

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

Duhamel, Jean Marie Constant

1853

Dynamik. Bewegung um ein festes oder bewegtes Centrum. - Beispiele. -
Anwendung auf das Weltsystem

Bewegung

um ein festes oder bewegtes Centrum. — Beispiele. —
Anwendung auf das Weltsystem.

1. Wir wollen zuerst einen materiellen Punkt betrachten, welcher durch eine Kraft angegriffen wird, deren Richtung stets durch einen festen Punkt geht und deren Grösse allein vom Abstand von diesem abhängt. Es ist bekannt, dass die Bewegung in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit und den festen Punkt gelegten Ebene stattfindet. Zum Ursprung rechtwinkliger Coordinaten x, y in dieser Ebene werde der feste Punkt genommen; r bezeichne den Leitstrahl aus dem Ursprung nach einem beliebigen Punkt, θ seinen Winkel mit der Axe der positiven x und φ die Intensität der beschleunigenden Kraft. Die Cosinus der von ihrer Richtung mit den Axen gebildeten Winkel sind bezüglich $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}$,

während die Kraft anzieht; sowie $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$, während sie abstösst.

Im ersten Fall werden die Componenten $-\varphi \frac{x}{r}, -\varphi \frac{y}{r}$; im zweiten $\varphi \frac{x}{r}, \varphi \frac{y}{r}$. Unsere Formeln sollen sich auf den ersten Fall beziehen; man braucht daher nur φ negativ zu nehmen, wenn man auf den zweiten übergehen will.

Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des Punktes sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi \frac{y}{r}.$$

Das Princip der Flächen liefert

$$(1) \quad r^2 d\theta = c dt,$$

wo c eine Constante bezeichnet, welche sich leicht durch den Anfangszustand bestimmen lässt.

In der That, die Componenten der Geschwindigkeit nach dem Radius vector und der darauf Senkrechten sind $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{r d\theta}{dt}$. Wenn nun v_0 die Grösse der Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, α aber den Winkel, welchen ihre Richtung mit der aus dem anfänglichen Ort des Punktes gegen den Pol geführten bildet, so ist $v_0 \sin \alpha$ Anfangswerth der Componente $\frac{r d\theta}{dt}$.

Dieser gibt, wenn man ihn zugleich mit r_0 für r in $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$ setzt:

$$c = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

Das Princip der lebendigen Kräfte führt zu der Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = - 2 \int \varphi dr = v^2,$$

wo das unbestimmte Integral eine neue Constante einschliesst, die aus den Anfangswerthen von v und r zu bestimmen ist; so dass

$$(2) \quad v^2 = v_0^2 - 2 \int_{r_0}^r \varphi dr$$

wird.

Indem man $dr^2 + r^2 d\theta^2$ statt ds^2 schreibt, geht die vorletzte Gleichung über in

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = - 2 \int \varphi dr.$$

Mit Hülfe von (1) schaffen wir dt hieraus weg und erhalten dadurch folgende Differentialgleichung zwischen r und θ , welche der Trajectorie angehört:

$$(3) \quad \int \varphi dr = - \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\frac{dr^2}{dt^2}}{r^4} \right) = - \frac{c^2}{2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right].$$

2. Wird die Kraft φ als Function von r gegeben, so bestimmt sich durch (3) die Bahnlinie.

Ist letztere dagegen bekannt, so hat man (3) nach r zu differenziiiren, wenn man φ erhalten will. Die allgemein ausgeführte Differentiation gibt:

$$(4) \quad \varphi = \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right),$$

wo das zweite Glied sich aus der Gleichung der Trajectorie bilden lässt. Doch wird es zuweilen bequemer sein, die Formel (3) anzuwenden und die Differentiation erst am Ende zu verrichten.

Auf alle Fälle liefert die Gleichung der Trajectorie, wenn dieselbe bekannt ist, eine Coordinate als Function der anderen; und man erhält dann t aus (1) als Function von r oder von θ , sowie umgekehrt. Damit ist aber die Aufgabe vollständig gelöst, weil die Coordinaten des Beweglichen durch die Zeit ausgedrückt sind.

Die Gleichung (2) nimmt eine bemerkenswerthe Form an, wenn wir die Senkrechte p vom Ursprung auf die Tangente der Bahncurve einführen. Die ähnlichen Dreiecke ergeben:

$$\frac{ds}{r d\theta} = \frac{r}{p} \text{ oder } ds = \frac{r^2 d\theta}{p},$$

woraus mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{c}{p}$$

folgt; welche Gleichung lehrt, dass bei jeder Bewegung durch eine nach einem festen Punkt gerichtete Kraft die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn sich umgekehrt verhält wie der Abstand des festen Punktes von der Tangente.

Setzt man für v den Werth $\frac{c}{p}$, so geht (2) über in:

$$(5) \quad \frac{c^2}{p^2} = v_0^2 - 2 \int_{r_0}^r \varphi dr.$$

Diese Gleichung drückt den für die Trajectorie zwischen r und p stattfindenden Zusammenhang aus.

3. Denken wir uns jetzt den Mittelpunkt der Wirkung bewegt. Im ersten Theile ist gezeigt worden, dass alle Eigenschaften der absoluten Bewegung auch für die relative gelten, sofern man die relativen Grössen den absoluten substituirt. Demnach bleiben die vorhergehenden Formeln anwendbar, wenn wir x und y als Coordinaten des materiellen Punktes in Bezug auf Axen betrachten, welche parallel zu sich selbst bewegt werden und dabei beständig durch das bewegte Centrum gehen; r als Länge der Geraden, die in jedem Augenblick dieses Centrum mit dem materiellen Punkt verbindet; θ als ihren Winkel mit der Axe der x ; endlich φ als die relative beschleunigende Kraft an dem materiellen Punkt, d. h. als die Resultante aus der auf ihn wirkenden absoluten Kraft und aus einer solchen, welche gleich, parallel und entgegengesetzt ist mit derjenigen, die das bewegte Centrum angreift.

Wir wollen nun einige Beispiele zu den aufgefundenen Formeln geben.

4. *Erstes Beispiel.* — Ein Punkt beschreibt eine Ellipse durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung durch das Centrum dieser Curve geht. Der Ausdruck der Kraft soll gefunden werden.

Man kann zunächst die Verträglichkeit der Bedingungen der Aufgabe leicht einsehen. Denn man kann immer einen materiellen Punkt zwingen sich auf einer beliebigen Curve auf solche Weise zu bewegen, dass diejenigen Flächenräume der Zeit proportional sind, welche durch den Leitstrahl beschrieben werden, der aus irgend einem festen Punkt nach dem bewegten geführt wird. Dem Beweis in Nro. 197 des ersten Theils zufolge dürfen wir daher annehmen, dass ein beweglicher Punkt eine beliebige ebene Curve durch die Wirkung einer Kraft beschreiben könne, welche beständig nach irgend einem festen Punkt in der Curvebene gerichtet ist.

Die grosse Axe der Ellipse soll $2a$ betragen; ihre kleine $2b$. Nehmen wir das Centrum zum Pol und zählen die Winkel von der grossen Axe an. Die Gleichung der Curve wird dadurch

$$(a) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2 \theta,$$

woraus man durch Ableiten erhält:

$$(b) \quad \frac{1}{r} \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin \theta \cos \theta.$$

Wenn wir das zweite Glied vermöge (a) in r ausdrücken, so

kann $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta}$ aus (b) als Function von r gefunden werden; und indem wir den dafür erhaltenen Werth in die allgemeine Formel (3) einsetzen, bekommen wir $\int \varphi dr$, folglich auch φ als Function von r .

Nun liefert (a):

$$\sin \theta^2 = \frac{b^2(a^2 - r^2)}{(a^2 - b^2)r^2} \text{ und } \cos \theta^2 = \frac{a^2(r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)r^2};$$

(b) aber giebt, wenn man diese Werthe substituirt:

$$\left(\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 = \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{a^2 b^2 r^2}.$$

Durch Einsetzen des letzten Ausdrucks in (3) findet sich:

$$\int \varphi dr = -\frac{c^2}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2} \right),$$

und hieraus durch Ableiten nach r :

$$\varphi = \frac{c^2 r}{a^2 b^2}.$$

Die vom Centrum ausgeübte Kraft wirkt demnach bei der vorliegenden Bewegung der Entfernung proportional und zwar anziehend, da der für φ gefundene Werth positiv ist.

Dem Princip der Flächen gemäss braucht der Punkt stets die gleiche Zeit, um die ganze Ellipse zu durchlaufen, von welcher Stelle er auch ausgeht. Bezeichnen wir diese Zeit mit T . Da die Constante c das Doppelte des Flächenraumes ausmacht, welcher während der Zeiteinheit vom Radius vector durchstrichen wird, so beträgt der Inhalt der Ellipse

$$\frac{1}{2} c T = \pi a b; \text{ daher } T = \frac{2\pi a b}{c}.$$

Durch Einführung der Umlaufszeit erhält die Kraft den Ausdruck

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Die Betrachtung einer Hyperbel würde eine nach dem nämlichen Gesetz abstossend wirkende Kraft ergeben haben.

5. Umkehrung. — Wenn ein Punkt gegen ein festes Centrum durch eine der Entfernung proportionale Kraft hingezogen wird, so beschreibt er eine Ellipse, deren Mittelpunkt das feste Centrum ist.

In der That, denken wir uns eine Ellipse, welche dieses Centrum zum Mittelpunkt hat, durch den anfänglichen Ort des Beweglichen geht und von der Anfangsgeschwindigkeit tangirt wird. Wir fügen, um dieselbe vollständig zu bestimmen, noch die Bedingung bei, dass in der anfänglichen Lage des Punktes die Normalcomponente der vorgelegten Anziehungskraft oder die Centripetalkraft gleich dem Quadrat der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit, getheilt durch den Krümmungsradius, sein soll. Dieser Radius ist dadurch gegeben, und wir haben somit ausreichende Bestimmungsstücke für die Ellipse.

Wenn man nun den Punkt auf irgend eine Weise nöthigt, sich auf dieser Ellipse dergestalt zu bewegen, dass die Flächen, welche durch den vom Mittelpunkt ausgehenden Radius vector beschrieben werden, mit der Zeit in Proportion stehen, so zeigt die in Nro. 4 durchgeführte Untersuchung, dass eine gegen das Centrum gerichtete und der Entfernung von diesem proportionale Kraft auf den Punkt wirken müsse. Wenn wir noch dazu dem Punkt eine mit der gegebenen gleiche und gleichgerichtete Anfangsgeschwindigkeit ertheilen, so kann jene Kraft offenbar keine andere als die vorgelegte sein. Denn sie ist nach dem nämlichen Centrum gerichtet, sie befolgt dasselbe Gesetz und hat den gleichen Anfangswerth, da der Krümmungshalbmesser in der angegebenen Weise festgesetzt wurde*). Die von uns bestimmte Ellipse wird demnach vermöge der vorgelegten Kraft beschrieben. Und folglich hat eine Kraft, welche das Bewegliche gegen ein festes Centrum dem Abstand proportional anzieht, jedesmal die Wirkung, dass das Bewegliche eine Ellipse beschreibt, von der das feste Centrum der Mittelpunkt ist.

*) Man denke nur daran, dass ein Dreieck durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt wird.

Diese Bewegung bietet eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dar.

Wir haben in Nro. 4 für die Kraft φ den Ausdruck $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ erhalten. Wenn nun μ ihren Werth in der Einheit der Entfernung bedeutet, so hat man

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2}, \text{ daher } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}};$$

welches zeigt, dass die Umlaufszeit nicht von den Anfangsumständen abhängt, wodurch die besondere Ellipse bestimmt wird. Dieselbe ändert sich vielmehr nur mit der Constante μ , welche die Intensität der Anziehungskraft in der Einheit der Entfernung ausdrückt.

6. Die umgekehrte Aufgabe analytisch behandelt. — Wir wollen jetzt auf dem Wege der Rechnung die Curve finden, welche ein Punkt beschreibt, der durch ein festes Centrum der Entfernung proportional angezogen oder abgestossen wird.

Wir setzen $\varphi = \mu r$; dabei ist μ positiv im Fall der Anziehung, negativ im Fall der Abstossung. Die Gleichung (3) liefert, wenn c' eine aus dem Anfangszustand zu bestimmende Constante vorstellt:

$$\pm \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = \sqrt{-\frac{\mu r^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} + 2c'}.$$

Setzt man hier $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = z$, so folgt:

$$\pm 2d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-\frac{\mu}{c^2} - z^2 + 2c'z}} = \frac{dz}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2} - (c' - z)^2}};$$

woraus man durch Integriren erhält:

$$\pm 2(\theta - \alpha) = \arccos \frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}},$$

während α eine durch die Anfangswerthe von r und θ sich ergebende Constante bezeichnet. Zählt man der Einfachheit wegen die Winkel von der Richtung an, welche den Winkel α mit der ursprünglichen Axe macht, so ist θ statt $\theta - \alpha$ zu

schreiben. Dadurch geht vorstehende Gleichung, indem wir auf beiden Seiten die Cosinus nehmen, über in:

$$\frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}} = \cos \cdot 2\theta,$$

woraus:

$$z = c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}} (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) = \frac{1}{r^2}.$$

Multiplicirt man mit r^2 , so kommt:

$$c' (x^2 + y^2) - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}} (x^2 - y^2) = 1,$$

oder:

$$\left(c' + \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) y^2 + \left(c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) x^2 = 1.$$

Die Coefficienten von x^2 und y^2 besitzen gleiche Zeichen, wenn μ positiv ist, und die Trajectorie wird dann eine Ellipse, welche den festen Punkt zum Centrum hat, was wir in Nro. 5 ohne Rechnung gezeigt haben. Wenn dagegen μ negativ ist d. h. wenn die Kraft abstösst, so erhalten die Coefficienten verschiedene Zeichen, und die Curve wird eine Hyperbel, ebenfalls mit dem festen Punkt als Centrum.

Im letzten Fall ist die Bewegung keine wiederkehrende, sondern das Bewegliche bleibt offenbar auf demselben Ast der Hyperbel.

7. Die Aufgabe, welche wir so eben behandelt haben, bietet einen Umstand dar, den man benutzen kann, um die Coordinatenwerthe x und y unmittelbar als Functionen von t zu erhalten; was die vollständigste Auflösung liefert, weil man dadurch den Ort des Beweglichen in jedem Augenblick kennt, und weil alle anderen Elemente der Bewegung sofort daraus hervorgehen. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Punktes werden für $\varphi = \mu r$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu y.$$

Da die Variablen x , y von einander getrennt sind, so können wir jede dieser Gleichungen für sich integriren und auf diese Weise x und y in t ausdrücken. Man findet, wenn μ zuerst positiv vorausgesetzt wird:

$$x = A \sin \cdot t \sqrt{\mu} + B \cos \cdot t \sqrt{\mu},$$

$$y = A' \sin \cdot t \sqrt{\mu} + B' \cos \cdot t \sqrt{\mu}.$$

Nehmen wir jetzt zur Axe der x die Gerade, welche den Ursprung mit der Anfangslage des Beweglichen verbindet und deren Länge r_0 sein mag. Bezeichne v_0 die Anfangsgeschwindigkeit sowie α den Winkel, den ihre Richtung mit der aus dem anfänglichen Ort des Punktes nach dem Ursprung geführten bildet. Die Axe der positiven y soll auf derselben Seite der x -Axe wie die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit liegen. Für $t = 0$ erhalten wir dann die Bedingungen:

$$y = 0, x = r_0, \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha, \frac{dx}{dt} = -v_0 \cos \alpha.$$

Dadurch bestimmen sich die vier Coefficienten A, B, A', B' , so dass

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \cdot t \sqrt{\mu} + r_0 \cos \cdot t \sqrt{\mu},$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \cdot t \sqrt{\mu}$$

wird. Diese Gleichungen enthalten die vollständige Auflösung des Problems. Sie ergeben für x und y periodische Werthe, und die Dauer der Periode beträgt für beide $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, was wir schon gefunden haben.

Durch Eliminiren von t kommt:

$$(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Wenn nun μ positiv ist, d. h. wenn die Kraft anzieht, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, welche das feste Centrum zum Mittelpunkt hat. Die Ellipse geht in einen Kreis über, und die Bewegung wird gleichförmig, sobald

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ und } v_0^2 = \mu r_0^2.$$

Ist aber μ negativ, d. h. stösst die Kraft ab, so treten Exponentialgrössen an die Stelle der Sinus und Cosinus. Man kann sich indessen der vorhergehenden Rechnung bedienen und die Transformation in den Resultaten verrichten. Die Trajectorie wird durch den Zeichenwechsel von μ eine Hyperbel

mit demselben Mittelpunkt, und die Werthe für x und y nehmen folgende Gestalt an:

$$x = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos \alpha}{2 \sqrt{\mu}} \right) e^{t \sqrt{\mu}} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos \alpha}{2 \sqrt{\mu}} \right) e^{-t \sqrt{\mu}},$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{2 \sqrt{\mu}} \left(e^{t \sqrt{\mu}} - e^{-t \sqrt{\mu}} \right),$$

worin μ den Absolutwerth hat. Diese Ausdrücke können nur mit t zugleich unendlich werden; der Punkt bedarf mithin einer unendlichen Zeit, um den Hyperbelast zu durchlaufen, auf welchem er sich beim Anfang der Bewegung befand.

8. *Zweites Beispiel.* — Ein materieller Punkt beschreibt einen Kegelschnitt durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung beständig durch einen Brennpunkt desselben geht. Der Ausdruck dieser Kraft soll gefunden werden.

