit in die Winkelgeschwindigkeit des Systems und in die Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur augenblicklichen Axe senkrechte Ebene.

59. Wir haben gesehen, dass die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung nur abhängt von der relativen Geschwindigkeit gegen das System und von der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems. Aber die Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung ist durch die Abweichungen in den beiden componirenden Bewegungen noch nicht bestimmt. Sie würde es nur in dem Falle sein, wenn die Bewegung des Systems in einer blossen Fortschreitung bestände. Sobald aber auch eine Drehung stattfindet, so hat diese einen Einfluss, welcher unendlich klein von der zweiten Ordnung ist und darum nicht vernachlässigt werden darf.

60. Besondere Fälle. — 1) Reducirt sich die Bewegung des Systems auf eine Fortschreitung nach irgend einem Gesetz, so wird die Winkelgeschwindigkeit Null, und die dritte Componente fällt weg. In diesem Falle resultirt die Abweichung aus der Zusammensetzung der beiden Abweichungen, welche der relativen Bewegung und dem coïncidirenden Punkte des Systems angehören.

2) Geschieht die Fortschreitung in constanter Richtung und mit constanter Geschwindigkeit, so wird die Abweichung des coïncidirenden Punktes des Systems Null, und dann ist die Abweichung in der absoluten Bewegung identisch mit der Abweichung in der relativen Bewegung.

3) Reducirt sich die Bewegung des Systems auf eine Drehung um eine Axe, so beschreibt der coïncidirende Punkt des Systems einen Kreisbogen um diese Axe. Und geschieht diese Drehung gleichförmig, so ist die Abweichung dieses

Punktes nach dem Mittelpunkt seines Kreises gerichtet, und ist keine andere als die centripetale Abweichung.

61. Abweichung in der relativen Bewegung. — Aus dem Satze der Nr. 58 ziehen wir eine sehr wichtige Folgerung. Da man in jedem geschlossenen Polygone irgend eine Seite als die Resultante aller übrigen betrachten kann, so folgt, dass in dem Polygone $T' \mu \mu' M'$ die Linie $\mu \mu'$ die Resultante der drei vom Punkte μ aus durchlaufenen Linien $\mu T'$, $T' M'$, $M' \mu'$ ist. Bei dieser Bewegung wird die Abweichung $T' M'$ in ihrem wirklichen Sinne durchlaufen; aber die Abweichung $T_1 M_1$ oder $T' \mu$ wird in dem entgegengesetzten Sinne genommen, und die Gerade $M' \mu'$ hat den entgegengesetzten Sinn von demjenigen, mit welchem sie in dem vorigen Falle zu nehmen war. Mit Rücksicht darauf hat man den folgenden wichtigen Lehrsatz:

Hat ein Punkt eine absolute Bewegung im Raume, und betrachtet man seine relative Bewegung gegen ein starres System, das selbst eine absolute Bewegung hat; d. h. betrachtet man die stetige Folge der Lagen, welche dieser Punkt in dem Systeme einnimmt, und welche ein Beobachter, der das System unbewegt glaubt, für absolute Lagen hält: so ist die Abweichung in der Bewegung auf dieser scheinbaren oder relativen Trajectorie die Resultante folgender drei Linien: 1) der Abweichung in der absoluten Bewegung; 2) der Abweichung in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems, diese Abweichung aber im entgegengesetzten Sinn genommen; 3) einer Linie, die gleich ist dem Product des Quadrats der unendlich kleinen Zeit in die Winkelgeschwindigkeit und in die Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur augenblicklichen Axe senkrechte Ebene. Diese dritte Linie steht senkrecht auf der durch diese Axe und die relative Geschwindigkeit gehenden Ebene, und ihre Richtung ist dem Sinne der augenblicklichen Drehung des Systems entgegengesetzt. Mit anderen Worten, sie ist die Axe einer Drehung, welche auf dem kürzesten

Wege die Richtung der relativen Geschwindigkeit in die Richtung der augenblicklichen Axe führt.

Analytische Herleitung der vorstehenden Sätze.

62. Es wird nicht ohne Nutzen sein zu sehen, wie der Calcul zu den vorstehenden Sätzen führt.

Nehmen wir drei rechtwinklige Axen OX', OY', OZ', die wir mit dem bewegten starren System fest verbinden; ξ, η, ζ seien die Coordinaten ihres Ursprungs O. Zwischen den Coordinaten x', y', z' des beweglichen Punktes in Bezug auf diese Axen und seinen Coordinaten x, y, z in Bezug auf feste Axen bestehen die bekannten Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \xi + a x' + b y' + c z', \\ y = \eta + a' x' + b' y' + c' z', \\ z = \zeta + a'' x' + b'' y' + c'' z'. \end{cases}$$

Durch Differenziiren derselben erhält man:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x' \dfrac{da}{dt} + y' \dfrac{db}{dt} + z' \dfrac{dc}{dt} \\ \qquad + a \dfrac{dx'}{dt} + b \dfrac{dy'}{dt} + c \dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x' \dfrac{da'}{dt} + y' \dfrac{db'}{dt} + z' \dfrac{dc'}{dt} \\ \qquad + a' \dfrac{dx'}{dt} + b' \dfrac{dy'}{dt} + c' \dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x' \dfrac{da''}{dt} + y' \dfrac{db''}{dt} + z' \dfrac{dc''}{dt} \\ \qquad + a'' \dfrac{dx'}{dt} + b'' \dfrac{dy'}{dt} + c'' \dfrac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Die ersten Seiten dieser Gleichungen sind die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des Beweglichen, parallel mit den festen Axen.

Die vier ersten Summanden auf der zweiten Seite dieser Gleichungen sind die Werthe, welche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ annehmen würden, wenn x', y', z' constant wären; sie sind also die mit X, Y, Z parallelen Componenten der Geschwindigkeit desjenigen Punktes vom System, welcher in dem betrachteten Augenblick mit dem Beweglichen zusammenfällt. Die mit X', Y'. Z' parallelen Componenten der relativen oder scheinbaren Geschwindigkeit des Beweglichen sind $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$; folglich stellen die drei letzten Summanden auf der zweiten Seite die Componenten dieser relativen Geschwindigkeit dar, parallel mit den festen Axen X, Y, Z. Somit hat man den schon geometrisch erkannten Satz:

Die Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes ist die Resultante aus der Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in Bezug auf das System hat, und aus der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes vom Systeme.

Und daraus folgt:

Die relative Geschwindigkeit des Punktes ist die Resultante seiner absoluten Geschwindigkeit und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes vom System.

63. Zusatz zu Seite 12 des ersten Theils. — Trage ich vom Ursprung an auf der Richtung α', β', γ' eine Länge q ab, und bezeichne ich die Coordinaten ihres Endpunktes durch x', y', z', so ist:

$$x' = q\cos\alpha',\quad y' = q\cos\beta',\quad z' = q\cos\gamma',$$

und die Formeln (1) (auf derselben Seite) werden:

$$yz' - zy' = pq\cos\lambda,\quad zx' - xz' = pq\cos\mu,\quad xy' - yx' = pq\cos\nu.$$

Da nun p die Länge der Senkrechten bedeutet, welche vom Ursprung gefällt ist auf diejenige Parallele zu der Richtung α', β', γ', welche durch den in der Richtung α, β, γ genommenen Punkt x, y, z geht, so stellt pq den Inhalt des Parallelogramms dar, dessen Seiten die Geraden vom Ursprung nach den Punkten x, y, z und x', y', z' sind. Bezeichne ich diese Fläche durch P, so habe ich also die drei Gleichungen:

$$(A)\quad P\cos\lambda = yz' - zy',\quad P\cos\mu = zx' - xz',\quad P\cos\nu = xy' - yx',$$

in welchen λ, μ, ν der Axe einer Fläche angehören, die durch einen vom Ursprung ausgehenden Radius beschrieben wird, der sich auf dem kürzesten Wege von dem Punkte x, y, z gegen x', y', z' hin bewegt. Und nehme ich noch auf der Richtung dieser Axe die Länge P, so stellen die vorstehenden Ausdrücke in Grösse und Zeichen die Projectionen dieser Länge auf den Coordinatenaxen dar.

64. Durch nochmaliges Differenziiren der Gleichungen (2) erhält man:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + x'\dfrac{d^2a}{dt^2} + y'\dfrac{d^2b}{dt^2} + z'\dfrac{d^2c}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(a\dfrac{d^2x'}{dt^2} + b\dfrac{d^2y'}{dt^2} + c\dfrac{d^2z'}{dt^2}\right) \\ \qquad + 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{db}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{dc}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + x'\dfrac{d^2a'}{dt^2} + y'\dfrac{d^2b'}{dt^2} + z'\dfrac{d^2c'}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(a'\dfrac{d^2x'}{dt^2} + b'\dfrac{d^2y'}{dt^2} + c'\dfrac{d^2z'}{dt^2}\right) \\ \qquad + 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{da'}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{db'}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{dc'}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\dfrac{d^2a''}{dt^2} + y'\dfrac{d^2b''}{dt^2} + z'\dfrac{d^2c''}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(a''\dfrac{d^2x'}{dt^2} + b''\dfrac{d^2y'}{dt^2} + c''\dfrac{d^2z'}{dt^2}\right) \\ \qquad + 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{da''}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{db''}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{dc''}{dt}\right). \end{cases}$$

Multiplicire ich diese Gleichungen mit $\frac{\theta^2}{2}$, so werden ihre ersten Seiten die mit den Axen X, Y, Z parallelen Componenten der Abweichung, welche in der absoluten Bewegung des Punktes der unendlich kleinen Zeit θ entspricht.

Untersuchen wir jetzt die drei Theile, in welche wir die zweiten Seiten zerfällt haben. Der erste Theil drückt die Werthe aus, welche respective $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ annehmen, wenn man x', y', z' constant lässt. Nach der Multiplication mit $\frac{\theta^2}{2}$ sind also die ersten Theile die Componenten der Abweichung desjenigen Punktes vom System, welcher mit dem Beweglichen coïncidirte. Die zweiten Theile sind die mit den Axen X, Y, Z parallelen Componenten der Abweichung in der relativen Bewegung. Es handelt sich also nur noch darum, die dritten Theile zu interpretiren und zu sehen, von welcher Linie sie die Componenten parallel mit X, Y, Z sind.

Bilden wir deshalb die Componenten dieser gesuchten Linie parallel mit X', Y', Z'; was dadurch geschieht, dass man die Projectionen der alten Componenten auf diese neuen Axen addirt. Dies liefert bis auf den Factor θ^2 folgende drei Ausdrücke:

$$(4) \qquad q\frac{dz'}{dt}-r\frac{dy'}{dt},\ r\frac{dx'}{dt}-p\frac{dz'}{dt},\ p\frac{dy'}{dt}-q\frac{dx'}{dt};$$

und es ist die Linie zu bestimmen, von welcher sie die Projectionen auf X', Y', Z' sind.

Nun lehren uns aber die Formeln (A) der Nr. 63, dass wenn man durch den Punkt O zwei Geraden OJ, OV zieht, deren Componenten für die erste p, q, r und für die zweite $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ parallel mit X', Y', Z' sind, dass dann die Ausdrücke (4) die Projectionen des aus diesen beiden Linien construirten Parallelogramms auf den Ebenen der Axen X', Y', Z' darstellen: sie sind deshalb proportional mit den Cosinus der Winkel, welche die Axe dieser Fläche mit X', Y', Z' macht, und ihre Zeichen beziehen sich auf die Richtung der Axe der Drehung, welche OJ auf dem kürzesten Wege nach OV führt.

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist gleich dem Product seiner zwei Seiten in den Sinus ihres Winkels: so dass die Linie, deren Projectionen die Ausdrücke (4) darstellen, und welche die Richtung der Axe der eben definirten Drehung hat, gleich $\omega v_r \sin\delta$ ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems, v_r die relative Geschwindigkeit des Beweglichen und δ den Winkel ihrer Richtung mit der augenblicklichen Axe bezeichnet. Multiplicirt man diesen Werth mit θ^2, so erhält man für die dritte Componente der Abweichung in der absoluten Bewegung des Punktes den schon gefundenen Werth:

$$\theta^2 \omega v_r \sin\delta.$$

Somit hat man den Satz der Nr. 58 und folgeweise auch den Satz der Nr. 61.

Bemerkung. — Ist die Bewegung des starren Systems bekannt, d. h. sind ξ, η, ζ, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' gegebene Functionen der Zeit, so kennt man mit der absoluten Bewegung des Punktes auch seine relative Bewegung, und umgekehrt. Denn in der That, sind x, y, z bekannte Functionen von t, so geben die Gleichungen (1) die Grössen x', y', z'; und umgekehrt geben sie x, y, z, wenn man x', y', z' als Functionen von t kennt.

