Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

Duhamel, Jean Marie Constant

1853

Hydrodynamik

Hydrodynamik.

162. Die Hydrodynamik betrachtet die Bewegung der Flüssigkeiten.

Ihr Problem, in der allgemeinsten Weise aufgefasst, besteht in Folgendem. Für einen bestimmten Augenblick, den man zum Zeitanfang nehmen kann, sind die Lagen sämmtlicher Molekel der Flüssigkeit und ihre Geschwindigkeiten bekannt; ferner werden gegeben die äusseren Kräfte, welche auf alle Punkte der Flüssigkeit wirken, sowie die Drucke und sonstigen Bedingungen, welche sich auf ihre Grenzen nach allen Seiten hin beziehen. Unter diesen Voraussetzungen soll man die Bewegung einer jeden Molekel bestimmen, also den Ausdruck ihrer drei Coordinaten durch die Zeit finden, und ausserdem soll man Druck und Dichte in einem beliebigen Punkt der Flüssigkeit zu irgend einer Epoche berechnen.

Die Coordinaten x, y, z einer bestimmten Molekel sind Functionen der einzigen Variablen t. Aber von einer Molekel zur anderen ändern sich diese Functionen, und in sofern hängen sie ab von den Coordinaten a, b, c desjenigen Punktes, in welchem die betrachtete Molekel sich am Anfang der Bewegung befand. Man hat demnach x, y, z als Functionen der vier unabhängigen Variablen a, b, c, t anzusehen; und wenn der allgemeine Ausdruck dieser drei Functionen gefunden ist, so kennt man genau die Bewegung einer beliebigen Molekel von ihrer Anfangslage an.

163. Wäre die Aufgabe gelöst, hätte man also die drei Functionen von a, b, c, t gefunden, so könnte man daraus a, b, c als Functionen von x, y, z, t ableiten. Folglich darf jede Function der unabhängigen Variablen a, b, c, t als Function der vier Unabhängigen x, y, z, t betrachtet werden.

So hängen z. B. die Componenten der Geschwindigkeit einer Molekel, $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ ab von a, b, c, t und können daher als abhängig von x, y, z, t betrachtet werden. Dies sieht man übrigens a priori ein. Denn fasst man irgend einen Punkt mit constanten Coordinaten x, y, z ins Auge, so haben die Molekel, welche nach einander durch diesen Punkt gehen, verschiedene Geschwindigkeiten in demselben, und folglich sind die Grössen u, v, w, welche sich auf diesen Punkt beziehen, Functionen von t. Lässt man darauf y, z, t constant und variirt x, d. h. betrachtet man in demselben Augenblick alle Punkte einer Parallelen zur Axe der x, so ändern sich mit x auch u, v, w; mithin sind diese Grössen Functionen der unabhängigen Variablen x. Ebenso werden sie als Functionen von y und z erkannt; so dass man einsieht, wie u, v, w Functionen der vier unabhängigen Variablen x, y, z, t sind.

Dasselbe gilt für jede Function von a, b, c, t.

164. Die Aufgabe, welche uns beschäftigt, ist gelöst, wenn man u, v, w als Functionen von x, y, z, t bestimmt hat. Denn, will man dann die Bewegung einer bestimmten Molekel kennen, so braucht man nur x, y, z als Functionen von t allein zu betrachten und zu setzen:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Dadurch erhält man drei Differentialgleichungen zwischen x, y, z, t, nachdem man u, v, w ihre Werthe substituirt hat. Die Integration derselben ergiebt x, y, z als Functionen von t, und man bestimmt die dabei eingehenden drei Constanten daraus, dass x, y, z für $t = 0$ die anfänglichen Coordinatenwerthe der betrachteten Molekel annehmen.

165. **Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten.** — Es seien Xdm, Ydm, Zdm die Componenten der Kraft, welche auf die Molekel von der Masse dm wirkt;

u, v, w seien die Componenten ihrer Geschwindigkeit. Durch u', v', w' mögen die nach allem t genommenen Ableitungen von u, v, w bezeichnet werden, während man letztere Grössen als auf die Bewegung einer bestimmten Molekel sich beziehend und darum als Functionen der einzigen unabhängigen Variablen t betrachtet. Indem man sich nämlich u, v, w als Functionen von x, y, z, t denkt, sind x, y, z Functionen von t, und zwar von t allein. Nun sollen u', v', w' die Ableitungen von u, v, w nach allem t bedeuten. Dieselben dürfen nicht durch $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ vorgestellt werden, da man sie sonst mit den partiell nach t genommenen Ableitungen von u, v, w verwechseln könnte. Den Druck bezeichne p und ϱ die Dichte; beide können sich mit x, y, z, t ändern.

Dem Princip von d'Alembert zufolge würde die Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn an jeder Molekel die Kraftcomponenten wirkten:

$$(X - u')\,dm,\ (Y - v')\,dm,\ (Z - w')\,dm.$$

Daraus gehen folgende drei Gleichungen hervor:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(X - u'),\quad \frac{dp}{dy} = \varrho\,(Y - v'),\quad \frac{dp}{dz} = \varrho\,(Z - w').$$

Für u', v', w' erhält man folgende Ausdrücke:

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$
$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$
$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.$$

Die vorletzten drei Gleichungen werden dadurch:

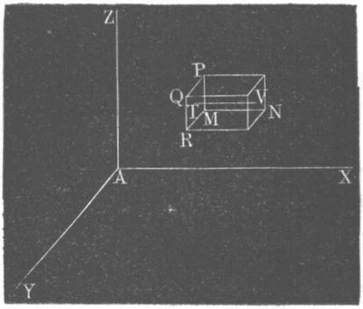
$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen reichen nicht hin zur Bestimmung der fünf Functionen p, ϱ, u, v, w. Es werden dazu noch zwei erfordert; wenn aber ϱ constant ist, nur eine. Wir wollen sehen, wie man sich diese Gleichungen aus der Bedingung, dass die Flüssigkeit stetig bleibt, verschaffen kann.

166. Denken wir uns den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum in unendlich kleine Parallelepipede $dx\,dy\,dz$ getheilt. Nach der Zeit dt müssen dieselben noch mit Flüssigkeit erfüllt sein, etwa mit Ausnahme derjenigen, welche sich an der freien Oberfläche befanden; und die Zunahme der Dichte in einem solchen Parallelepiped ist gleich dem Zuwachs der darin enthaltenen Masse, getheilt durch das Volumen. Um daher die Zunahme der Dichte zu erhalten, muss man den Ueberschuss der Masse, welche während der Zeit dt in das Parallelepiped eingetreten ist, über die unterdessen aus demselben hinausgetretene Masse suchen.

Es seien x, y, z die Coordinaten der Ecke M dieses Parallelepipeds und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ diejenigen der gegenüberstehenden Ecke; u, v, w mögen die Componenten der Geschwindigkeit desjenigen Punktes bezeichnen, welcher sich am Ende der Zeit t in M befindet; ϱ sei zu derselben Zeit die Dichte in M.

Fig. 12.



Während Flüssigkeit durch eine Grenzfläche eintritt, geht andere durch die entgegengesetzte hinaus. Berechnet man den Ueberschuss der ersten Quantität über die zweite für jedes der drei Paare paralleler Grenzflächen, so giebt die Summe den Zuwachs an Masse, welchen das Parallelepiped empfangen hat.

Betrachten wir zunächst die Fläche $MPQR$ und die zu ihr parallele. Wären ϱ und u in der ganzen Ausdehnung einer jeden constant, so würde durch die erste eingetreten sein die Masse:

$$\varrho\, u\, dy\, dz\, dt,$$

und ausgetreten wäre durch die zweite Fläche die Masse:

$$\left[\varrho u + \frac{d(\varrho u)}{dx}\, dx\right] dy\, dz\, dt.$$

Der Ueberschuss wäre mithin:

$$-\frac{d(\varrho u)}{dx}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Dieses Resultat darf man als richtig annehmen. Denn nimmt man in beiden Flächen auf einer Parallelen zur Axe der x zwei Punkte T, V, so unterscheidet sich die Differenz der in ihnen stattfindenden Werthe des ϱu von der Differenz der Werthe des ϱu in M und N nur um eine gegen die zweite unendlich kleine Grösse, da man statt der Coordinaten von M blos jene von T zu setzen braucht, um die erste Differenz aus der zweiten zu erhalten.

Der Ueberschuss an Masse, welcher durch die Flächen $dx\, dz$, $dx\, dy$ eingetreten ist, über die durch die parallelen Flächen ausgetretene Masse beträgt respective:

$$-\frac{d(\varrho v)}{dy}\, dx\, dy\, dz\, dt,\ -\frac{d(\varrho w)}{dz}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Die Summe der drei Ueberschüsse, getheilt durch das Volumen $dx\, dy\, dz$, giebt den Zuwachs der Dichte der in dem Parallelepiped enthaltenen Flüssigkeit oder der Dichte in dem Punkt x, y, z. Diese Summe ist demnach das partiell in Beziehung auf die Zeit genommene Differential der Dichte, und man erhält:

$$(2) \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \frac{d.\varrho u}{dx} + \frac{d.\varrho v}{dy} + \frac{d.\varrho w}{dz} = 0.$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie diese Gleichung in den verschiedenen Fällen gedeutet werden muss, welche bei Flüssigkeiten vorkommen können.

167. Hat man es mit einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit zu thun, deren Dichte in allen Punkten gleich und unabhängig von der Zeit ist, so reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

In diesem Falle giebt es nur vier unbekannte Functionen p, u, v, w, und die Gleichungen (1) und (3) genügen zu ihrer Bestimmung.

168. Bei einer heterogenen tropfbaren Flüssigkeit ist ϱ eine Function von x, y, z, t, welche jedoch für dieselbe Molekel constant bleibt. Um diese Bedingung auszudrücken, muss

man ihr Differential nach allem t nehmen, indem man x, y, z als von t allein abhängig betrachtet, und es gleich Null setzen. Dadurch erhält man:

$$(4) \qquad \frac{d\varrho}{dt} + u\frac{d\varrho}{dx} + v\frac{d\varrho}{dy} + w\frac{d\varrho}{dz} = 0,$$

so dass die Gleichung (2) sich reducirt auf:

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

In diesem Falle sind fünf Functionen zu bestimmen, und man besitzt eine gleiche Zahl von Gleichungen, nämlich (1), (4), (5).

169. Bei einer zusammendrückbaren Flüssigkeit von constanter Temperatur besteht zwischen p und ϱ die Beziehung:

$$p = k\varrho,$$

welche in Verbindung mit (1) und (2) die fünf unbekannten Functionen bestimmt.

170. Bedingungen, welche sich auf die Oberfläche beziehen. — Die bisher erhaltenen Gleichungen gelten für alle Punkte im Innern der Flüssigkeit; und wenn diese unendlich ist, so hat man mit ihnen nur noch die Bedingungen des Anfangszustandes zu verbinden. Ist aber die Flüssigkeit begrenzt, so finden besondere Gleichungen statt für die Punkte ihrer Oberfläche. Man nimmt gewöhnlich an, dass die Molekel, welche anfangs mit einer festen oder beweglichen Wand in Berührung waren, beständig darin bleiben, und dass die Molekel, welche anfänglich der freien Oberfläche angehörten, ihr immer angehören. Durch diese Annahmen wird die Aufgabe sehr eingeschränkt, und gleichwohl giebt es noch sehr wenige Fälle, in welchen man die Rechnungen vollständig ausführen kann.

Es sei $F(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung einer Fläche, auf welcher eine Molekel stets bleiben muss. Nehmen wir an, dass bei einem gewissen Werthe von t ihre Coordinaten dieser Gleichung genügen, und lassen wir t um dt wachsen. Die Coordinaten wachsen dadurch um

$$udt,\ vdt,\ wdt;$$

und diese Incremente müssen der Differentialgleichung jener Fläche genügen, wenn man sie statt dx, dy, dz setzt. Daraus ergiebt sich folgende Bedingung:

$$\frac{dF}{dt}+u\frac{dF}{dx}+v\frac{dF}{dy}+w\frac{dF}{dz}=0.$$

Ist die Wand fest, so verschwindet der Ausdruck $\frac{dF}{dt}$.

Dieser Gleichung sind während der ganzen Bewegung die Molekel unterworfen, welche sich anfänglich in Berührung mit der in Rede stehenden Wand befanden. Aehnliche Gleichungen gelten für alle nicht freien Theile der Oberfläche.

171. Auf die freie Oberfläche wirkt ein bekannter Druck, welcher gewöhnlich in allen ihren Punkten derselbe ist, aber mit der Zeit variiren kann. Bezeichnet man ihn mit P, so ist die Gleichung dieser Oberfläche:

$$p-P=0;$$

woraus man für die auf ihr befindlichen Molekel nachstehende Bedingung ableitet:

$$\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}=\frac{dP}{dt}.$$

Diese verschiedenen Gleichungen, welche sich auf die Grenzen der Flüssigkeit beziehen, bestimmen in Verbindung mit dem Anfangszustand die willkürlichen Functionen, welche durch die Integration der partiellen Differentialgleichungen eingehen.