Von welcher Art der Kegelschnitt auch sein mag, seine Polargleichung lässt sich bekanntlich auf die Form

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

bringen, wo p den halben Parameter, e die Excentricität bezeichnet. Dabei wird ein Brennpunkt zum Pol genommen und die Winkel θ werden gebildet mit der Richtung der Axe aus dem Brennpunkt nach dem nächsten Scheitel hin. Die Curve ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$e < 1, e = 1, e > 1.$$

Vorstehende Gleichung giebt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p},$$

daher

$$\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = - \frac{e \sin \theta}{p}.$$

Wenn man nun wie im ersten Beispiel von der Formel (3) Gebrauch machen will, so hat man zuvor für $\sin \theta$ seinen Werth in r aus der Gleichung der Curve zu entnehmen und

dann $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta}$ einzusetzen, wodurch man findet:

$$\int \varphi dr = -\frac{c^2}{pr} + \frac{c^2(1-e^2)}{2p^2};$$

folglich:

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Daraus sieht man, dass die Kraft das Bewegliche gegen den Brennpunkt anzieht, da der Werth für φ positiv ist; und dass ihre Intensität sich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung ändert.

Im vorliegenden Fall wäre jedoch die Anwendung der Formel (4) einfacher gewesen. In der That, die Gleichung der Curve giebt sofort:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p},$$

und das Einsetzen in (4) liefert:

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Wir wollen diesen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen, da wir bei der Bewegung der Planeten darauf zurückkommen werden.

9. Umkehrung. — Suchen wir jetzt alle diejenigen Curven auf, welche ein Punkt beschreiben kann, der gegen ein festes Centrum dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird.

Für den Augenblick beschränken wir uns auf eine synthetische Lösung der Aufgabe.

Man denke sich einen Kegelschnitt, von dem das feste Centrum einen Brennpunkt bildet, der ferner durch den anfänglichen Ort des Beweglichen geht und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit auf derselben Seite tangirt, auf welcher das feste Centrum liegt. Zu seiner vollständigen Bestimmung fügen wir noch die Bedingung bei, dass das Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit, wenn man es durch den Krümmungsradius im Ausgangspunkt der Bewegung theilt, der Normalcomponente der Kraft gleich sein soll, welche an dieser Stelle wirkt.

Die letzte Bedingung setzt den Krümmungsradius fest, so dass der Kegelschnitt nun vollständig bestimmt und nur einer ist. Wir werden gleich nachher sehen, wie man mit diesen Bestimmungsstücken ihn construiren und seine Art erkennen kann.

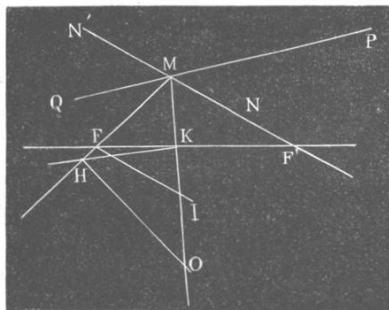
Denken wir uns einen Punkt genöthigt, sich auf dieser bestimmten Curve dergestalt zu bewegen, dass der aus dem festen Centrum nach ihm geführte Leitstrahl der Zeit proportionale Flächen beschreibt. In Gemässheit von Nro. 8 muss dann die auf den neuen Punkt wirkende Kraft nach dem festen Centrum gerichtet, ihre Intensität aber dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sein. Lassen wir nun den neuen Punkt von derselben Stelle wie den vorgelegten und mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit in Grösse und Richtung ausgehen, so wird im Ausgangspunkt der Bewegung die nach der gemeinschaftlichen Normale geschätzte Kraft für beide Punkte denselben Werth haben, weil sie dem Quadrat der gemeinsamen Anfangsgeschwindigkeit durch den nämlichen Krümmungsradius getheilt gleich ist. Folglich wird auch der Anfangswerth der ganzen nach dem festen Centrum gerichteten Kraft in beiden Fällen der gleiche sein. Die Kraft, welche die Bewegung auf dem Kegelschnitt bewirkt, muss demnach mit der vorgelegten zusammenfallen. Da aber der vorgelegte, den gegebenen Anfangsbedingungen unterworfenene Punkt durch die auf ihn wirkende Kraft eine ganz bestimmte Bewegung erhält, so kann diese Bewegung sich von derjenigen nicht unterscheiden, welche auf dem Kegelschnitt stattfindet.

Ein Punkt, der gegen ein festes Centrum dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird, bewegt sich also nothwendig auf einem Kegelschnitt, von dem das feste Centrum ein Brennpunkt ist.

Es bleibt uns noch die Bestimmung des Kegelschnittes aus den gegebenen Bedingungen übrig, welche ein Brennpunkt (im Falle der Hyperbel der des betreffenden Zweiges), ein Punkt der Curve und die in demselben gezogene Tangente, sowie der Krümmungsradius zu diesem Punkte sind; welcher Radius mit dem Brennpunkt auf derselben Seite der Tangente liegt.

Den Brennpunkt stelle F (Fig. 1) vor; M den Punkt der Curve, PQ die Tangente, O den Krümmungsmittelpunkt. Fällt

Fig. 1.



man von O eine Senkrechte OH auf MF und von H eine solche auf die Normale, so ist bekannt, dass der Fusspunkt K des letzten Perpendikels der durch den Brennpunkt gehenden Hauptaxe angehört. Wir erhalten daher die Richtung dieser Axe, indem wir FK ziehen; und der

zweite Brennpunkt wird durch ihren Durchschnitt mit der Geraden MN gegeben, welche durch M unter dem mit FMQ gleichen Winkel PMN gezogen ist. Wenn der Durchschnitt auf derjenigen Seite von PQ stattfindet, wo F liegt, so wird die Curve eine Ellipse. Sie wird eine Parabel, wenn MN mit FK parallel läuft, und eine Hyperbel, sobald der Durchschnitt auf der anderen Seite stattfindet.

Aus den gegebenen Bestimmungsstücken lässt sich leicht beurtheilen, welcher von diesen drei Fällen vorliegt. Wir ziehen durch F eine Parallele mit MN , welche die Normale in I schneidet. Ist nun $MK < MI$, so treffen FK und MN in einem Punkt F' zusammen, der auf der nämlichen Seite von QP wie F liegt; die Curve wird folglich eine Ellipse. Hat man $MK = MI$, so läuft FK parallel mit MN , und die Curve wird eine Parabel. Hat man endlich $MK > MI$, so schneidet FK die Verlängerung MN' , daher die Curve dann eine Hyperbel wird.

Wir müssen deshalb MK und MI durch die Bestimmungsstücke ausdrücken. Das Dreieck $MF'I$ ist gleichschenkelig, denn MI hälftet den Winkel FMF' ; man erhält folglich, indem man den bekannten Winkel FMO durch ε und die bekannte Entfernung FM durch r_0 bezeichnet:

$$MI = 2r_0 \cos \varepsilon.$$

Da der Punkt K auf die oben bezeichnete Weise erhalten wurde, so ist:

$$MK = MO \cos \varepsilon^2.$$

Der Werth von MO aber ergibt sich aus der Gleichung:

$$\varphi \cos \varepsilon = \frac{v_0^2}{MO},$$

wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und φ die in M wirkende Kraft bedeutet, welche den Werth $\frac{\mu}{r_0^2}$ hat; so dass

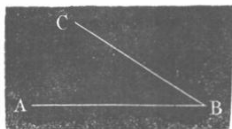
$$MO = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu \cos \varepsilon} \text{ und folglich } MK = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos \varepsilon}{\mu} \text{ wird.}$$

Vergleicht man jetzt die für MK und MI gefundenen Ausdrücke und lässt den ihnen gemeinschaftlichen Factor $r_0 \cos \varepsilon$ weg, so sieht man, dass die Trajectorie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, je nachdem $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ negativ, Null oder positiv ist. Bemerkenswerth ist dabei, dass die Art der Curve nur von dem anfänglichen Abstand des Beweglichen vom Centrum und von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit abhängt, während die Richtung der letzten dafür gleichgültig ist.

Wollte man diese Aufgabe durch Rechnung behandeln, so könnte man von der Gleichung (3) Gebrauch machen und hätte eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen r und θ zu integriren. Man würde leicht erkennen, dass die dadurch erhaltene Gleichung alle drei Kegelschnitte vorstellen kann, und würde sich zu den nämlichen Unterscheidungsmerkmalen wie die eben gefundenen geführt sehen. Wir werden aber Gelegenheit haben darauf zurückzukommen und dort die Rechnungen ausführen, deren wir hier blos erwähnen.

10. *Drittes Beispiel.* — Die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Würfel der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird.

Fig. 2.



A (Fig. 2) bezeichne das feste Centrum; B die Anfangslage des Punktes; v_0 die Entfernung AB ; α den Winkel, welchen die Richtung BC der Anfangsgeschwindigkeit, deren Grösse v_0 sei, mit BA macht.

Die Formel (4) liefert für $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \left(\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha^2} - 1 \right) \frac{1}{r}.$$

Wir unterscheiden nun, ob $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha^2} - 1$ negativ, Null oder positiv ist. In allen drei Fällen ergibt sich die Geschwindigkeit aus der Gleichung:

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2} + c',$$

während c' durch die anfänglichen Werthe von v und r bestimmt wird.

1) Es sei zuerst $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha^2} - 1 = 0$, welches der einfachste Fall ist. Man hat jetzt:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = 0, \text{ folglich } \frac{1}{r} = A\theta + B.$$

Um die Constanten A und B zu bestimmen, bemerken wir, dass man im Punkte B , durch welchen der Einfachheit wegen die Polaraxe gehen mag, hat:

$$r = r_0, \quad \left(\frac{dr}{d\theta} \right) = - \tan \alpha.$$

Die Gleichung $\frac{1}{r} = A\theta + B$ ergibt für $\theta = 0$:

$$\frac{1}{r} = B, \quad - \frac{dr}{r^2} = A.$$

Daraus geht hervor:

$$B = \frac{1}{r_0}, \quad A = \frac{\cot \alpha}{r_0};$$

und die Gleichung der Trajectorie wird:

$$r = \frac{r_0}{1 + \theta \cot \alpha}.$$

Diese Curve ist folglich eine hyperbolische Spirale mit dem Punkt A als Pol.

Wenn α ein spitzer Winkel, folglich $\cot \alpha$ positiv ist, so

rückt das Bewegliche mit wachsendem θ ohne Ende dem Pol näher.

Ist α ein rechter Winkel, so hat man $\cotg \alpha = 0$ und $r = r_0$; die Curve wird ein Kreis, und die Bewegung wird gleichförmig.

Wir wollen hier ein- für allemal folgende Bemerkung anknüpfen. Wenn das Bewegliche (wie hier stattfindet) mit einer gegen den Radius vector senkrechten Geschwindigkeit ausgeht, von welcher das Quadrat, durch den Leitstrahl getheilt, der beschleunigenden Kraft gleich ist, die in dem Augenblick wirkt, so muss das Bewegliche bei jedem Anziehungsgesetz nothwendig mit gleichförmiger Bewegung den Kreis durchlaufen, dessen Mittelpunkt im Pol liegt. Denn dieser Kreis würde die Trajectorie vorstellen, wenn man sich die Kraft beständig dem bezeichneten Anfangswerth gleich dächte. Man kann denselben aber auch als durch die Wirkung der vorgelegten Kraft beschrieben betrachten, weil diese nur von der Entfernung abhängt und daher in allen Punkten des Kreises gleiche Intensität behält. Da nun die vorgelegte Kraft unter den gegebenen Anfangsumständen nur eine einzige Bewegung hervorzubringen vermag, so hat dieselbe das Durchlaufen des Kreises zur nothwendigen Folge.

Ist α endlich stumpf, so entfernt sich der Punkt immer weiter vom Pol; und der Leitstrahl wird unendlich für $\theta = -\tan \alpha$, wodurch die Richtung der Asymptote bestimmt wird.

Suchen wir jetzt den Ausdruck der Coordinaten des Beweglichen durch die Zeit.

Die Gleichung $r^2 d\theta = c dt$ giebt, wenn man für r seinen Werth setzt:

$$dt = \frac{r_0^2 d\theta}{c(1 + \theta \cotg \alpha)^2};$$

daher:

$$t = -\frac{r_0^2}{c \cotg \alpha} \cdot \frac{1}{1 + \theta \cotg \alpha} + c_1.$$

Indem man die Constante c_1 vermöge der Bedingung $t = 0$, $\theta = 0$ bestimmt und zugleich $r_0 v_0 \sin \alpha$ statt c schreibt, erhält man:

$$t = \frac{r_0}{v_0 \cos \alpha} \left(1 - \frac{1}{1 + \theta \cotg \alpha} \right) = \frac{1}{v_0 \cos \alpha} (r_0 - r);$$

woraus folgt:-

$$r = r_0 - v_0 t \cos \alpha$$

sowie:

$$\theta = \frac{1}{\cotg \alpha} \left(\frac{1}{1 - \frac{v_0 t}{r_0} \cos \alpha} - 1 \right).$$

Der Werth von r nimmt, sofern α spitz ist, mit wachsendem t ab und wird Null für $t = \frac{r_0}{v_0 \cos \alpha}$; das Bewegliche erreicht mithin den Pol am Ende dieses Zeitintervalls, vom Beginn der Bewegung gerechnet. Der zugehörige Werth von θ ist unendlich gross; folglich hat der Punkt unterdessen eine unendliche Anzahl von Umläufen um den Pol gemacht.

Um die Lagen zu finden, welche der Punkt vor dem Augenblick inne hatte, der als Anfang der Bewegung genommen wurde, muss man t von Null an bis zum Unendlichen negativ nehmen; r wächst dabei von r_0 bis ins Unendliche, θ aber geht von Null bis $-\tan \alpha$, welcher Werth die Richtung der Asymptote bestimmt.

Wenn der Winkel α stumpf ist, so haben wir gesehen, dass r unendlich wird für $\theta = -\tan \alpha$; dieses trifft mit $t = \infty$ zusammen. Dagegen wird r Null für den Zeitpunkt, welcher um den Absolutwerth von $\frac{r_0}{v_0 \cos \alpha}$ dem als Zeitanfang betrachteten Augenblick-voran liegt; θ ist dann unendlich negativ.

2) Es sei jetzt $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha} - 1 = -n^2$, während n eine reelle Grösse bedeutet.

Die Differentialgleichung der Trajectorie hat zum Integral

$$\frac{1}{r} = A \sin n\theta + B \cos n\theta.$$

Die Constanten A und B bestimmen sich, indem man ausdrückt, dass $r = r_0$ sowie $\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\tan \alpha$ für $\theta = 0$. Wir

erhalten dadurch:

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\theta + \frac{\cotg \alpha}{n} \sin n\theta = \frac{\sin(n\theta + \varepsilon)}{\sin \varepsilon},$$

wenn $\frac{\cotg \alpha}{n} = \cotg \varepsilon$ gesetzt wird.

Will man den Ort des Beweglichen haben, welcher dem Pol am nächsten liegt, so muss man $\frac{1}{r}$ zu einem Maximum machen. Man muss also $\sin(n\theta + \varepsilon) = 1$ setzen, welches liefert:

$$r = r_0 \sin \varepsilon \text{ und } n\theta + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

oder:

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon;$$

woraus:

$$\tan n\theta = \cotg \varepsilon = \frac{\cotg \alpha}{n},$$

wie man es würde gefunden haben, wenn man $d \cdot \frac{1}{r} = 0$ gesetzt hätte.

Lässt man von diesem besonderen Werth an θ um gleiche Grössen zu- und abnehmen, so erhält $\sin(n\theta + \varepsilon)$ in beiden Fällen gleiche Werthe, weshalb die Curve gegen die Richtung des kürzesten Leitstrahls symmetrisch ist.

Der Werth von r wird unendlich, wenn

$$\sin(n\theta + \varepsilon) = 0 \text{ oder } n\theta + \varepsilon = m\pi,$$

wo m jede ganze Zahl bezeichnet. Man hat alsdann:

$$\tan n\theta = -\tan \varepsilon = -n \tan \alpha.$$

Der kleinste Werth von θ , welcher dieser Gleichung Genüge leistet, bestimmt die Richtung, gegen die der Leitstrahl hinstrebt, während derselbe unendlich wächst. Er erreicht diese Richtung jedoch erst nach einer unendlichen Zeit, wie man leicht sehen kann, indem man t mit Hülfe der Gleichung

$$r^2 d\theta = c dt$$

in θ ausdrückt.

3) Zuletzt möge $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha^2} - 1 = n^2$ sein.

Die Integration der Differentialgleichung der Bahncurve liefert:

$$\frac{1}{r} = Ae^{n\theta} + Be^{-n\theta};$$

und die Bestimmung von A und B aus dem Anfangszustand ergibt:

$$\frac{2r_0}{r} = \left(1 + \frac{\cotg \alpha}{n}\right) e^{n\theta} + \left(1 - \frac{\cotg \alpha}{n}\right) e^{-n\theta}.$$

Daraus sehen wir, dass r mit wachsendem θ sich der Null nähert.

Wenn man zu grösserer Einfachheit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt, so wird

$$r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}.$$

Diese Spirale ist symmetrisch gegen die Polaraxe. Ihre beiden Zweige nähern sich dem Pol, und es lässt sich leicht einsehen, dass das Bewegliche nach einer endlichen Zeit den Pol erreichen wird. In der That, aus

$$r^2 d\theta = c dt$$

folgt:

$$c dt = \frac{4r_0^2 d\theta}{(e^{n\theta} + e^{-n\theta})^2} = \frac{4r_0^2 e^{2n\theta} d\theta}{(e^{2n\theta} + 1)^2};$$

daher:

$$\frac{nct}{2r_0^2} = - \frac{1}{e^{2n\theta} + 1} + C_1.$$

Bestimmen wir die Constante durch die Bedingung $t = 0$, $\theta = 0$, so findet sich:

$$C_1 = \frac{1}{2},$$

und folglich:

$$e^{2n\theta} = \frac{2}{1 - \frac{nct}{r_0^2}} - 1.$$

Man sieht hieraus, dass θ unendlich wächst, während t dem Werth $\frac{r_0^2}{nc}$ näher rückt. Demnach erreicht das Bewegliche den Pol am Ende dieser Zeit.