Kennt man blos eine der beiden Trajectorien, die absolute oder die relative, so findet man aus ihr leicht die andere. Sind z. B. die beiden Gleichungen zwischen x, y, z gegeben, welche die absolute Trajectorie des Beweglichen bestimmen, so braucht man nur x, y, z, t zwischen diesen und den Gleichungen (1) zu eliminiren, und man erhält dadurch zwei Gleichungen zwischen x', y', z', welche die der relativen Trajectorie sind. Ebenso verfährt man, um die Gleichungen der absoluten Trajectorie zu finden, wenn die Gleichungen der relativen Trajectorie gegeben sind.

Es ist leicht, diese Betrachtungen dadurch zu verallgemeinern, dass man statt des Punktes ein starres System nimmt, dessen Bewegung durch drei seiner Punkte bestimmbar ist. Die relative Bewegung lässt sich stets aus der absoluten finden, und umgekehrt. Wir können aber hier nicht näher darauf eingehen.

Andere Betrachtung der relativen Bewegung.

65. Im Vorhergehenden haben wir die relative Bewegung als eine der Bewegungscomponenten eines Körpers oder materiellen Punktes betrachtet. Wir haben untersucht, wie die Bestimmungsstücke dieser Bewegung dazu dienen können, die Geschwindigkeit und Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung zu bestimmen; und daraus haben wir umgekehrt den Ausdruck dieser Grössen in der relativen Bewegung abgeleitet.

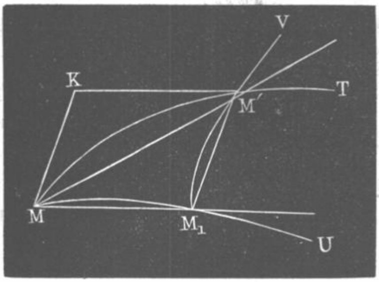
Man kann aber auch die relative Bewegung direct betrachten, und dabei auf mehre Weisen verfahren. Der Weg, den wir einschlagen werden, ist derjenige, dessen allgemeiner Gedanke sich bei den verschiedensten Aufgaben wiederholt, und er führt am natürlichsten auf die Betrachtung der absoluten Bewegung zurück.

Wir denken uns nämlich die beiden absoluten Bewegungen ausgeführt, verbinden darauf den Punkt oder Körper mit dem System, gegen welches seine relative Bewegung untersucht wird, und ertheilen ihrem Ganzen eine Bewegung, welche das System in seine alte Lage zurückbringt.

Indem wir diese neue Bewegung hinzufügen und die resultirende absolute Bewegung suchen, so ist diese letzte genau die fragliche relative Bewegung gegen das System. Dies ist die schon lange befolgte Methode, welche wir auf die beiden Hauptaufgaben bei der Bewegung eines Punktes anwenden werden.

66. Geschwindigkeit in der relativen Bewegung. — Es sei M eine Lage des Beweglichen, M' die Lage nach einer unendlich kleinen Zeit, M_1 die Lage, welche nach dieser Zeit der Punkt des Systems einnimmt, der mit dem Beweglichen in M coïncidirte. Verbinden wir diese Punkte durch Geraden und ergänzen das Parallelogramm $MM_1 M' K$. Betrachten wir jetzt den Punkt M' als mit dem Systeme verbunden, und führen wir dieses in seine alte Lage zurück. Dazu brauchen wir nur dem Ganzen eine Fortschreitung zu ertheilen, welche M_1 nach M und M' nach K führt, und dann eine Drehung um M, welche die neue Lage des Punktes M' nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung alterirt, da MK von der ersten Ordnung ist. Wir können also diese Grösse vernachlässigen und annehmen, dass M' in K bleibt. Nun haben die Richtungen der drei Geraden MK, MM', MM_1 zu Grenzen die Tangenten an der relativen und der absoluten Trajectorie des Beweglichen und an der Trajectorie des coïncidirenden Punktes des Systems, und die Grenzen der Verhältnisse dieser drei Geraden sind die Verhältnisse der Geschwindigkeiten auf diesen Trajectorien. Daraus folgt, wie vorher:

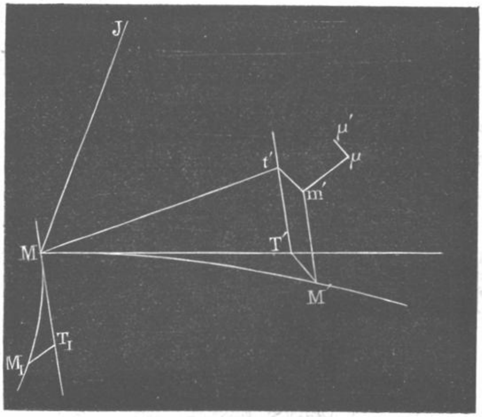
Fig. 16.



Die relative Geschwindigkeit ist die Resultante der absoluten Geschwindigkeit und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems.

67. **Abweichung in der relativen Bewegung.** — Die zu berechnende Grösse ist von der zweiten Ordnung; wir

Fig. 17.



können also nicht mehr die Drehung vernachlässigen, da diese eine Grösse zweiter Ordnung einführt.

Es sei M die Lage des Beweglichen in einem gewissen Augenblick, M' seine Lage nach einer unendlich kleinen Zeit θ, und T' die Lage, welche dann auf der Tangente ein Punkt einnehmen würde, der von M zugleich mit dem Beweglichen ausginge und sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit bewegte, welche dieses in M hat; $T'M'$ ist die Abweichung in der absoluten Bewegung. T_1M_1 sei die Abweichung nach der Zeit θ in der Bewegung desjenigen Punktes des Systems, welcher mit dem Beweglichen in M coïncidirte. Die Längen MT', MT_1 sind den Geschwindigkeiten in M auf den beiden Trajectorien proportional.

Um nun die Abweichung in der relativen Bewegung zu erhalten, könnte man in M die Tangente an die relative Trajectorie führen, auf ihr einen Punkt sich gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit während der Zeit θ bewegen lassen, während sie mit dem Systeme sich bewegt, mit welchem sie fest verbunden ist, und dann müsste man diesen Punkt in der Lage, in welche er auf diese Weise gekommen ist, mit M' verbinden: die gerade Verbindungslinie wäre in Grösse und Richtung die Abweichung in der relativen Bewegung.

Dieses vorausgeschickt, betrachten wir den Punkt M' als mit dem System verbunden, und führen dieses in seine anfängliche Lage zurück; die relative Abweichung wird dadurch in eine leicht zu bestimmende Lage gebracht.

Ertheilen wir zuerst dem System die beiden Fortschreitungen $M_1 T_1$ und $T_1 M$, welche den Punkt M_1 in seine alte Lage M zurückbringen. Ziehe ich $M'm'$ gleich und parallel mit $T_1 M$, $m'\mu$ gleich und parallel mit $M_1 T_1$, so erhalte ich μ als die Lage von M' nach den beiden Fortschreitungen.

Darauf muss man das System um die durch M gehende augenblickliche Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ω während der Zeit θ zurückdrehen, wobei der Punkt μ einen unendlich kleinen Bogen $\mu\mu'$ beschreibt, den wir sogleich bestimmen werden; μ' ist also die Lage des Beweglichen, wenn das System in seine alte Lage zurückgekehrt ist.

In dieser alten Lage befindet sich die Tangente an der relativen Trajectorie in der Richtung Mt', und zugleich ist die Länge Mt' der gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit während der Zeit θ durchlaufene Weg, während welcher Zeit auch die Längen MT' und MT_1 gleich $T't'$ auf den Tangenten der beiden anderen Trajectorien durchlaufen werden; woraus folgt, dass die relative Abweichung $t'\mu'$ ist.

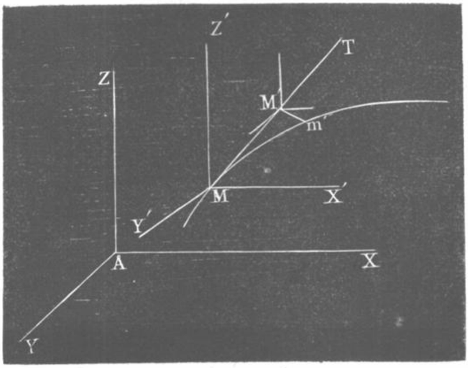
Aber $t'\mu'$ ist die Resultante der drei Linien $t'm'$ oder $T'M'$, $m'\mu$ oder $M_1 T_1$ und $\mu\mu'$. Die erste von ihnen ist die Abweichung in der absoluten Bewegung; die zweite die entgegengesetzt genommene Abweichung in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems.

Was die dritte Linie $\mu\mu'$ betrifft, die durch den Punkt μ beim Drehen um die augenblickliche Axe MJ beschrieben wird, so kann man dieselbe ersetzen durch jene, welche der Punkt t' beschreibt, der von μ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung entfernt ist. Ihre Richtung ist also senkrecht auf der Ebene JMt', welche durch die augenblickliche Axe und die relative Geschwindigkeit geht, und sie muss im Sinne der oben angegebenen Drehung genommen werden. Ihre Länge ist das Product des Drehungswinkels $\omega\theta$ in den Abstand des Punktes t' von MJ, welcher gleich ist dem Product aus Mt' und $\sin JMt'$; und da $Mt' = \theta v_r$, wenn v_r die relative Geschwindigkeit bezeichnet, so hat der Bogen $\mu\mu'$ zum Ausdruck $\theta^2 \omega v_r \sin JMt'$ mit Vernachlässigung der Unendlich-Kleinen von höherer Ordnung. Somit haben wir den Satz der Nr. 61 wieder gefunden.

---

68. Richtung und Grösse der Kraft nach der hervorgebrachten Bewegung. — Betrachten wir irgend eine Lage M eines Punktes von der Masse m, dessen Coordi-

Fig. 18.



naten x, y, z bestimmte Functionen der Zeit t sind. Wenn die Kraft, welche auf ihn wirkt, von diesem Augenblicke an zu wirken aufhörte, so würde er sich auf der Tangente MT bewegen mit der Geschwindigkeit v, die er in M hat. Nehmen wir daher drei Axen X', Y', Z' an, welche stets mit den festen parallel bleiben, und deren Ursprung auf MT mit der constanten Geschwindigkeit v fortschreitet, so wird die Bewegung des Punktes m in Bezug auf diese Axen identisch sein mit derjenigen Bewegung, welche dieser Punkt gegen feste Axen haben würde, wenn er sich ohne Geschwindigkeit in ihrem Ursprung befände, und dieselbe Kraft auf ihn wirkte. Die relative Bewegung des Punktes ist seine abweichende Bewegung, und die gerade Linie $M'm'$, welche er dabei beschreibt, ist seine Abweichung. Wenn also der Punkt in M keine Geschwindigkeit hätte, aber dieselbe Kraft wie bei der wirklichen Bewegung auf ihn wirkte, so würde er in unendlich kleiner Zeit eine mit der Abweichung gleiche und parallele Linie gleichförmig accelerirt beschreiben. Daraus ergeben sich die beiden nachstehenden Sätze:

1) Die Richtung der Kraft, welche in irgend einem Augenblicke auf das freie Bewegliche wirkt, ist die Richtung der Abweichung in diesem Punkt.

2) Die Intensität dieser Kraft, auf die Einheit der Masse bezogen, wird gemessen durch die Acceleration in der abweichenden Bewegung.

Aus dem ersten folgt ein anderer wichtiger Satz:

Die Richtung der Kraft in jedem Punkte der Trajectorie ist enthalten in der Krümmungsebene dieser Curve für diesen Punkt, denn die Abweichung, da sie stets einen Punkt der Curve und einen Punkt der Tangente verbindet, hat zur Grenzrichtung eine Gerade, welche in dieser Ebene liegt.

Die Richtung der Abweichung macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus den Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ proportional sind; und die Acceleration in der abweichenden Bewegung hat den Werth $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$. Wenn wir daher durch φ die beschleunigende Kraft bezeichnen, welche auf das Bewegliche wirkt, so haben wir:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2};$$

und die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen bildet, sind:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Daher sind die Componenten der beschleunigenden Kraft in Grösse und Zeichen:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Durch Multipliciren mit m erhält man die bewegende Kraft und ihre Componenten.

69. Tangentiale und normale Componente der Kraft. — Die tangentiale Componente der Acceleration in

der abweichenden Bewegung ist $\frac{d^2 s}{dt^2}$, und die normale Componente $\frac{v^2}{R}$. Die beschleunigende Kraft und die Acceleration haben einerlei Richtung und einerlei Maass. Also ist auch $\frac{d^2 s}{dt^2}$ die tangentiale Componente der beschleunigenden Kraft und $\frac{v^2}{R}$ ihre nach dem Mittelpunkt der Krümmung gerichtete normale Componente oder die Centripetalkraft. Die entsprechenden Componenten der bewegenden Kraft für die Masse m sind $m\frac{d^2 s}{dt^2}$, $m\frac{v^2}{R}$.