172. Wenn u, v, w die nach x, y, z genommenen partiellen Ableitungen einer Function $\varphi(x, y, z, t)$ sind, so lassen sich die Gleichungen (1) auf eine einzige zurückführen, und die Auflösung des Problems kommt auf Bestimmung von φ hinaus, weil man dann durch Differenziiren u, v, w findet. Wir nehmen dabei die äusseren Kräfte von solcher Beschaffenheit an, dass X, Y, Z die partiellen Derivirten einer Function V nach x, y, z bilden. Unter diesen Voraussetzungen kann man die Gleichungen (1) so schreiben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}=\frac{dV}{dx}-\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy}=\frac{dV}{dy}-\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz}=\frac{dV}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dz\,dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Indem man respective mit dx, dy, dz multiplicirt und addirt, erhält man:

$$(6)\quad \frac{dp}{\varrho} = dV - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\, d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

In dieser Gleichung sind die Differentiale nach x, y, z genommen, während man t als constant betrachtet.

Beide Seiten können immer in Beziehung auf x, y, z integrirt werden, wenn ϱ eine bekannte Function von p oder eine Constante ist.

173. Der letzte Fall findet statt bei einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit; für ihn erhält man:

$$\frac{p}{\varrho} = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Dem zweiten Gliede wäre noch eine willkürliche Function von t beizufügen; doch kann man dieselbe in φ einrechnen und braucht sie daher nicht zu schreiben.

Die Gleichung der Continuität ist in diesem Falle:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

oder:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Sie lässt φ finden, und nachdem man die willkürlichen Functionen bestimmt hat, erhält man u, v, w durch Differenziiren von φ.

174. Bei einer gasförmigen Flüssigkeit von constanter Temperatur ist $p = k\varrho$, und das erste Glied der Gleichung (6) wird $k\dfrac{dp}{p}$. Die Integration liefert:

$$k \log p = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

woraus man p als Function von φ entnehmen kann.

Die Gleichung (2) darf geschrieben werden:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d\left(p\dfrac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(p\dfrac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(p\dfrac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0;$$

und wenn man hier den Werth für p aus der vorigen ein-setzt, so hat man eine Gleichung, welche φ und folglich auch u, v, w bestimmt.

Sind die Bewegungen der Flüssigkeitstheile so rasch, dass die Temperatur in jedem Punkt abwechselnd steigt und fällt, so ist p nicht mehr ϱ einfach proportional, sondern hängt von der Zunahme der Temperatur ab, und diese kann als dem Zuwachse der Dichte proportional angesehen werden; mithin hängt p noch von ϱ ab, und umgekehrt. Man kann daher das erste Glied der Gleichung (6) integriren. Zur Bestimmung von φ dient die Gleichung (2).

175. Die äusseren Kräfte seien so beschaffen, dass X, Y, Z die partiellen Ableitungen einer Function V nach x, y, z bilden. Wenn dann u, v, w für irgend einen Werth von t die nach x, y, z genommenen partiellen Derivirten einer Function sind, so hat Lagrange gezeigt, dass sie es für jedes t sein werden.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes theilen wir die Zeit in unendlich kleine Intervalle und berechnen, um wieviel der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ während eines dieser Intervalle in demselben Punkt zunimmt. Es ist klar: wenn $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ in jedem Augenblick das Differential einer Function von x, y, z darstellt, so muss auch sein Increment stets ein solches Differential sein; und umgekehrt, wenn jener Ausdruck zu irgend einer Epoche ein vollständiges Differential ist und alle auf einander folgenden Incremente desselben solche Differentiale sind, so wird auch ihre Summe, also der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ zu jeder Epoche ein vollständiges Differential bilden.

Nehmen wir nun an, für $t = t_1$, wo $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$, habe man:

$$u_1\,dx + v_1\,dy + w_1\,dz = d\varphi_1,$$

während φ_1 eine Function der drei unabhängigen Variablen x, y, z bezeichne. Die Werthe, welche u, v, w in demselben Punkt für $t = t_1 + \varepsilon$ annehmen, lassen sich nach Potenzen von ε entwickeln, und wenn ε unendlich klein ist, so bleibt man bei den zwei ersten Gliedern stehen, wodurch

$$u = u_1 + u'\varepsilon,\; v = v_1 + v'\varepsilon,\; w = w_1 + w'\varepsilon$$

wird; u', v', w' stellen hier die nach t genommenen partiellen Derivirten von u, v, w für $t = t_1$ vor, welche Functionen von x, y, z sind.

Aus den vorstehenden Werthen von u, v, w ergiebt sich

$$udx + vdy + wdz = u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz + \varepsilon(u'dx + v'dy + w'dz).$$

Daraus sieht man, dass $udx + vdy + wdz$ für $t = t_1 + \varepsilon$ ein vollständiges Differential bildet, sobald $u'dx + v'dy + w'dz$ ein solches ist.

Um dies zu untersuchen, bedienen wir uns der Gleichungen (1). Für $t = t_1$ werden dieselben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = X - u' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = Y - v' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = Z - w' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}.$$

Wir multipliciren sie respective mit dx, dy, dz und addiren. Das dadurch erhaltene erste Glied ist ein vollständiges Differential in den Fällen der Nummern 173, 174. Man darf dann dP statt $\frac{dp}{\varrho}$ schreiben, indem man durch P eine gewisse Function von x, y, z bezeichnet. Und da wir annehmen, dass X, Y, Z die nach x, y, z genommenen partiellen Ableitungen einer gewissen Function V bilden, so folgt:

$$dP = dV - (u'dx + v'dy + w'dz)$$
$$- \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right],$$

demnach:

$$u'dx + v'dy + w'dz$$
$$= d\left\{V - P - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right]\right\};$$

wodurch in der That $u'dx + v'dy + w'dz$ als das Differential einer Function der drei unabhängigen Variablen x, y, z dargestellt wird.

Wenn also der Ausdruck $udx + vdy + wdz$ zu irgend einer Epoche ein vollständiges Differential ist, so wird er es noch sein, nachdem die Bewegung der Flüssigkeit sich unter allen Einwirkungen und Umständen während einer unendlich kleinen Zeit fortgesetzt hat. Indem man von diesem neuen Zeitpunkte ausgeht, beweist man wie vorher, dass $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ auch nach einem zweiten unendlich kleinen Intervall ein vollständiges Differential bildet, und so ohne Ende fort.

War daher diese Bedingung einmal erfüllt, so ist dies während der ganzen Bewegung der Fall; war sie dagegen einmal nicht erfüllt, so kann dies auch zu keiner Zeit stattfinden. Ob übrigens die Bedingung im Anfang erfüllt ist, davon überzeugt man sich unmittelbar, da die Anfangswerthe von u, v, w als Functionen von x, y, z gegeben werden.

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten überall Null, so hat man anfänglich:

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0,$$

was ein vollständiges Differential ist; die fragliche Bedingung ist also dann immer erfüllt.

176. Bei der sehr einfachen Bewegung einer Flüssigkeit, welche gleichförmig um eine feste Axe rotirt, ohne dass die Molekel ihre gegenseitige Lage ändern, bildet $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ kein vollständiges Differential. Denn bezeichnet ω die constante Winkelgeschwindigkeit, und nimmt man die Drehaxe zur Axe der z, so wird:

$$u = -\omega y,\quad v = \omega x,\quad w = 0$$

und folglich:

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \omega(x\,dy - y\,dx).$$

In diesem Falle kann daher das obige besondere Verfahren keine Anwendung finden, sondern man muss sich der allgemeinen Gleichungen bedienen.

Man hat:

$$\frac{du}{dt} = 0,\quad \frac{dv}{dt} = 0,\quad \frac{dw}{dt} = 0,\quad w = 0,$$

und die Gleichungen (1) werden:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x,\quad \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y,\quad \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = Z,$$

woraus folgt:

$$\frac{dp}{\varrho} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dy);$$

welche Gleichung mit der in der Hydrostatik, Nr. 131 gefundenen übereinstimmt.

Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit unter einer besonderen Voraussetzung.

177. Eine homogene tropfbare Flüssigkeit sei in einem Gefässe mit horizontaler Basis enthalten und fliesse durch eine Oeffnung aus, welche in dieser Basis angebracht und im Vergleich zu den horizontalen Schnitten des Gefässes klein ist; diese Schnitte seien wenig verschieden und von kleinen Dimensionen gegen die Höhe der Flüssigkeit. Dann lehrt die Erfahrung, dass die Molekel, welche sich in irgend einem Augenblick in derselben horizontalen Schicht befanden, immer in ihr bleiben, so lange sie der Oeffnung nicht sehr nahe kommen, und dass man die horizontalen Geschwindigkeiten vernachlässigen darf. Unter dieser Voraussetzung des Parallelismus der Schichten sind also nur zwei Unbekannte zu bestimmen, verticale Geschwindigkeit und Druck.

Wir nehmen die Axe der x in der Richtung der Schwere, folglich:

$$Y = 0,\ Z = 0,\ X = g.$$

Die zwei letzten Gleichungen (1) liefern:

$$\frac{dp}{dy} = 0,\quad \frac{dp}{dz} = 0;$$

welches zeigt, dass in allen Punkten desselben horizontalen Schnittes gleicher Druck stattfindet. Die erste Gleichung (1) wird:

$$\text{(a)} \qquad \frac{dp}{dx} = \varrho\left(g - \frac{du}{dt} - u\,\frac{du}{dx}\right).$$

Die Gleichung der Continuität (3) lässt sich im vorliegenden Falle nicht anwenden, weil sie die Derivirten von u, v, w enthält; denn obgleich v und w gegen u sehr klein sind, so kann man doch nicht sagen, dass ihre Derivirten gegen die von u vernachlässigt werden dürfen. Die Continuität wird hier einfach dadurch ausgedrückt, dass man die Menge Flüssigkeit, welche durch irgend einen Querschnitt während unendlich kleiner Zeit geht, derjenigen gleichsetzt, welche unterdessen durch die Oeffnung ausfliesst. Bezeichnet man mit ω den Flächeninhalt eines in der Entfernung x vom Ursprung durch das Gefäss geführten Horizontalschnitts, mit Ω den Flächeninhalt der Oeffnung und mit U die Ausflussgeschwindigkeit, so sind $\omega u dt$ und $\Omega U dt$ die gleichzusetzenden Volumina; man erhält folglich die Bedingung $\omega u = \Omega U$ oder:

$$\text{(b)} \qquad u = \frac{\Omega U}{\omega},$$

wo die Werthe von u, U sich auf denselben Zeitpunkt beziehen. U ist Function von t allein; ω ist eine durch die Gestalt des Gefässes gegebene Function von x, u eine Function von x und t. Lässt man t allein in u sich ändern, so erhält man die Geschwindigkeiten verschiedener Schichten bei ihrem Durchgang durch denselben Schnitt; ändert man x allein, so erhält man die Geschwindigkeiten verschiedener Schichten zu derselben Zeit; Aenderung von x und t zugleich ohne Abhängigkeit zwischen beiden giebt die Geschwindigkeit, welche zu einer anderen Zeit in einem anderen Schnitte stattfindet. Will man die Geschwindigkeit erfahren, welche nach der Zeit dt der Schicht zukommt, die für einen gegebenen Werth von t und von x die Geschwindigkeit u hat, so muss man t um dt und x um $dx = u dt$ ändern.

Vermöge (b) kann man u aus (a) eliminiren; man erhält

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\left(g - \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Durch Multipliciren mit dx und Integriren nach x von der oberen Fläche an findet man:

$$p = g\varrho x - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{\omega} - \frac{\varrho\Omega^2 U^2}{2\omega^2} + C.$$

Die Integrationsconstante C enthält kein x, kann aber von t abhängen. Das Integral $\int\frac{dx}{\omega}$ lässt sich in jedem besonderen Falle berechnen, da ω eine bekannte Function von x ist.

Es sind nun zwei verschiedene Fälle zu betrachten: entweder wird das Niveau der Flüssigkeit auf derselben Höhe erhalten, oder es sinkt durch den Ausfluss der Flüssigkeit, die nicht ersetzt wird, herab.

178. Zuerst betrachten wir den Fall, wo die Flüssigkeit beständig dieselbe Höhe behält. Der Abstand ihrer Oberfläche vom Anfangspunkte der x sei h, von der Oeffnung l. Den constanten Druck auf die Oberfläche bezeichne P, den Druck auf die Oeffnung P'. Wenn sich der ganze Apparat in demselben gasförmigen Mittel befindet, so ist $P' = P$.

Die Constante der vorigen Gleichung bestimmen wir so, dass $p = P$ wird für $x = h$; daraus findet man:

$$C = P - g\varrho h + \varrho \frac{\Omega^2 U^2}{2\,O^2},$$

wenn O den Inhalt der Oberfläche bezeichnet. Demnach ist:

$$\text{(c)} \qquad p = P + \varrho g(x-h) - \varrho\Omega \frac{dU}{dt}\int_h^x \frac{dx}{\omega} - \frac{\varrho\,\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Für $x = h + l$ hat man $p = P'$, $\omega = \Omega$; diesen drei Werthen muss die Gleichung (c) genügen. Indem wir setzen:

$$\int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} = m, \quad P - P' = g\varrho\delta,$$

erhalten wir daher:

$$\text{(d)} \qquad g\,(l + \delta) = m\Omega\,\frac{dU}{dt} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{U^2}{2}.$$

Diese Gleichung giebt:

$$dt = \frac{2m\Omega\,dU}{k^2 - \alpha^2 U^2},$$

wenn man setzt:

$$1 - \frac{\Omega^2}{O^2} = \alpha^2, \quad 2g\,(l + \delta) = k^2;$$

α ist von der Einheit wenig verschieden. Die Integration liefert:

$$t = \frac{m\Omega}{k\alpha}\log\frac{1}{C}\left(\frac{k + \alpha U}{h - \alpha U}\right);$$

die Constante C muss man aus dem Anfangswerthe von U bestimmen. Sind die Geschwindigkeiten Null für $t = 0$, so ergiebt sich $C = 1$, und die Gleichung, nach U aufgelöst, wird:

$$U = \frac{k}{\alpha} \frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}.$$

Da U bestimmt ist, so findet man u aus der Gleichung $u = \frac{\Omega U}{\omega}$ und p aus der Gleichung (c).