Will man die Bewegung untersuchen, welche dem Augenblick vorausgeht, der als Anfang der Zeit betrachtet wurde,

so muss t negativ genommen werden. Vorstehende Gleichung ergibt dann auch θ negativ, und wir erhalten $\theta = -\infty$ für $t = -\frac{r_0^2}{nc}$, was man vorher wissen konnte.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden; derjenige nämlich, wo nur eine Exponentialgrösse in der Gleichung der Trajectorie vorkommt und diese daher eine logarithmische Spirale wird. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$\cotg \alpha = \pm n.$$

Die Trajectorie erhält z. B. für $\cotg \alpha = -n$ die Gleichung:

$$r = r_0 e^{n\theta}.$$

Man kann diese Wahrheit auch unmittelbar aus der allgemeinen Formel (3) erkennen, welche für den gegenwärtigen Fall folgende Gestalt erhält:

$$c^2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = (\mu - c^2) r^2 + \left(v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^2} \right) r^4.$$

Nehmen wir an, dass die gegebenen Constanten der Bedingung $v_0^2 = \frac{\mu}{r_0^2}$ genügen, so ist klar, dass dann die Gleichung einen unveränderlichen Werth für den Quotienten $\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)}$ liefert, welcher die Tangente der Neigung des Leit-

strahls gegen die Curve vorstellt. Darin besteht aber die charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Spirale. Der

Werth von n^2 , welcher $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha} - 1$ war, wird jetzt

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \text{ oder } \cotg^2 \alpha,$$

welches die oben gefundene Bedingung ist.

Anwendung auf das Weltsystem. Bewegung der Planeten.

11. Die aufmerksame Beobachtung der Bewegungen der Himmelskörper während vieler Jahrhunderte hat mehrere allgemeine Gesetze ergeben, welche der Anwendung mathematischer Theorien als Grundlage dienen konnten. Damit die bisher aufgestellten Formeln bei der Bewegung der Planeten so-

wie aller anderen Himmelskörper anwendbar bleiben, muss man annehmen, dass ihre Materie den Gesetzen unterworfen sei, welche wir ohne Ausnahme an den Körpern wahrnehmen, die uns umgeben und unserer Erfahrung unterworfen werden können. Wenn auch a priori Zweifel daran möglich wären, dass die Himmelskörper aus einer mit solchen Eigenschaften begabten Materie bestehen, so giebt doch die Uebereinstimmung selbst der kleinsten Folgerungen aus dieser Hypothese mit der Beobachtung den Beweis dafür a posteriori.

Die Bewegungen der Planeten, in Bezug auf die Erde betrachtet, erscheinen äusserst verwickelt; sie gewinnen dagegen grosse Einfachheit, wenn man dieselben auf die Sonne bezieht. Sie befolgen drei grosse, nach Kepler benannte Gesetze, welche wir aussprechen, indem wir die Planeten als einfache materielle Punkte betrachten:

1. Die Planeten durchlaufen bei ihrer Bewegung um die Sonne ebene Curven, und die von der Sonne ausgehenden Leitstrahlen beschreiben dabei Flächen, welche mit den Zeiten proportional sind.

2. Die relativen Bahnen der Planeten sind Ellipsen, von denen das Centrum der Sonne einen Brennpunkt bildet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Würfel der grossen Axen ihrer Bahnen.

Wir wollen sehen, welche strengen Folgerungen sich aus diesen Gesetzen ziehen lassen.

Da wir nicht wissen, ob der Mittelpunkt der Sonne unbewegt ist, so müssen wir schliessen, wie wenn er bewegt wäre. Gemäss der Theorie der relativen Bewegung folgert man aus dem ersten Kepler'schen Gesetz, dass die relative Kraft an jedem Planeten nach dem Centrum der Sonne gerichtet ist, welche Beschaffenheit auch dieselbe ausserdem haben mag. Das will sagen: wenn man in irgend einem Augenblick an dem Planeten eine Kraft anbrächte, die gleich, parallel und entgegengesetzt wäre mit derjenigen, wodurch die Bewegung der Sonne im Raum hervorgebracht wird, so würde die Resultante dieser Kraft und der den Planeten wirklich angreifenden nach dem Sonnencentrum gerichtet sein.

Das zweite Gesetz bestimmt, indem es die relative Bahn des Planeten kennen lehrt, den Ausdruck für die relative Kraft, der zufolge die Bahn beschrieben wird. Bezeichne $2a$ die grosse Axe der Ellipse, e ihre Excentricität, r den Radius vector vom Mittelpunkt der Sonne nach einer beliebigen Stellung des Planeten, ω den Winkel der grossen Axe mit derjenigen festen, durch das Sonnencentrum gehenden Geraden, von welcher an die Winkel des Leitstrahls gezählt werden. Dann wird die Gleichung der Bahn:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Als allgemeinen Ausdruck der beschleunigenden Kraft φ bei der Centralbewegung haben wir gefunden:

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right).$$

Die Gleichung der gegenwärtig betrachteten Trajectorie giebt:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = - \frac{e(\cos\theta - \omega)}{a(1-e^2)}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

und somit:

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2},$$

welcher Werth positiv ist. Die relative Bewegung eines beliebigen Planeten um die Sonne wird daher durch eine nach dem Sonnencentrum gerichtete Kraft hervorgebracht, deren Grösse im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung steht.

Eine ähnliche Rechnung würde zu demselben Gesetz führen, wenn die Bahn eine Parabel oder Hyperbel wäre.

12. Wir wollen nun die beschleunigenden Kräfte mit einander vergleichen, welche auf verschiedene Planeten bei ihrer Bewegung um die Sonne wirken.

Wie in Nro. 11 bezeichne c das Doppelte des während

der Zeiteinheit vom Radius vector durchstrichenen Flächenraumes; T möge die ganze Umlaufszeit bedeuten. Dann wird:

$$\frac{1}{2} c T = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

und hiernach:

$$\varphi = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}.$$

Dem dritten Kepler'schen Gesetz zufolge bleibt der Quotient $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten derselbe. Die Kraft, welche die Masseneinheit eines jeden Planeten gegen den Mittelpunkt der Sonne hinzieht, ist deshalb von der Entfernung allein abhängig.

Die relativen Bewegungen der Planeten um die Sonne werden folglich durch Kräfte hervorgebracht, welche nach dem Sonnencentrum gerichtet sind und im directen Verhältniss der Massen stehen, worauf sie wirken, sowie im umgekehrten des Quadrats der Entfernung.

13. Man muss jedoch diesen Folgerungen den rechten Sinn unterlegen.

Die Kepler'schen Gesetze zeigen, dass bei der relativen Bewegung, so wie dieselbe für einen beliebigen Planeten stattfindet, die auf ihn wirkende Kraft das Gesetz befolgt, welches wir so eben bestimmt haben. Folgt aber daraus, dass dieses Gesetz auch noch das nämliche sein würde bei einer anderen Bewegung des Planeten? Zum Beispiel, wenn man denselben ohne Geschwindigkeit in verschiedene Abstände vom Mittelpunkt der Sonne brächte, würde er dann auch noch dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional dagegen angezogen werden? Das geht aus dem für φ gefundenen Werthe keineswegs hervor, denn derselbe hätte ebenso gut als Function von θ oder selbst von t ausgedrückt werden können; und mit gleichem Recht würde man daraus andere Gesetze für die beschleunigende Kraft hergeleitet haben. Diese Gesetze wären wohl für die betrachtete Bewegung jedoch für keine andere erwiesen. Offenbar ist vielmehr, dass zwei solche Gesetze nicht zugleich allgemeine sein können, da jedes das andere ausschliesst.

Gleichwohl kann die Gesammtheit der Resultate bezüglich der verschiedenen Planeten zur Kenntniss des allgemei-

nen Gesetzes führen, wonach sich die Kraft richtet, welche ihre Bewegungen bewirkt. Man sieht zunächst, dass dieselbe nicht von der Zeit abhängen darf; denn sie würde für jeden Planeten durch eine periodische Function ausgedrückt werden, deren Periode mit seinem Umlauf gleiche Dauer hätte; was darum nicht angeht, weil diese Dauer bei anderen Planeten verschieden ist. Eben so wenig lässt sich die Abhängigkeit der Kraft von der Richtung annehmen; denn die Rechnungen für die einzelnen Planeten würden der Function nicht einerlei Form ertheilen. Dagegen führen die Bewegungen aller Planeten auf denselben Ausdruck der beschleunigenden Kraft durch die Entfernung. Sofern man die Kepler'schen Gesetze als genau und unwandelbar betrachtet, kann man daher nicht zweifeln, dass dieser Ausdruck das wahre Gesetz ausspricht, nach welchem die Materie der Planeten gegen den Mittelpunkt der Sonne angezogen wird.

Nur in der Materie der Sonne scheint die Ursache dieser beständig nach ihrem Mittelpunkt hinzielenden Wirkung gesucht werden zu können. Ueberträgt man das Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung auf die getrennt auf einander wirkenden Himmelskörper, so muss man annehmen, dass die Sonne auch gegen jeden Planeten seiner Masse proportional hingezogen werde. Da die Sonne die Materie von jeder Art anzieht, woraus die in so verschiedenen Entfernungen von ihr befindlichen Planeten bestehen, so ist es unmöglich, sich der ferneren Annahme zu entziehen, dass dieselbe in gleicher Weise auf die Satelliten wirke; und umgekehrt. Weil nun die Radien vom Centrum der Sonne nach den verschiedenen Punkten eines Planeten und seiner Satelliten nahezu gleich und parallel sind, so darf man ein solches System als durch parallele, den Massen proportionale Kräfte angegriffen betrachten. Daraus geht hervor, wie die Wirkung der Sonne die relativen Bewegungen der Satelliten gegen ihren Planeten nicht merklich ändert.

Auf diese letzten Bewegungen finden die Kepler'schen Gesetze Anwendung. Hieraus folgt vermöge der bereits für die Planeten in Bezug auf die Sonne gemachten Schlüsse, dass die zu einem Planeten gehörigen Satelliten gegen dessen Mittelpunkt durch Kräfte hingezogen werden, welche in directer

Proportion mit ihren Massen und in umgekehrter mit dem Quadrat der Entfernungen von diesem Centrum stehen. Dem Princip von der Gleichheit der Gegenwirkung gemäss ziehen dann die Satelliten wieder den gemeinsamen Planeten im Verhältniss ihrer Massen und der nämlichen Function der Entfernung an.

Wenn ein Planet die Sonne seiner Masse proportional anzieht, so erscheint die Annahme naheliegend, dass alle Theile, aus welchen er besteht, im Verhältniss ihrer Massen zu dieser Wirkung beitragen, d. h. dass jedes Molekül die Sonne also auch ihre Theile im Verhältniss seiner Masse zu jener des Planeten anzieht. Ebenso natürlich ist es, Gleiches vorauszusetzen von der Anziehung, welche der Planet auf seine Satelliten äussert, so dass jedes Molekül einen Satelliten und dessen Theile im Verhältniss der ihm eigenen Masse zu der des Planeten anzieht. Da die zu demselben Planeten gehörigen Satelliten von diesem proportional mit ihren Massen angezogen werden, so schliesst man, dass ihre gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung ebenfalls den Massen proportional sei, und dass deshalb alle Theile eines Satelliten proportional mit den ihnen zukommenden Massen den Planeten und seine Theile anziehen. Gleiches gilt für den Satelliten in Bezug auf die Sonne. Der Analogie nach übertragen wir dieselbe Eigenschaft auch auf die Materie der Sonne und nehmen an, dass alle sie zusammensetzenden Theile im directen Verhältniss ihrer Massen und im umgekehrten des Quadrats der Entfernung sowohl die Planeten als die Satelliten und die Theile von beiden anziehen. Indem wir jetzt diese Annahme ganz allgemein machen, betrachten wir es als eine der Materie, woraus unser Planetensystem besteht, gemeinsame Eigenschaft, dass je zwei Moleküle einander ihren Massen proportional und im umgekehrten Verhältniss des Quadrats ihrer Entfernung anziehen.

14. Wenn die Himmelskörper vollkommen kugelförmig wären und aus homogenen concentrischen Schichten beständen, so müssten dieselben bei dem angenommenen Attractionsgesetz, wie wir im ersten Theil gezeigt haben, in solcher Weise auf einander wirken, als ob ihre Massen in den Mittelpunkten vereinigt wären. In der That aber weicht ihre Gestalt von der Kugelform etwas ab; jedoch entspringen hieraus nur solche

Unterschiede, um welche man sich bei einer ersten Annäherung an die Wahrheit nicht zu bekümmern braucht. Wir werden deshalb Sonne, Planeten und Satelliten wie materielle Punkte von ungleichen Massen betrachten, welche einander anziehen ihren Massen direct und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Die Attraction, welche ein Planet durch die übrigen Körper des Systems erfährt, hat Störungen seiner Bewegung um die Sonne zur Folge, welche den hauptsächlichsten Gegenstand der Mechanik des Himmels bilden. Wir beschäftigen uns damit in diesem Buche nicht, sondern betrachten die Bewegung eines jeden Planeten unter der Voraussetzung, dass dieselbe allein durch die Wirkung zwischen ihm und der Sonne erzeugt werde.

Bezeichnen wir mit f die gegenseitige Anziehung zweier als einfache Punkte gedachten Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung von einander. M und m mögen die Massen der Sonne und eines Planeten vorstellen; ihre gegenseitige Wirkung in der Entfernung r wird dann durch $\frac{fMm}{r^2}$ ausgedrückt. Die beschleunigende Kraft an dem Planeten beträgt $\frac{fM}{r^2}$; an der Sonne $\frac{fm}{r^2}$. Dieselbe ist an jedem von beiden Punkten gegen den anderen gerichtet. Will man daher die relative Bewegung des Planeten um die Sonne erfahren, so muss man sich die Sonne als relativ ruhend und den Planeten durch eine der Summe

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{fm}{r^2} \text{ oder } \frac{f(M+m)}{r^2}$$

gleiche Kraft angegriffen denken, welche gegen die Sonne hinwirkt. Denn zufolge der allgemeinen Theorie der relativen Bewegung hat man an demjenigen Punkt, dessen Bewegung untersucht werden soll, eine beschleunigende Kraft anzubringen, welche gleich, parallel und entgegengesetzt ist mit der auf den anderen Punkt wirkenden. Man darf dann diesen letzten als ruhend und die Bewegung des ersten wie eine absolute betrachten. Die Anfangsgeschwindigkeit, welche man dem beweglichen Punkt beilegen muss, ist die Resultante seiner absoluten Anfangsgeschwindigkeit und einer gleichen, parallelen und entgegengesetzten mit jener des anderen.

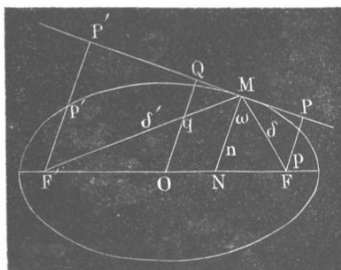
Wir haben in Nro. 12 für die relative Bewegung eines Planeten um die Sonne $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ als Ausdruck der relativen beschleunigenden Kraft in der Einheit der Entfernung gefunden. Nach dem so eben Gesagten ist daher:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m).$$

Man sieht demnach, dass $\frac{a^3}{T^2}$ von m abhängt, folglich von einem Planeten zum anderen sich ändert, wofern die Planeten nicht gleiche Massen haben, was ausser aller Wahrscheinlichkeit liegt. Da jedoch Kepler durch die Beobachtung darauf geführt wurde, diesen Quotienten für alle Planeten als gleich zu betrachten, so ist man zu dem Schlusse genöthigt, dass das Glied fm nur einen sehr kleinen Theil von $f(M + m)$ ausmache, und dass folglich die Masse eines beliebigen Planeten, gegen die der Sonne gehalten, sehr klein sei. Wir werden bald eine Anwendung dieser wichtigen Bemerkung kennen lernen.

15. Wir sind mit Hülfe der allgemeinen Formeln für die Centralkräfte auf das Attractionsgesetz gekommen. Einfacher kann man zu demselben durch die blosse Betrachtung der Centripetalkraft gelangen. Bevor wir diese neue Verfahrensart auseinandersetzen, wollen wir an einige auf die Ellipse bezügliche Formeln erinnern, welche häufig Anwendung finden.

Fig. 3.



Die Halbaxen der Ellipse mögen durch a und b bezeichnet werden; der Abstand ihrer Brennpunkte vom Centrum durch c . Verbinden wir irgend einen Punkt M (Fig. 3) dieser Curve mit den Brennpunkten F, F' ; fällen wir aus F, F' und dem Centrum O die Perpendikel $FP, F'P', OQ$

auf die Tangente in M und ziehen die Normale MN . Wir setzen:

$FM = \delta$, $F'M = \delta'$, $FP = p$, $F'P' = p'$, $OQ = q$, $MN = n$, $NMF = \omega$.
Man erhält dann leicht die nachstehenden Formeln:

$$FN = \frac{c\delta}{a}, F'N = \frac{c\delta'}{a}, p = b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}, p' = b\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}, n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'},$$

$$\cos \omega = \sin FMP = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}}, q = \frac{p+p'}{2} = \frac{ab}{\sqrt{\delta\delta'}} = \frac{b^2}{n}.$$

Aus ihnen folgt $pp' = b^2$, $qn = b^2$; somit auch $pp' = qn$ oder $p : n = q : p'$.