70. **Bewegung durch eine die Trajectorie beständig tangirende Kraft.** — In irgend einer Lage des Beweglichen sind die Cosinus der Winkel, welche die Kraftrichtung mit den Axen bildet, proportional mit $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$; und nach der Voraussetzung sollen diese Winkel denjenigen Winkeln gleich sein, welche die in diesem Punkt an die Trajectorie gezogene Tangente mit den Axen bildet, und deren Cosinus proportional sind mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Man hat also die Gleichungen:

$$\frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)}.$$

Diese geben durch Integriren, wenn man mit c, c', c'' drei willkürliche Constanten bezeichnet:

$$\log c\frac{dx}{dt} = \log c'\frac{dy}{dt} = \log c''\frac{dz}{dt},$$

folglich:

$$c\frac{dx}{dt} = c'\frac{dy}{dt} = c''\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

Integrirt man neuerdings und bezeichnet durch $\alpha, \alpha', \alpha''$ drei neue willkürliche Constanten, so kommt:

$$cx + \alpha = c'y + \alpha' = c''z + \alpha''. \tag{2}$$

Da also die Coordinaten des Beweglichen zweien Gleichungen ersten Grades genügen, so folgt, dass die Trajectorie eine Gerade ist.

Die Anfangslage des Beweglichen ist ein Punkt dieser Geraden. Die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit bestimmen vermöge (1) die Verhältnisse der Coëfficienten c, c', c''. Die Gerade ist folglich bestimmt, da man ihre Richtung und einen ihrer Punkte kennt.

71. **Bewegung durch eine zur Trajectorie beständig normale Kraft.** — Die bekannte Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Geraden auf einander giebt unmittelbar:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Die erste Seite, verdoppelt, ist die Ableitung von:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

oder von v^2, wenn v die Geschwindigkeit, wie immer, bezeichnet. Bedeutet daher v_0 ihren Anfangswerth, so hat man:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v_0^2.$$

Um die Bewegung zu bestimmen, wären noch zwei Gleichungen nothwendig; uns kam es aber blos darauf an, den nachstehenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Wenn die Richtung der Kraft, welche einen materiellen Punkt angreift, immer auf seiner Trajectorie normal steht, so ist die Bewegung dieses Punktes gleichförmig.

Anmerkung. — Die Resultate der zwei letzten Nummern kann man auch aus den Formeln für die tangentiale und normale Componente der Kraft ableiten.

In der That, tangirt diese Kraft beständig die Trajectorie, so ist ihre Normalcomponente Null, also in jedem Punkte $\frac{v^2}{R}=0$ oder $R=\infty$. Die Linie ist daher gerade, weil ihr Krümmungsradius in jedem Punkte unendlich.

Und steht die Kraft immer normal, so ist ihre Tangentialcomponente $\frac{d^2s}{dt^2}$ immer Null, folglich $\frac{ds}{dt}$, oder die Geschwindigkeit, constant.

72. **Bewegung durch eine gegen den Radius vector senkrechte Kraft.** — Betrachten wir noch den Fall, wo die Kraft senkrecht steht auf einer, durch einen festen Punkt gehenden Linie. Dies findet z. B. statt für einen Punkt, der auf einer Geraden bleiben muss, die sich nach irgend einem Gesetz um einen ihrer Punkte dreht, und deren normaler Druck die einzige auf den Punkt wirkende Kraft ist.

Die gegebene Bedingung wird dann ausgedrückt durch die Gleichung:

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Setzen wir:

$$x^2+y^2+z^2=r^2;$$

daraus folgt:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt}.$$

Durch nochmaliges Differenziiren kommt:

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

und diese Gleichung reducirt sich vermöge der ersten auf:

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Nennt man ω den vom Radius vector im Raume beschriebenen Winkel, so hat man:

$$ds^2=dr^2+r^2d\omega^2.$$

Und setzt man diesen Werth von ds^2 in die vorige Gleichung, so wird diese zu:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Wenn das Gesetz der Winkelbewegung durch eine Gleichung zwischen ω und t gegeben wird, so kann man aus dieser Gleichung ω und aus der vorstehenden r als Function von t bestimmen. Die Grösse von r hängt nur von der Beziehung zwischen ω und t ab, und nicht von der Leitlinie des Kegels, welchen die Gerade durch ihre Drehung beschreibt. Würde man z. B. die Kegelfläche durch Abwickeln zu einer Ebene machen, so würde der bewegliche Punkt, bei demselben Gesetze zwischen ω und t, in dieser Ebene die abgewickelte Curve durchlaufen.

Arbeit einer Kraft. — Lebendige Kraft.

73. Um zu begreifen, wie man zu der Bezeichnung Arbeit gekommen ist, denken wir uns, man lasse durch Menschen in gerader Linie und mit gleichförmiger Bewegung Erz aus der Tiefe eines Schachts auf die Oberfläche emporheben. Jeder von diesen Menschen wird beständig eine dem Gewicht des Körpers, den er hebt, gleiche Anstrengung machen; die Zeit, während welcher man ihn anwenden muss, wird proportional sein dem Totalgewichte, das er heben, und der Höhe, auf welche er es heben soll. Also wird das, was man gewöhnlich die Arbeit eines dieser Menschen nennt, und folglich auch die Ausgabe, eine Grösse sein, welche proportional ist diesem Gewichte und der Höhe, d. h. proportional der verticalen Kraft, welche wirkt, und der Strecke, um welche ihr Angriffspunkt sich hebt.

Betrachtungen dieser Art sind es, welche veranlasst haben, dass man den Namen Arbeit einer Kraft dem Producte dieser Kraft in den Weg giebt, welcher ihr Angriffspunkt durchläuft, wenn er in der Richtung der Kraft verrückt wird.

In dem weniger einfachen Falle, wo der Angriffspunkt der Kraft sich nicht in der Richtung dieser Kraft bewegt, hat man erkannt, dass der hervorgebrachte Nutzen und die verursachte Ausgabe proportional sind dem Producte der Kraft in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt im Sinne der Kraft durchläuft, oder proportional dem Producte der Kraft in die Projection des Wegs auf die Kraftrichtung. Man giebt diesem Product allgemein den Namen Arbeit der Kraft.

Nach dieser Definition wird die Arbeit durch die Zahl 1 gemessen, wenn die Kraft der Einheit gleich ist, und ihr Angriffspunkt die Längeneinheit im Sinne der Kraft zurücklegt. Die Einheit der Arbeit ist also diejenige Arbeit, welche dem Gewichte 1 Kilogramm entspricht, das um 1 Meter vertical gehoben wird.

Die Arbeit einer Kraft ist positiv, wenn die Projection des Wegs die Richtung der Kraft hat, oder wenn der Weg einen spitzen Winkel mit dieser Richtung macht. Im entgegengesetzten Falle, also wenn dieser Winkel stumpf wird, ist die Arbeit negativ. Sie ist Null, wenn der Winkel recht ist, d. h. wenn der Punkt sich weder im Sinne der Kraft noch im entgegengesetzten Sinne bewegt.

Wenn die Kraft nicht constant ist, so muss man, um die hervorgebrachte Arbeit nach der vorigen Definition zu berechnen, die Bewegung in unendlich kleine Theile zerlegen, denn innerhalb eines solchen Intervalls darf man die Kraft als constant betrachten. Die totale Arbeit ist die Summe der elementaren Arbeitsgrössen, also das zwischen den beiden Grenzen genommene Integral $\int P\, ds \cos\varphi$, worin P die variable Kraft, ds das Element der beschriebenen Curve und φ den Winkel der Richtung der Bewegung mit der Richtung der Kraft P bezeichnet.

Auf diese Weise verstehen wir immer in Richtung und Grösse die elementare oder endliche Arbeit irgend einer Kraft.

74. Neuer Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. — Wie man sieht, ist das virtuelle Moment einer Kraft von derjenigen elementaren Arbeitsgrösse dieser Kraft nicht verschieden, welche der virtuellen Verrückung ihres Angriffspunktes entspricht. Man kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in nachstehende Fassung bringen:

Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewicht ist, so wird die algebraische Summe der Arbeitsgrössen aller Kräfte Null bei jeder unendlich kleinen, mit den Verbindungen des Systems verträglichen Verrückung.

Und wenn umgekehrt diese Summe Null wird bei allen möglichen Verrückungen, so ist das System im Gleichgewicht.

75. Arbeit der Resultante von beliebigen Kräften. — Kräfte, welche ein starres System angreifen und eine Resultante haben, werden in das Gleichgewicht gebracht, wenn man eine mit dieser Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft einführt. Die Summe der virtuellen Arbeitsgrössen wird dann Null, folglich ist die virtuelle Arbeit der Hülfskraft, mit Ausnahme des Zeichens, gleich der Summe der Ar-

beiten der gegebenen Kräfte. Da nun die Hülfskraft und die Resultante gleich und entgegengesetzt sind, also gleiche und entgegengesetzte Arbeitsgrössen geben, so kommt man zu nachstehender Folgerung:

Die Arbeit der Resultante von Kräften, welche ein starres System angreifen, ist in Grösse und Zeichen gleich der Summe der Arbeiten der Componenten bei jeder unendlich kleinen Verrückung dieses Systems.

Die Kräfte werden dabei als positiv betrachtet. Oft ist es aber nützlich die Componenten der Kräfte parallel mit den Coordinatenaxen einzuführen, und dann erhält man mit positiven und negativen Kräften zu thun. Auf Seite 124 des ersten Theils ist gezeigt, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ die, positive oder negative, elementare Arbeitsgrösse einer Kraft mit den, positiven oder negativen, Componenten X, Y, Z ist, wenn dx, dy, dz die, positiven oder negativen, Componenten der Verrückung des Angriffspunktes sind.

76. Lebendige Kraft. — Betrachten wir zuerst die geradlinige Bewegung eines Punktes von der Masse m, auf welchen eine bewegende Kraft F wirkt. Man hat die Gleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Die elementare Arbeit dieser Kraft, welche dem Wege dx entspricht, ist Fdx; und die vorstehende Gleichung giebt:

$$(1) \qquad Fdx = m \frac{d^2 x}{dt^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\, d.\, mv^2,$$

wenn v die Geschwindigkeit oder $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet. Man sieht also, dass der unendlich kleine Zuwachs der Arbeit der Kraft gleich ist dem halben Zuwachse der Grösse mv^2. Man nennt diese Grösse mv^2 die lebendige Kraft des Beweglichen.

Die Gleichung (1) lässt sich jetzt in folgender Weise aussprechen:

In der geradlinigen Bewegung eines freien Punktes ist die elementare Arbeitsgrösse der wirkenden Kraft gleich dem halben zugehörigen Incremente der lebendigen Kraft dieses Punktes.

Variirt die Kraft F auf irgend eine Weise mit der Lage des Punktes und auch mit der Zeit, so bleibt der vorstehende Satz immer wahr für die unendlich kleinen Intervalle, in welche man die Bewegung zerspalten kann. Bezeichnen v_0 und v die Werthe der Geschwindigkeit zu Anfang und Ende eines endlichen Intervalls, so erhält man durch Summiren der Gleichungen (1), welche sich auf alle Elemente dieses Intervalls beziehen:

$$(2) \qquad {}^1/_2\, m v^2 - {}^1/_2\, m v_0{}^2 = \int F\, dx.$$

Man kann die Summe $\int$ ausführen, wenn F nur von x abhängt; und bezeichnet man in diesem Falle durch $\varphi(x)$ diejenige Function, von welcher F die Ableitung ist, und durch x_0 und x die extremen Werthe der Abscisse, so wird die vorstehende Gleichung

$$ {}^1/_2\, m v^2 - {}^1/_2\, m v_0{}^2 = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

In allen möglichen Fällen ist aber $\int F\, dx$ die Summe der in allen unendlich kleinen Intervallen hervorgebrachten, positiven oder negativen, Arbeitsgrössen und folglich die in dem endlichen Intervall hervorgebrachte totale Arbeit, also kann man die Gleichung (2) so aussprechen:

In der geradlinigen Bewegung eines freien materiellen Punktes ist die Arbeit der Kraft in irgend einem Intervall gleich dem halben entsprechenden Zuwachse der lebendigen Kraft des Beweglichen.

77. Beziehung zwischen der lebendigen Kraft und Arbeit in der allgemeinen Bewegung eines Punktes. — 1. Denken wir uns zuerst den Punkt frei und eine bewegende Kraft F auf ihn wirkend, deren Componenten parallel mit den Axen X, Y, Z seien. Die Gleichungen seiner Bewegung sind, wenn m seine Masse bezeichnet:

$$(1) \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X,\; m\,\frac{dy^2}{dt^2} = Y,\; m\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Nun ist $Xdx + Ydy + Zdz$ nach Nro. 75 die Arbeit der Kraft F für eine Verrückung, welche die Componenten dx, dy, dz hat. Durch Multipliciren der Gleichungen (1) respective mit dx, dy, dz und Addiren erhält man:

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)$$

oder:

(2) $$Xdx + Ydy + Zdz = \tfrac{1}{2}\,d\,.\,mv^2.$$

Das erste Glied ist die Arbeit der Kraft F oder die algebraische Summe der Arbeitsgrössen der Kräfte, von denen F die Resultante ist. Die Gleichung (2) drückt also den nachstehenden Satz aus:

In der Bewegung eines freien Punktes ist die Summe der elementaren Arbeitsgrössen aller Kräfte, welche ihn angreifen, gleich dem halben zugehörigen Incremente der lebendigen Kraft des Beweglichen.