Die Exponentialgrössen nähern sich mit wachsendem t um so rascher der Null, je kleiner Ω ist; U nähert sich dadurch dem Grenzwerthe $\sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$, sowie u und p gegen entsprechende Grenzen convergiren. Mit Vernachlässigung von $\frac{\Omega^2}{O^2}$ wird der Grenzwerth der Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2g(l+\delta)}$.

Wenn zugleich $\delta = 0$ ist, d. h. an der oberen Fläche und an der Oeffnung derselbe Druck stattfindet, so wird die Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2gl}$. Dieselbe Geschwindigkeit würde ein Körper erlangen, wenn er im leeren Raum fallend den Weg l zurücklegte.

Nachdem die Geschwindigkeit U constant geworden, hat man $\frac{dU}{dt} = 0$, und die Gleichung (c) vereinfacht sich zu:

$$p = P + \varrho g (x - h) - \varrho \frac{\Omega^2 U^2}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2} \right).$$

Im Gleichgewicht würde der Druck

$$P + \varrho g (x - h)$$

betragen. Der Druck der Bewegung ist daher kleiner als der Druck des Gleichgewichts für alle Schnitte, bei welchen $\omega < O$, und grösser für alle Schnitte, bei welchen $\omega > O$.

Um das Volumen V der bis zu Ende der Zeit t ausgeflossenen Flüssigkeit zu finden, muss man $\Omega U dt$ zwischen 0 und t integriren. Man findet leicht:

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}} \log \frac{e^{\frac{k\alpha t}{2m\Omega}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2m\Omega}}}{2}.$$

Nach Verlauf einer gewissen Zeit darf man die zweite Exponentialgrösse vernachlässigen und erhält dadurch, indem man für α und k ihre Werthe setzt:

$$V = \frac{\sqrt{2g\,(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}} \cdot t - \frac{2\,m\,\log 2}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}.$$

Der erste Summand ist das Volumen, welches ausgeflossen wäre, wenn die Geschwindigkeit vom Anfang an ihren Grenzwerth $\frac{\sqrt{2g\,(l+\delta)}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$ gehabt hätte.

179. Wir gehen jetzt auf den Fall über, wo die Flüssigkeit nicht ersetzt wird, ihr Niveau also herabsinkt und h folglich eine unbekannte Function von t ist.

Die Gleichungen (a), (b), (c), (d) gelten auch hier; nur sind m und O jetzt bekannte Functionen von h, und l hängt von h ab durch die Gleichung:

$$h + l = a,$$

wo a den constanten Abstand der Oeffnung vom Anfangspunkte der x bezeichnet. Den vier Gleichungen muss man noch eine hinzufügen, welche ausdrückt, dass die während irgend eines Intervalls dt ausfliessende Flüssigkeit das Volumen hat, welches zwischen den zwei Oberflächen enthalten ist, die dem Anfang und dem Ende dieses Intervalls entsprechen. Diese Gleichung ist:

$$\text{(e)} \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\Omega\,U}{O}.$$

Die Gleichung (d) wird, indem man $a - h$ statt l schreibt:

$$\text{(f)} \qquad g\,(a + \delta - h) = m\,\Omega\,\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2\,U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Man hat also das System der zwei simultanen Gleichungen (e) und (f) zu integriren.

Durch Eliminiren von dt erhält man:

$$g\,(a + \delta - h) = \frac{m\,\Omega^2}{O}\,U\,\frac{dU}{dh} + \frac{\Omega^2\,U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right)$$

oder, wenn man $U^2 = 2gz$ setzt:

$$\frac{dz}{dh} + \frac{O}{m}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right) z + \frac{O}{m\,\Omega^2}\,(h - a - \delta) = 0;$$

eine lineare Gleichung erster Ordnung in Bezug auf z, die man in jedem Falle integriren kann, da O und m bekannte Functionen von h sind.

Wenn z und somit U als Function von h bekannt ist, so liefert die Gleichung (e) auch t als Function von h; und umgekehrt werden h und U als Functionen von t erhalten. Der Werth von u wird durch die Gleichung (b) gegeben, und derjenige von p durch (c). Die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge bestimmt sich dadurch, dass man das Volumen berechnet, welches zwischen dem anfänglichen und dem variablen Niveau enthalten ist. Der Werth von t liefert für $h = a$ die ganze Dauer des Ausflusses.

180. Ist Ω ausserordentlich klein im Vergleich zu den horizontalen Schnitten des Gefässes, so wird die Gleichung (d) sehr einfach. Man darf dann sowohl bei veränderlichem als constantem Niveau $\frac{\Omega}{O}$ und $m\Omega$ vernachlässigen, $m\Omega$ jedoch nur, sofern $\frac{dU}{dt}$ nicht sehr gross ist, was aber im Anfang der Bewegung stattfindet. Man erhält dadurch:

$$U^2 = 2g\,(l + \delta),$$

so dass U den Grenzwerth hat, den wir bei constantem Niveau für $t = \infty$ gefunden haben.

Diese Gleichung bleibt geltend, sofern nur die Oeffnung sehr klein ist, wie auch ihre Ebene gerichtet sein mag.

Die Erfahrung giebt aber die wirkliche Geschwindigkeit, wenn man sie aus dem Flächeninhalte der Oeffnung und dem ausgeflossenen Volumen bestimmt, nur gleich 0,62 U.

Permanente Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit.

181. Erhält man das Niveau einer Flüssigkeit beständig auf gleicher Höhe, so tritt nach Verlauf einer gewissen Zeit ein permanenter Zustand ein, bei welchem alle Umstände in demselben Punkt dieselben bleiben und nur von einem Punkte zum anderen variiren. Zwei Molekel, welche zu verschiedener Zeit den nämlichen Punkt einnehmen, werden dann dieselbe Curve in identischer Weise beschreiben.

Wir nehmen die Axe der x in der Richtung der Schwere. Das Princip von d'Alembert liefert folgende Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(g - u'),\quad \frac{dp}{dy} = -\,\varrho v',\quad \frac{dp}{dz} = -\,\varrho w',$$

worin u', v', w' die Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten irgend einer Molekel in einem gewissen Punkt nach der Zeit bezeichnen. Als Incremente der Coordinaten dieser Molekel mögen dx, dy, dz dem Zeitincrement dt entsprechen. Indem wir die vorstehenden Gleichungen durch dx, dy, dz multipliciren und addiren, erhalten wir:

$$dp = g\varrho\, dx - \varrho(u'dx + v'dy + w'dz)$$

folglich, wenn V die Geschwindigkeit der Molekel in irgend einem Punkte ihrer Bahn bezeichnet:

$$dp = g\varrho\, dx - \frac{\varrho}{2}\, d.V^2.$$

Integrirt man zwischen zwei Punkten dieser Trajectorie, welchen die Abscissen x_0, x angehören, so ergiebt sich:

$$\text{(a)} \qquad p - p_0 = g\varrho\,(x - x_0) - \frac{\varrho}{2}\,(V^2 - V_0^2);$$

p_0, V_0 sind die Werthe von p, V im ersten der beiden Punkte.

Nehmen wir nun an, die freie Oberfläche der Flüssigkeit bilde genau eine Horizontalebene und sei in allen Punkten einem gleichen und constanten Drucke P unterworfen; zählen wir überdies die x von dieser Ebene an. Setzt man in der Gleichung (a)

$$x_0 = 0, \quad p_0 = P,$$

so liegt der erste von beiden Punkten der Trajectorie in der freien Oberfläche, und man erhält:

$$p - P = g\varrho x - \frac{\varrho}{2}(V^2 - V_0^2).$$

In der Tiefe h unter dem oberen Niveau habe das Gefäss eine sehr kleine Oeffnung; man darf dann die Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung dieser Oeffnung als gleich betrachten, so dass V für $x = h$ nur einen Werth hat. Bezeichnet $g\varrho\delta$ den Unterschied der äusseren Drucke an der Oberfläche und an der Oeffnung, so giebt die vorstehende Gleichung, indem man $x = h$ setzt:

$$-g\varrho\delta = g\varrho h - \frac{\varrho}{2}\,(V^2 - V_0^2)$$

oder:

$$V^2 - V_0^2 = 2g\,(h + \delta).$$

Das Verhältniss der Fläche der Oeffnung zum Inhalt der Oberfläche sei k; dann hat man $V_0 = kV$, folglich:

$$V^2 (1 - k^2) = 2g (h + \delta),$$

mithin:

$$V = \sqrt{\frac{2g (h + \delta)}{1 - k^2}}.$$

Bei sehr kleinem k darf man k^2 vernachlässigen und erhält:

$$V = \sqrt{2g (h + \delta)}.$$

Diese Resultate haben wir vorher unter specielleren Voraussetzungen gefunden.

Ausfluss einer elastischen Flüssigkeit.

182. Auch hier machen wir die Voraussetzung des Parallelismus der Schichten, wodurch die jetzige Aufgabe der vorletzten sehr ähnlich wird; nur ist es erlaubt, die Schwere ausser Acht zu lassen, da diese keinen merklichen Einfluss auf den Druck hat.

Die Gleichung (a) vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{dp}{dx} + \varrho \frac{du}{dt} + \varrho u \frac{du}{dx} = 0.$$

Um die Gleichung der Continuität zu erhalten, betrachtet man zwei den Werthen x und $x + dx$ entsprechende horizontale Schnitte; man sucht die Gasmenge, welche während der Zeit dt durch den oberen Schnitt eintritt, und diejenige, welche unterdessen durch den unteren austritt. Der Ueberschuss der ersten Masse über die zweite, wenn man ihn durch das Volumen $\omega\, dx$ theilt, giebt das partielle Differential der Dichte nach der Zeit. Man findet auf diese Weise:

$$\omega \frac{d\varrho}{dt} + \frac{d \,.\, \varrho \omega u}{dx} = 0.$$

Bei constanter Temperatur ist:

$$p = k\varrho,$$

wo k eine gegebene Constante.

Vorstehende drei Gleichungen bestimmen p, ϱ, u als Functionen von t und x.

Durch Eliminiren von ϱ erhält man:

$$\frac{k}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = 0, \quad \omega \frac{dp}{dt} + \frac{d \,.\, p \omega u}{dx} = 0.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind nicht unter endlicher Form integrirbar.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, die Ausflussgeschwindigkeit zu kennen, nachdem Druck und Dichte in jedem Punkt constant geworden sind: ein Zustand, welcher bald eintritt, wenn das Gefäss mit einem Behälter in Verbindung steht, der das Gas ersetzt und an der oberen Fläche einen constanten Druck unterhält.

Ist dieser Zustand eingetreten, so hat man $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$, und die vorigen Gleichungen werden:

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx} + u\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d \,.\, p\omega u}{dx} = 0.$$

Die Integrale beider Gleichungen sind:

$$p\omega u = c, \quad k \log p + \frac{u^2}{2} = c',$$

während c, c' willkürliche Constanten bezeichnen.

Es sei O der Inhalt der oberen Fläche des Gases im Gefässe, P der Druck an derselben, U die Geschwindigkeit; die entsprechenden Werthe an der Oeffnung seien P', U', O'. Dann hat man:

$$\begin{aligned} PUO &= c, \quad 2k \log P + U^2 = 2c', \\ P'U'O' &= c, \quad 2k \log P' + U'^2 = 2c'; \end{aligned}$$

welche vier Gleichungen die Constanten c, c' sowie die Ein- und Ausflussgeschwindigkeit bestimmen.

Das Eliminiren von c, c' ergiebt:

$$U' = \frac{PO}{P'O'} \,.\, U, \quad U'^2 = U^2 + 2k \log \frac{P}{P'};$$

und daraus findet sich:

$$U = \sqrt{\frac{2k \log \frac{P}{P'}}{\frac{P^2 O^2}{P'^2 O'^2} - 1}}, \quad U' = \sqrt{\frac{2k \log \frac{P}{P'}}{1 - \frac{P'^2 O'^2}{P^2 O^2}}}.$$

Die Oeffnung O' ist kleiner als O, und der Druck P' muss kleiner sein als P, weil sonst kein Ausfluss stattfindet; folglich sind die Zähler und Nenner unter den Wurzelzeichen positiv und somit U, U' reell.

Es sind nun auch c, c' bekannt, und man kennt daher p, u als Functionen von ω und folglich von x.

Bei sehr kleinem $\frac{O'}{O}$ ist U sehr klein und $U' = \sqrt{2k \log \frac{P}{P'}}$.

Bemerkungen über den Widerstand der Flüssigkeiten.