Der Krümmungsradius R ist bei allen Kegelschnitten gleich dem Würfel der Normalen, getheilt durch das Quadrat des halben Parameters. Demnach hat man hier:

$$R = \frac{a^2 n^3}{b^4} = \frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Man erkennt ferner sofort die Gleichheit des halben Parameters $\frac{b^2}{a}$ mit der Projection $n \cos \omega$ der Normalen auf jeden von beiden Leitstrahlen.

Ebenso sieht man, dass die Projection $R \cos \omega$ des Krümmungshalbmessers auf einen Leitstrahl mit $\frac{\delta\delta'}{a}$ gleich ist; welche vierte Proportionale man auf solche Weise construiren kann, dass M einen Endpunkt derselben bildet, während der andere in dem Leitstrahl liegt. Die im zweiten Endpunkt auf diesen errichtete Senkrechte begegnet der Normalen im Krümmungsmittelpunkt.

Noch einfacher ist die von Newton gezeigte Construction, welche aus der Gleichung

$$R \cos \omega = \frac{n}{\cos \omega}$$

hervorgeht. Errichtet man nämlich im Fusspunkt der Normalen ein Perpendikel bis zu einem der zwei Leitstrahlen und im Durchschnittspunkt wieder ein solches auf den Leitstrahl, so trifft das letztere die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

16. Nehmen wir jetzt unsere Aufgabe vor. Da die Flächen der Zeit proportional sind, so geht die Richtung derjenigen Kraft, welche die relative Bewegung um die Sonne bewirkt, beständig durch den Mittelpunkt dieser letzten. Und es handelt sich darum, ihr Gesetz aufzufinden, während wir wis-

sen, dass die Bahn eine Ellipse ist, von welcher die Sonne den einen Brennpunkt bildet.

Bezeichnen wir die nach MF gerichtete beschleunigende Kraft an dem materiellen Punkt M mit φ . Ihre Componente $\varphi \cos \omega$ in der Richtung der Normalen wird durch $\frac{v^2}{R}$ ausge-

drückt, wo v die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ vorstellt. Wenn C den doppelten in der Zeiteinheit vom Radius vector beschriebenen Flächenraum bedeutet, so macht Cdt das Doppelte der während der Zeit dt beschriebenen Fläche aus. Diese Fläche ist aber ein Dreieck, welches zur Basis den in der Zeit dt durchlaufenen Bogen ds hat und zur Höhe den Abstand p des Brennpunktes von der Tangente. Man erhält daher:

$$pds = Cdt, \text{ woraus } v = \frac{C}{p};$$

folglich:

$$\varphi \cos \omega = \frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{p^2 R}, \quad \varphi = \frac{C^2}{p^2 R \cos \omega}.$$

Setzen wir nun für p , R , $\cos \omega$ ihre in Nr. 15 durch δ und δ' gegebenen Werthe, so ergibt sich:

$$\varphi = \frac{C^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{\delta^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Sonne steht.

Wir können die Constante C mit Hülfe der Umlaufszeit des Planeten ausdrücken; denn, da der doppelte Flächeninhalt der Ellipse $2\pi ab$ beträgt, so ist:

$$CT = 2\pi ab, \quad C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Dadurch wird:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\delta^2};$$

daher die beschleunigende Kraft in der Einheit der Entfernung den Werth $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ hat.

Somit sind die schon erhaltenen Resultate auf's Neue gefunden.

17. Bevor Newton den Beweis des Attractionsgesetzes fand, hatte er dasselbe durch Betrachtungen vorausgesehen, welche, ohne den gleichen Grad der Strenge zu besitzen, doch sehr gewichtige Anzeigen dafür abgaben. Wir theilen diese Betrachtungen mit.

Die Planeten beschreiben Bahnen von verschiedener Excentricität. Man darf daher annehmen, dass die Kepler'schen Gesetze auch noch für Kreisbahnen gelten würden; zumal, da die wirklich durchlaufenen Ellipsen eine sehr geringe Excentricität haben und man deshalb mit hinreichender Annäherung dieselben als kreisförmig betrachten kann. Demnach wird man, wo nicht genaue, doch sehr genäherte Resultate erhalten, indem man die Kepler'schen Gesetze auf Kreise anwendet.

Dieses vorausgeschickt, lehrt das erste Gesetz, die an jedem Planeten wirkende Kraft sei beständig gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet. Das zweite Gesetz, woraus in dem allgemeinen Fall folgte, dass die beschleunigende Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung stehe, zeigt hier die Constanz der Geschwindigkeit. Denn die Kreisbogen sind den Sektoren proportionirt und somit den Zeiten; oder auch die Kraft steht senkrecht auf der Trajectorie, und folglich bleibt die Geschwindigkeit unverändert. Die an der Masseneinheit wirkende Centripetalkraft hat den Werth $\frac{v^2}{R}$, wenn v die Geschwindigkeit und R den Kreishalbmesser vorstellt; auch sie ist mithin constant. In dem vorliegenden Falle sagt also das zweite Gesetz, wie vorauszusehen war, nichts über die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung; wohl aber giebt es ihren Ausdruck durch die Umlaufszeit T des Planeten und den Halbmesser seiner Bahn. In der That, man hat $2\pi R = vT$, und die Substitution des damit gegebenen Werthes für v in den Ausdruck der Centripetalkraft, welche wir mit φ bezeichnen, liefert:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Dieser Werth trifft mit dem allgemeinen $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ zusammen, wenn man $r = a = R$ setzt.

Gehen wir nun zu dem dritten Gesetz über, welches bei dem allgemeinen Fall das Attractionsgesetz für die Stellungen jedes Planeten in seiner Bahn ausdehnte auf die Stellungen in verschiedenen Bahnen. Im gegenwärtigen Falle kann das zu findende Resultat keine Ausdehnung sondern nur das erste Hervortreten des letzteren Gesetzes sein. Bezeichnen φ , φ' die beschleunigenden Kräfte an zwei beliebigen Planeten; R , R' ihre Abstände von der Sonne, T , T' ihre Umlaufszeiten. Aus dem vorstehenden Werthe für φ folgt:

$$\varphi : \varphi' = \frac{R}{T^2} : \frac{R'}{T'^2}.$$

Wenn man im zweiten Verhältniss dieser Proportion statt T^2 , T'^2 die proportionirten Grössen R^3 , R'^3 nimmt, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\varphi : \varphi' = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2};$$

welches beweist, dass die an der Masseneinheit wirkende Kraft umgekehrt sich verhält wie das Quadrat der Entfernung vom Sonnencentrum.

Da die Satelliten, welche zu demselben Planeten gehören, in Bezug auf diesen die nämlichen Gesetze beobachten, so schloss man, dass auch ihre Anziehung umgekehrt proportional sei dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt des gemeinsamen Planeten. Die Erde, weil sie nur einen Satelliten hat, vermochte das Attractionsgesetz in dieser Weise nicht zu bestätigen; aber sie gewährte eine andere Bestätigung, welche Newton sich nicht entgehen liess. Wenn man aus der Gesammtheit der mitgetheilten Erscheinungen den Schluss zieht, wie wir in Nro. 13 gethan haben, dass je zwei Moleküle einander proportional mit ihren Massen anziehen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung; so folgt, dass die Wirkung der Erde auf Punkte ihrer Oberfläche und auf äussere Punkte dieselbe ist, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Man darf nämlich die Erde aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzt betrachten. Nun macht die mittlere Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond 60 Erdhalbmesser aus. Die Schwere einer bestimmten Masse an der Erdoberfläche müsste demnach 3600mal so gross sein als diejenige Anziehung, welche die Erde auf

eine gleiche Masse im Mond äussert; und dasselbe Verhältniss müsste bestehen zwischen dem Fallraum an der Erdoberfläche und dem Wege, den der Mond während gleicher Zeit in der Richtung der Attraction gegen die Erde hin zurücklegt. Der leicht anzustellende Versuch dieser Bestätigung gelang vollkommen.

Wenn wir der Einfachheit wegen die sehr wenig excentrische Ellipse, welche der Mond beschreibt, als Kreis betrachten, dessen Radius R den Halbmesser r der kugelförmig gedachten Erde 60mal enthält, so ist die Wirkung g' der Erde auf den Mond dessen Centripetalkraft gleich. Diese letzte beträgt aber $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$, wenn T die Umlaufszeit des Mondes um die Erde bedeutet, welche in Secunden durch die Zahl 39343×60 ausgedrückt wird. Man erhält folglich:

$$g' = \frac{4\pi^2 r}{60(39343)^2};$$

und da $2\pi r = 40\,000\,000$, so kommt:

$$g' = \frac{4\,000\,000\pi}{3 \cdot (39343)^2},$$

welcher Werth wenig verschieden ist von $\frac{g}{3600}$. Und man würde keinen bemerkbaren Unterschied finden, wenn man auf mehrere Umstände Rücksicht nähme, welche wir vernachlässigt haben.

Das Resultat dieser Rechnung lieferte demnach eine neue Bestätigung dafür, dass alle Moleküle dem fraglichen Gesetze gemäss einander anziehen, und dass sowohl die Schwere an der Erdoberfläche ein Product dieser Anziehung ist als diejenige, welcher der Mond gegen denselben Mittelpunkt hin unterliegt.

18. Massen der Planeten. — Das Verhältniss der Masse eines Planeten zu jener der Sonne lässt sich leicht bestimmen, wenn den Planeten ein Satellit von relativ sehr geringer Masse begleitet. Bezeichnen m, m' die Massen des Planeten und seines Satelliten, $2a, 2a'$ die grossen Axen ihrer Bahnen, T, T' ihre Umlaufszeiten; so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m), \quad \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m + m'),$$

und daher:

$$\frac{a^3 T'^2}{a'^3 T^2} = \frac{M + m}{m + m'}.$$

Da nun das zweite Glied nahezu $\frac{M}{m}$ gleich ist, weil m sehr klein gegen M und m' gegen m , so darf man schreiben:

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

Aus der Beobachtung sind T und T' bekannt; es genügt deshalb, dass man einen genäherten Werth für $\frac{a'}{a}$ kenne, um das Verhältniss der Masse des Planeten zur Sonne mit entsprechender Annäherung zu erhalten. Newton hat auf diese Weise für den Jupiter $\frac{1}{1067}$ der Sonnenmasse gefunden. Genauere Verfahrungsarten haben den davon wenig verschiedenen Werth $\frac{1}{1050}$ ergeben.

19. Die Masse der Erde lässt sich auf diesem Wege nicht genau genug bestimmen, weil der Mond ihr gegenüber nicht vernachlässigt werden darf. Doch kann man die vorletzte Gleichung als ein Prüfungsmittel benutzen, wenn man das Verhältniss der Erd- und Mondmasse kennt. Wir vermögen aber die Masse der Erde durch ein Verfahren zu finden, welches bei keinem anderen Planeten anwendbar ist und durch die Kenntniss bedingt wird, welche wir von der Anziehung an ihrer Oberfläche haben. Diese Anziehung ist gleich der Schwere, vermehrt um die verticale Componente der Centrifugalkraft. Dabei muss man auf die Abplattung der Erde Rücksicht nehmen, und es findet sich, dass auf demjenigen Parallelkreis, für welchen das Quadrat des Sinus der Breite $\frac{1}{3}$ beträgt, und dessen Abstand r vom Erdmittelpunkt 6364551 Meter ausmacht, die Anziehung G der Erde fast genau so gross ist, als wenn die Erde eine Kugel mit demselben Halbmesser r wäre. Wenn man nun die wirklich stattfindende Attraction auf diesem Parallelkreis nach dem Gesetz für die Aenderung der Schwere an der Erdoberfläche (*Mécanique céleste* von Laplace) und mit Einbegriff der Verticalcompo-

nente der Centrifugalkraft berechnet, so erhält man $G = 9,81645$, welches etwas mehr ist als $g = 9,80896$.

Der Werth G muss dem eben Gesagten zufolge gleich $\frac{fm}{r^2}$ sein, wo m die Masse der Erde bedeutet, f die gegenseitige Anziehung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung und r den angegebenen Abstand des Parallelkreises vom Mittelpunkt. Entnimmt man daraus $f = \frac{Gr^2}{m}$ und substituirt diesen Ausdruck in die für die Bewegung der Erde um die Sonne geltende Formel:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

so folgt:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{Gr^2(M + m)}{m};$$

daher:

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gr^2 T^2} - 1.$$

Man hat aber:

$$T = 86400 \cdot (365,256374),$$

und die Grösse der Sonnenparallaxe, welche stattfindet unter der vorbemerkten Breite bei der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, die der halben grossen Axe der Erdbahn gleich ist, ergibt:

$$a = 23984 \cdot r.$$

Indem man jetzt die Rechnungen ausführt, findet man:

$$\frac{M}{m} = 354592 \text{ oder } \frac{m}{M} = \frac{1}{354592}.$$

Hieraus können wir das Verhältniss der Erd- und Sonnendichte bestimmen. Der Durchmesser der Sonne enthält den der Erde 110mal, und die Dichten zweier Körper verhalten sich wie die durch ihre Volumina getheilten Massen. Auf diese Weise findet man leicht, dass die Dichte der Erde etwa das Vierfache der Sonnendichte beträgt.

Berechnet man hiernach die Schwere an der Oberfläche der Sonne, so ergibt sich dieselbe $29\frac{1}{2}$ mal so gross als an der Erdoberfläche. Der Fallraum in der ersten Secunde be-

trägt mithin dort 145 Meter, auf der Erde dagegen nur $\frac{g}{2}$.

20. Die Massen derjenigen Planeten, welche keine Satelliten haben, können durch das in Nro. 18 angegebene Verfahren nicht bestimmt werden. Man muss daher zu den Störungen seine Zuflucht nehmen, welche die Bewegung derselben um die Sonne durch ihre gegenseitigen Wirkungen erleidet. Da die Wirkung eines Planeten seiner Masse proportional ist, so begreift man *a priori*, wie die Störung, welche er in einer durch die Sonne verursachten Bewegung hervorbringt, zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen seiner Masse und der Sonnenmasse dienen könne. Diese wichtige Aufgabe fällt jedoch der Mechanik des Himmels anheim, und wir begnügen uns hier mit ihrer Andeutung. Natürlich lässt sich dasselbe Verfahren auch bei den Planeten anwenden, welche Satelliten haben, und auf diese Weise hat man $\frac{1}{1050}$ für die Masse des Jupiters gefunden.

Die Massen der Satelliten eines und desselben Planeten werden mit der Masse dieses letzten ebenfalls mittelst der Störungen verglichen, welche ihre gegenseitigen Wirkungen in ihrer Bewegung um den Planeten veranlassen. Und daraus kann man die Verhältnisse dieser Massen zur Sonnenmasse finden, weil man die Masse des Planeten kennt. Auch hier macht die Erde, die nur einen Satelliten besitzt, eine Ausnahme. Aber man hat wieder den Vortheil, dessen wir schon bei Ausmittlung ihrer Masse bedienten; nämlich die Kenntniss der Verhältnisse an ihrer Oberfläche. Der Mond bringt vermöge der Ungleichheit seiner Entfernungen von den verschiedenen Punkten der Erde Störungen auf ihrer Oberfläche hervor, welche die Ebbe und Fluth des Meeres sind. Die Sonne hat ähnliche Wirkungen auf das Meer zur Folge; man begreift daher, dass die Vergleichung beider Effecte das Verhältniss der Mond- und Sonnenmasse ergeben könne. Diese Vergleichung ist leicht durch die Beobachtung der Mond- und Sonnenfluthen, die nach verschiedenen Gesetzen erfolgen. Wir beschränken uns hier auf die Angabe, dass im Hafen von Brest das Verhältniss der ersten zur zweiten 2,3533 beträgt (*Mécanique céleste*). Durch eine Rechnung, welche wir übergehen, findet man hieraus das Verhältniss der Masse des Mon-

des zur Sonne und folglich zur Erde; und zwar hat man $\frac{1}{75}$ der Erdmasse gleich der Masse des Mondes gefunden.

Wenn m, m_1 die Massen der Erde und eines beliebigen Planeten bezeichnen, T, T_1 ihre Umlaufszeiten, sowie a, a_1 die halben grossen Axen ihrer Bahnen, so besteht folgende Gleichung:

$$\frac{a_1^3}{a^3} = \frac{M + m_1}{M + m} \cdot \frac{T_1^2}{T^2},$$

worin M die Sonnenmasse bedeutet. Kennt man nun m_1 und T_1 , so bestimmt sich hieraus das Verhältniss $\frac{a_1}{a}$ und somit a_1 , weil a bekannt ist. Jedoch ist diese Gleichung nicht geeignet zur Bestimmung von m_1 , denn man vermag a_1 nicht mit dem Grade der Annäherung zu finden, den wir in Nro. 18 für a' voraussetzen durften, wo es sich um die Bahn eines Satelliten handelte.

21. Bisher haben wir nur die Verhältnisse der Planetenmassen zur Sonne bestimmt. Man kann aber einen angenäherten Werth der Erdmasse erhalten, aus welchem sich alle anderen ergeben. Man braucht zu diesem Behufe nur das Verhältniss zu kennen, welches zwischen der Anziehung, die eine bekannte Masse auf irgend einen Körper in gegebener Entfernung ausübt, und zwischen dem Gewicht dieses Körpers besteht. Dazu kann sowohl die Betrachtung des Gleichgewichts als die von Schwingungen führen. Wir begnügen uns damit, eine Vorstellung von dem ersten Mittel beizubringen.