Da diese Gleichheit für jedes unendliche kleine Intervall stattfindet, so besteht sie für irgend eine Summe solcher Intervalle, also für ein endliches Intervall; woraus der Satz folgt:

Die Summe der Arbeitsgrössen aller Kräfte, welche einen freien materiellen Punkt angreifen, während irgend einer endlichen Zeit, ist gleich dem halben Zuwachse der lebendigen Kraft dieses Punktes während desselben Intervalls.

Wenn die totalen Componenten X, Y, Z die partiellen Ableitungen einer und derselben Function $\varphi(x,y,z)$ sind, so wird der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ gleich $d.\varphi(x,y,z)$, und die Gleichung (2) wird integrabel.

Bezeichnen x_0, y_0, z_0, v_0 die Werthe von x, y, z, v zu Anfang des beliebigen Intervalls, das man betrachtet, so giebt die Gleichung (2), wenn man sie bis zu irgend einer, den Coordinaten x, y, z entsprechenden Grenze integrirt:

(3) $$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \varphi(x,y,z) - \varphi(x_0,y_0,z_0).$$

2. Denken wir uns jetzt, der Punkt sei genöthigt auf einer festen Curve oder Fläche zu bleiben, an welcher er sich nicht reibt, und die folglich nur eine zu seiner Trajectorie normale Kraft ausübt. X, Y, Z sollen wieder die totalen Componenten aller äusseren Kräfte bezeichnen, welche auf den Punkt wirken.

Führt man zu diesen Kräften diejenige ein, welche die Curve oder Fläche ausübt, so darf man den Punkt als frei betrachten, und folglich die Gleichung (2) anwenden, indem man diese normale Kraft unter allen denjenigen einbegreift, welche in das erste Glied eingehen. Nun ist aber die elementare Arbeit einer zur Trajectorie normalen Kraft Null, weil die Projection des unendlich kleinen Bogens auf die Normale Null ist. Es bleibt daher in dem ersten Gliede nur die Arbeit der äusseren Kräfte, und man hat also auch in diesem Falle:

$$(4) \qquad X dx + Y dy + Z dz = \tfrac{1}{2} d \,.\, m v^2;$$

und wenn:

$$X dx + Y dy + Z dz = d \,.\, \varphi(x, y, z),$$

so folgt:

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Demnach ist die Beziehung zwischen der Arbeit der äusseren Kräfte und der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes dieselbe, ob der Punkt frei ist oder sich auf einer festen Curve oder Fläche ohne Reibung bewegt.

Wenn die Schwere die einzige äussere Kraft ist, so wird:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg,$$

und die Gleichung (5) liefert:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = mg(z_0 - z).$$

Von den Kräften, welche die relative Bewegung eines Punktes hervorbringen können.

78. Die Aufgabe, welche wir uns stellen, ist diese:

Gegeben sind die Kräfte und alle Bedingungen, durch welche die absolute Bewegung eines materiellen Punktes bestimmt ist; gegeben ist ferner die absolute Bewegung eines starren Systems: man soll finden die Kräfte und alle Bedingungen, welche eine absolute Bewegung dieses Punktes bestimmen würden, die identisch wäre mit seiner relativen Bewegung gegen das System.

Wir wollen also die Betrachtung der relativen Bewegung zurückführen auf die einfachere Betrachtung der absoluten Bewegung; und wir suchen, wie man die Bestimmungsstücke der absoluten Bewegung des Punktes modificiren muss, damit die daraus hervorgehende absolute Bewegung identisch sei mit derjenigen Bewegung, welche dieser Punkt in Bezug auf das System hat.

Wenn AX, AY, AZ drei feste Coordinatenaxen und $A'X'$, $A'Y'$, $A'Z'$ drei mit dem System fest verbundene Axen sind, so wird, indem wir die Lagen des Punktes auf beide Axen beziehen, seine absolute Bewegung bestimmt durch die successiven Werthe von x, y, z, und seine relative Bewegung durch die successiven Werthe von x', y', z'.

Der gegebene Anfangszustand des Punktes und des Systems bestimmt den relativen Anfangszustand, d. h. die Anfangswerthe von $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$.

Somit kennt man schon den Anfangszustand des Punktes in der absoluten Bewegung, die identisch sein würde mit seiner relativen Bewegung. Es bleibt also nur die beschleunigende Kraft zu bestimmen, welche man in jedem Augenblick an dem Punkt in dieser absoluten Bewegung anbringen muss.

Wir wissen, wie in jeder absoluten Bewegung die beschleunigende Kraft in Richtung und Grösse durch die Abweichung bestimmt wird. Wenden wir diese Regel auf die relative Abweichung des Punktes an, welche die Abweichung in der gesuchten absoluten Bewegung ist, so lernen wir diejenige Kraft kennen, welche auf den in einem identischen Anfangszustand mit seinem relativen Anfangszustand befindlichen Punkt wirken müsste, damit dieser eine absolute Bewegung erhielte, die identisch wäre mit seiner relativen Bewegung. Diese Kraft werden wir mit dem Namen relative Kraft bezeichnen. Um sonach die Lösung unserer Aufgabe zu erhalten, brauchen wir uns nur die in Nr. 61 angegebene Zerlegung der relativen Abweichung zurückzurufen.

Da diese Zerlegung nach demselben Gesetze gemacht ist wie die Zerlegung von Kräften, so würden, wenn wir die Kraft durch die Abweichung darstellten, auch die Componenten der Kraft durch die Componenten der Abweichung dargestellt sein. Aber nicht durch die Abweichung selbst messen wir die beschleunigende Kraft, sondern durch die Acceleration derjenigen Bewegung, vermöge welcher wir uns die Abweichung beschrieben denken, also durch den Quotienten dieser Abweichung durch $\frac{\theta^2}{2}$, wenn θ das der Abweichung entsprechende unendlich kleine Zeitintervall bezeichnet. Folglich erhält man die Componenten der relativen beschleunigenden Kraft, indem man mit $\frac{\theta^2}{2}$ die Componenten der relativen Abweichung dividirt. Man hat daher den nachstehenden Satz:

Die relative beschleunigende Kraft ist die Resultante von drei anderen beschleunigenden Kräften.

Die erste ist die gegebene Kraft selbst.

Die zweite ist die Trägheitskraft, welche durch den Punkt des Systems entwickelt wird, der mit dem Beweglichen in dem Augenblick, den man betrachtet, coïncidirt.

Die dritte hat den Werth $2\omega v_r \sin\delta$, wenn v_r die relative Geschwindigkeit des Beweglichen, ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems um seine augenblickliche Drehaxe und δ den Winkel der Richtung der relativen Geschwindigkeit mit der augenblicklichen Drehaxe bezeichnet. Die Richtung dieser dritten Kraft steht senkrecht auf der durch die augenblickliche Axe und die relative Geschwindigkeit gehenden Ebene, und hat den der augenblicklichen Drehung entgegengesetzten Sinn: mit anderen Worten, sie ist die Axe einer Drehung, welche auf dem kürzesten Wege die Richtung der relativen Geschwindigkeit in die Richtung der augenblicklichen Axe des Systems bringen würde.

Diese Zerlegung der relativen Kraft verdankt man Coriolis, welcher die zweite Componente, im entgegengesetzten Sinne genommen, Zugkraft, und die dritte Componente zusammengesetzte Centrifugalkraft genannt hat. Die relative Bewegung war zuerst von Newton bei den Planeten betrachtet worden, indem er für die beweglichen Axen eine blos fortschreitende Bewegung annahm. Clairaut hatte später die relative Bewegung in einer Ebene untersucht für irgend eine Bewegung der Axen in dieser Ebene; aber er hatte einen Fehler begangen, welcher vor Kurzem von Bertrand berichtigt wurde. Coriolis ist der Erste, welcher den allgemeinen Ausdruck der fingirten Kräfte gegeben hat, deren Einführung die relative Bewegung auf eine absolute zurückführt.

79. Man muss aber wohl bemerken, dass diese fingirten

Kräfte, da sie nicht gegeben sind und von der relativen Bewegung selbst durch die Grössen v_r und δ abhängen, das Problem äusserst verwickelt machen. Diese Zerlegung der relativen Kraft, die in verschiedenen Aufgaben sehr nützlich sein kann, ist nichts Anderes als eine Interpretation der Differentialgleichungen, welche man unmittelbar aufstellen würde, um zu der Untersuchung der Gleichungen der relativen Bewegung überzugehen; und auf diesem Wege ist Coriolis zu dem Ausdruck der Componenten der relativen Kraft gelangt. In dem Falle, wo durch die Natur der Daten die absolute Bewegung des Punktes vollständig bestimmt werden kann, muss man nicht die relative Kraft anwenden, sondern die absolute Bewegung bestimmen; man ist dann auf eine Combination bekannter Bewegungen zurückgeführt, also auf eine Aufgabe der Phoronomie. In den verwickeltsten Fällen setzt sich das System der zu behandelnden Gleichungen zusammen aus den drei Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes und einer oder zwei Bedingungsgleichungen, worin vorkommen können die absoluten Coordinaten x, y, z, die relativen Coordinaten x', y', z' und andere von der Bewegung des Systems abhängende Grössen; ausserdem hat man die Gleichungen, welche die Coordinaten in den beiden Systemen verknüpfen, und deren Coëfficienten gegebene Functionen der Zeit sind.

Wenn der Punkt frei ist, oder die Bedingungsgleichungen nur von x, y, z abhängen, so kann die absolute Bewegung für sich bestimmt werden; nicht aber dann, wenn diese Gleichungen von der Bewegung des Systems abhängen, wie es beinahe immer der Fall ist.

80. Der besondere Fall, wo das System nur eine fortschreitende Bewegung hat. — Hat das System der beweglichen Axen nur eine fortschreitende Bewegung, in Folge welcher alle Punkte gleiche und parallele, nach irgend einem Gesetz variirende Geschwindigkeiten haben und irgend welche identische Curven beschreiben, so wird die Winkelgeschwindigkeit ω Null, und die dritte Componente der relativen Kraft verschwindet. Der allgemeine Satz reducirt sich dann auf folgenden:

Wenn die beweglichen Axen beständig zu sich parallel bleiben, so ist die relative beschleunigende

Kraft die Resultante der gegebenen beschleunigenden Kraft und einer gleichen und entgegengesetzten mit derjenigen Kraft, welche die Bewegung irgend eines Punktes des Systems bestimmen würde.

Auf diesen besonderen Fall beschränkt man sich gewöhnlich in den Elementarbüchern, er genügt für die Berechnung der relativen Bewegung der Planeten. Den vorstehenden Satz kann man unmittelbar erhalten, auf dieselbe Weise wie wir den allgemeinen Satz erhalten haben.

Ist die fortschreitende Bewegung des Systems geradlinig und gleichförmig, so verschwindet auch die zweite Componente, und die relative Kraft ist keine andere als die gegebene Kraft selbst.

81. Der Fall, wo das System eine gleichförmige Rotationsbewegung hat. Anwendung auf die Erde. — In diesem Falle ist die Trägheitskraft eines Punktes des starren Systems oder die zweite Componente der relativen Kraft genau die Centrifugalkraft in diesem Punkte; die dritte Componente ist immer $2\omega v_r \sin\delta$. Sehen wir zu, was diese Ausdrücke in dem Falle werden, wo das starre System die Erde ist.

Die Bewegung um die Sonne wird hervorgebracht durch eine an allen Molekeln wirkende Kraft, welche für gleiche Massen, wie diese auch in der Erde liegen mögen, als dieselbe betrachtet werden kann: sie ändert deshalb die relativen Bewegungen nicht in schätzbarem Grade, und wir können davon absehen. Wir denken uns also, dass die Erde eine gleichförmige Rotation um ihre unbewegliche Axe habe; sie vollendet die ganze Rotation in einem Sterntag, d. h. in einer durch die Zahl 86164 ausgedrückten Zeit, woraus folgt

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073,$$

was eine sehr kleine Grösse ist. Der Winkel δ ist derjenige, den die relative Geschwindigkeit mit der Erdaxe macht, oder das Complement des Winkels, den sie mit dem Aequator macht, so dass $v_r \sin\delta$ die Projection der relativen Geschwindigkeit auf den Aequator darstellt.

Nimmt man die relative Geschwindigkeit wenig beträchtlich an, so ist die dritte Componente sehr klein im Vergleich zu den beiden anderen; und wenn man sie in einer ersten

Annäherung vernachlässigt, so kommt man zu folgendem Satz:

Die scheinbare Bewegung eines Punktes auf der Erdoberfläche kann berechnet werden, indem man die Erde als unbeweglich annimmt und zu den Kräften, welche in der That auf diesen Punkt wirken, die Centrifugalkraft hinzufügt.