183. Wenn ein fester Körper sich in einer Flüssigkeit bewegt, so erfährt er einen Widerstand, welcher abhängt von seiner Gestalt und Geschwindigkeit und von der Natur der Flüssigkeit. Der Druck auf die Punkte seiner Oberfläche ist dann sehr verschieden von demjenigen, welcher im Zustande des Gleichgewichts stattfinden würde, und die Rechnung konnte noch nicht mit Erfolg darauf angewendet werden. Selbst die Versuche haben noch keine empirischen Gesetze von solcher Allgemeinheit ergeben, dass diese der Anwendung auf Körper von beliebiger Gestalt fähig wären. Doch hat man einige hinlänglich allgemeine Resultate gefunden in Bezug auf den Widerstand bewegter Flüssigkeiten gegen Ebenen, die sich parallel zu sich selbst bewegen. Diese Resultate und die Versuche, aus welchen man dieselben hergeleitet hat, gehören aber in die Maschinenlehre. Wir beschränken uns auf einen Fall, welcher sich durch Rechnung behandeln lässt, nämlich auf Bestimmung des Drucks, der von einem Wasserstrahle gegen eine Ebene ausgeübt wird.

184. Druck eines Strahls auf eine Ebene. — Eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ fliesse aus durch eine Oeffnung von der Fläche ω. Die Geschwindigkeiten aller Molekel, während sie durch die Oeffnung gehen, seien gleich, parallel und von der Zeit unabhängig. Von der Schwere wollen wir absehen, um nur die Wirkung zu betrachten, welche die Flüssigkeit vermöge ihrer Ausflussgeschwindigkeit ausübt. Der Strahl treffe eine Ebene, die entweder fest ist oder sich parallel zu sich selbst gleichförmig bewegt, und die Flüssigkeit fliesse längs derselben ab. Diese Ebene sei hinreichend ausgedehnt, damit alle Molekel sie nur mit Geschwindigkeiten verlassen, welche zu ihr parallel sind. Man soll den Druck bestimmen, welchen sie auszuhalten hat.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo die Ebene in Ruhe bleibt und senkrecht auf der Richtung des Wasserstrahls steht. Die constante Geschwindigkeit desselben sei v. Wir nehmen die Axe der positiven x in der Richtung des Strahls. X bezeichne die Kraft, welche das Flächenelement $d\lambda$ der Ebene äussert, und welche dem Druck der Flüssigkeit auf dasselbe gleich und entgegengesetzt ist. Man hat:

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Statt $\Sigma X d\lambda$ schreiben wir R, dann ist:

$$R = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Unter Voraussetzung, dass der Zustand unveränderlich geworden ist, integriren wir diese Gleichung in Bezug auf die Zeit zwischen zwei um die Zeiteinheit entfernten Epochen; dies giebt:

$$R = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0.$$

Beide Summen erstrecken sich über dieselben Molekel. Sobald eine Molekel die widerstehende Ebene verlässt, ist für sie $\frac{dx}{dt} = 0$. Die Molekel auf der Ebene bilden in jedem Augenblick ein identisches System. Daher ist offenbar $R = v(\Sigma' m - \Sigma m)$, wenn Σm die Menge Flüssigkeit vorstellt, welche sich zu Anfang des betrachteten Zeitintervalls in dem Strahl befand, und $\Sigma' m$ den Theil dieser Flüssigkeit, der sich am Ende noch in demselben befindet. Der Unterschied beider Mengen ist die während der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeit $\varrho \omega v$; folglich hat man:

$$R = -\varrho \omega v^2.$$

185. Die Ebene werde nun parallel zu sich selbst bewegt und äussere in jedem Punkt nur normale Kräfte. Diejenige Componente ihrer Geschwindigkeit, welche in die Ebene selbst fällt, kommt nicht in Betracht, sondern blos die normale Geschwindigkeit u, welche wir als positiv betrachten, wenn sie mit v gleiche, und als negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung hat. Man ändert nichts an den Druckkräften, wenn man allen Punkten des Systems eine gemeinsame Bewegung ertheilt: der gegenwärtige Fall lässt sich daher auf den vorigen zurückführen. Dies geschieht, indem man $-u$ zu der Geschwindig-

keit eines jeden Punktes addirt, wodurch die Ebene zur Ruhe kommt und die Stromgeschwindigkeit $v - u$ wird. Der Ausdruck für den Widerstand gegen die Ebene ist folglich $\varrho\omega(v-u)^2$.

186. Die Ebene mache endlich mit der Richtung des Strahls irgend einen Winkel θ und bewege sich parallel zu sich selbst. Wir zerlegen ihre Geschwindigkeit in zwei Componenten, von welchen eine stets in die Ebene hineinfällt und ausser Acht bleibt, während die zu berücksichtigende u parallel zur Richtung des Strahls ist. Ertheilen wir dem ganzen System eine mit u gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit: die Ebene wird dadurch fest und die Stromgeschwindigkeit $v-u$.

Nimmt man jetzt die Axe der x senkrecht zu der festen Ebene, so gilt noch immer die Gleichung:

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0;$$

und nachdem der Zustand der Flüssigkeit permanent geworden ist, stellt das zweite Glied die während der Zeiteinheit ausgeflossene Masse $\varrho\,\omega\,(v - u)$ dar, multiplicirt mit der zur Ebene senkrechten Componente $(v-u)\sin\theta$ der Geschwindigkeit $v-u$. Der Druck auf die bewegte Ebene beträgt daher:

$$\varrho\,\omega\,(v - u)^2 \sin\theta.$$

Bezeichnet a die Geschwindigkeit der Ebene in der Richtung der Normalen, so ist $u = \frac{a}{\sin\theta}$, und der Druck wird durch diese Substitution:

$$\varrho\,\omega\,\frac{(v\sin\theta - a)^2}{\sin\theta}.$$

Bleibt die Ebene in Ruhe, so ist der Druck:

$$\varrho\,\omega\,v^2\sin\theta.$$

Man findet diese Formeln durch andere Betrachtungen bewiesen in dem Mémoire von Coriolis sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines. Dasselbe steht im 21. Heft des Journal de l'Ecole Polytechnique.

Von den kleinen Bewegungen der elastischen Flüssigkeiten.

187. Wenn alle Molekel eines Gases nur sehr kleine Bewegungen haben, so vereinfachen sich die allgemeinen Gleichungen bedeutend und führen zu einigen einfachen Gesetzen, welche wir entwickeln wollen.

Wir setzen voraus, dass der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ in jedem Augenblick das Differential einer Function φ von x, y, z, t, nach den Variablen x, y, z allein genommen, bilde. Bekanntlich wird dazu erfordert und genügt es, dass die Anfangswerthe von u, v, w die partiell nach x, y, z genommenen Ableitungen einer und derselben Function dieser drei als unabhängig betrachteten Variablen darstellen; was z. B. dann stattfindet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind.

Wir werden daher bei den folgenden Untersuchungen die Gleichung (6) der Nr. 172 anwenden. Zunächst aber wollen wir die Vereinfachungen derselben vornehmen, welche sich aus der Annahme ergeben, dass die Bewegungen sehr klein bleiben.

Im Gleichgewichtszustande des Gases sei v dessen überall gleiche Temperatur, D seine überall gleiche Dichte, die des Quecksilbers zur Einheit genommen, p_0 seine elastische Kraft und h die Höhe des Quecksilbers, welche sie misst; g bezeichne die Schwere. Man hat:

$$p_0 = gh.$$

Die variable Dichte des Gases heisse ϱ, seine positive oder negative Condensation γ und p seine elastische Kraft. Dann ist:

$$\varrho = D(1 + \gamma)$$

und bei gleicher Temperatur mit der des Gleichgewichtszustandes

$$p = gh(1 + \gamma).$$

Aber die Verdichtung (Verdünnung) γ entwickelt (bindet) eine gewisse Wärmemenge, welche ihr so lange proportional bleibt, als γ sehr klein ist, was wir annehmen. Wenn die Verdichtungen und Verdünnungen abwechselnd rasch genug auf einander folgen, wie dies bei den nachstehenden Untersuchungen der Fall sein wird, so hat weder die bei der Verdichtung frei werdende Wärme Zeit sich zu verbreiten, noch kann die Umgebung die bei der Verdünnung gebundene Wärme ersetzen. Der Erfolg wird also darin bestehen, dass in den Punkten, in welchen durch Condensation Wärme frei oder gebunden wird, die Temperatur sich um eine Grösse erhöht, welche das Zeichen der Condensation hat und ihrer Grösse proportional ist. Sollte dagegen die erforderliche Zeit zur Verbreitung oder zum Ersatz dieser Wärme sich finden, so wäre letztere ausser Acht zu lassen.

Es bezeichne θ die positive oder negative Zahl von Centesimalgraden, um welche bei einer Condensation γ die Temperatur v des Gases steigt; seine specifische Wärme bei constantem Druck heisse c, bei constantem Volumen c'; sein Ausdehnungscoëfficient sei α. In der Physik wird gezeigt, dass zwischen diesen Grössen die Beziehung besteht:

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right).$$

Man hat ferner die Proportion:

$$p : p_0 = D(1+\gamma)\left[1+\alpha(v+\theta)\right] : D(1+\alpha v).$$

Aus ihr folgt, wenn man gh statt p_0 setzt und das Product der sehr kleinen Grössen γ, θ sowie höhere Potenzen von α als die erste vernachlässigt:

$$p = gh(1+\gamma+\alpha\theta);$$

folglich, indem man für $\alpha\theta$ vorstehenden Werth nimmt:

$$p = gh\left(1+\gamma\frac{c}{c'}\right),$$

und daher:

$$\frac{dp}{\varrho} = \frac{ghc}{Dc'}\,\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

Die Gleichung (6) der Nr. 172 liefert jetzt, da wir X, Y, Z gleich Null voraussetzen:

$$\frac{ghc}{Dc'}\log(1+\gamma) = -\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Wir nehmen an, dass die Verdichtungen und Geschwindigkeiten zu Anfang und zu jeder Zeit sehr klein sind. Man darf deshalb die Quadrate von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ vernachlässigen und γ statt $\log(1+\gamma)$ nehmen. Dadurch reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$\frac{ghc}{Dc'}\gamma = -\frac{d\varphi}{dt}$$

oder, wenn man $\frac{ghc}{Dc'} = a^2$ setzt, auf:

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{1}$$

Die Gleichung der Continuität wird zunächst:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0$$

und vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen γ und φ.

Durch Eliminiren von γ zwischen ihnen erhält man:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \tag{3}$$

Somit ist das Problem zurückgebracht auf die Integration einer linearen Partialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten. Die willkürlichen Functionen bestimmt man aus den Anfangswerthen von φ und $\frac{d\varphi}{dt}$ ohne weitere Bedingungen, wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten hin unendlich ist. Im anderen Falle gelten, wie wir wissen, besondere Gleichungen für die Grenzen, welche die Schwierigkeiten der Rechnung bedeutend vergrössern.

Der Anfangswerth von $\frac{d\varphi}{dt}$ wird bekannt durch jenen von γ, welcher nothwendig gegeben sein muss. Der Anfangswerth von φ ergiebt sich bis auf eine Constante aus den Anfangswerthen der Geschwindigkeitscomponenten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, welche ebenfalls gegeben sein müssen. Diese Constante hat jedoch keinen Einfluss auf die gesuchten Grössen, welche alle durch Differenziiren der Function φ erhalten werden; man darf sie deshalb ausser Acht lassen.

188. Die Wirkungen legen sich über einander. — Denkt man sich in einer nach allen Seiten hin unendlichen elastischen Flüssigkeit verschiedene Anfangszustände und die aus ihnen hervorgehenden partiellen Bewegungen, welche, jede für sich, der Gleichung (3) genügen; denkt man sich darauf einen neuen Anfangszustand, welcher aus der Zusammensetzung der ersten resultirt, so kann die auf ihn folgende Bewegung zu irgend einer Epoche erhalten werden durch Zusammensetzen der partiellen Bewegungen, welche zu dieser Epoche stattfinden würden. Diese Zusammensetzung ist in dem gewöhnlichen Sinne gemeint für die Geschwindigkeiten und besteht in einer algebraischen Addition für die Verdichtungen.

Es seien φ_1, φ_2, φ_3, . . . die Werthe von φ, welche den partiellen Bewegungen entsprechen und einzeln der Gleichung (3) genügen. Setzen wir:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots,$$

so genügt die Function φ selbst der Gleichung (3) und stellt folglich eine besondere Bewegung der Flüssigkeit dar. Ihre Ableitung nach t ist die Summe der Ableitungen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Nimmt man alle diese Ableitungen für $t = 0$, so sieht man zunächst, dass die anfängliche Verdichtung der Flüssigkeit in der durch φ dargestellten Bewegung die Summe jener anfänglichen Verdichtungen ist, welche den verschiedenen partiellen Bewegungen angehören. Ebenso sind die Ableitungen von φ nach x, y, z die Summen der Ableitungen von φ_1, φ_2, φ_3, . . .; und setzt man hier $t = 0$, so zeigt sich, dass in der durch φ dargestellten Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit einer jeden Molekel aus der Zusammensetzung derjenigen Geschwindigkeiten resultirt, welche in den einzelnen Anfangszuständen dieser Molekel zukommen würden. Mithin ist der Anfangszustand der Flüssigkeit in der durch φ dargestellten Bewegung, sowohl was die Condensationen als was die Geschwindigkeiten betrifft, identisch mit demjenigen, welchen wir im Auge hatten; daher stimmen auch die auf diese beiden Anfangszustände folgenden Bewegungen jederzeit überein. Legt man jetzt der

Variablen t in den Functionen $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ einen beliebigen Werth bei, so bleiben diese immer die Summen der entsprechenden Ableitungen von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Damit ist bewiesen, dass in der auf den resultirenden Anfangszustand folgenden Bewegung die Verdichtungen und Geschwindigkeitscomponenten in jedem Augenblick die algebraischen Summen von denjenigen sind, welche zu derselben Zeit und in denselben Punkten den durch die einzelnen Anfangszustände bestimmten Bewegungen entsprechen würden.