Man denke sich eine kleine Kugel an einem Faden von der Länge l hängend der Einwirkung einer grösseren ausgesetzt, welche den Radius R und die Dichte D haben mag, und deren Centrum in der durch den Endpunkt des Pendels gehenden Horizontalebene liegt und von diesem Punkt um die Strecke a absteht. Die mittlere Dichte der Erde sei d , ihr Halbmesser r , und α der Winkel der Verticalen mit der Richtung des im Gleichgewicht befindlichen Pendels.

Die Masse der kleinen Kugel werde durch m bezeichnet; dann ist die von der grossen Kugel auf sie ausgeübte Attraction $\frac{4}{3} \pi \frac{R^3 D f m}{a^2}$, und ihr Hebelarm $l \cos \alpha$. Die Anziehung der kleinen Kugel durch die Erde beträgt $\frac{4}{3} \pi r d f m$, der He-

belarm aber $l \sin \alpha$. Im Gleichgewicht müssen die Momente beider Kräfte einander gleich sein; man erhält daher nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren:

$$\frac{R^3 D}{a^2} \cos \alpha = r d \sin \alpha, \text{ folglich } \tan \alpha = \frac{R^3 D}{a^2 r d}.$$

Kann man den nothwendig sehr kleinen Winkel α beobachten, so ist in dieser Gleichung nur d unbekannt, welches dadurch bestimmt wird.

Eine Beobachtung dieser Art, die Maskelyne in Schottland in der Nähe eines Berges machte, dessen Masse und mittlere Entfernung er näherungsweise ausgewerthet hatte, ergab ihm die mittlere Dichte der Erde vier- bis fünfmal so gross als die des Wassers.

Einem durch Cavendish angestellten Versuch zufolge, bei welchem die Attraction einer bekannten Kugel Schwingungen hervorbrachte, deren Dauer man bestimmen konnte, ist die Dichte der Erde $5\frac{1}{2}$ mal so gross als jene des Wassers.

Nachdem die mittlere Dichte der Erde mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, findet man daraus ihre Masse, sowie die Massen aller anderen Planeten und der Sonne.

Berechnung der Bewegung eines Punktes um einen anderen, durch welchen er im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung angezogen wird.

22. Wir haben erkannt, dass die Bewegungen der Planeten um die Sonne durch eine anziehende Kraft hervorbracht werden, welche im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkt, und dass diese Kraft noch dasselbe Gesetz befolgen würde, wenn die Bahnen Parabeln oder Hyperbeln wären. Wir wollen jetzt umgekehrt verfahren, also eine anziehende Kraft annehmen, deren Grösse dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionirt ist, und uns die Aufgabe stellen, die Trajectorien, welche der angegriffene Punkt in Folge dieser Kraft beschreiben kann, sowie den Ort, den er in jedem Augenblick einnimmt, auf die allgemeinste Art zu bestimmen.

Wir setzen dabei voraus, dass auf den anziehenden und

den angezogenen Punkt ausser der Anziehung nur noch gleiche und parallele beschleunigende Kräfte wirken. Diese haben keinen Einfluss auf die relative Bewegung zwischen beiden Punkten und können deshalb ganz ausser Acht bleiben. Aber auch von ihnen abgesehen, muss man unterscheiden, ob das Centrum der Anziehung fest oder bewegt ist. Der zweite Fall, welcher vorliegt, sobald die Punkte gegenseitig einander anziehen, lässt sich jedoch leicht auf den ersten zurückführen.

Denn es bezeichne P die gegenseitige Anziehung zweier Punkte mit den Massen m und M ; dann sind ihre beschleunigenden Kräfte respective $\frac{P}{m}$ und $\frac{P}{M}$. Um nun die relative Bewegung von m um M zu erfahren, denke man sich den letzten Punkt unbewegt und betrachte den ersten als durch die beschleunigende Kraft

$$\frac{P}{m} + \frac{P}{M} = P \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)$$

gegen ihn hingetrieben. Die dem Punkt m gleichzeitig beizulegende Anfangsgeschwindigkeit resultirt aus seiner absoluten Anfangsgeschwindigkeit und aus der entgegengesetzten mit jener von M .

Die relative Bewegung zweier Punkte, welche sich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats ihrer Entfernung anziehen, ist somit auf die absolute Bewegung eines Punktes zurückgeführt, der gegen ein festes Centrum durch eine nach demselben Gesetz wirkende Kraft hingetrieben wird, die sich von der anderen nur um einen constanten Coëfficienten unterscheidet.

23. Wir betrachten demnach das Centrum der Anziehung als fest und bezeichnen mit $\frac{\mu}{r^2}$ die beschleunigende Kraft, welche es auf den beweglichen Punkt ausübt. Die Gleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{\mu y}{r^3}.$$

Das Princip der Flächen und das der lebendigen Kräfte liefern die beiden ersten Integrale:

$$(1) \quad r^2 d\theta = c dt,$$

$$(2) \quad \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + b = v^2,$$

worin b, c willkürliche Constanten vorstellen.

Durch Eliminiren von dt erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b;$$

dasselbe ergibt die Gleichung (3) in Nro. 1, wenn man φ

$= \frac{\mu}{r^2}$ setzt. Für:

$$\frac{1}{r} = z$$

geht vorstehende Gleichung über in:

$$(3) \quad \frac{c^2 dz^2}{d\theta^2} = -c^2 z^2 + 2\mu z + b.$$

Wir wollen nun die Constanten b und c bestimmen durch den anfänglichen Ort des Punktes sowie durch die Richtung und Grösse seiner Anfangsgeschwindigkeit. Bezeichnen r_0 und v_0 die anfänglichen Werthe von r und v , so giebt die Gleichung (2):

$$b = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

Für die Constante c haben wir in Nro. 1 allgemein gefunden:

$$c = r_0 v_0 \sin \alpha,$$

wo α den Winkel bedeutet, den die Richtung der Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung mit dem Leitstrahl bildet. Damit sind b und c bestimmt.

24. Um die endliche Gleichung der Trajectorie zu erhalten, muss man die Gleichung (3) integriren. Diese lässt sich auf die Form bringen:

$$d\theta = \frac{\pm dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}},$$

und es handelt sich zunächst darum, dass man wisse, welches von beiden Zeichen zu nehmen sei.

Wir nehmen $d\theta$ stets positiv; dz ist deshalb positiv, so lange der Leitstrahl bei wachsendem θ abnimmt, negativ aber während seines Zunehmens. Der zweite Theil der Differentialgleichung erhält im ersten Falle das Zeichen $+$ und im

zweiten das Zeichen —; dabei muss man sich die Wurzel immer positiv denken.

Es ist daher zu untersuchen, an welchen Stellen die Zeichenwechsel von dz oder die grössten und kleinsten Werthe von z stattfinden. Man erhält dieselben, indem man

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \text{ oder } c^2 z^2 - 2\mu z - b = 0$$

setzt; woraus:

$$z = \frac{\mu}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}}.$$

So oft z einen dieser beiden Werthe annimmt, muss man das Zeichen von dz ändern und es nachher so lange beibehalten, bis z den anderen Werth erreicht; dann wird wieder eine Zeichenänderung nöthig, und so fort.

Setzen wir den Fall, dass von derjenigen Lage ab, welche dem Werthe r_0 für r entspricht, die Radien anfänglich wachsen; dz ist jetzt negativ und folglich:

$$(4) \quad d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2}z + \frac{b}{c^2}}} = \frac{-dz}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2} - \left(z - \frac{\mu}{c^2}\right)^2}}.$$

Hieraus geht hervor, indem man von den der Anfangslage entsprechenden Werthen θ_0 und z_0 an integrirt:

$$\theta - \theta_0 = \arccos \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} - \arccos \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} *);$$

oder, wenn man θ_1 statt $\theta_0 - \arccos \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$ schreibt:

$$(5) \quad \theta - \theta_1 = \arccos \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}.$$

Bei solchen Integrationen, in welchen Kreisbögen vorkommen, hat man wohl darauf zu achten, innerhalb welcher Grenzen die Differentiale dasselbe Zeichen behalten. So ist

$\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$ das Differential von $\arccos u$, während der Sinus die-

*) In keinem Fall kann $\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$ ausserhalb des Intervalls zwischen 1 und -1 liegen, wovon man sich leicht durch die Werthe für b und c überzeugt. Auch sieht man dabei, dass $\mu^2 + b c^2$ immer positiv ist.

ses Bogens positiv bleibt; es wird dagegen $\frac{+ du}{\sqrt{1-u^2}}$ bei negativem Sinus.

Damit hiernach die Gleichung (5) richtig sei, so muss die Voraussetzung gemacht werden, dass man für $\theta_0 - \theta_1 = \arccos \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$ den Werth zwischen 0 und π nehme. Und sie darf nicht länger in Anwendung kommen, als der Bogen $\theta - \theta_1$ innerhalb dieser Grenzen bleibt, also nur bis zu demjenigen Werthe von z , für welchen man hat $\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} = -1$, d. h. bis zu:

$$(A) \quad z = \frac{\mu}{c^2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}}.$$

Wollte man dieselbe Gleichung (5) darüber hinaus anwenden, und zwar zunächst bis zu $\theta - \theta_1 = 2\pi$, wo $\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} = 1$ und folglich:

$$(B) \quad z = \frac{\mu}{c^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}};$$

so würde dies voraussetzen, dass in diesem Intervall $d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2}z + \frac{b}{c^2}}}$ wäre. Und in der That ist es so;

denn, wie wir oben gesehen haben, wird mit dem Werthe (A) für z eine Aenderung des Zeichens von dz nothwendig, damit $d\theta$ durch dz und durch die absolute Wurzel ausgedrückt bleibe, und man muss das geänderte Zeichen von da an beibehalten, bis z den Werth (B) erreicht. Somit sehen wir, dass die Gleichung (5) bis zu 2π hin besteht.

Ueberschreitet der Bogen $\theta - \theta_1$ diesen Werth, so ist wie im ersten Intervall $d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2}z + \frac{b}{c^2}}}$, bis z wie-

der den Werth (A) annimmt, welches bei $\theta - \theta_1 = 3\pi$ geschieht. Der Sinus bleibt unterdessen positiv; man erhält folglich durch Integriren genau wieder die Gleichung (5), und so

fort. Dieselbe besteht daher in der ganzen Ausdehnung der Bewegung ohne jede Aenderung.

Würden die Radien anfänglich abnehmen, so wäre eine ganz ähnliche Discussion zu führen. Der Bogen würde sich dann mit dem entgegengesetzten Zeichen in der Gleichung (5) finden, und diese Form müsste während der ganzen Bewegung beibehalten werden; oder man könnte auch, ohne das Zeichen zu ändern, die Bogen $\theta - \theta_1$ beginnen lassen mit jenem Werthe

von $\text{arc cos } \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$, welcher zwischen π und 2π liegt. In

jedem Fall ergibt sich für θ_1 ein von dem vorhergehenden verschiedener Werth. Bis auf diese Verschiedenheit von θ_1 bleibt jedoch hier dasjenige Resultat geltend, welches wir jetzt aus (5) ableiten wollen.

Die Gleichung (5) lässt sich schreiben:

$$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} = \cos(\theta - \theta_1);$$

daraus folgt, indem man $\frac{1}{r}$ statt z nimmt:

$$(6) \quad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{b c^2}{\mu} \cos(\theta_1 - \theta)}}.$$

Diese Gleichung gehört einem Kegelschnitt an, dessen einen Brennpunkt der Pol bildet. Sie stellt eine Ellipse vor, wenn $b < 0$, eine Parabel für $b = 0$, und eine Hyperbel, wenn $b > 0$.

In der That, eine Ellipse, von welcher man einen Brennpunkt zum Pol nimmt und zur Polaraxe die Richtung der Geraden aus diesem Pol nach dem nächsten Scheitel, hat als Gleichung:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \omega},$$

worin a die halbe grosse Axe sowie e die Excentricität vorstellt. Die Gleichung (6) wird mit ihr identisch, indem man setzt:

$$(7) \quad \theta - \theta_1 = \omega, \quad e^2 = 1 + \frac{b c^2}{\mu^2}, \quad a(1 - e^2) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Da bei der Ellipse $e < 1$, so ist die zweite von diesen Gleichungen nur für ein negatives b möglich; und sie ertheilt dem e bloss reelle Werthe, weil $\mu^2 + b c^2$ immer positiv ist. Die dritte Gleichung bestimmt a ; während die erste sagt, dass θ_1 den Winkel vorstellt, welchen die x -Axe mit der vom Pol nach dem nächsten Scheitel gerichteten Axe der Ellipse bildet.

Die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $2p$ ist:

$$r = \frac{p}{1 + \cos \omega},$$

wenn die aus dem Brennpunkt durch den Scheitel gehende Richtung zur Polaraxe genommen wird. Die Gleichung (6) fällt mit ihr zusammen für:

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad b = 0, \quad p = \frac{c^2}{\mu}.$$

Demnach ist die Bahn in dem Falle von $b = 0$ eine Parabel, welche zur Axe diejenige Gerade hat, die durch den Ursprung geht und mit der x -Axe den Winkel θ_1 bildet. Der Scheitel dieser Parabel liegt auf der diesem Winkel entsprechenden Seite, und ihr Parameter beträgt $\frac{2c^2}{\mu}$.

Hat man endlich $b > 0$, so lässt sich (6) mit folgender Gleichung identisch machen:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \omega},$$

in welcher $e > 1$ vorausgesetzt wird, und die denjenigen Zweig einer Hyperbel vorstellt, in dessen Innerem der zum Pol genommene Brennpunkt liegt; Polaraxe ist dabei die Richtung der Geraden vom Pol durch den Scheitel. Um die Identität beider Gleichungen herzustellen, setzt man:

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad e^2 = 1 + \frac{b c^2}{\mu}, \quad a(e^2 - 1) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Hieraus bestimmen sich e und ω , daher für $b > 0$ die Bahn ein Hyperbelzweig wird, dessen Brennpunkt der Pol einnimmt und dessen Axe den Winkel θ_1 mit der x -Axe einschliesst, während der Scheitel auf jener Seite liegt, welche diesem Winkel entspricht.

25. Man kann leicht die Gleichung der Trajectorie in rechtwinkligen Coordinaten erhalten und dann die Resultate wiederfinden, welche wir aus der Polargleichung abgeleitet

haben. Nehmen wir zur Axe der x diejenige Richtung, welche durch den Ursprung geht und mit der bisherigen x -Axe den Winkel θ_1 macht; dadurch wird

$$x = r \cos(\theta - \theta_1), \quad y = r \sin(\theta - \theta_1), \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Elimination von $\cos(\theta - \theta_1)$ zwischen der ersten dieser Gleichungen und zwischen (6) giebt:

$$r = \frac{c^2}{\mu} - x \sqrt{1 + \frac{b c^2}{\mu^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\mu^2 y^2 - b c^2 x^2 + 2 c^2 x \sqrt{\mu^2 + b c^2} = c^4.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse vor, wenn $b < 0$, eine Parabel für $b = 0$, eine Hyperbel, wenn $b > 0$. Da r als rationale Function von x erscheint, so ist in allen drei Fällen die Gerade, auf welcher die x gezählt werden, eine Axe der Curve, und zugleich bildet der Ursprung einen Brennpunkt.

Man mag bemerken, dass die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit völlig gleichgültig ist für den Werth $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ von b , welcher die Art der Curve bedingt. Dieses Resultat kommt überein mit dem in Nro. 9 auf einem anderen Wege gefundenen.

Nachdem wir die Gleichung der Trajectorie kennen, bleibt uns nur noch übrig, die Coordinaten als Functionen von t zu bestimmen, welches Problem gewöhnlich das Kepler'sche genannt wird.

Wir werden die Rechnung für den Fall einer Ellipse unternehmen, der bei allen Planeten stattfindet. Beziehen wir dieselbe auf Polarcoordinaten r, θ und zählen dabei die θ von derjenigen Richtung an, welche aus dem Brennpunkt nach dem nächsten Scheitel geht. Dies kommt darauf hinaus, dass man $\theta_1 = 0$ also $\omega = \theta$ setzt. Wir haben dann:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta};$$

a und e sind in Nro. 24 durch die Anfangswerthe bestimmt worden.

Aus (1) und (2) erhält man durch Eliminiren von $d\theta$ oder von dt eine Differentialgleichung zwischen t und der nicht eliminirten Coordinate. Die Integration derselben giebt diese

Coordinate als Function von t ; und hernach lässt sich auch die andere mit Hülfe der Bahngleichung in t ausdrücken.

Das Wegschaffen von $d\theta$ liefert:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + b;$$

daher:

$$dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}}.$$

Wählt man zum Zeitanfang den Augenblick, wo $\theta = 0$, so befindet sich der Planet in demjenigen Scheitel, welcher dem Brennpunkt am nächsten liegt und für den $r = a(1 - e)$ ist. Man nennt denselben das Perihelium (Sonnennähe). Der entgegengesetzte Scheitel der Ellipse heisst Aphelium (Sonnenferne); in ihm hat der Leitstrahl seinen grössten Werth, nämlich $r = a(1 + e)$. Hiernach ist dr positiv vom Perihelium bis zum Aphelium und negativ von dem letzten an bis zur Rückkehr nach dem ersten. In der ersten Hälfte der Bahn muss man also nehmen:

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}};$$

in der folgenden Hälfte dagegen hat man das Zeichen der zweiten Seite zu ändern. Man könnte diesen Ausdruck leicht mittelst Kreisbögen integrieren; dabei würde sein Zeichen eine ähnliche Discussion veranlassen wie die in Nro. 24 geführte. Die Einführung einer neuen Veränderlichen ist jedoch vorzuziehen.