Wenn die Anziehung der Erde die einzige auf den Punkt wirkende Kraft ist, so erhält man das Resultat, welches wir schon in Nr. 214 des ersten Theils bei Berechnung der Kraft gefunden haben, welche die Körper im Zustande der Ruhe sollicitirt, wenn man die Rotation der Erde berücksichtigt.

Die Componente, welche wir in dem obigen Satze vernachlässigt haben, verursacht Störungen, von welchen wir hier nicht näher sprechen. Sie ist die Ursache des seit langer Zeit bemerkten Phänomens der Abweichung der Körper gegen Osten, wenn man sie ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen lässt. Sie bringt ferner die Bewegung der Schwingungsebene des Pendels hervor, von welcher Poisson glaubte, dass sie wegen der Kleinheit dieser Kraft unmerklich sein müsse, welche aber Foucault's schöne Versuche uns kennen gelehrt haben.

82. Allgemeine Bemerkung. — Da die relative Bewegung übereinstimmt mit einer absoluten Bewegung, in welcher der Anfangszustand derselbe wäre wie der relative Anfangszustand, und in welcher die Kraft die Resultante der gegebenen Kraft und der beiden fingirten Kräfte, d. h. die relative Kraft sein würde, so folgt, dass alle für die absolute Bewegung eines freien Punktes bewiesenen Sätze auch noch Geltung haben in der relativen Bewegung, wenn man den Punkt als unter dem Einflusse der relativen Kraft stehend betrachtet. Wir werden einige Beispiele davon geben.

83. Gesetz der Flächen in der relativen Bewegung. — Wenn die relative Kraft eines Beweglichen beständig durch einen und denselben Punkt des bewegten Systems geht, so ist die relative Trajectorie des Beweglichen eben, und der von dem constanten Punkte zu dem Beweglichen gehende Strahl beschreibt relative Flächen, welche den entsprechenden Zeiten proportional sind.

Umgekehrt

Wenn der aus einem constanten Punkte des Systems zu dem Beweglichen gehende Strahl Flächen beschreibt, deren Projectionen auf drei rechtwinklige mit dem System verbundene Ebenen proportional den Zeiten wachsen; oder mit anderen Worten, wenn die relative Trajectorie eines Beweglichen eben ist, und die Flächen, welche der von einem constanten Punkt dieser Ebene zu dem Beweglichen gehende Strahl beschreibt, proportional der Zeit wachsen, so geht die relative auf das Bewegliche wirkende Kraft immer durch diesen constanten Punkt.

84. Gleichung der lebendigen Kraft in der relativen Bewegung eines freien Punktes. — Betrachtet man die mit der relativen Bewegung identische absolute Bewegung, so ist während einer unendlich kleinen Zeit das halbe Increment der lebendigen Kraft gleich der Arbeit während dieser Zeit. Mit Einführung der Benennungen der relativen Bewegung ist also die elementare Arbeit der relativen Kraft gleich dem derselben Zeit entsprechenden halben Incremente der relativen lebendigen Kraft. Die Arbeit einer Kraft ist gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten, und die relative Arbeit der dritten Componente der relativen Kraft ist Null, weil diese Componente auf der relativen Geschwindigkeit und somit auf der relativen Trajectorie senkrecht steht. Man kann demnach folgenden Satz aussprechen:

In der relativen Bewegung eines freien Punktes ist das halbe Increment der lebendigen Kraft während eines unendlich kleinen Intervalls gleich der entsprechenden Arbeit der wirklichen Kraft plus der Arbeit derjenigen Trägheitskraft, welche der Punkt entwickeln würde, wenn er in dem Augenblick, den man betrachtet, mit dem System verbunden wäre.

85. Relative Bewegung eines unfreien Punktes. — Betrachten wir jetzt den Fall, wo der Punkt, dessen relative Bewegung man sucht, nicht vollkommen frei ist. Er kann einer oder zwei Bedingungsgleichungen unterworfen sein, und diese können auf irgend eine Weise die Zeit sowie die

absoluten und relativen Coordinaten des Punktes enthalten. Da die Gleichungen für die Transformation der Coordinaten es möglich machen, die einen durch die anderen auszudrücken, so können wir annehmen, dass diese Bedingungsgleichungen nur die Zeit und z. B. die relativen Coordinaten enthalten. Der Punkt wird dann durch jede Gleichung genöthigt, auf einer mit der Zeit variablen Fläche zu bleiben, die in jedem Augenblick der Gestalt und Lage nach in Bezug auf das System der beweglichen Axen gegeben ist.

Diese Oberfläche übt in jedem Augenblick eine normale Kraft aus; und nimmt man diese zu den auf den Punkt wirkenden Kräften hinzu, so kann man die Fläche wegnehmen und den Punkt als vollkommen frei betrachten, wenn nur diese einzige Bedingung vorhanden war. Daraus folgt nachstehender Satz:

Ist das Bewegliche gezwungen, auf einer gegebenen, in Gestalt und Lage variablen Fläche zu bleiben, so bestimmt sich die relative Kraft wie in dem Falle eines freien Punktes, sofern man zu der gegebenen Kraft eine unbestimmte Kraft hinzunimmt, die normal ist zu dieser Fläche in dem Punkte, wo sich das Bewegliche in dem betrachteten Augenblick befindet.

Hat man statt der einen Oberfläche zwei, so verfährt man ebenso für die zweite und erhält eine zweite unbestimmte, zu der zweiten Fläche normale Kraft. Diese zwei Kräfte setzen sich in eine der Grösse nach unbestimmte Kraft zusammen, welche liegen muss in der Normalebene der Durchschnittscurve der beiden Flächen.

Man sieht, dass in dem Falle, wo der Punkt nur einer Bedingungsgleichung unterworfen ist, dadurch eine neue unbekannte Grösse eingeführt wird, zugleich aber eine bekannte Gleichung zwischen seinen Coordinaten und der Zeit. Ist der Punkt zwei Gleichungen unterworfen, so treten zwei Unbekannte auf. Man hat also immer eine gleiche Zahl von Unbekannten und Gleichungen.

Nach der allgemeinen Bemerkung, welche wir gemacht haben bezüglich der Ausdehnung der in der absoluten Bewegung bewiesenen Sätze auf die relative Bewegung, ist es fast unnöthig zu sagen, dass die Gleichung der relativen lebendigen Kraft Geltung hat, wenn der Punkt auf einer Fläche oder Curve von constanter Form bleiben muss, die mit dem System der beweglichen Axen unveränderlich verbunden ist. Und in der That, da die von ihr ausgeübte Kraft auf der relativen Trajectorie des Beweglichen normal steht, so giebt sie eine elementare Arbeit gleich Null.

Relative Bewegung eines Systems.

86. Wenn alle materiellen Punkte, welche das System zusammensetzen, vollkommen frei und unabhängig von einander wären, so würde die Theorie der relativen Bewegung eines freien Punktes anwendbar sein, und man brauchte nur in jedem Punkte die beiden fingirten Kräfte der Nr. 78 einzuführen, um die relative Bewegung des Systems auf eine absolute zurückzubringen.

87. Nehmen wir jetzt an, es seien gewisse Punkte des Systems genöthigt, auf gegebenen Oberflächen oder Curven zu bleiben, die fest oder beweglich, von constanter oder variabler Form sein können. Daraus resultiren für diese Punkte unbekannte, gegen diese Flächen oder Curven normale Kräfte. Wenn man die Werthe derselben kennte, so könnte man sie zu den gegebenen Kräften hinzunehmen und die Punkte als frei betrachten, und dann würde man sich in dem vorigen Falle befinden. Man brauchte nachher nur in jedem Punkte die beiden von der Bewegung der Axen abhängenden fingirten Kräfte einzuführen, um auf eine absolute Bewegung zurückzukommen. Aber, obgleich jene normalen Kräfte unbekannt sind, so kann man sie doch so einführen, wie wenn sie bekannt wären. Die Zahl der zu bestimmenden Grössen wird dadurch vermehrt; aber die Zahl der Gleichungen wird es um ebensoviel. Denn die Coordinaten eines Punktes, der auf einer Oberfläche bleiben muss, müssen beständig der Gleichung dieser Fläche genügen. Muss der Punkt auf zwei Flächen, also auf einer gegebenen Curve bleiben, so treten dadurch zwei unbekannte, gegen diese Flächen normale Kräfte auf; zugleich aber hat man zwei Gleichungen zwischen seinen Coordinaten: so dass die Zahl der Gleichungen und die Zahl

der Unbekannten immer um gleichviel zunehmen, und das Problem vollständig bestimmt ist. Die Gleichungen dieser Flächen oder Curven können als Functionen der Zeit und der absoluten oder relativen Coordinaten gegeben sein, und man kann sie mit Hülfe der Formeln für die Transformation der Coordinaten ausdrücken in demjenigen dieser beiden Systeme, in welchem man will.

88. Sind zwei Punkte des Systems genöthigt in constanter Entfernung von einander zu bleiben, so entspringen hieraus zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche längs der Geraden gerichtet sind, die beide Punkte verbindet, und welche respective an jedem von beiden Punkten angreifen. Führt man diese Kräfte ein, so kann man die Punkte als frei betrachten; aber man muss ausdrücken, dass ihre Entfernung constant ist: was eine neue Gleichung liefert zugleich mit der neuen Unbekannten, welche die Grösse der Kraft ist. Diese Bedingungen können sich beliebig vervielfältigen. Derselbe Punkt kann mit beliebig vielen anderen Punkten verbunden und genöthigt sein, auf einer oder zwei Flächen zu bleiben. Jede dieser Bedingungen führt immer eine Unbekannte und eine Gleichung ein, und somit ist die Aufgabe bestimmt. Aus dem Vorstehenden folgt nun der Satz:

Wenn verschiedene Punkte eines bewegten Systems genöthigt sind in constanten Entfernungen von einander zu bleiben und sich auf Oberflächen oder Linien von constanter oder variabler Lage und Gestalt zu befinden, so ist die Bewegung dieses Systems in Bezug auf drei bewegliche Axen identisch mit einer absoluten Bewegung, welche man in folgender Weise gegen feste Axen bestimmt: Man lässt das System ausgehen von einem mit dem relativen identischen Anfangszustand; man bringt zunächst in jedem Punkt Kräfte an, deren Componenten durch dieselben Functionen der Zeit und der neuen absoluten Coordinaten ausgedrückt werden, wie die gegebenen Kräfte es durch die Zeit und die relativen Coordinaten sind; man fügt zu diesen Kräften solche fingirte Kräfte hinzu, wie sie in dem Falle eines freien Punktes bestimmt worden sind; endlich unterwirft man die Punkte den Bedingungen, dass sie die gegebenen Entfernungen von einander behalten und sich auf Flächen oder Curven bewegen müssen, welche zu Gleichungen in Bezug auf die festen Axen die gegebenen, in den relativen Coordinaten ausgedrückten Gleichungen haben.

89. Der allgemeine Fall. — Die Bedingungen, unter welchen wir die relative Bewegung eines Systems untersucht haben, kommen am häufigsten vor. Nur aus diesem Grunde haben wir sie vorausgeschickt, denn wir hätten mit dem ganz allgemeinen Falle anfangen können, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Nehmen wir an, die Verbindungen des Systems seien durch Gleichungen ausgedrückt, welche die Zeit und die absoluten Coordinaten x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', ... irgend einer Zahl von Punkten M, M', M'', ... enthalten. Wir haben bewiesen, dass die absolute Bewegung dieselbe bleibt, wenn man die Verbindungen unterdrückt und in jedem Punkt Kräfte einführt, welche durch die Gleichungen bestimmt werden, die diese Verbindungen ausdrücken. Diese Kräfte für irgend einen Punkt M, der in irgend einem System von Axen die Coordinaten x, y, z hat, sind normal gegen die verschiedenen Flächen, welche man für den Augenblick, den man betrachtet, erhält, indem man x, y, z in allen Gleichungen, worin sie vorkommen, als die einzigen Variablen ansieht; und die Werthe der Componenten dieser Kräfte parallel mit den x, y, z sind die Producte aus den partiellen Derivirten dieser Gleichungen nach x, y, z und einem gemeinschaftlichen Factor, welcher nicht gegeben und derselbe ist für alle Derivirten, die von derselben Gleichung herrühren: so dass es dieser Unbekannten eben so viel als Gleichungen giebt und folglich möglich ist, nicht nur die Coordinaten aller Punkte für jeden Augenblick zu bestimmen, sondern auch die Grössen und Richtungen der Kräfte, welche statt der Verbindungen gesetzt werden können und dann erlauben, dass man alle Punkte als vollkommen frei betrachtet.

Führen wir also diese, die Verbindungen ersetzenden Kräfte ein, so kommen wir auf den ersten Fall zurück, und die gesuchte relative Bewegung stimmt mit einer absoluten

Bewegung überein, in welcher diese Kräfte hinzugefügt sind zu den gegebenen und zu den fingirten Kräften, welche sich auf die relative Bewegung eines freien Punktes beziehen. Weil aber die von den Verbindungen herrührenden Kräfte neue Unbekannten von der Zahl der gegebenen Gleichungen einschliessen, so muss man diese Gleichungen zu ihrer Bestimmung anwenden, um in Allem eben so viel Gleichungen zu haben als Unbekannten.