Bewegung eines Gases in einem unendlichen Cylinder.

189. Der senkrechte Schnitt dieses unendlichen, mit einem homogenen Gase angefüllten Cylinders bilde irgend eine Curve. In einer beliebigen Ausdehnung werden die Gasmolekel auf solche Weise verschoben, dass diejenigen, welche einer auf den Kanten senkrechten unendlich dünnen Schicht angehörten, ihr noch angehören und sich parallel mit den Kanten fortbewegt haben; darauf werden allen verschobenen Molekeln Geschwindigkeiten mitgetheilt, welche parallel zu den Kanten und für die in demselben Schnitt befindlichen Molekel gleich gross sind: und nun wird das Fluidum sich selbst überlassen, ohne dass irgend eine äussere Kraft wirkt. Man soll alle Umstände der Bewegung bestimmen, welche aus diesem Anfangszustand hervorgeht.

Offenbar wird jede Molekel sich nur parallel mit den Kanten des Cylinders bewegen, und alle in demselben Schnitt befindlichen Molekel werden gleiche Bewegung haben. Wir nehmen die Richtung der Kanten zur Axe der x; die Condensation γ und die Geschwindigkeit u oder $\frac{d\varphi}{dx}$ hängen somit von x und t allein ab.

Die Gleichungen der Aufgabe sind:

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}. \tag{1}$$

Die Function $\psi(x)$ möge die Anfangsgeschwindigkeiten ausdrücken und $\chi(x)$ die anfänglichen Verdichtungen, dann muss man haben:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \text{ für } t = 0. \tag{2}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist:

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at), \tag{3}$$

wo F_1, f_1 willkürliche Functionen bezeichnen, deren Ableitungen F, f heissen mögen. Zur Bestimmung dieser Derivirten geben die Gleichungen (2):

$$f(x) + F(x) = \psi(x),$$

$$f(x) - F(x) = a\chi(x);$$

daraus folgt:

$$f(x) = \frac{\psi(x) + a\chi(x)}{2},\ F(x) = \frac{\psi(x) - a\chi(x)}{2}.$$

Differenziirt man jetzt die Gleichung (3) nach x und nach t, so findet sich vermöge der für die Functionen f, F bestimmten Werthe:

$$u = \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2} + \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2},$$

$$a\gamma = \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2} - \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2}.$$

Der Einfachheit wegen behalten wir jedoch die Bezeichnungen F, f bei und schreiben also:

$$u = F(x + at) + f(x - at), \tag{4}$$

$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at). \tag{5}$$

Die Functionen ψ, χ sind gegeben für alle Werthe der Variablen zwischen $-\infty$ und $+\infty$; man kennt daher u und γ für beliebige Werthe von x und t.

Um die Bewegung einer Schicht zu erfahren, welcher im Anfangszustand die Abscisse α zukam, muss man $\frac{dx}{dt}$ statt u in (4) setzen und die so erhaltene Gleichung integriren. Man findet dadurch die Abscisse dieser Schicht als Function der Zeit. Die bei der Integration eingehende Constante bestimmt sich aus der Bedingung, dass $x = \alpha$ für $t = 0$.

190. Wir wollen den besonderen Fall untersuchen, wo die anfängliche Erschütterung begrenzt ist und sich von $x = 0$ bis $x = l$ oder vom Ursprung A bis B erstreckt.

Fig. 13.

Die gegebenen Functionen ψ, χ sind jetzt Null für jeden Werth der Variablen, der kleiner als Null oder grösser als l; und folglich ist dasselbe der Fall mit den Functionen F, f. Wir theilen diese Untersuchung in drei Theile, welche den Abschnitten entsprechen, in welche die anfängliche Erschütterung die Axe der x theilt.

1. Betrachten wir zuerst irgend einen Punkt M ausserhalb AB auf Seite der positiven x, für welchen also $x > l$, und setzen wir $t > 0$.

Dann ist:

$$x + at > l$$

und folglich:

$$F(x + at) = 0, \; f(x + at) = 0.$$

Die Formeln (4), (5) vereinfachen sich zu:

$$(6) \qquad \begin{cases} u = f(x - at), \\ a\gamma = f(x - at), \end{cases}$$

so dass man zwischen der Condensation und Geschwindigkeit die einfache Beziehung erhält:

$$u = a\gamma.$$

Damit aber u und γ nicht Null seien, muss man haben:

$$x - at \begin{matrix} < l \\ > 0 \end{matrix}$$

oder:

$$t \begin{matrix} > \dfrac{x - l}{a} \\ < \dfrac{x}{a} \end{matrix}.$$

Mithin besteht Ruhe in dem Punkt M bis zu der Epoche:

$$t = \frac{BM}{a},$$

und von da an findet Bewegung durch ihn statt bis zu:

$$t = \frac{AM}{a}.$$

Darauf tritt wieder Ruhe ein und dauert nun ohne Ende fort.

Demnach dauert die Bewegung in jedem Punkt ein Zeitintervall $\frac{l}{a}$ hindurch, und sie pflanzt sich nach der Richtung BX mit constanter Geschwindigkeit a fort. Folglich hat der erschütterte Theil oder die Welle in jedem Augenblick die Länge l. In einer solchen Welle kommen gleichzeitig alle Werthe von u und γ vor, denn die Variable hat in ihren verschiedenen Schnitten der Reihe nach alle Werthe von 0 bis l. Irgend zwei zu verschiedenen Epochen stattfindende Wellen sind also identisch. Indem jeden Augenblick eine neue, mit der vorigen identische Welle entsteht, sieht es so aus, als ob die alte Welle sich mit der Geschwindigkeit a in der Richtung BX fortbewegte; was jedoch nichts weiter sagen will, als dass nach der Zeit t' der Zustand in dem Schnitte $x + a(t' - t)$ genau derselbe ist wie nach der Zeit t in dem Schnitte x.

2. Für einen Punkt M', bei welchem $x < 0$ und um so mehr $x - at < 0$, hat man:

$$F(x - at) = 0, \; f(x - at) = 0;$$

die Formeln (4), (5) werden:

$$(7) \qquad \begin{cases} u = F(x + at), \\ a\gamma = - F(x + at), \end{cases}$$

daher:

$$u = - a\gamma.$$

Damit u und γ Werthe erhalten, welche von Null verschieden sind, muss man haben:

$$x + at \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix},$$

folglich:

$$t \begin{matrix} > - \frac{x}{a} \\ < \frac{l - x}{a} \end{matrix}.$$

In dem Punkt M' ist daher Bewegung nur während des Zeitintervalls

$$\text{von } t = \frac{AM'}{a} \text{ bis } t = \frac{BM'}{a}.$$

Die Bewegung pflanzt sich in dem Theile AX' wie in BX mit der Geschwindigkeit a fort; sie dauert in jedem Punkt eine Zeit $\frac{l}{a}$ hindurch. Der erschütterte Theil oder die Welle hat jeden Augenblick die Länge l, und alle auf einander folgenden Wellen sind identisch. Man kann daher wieder sagen, die Welle schreite in der Richtung der negativen x gleichförmig weiter mit der Geschwindigkeit a; der Sinn davon ist, dass nach der Zeit t' in dem Schnitte $x - a(t' - t)$ genau derselbe Zustand stattfindet wie nach der Zeit t in dem Schnitte x.

3. Betrachten wir zuletzt einen Punkt M'' zwischen A und B, so ist:

$$x \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix};$$

daher liegen während einer gewissen Zeit $x - at$ und $x + at$ beide zwischen 0 und l, und so lange bestehen alle Glieder in den Formeln (4), (5). Es wird aber $x + at > l$ nach dem Zeitpunkt, für welchen

$$at = BM'',$$

und von da an sind die Functionen von $x + at$ Null. Ferner wird $x - at$ negativ nach der Epoche, für welche

$$at = AM'',$$

und dann verschwinden die Functionen von $x - at$.

Betrachtet man die beiden Theile der Formeln (4), (5) so, als ob sie die Geschwindigkeiten und Condensationen in zwei verschiedenen Wellen ausdrückten, von denen jede mit der Geschwindigkeit a, die eine im Sinne der negativen x und die andere im Sinne der positiven x, fortschreitet, während sie immer dieselbe Beschaffenheit behalten: so kann man für einen beliebigen Zeitpunkt den Zustand des Gases dadurch erhalten, dass man diese beiden Wellen in die Lage bringt, in welche ihre Bewegung sie zu dieser Epoche geführt hat, und nun die Verdichtungen und Geschwindigkeiten an den Stellen addirt, wo die Wellen sich durchdringen, wenn sie noch nicht gänzlich getrennt sind.

Diejenigen Zustände, welche dem Zeitanfang vorangehen, würde man erhalten, wenn man dieselben Wellen in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit a während des Zeitraums fortschreiten liesse, um welchen die fragliche Epoche vom Zeitanfang entfernt liegt.

191. Wir haben gesehen, dass eine anfängliche Erschütterung von endlicher Länge zwei Wellen von derselben Länge erzeugt, welche sich mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung bewegen. Es ist aber möglich, dass eine dieser Wellen nicht existirt. Die den Formeln (6) entsprechende Welle verschwindet, wenn man für alle Werthe von z zwischen 0 und l hat:

$$\psi(z) + a\chi(z) = 0.$$

Es bleibt dann nur die den Formeln (7) entsprechende Welle übrig. Diese letzte würde verschwinden und blos die erste übrig bleiben, wenn

$$\psi(z) - a\chi(z) = 0$$

wäre. Damit nur eine Welle vorhanden sei, so ist hiernach nothwendig und hinreichend, dass $\frac{\psi(z)}{\chi(z)} = \pm a$; d. h. es muss im Anfangszustand das Verhältniss der Geschwindigkeit zur Condensation in jedem Punkt des erschütterten Theils $+ a$ oder $- a$ betragen.

Bewegung eines Gases in einem Cylinder, welcher nach einer Richtung begrenzt ist.

192. Nachdem wir die Bewegung in einem nach beiden Richtungen unendlichen Cylinder betrachtet haben, wollen wir jetzt die Aenderung untersuchen, welche sie für den Fall erleidet, wo der Cylinder nach einer Richtung begrenzt ist, also entweder durch eine feste Ebene geschlossen wird oder sich in einen unendlichen Gasvorrath öffnet, der einen constanten Druck auf die Endfläche ausübt.

1. Das Rohr sei durch eine feste Ebene geschlossen. — Zählen wir die positiven x von dieser Ebene an in der Richtung des Rohres.

Es wurde früher allgemein angenommen, dass die Molekel, welche zu Anfang in Berührung mit einer Wand stehen, immer darin bleiben. Demnach ist im vorliegenden Falle die

Geschwindigkeit in dem Schnitte, für welchen $x = 0$, beständig Null, oder man hat:

(1) $$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ bei jedem } t.$$

Diese neue Bedingung muss mit jenen verbunden werden, welche aus dem Anfangszustande des Gases hervorgehen, der in der ganzen Ausdehnung des Rohrs, also für alle positiven Werthe von x gegeben ist. Wir bezeichnen die anfängliche Geschwindigkeit und Verdichtung wieder durch $\psi(x)$ und $\chi(x)$. Diese Functionen sind nur für die positiven Werthe der Variablen gegeben; für negative Werthe derselben sind sie dagegen ganz willkürlich. Gerade diese Unbestimmtheit ist es, welche die Erfüllung der auf das Ende des Rohrs bezüglichen Bedingung gestattet; denn wir haben gesehen, dass, wenn diese Functionen für alle Werthe der Variablen gegeben sind, der Werth von φ vollkommen bestimmt ist, und man ihn keiner neuen Bedingung mehr unterwerfen kann.

Der allgemeine Werth von φ, welcher der Differentialgleichung genügt, ist immer:

(2) $$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (1) führt zu folgender Gleichung:

$$F(at) + f(- at) = 0.$$

Diese muss für einen in Grösse und Zeichen beliebigen Werth von t gelten; man hat daher für jedes z:

(3) $$F(z) + f(- z) = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Functionen F, f, welche durch ψ, χ nur für die positiven Werthe der Variablen gegeben sind, auch für ihre negativen Werthe; man erhält nämlich:

$$f(- z) = - F(z), \quad F(- z) = - f(z).$$

Beide Bedingungen können geometrisch sehr einfach dargestellt werden. Denkt man sich die Curven, deren Gleichungen

$$y = F(x), \quad y = f(x)$$

sind, in der ganzen Ausdehnung der Axe der x verzeichnet, so hat der geometrische Ort, welcher aus dem Theile einer Curve über der positiven Hälfte und aus dem Theile der anderen Curve über der negativen Hälfte besteht, den Ursprung zum Mittelpunkt.

Die Bedingung (1), welche die Unbeweglichkeit der einen

Gasschicht ausdrückt, hat also zur vollständigen Kenntniss der Functionen F, f geführt und damit zur Lösung der Aufgabe.