Da r beständig zwischen $a(1 - e)$ und $a(1 + e)$ liegt, so darf man setzen:

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Der Winkel u geht zu gleicher Zeit mit θ durch die Werthe $0, \pi, 2\pi$. Man hat ihm den Namen excentrische Anomalie gegeben, während θ die wahre Anomalie des Planeten genannt wird.

Macht man die Substitution für r in dem Werthe von dt , und schreibt zugleich statt b, c die aus (7) entnommenen Werthe:

$$b = -\frac{\mu}{a}, \quad c^2 = \mu a(1 - e^2),$$

so kommt:

$$dt = a \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot (1 - e \cos u) du.$$

Beim Integriren dieser Gleichung ist zu beachten, dass t und u gleichzeitig Null werden. Es ergibt sich daher, indem wir

der Kürze wegen $a \sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{n}$ setzen:

$$nt = u - e \sin u.$$

Hierdurch wird u als Function von t bestimmt, und dann auch r vermöge

$$r = a (1 - e \cos u).$$

Schliesslich liefert die Bahngleichung θ als Function von r , folglich von t .

Man kann θ auch direct als Function von u und somit von t erhalten. Es ist nämlich:

$$d\theta = \frac{cdt}{r^2} = \frac{cdr}{r \sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}} = \frac{du}{1 - e \cos u} \sqrt{1 - e^2}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setzt man:

$$\tan \frac{1}{2} u = z,$$

welches

$$\frac{du}{(\cos \frac{1}{2} u)^2} = 2 dz$$

giebt. Da nun

$$\cos u = (\cos \frac{1}{2} u)^2 - (\sin \frac{1}{2} u)^2,$$

so findet sich:

$$d\theta = \frac{2 dz \sqrt{1 - e^2}}{1 - e + (1 + e) z^2}, \text{ daher } \frac{1}{2} \theta = \arctan z \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} + c_1.$$

Die Constante c_1 ist Null, weil θ und z gleichzeitig Null werden. Wir erhalten demnach:

$$z \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} = \tan \frac{1}{2} \theta$$

oder:

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \tan \frac{1}{2} u.$$

Damit ist θ durch u , also mittelbar durch t gegeben.

26. Aus der Gleichung $nt = u - e \sin u$ lässt sich die Umlaufszeit T des Planeten bestimmen, indem man $u = 2\pi$ setzt. Man findet:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

Derselbe Werth wird erhalten, wenn man den Flächeninhalt der Ellipse theilt durch die vom Radius in der Zeiteinheit beschriebene Fläche. Die Halbaxen der Ellipse sind a und $a\sqrt{1-e^2}$, ihr Flächeninhalt beträgt folglich $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$; und theilt man diesen durch $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, so findet sich in der That $2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$.

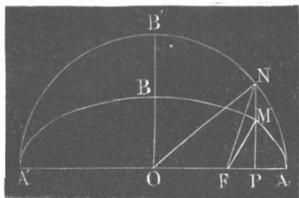
Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird mittelst der Gleichung gegeben:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

welche aus (2) hervorgeht, wenn man $-\frac{\mu}{a}$ statt b schreibt.

27. Die in Nro. 25 gefundenen Formeln, welche t, r, θ durch die Hülfsvariable u ausdrücken, können leicht geometrisch erwiesen werden, wobei man zugleich die Bedeutung dieser Grösse erfährt.

Fig. 4.



Es sei O (Fig. 4) der Mittelpunkt der Ellipse, F der zu betrachtende Brennpunkt und M irgend ein Punkt der Curve. Die Ordinate MP treffe in N den Kreis, welcher über der grossen Axe AA' als Durchmesser beschrieben ist. Man hat dann:

$$MFA = \theta, MF = r, OF = ae, \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}.$$

Dieses festgesetzt behaupten wir, dass der Winkel NOA nichts Anderes sei als die mit dem Namen der excentrischen Anomalie bezeichnete Grösse u . Und in der That, dem bekannten Ausdruck für den Leitstrahl der Ellipse zufolge ist:

$$r = a - e \cdot OP = a(1 - e \cos NOA),$$

also, wenn NOA durch u bezeichnet wird:

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Suchen wir jetzt t in u auszudrücken, und betrachten deswegen den während der Zeit t beschriebenen elliptischen Sector

MFA. Da die doppelte in der Zeiteinheit durchstrichene Fläche $c = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$ beträgt, so folgt:

$$\text{sect } MFA = \frac{1}{2} t \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}{2} t,$$

wenn man wie oben $\frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}} = n$ setzt. Derselbe Sector lässt sich noch auf eine andere Weise durch u darstellen. Weil die zu gleicher Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse, und des Kreises beständig in dem Verhältniss $b : a$ stehen, hat man nämlich:

$$\text{sect } MFA = \frac{b}{a} \text{sect } NFA = \sqrt{1 - e^2} (NOA - NOF).$$

Nun ist:

$$NOA = \frac{a^2}{2} u, \quad NOF = \frac{NO \cdot OF \sin u}{2} = \frac{a^2 e \sin u}{2},$$

mithin:

$$\text{sect } MFA = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{2} (u - e \sin u).$$

Die Vergleichung beider Werthe des Sectors liefert:

$$nt = u - e \sin u.$$

Um zwischen θ und u eine Relation zu erhalten, braucht man nur die Ausdrücke von r durch jede dieser beiden Grössen gleichzusetzen. Das gibt:

$$\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} = 1 - e \cos u, \quad \text{woraus } \cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}.$$

Man muss nun suchen, diese Gleichung auf eine solche Form zu bringen, welche sich besser eignet zur Berechnung von θ für gegebene Werthe von u . Hierzu hat man:

$$1 - \cos \theta = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}, \quad 1 + \cos \theta = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u}.$$

Wenn wir beide Gleichungen durch einander dividiren und zugleich die Quadratwurzeln ausziehen, so findet sich:

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{1}{2} u,$$

worin der absolute Werth der Wurzel gemeint ist.

28. Bevor wir zur Aufsuchung von solchen Formeln übergehen, welche für die Ortsbestimmung des Planeten bequemer

sind, wollen wir zeigen, wie die bisher gefundenen sich vereinfachen, wenn man bloß die erste Potenz von e berücksichtigt.

Aus $u = nt + e \sin u$ folgt:

$$u = nt + e \sin(nt + e \sin u),$$

und hieraus durch Vernachlässigen von e^2 :

$$u = nt + e \sin nt.$$

Man hat ferner:

$$r = a(1 - e \cos u).$$

Vernachlässigt man auch hier e^2 , so wird:

$$r = a(1 - e \cos nt).$$

Es bleibt nur noch θ zu bestimmen. Man könnte diese Coordinate aus der Bahngleichung entnehmen, wohinein der eben für r gefundene Werth zu substituiren wäre. Man thut aber besser, θ direct aus

$$r^2 d\theta = c dt = dt \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$$

zu berechnen. Da mit Weglassung von e^2 die Gleichung der Ellipse

$$r = a(1 - e \cos \theta), \quad r^2 = a^2(1 - 2e \cos \theta)$$

liefert, so wird:

$$d\theta(1 - 2e \cos \theta) = dt \frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}} = n dt.$$

Integriren wir und beachten dabei, dass t und θ gleichzeitig Null werden, so ergibt sich:

$$nt = \theta - 2e \sin \theta;$$

und hieraus, indem man wieder e^2 weglässt:

$$\theta = nt + 2e \sin nt.$$

29. Die Winkelbewegung des Planeten würde gleichförmig sein, wenn man das Glied $2e \sin nt$ vernachlässigen dürfte. Aber man kann sich immer einen Planeten fingiren, dessen gleichförmige Winkelbewegung durch die Gleichung $\theta = nt$ bestimmt wird, und welcher vom Perihelium gleichzeitig mit dem wirklichen Planeten ausgeht. Beide treffen nach der Zeit $\frac{\pi}{n}$ im Aphelium ein und erreichen das Perihelium wieder, wenn

$t = \frac{2\pi}{n}$. In der ersten Hälfte der Bahn ist der wirkliche Planet dem fingirten um eine Winkelgrösse voraus, welche den angenäherten Werth $2e \sin nt$ hat und Gleichung des Mit-

telpunkts genannt wird. In der zweiten Hälfte bleibt dagegen der wirkliche Planet hinter dem fingirten zurück, weil nun *sinn*t negativ ist. Im Perihelium sowohl als im Aphelium treffen sie stets zusammen.

Der Winkel nt führt den Namen der mittleren Anomalie; auch heisst derselbe die mittlere Bewegung des Planeten.

Bei der Erde ist die Annahme eines solchen fingirten Gestirns zur Bestimmung der mittleren Zeit von Nutzen. Auf diese Weise werden diejenigen Unterschiede der wahren Sonnentage ausgeglichen, welche durch die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Bewegung der Sonne in der Ekliptik entstehen. Ausserdem bedarf es noch der Correction jener Unterschiede, welche die Neigung der Ekliptik gegen den Aequator verursacht. Hierzu gelangt man durch Annahme eines zweiten Gestirns, dessen Bewegung in der Ebene des Aequators gleichförmig und während derselben Zeit vor sich geht, in welcher die Sonne die Ekliptik durchzieht. Das letztere Gestirn bestimmt die sogenannte mittlere Zeit; dieselbe fällt viermal im Jahre mit der durch die wirkliche Sonne angezeigten wahren Zeit zusammen.

Wir wollen jetzt die beiden Coordinaten r , θ als entwickelte Functionen von t herstellen. Dabei machen wir von der Formel des Lagrange Gebrauch, deren Beweis hier Platz finden mag.

Formel des Lagrange zur Entwicklung gewisser unentwickelten Functionen.

30. Betrachten wir diejenige Function z der Veränderlichen x , welche durch die Gleichung

$$(1) \quad z = x + \alpha f(z)$$

bestimmt ist, wo f irgend eine gegebene Function, α aber eine sehr kleine Grösse bezeichnet; und stellen wir uns die Aufgabe, z nach Potenzen von α zu entwickeln. Die Coëfficienten dieser Potenzen werden Functionen von x sein; und zwar sind sie dem Maclaurin'schen Lehrsatz zufolge z und alle partiellen Ableitungen von z nach α , worin man durchaus für α

die Null zu setzen hat. Demnach handelt es sich um das Gesetz dieser Ableitungen.

Das Problem, mit welchem wir beginnen, ist nur ein besonderer Fall von demjenigen, welches wir im Auge haben, nämlich von der Entwicklung einer beliebigen Function von z nach Potenzen von α .

Statt der Reihe, die wir suchen, könnte man sich successiver Substitutionen bedienen, um mehr und mehr angenäherte Werthe für z zu finden. Indem man im zweiten Theile der Gleichung (1) statt z den ersten Näherungswerth x setzt, wird

$$z = x + \alpha f(x).$$

Die Substitution dieses neuen, dem wahren z schon näher kommenden Werthes liefert:

$$z = x + \alpha f[x + \alpha f(x)];$$

und so könnte man fortfahren. Dadurch würden aber sehr verwickelte Formeln erhalten, welche keine genaue Schätzung des Grades der Annäherung erlauben; und dies ist der Grund, weshalb man eine nach Potenzen von α fortschreitende Entwicklung gesucht hat, welche um so rascher convergirt, je kleiner α ist.

Der Lehrsatz des Maclaurin giebt:

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right)_0 \frac{\alpha^2}{2} + \dots + \left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0 \frac{\alpha^m}{m!} + \dots$$

Wir müssen daher die Werthe bestimmen, welche z und seine Ableitungen für $\alpha = 0$ annehmen. Die Gleichung (1) zeigt, dass

$$z_0 = x;$$

folglich bleibt allgemein $\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0$ zu finden.

Um dies zu erreichen, differenziiiren wir zunächst (1) partiell nach jeder von den beiden Grössen x und α , diese als unabhängige Variablen betrachtet. Dann findet sich:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \alpha f'(z) \frac{dz}{d\alpha}, \quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z) + \alpha f'(z) \frac{dz}{d\alpha},$$

und hieraus durch Wegschaffen von $f'(z)$:

$$(2) \quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z) \frac{dz}{dx}.$$

Diese Formel führt die Differentiationen von z nach α zurück

auf solche nach x , deren Anwendung sehr vortheilhaft ist, wie wir sehen werden.

Man erhält aus (2) sogleich $\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0$; für $\alpha = 0$ wird nämlich $z = x$ und $\frac{dz}{d\alpha} = 1$, also:

$$\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 = f(x).$$

Um $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ zu erhalten, differenziiiren wir (2) nach α und bekommen:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{dx} + f(z) \frac{d^2z}{dx d\alpha} = f(z) f'(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z) \frac{d^2z}{dx d\alpha}.$$

Die Differentiation von (2) in Bezug auf x giebt:

$$\frac{d^2z}{dx d\alpha} = f'(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z) \frac{d^2z}{dx^2};$$

und wenn man diesen Werth in die vorletzte Gleichung einsetzt, so folgt:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = 2f(z)f'(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)^2 \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Das zweite Glied ist die Ableitung von $(fz)^2 \frac{dz}{dx}$ nach x ; daher

$$(3) \quad \frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{d \left[(fz)^2 \frac{dz}{dx} \right]}{dx};$$

für $\alpha = 0$ wird

$$\left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{d \cdot (fx)^2}{dx}.$$

Die Werthe aller folgenden Ableitungen von z in Bezug auf α für $\alpha = 0$ lassen sich finden durch wiederholte Differentiation der verschiedenen Potenzen von $f(x)$ nach x , was jetzt gezeigt werden soll.

Wollte man $\frac{d^3z}{d\alpha^3}$ erhalten, so müsste man den zweiten Theil von (3) nach α differenziiiren. Die Reihenfolge der Differentiationen ist gleichgültig; man kann deshalb zuerst $(fz)^2 \frac{dz}{dx}$

nach α und darauf das Resultat nach x differenziiiren. Um jedoch die Wiederholung der nämlichen Reductionen zu vermeiden, wollen wir allgemein von $\varphi(z) \frac{dz}{dx}$ die Ableitung nach α nehmen und dieselbe auf Ableitungen nach x zurückbringen.

Man erhält zunächst:

$$\frac{d \left[\varphi(z) \frac{dz}{dx} \right]}{d\alpha} = \varphi'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{dx} + \varphi(z) \frac{d^2 z}{dx d\alpha}.$$

Dieser Ausdruck geht durch Einsetzen der oben gefundenen

Werthe für $\frac{dz}{d\alpha}$, $\frac{d^2 z}{dx d\alpha}$ in den folgenden über:

$$\varphi'(z)f(z) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \varphi(z)f'(z) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \varphi(z)f(z) \frac{d^2 z}{dx^2},$$

welcher die Ableitung von $\varphi(z)f(z) \frac{dz}{dx}$ in Bezug auf x vor-

stellt. Somit haben wir die allgemeine Formel:

$$(4) \quad \frac{d \left[\varphi(z) \frac{dz}{dx} \right]}{d\alpha} = \frac{d \left[\varphi(z)f(z) \frac{dz}{dx} \right]}{dx}.$$

Mit Hülfe derselben könnte man (3) aus (2) ableiten, indem man $\varphi(z) = f(z)$ setzte.

Setzt man $\varphi(z) = (fz)^2$, so wird

$$\frac{d \left[(fz)^2 \frac{dz}{dx} \right]}{d\alpha} = \frac{d \left[(fz)^3 \frac{dz}{dx} \right]}{dx};$$

daraus folgt mit Rücksicht auf (3), wenn man nach x differenziirt:

$$\frac{d^3 z}{d\alpha^3} = \frac{d^2 \left[(fz)^3 \frac{dz}{dx} \right]}{dx^2}.$$

Von hier geht man durch $\varphi(z) = (fz)^3$ zu $\frac{d^4 z}{d\alpha^4}$ über.

Das in diesen ersten Formeln ausgesprochene Gesetz hat allgemeine Geltung. Denn nehmen wir an, dass

$$\frac{d^n z}{d\alpha^n} = \frac{d^{n-1} \left[(fz)^n \frac{dz}{dx} \right]}{dx^{n-1}};$$

so kommt, indem wir beide Glieder mit Benutzung von (4), worin $\varphi(z) = (fz)^n$ zu setzen ist, nach α differenziiiren:

$$\frac{d^{n+1} z}{d\alpha^{n+1}} = \frac{d^n \left[(fz)^{n+1} \frac{dz}{dx} \right]}{dx^n}.$$

Weil nun das für die Ordnung n angenommene Gesetz auch für die nächste $n+1$ besteht und es sich bei den ersten Derivirten bewährt hat, so ist seine Allgemeinheit bewiesen; mithin:

$$(5) \quad \frac{d^m z}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1} \left[(fz)^m \frac{dz}{dx} \right]}{dx^{m-1}}.$$

Für $\alpha = 0$ hat man $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$; folglich:

$$\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m} \right)_0 = \frac{d^{m-1} [(fx)^m]}{dx^{m-1}}.$$

Die Entwicklung von z ist daher:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d(fx)^2}{dx} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{d^2(fx)^3}{dx^2} + \dots \\ &+ \frac{\alpha^m}{m!} \frac{d^{m-1}(fx)^m}{dx^{m-1}} + \dots \end{aligned} \right.$$

31. Nehmen wir jetzt die Entwicklung einer beliebigen Function $F(z)$ nach Potenzen von α vor; dabei soll z noch immer durch die Gleichung (1) bestimmt bleiben.