Wenn wir nun in allen diesen Gleichungen, welche nur absolute Coordinaten enthalten sollten, diese durch die relativen Coordinaten ersetzen vermittelst der Gleichungen für die Transformation der Coordinaten, so wird an den Verbindungen nichts geändert. In irgend einem Augenblick kann man zu Coordinatenaxen drei Geraden nehmen, die zusammenfallen mit den beweglichen Axen in der Lage, welche diese in diesem Augenblick einnehmen. Die Verbindungsgleichungen werden dann die gegebenen Gleichungen sein, ausgedrückt in den relativen Coordinaten. Die Componenten der einzuführenden Kräfte parallel mit diesen Axen werden dargestellt durch die partiellen Derivirten der Gleichungen nach den relativen Coordinaten, welche Derivirten multiplicirt sind durch gemeinschaftliche Factoren von der Anzahl der Gleichungen, wie wir oben wiederholend auseinandergesetzt haben. Daraus folgt nachstehender Satz:

Die relative Bewegung eines Systems von Punkten, die verbunden sind durch irgend welche Gleichungen zwischen der Zeit und den relativen Coordinaten dieser Punkte, ist identisch mit einer absoluten Bewegung desselben Systems unter folgenden Voraussetzungen: 1) Das System muss ausgehen von einem mit dem relativen identischen Anfangszustande; 2) es müssen die Kräfte wirken, deren Componenten durch dieselben Functionen der Zeit und der Coordinaten der Punkte ausgedrückt werden, wie es die Componenten der gegebenen Kräfte durch die Zeit und die relativen Coordinaten sind; 3) man muss hinzunehmen die fingirten Kräfte; 4) man muss das System Verbindungen unterwerfen, die ausgedrückt werden durch Gleichungen, welche die gegenwärtigen Coordinaten in derselben Weise enthalten wie die gegebenen Gleichungen die relativen Coordinaten.

Schiefer Stoss.

90. Die Mittelpunkte zweier Kugeln von den Massen m, m' bewegen sich nicht in derselben Geraden. Die Lagen dieser Mittelpunkte in dem Augenblicke der Berührung seien O, O'. Wir wollen Grösse und Richtung ihrer Geschwindigkeiten nach dem Stosse finden. Denken wir uns deshalb in dem Augenblicke, wo die Berührung beider Kugeln eintritt, eine jede ihrer Geschwindigkeiten in zwei andere zerlegt, von denen die eine nach der gemeinsamen Normale OO' gerichtet ist, und die andere in der gemeinsamen Tangentialebene liegt. N, T seien diese Componenten für die Masse m, und N', T' für die Masse m'.

Nach dem, was von der Wirkung momentaner Kräfte bewiesen wurde, können wir zuerst die Geschwindigkeiten berechnen, welche aus ihrer Wirkung auf das System resultiren würden, wenn dieses nur die längs OO' gerichteten Geschwindigkeiten besässe; die so berechneten Geschwindigkeiten müssen wir dann zusammensetzen mit den in der Tangentialebene liegenden Componenten.

Wir betrachten also zunächst die beiden Kugeln m, m' als in derselben Geraden OO' bewegt und mit den Geschwindigkeiten N, N' zusammenstossend. Wir beschränken uns auch hier auf die zwei Fälle, wo beide Körper ganz unelastisch oder vollkommen elastisch sind.

1) Sind die Körper unelastisch, so geben ihnen die beiden normalen Kräfte eine gemeinsame, längs OO' gerichtete Geschwindigkeit v, welche den Werth hat:

$$v = \frac{mN + m'N'}{m + m'},$$

wenn man die Grössen N, N', v als positiv betrachtet in der einen Richtung auf der Normale und als negativ in der anderen. Ausser dieser gemeinsamen Geschwindigkeit haben die beiden Kugeln noch respective die auf OO' senkrechten Geschwindigkeiten T, T'.

2) Nehmen wir jetzt an, die beiden Körper seien vollkommen elastisch und nur mit ihren längs OO' gerichteten Geschwindigkeiten begabt. Sie bewegen sich dann auf dieser Geraden mit den Geschwindigkeiten N, N' und besitzen nach dem Stosse Geschwindigkeiten v, v', deren Ausdrücke wir den Formeln auf Seite 106 des zweiten Theils entnehmen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} v = \dfrac{(m - m')N + 2m'N'}{m + m'}, \\[2ex] v' = \dfrac{(m' - m)N' + 2mN}{m + m'}. \end{cases}$$

Wenn wir diese mit den in der Tangentialebene gerichteten Componenten T, T' verbinden, so erhalten wir Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

91. Für $m = m'$ findet man:

$$v = N', \quad v' = N,$$

die Kugeln haben also ihre primitiven normalen Geschwindigkeiten ausgetauscht, wie wir es schon bei dem geraden Stosse gesehen haben.

92. War die Masse m' vor dem Stosse in Ruhe, so ist $N' = 0$ und folglich:

$$v = \frac{m - m'}{m + m'} N, \quad v' = \frac{2m}{m + m'} N.$$

Wächst daher m' unendlich, so wird v' Null und v wird $-N$. Indem man diese Geschwindigkeit $-N$ zusammensetzt mit der in der Tangentialebene liegenden Componente T, erhält man eine Geschwindigkeit, welche der des Punktes m vor dem Stosse gleich ist, in der Ebene der Normale und der einfallenden Geschwindigkeit liegt, und deren Richtung mit der Normale denselben Winkel macht wie die Richtung der primitiven Geschwindigkeit. Man drückt dies so aus: Wenn eine vollkommen elastische Kugel auf ein unbewegliches und elastisches Hinderniss stösst, so wird sie in der Weise reflectirt, dass ihre Geschwindigkeit dieselbe bleibt, und dass die Richtungen der Bewegung ihres Mittelpunktes vor und nach dem Stosse in derselben, durch die Normale in dem Einfallspunkte gehenden Ebene liegen und mit dieser Normale gleiche Winkel machen.

93. Dieses Reflexionsgesetz elastischer Körper lässt sich

direct beweisen. Wenn die Kugel m die feste Oberfläche trifft, so wirkt auf sie eine variable normale Kraft F, welche eine Function der Entfernung f des Mittelpunktes von der festen Oberfläche ist. Das Integral $\int F df$ in der ganzen Ausdehnung des Stosses genommen ist also Null, und die lebendige Kraft bleibt ungeändert. Die Geschwindigkeit ist also dieselbe vor und nach dem Stosse. Weil nun die zu der festen Oberfläche normale Kraft durch ihre Wirkung auf die Kugel die Geschwindigkeit derselben parallel mit der Tangentialebene nicht ändert, so folgt, dass nach dem Stosse die ganze Geschwindigkeit der Kugel und ihre eine Componente dieselben sind wie vorher: also muss auch die andere Componente dieselbe und darum der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel sein.

94. Nehmen wir endlich an, die reflectirende Fläche, statt fest zu sein, habe eine Bewegung, welche durch die einfallende Kugel nicht alterirt werden kann. Man braucht dann nur in den Formeln (a) zu setzen $m' = \infty$, und man findet:

$$v = -N + 2N' = -(N - 2N'),\ v' = N'.$$

Also hat jetzt die normale Componente der Geschwindigkeit nach der Reflexion nicht mehr denselben Werth wie vorher, sondern einen um das Doppelte der normalen Geschwindigkeit der reflectirenden Fläche davon verschiedenen. Die Kugel würde sich daher nach dem Stosse in der zu dem Einfallspunkte gehörigen Tangentialebene dieser Oberfläche bewegen, wenn $N = 2N'$ wäre.

Indem ich dem Publikum den Schluss meiner Bearbeitung von Duhamel's Mechanik übergebe, darf ich für diese späte Vollendung um Nachsicht bitten. Es entschuldigen mich Unterbrechungen bei der Arbeit, welche zu beseitigen nicht in meiner Macht stand, sowie gewissenhafte Sorgfalt bei ihrer Ausführung. Nur grosse Sorgfalt und Correctheit können einer solchen Arbeit Werth verleihen, und dem Publikum wird es deshalb sicher lieber sein, einige Monate später in den Besitz des vollständigen Werkes zu gelangen, als wenn ich mich bestrebt hätte so rasch, aber auch so uncorrect zu arbeiten, wie es bei einer anderen concurrirenden Uebersetzung des Duhamel'schen Werkes geschehen ist. Um diesen Ausspruch zu rechtfertigen, halte ich mich für verpflichtet, mindestens einen Theil der Mängel, welche mir bei der Durchsicht jener Uebersetzung auffielen, am Schlusse dieser Worte vorzuführen *).

Ein zweiter Gewinn, welchen ich den Besitzern meiner Bearbeitung darbiete, rührt daher, dass von dem Originale, dessen Werth ein allgemein anerkannter ist, inzwischen eine neue Auflage erschien, welche interessante Zusätze und einen neuen Abschnitt, „Phoronomie", enthält. Der Anhang, welchen ich meiner Bearbeitung am Schlusse beigegeben, bringt diese Phoronomie so wie alle wichtigen Zusätze der neuen Auflage des Originals.

Berlin, im Juli 1854.

Wagner.

---

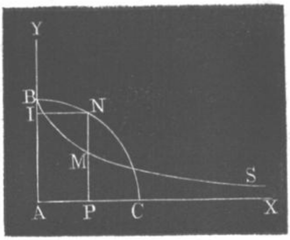
*) In Nr. 63 führt das Original den sehr einfachen Beweis, daß der Schwerpunkt eines homogenen Cylinders diejenige Gerade hälftet, welche die Schwerpunkte seiner (parallelen) Grundflächen verbindet. Offenbar liegt dieser Schwer-

punkt auf einer Ebene, die parallel ist mit den Grundflächen und gleich weit von ihnen absteht. Um zu zeigen, daß er auch auf der fraglichen Geraden liegt, zerschneidet man den Cylinder durch irgend ein System unter sich und mit den Kanten paralleler Ebenen in unendlich dünne Scheiben. In Bezug auf eine beliebige dieser Ebenen verhalten sich die Momente zweier solchen Scheiben wie die Momente ihrer unendlich schmalen Grundflächen, welche Elemente von den Grundflächen des Cylinders sind. Daraus folgt das Moment des ganzen Cylinders gleich Null in Bezug auf diejenige unter den parallelen Ebenen, bezüglich welcher das Moment seiner Grundflächen Null wird; diese Ebene geht aber durch die Schwerpunkte beider Grundflächen hindurch. Und weil für ein anderes System Gleiches gilt, so liegt in der That der gesuchte Schwerpunkt auf jener Geraden. — Hören wir nun die Uebersetzung: „Bildet man ferner ein System von unendlich nahen Ebenen, die einander und den Kanten parallel sind, so zerfällt der Cylinder in eine Reihe Parallelopipeda, deren obere und untere Begrenzungsflächen die Elemente der Cylinderbasis und deren Momente proportional den Momenten ihrer Grundflächen sind in Beziehung auf jede ihren Kanten parallele Ebene. Eben deshalb muss die Summe der Momente sowohl der Seitenflächen als der Parallelopipeda in Bezug auf dieselbe Ebene Null sein." — Wir bemerken zur Erklärung dieses Unsinns, daß ein Druckfehler des Originals, *faces* statt *bases*, denselben veranlaßt. Die einschlagende Stelle lautet nämlich: „*le cylindre se trouvera décomposé en parallélépipèdes dont les bases seront les éléments des bases du cylindre, et dont les moments seront proportionnels à ceux de leurs bases par rapport à tout plan parallèle à leurs faces finies. Donc les sommes des moments, soit des faces, soit des parallélépipèdes, seront nulles pour le même plan.*"

In Nr. 99 wird aus der Differentialgleichung der Tractorie BMS (die Evolvende der Kettenlinie), $y\,dx = -\,dy\sqrt{m^2 - y^2}$, gefolgert:

$$\int_0^x y\,dx = -\int_m^y dy\,\sqrt{m^2 - y^2},$$

wo die Grenzen x, y Coordinaten eines und desselben Punktes dieser Curve bezeichnen, so daß z. B. $x = AP$, $y = MP$. Die Gleichung drückt daher in dem Falle der Figur aus, daß die Fläche $BMPA$ gleich ist jenem Segment des mit dem Radius $AB = m$ beschriebenen Kreisquadranten, welches abgeschnitten wird von einer Parallelen zu AX, die durch M geht. — Die Uebersetzung hat den Fehler in der Figur des Originals nicht verbessert; sie sagt, es seien BIN und $BMPA$ gleich.



In Nr. 133 fehlt der Uebersetzung ein Zusatz, dessen das Original bedarf, nämlich daß die Kugel nur dann einen äußeren Punkt bei jeder Entfernung so anzieht, als ob ihre ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre, wenn sie aus homogenen concentrischen Schichten besteht.