Die Geschwindigkeit $u = \frac{d\varphi}{dx}$ und die Verdichtung $\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ bestimmen sich aus (2) so:

$$u = F(x + at) + f(x - at), \tag{4}$$

$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at). \tag{5}$$

Wenn man hier $-x$ statt x schreibt und den neuen Werth von u durch u_1 sowie den von γ durch γ_1 bezeichnet, so erhält man:

$$u_1 = F(-x+at)+f(-x-at) = -f(x-at) - F(x+at) = -u,$$

$$a\gamma_1 = -F(-x+at)+f(-x-at) = f(x-at) - F(x+at) = a\gamma.$$

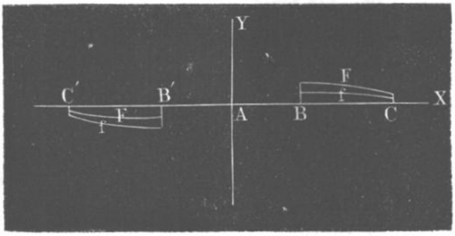
Es ergeben sich somit in zwei von der festen Ebene gleich weit entfernten Schnitten, welche auf beiden Seiten dieser Ebene liegen, gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten und gleiche Verdichtungen. Dies gilt im Anfangszustand und für jedes t.

Wir wollen hier eine wichtige Bemerkung machen über das Verfahren, wodurch man in der Rechnung die Bedingungen ausdrückt, welche sich auf die Grenzen beziehen. Die partielle Differentialgleichung würde für die Bewegung des homogenen Gases noch gelten, wenn man unter Wegnahme der festen Wand das Rohr rückwärts unendlich verlängert und mit demselben Gase angefüllt hätte. Ueber den Anfangszustand in dem ganzen Raume, um welchen man das System erweitert hat, kann man willkürlich verfügen; es kommt daher darauf an, ihn so zu wählen, dass wenn man nachher das ganze System sich selbst überlässt, die physikalischen Bedingungen, welche sich auf die Grenzen bezogen, von selbst jeden Augenblick erfüllt werden, und man folglich auf dieselben nicht besonders Rücksicht zu nehmen braucht. Kann man dahin gelangen, so geht die Aufgabe für das begrenzte System in die immer leichtere für das unendliche System mit bekanntem Anfangszustand über.

Hier ist leicht zu sehen, dass man zu dem Ende den Anfangszustand in der Verlängerung des Rohres so wählen muss, wie die Rechnung dies ergab. Denn offenbar bleiben dann die Molekel, welche die Stelle der Wand einnehmen, beständig in Ruhe, weil sie jeden Augenblick durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte angegriffen werden.

193. Untersuchen wir insbesondere den Fall, wo die anfängliche Erschütterung nur zwischen den Abscissen d und $d+l$ stattfindet. Die Functionen F, f sind jetzt Null für alle positiven Werthe der Variablen, welche nicht zwischen d und $d+l$ liegen; der Gleichung (3) zufolge sind sie aber auch Null für alle negativen Werthe, welche nicht zwischen $-d$ und $-d-l$ liegen. Dies stellt die Figur dar, in welcher:

Fig. 14.



$$AB = AB' = d,\ BC = B'C' = l.$$

Der Theil BC der Erschütterung erzeugt zwei Wellen, von denen die eine mit der Geschwindigkeit $+a$ und die andere mit der Geschwindigkeit $-a$ fortschreitet. Der Theil $B'C'$ erzeugt zwei Wellen, welche in Bezug auf die Ebene A immer symmetrisch mit den beiden ersten sind.

Sind die zwei Wellen, welche gegen A fortschreiten, an dieser Ebene angekommen, so setzen sie ihren Weg fort und durchdringen sich, indem ihre Wirkungen sich in den gemeinschaftlichen Punkten nach dem Gesetz der Nr. 188 über einander legen. Hieraus ersieht man, auf welche Weise in dem geschlossenen Rohre AX die Reflexion der von BC gegen A fortschreitenden Welle erfolgt, sobald ihr vorderes Ende A erreicht hat. Um während des Vorgangs dieser Reflexion für einen beliebigen Augenblick den Zustand in irgend einem Schnitte, dessen Abscisse $x \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix}$, zu erhalten, denke man sich die Wand A nicht vorhanden, also die von BC gegen A rückende Welle ihren Weg ungehindert fortsetzend; man braucht dann nur die Geschwindigkeit, welche in Folge dieser Welle in dem Schnitte x stattfindet, zu addiren mit jener Geschwindigkeit, welche gleich und entgegengesetzt ist der gleichzeitig in Folge derselben Welle in dem Schnitte $-x$ stattfindenden; die Condensationen beider Schnitte muss man unverändert addiren. Die Reflexion von der Wand A ist beendigt in dem Augenblick, wo das zweite Ende der von BC ausgegangenen Welle in A ankommen würde; die Geschwindigkeit, welche dann in einem Schnitte $x \begin{smallmatrix} > 0 \\ < l \end{smallmatrix}$ stattfindet, ist gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche bei Ankunft des vorderen Wellenendes in dem Schnitte $l - x$ stattgefunden hat; die Condensation aber ist dieselbe. Darauf schreitet die so reflectirte Welle im Sinne der positiven x ohne Ende rückwärts.

Diese Wirkung erfolgt, welche Länge auch der erschütterte Theil haben mag; derselbe kann sich von der Wand A bis $x = \infty$ ausdehnen, er kann auch eine unendlich kleine Länge haben. Findet man es vortheilhaft, die Erschütterung in unendlich kleine Theile zu zerlegen, so hat man nur die Wirkungen zusammenzusetzen, welche den einzelnen Elementen nach einer beliebigen Zeit entsprechen, und man erhält dadurch die Wirkung, welche der gegebenen Erschütterung nach derselben Zeit entspricht.

2. Das Rohr sei offen. — Es öffne sich mit dem senkrechten Schnitte A in einen nach allen Seiten hin unendlichen Gasvorrath, welcher einen constanten Druck auf die Endfläche ausübt. Diesen Druck würde man im Gleichgewicht überall im Gase des Rohrs beobachten; γ bezeichnet die Zunahme der diesem Gleichgewicht entsprechenden Dichte. Wir zählen die positiven x wieder von A an in der Richtung des Rohrs.

Für alle Punkte des Gases im Rohre ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

und man hat die Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ bei jedem } t. \tag{2}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei $\psi(x)$, die anfängliche Verdichtung $\chi(x)$. Diese Functionen werden nur zwischen $x = 0$ und $x = \infty$ gegeben; sie sind dagegen ganz willkürlich zwischen $x = 0$ und $x = -\infty$. Diese Unbestimmtheit verstattet wieder, dass man der auf das Ende des Rohrs bezüglichen Bedingung genügt.

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist wie früher:

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (2) ergiebt, wenn z der Grösse und dem Zeichen nach beliebig ist und F, f die Ableitungen von F_1, f_1 bezeichnen:

$$(3) \qquad F(z) = f(-z).$$

Diese Gleichung bestimmt die Functionen F, f, welche durch ψ, χ nur für alle positiven Werthe der Variablen gegeben waren, auch für alle negativen Werthe derselben. Construirt man die Curven, deren Gleichungen

$$y = F(x),\ y = f(x)$$

sind, so ist der geometrische Ort, welcher aus dem Theile einer Curve über der positiven Axe der x und aus dem Theile der anderen über der negativen Axe besteht, symmetrisch in Bezug auf die Axe der y. Ferner ist hier wie schon in dem vorigen Falle zu bemerken, dass die Aufgabe dieselbe ist, als wenn man das Rohr nach der Seite der negativen x unendlich verlängerte und dem Gase in dieser Verlängerung denjenigen Anfangszustand ertheilte, welcher sich aus den Werthen von F, f ergiebt, die wir für die negativen Werthe der Variablen bestimmt haben.

Folgende Formeln drücken u und γ aus:

$$(4) \qquad u = F(x + at) + f(x - at),$$

$$(5) \qquad a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Schreibt man $-x$ statt x und bezeichnet die neuen Werthe von u, γ durch u_1, γ_1, so erhält man unter Rücksicht auf (3):

$$u_1 = F(-x + at) + f(-x - at) = f(x - at) + F(x + at) = u,$$

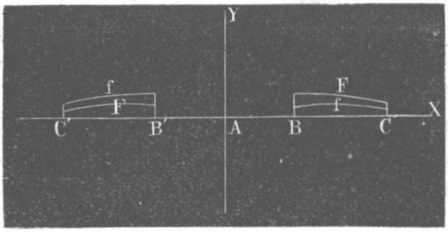
$$a\gamma_1 = -F(-x + at) + f(-x - at) = -f(x - at) + F(x + at) = -a\gamma.$$

Somit sind in zwei senkrechten Schnitten, welche auf beiden Seiten des Ursprungs liegen und gleich weit von diesem abstehen, die Geschwindigkeiten gleich und gleich gerichtet, die Verdichtungen aber gleich und entgegengesetzt. Dies gilt im Anfangszustande und für jeden Zeitpunkt.

Bei einem offenen Rohre besteht demnach das Mittel, um die Aufgabe auf den Fall eines nach beiden Seiten unendlichen Rohres zurückzuführen, darin, dass man sich die Verlängerung mit demselben Gase erfüllt denkt und diesem einen solchen Anfangszustand beilegt, dass in irgend einem senkrechten Schnitte ganz dieselbe Geschwindigkeit stattfindet wie in dem Schnitte, welcher in der anderen Hälfte des Rohres gleich weit vom Ursprung entfernt liegt, und dass die Verdichtungen in beiden Schnitten gleich, aber entgegengesetzt sind.

194. Wir wollen den besonderen Fall betrachten, wo die anfängliche Erschütterung eine endliche Ausdehnung BC zwischen den Abscissen d und $d + l$ hat. Die Functionen F, f verschwinden jetzt für alle positiven Werthe der Variablen, welche nicht zwischen d und $d + l$ liegen, und zufolge (3) auch für alle negativen Werthe ausserhalb des Intervalls von $-d$ bis $-d-l$. Sie werden durch die Curven der Figur dargestellt. Jede der Erschütterungen BC, $B'C'$ erzeugt zwei Wellen, welche mit constanter Geschwindigkeit a fortschreiten. Die beiden Wellen, welche sich von A entfernen, geben zu keiner besonderen Bemerkung Veranlassung. Die beiden anderen kommen zugleich in dem Schnitte A an und setzen dann ihren Gang fort, wobei ihre Wirkungen sich in den gemeinschaftlichen Punkten nach dem Gesetz der Nr. 188 über einander legen. Wenn das zweite Ende einer jeden in A angekommen ist, so sind beide Wellen völlig getrennt, und die von $B'C'$ ausgegangene setzt nun ihren Weg in der Richtung der positiven x bis ins Unendliche fort. Die Reflexion, welche in dem offenen Rohre an der Oeffnung A eintritt, erzeugt also genau diese letzte Welle. Der Vorgang der Reflexion ist analog dem oben beschriebenen.

Fig. 15.



Trifft die reflectirte Welle auf eine neue Oeffnung, welche in den unendlichen Gasvorrath hineingeht, so erleidet sie neuerdings eine Reflexion in derselben Weise und wird wieder identisch mit der ersten einfallenden Welle. Diese Erscheinung wiederholt sich unendlich oft.

Bewegung eines Gases in einem nach beiden Richtungen begrenzten Rohre.

195. Wenn das Rohr nach beiden Richtungen begrenzt ist, so gehen an seinen Enden, mögen diese offen oder ge-

schlossen sein, ähnliche Wirkungen vor wie diejenigen, welche wir betrachtet haben. Jedes Element der Erschütterung erzeugt zwei Wellen, welche in entgegengesetztem Sinne fortschreiten und an den Enden nach den Gesetzen reflectirt werden, die wir kennen gelernt haben. Hieraus ergiebt sich die Periodicität der Bewegung und die Dauer der Periode.

Betrachten wir zunächst ein an beiden Enden geschlossenes Rohr. Ein unendlich kleines Element der anfänglichen Erschütterung erzeugt zwei elementare Wellen. Verfolgen wir den Gang einer von ihnen. Ist sie am Ende angekommen, so wird sie so reflectirt, dass nach der Reflexion die Verdichtung wieder die vorige ist und die Geschwindigkeit nur ihr Zeichen geändert hat; am zweiten Ende angekommen, erleidet sie eine neue Reflexion, nach welcher die Verdichtung wieder dieselbe ist und die Geschwindigkeit abermals nur das Zeichen geändert hat: sie befindet sich dann wieder in demselben Zustand wie bei ihrem Ausgang. Diese elementare Welle kehrt in ihre anfängliche Lage zurück, nachdem sie mit der Geschwindigkeit a die doppelte Länge des Rohres zurückgelegt hat. Gleichzeitig mit ihr nehmen alle Elementarwellen ihre respectiven Anfangslagen wieder ein; folglich ist in diesem Augenblick der Zustand des Gases in dem ganzen Rohre identisch mit dem Anfangszustand. Die folgenden Zustände sind daher Wiederholungen der bis dahin stattgehabten; und wenn l die Länge des Rohrs, so ist die Dauer der Periode $\frac{2l}{a}$.

Eine analoge Betrachtung zeigt, dass auch in einem an beiden Enden offenen Rohre der Zustand des Gases wieder derselbe wird, wenn die elementare Welle den Weg $2l$ durchlaufen hat.