Der Lehrsatz des Maclaurin liefert:

$$\begin{aligned} F(z) &= F(z)_0 + \left(\frac{dF}{d\alpha} \right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2 F}{d\alpha^2} \right)_0 \frac{\alpha^2}{2} + \dots \\ &+ \left(\frac{d^m F}{d\alpha^m} \right)_0 \frac{\alpha^m}{m!} + \dots \end{aligned}$$

Das erste Glied kann nur $F(x)$ sein; denn z wird x für $\alpha=0$.

Demnach bleibt allgemein $\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m} \right)_0$ zu bestimmen.

Zunächst ist:

$$\frac{dF}{d\alpha} = F'(z) \frac{dz}{d\alpha} = F'(z) f(z) \frac{dz}{dx}.$$

Um $\frac{d^2 F}{d\alpha^2}$ zu erhalten, muss man die zweite Seite nach α differenzieren. Mittels der Gleichung (4) lässt sich diese Differentiation in eine solche nach x verwandeln; man findet dadurch:

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} = \frac{d \left[F'(z) (fz)^2 \frac{dz}{dx} \right]}{dx}.$$

Vermöge (4) führt diese Gleichung zu:

$$\frac{d^3 F}{d\alpha^3} = \frac{d^2 \left[F'(z) (fz)^3 \frac{dz}{dx} \right]}{dx^2}.$$

Auf gleiche Weise geht es fort, indem sich jedesmal der Exponent von (fz) sowie der Ableitungszeiger des Products um eine Einheit erhöht. Wir haben folglich allgemein:

$$\frac{d^m F}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1} \left[F'(z) (fz)^m \frac{dz}{dx} \right]}{dx^{m-1}}.$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, also $z = x$ und $\frac{dz}{dx} = 1$, dann wird:

$$\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m} \right)_0 = \frac{d^{m-1} [F'(x) (fx)^m]}{dx^{m-1}}.$$

Somit sind sämtliche Coëfficienten der Entwicklung von $F(z)$ durch Differentiation bekannter Functionen von x nach dieser Veränderlichen ausgedrückt. Die gesuchte Entwicklung ist:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= F(x) + \alpha F'(x) f(x) + \frac{\alpha^2}{2} \frac{d[F'(x) (fx)^2]}{dx} + \dots \\ &\dots + \frac{\alpha^m}{m!} \frac{d^{m-1} [F'(x) (fx)^m]}{dx^{m-1}} + \dots \end{aligned} \right.$$

Auflösung des Kepler'schen Problems.

32. Dieses Problem bezweckt die Entwicklung der Polarcoordinaten r, θ eines Planeten als Functionen der unabhän-

gigen Variablen t . Wir werden dasselbe für die elliptische Bewegung lösen unter der Voraussetzung, dass e ein sehr kleiner Bruch sei, was bei den meisten Planeten stattfindet. Für die Erdbahn z. B. ist:

$$e = 0,01685318.$$

Zwischen r , θ , t und der Hilfsgrösse u haben wir nachstehende Gleichungen gefunden:

$$(8) \quad u = nt + e \sin u,$$

$$(9) \quad r = a(1 - e \cos u),$$

$$(10) \quad \tan \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2} u.$$

Aus ihnen ergeben sich t , r , θ auf bequeme Weise durch u . Dagegen werden mühsame Interpolirungen nothwendig zur Bestimmung von r und θ für einen gegebenen Werth von t . Um dieser Unbequemlichkeit zu entgehen, hat man gesucht, die Grössen r , θ durch t direct auszudrücken.

Die Gleichung (8) trifft mit (1) zusammen, wenn man $z = u$, $x = nt$, $\alpha = e$, $f(z) = \sin u$ nimmt; dadurch wird $f(x) = \sin x = \sin nt$. Macht man diese Substitutionen in (6), so erhält man unmittelbar folgende Entwicklung des u nach Potenzen von e :

$$u = x + e \sin x + \frac{e^2}{2} \frac{d \cdot \sin x^2}{dx} + \dots + \frac{e^m}{m!} \frac{d^{m-1} \cdot \sin x^m}{dx^{m-1}} + \dots;$$

dabei wurde der Kürze wegen x statt nt beibehalten.

Folgende Gleichungen drücken die Potenzen von $\sin x$ durch Sinus und Cosinus der Vielfachen von x aus:

$$2 \sin x^2 = -\cos 2x + 1,$$

$$2^2 \sin x^3 = -\sin 3x + 3 \sin x,$$

$$2^3 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3,$$

$$2^4 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x,$$

$$2^5 \sin x^6 = -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10.$$

Man erhält hieraus mittelst Differenziren nach vorhergegangener Division durch die links stehenden Potenzen von 2:

$$\frac{d \cdot \sin x^2}{dx} = \sin 2x,$$

$$\frac{d^2 \cdot \sin x^3}{dx^2} = \frac{3^2 \sin 3x - 3 \sin x}{2^2},$$

$$\frac{d^3 \cdot \sin x^4}{dx^3} = 2^3 \sin 4x - 4 \sin 2x,$$

$$\frac{d^4 \cdot \sin x^5}{dx^4} = \frac{5^4 \sin 5x - 5 \cdot 3^4 \sin 3x + 10 \sin x}{2^4},$$

$$\frac{d^5 \cdot \sin x^6}{dx^5} = 3^5 \sin 6x - 6 \cdot 2^5 \sin 4x + 3 \cdot 5 \sin 2x.$$

Machen wir diese Substitutionen und ersetzen zugleich x durch nt , so folgt:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u &= nt + e \sin nt + \frac{e^2}{2} \sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^3} (3 \sin 3nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2 \cdot 3} (2 \sin 4nt - \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^7 \cdot 3} (5^3 \sin 5nt - 3^4 \sin 3nt + 2 \sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} (3^4 \sin 6nt - 2^6 \sin 4nt + 5 \sin 2nt) + \dots \end{aligned} \right.$$

Man vermag jetzt u aus jedem Werthe von t bequem zu finden und könnte dann mit Hülfe von (9) und (10) auch r und θ berechnen. Noch besser ist es jedoch, die Zwischengrösse u zu vermeiden und deshalb r sowie θ unmittelbar durch t darzustellen.

33. Ausdruck des Radius vector durch die Zeit.

— Zufolge der Gleichung (9) ist $\frac{r}{a}$ eine bekannte Function von u , welche sich durch die Formel (7) bestimmen lässt. Man muss darin nehmen:

$$F(x) = 1 - e \cos x, \quad F'(x) = e \sin x$$

und wie vorher:

$$\alpha = e, \quad f(x) = \sin x, \quad x = nt.$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos x + e^2 \sin x^2 + \frac{e^3}{2} \frac{d \cdot \sin x^3}{dx} + \frac{e^4}{2 \cdot 3} \frac{d^2 \cdot \sin x^4}{dx^2} \\ &+ \frac{e^5}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^3 \cdot \sin x^5}{dx^3} + \dots \end{aligned}$$

Man hat nun:

$$\sin x^2 = \frac{-\cos 2x + 1}{2},$$

$$\frac{d \cdot \sin x^3}{dx} = \frac{-3 \cos 3x + 3 \cos x}{2^2},$$

$$\frac{d^2 \cdot \sin x^4}{dx^2} = -2 \cos 4x + 2 \cos 2x,$$

$$\frac{d^3 \cdot \sin x^5}{dx^3} = \frac{-5^3 \cos 5x + 5 \cdot 3^3 \cos 3x - 5 \cdot 2 \cos x}{2^4},$$

$$\frac{d^4 \cdot \sin x^6}{dx^4} = \frac{-3^4 \cos 6x + 6 \cdot 2^4 \cos 4x - 3 \cdot 5 \cos 2x}{2},$$

.

Durch Einsetzen dieser Werthe in den Ausdruck für $\frac{r}{a}$, wobei wir zugleich nt statt x schreiben, erhalten wir:

$$12) \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos nt - \frac{e^2}{2} (\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2^3} (3 \cos 3nt - 3 \cos nt) \\ &- \frac{e^4}{3} (\cos 4nt - \cos 2nt) - \frac{e^5}{2^7 \cdot 3} (5^3 \cos 5nt - 5 \cdot 3^3 \cos 3nt + 5 \cdot 2 \cos nt) \\ &- \frac{e^6}{2^4 \cdot 5} (3^3 \cos 6nt - 2^5 \cos 4nt + 5 \cos 2nt) - \dots \end{aligned} \right.$$

34. Die wahre Anomalie ausgedrückt durch die Zeit. — Es erübrigt noch der Ausdruck von θ durch t . Zuerst liefert die Gleichung (10) mit Hülfe eleganter Transformationen, welche man Lagrange verdankt, θ als Function von u , $\sin u$, $\sin 2u$, etc. Ersetzt man diese Grössen durch ihre Entwicklungen nach Potenzen von e , so hat man die Lösung der Aufgabe.

Indem wir statt der Tangenten die Quotienten der Sinus durch die Cosinus nehmen und letztere durch imaginäre Exponentialgrössen ausdrücken, geht die Gleichung (10), wenn hier ε die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, über in:

$$\frac{\varepsilon^{\theta i} - 1}{\varepsilon^{\theta i} + 1} = V \frac{1+e}{1-e} \frac{\varepsilon^{ui} - 1}{\varepsilon^{ui} + 1};$$

dabei hat i die Bedeutung von $\sqrt{-1}$. Man findet daraus:

$$\varepsilon^{\theta i} = \frac{\varepsilon^{ui} (\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}) + \sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}}{\varepsilon^{ui} (\sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}) + \sqrt{1-e} + \sqrt{1+e}}.$$

Setzen wir:

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}},$$

dann folgt:

$$\varepsilon^{\theta i} = \frac{\varepsilon^{ui} - \lambda}{1 - \lambda \varepsilon^{ui}} = \varepsilon^{ui} \frac{1 - \lambda \varepsilon^{-ui}}{1 - \lambda \varepsilon^{ui}}.$$

Nehmen wir von beiden Gliedern die natürlichen Logarithmen und theilen darauf durch i ; das liefert:

$$\theta = u + \frac{\log(1 - \lambda \varepsilon^{-ui}) - \log(1 - \lambda \varepsilon^{ui})}{i}.$$

Man darf die Logarithmen entwickeln, weil $\lambda < 1$; schreibt man zugleich statt der imaginären Exponentialgrößen die entsprechenden Sinus und Cosinus, so ergibt sich:

$$\theta = u + 2 \left(\lambda \sin u + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2u + \frac{\lambda^3}{3} \sin 3u + \frac{\lambda^4}{4} \sin 4u + \dots \right).$$

Für $u, \sin u, \sin 2u, \dots$ müssen die nach e fortschreitenden Entwicklungen substituiert werden, welche die Formel des Lagrange liefert. Der Werth von u ist bereits durch (11) gegeben; und aus (8) erhält man:

$$\sin u = \frac{u - nt}{e} = \sin nt + \frac{e}{2} \sin 2nt + \frac{e^2}{2^3} (3 \sin 3nt - \sin nt) + \dots$$

Nach der Formel des Lagrange findet man:

$$\begin{aligned} \sin 2u = & \sin 2nt + e(\sin 3nt - \sin nt) + e^2(\sin 4nt - \sin 2nt) \\ & + \frac{e^3}{2^3 \cdot 3} (25 \sin 5nt - 27 \sin 3nt + 4 \sin nt) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3u = & \sin 3nt + \frac{e}{2} (3 \sin 4nt - 3 \sin 2nt) \\ & + \frac{e^2}{2^3} (15 \sin 5nt - 18 \sin 3nt + 3 \sin nt) \\ & + \frac{e^3}{4} (9 \sin 6nt - 12 \sin 4nt + 3 \sin 2nt) + \dots \end{aligned}$$

Nun bleiben noch die Potenzen von λ nach e zu entwickeln. Wir setzen zu dem Ende:

$$1 + \sqrt{1-e^2} = E,$$

wodurch

$$E = 2 - \frac{e^2}{E}$$

wird. Die Formel (7) liefert die Entwicklung von E^{-p} nach Potenzen von e^2 ; dabei ist zu nehmen:

$$z = E, \quad x = 2, \quad \alpha = e^2, \quad F(z) = z^{-p} = E^{-p}.$$

Es ergibt sich:

$$E^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}} e^2 + \frac{p(p+3)}{2 \cdot 2^{p+4}} e^4 + \frac{p(p+4)(p+5)}{2 \cdot 3 \cdot 2^{p+6}} e^6 + \dots$$

Da nun:

$$\lambda = e E^{-1},$$

so hat man:

$$\lambda^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}} e^{p+2} + \frac{p(p+3)}{2 \cdot 2^{p+4}} e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2 \cdot 3 \cdot 2^{p+6}} e^{p+6} + \dots$$

Wir substituiren jetzt die aus dieser Formel hervorgehenden Werthe der verschiedenen Potenzen von λ zugleich mit den Werthen von u , $\sin u$, $\sin 2u$, etc. in den Ausdruck für θ und erhalten dadurch bei Weglassung höherer Potenzen von e als die sechste:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \theta &= nt + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 \right) \sin nt \\ &+ \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 + \frac{17}{192} e^6 \right) \sin 2nt \\ &+ \left(\frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 \right) \sin 3nt \\ &+ \left(\frac{103}{96} e^4 - \frac{451}{480} e^6 \right) \sin 4nt \\ &+ \frac{1097}{960} e^5 \sin 5nt + \frac{1223}{960} e^6 \sin 6nt, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man nach Potenzen von e ordnet:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \theta &= nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4} e^2 \sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^2 \cdot 3} (13 \sin 3nt - 3 \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2^5 \cdot 3} (103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^6 \cdot 3 \cdot 5} (1097 \sin 5nt - 645 \sin 3nt + 50 \sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^6 \cdot 3 \cdot 5} (1223 \sin 6nt - 902 \sin 4nt + 85 \sin 2nt). \end{aligned} \right.$$

Mit Vernachlässigung aller höheren Potenzen von e als die erste geben (12) und (14) die bereits in Nro. 28 gefundenen Formeln:

$$r = a(1 - e \cos nt),$$

$$\theta = nt + 2e \sin nt.$$

Ebenso giebt die Gleichung (11):

$$u = nt + e \sin nt.$$

Bewegung irgend eines Systems materieller Punkte.

35. Nur der Fall ist gemeint, wo Verbindungen bestehen zwischen den Punkten des Systems; denn ausserdem wäre die Bewegung eines jeden für sich nach dem bisher Vorgetragenen zu bestimmen.

Nehmen wir an, dass die Verbindungen durch Gleichungen ausgedrückt werden, und zwar seien es k Gleichungen:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \dots, \quad$$

denen die Zeit und die Coordinaten der Punkte in jedem Augenblick zu genügen haben. Kennt man Grösse und Richtung der Kräfte, welche auf jeden Punkt wirken und von seiner Lage abhängen können sowie von der Zeit; kennt man ferner die Anfangslagen aller Punkte sowie Grösse und Richtung ihrer Anfangsgeschwindigkeiten; dann ist offenbar die Bewegung vollkommen bestimmt, und die Coordinaten jedes Punktes hängen von der Zeit auf eine ganz bestimmte Weise ab. Bezeichnet n die Anzahl der materiellen Punkte, so hat man zwischen ihren $3n$ Coordinaten und der Zeit noch $3n - k$ Gleichungen zu finden, da bereits k Gleichungen bekannt sind. Nachdem man dies erreicht hat, ist die Aufgabe vollständig gelöst, denn man vermag nun für jeden Augenblick die Lagen sämtlicher Punkte folglich auch alle Umstände der Bewegung anzugeben. Die fehlenden $3n - k$ Gleichungen werden mit Hülfe des nachstehenden Princip erhalten, das man d'Alembert verdankt.

Princip des d'Alembert.

36. Dieses Princip führt die Bestimmung der Bewegung irgend eines Systems auf die Betrachtung seines Gleichgewichts zurück.

Kräfte, welche auf Punkte wirken, die gewissen Verbindungen unterworfen sind, bringen im Allgemeinen nicht dieselben Bewegungen hervor, wie wenn die Punkte getrennt und frei wären. Könnte man die von den Verbindungen ausgeübten Kräfte berechnen, so dürfte man sämtliche Punkte als vollkommen frei betrachten, wenn man diese Kräfte an jedem Punkt zu denen hinzunähme, die ihn von aussen angreifen. Bezeichne m die Masse eines beliebigen Punktes des Systems und x, y, z seine Coordinaten; die Componenten der ihn angreifenden Gesamtkraft Q (mit Einbegriff der von den Verbindungen herrührenden) sind dann beziehlich:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Nun sei P die gegebene äussere Kraft, welche auf den Punkt m wirkt. Bringen wir an diesem die Kraft Q an so wie die mit ihr gleiche und entgegengesetzte Q_1 , und verfahren wir ebenso für alle anderen Punkte. Die Kräfte Q, Q_1 vernichten sich an jedem Punkt und erzeugen deshalb keine Wirkung zwischen verschiedenen Punkten. Durch ihre Einführung wird folglich nichts geändert weder an der Bewegung noch an den Wirkungen, welche auf die verschiedenen Theile des Systems ausgeübt werden.