In Nr. 226 hat das Original die Formel:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

worauf es fortfährt: „*On tirera de là que $d\theta$ est de signe contraire à dt tant que le mouvement reste dans le même sens*

$$dt = \frac{-\,l d\theta}{\sqrt{k^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}}.“$$

Es ist klar, daß durch ein Druckversehen hinter *là* die Worte *en observant* fehlen. — Die Uebersetzung schreibt, darum unbekümmert: „Man schliesst hieraus“ (aus der Formel), „dass $d\vartheta$ von entgegengesetztem Zeichen mit dt ist, so lange die Bewegung in demselben Sinne verharrt, also . . .“ — Richtig wäre: »Man erhält hieraus, weil $d\theta$ dem Zeichen nach dt entgegengesetzt ist, so lange die Bewegung in demselben Sinne beharrt: . . .«.

In Nr. 4 des zweiten Bandes finden wir folgende Behauptung: „Man darf also immer voraussetzen, dass ein bewegter Punkt irgend eine gegebene Curve durch die Wirkung einer Kraft beschreibe, deren Richtung durch irgend einen festen Punkt geht.“ — Sie bedarf erstlich der Beschränkung, daß die Curve eben sei, und dann muß noch der feste Punkt in ihrer Ebene liegen.

Das Princip von d'Alembert sagt, auf Momentankräfte angewendet, daß an einem materiellen System vermöge seiner Verbindungen Gleichgewicht stattfindet zwischen den Kräften, welche gewirkt haben, und den anderen, welche durch die hervorgebrachten Größen der Bewegung gemessen werden, letztere entgegengesetzt mit ihren Richtungen genommen. — Dem entgegen hat die Nr. 42 folgende Stelle: „*il y a équilibre entre les forces mesurées par les quantités de mouvement acquises et les forces instantanées prises en sens contraires de leurs directions.*“ Dieser theoretische Fehler und der analoge bei stetigen Kräften kommen später noch häufig vor; auch berichtigt ihn das Erratum mehrfach. — Hier, wo dies nicht geschehen ist, spricht die Uebersetzung ihn treu nach: „Gleichgewicht . . . zwischen den durch die Quantitäten der Bewegung gemessenen Kräften und den in entgegengesetztem Sinne mit ihren Richtungen genommenen momentanen Kräften.“ — Ihre Treue in diesem Punkt geht so weit, daß in Nr. 98, wo das Original durch denselben Fehler Gleichgewicht zwischen den Kräften $-X$, $-Y$, $-Z$ und dem System der anderen $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ behauptet, die Uebersetzung, wie das Erratum des Originals, eine Hälfte des Fehlers verbessert, die andere aber nicht; sie behauptet nämlich Gleichgewicht zwischen $+X$, $+Y$, $+Z$ und $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$.

In Nr. 69 soll die Stabilität des Gleichgewichts untersucht werden. Vorausgesetzt wird dabei ein System, dessen Verbindungen von der Zeit unabhängig sind, und auf welches Kräfte wirken von solcher Beschaffenheit, daß der Ausdruck $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ das vollständige Differential einer Function $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ darstellt. — Das Original sagt: „*un système de points assujettis à des liaisons quelconques indépendantes du temps, et telles que Σ soit la différentielle exacte d'une fonction φ.*“ Die Auslassung *soumis à l'action de forces* hinter *et* liegt auf der Hand; zum Ueberfluß findet man sie auf der folgenden Seite hinzugesetzt. — Die Uebersetzung bringt den voranstehenden falschen Satz und läßt den nachfolgenden richtigen weg: „betrachten wir das Gleichgewicht eines Systems von Punkten, deren Verbindungen von der Zeit unabhängig und der Art sein mögen, dass Σ das exacte Differential einer Function φ ausmacht." — Ferner erfährt man hier, wie das Gleichgewicht stabil „bleibt", während das System seine kleinen Bewegungen macht.

Ein geschickter Besserungsversuch findet sich in Nr. 75. — Das Original enthält hier den Satz: „*Pour que le volume*" (Druckfehler, soll *volant* heißen) „*charge moins les supports, il est utile de lui donner la moindre masse possible, et pour cela on lui donne la forme d'une roue dont la masse est presque tout entière à la circonférence.*" — Die Uebersetzung sagt: „Damit dieser Körper die Unterlagen weniger belaste, und das kleinstmögliche Volumen erhalte, giebt man ihm die Form eines Rades, dessen Masse fast ganz in der Peripherie liegt." — Richtig übersetzt kann diese Stelle so lauten: »Man nimmt dieselbe« (die Masse, den *volant*), »damit sie die Stützen weniger belaste, so klein als für den Zweck möglich, und deshalb giebt man ihr die Form eines Rades (das sog. Schwungrad) . . «

Eine ganz unzählbare Menge von anderen offenbaren Druckfehlern des Originals giebt die Uebersetzung sorgfältig wieder. Wir werden nur einige derselben hervorheben.

Kann ein Punkt eine Oberfläche nicht verlassen, so genügt es für sein Gleichgewicht auf ihr, wenn die Resultante der ihn angreifenden Kräfte senkrecht auf der Oberfläche steht. — Daraus folgert die Uebersetzung in Nr. 18 des ersten Bandes, daß „die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den Axen bildet, denen proportional sind, welche sich auf die Normale beziehen."

Die Nr. 100 soll zeigen, daß die Eckpunkte eines Seilpolygons, welches durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte gespannt wird, auf einer und derselben Parabel liegen. Unter den Bestimmungsstücken dieser Parabel wird ausdrücklich die constante Horizontalspannung mit m bezeichnet; dagegen wurde unter a der halbe Horizontalabstand der beiden Aufhängepunkte verstanden. — Ein Druckversehen des Originals bewirkt nun, daß in den Formeln der Nr. 100 an der Stelle von m überall a steht. — Die Uebersetzung macht diese Ungereimtheit pünktlich nach.

In Nr. 196 steht folgender Satz: „*Les valeurs de x', y', z' seront donc les mêmes que seraient les coordonnées absolues d'un point qui serait sollicité par une force absolue ayant pour composantes les expressions* (4), *et*" (fehlt *qui aurait*) „*pour vitesse et position initiales, la vitesse relative et la position relative initiales.*" — Die Uebersetzung: „Die Werthe von x', y', z' sind also dieselben, wie die absoluten Coordinaten eines Punktes, auf den eine absolute Kraft wirkte, welche die Ausdrücke (4) zu Componenten und zur anfänglichen Geschwindigkeit und Lage die relative Anfangsgeschwindigkeit und Lage hätte."

Original und Uebersetzung bringen in Nr. 203 die Formel:

$$m(v^2 - k^2) = \mp \int_{r_0}^{r} R\,dr \mp \int_{r'_0}^{r'} R'\,dr' \mp \text{etc.},$$

welcher auf der rechten Seite der Factor 2 fehlt.

In Nr. 226 sieht man die Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$$

so integrirt:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\cos\vartheta + C;$$

daraus wird gefolgert:

$$\frac{k^2}{L^2} = \frac{g}{L}\cos\alpha + C,$$

und nun erst taucht beim Einsetzen des C, wie im Original, der verlorene Factor 2 auf. — Doch ein Verdienst hat hier die Uebersetzung, sie setzt ein großes L statt des kleinen.

Die Nr. 237 stempelt, wie der Druckfehler des Originals, $a\alpha$, $b\beta$ zu Halbaxen der Ellipse

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = a^2\alpha^2\beta^2.$$

Von der Sorgfalt, mit welcher die Revision mitunter für genaue Uebereinstimmung des Textes und der Uebersetzung wachte, legt ein Zeugniß ab die Formel (4) der Nr. 30 zweiten Bandes:

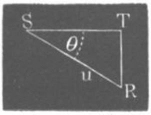
$$\frac{d\left[\varphi(z)\,\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{\left[\varphi(z)\,f(z)\,\frac{dz}{dx}\right]}{dx},$$

wenngleich der rechtsstehende Ausdruck jenem des Originals

$$\frac{\left[\varphi(z)\,f(z)\,\frac{dz}{dx}\right]}{dx}$$

nicht ganz congruent ist, da ihm ein Stück Strich fehlt.

In Nr. 144 „findet man $x = \frac{d^2}{a}$, und da $f^4 = a^4 r$, so folgt $f^2 = a^2\sqrt{r}$ und $x = a\sqrt{r}$." — Die Schuld liegt beim Original, warum schreibt dieses d statt f?



Aus Nr. 148 erfahren wir, daß die Kathete RT eines bei T rechtwinkligen Dreiecks gleich $u\,tang\,\theta$ oder $RS\,tang\,RST$ ist. — Das Original schreibt ja so.

In Nr. 150 behauptet ein Druckfehler des Originals, *au-dessous* statt *au-dessus*, wenn der Schwerpunkt des eingetauchten Körpers tiefer liege als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit (die allemal stabile Gleichgewichtslage), so sei der Abstand a beider negativ zu nehmen. — Die Uebersetzung behauptet es natürlich mit.

Aus Nr. 200 kann man lernen, daß $(2n+1)\pi$ ein Vielfaches der ganzen Peripherie ist, da recht ausdrücklich, mit dem Druckfehler des Originals, behauptet wird, es sei:

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\;\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

in Bezug auf x um den Inder $2l$ periodisch.

Diese Beispiele statt aller von ähnlicher Art. Nun zur Classe des eigenen Unsinns. Vielleicht erwartet man diesen von der Uebersetzung, an welcher die Kräfte Eggers und Schlömilch wirkten, am wenigsten.

Auf Seite 8 des ersten Theils des Originals soll MA die Tangente im Punkte M einer Curve von doppelter Krümmung bezeichnen, und MB eine Parallele zu der in einem unendlich nahen Punkte an diese Curve gezogenen Tangente sein, so daß MA und MB den Contingenzwinkel bilden. — Die Uebersetzung sagt auf Seite 7: „Sei MA eine Verlängerung der Tangente im Punkte M einer Curve doppelter Krümmung, MB eine in einem unendlich nahen Punkte zur Tangente parallele Linie . . . .“

Nr. 192. „*Nous allons chercher les formules au moyen desquelles on peut déterminer la direction et la grandeur soit de la vitesse, soit de la force, d'après les fonctions de t qu'expriment x, y et z.*“ — Uebersetzung: „Wir wollen nun die Formeln suchen, mit deren Hülfe man die Richtung und Grösse sei es der Geschwindigkeit, sei es der Kraft, als Functionen der Zeit t bestimmen kann, welche durch x, y und z ausgedrückt ist.“ — Richtig übersetzt würde diese Stelle lauten: »Wir wollen die Formeln aufsuchen, vermöge welcher man Richtung und Größe, sowohl der Geschwindigkeit als der Kraft, aus denjenigen Functionen von t bestimmen kann, welche x, y, z ausdrücken.«

In Nr. 237 verdeutscht die Uebersetzung „*suivant l'axe des y*“, wo *suivant* »parallel mit« bedeutet, durch „gegen die Axe der y.“

Das Princip der kleinsten Wirkung setzt voraus, daß die Gleichung der lebendigen Kraft stattfindet. Diese Voraussetzung macht die Nr. 238 in der Annahme

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(x, y, z),$$

aus welcher folgt:

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C.$$

Sie betrachtet nun die wirkliche Trajectorie des Punktes zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte A, B und wiederholt zunächst eine frühere Bemerkung, nämlich daß der materielle Punkt, welche andere Curve man ihn auch von A nach B zu durchlaufen zwingen mag, doch immer unter dem Einfluß derselben Kräfte mit derselben Geschwindigkeit in B ankommt, wenn er nur in A allemal eine gleich große Geschwindigkeit hatte. — Die Uebersetzung faßt diese Bemerkung so: „Fixirt man die beliebige Curve zwischen A und B, und zwingt den materiellen Punkt dadurch auf ihr zu bleiben, dass man ihn der Einwirkung äusserer Kräfte unterwirft, so wird übrigens seine Geschwindigkeit immer durch dieselbe Formel ausgedrückt.“ — Die einschlagende Stelle des Originals lautet: „*si l'on fixait la courbe quelconque que l'on considère entre A et B, et qu'on assujettit le point matériel à y rester, en le soumettant à l'action des mêmes forces extérieures, sa vitesse serait toujours donnée par la même formule.*“ — Man übersetzt also richtig: »Bemerken wir, daß wenn man eine beliebige Curve zwischen A und B fest macht, den materiellen Punkt sich auf ihr zu bewegen zwingt und ihn denselben äußeren Kräften unterwirft, daß dann seine Geschwindigkeit noch immer durch die nämliche Formel gegeben wird.«

Die Nr. 25 des zweiten Theils hat den Satz: „*Si l'on prend pour origine des temps l'instant où l'on a $\theta = 0$, la planète est au sommet le plus voisin du foyer, qui correspond à $r = a(1 - e)$, et qu'on nomme le périhélie.*“ — Uebersetzung: „Wählt man zum Anfangspunkte der Zeiten den

Augenblick, wo $\vartheta = 0$ ist, so befindet sich der Planet in dem Scheitel, welcher demjenigen Brennpunkte am nächsten liegt, für den $r = a(1-e)$ wird, und den man das Perihel nennt." — Richtig würde man übersetzen: »so befindet sich der Planet in demjenigen Scheitel, welcher dem Brennpunkt am nächsten liegt, und für den $r = a(1-e)$ ist.«

Nr. 72. „... $\Sigma P dp - \Sigma Q dq = 0$, *équation qui sera satisfaite si le système, quel qu'il soit, est en équilibre; et qui en est la condition suffisante, s'il est à liaison complète.*" — Uebersetzung: „und diese Gleichung wird erfüllt, wenn das System im Gleichgewicht ist, vorausgesetzt, dass eine vollkommene Verbindung vorhanden ist."