Ist aber das Rohr an einem Ende geschlossen und am anderen offen, so sind die Umstände nicht ganz dieselben. Damit der Zustand des Gases wieder derselbe werde, muss die elementare Welle zweimal die gleiche Art der Reflexion erleiden; da nun an beiden Enden verschiedene Reflexionen stattfinden, so muss diese Welle die Länge des Rohrs viermal durchlaufen, und folglich beträgt die Dauer der Periode $\frac{4l}{a}$.

Unter **Schwingung** versteht man eine periodisch wiederkehrende Bewegung. Man weiss aus der Physik, dass der Ton um so höher wird, je grösser die Anzahl der Schwingungen in derselben Zeit ist. Die obigen Resultate zeigen, dass der Ton einer an einem Ende offenen und am anderen geschlossenen Röhre die untere Octave von demjenigen bildet, welchen ein gleich langes Rohr giebt, das an beiden Enden offen oder geschlossen ist.

Uebrigens muss man bemerken, dass die Dauer, welche wir für die Periode gefunden haben, eine obere Grenze ist. Wir haben eingesehen, dass nach diesem Zeitintervall derselbe Zustand des Gases wiederkehrt; und im Allgemeinen wird diese Wiederkehr nicht früher eintreten. Der Anfangszustand könnte aber so beschaffen sein, dass er sich vor Ablauf jener Periode identisch wieder erzeugte; offenbar müsste dann die kleinere Periode ein Theiler der oben gefundenen sein.

Wir werden jetzt die drei Fälle der Rechnung unterziehen.

1. Das Rohr sei an beiden Enden geschlossen. — Seine Länge sei l; wir behalten die früheren Bezeichnungen bei und haben daher nachstehenden Gleichungen zu genügen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l \text{ bei jedem } t. \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x),\ \frac{d\varphi}{dt} = -\,a^2\chi(x) \text{ für } t = 0. \tag{3}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist:

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (2) für $x = 0$ führt zu folgender Gleichung, worin z ganz beliebig:

$$F(z) + f(-z) = 0. \tag{4}$$

Dieselbe Bedingung für $x = l$ liefert:

$$F(l + z) + f(l - z) = 0; \tag{5}$$

auch hier ist z ganz beliebig. Die Bedingungen (3) ergeben:

$$f(x) + F(x) = \psi(x),\ f(x) - F(x) = a\chi(x);$$

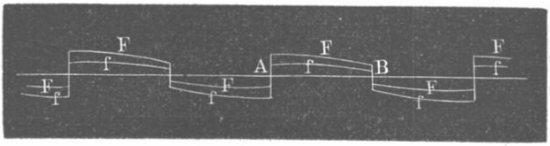
hierdurch sind die Functionen F, f für alle Werthe der Variablen zwischen 0 und l bestimmt. Die Gleichungen (4), (5) bestimmen sie nun vollständig; und man ersieht daraus, wie in einem nach beiden Seiten unendlichen Rohre der Anfangszustand des Gases beschaffen sein müsste, um zwischen 0 und l immer diejenigen Wirkungen zu geben, welche in dem geschlossenen Rohre sich erzeugen.

Die Gleichung (4) lehrt, dass wenn man von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ die Curven

$$y = F(x), \; y = f(x)$$

construirt, der Ort aus dem auf einer Seite von A liegenden Theile einer Curve und dem auf der anderen Seite liegenden Theile der anderen Curve den Ursprung A zum Mittelpunkt hat. Die Gleichung (5) lässt dasselbe in Bezug auf den Punkt B sehen. — Da dieser geometrische Ort zwei Mittelpunkte A, B hat, so besitzt er noch eine Unzahl andere, welche um die Strecke l von einander abstehen und zu beiden Seiten von A liegen, wie es die Figur zeigt. Es geht daraus hervor,

Fig. 16.



dass die Functionen F, f periodisch sind und sich nicht ändern, wenn die Variable um $2l$ zu- oder abnimmt.

Diese wichtige Eigenschaft lässt sich auch in folgender Weise herleiten. Die Gleichung (5) wird, wenn man $z + l$ statt z schreibt:

$$F(2l + z) + f(-z) = 0;$$

folglich vermöge (4):

$$F(z) = F(2l + z).$$

Verwandelt man das z der Gleichung (5) in $z - l$, so erhält man:

$$F(z) + f(2l - z) = 0,$$

und wegen (4):

$$f(2l - z) = f(-z).$$

Die Grössen u, γ findet man durch Differenziiren von φ, nämlich:

$$u = F(x + at) + f(x - at),$$
$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Aus der Periodicität der Functionen F, f folgt, dass in demselben Punkte die Geschwindigkeit und Condensation respective gleiche Werthe annehmen zu allen Epochen, welche um ein Intervall T aus einander liegen, das durch die Gleichung

$$aT = 2l$$

bestimmt wird. Der Zustand des Gases ist mithin ein periodischer und $\frac{2l}{a}$ die Dauer seiner Periode.

2. Das Rohr sei an beiden Enden offen. — In diesem Falle muss die Verdichtung an beiden Enden beständig Null sein und man daher bei jedem t haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Diese Bedingung ergiebt für ein beliebiges z:

$$F(z) = f(-z), \tag{1}$$

$$F(l + z) = f(l - z). \tag{2}$$

Indem man das z der Gleichung (2) in $z + l$ verwandelt, erhält man:

$$F(2l + z) = f(-z),$$

und wegen (1):

$$F(2l + z) = F(z).$$

Setzt man $z - l$ statt z in (2), so folgt:

$$F(z) = f(2l - z),$$

und mit Rücksicht auf (1):

$$f(2l - z) = f(-z).$$

Der Zustand im Rohre ist also wieder periodisch und seine Periode von derselben Dauer $\frac{2l}{a}$.

3. Das Rohr sei offen an einem Ende, geschlossen am anderen. — Der Ursprung werde an dem geschlossenen Ende genommen, dann hat man bei jedem t die Bedingungen:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = l. \tag{2}$$

Diese führen zu den folgenden:

$$F(z) + f(-z) = 0, \tag{3}$$

$$F(l + z) = f(l - z). \tag{4}$$

Setzt man $z + l$ statt z in (4), so folgt:

$$F(2l + z) = f(-z),$$

demnach wegen (3):

$$F(2l + z) = -F(z),$$

und daher:

$$F(z) = F(4l + z).$$

Dieselbe Eigenschaft findet man für die Function f, wenn man das z der Gleichung (4) in $z - l$ verwandelt. Der Zustand des Gases ist also wieder periodisch, aber die Dauer der Periode beträgt im Allgemeinen $\frac{4l}{a}$.

Auflösung der vorigen Aufgaben mittelst trigonometrischer Reihen.

196. Wir wollen jetzt die Aufgabe über die Bewegung eines homogenen Gases in einem endlichen Rohre mittelst einer sehr fruchtbaren und in den meisten Fällen viel bequemeren Methode behandeln. Sie besteht darin, nicht das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung, sondern unendlich viele besondere Integrale aufzusuchen, welche man so bestimmt, dass jedes einzelne den Grenzbedingungen des Systems genügt. Hat man die Gleichungen so eingerichtet, dass sie keine von der Function oder deren Derivirten unabhängigen Glieder enthalten, so bildet eine Summe von besonderen Integralen, deren jedes mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist, gleichfalls ein Integral der Differentialgleichung, welches den Grenzbedingungen genügt, wenn alle besonderen Integrale ihnen genügen. Es handelt sich also dann nur noch darum, die unendlich vielen Constanten, welche dieses Integral einschliesst, so zu bestimmen, dass man für $t = 0$ den gegebenen Anfangszustand erhält. Diesen Weg einschlagend, werden wir die letzten Aufgaben noch einmal auflösen.

1. Bewegung eines Gases in einem an beiden Enden geschlossenen Cylinder. — Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen hat man folgenden Gleichungen zu genügen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

(2) $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ für $x = 0$ und $x = l$ bei jedem t,

(3) $$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) \text{ für } t = 0,$$

(4) $$\frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \text{ für } t = 0.$$

Man sieht sofort, dass der Gleichung (1) nachstehender Werth genügt:

$$\varphi = (M \cos mx + N \sin mx)(A \sin amt + B \cos amt),$$

während M, N, A, B, m willkürliche Constanten bezeichnen. Damit die Bedingung (2) erfüllt sei, muss die Ableitung des Factors

$$M \cos mx + N \sin mx,$$

welche

$$-m(M \sin mx - N \cos mx)$$

ist, Null werden für $x = 0$ und $x = l$; hieraus ergiebt sich:

$$N = 0, \ \sin ml = 0, \text{ also } m = \frac{n\pi}{l},$$

wo n jede ganze positive oder negative Zahl sein kann. Man darf sich jedoch auf die positiven Zahlen beschränken, weil die Werthe von φ, welche den negativen Zahlen entsprechen, sich bei der Unbestimmtheit der Coëfficienten nicht von den anderen unterscheiden würden.

Bezeichnen wir durch Σ eine Summe, welche sich auf alle ganzen und positiven Werthe von n bezieht; lassen wir A und B sich willkürlich mit n ändern und werfen den unnützen Factor M weg, so haben wir folgendes allgemeinere Integral der Gleichung (1), welches den Bedingungen an den Enden des Rohrs genügt:

$$\varphi = \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l}\left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l}\right).$$

Wir differenziiren diesen Ausdruck nach x und t, schreiben dabei A, B statt $A\frac{n\pi}{l}$, $B\frac{n\pi}{l}$ und erhalten:

(5) $$u = -\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l}\left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l}\right),$$

(6) $$a\gamma = -\Sigma \cos \frac{n\pi x}{l}\left(A \cos \frac{an\pi t}{l} - B \sin \frac{an\pi t}{l}\right).$$

Wenn man hier $t=0$ setzt, so geben die Gleichungen (3), (4) zur Bestimmung von A und B:

$$(7) \qquad \Sigma B \sin \frac{n\pi x}{l} = -\psi(x),$$

$$(8) \qquad \Sigma A \cos \frac{n\pi x}{l} = -a\chi(x).$$

Diese Formeln drücken ψ, χ in der ganzen Ausdehnung der Axe der x aus, wenn man setzt:

$$\psi(-x) = -\psi(x),\ \chi(-x) = \chi(x),$$
$$\psi(2l+x) = \psi(x),\ \chi(2l+x) = \chi(x).$$

Um die Coëfficienten B zu bestimmen, entwickeln wir die nur von $x=0$ bis $x=l$ gegebene Function $\psi(x)$ in eine nach den Sinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe. Dazu dient die Formel:

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \sin n \frac{\pi x}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin n \frac{\pi\alpha}{l} d\alpha;$$

man genügt daher der Bedingung (7), indem man

$$B = -\frac{2}{l} \int_0 \psi(\alpha) \sin n \frac{\pi\alpha}{l} d\alpha$$

nimmt.

Um die Coëfficienten A zu bestimmen, entwickelt man die ebenfalls nur von $x=0$ bis $x=l$ gegebene Function $-a\chi(x)$ in eine nach den Cosinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe, wozu die Formel dient:

$$\varphi(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos n \frac{\pi x}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \cos n \frac{\pi\alpha}{l} d\alpha.$$

In dem gegenwärtigen Falle wird

$$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\alpha) d\alpha = -\frac{a}{l}\int_0^l \chi(\alpha) d\alpha = 0,$$

da die mittlere Condensation des Gases im Rohre Null ist. Man muss daher, um der Bedingung (8) zu genügen,

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha) \cos n \frac{\pi\alpha}{l}\, d\alpha$$

nehmen, wo n jeden ganzen positiven Werth ausser Null hat.

Die Formeln (5) und (6) werden jetzt:

$$(9)\quad u = \frac{2}{l}\Sigma \sin n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} a \sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \\ + \cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \end{array}\right\},$$

$$(10)\quad \gamma = \frac{2}{l}\Sigma \cos n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \\ -\frac{1}{a}\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \end{array}\right\}.$$

Diese Functionen ändern sich nicht, wenn bei demselben t der Werth von x um $2l$ zunimmt; sie ändern sich auch nicht, wenn t für dasselbe x um $\frac{2l}{a}$ wächst.

Die Formeln (9) und (10) gelten zugleich für ein unendliches Rohr mit dem Anfangszustande, den sie für $t = 0$ ergeben. In Folge dieses offenbar periodischen Anfangszustandes würden die Grenzbedingungen des endlichen Rohres jederzeit erfüllt sein.

197. Wenn man von einem besonderen Anfangszustande des Gases ausgeht, für welchen die Reihe sich auf ein einziges, einem beliebigen Werthe von n entsprechendes Glied reducirt, so erhält man eine sogenannte einfache Bewegung. Sie wird durch Gleichungen von folgender Form dargestellt:

$$u = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} + Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(P\cos\frac{an\pi t}{l} - Q\sin\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Die Dauer der Periode ist in diesem Falle $\frac{2l}{na}$ statt $\frac{2l}{a}$.

Die Werthe von u sind beständig Null für alle Werthe von x, welche der Gleichung

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

genügen, also für alle in der Formel

$$x = \frac{kl}{n}$$

enthaltenen Werthe, wo k Null und jede ganze Zahl bedeutet. Die Punkte, in welchen das Gas unbewegt bleibt, heissen Knoten; sie theilen die Länge l des Rohres in n gleiche Stücke.

Die Punkte, in denen die Condensation beständig Null ist, und welche man Bäuche nennt, werden durch die Gleichung bestimmt:

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woraus } x = \frac{(2k+1)l}{2n};$$

sie liegen also in den Mitten zwischen den Knoten.

198. 2. Das Rohr sei an beiden Enden offen. — Die Grenzbedingungen sind jetzt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l \text{ bei jedem } t.$$

Die übrigen Gleichungen bleiben dieselben wie in der vorigen Aufgabe. Man erhält einen Werth für φ, welcher Allem ausser dem Anfangszustande genügt, wenn man

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l}\left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l}\right)$$

nimmt, wo die Summe Σ sich auf alle ganzen positiven Werthe von n bezieht und A, B willkürliche, mit n variirende Constanten vorstellen. Durch Differenziiren von φ ergiebt sich, indem man $A\frac{n\pi}{l}$, $B\frac{n\pi}{l}$ durch A, B ersetzt:

$$u = \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l}\left(A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = -\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l}\left(A \cos \frac{an\pi t}{l} - B \sin \frac{an\pi t}{l}\right).$$

Damit diese Werthe dem Anfangszustand genügen, müssen zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ folgende zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma B \cos \frac{n\pi x}{l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin \frac{n\pi x}{l} = - a\chi(x).$$

Dadurch werden ψ, χ in der ganzen Ausdehnung der Axe der x ausgedrückt, wenn man nimmt:

$$\psi(-x) = \psi(x),\ \chi(-x) = -\chi(x),$$
$$\psi(2l + x) = \psi(x),\ \chi(2l + x) = \chi(x).$$

Man findet für irgend einen Werth von n:

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

$$B = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

Der Werth von B, welcher sich für $n = 0$ ergiebt, würde in u das constante Glied liefern:

$$\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

welches den mittleren Werth von $\psi(x)$ oder die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts des im Rohre enthaltenen Gases darstellt. Wenn nun das Gas und die endliche Röhre, welche es enthält, keine fortschreitende Bewegung haben, so ist dieses Glied Null und man braucht n nur von 1 bis ∞ gehen zu lassen. Die Auflösung des Problems wird dann durch nachstehende Formeln gegeben:

$$u = \frac{2}{l}\Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left\{ \begin{aligned} & - a \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \\ & + \cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \end{aligned} \right\},$$

$$\gamma = \frac{2}{l}\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \begin{aligned} & + \cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \\ & + \frac{1}{a} \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \end{aligned} \right\}.$$

Diese Ausdrücke ändern sich nicht, wenn bei demselben t das x um $2l$ wächst; sie ändern sich auch nicht, wenn bei demselben x der Werth von t um $\frac{2l}{a}$ zunimmt.

199. Eine der möglichen einfachen Bewegung wird durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$u = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} + Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} - Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

wo n irgend eine ganze Zahl und P, Q Constanten bezeichnen. Die Dauer der Periode ist jetzt $\frac{2l}{na}$.

Die Bäuche bestimmen sich durch die Gleichung:

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woraus } x = \frac{kl}{n},$$

während k Null und jede ganze Zahl vorstellt. Sie theilen das Rohr in n gleiche Theile.

Die Knoten ergeben sich aus:

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woher } x = (2k+1)\frac{l}{2n};$$

sie liegen also in den Mitten zwischen den Bäuchen.

200. 3. Die Röhre sei offen an einem Ende, geschlossen am anderen. — Verlegen wir den Ursprung an das offene Ende, dann muss man bei jedem t haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = l.$$

Man genügt allen Bedingungen mit Ausnahme des Anfangszustandes, wenn man

$$\varphi = \Sigma\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{A\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + B\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right\}$$

nimmt, wo A und B willkürliche, mit n variirende Constanten bezeichnen und die Summe Σ sich auf Null und alle ganzen positiven Werthe von n bezieht. Hieraus erhält man für u, γ folgende Werthe, indem man $\frac{(2n+1)\pi}{2l}A$, $\frac{(2n+1)\pi}{2l}B$ durch A, B ersetzt:

$$u = \Sigma \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{A \sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + B\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right\},$$

$$a\gamma = -\Sigma \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{A \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} - B\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right\}.$$

Damit diese Ausdrücke dem Anfangszustand genügen, muss man zwischen $x = 0$ und $x = l$ die Bedingungen erfüllen:

$$\Sigma B \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = -a\chi(x).$$

Dies geschieht durch nachstehende Werthe von A und B:

$$B = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha,$$

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\,d\alpha.$$

Durch die zwei vorigen Gleichungen bleiben die nur von 0 bis l gegebenen Functionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ in der ganzen Ausdehnung der Axe der x ausgedrückt, wenn man nimmt:

$$\psi(-x) = \psi(x),\ \chi(-x) = -\chi(x),$$
$$\psi(l+x) = -\psi(l-x),\ \chi(l+x) = \chi(l-x),$$
$$\psi(4l+x) = \psi(x),\ \chi(4l+x) = \chi(x).$$

Bei diesem Anfangszustand des unendlichen Rohres würden die Grenzbedingungen des endlichen Rohres fortwährend erfüllt sein.

Die Auflösung des Problems ist enthalten in den Formeln:

$$u=\frac{2}{l}\Sigma\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{array}{l}-a\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\\ +\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\end{array}\right\},$$

$$\gamma=\frac{2}{l}\Sigma\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{array}{l}+\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\\ +\frac{1}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\end{array}\right\},$$

wo die Summen sich über Null und alle ganzen positiven Werthe von n erstrecken. Die Ausdrücke für u und γ sind periodisch, und zwar in Bezug auf x in dem Intervall $4l$, in Bezug auf t in dem Intervall $\frac{4l}{a}$.

201. Die einfache Bewegung, welche einem einzelnen Werthe von n entspricht, hat die Periode $\frac{4l}{(2n+1)a}$.

Die Knoten bestimmen sich durch die Gleichung:

$$\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=0, \text{ woraus } x=\frac{(2k+1)l}{2n+1},$$

während k Null und jede ganze Zahl bezeichnet. Ihre Abstände vom Ursprung sind also der Reihe nach:

$$\frac{l}{2n+1}, \frac{3l}{2n+1}, \frac{5l}{2n+1}, \ldots, l;$$

mithin stehen die Knoten von einander ab um $\frac{2l}{2n+1}$, und folglich kann man das Rohr vom ersten Knoten ab als eine Reihenfolge von geschlossenen Röhren betrachten, deren jede die Länge $\frac{2l}{2n+1}$ hat.

Die Bäuche ergeben sich aus der Gleichung:

$$\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=0, \text{ woraus } x=\frac{2kl}{2n+1}.$$

Ihre Abstände vom Ursprung sind also:

$$0, \frac{2l}{2n+1}, \frac{4l}{2n+1}, \ldots, \frac{2nl}{2n+1},$$

sie liegen demnach in den Mitten zwischen den Knoten. Der Abstand der Bäuche von einander beträgt $\frac{2l}{2n+1}$, und das zwischen zwei nächsten Bäuchen enthaltene Gas ist in demselben Falle, als wenn es in einem an beiden Enden offenen Rohre von der Länge $\frac{2l}{2n+1}$ enthalten wäre.

Bewegung in einem nach allen Seiten hin unendlichen Gase.

202. Betrachten wir jetzt die kleinen Bewegungen eines nach jeder Richtung unendlichen Gases. Wir haben darauf die früher gefundene Gleichung anzuwenden:

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

Grenzbedingungen giebt es bei unserer Aufgabe nicht; aber man muss immer dem Anfangszustande genügen, und dazu wird erfordert, dass $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t=0$ in gegebene Functionen von x, y, z übergehen. Aus den für $t=0$ gegebenen Werthen von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ bestimmt sich der Anfangswerth von φ bis auf eine hier ausser Acht zu lassende Constante. Die Bedingungen des Anfangszustandes werden daher, wenn f, F willkürliche Functionen von x, y, z vorstellen, ausgedrückt durch:

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z), \; \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z) \text{ für } t = 0;$$

und die Aufgabe kommt darauf hinaus den Gleichungen (1) und (2) zu genügen. Dies geschieht mittelst der von Poisson gegebenen Formel:

$$(3)\quad\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, F\begin{pmatrix}x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\cos\psi,\\ z+at\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix}\\[2ex] \quad+\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f\begin{pmatrix}x+at\cos\theta,\ y+at\sin\theta\cos\psi,\\ z+at\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix},\end{cases}$$

worin die Integrationen nach θ zwischen 0 und π, nach ψ zwischen 0 und 2π auszuführen sind. Diesen Ausdruck für φ kann man auch in folgender Weise schreiben:

$$(4)\quad\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4\pi}\mathbf{S}\, t\, d\omega\, F(x+at\cos\alpha,\ y+at\cos\beta,\ z+at\cos\gamma)\\[2ex] \quad+\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{d}{dt}\mathbf{S}\, t\, d\omega\, f(x+at\cos\alpha,\ y+at\cos\beta,\ z+at\cos\gamma).\end{cases}$$

Hier bezeichnet $d\omega$ das unendlich kleine Element der aus dem Ursprung mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche; α, β, γ sind die Winkel, welche der aus dem Ursprung nach diesem Element gezogene Radius vector mit den Axen bildet; die Summen $\mathbf{S}$ erstrecken sich über die ganze Kugelfläche.

Diese wichtige Formel lässt sich sehr bequem anwenden, wenn die Functionen F, f wie im vorliegenden Falle für alle reellen Werthe von x, y, z gegeben sind. Wenn dagegen die Flüssigkeit begrenzt wäre, so würden die hieraus hervorgehenden besonderen Bedingungen schwierig auszudrücken und man genöthigt sein, andere Formen für das Integral der Gleichung (1) aufzusuchen; wir beschäftigen uns jedoch damit nicht.

Die Formel enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, denn sie liefert die Function φ und somit die Condensation und die Componenten der Geschwindigkeit in jedem Punkt und zu jeder Epoche. Wir beschränken uns darauf, aus ihr die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher irgend eine Erschütterung sich in dem Gase fortpflanzt; und damit die Resultate einer leichteren und klareren Deutung fähig werden, so wollen wir annehmen, dass die Erschütterung nur in einem nach allen Richtungen unendlich kleinen Theile stattfinde, in dessen Inneres wir den Anfang der Coordinaten verlegen.

In diesem Falle verschwinden die Functionen $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ für alle Werthe von x, y, z, welche nicht einem

Punkte des anfänglich erschütterten Theils als (unendlich kleine) Coordinaten angehören. Setzen wir daher

(5) $x + at\cos\alpha = x'$, $y + at\cos\beta = y'$, $z + at\cos\gamma = z'$,

so kann der Werth von φ in einem Punkt M, dessen Coordinaten x, y, z sind, nur dann von Null verschieden sein, wenn t einen solchen Werth hat, dass es Werthe von α, β, γ giebt, bei welchen x', y', z' die (unendlich kleinen) Coordinaten von Punkten darstellen, welche in dem anfänglich erschütterten Theile liegen. Diese Werthe von α, β, γ sind jetzt in den bestimmten Integralen, welche φ ausdrücken, allein zu berücksichtigen.

Man kann sich leicht geometrisch die Richtungen vorstellen, welche denjenigen Werthen von α, β, γ oder θ, ψ entsprechen, die keine verschwindenden Elemente der Integrale liefern. In der That, man erhält den Punkt, dessen Coordinaten die Werthe x', y', z' der Gleichungen (5) haben, indem man auf der durch den Punkt M unter den Winkeln α, β, γ gezogenen Richtung von M an ein Stück at abträgt. Wenn man also mit dem Radius at aus dem Mittelpunkt M eine Kugel beschreibt, so werden diejenigen Punkte ihrer Oberfläche, welche in die anfängliche Erschütterung hineinfallen, die einzigen sein, für welche die Functionen f, F nicht verschwinden; und die Richtungen der Radien, welche von M nach diesen verschiedenen Punkten gehen, sind die einzigen, auf welche man Rücksicht zu nehmen braucht. Daraus ersieht man, dass die Function φ in dem Punkte M den Werth Null hat bis zu der Epoche, wo die aus M mit gleichförmig wachsendem Radius at beschriebene Kugelfläche in die anfängliche Erschütterung einzudringen beginnt, und dass φ in M wieder Null ist, sobald die Oberfläche der wachsenden Kugel die anfängliche Erschütterung nicht mehr trifft; in jedem zwischenliegenden Zeitpunkte bestimmt den Werth von φ allein derjenige Theil der anfänglichen Erschütterung, welcher auf der Kugelfläche mit dem Radius at liegt.

Die unmittelbare Folgerung aus diesem Satze ist, dass eine nach jeder Richtung unendlich kleine Erschütterung sich in allen Richtungen mit der Geschwindigkeit a fortpflanzt, weil am Ende der Zeit t die Bewegung in den um at vom Ursprung entfernten Punkten beginnt.

Die Dauer der Bewegung in irgend einem Punkt M wird durch die beiden Kugelflächen bestimmt, welche aus diesem Punkt als Mittelpunkt so beschrieben werden, dass der anfänglich erschütterte Theil ganz ausserhalb der ersten und ganz innerhalb der zweiten liegt, während er mit jeder einen Punkt gemein hat.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem homogenen, nach allen Seiten unendlichen Gase ist also dieselbe wie in einer cylindrischen Röhre.