In Nr. 110 bemerkt das Original von den Componenten der beschleunigenden Kraft irgend eines Punktes: „*Ces composantes sont, comme on le sait, les dérivées secondes, par rapport au temps, des coordonnées du point, estimées parallèlement à trois directions invariables quelconques.*" — Die Uebersetzung bringt hier Einschränkungen an und sagt: „Die genannten Componenten sind bekanntlich die partiell in Beziehung auf die Zeit genommenen zweiten Differentialquotienten der Coordinaten, vorausgesetzt, dass das Coordinatensystem unveränderlich und rechtwinklig ist." — Sie sollte aber sagen: »Diese Componenten parallel mit drei beliebigen festen Richtungen sind die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit.«

In dem Abschnitte, welcher von der Drehung um einen festen Punkt in Folge der Trägheit handelt, bemerkt die Nr. 113, daß wenn man mit den Gleichungen:

$$(12) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

$$(15) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

noch die Bedingung $p^2 + q^2 + r^2 = Const.$ verknüpft, dann die Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit (sofern A, B, C ungleich sind) constante Werthe erhalten; woraus sofort folgt, daß die Drehung jetzt immer um eine und dieselbe Axe geschieht. — Die Uebersetzung lehrt: „Verbindet man mit den Gleichungen die Bedingung, dass die Winkelgeschwindigkeit constant sei, so erhält man zwischen p, q, r drei Gleichungen, welche sie bestimmen, wenn A, B und C ungleich sind und die Drehungsaxe fest ist." — Das Original: „*on aurait entre p, q, r trois équations, qui les détermineraient si A, B et C sont inégaux, et l'axe de rotation serait fixe.*"

Die Nr. 118 hat zum Gegenstand die geometrische Darstellung der Drehung um einen festen Punkt mit Hülfe zweier Kegel, eines festen und eines beweglichen, welcher auf dem ersten rollt. Der im absoluten Raum feste Ort aller augenblicklichen Drehaxen bildet eine transcendente Kegelfläche; dieselbe hat zur Basis auf der festen Tangentialebene des Centralellipsoids die Serpoloide, macht daher im Allgemeinen unendlich viele wellenförmige Windungen und legt sich um diejenige Senkrechte herum, welche aus dem festen Punkt auf diese Tangentialebene gefällt ist. Der im Körper feste Ort aller augenblicklichen Drehaxen bildet eine Kegelfläche zweiten Grades. Diese beiden Kegelflächen tangiren einander in jedem Augenblick; die bewegliche rollt auf der festen ohne zu gleiten, da ihre Berührungskante die augenblickliche Drehaxe ist. — So will es das Original; dies hält aber die Uebersetzung nicht ab, zu sagen: „Es kann also die Bewegung des Körpers mit Hülfe eines Kegels vom zweiten Grade construirt werden, der fest mit dem Körper verbunden ist und auf einem andern Körper rollt, dessen Oberfläche sich unaufhörlich dreht, indem sie um die Axe des resultirenden Paares schwingt."

Wenn zwei mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllte Gefäße durch einen horizontalen Canal communiciren, und man zwei Horizontalebenen durch dessen höchste und tiefste Kante legt, so muß während des Gleichgewichts in allen Punkten einer und derselben mittleren Horizontalebene ein gleicher Druck stattfinden; und dies gilt noch für die beiden Grenzebenen. Deswegen bemerkt die Nr. 137: *„les parties situées en dessous du canal seront soumises à l'action d'une pression égale à leur partie supérieure."* — Die Uebersetzung meint: „Ebenso sind die unterhalb des Canals liegenden Theile der Wirkung eines Druckes unterworfen, welcher gleich ist ihrem oberen Theile." Der Uebersetzer kann sich merken, daß *à* hier »an« heißt.

In Nr. 139 entdeckt man die Alternative: „In beiden Fällen ist das Trapez zu einem Dreieck geworden, dessen Spitze entweder in der Oberfläche des Wassers oder in der Grundlinie liegt." — Das Original: *„Le trapèze est alors réduit à un triangle: dans le premier cas, son sommet est à fleur d'eau, et, dans le second, c'est sa base qui s'y trouve."*

Nr. 140. „Die auf eine krumme Wand ausgeübten Druckkräfte lassen sich nicht immer auf eine Einzelkraft zurückführen, weil ihre Richtungen nicht parallel laufen; wirken sie aber auf ein starres System, so können sie auf höchstens zwei Kräfte reducirt werden." Ferner: „Im entgegengesetzten Falle kann man das Kräftesystem auf eine Einzelkraft und auf ein Paar reduciren, auch letzteres, wenn man will, auf zwei Kräfte zurückführen. — Die betreffenden Stellen des Originals lauten: *„mais, comme elles sont appliquées à un système rigide, elles sont toujours réductibles à deux forces au plus"* und *„le système des forces se trouvera réduit à une force et un couple, et l'on pourra, si l'on veut, le réduire à deux forces seulement"*.

Denken wir uns einen Körper ganz oder zum Theil eingetaucht in eine Flüssigkeit, und diese im Gleichgewicht. Nehmen wir das Niveau der Flüssigkeit zur Ebene der x, y und die Richtung der Schwere zur Axe der z; es sei ϱ die nur mit z variirende Dichte der Flüssigkeit. Nennt man den Druck am Niveau P, so ist $P + g\int_0^z \varrho\, dz$ der Druck in der Tiefe z; der Unterschied der beiden Drucke in den Tiefen z_1 und z beträgt daher $g\int_{z_1}^z \varrho\, dz$. Betrachtet man nun von dem eingetauchten Theil einen Faden, der sich in dem Rechteck $dx\, dy$ auf die Ebene der x, y projicirt und von z_1 bis z erstrecken mag: sein Gewicht, wenn man ihn mit Flüssigkeit, in gleicher Höhe von der Dichte der äußeren, erfüllt sich denkt, ist $g\, dx\, dy \int_{z_1}^z \varrho\, dz$. Die allein zu betrachtenden verticalen Druckcomponenten auf das obere und untere Ende des Fadens sind, absolut genommen, $P dx\, dy + g\, dx\, dy \int_0^{z_1} \varrho\, dz$ und $P dx\, dy + g\, dx\, dy \int_0^z \varrho\, dz$; die erste ist von der zweiten abzuziehen. Es bleibt also die verticale, nach oben gerichtete Kraft $g\,dx\,dy \int_{z_1}^{z} \varrho\,dz$ übrig, welche jenem Gewicht gleich ist. — Die Uebersetzung sagt dagegen in Nr. 141: „Componenten in entgegengesetztem Sinne, welche sich auf eine Kraft reduciren, die von unten nach oben gerichtet und gleich dem Gewichte der Flüssigkeit ist, welche denjenigen Theil des Körpers ausfüllt, der die nämliche Projection $dx\,dy$ besitzt, wobei dieser Theil Flüssigkeit bis zu der Höhe“ (also vielleicht höher als der eingetauchte Körper) „fortgesetzt angenommen wird, welche die den Körper umgebende Flüssigkeit hat, und der Körper homogen oder heterogen sein kann. Es folgt daraus, dass der Körper in entgegengesetzter Richtung mit der Schwere getrieben wird, weil“ (sollte heißen »wie«) „der Theil der Flüssigkeit, dessen Stelle er einnimmt, es in der Richtung der Schwere werden würde.“ — Die verunstaltete Stelle des Originals lautet: „*cette portion de liquide étant supposée continuée à hauteur égale comme*“ (in gleicher Höhe so fortgesetzt angenommen wird wie) „*le liquide qui entoure le corps, et qui peut être homogène ou hétérogène. Il suit de là que le corps est poussé en sens contraire de la pesanteur, comme le serait, dans le sens de cette force, la partie du liquide dont il tient la place.*“

Ein Ellipsoid schwimmt bekanntlich dann in stabilem Gleichgewicht, wenn seine verticale Hauptaxe die kleinste ist, wie auch das Original lehrt. — Vielleicht war es in Nr. 156 die Revision, die für Uebereinstimmung des Textes und der Figur sorgte, denn wir lesen: „dass die verticale Axe des Ellipsoids die grösste sein müsse.“

In Nr. 181 lesen wir: „die von dem d'Alembert'schen Princip gelieferten Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(g - u'),\quad \frac{dp}{dy} = -\,\varrho\,v',\quad \frac{dp}{dz} = -\,\varrho w',$$

wo u', v', w', welche Grössen Differentialquotienten nach t sind, die Componenten der Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte bedeuten.“ — Das Original sagt: „*u', v', w' étant les dérivées, par rapport au temps, des composantes de la vitesse en un point quelconque*“. — Man übersetzt also richtig: »worin u', v', w' die Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten irgend einer Molekel in einem gewissen Punkt« (es handelt sich um eine permanente Bewegung) »nach der Zeit bezeichnen.«

In Nr. 187, für die kleinen Bewegungen einer elastischen Flüssigkeit, werden die Gleichungen gefunden:

$$\gamma = -\,\frac{1}{a^2}\,\frac{d\varphi}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{3}$$

wo γ die Condensation und φ diejenige Function von x, y, z, t bezeichnet, deren partielle Ableitungen nach x, y, z in jedem Augenblick die Componenten der Geschwindigkeit darstellen. Zur Bestimmung der willkürlichen Functionen, welche durch die Integration eingehen, muß man die Anfangswerthe von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ kennen. Der Anfangswerth von $\frac{d\varphi}{dt}$ wird durch den nothwendig bekannten für y gegeben. Von den Anfangswerthen der Componenten der Geschwindigkeit wird vorausgesetzt, daß sie die partiell nach x, y, z genommenen Ableitungen einer Function von x, y, z bilden, und man erhält aus ihnen diese Function mit einer willkürlichen Constante. Auf diese Constante kommt bei der vorliegenden Aufgabe nichts an, weil alle gesuchten Größen bloß durch Differenziiren von φ gefunden werden; sie darf deshalb ganz außer Acht bleiben, und man kann somit die Function φ, für $t = 0$, als durch die bekannten Anfangswerthe von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ bestimmt betrachten. — Hören wir nun die Uebersetzung in dem Passus: „und da letztere“ (die Constante) „keinen Einfluss auf die gesuchten Grössen haben kann, weil sie alle durch Differentiation der Function φ erhalten werden, so braucht man derselben keine Rechnung zu tragen, und kann die allgemeine Function φ als bekannt betrachten, wenn man sie für $t = 0$ kennt.“ Die Gleichung (3) zu integriren, ist man hiernach überhoben, man kennt ja φ überhaupt, da man es für $t = 0$ kennt. — Das Original sagt: „*et l'on peut considérer la fonction générale φ comme connue lorsqu'on y fait $t = 0$.*“

In Nr. 192 sieht man *branche d'une courbe* durch „Werth einer Curve“ übersetzt.

In Nr. 196 will das Original die Bewegung eines Gases in einer endlichen Röhre betrachten; die Uebersetzung macht sie „unendlich“. — Einen Anfangszustand in unendlicher Ausdehnung macht sie zu einem „unbestimmten“ Anfangszustand.

In Nr. 198 sagt das Original von einem Werthe für φ, er genüge allen Bedingungen mit alleiniger Ausnahme des Anfangszustandes. — Die Uebersetzung sagt von ihm, daß „er jedem ausser dem anfänglichen Zustande genügt.“

Résoudre par rapport à heißt in Nr. 206 „reduciren auf“.

Nr. 210. „*On chercherait ensuite le mouvement sur le cercle osculateur de la seconde section, d'après le déplacement et la composante de la vitesse parallèlement au second plan.*“ — Uebersetzung: „nachher ist die Bewegung auf dem Krümmungskreise des zweiten Schnittes, welcher durch die Verrückung und die Componente der Geschwindigkeit nach der zweiten Ebene bestimmt ist, zu ermitteln.“

Man wird an diesen Proben genug haben; sie mögen als Beweis dienen, daß die Eggers'sche Uebersetzung ein Werk ist, welches „hinsichtlich der richtigen Verdeutschung des Originals und dessen Ergänzung und Berichtigung nach dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft“ keinen Wunsch übrig läßt. — Wer sich die Mühe geben will, dem verspricht das Buch noch eine reiche Ausbeute an ähnlichen Curiositäten.