Wie bemerkt, darf man den Punkt m als frei betrachten, wenn man die Kräfte einführt, welche die Verbindungen des Systems auf ihn äussern. Diese Kräfte müssen demnach P und Q_1 das Gleichgewicht halten. Denn Q würde dem Punkt, wenn er frei wäre, genau die Bewegung ertheilen, welche er wirklich befolgt. Wenn daher P und Q_1 nicht aufgehoben würden durch die Kräfte der Verbindungen, so würden sie sich mit ihnen zusammensetzen und eine Resultante geben, welche verbunden mit Q den freien Punkt in dieselbe Bewegung versetzen müsste wie Q allein; was unmöglich ist. Es ist somit bewiesen, dass die Verbindungen des Systems in jedem Augenblick solche Kräfte entwickeln, welche den mit P und Q_1 bezeichneten sämtlicher Punkte das Gleichgewicht halten. Man kann daher das nachstehende Princip des d'Alèmbert aussprechen:

Bei der Bewegung irgend eines Systems von Punkten, die in ganz beliebigen Verbindungen

stehen können und durch irgend welche Kräfte angegriffen werden, findet mit Hülfe der Verbindungen jeden Augenblick Gleichgewicht statt zwischen diesen Kräften und zwischen solchen, welche gleich und entgegengesetzt sind mit jenen, die jedem einzelnen materiellen Punkt, wenn er frei wäre, diejenige Bewegung ertheilen würden, welche er wirklich befolgt.

Was die auf das System ausgeübten Wirkungen betrifft, so ändern sich dieselben im Allgemeinen jeden Augenblick und werden hervorgebracht durch die veränderlichen Kräfte, welche sich fortwährend an dem System das Gleichgewicht halten.

37. Wir wollen nun sehen, wie man durch das d'Alembert'sche Princip so viele Gleichungen erhalten kann, als unabhängige Coordinaten vorhanden sind. X, Y, Z mögen die bekannten Componenten der äusseren Kraft an dem Punkt von der Masse m bedeuten; X', Y', Z' diejenigen an m' , und so fort. Diese Kräfte können bei einer beliebigen Anzahl Punkte auch Null sein. Nach dem zuvor Gesagten muss in jedem Augenblick am System Gleichgewicht stattfinden zwischen ihnen und den Kräften, welche beziehlich an den einzelnen Punkten die Componenten haben:

$$\begin{aligned} & -m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 z}{dt^2}, \\ & -m' \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad -m' \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad -m' \frac{d^2 z'}{dt^2}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

während $x, y, z, x', \dots$ die Coordinaten der Punkte vorstellen. Mit anderen Worten, es müssen sich an dem System folgende Kräfte, die auf $m, m', \dots$ parallel mit den Coordinatenachsen wirken, das Gleichgewicht halten:

$$\begin{aligned} X - m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad X' - m' \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad \dots \\ Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Y' - m' \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad \dots \\ Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad Z' - m' \frac{d^2 z'}{dt^2}, \quad \dots \end{aligned}$$

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert die Gleichgewichtsbedingungen durch nachstehende Gleichung, worin rechtwinklige Axen vorausgesetzt sind:

$$(1) \quad \sum \left\{ \begin{aligned} &\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y \\ &\quad + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \end{aligned} \right\} = 0.$$

Hier bezeichnen δx , δy , δz die Componenten irgend einer unendlich kleinen Verrückung, welche man dem Punkt (x, y, z) in einem beliebigen Augenblick der Bewegung ertheilen kann, ohne dadurch die Bedingungen zu verletzen, denen das System gerade in dem betrachteten Augenblick unterliegt. Die Zeit kommt bei diesen virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten δx , δy , δz nicht in Betracht. Die Summe Σ erstreckt sich über alle materiellen Punkte des Systems, und für X , Y , Z werden Nullen gesetzt bei jenen Punkten, auf welche keine äussere Kraft wirkt.

Die Gleichung (1) enthält $3n$ Variationen, wenn n die Zahl der Punkte ist. Und zwar müssen diese Variationen, weil die virtuelle Verrückung des Systems mit dessen Verbindungen verträglich sein soll, den Differentialgleichungen der k Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... genügen; welches giebt:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z + \frac{dL}{dx'} \delta x' + \dots = 0, \\ \frac{dM}{dx} \delta x + \frac{dM}{dy} \delta y + \frac{dM}{dz} \delta z + \frac{dM}{dx'} \delta x' + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Wenn die Bedingungsgleichungen auch die Zeit explicit enthalten sollten, so darf man letztere doch nicht variiren. Mit Hülfe von (2) lassen sich k Variationen aus (1) weg-schaffen, so dass nur noch $3n - k$ vollkommen unbestimmte übrig bleiben. Indem wir den Coëfficienten einer jeden von diesen der Null gleich setzen, erhalten wir $3n - k$ Gleichungen, welche in Verbindung mit den k gegebenen die Coordinaten aller Punkte durch die Zeit bestimmen. Damit ist die Aufgabe auf Integration von Differentialgleichungen hinausgebracht.

38. Multiplicirt man die Gleichungen (2) durch unbestimmte Factoren $\lambda, \mu, \nu, \dots$, addirt sie darauf zu (1) hinzu und setzt dann die Coëfficienten aller Variationen der Null gleich, so erhält man:

$$X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \dots = 0,$$

$$Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \dots = 0,$$

$$Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \dots = 0,$$

$$X' - m' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \dots = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Eliminirt man nun die k unbestimmten Multiplicatoren $\lambda, \mu, \nu, \dots$, so ergeben sich $3n - k$ Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen $x, y, z, x', \dots$ und der Zeit t . Diese Gleichungen sind dieselben wie diejenigen, welche man findet, wenn man, wie in Nro. 37 angegeben wurde, k Variationen eliminirt. Die neue Verfahrensart hat aber den Vortheil, welchen wir schon bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erkannten; sie bestimmt nämlich diejenigen Kräfte, welche an die Stelle der Bedingungsgleichungen treten könnten, indem die Werthe der veränderlichen Grössen $\lambda, \mu, \nu, \dots$ die Wirkungen erkennen lassen, welche in jedem Augenblick von den Verbindungen zu tragen sind, wodurch die Punkte des Systems gezwungen werden den Bedingungsgleichungen zu genügen.

Hängt das System von anderen Variablen ab als von den Coordinaten seiner Punkte, so hat man doch immer den nämlichen Gang zu befolgen. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert stets so viele Gleichungen, als es unabhängige Variablen giebt. Nimmt man dieselben zu den Bedingungsgleichungen hinzu, so ist man im Stande alle Veränderlichen durch die Zeit zu bestimmen; und darin besteht gerade das Ziel, welches man erreichen will.

Was versteht man unter Momentankräften? — Ihr Maass. — Bestimmung der Bewegung, welche sie erzeugen. — Zusammensetzung ihrer Wirkungen.

39. Wir haben in Nro. 174 des ersten Theils gezeigt, wie eine constante Kraft durch das von ihr hervorgebrachte Bewegungsmoment gemessen werden könne, wenn man dasselbe durch die Zeit theilt, deren die Kraft zu seiner Erzeugung bedarf. Daraus geht hervor, dass die zum Hervorbringen eines bestimmten Bewegungsmoments erforderliche Wirkungsdauer um so geringer ausfallen müsse, je grösser die aufgewendete Kraft ist. Es kann aber keine Kraft geben, die nicht dazu einer gewissen Zeit bedürfte. Nichtsdestoweniger darf man fast immer von dieser Zeit absehen, wenn die Wirkung während eines so kurzen Intervalls erfolgt, dass unterdessen in der Lage der Punkte keine bemerkbare Veränderung vorgeht. Dies wollen wir andeuten, indem wir der Kraft den Namen Momentankraft beilegen, ohne dadurch dem in Nro. 163 des ersten Theils Gesagten zu widersprechen.

Um den constanten Werth einer solchen Kraft zu messen oder, wenn sie veränderlich ist, ihren Mittelwerth, so könnte man dieselbe auf die gewöhnliche Krafteinheit beziehen, und hätte dann als Maass das von ihr hervorgebrachte Bewegungsmoment, getheilt durch die Wirkungsdauer. Weil aber die letzte nicht angebbar ist, wenigstens nicht in den Fällen, wo die Betrachtung dieser besonderen Art Kräfte Vorthcil bietet, so thut man besser, nicht die Zeit in das Maass aufzunehmen, sondern auf das Bewegungsmoment sich zu beschränken. Man mag dann der Wirkung eine beliebige, wenn nur ausserordentlich kleine Dauer beilegen; für den Effect ist dies gleichgültig, wie wir bei Berechnung desselben sehen werden. Wir messen demnach eine Momentankraft durch das Bewegungsmoment, welches sie hervorbringt, wenn sie auf einen freien in Ruhe befindlichen Punkt wirkt. Und da die Zerlegung von Kräften auf gleiche Weise geschieht wie jene von Geschwindigkeiten, so folgt, dass die Componenten einer Momentankraft, wenn dieselben parallel mit gegebenen Richtungen nach den Regeln für continuirliche Kräfte genommen werden, nichts Anderes

vorstellen als solche Momentankräfte, welche den Componenten der totalen Geschwindigkeit nach den nämlichen Richtungen entsprechen.

Weil endlich die mit drei festen Axen parallelen Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes durch Wirkung irgend welcher Kräfte auf dieselbe Weise vermehrt werden, als wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null wäre; so ergibt sich, dass die Componenten von Momentankräften, welche auf einen bewegten Punkt wirken, gemessen werden durch die Bewegungsgrößen, die den Zunahmen seiner Geschwindigkeitscomponenten entsprechen.

40. Um den Effect von Momentankräften an einem in Bewegung begriffenen System zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (1) an, lassen jedoch dabei alle anderen Kräfte ausser Acht, welche keinen merklichen Einfluss ausüben während der ganzen Dauer θ der Wirkungen der ersten, von denen die einen vor den anderen aufhören können. Innerhalb dieses Zeitintervalls darf man die Werthe von $x, y, z, x', \dots$ als unveränderlich betrachten und, wie sich leicht sehen lässt, auch die von $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$. In der That, diese Variationen genügen den Differentialgleichungen, welche aus $L = 0, M = 0, \dots$ hervorgehen, wenn t als eine Constante betrachtet wird. Da nun diese Constante sich während des betrachteten Intervalls nur unendlich wenig ändert, so können $\delta x, \delta y, \dots$ sich nur um gegen sie selbst unendlich kleine Größen ändern und müssen daher als unveränderlich betrachtet werden. Integriert man jetzt die Gleichung (1) nach t und nimmt zu Grenzen Anfang und Ende von θ , so erhält man, wenn mX, mY, mZ die Componenten der während der Zeit θ auf die Masse m wirksamen Kraft bezeichnen:

$$\sum m \left[\left(\int X dt - \frac{dx}{dt} + \frac{dx_0}{dt} \right) \delta x + \left(\int Y dt - \frac{dy}{dt} + \frac{dy_0}{dt} \right) \delta y + \left(\int Z dt - \frac{dz}{dt} + \frac{dz_0}{dt} \right) \delta z \right] = 0.$$

Darin stellen $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit vor, welche der Punkt m beim Beginn der Wirkung

der Momentankräfte besass; und $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Componenten seiner Geschwindigkeit am Ende von θ .

Die auf m wirksame Kraft hat mX , mY , mZ zu Componenten; folglich sind $m\int Xdt$, $m\int Ydt$, $m\int Zdt$ die Componenten der Bewegungsgrösse, welche sie in der Zeit θ an dem freien Punkt hervorbringen würde. Diese Integrale sind also die Componenten der die Masse m angreifenden Momentankraft nach dem Begriff, den wir mit dieser Benennung verbinden. Und wenn man dieselben durch X_1 , Y_1 , Z_1 bezeichnet, so erhält die vorhergehende Gleichung folgende Gestalt:

$$(3) \sum \left[\left(X_1 - m \frac{dx}{dt} + m \frac{dx_0}{dt} \right) \delta x + \left(Y_1 - m \frac{dy}{dt} + m \frac{dy_0}{dt} \right) \delta y + \left(Z_1 - m \frac{dz}{dt} + m \frac{dz_0}{dt} \right) \delta z \right] = 0.$$

Wäre die Masse m frei, so würden:

$$m \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right), \quad m \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt} \right), \quad m \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right)$$

die Componenten derjenigen Momentankraft sein, welche die Geschwindigkeitscomponenten von m genau so ändern würde, wie es wirklich während der Zeit θ geschieht. Die Gleichung (3) lehrt uns daher, dass an dem System Gleichgewicht besteht zwischen den Momentankräften, welche gewirkt haben, und zwischen solchen, aber im entgegengesetzten Sinn genommen, welche dieselbe Aenderung der Bewegung eines jeden Punktes wie die wirklich stattfindende zur Folge hätten, wenn er vollkommen frei wäre. Das Princip des d'Alembert findet demnach Anwendung wie auf die stetigen so auf die plötzlichen Aenderungen in der Bewegung irgend eines Systems. Dabei verstehen wir die Momentankräfte immer so, dass dieselben gemessen werden durch die Bewegungsgrösse, welche sie einem freien Punkt beibringen.

41. Hat man aus der Gleichung (3) alle abhängigen Variationen eliminirt und die Coëfficienten der übrig bleibenden gleich Null gesetzt, dann enthalten die Endgleichungen in linearer Form die Componenten der Momentankräfte und die Zuwachse der Componenten der Bewegungsgrössen; zugleich

ist kein Glied von diesen Grössen unabhängig. Durch Differentiation verschafft man sich aus den Bedingungsgleichungen solche Gleichungen, welche in allen Gliedern die Zuwachse der Geschwindigkeitscomponenten linear enthalten, und darauf kann man die Unbekannten $\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}, \dots$ sämmtlich bestimmen.

Nach der Theorie der Gleichungen ersten Grades sind die Nenner der Werthe, welche sich für $\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}, \dots$ ergeben, unabhängig von $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, \dots$; ihre Zähler dagegen enthalten diese Grössen linear und ohne unabhängige Glieder. Wenn nun alle Momentankräfte in einem und demselben Verhältniss variiren, so ändern sich auch die Zunahmen der Geschwindigkeitscomponenten in diesem Verhältniss. Und allgemeiner: Bei beliebig vielen Systemen von Momentankräften sind die Zuwachse der Geschwindigkeitscomponenten für jeden Punkt gleich der Summe derjenigen Zuwachse, welche jedes System für sich hervorbringen würde.

Zu derselben Folgerung könnte man gelangen, ohne sich auf die Auflösung der Gleichungen ersten Grades zu stützen, lediglich durch die Bemerkung, welche wir über die Form der Gleichungen der Aufgabe gemacht haben.

Demnach geschehen die Wirkungen, welche jede Kraft allein hervorbringen würde, gleichzeitig ohne einander zu stören; sie setzen sich zusammen, und aus der Summirung aller nach gleicher Richtung erlangten Geschwindigkeiten entspringt die nach dieser Richtung erlangte totale Geschwindigkeit.

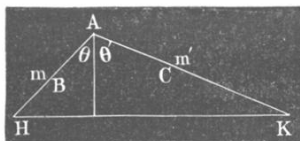
Wie man auf ähnliche Weise erkennt, so erstreckt sich dieselbe Eigenschaft auf die unendlich kleinen Zuwachse der Componenten der Bewegungsgrössen oder Geschwindigkeiten, die in jedem Augenblick durch die stetigen Kräfte hervorgebracht und zu jenen hinzugefügt werden, welche ohne die hervorbringenden Kräfte stattfinden würden. Auch sind diese Zuwachse stets dieselben, als wenn die Kräfte auf das System in der Ruhelage wirkten.

Anwendung des d'Alembert'schen Princips auf einige Beispiele.

42. Wir betrachten zwei materielle Punkte, durch einen undehnbaren Faden verbunden, auf zwei schiefen Ebenen mit horizontalem Durchschnitt. Es soll bloß die Schwere wirken und kein Grund vorhanden sein, der das System veranlasst aus einer auf die Schnittlinie senkrechten Ebene herauszutreten.

Es seien m, m' die Massen beider Punkte; θ, θ' die Winkel ihrer Ebenen mit der Verticalen; x, x' ihre Abstände AB, AC (Fig. 5) von dem beiden Ebenen gemeinsamen Punkt A ; endlich l die Fadenlänge.

Fig. 5.



Diejenigen Kräfte, welche den freien Punkten die wirklich statt-

findende Bewegung ertheilen würden, sind nach den Richtungen AH, AK wirkend bezüglich $m \frac{d^2 x}{dt^2}, m' \frac{d^2 x'}{dt^2}$. Die in der

That wirkenden Kräfte aber sind $mg, m'g$ und im Sinne der Schwere gerichtet. Es muss folglich Gleichgewicht bestehen am System zwischen den ersten Kräften, in entgegengesetztem Sinn genommen, und den letzten im Sinn der Schwere.

Um die Gleichung dafür zu erhalten, denken wir uns irgend eine mögliche virtuelle Verrückung aber bloß in der auf die Schnittlinie senkrechten Ebene AHK . Denn man darf annehmen, die Punkte seien gezwungen darin zu bleiben, weil die wirkliche Bewegung nothwendig darin vorgeht, durch diese Annahme also nichts an derselben geändert wird.

Bezeichnen $\delta x, \delta x'$ die Variationen von x, x' . Die Summe der virtuellen Momente, der Null gleich gesetzt, giebt:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x - m' \frac{d^2 x'}{dt^2} \delta x' + mg \cos \theta \delta x + m' g \cos \theta' \delta x' = 0.$$

Man hat:

$$x + x' = l,$$

woraus folgt:

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Wird diese Gleichung mit λ multiplicirt und zu der vorletzten

addirt, werden darauf die Coëfficienten von δx , $\delta x'$ der Null gleich gesetzt, so ergeben sich:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} + mg \cos \theta + \lambda = 0, \quad -m' \frac{d^2 x'}{dt^2} + m' g \cos \theta' + \lambda = 0.$$

Daraus:

$$\lambda = m \left(-g \cos \theta + \frac{d^2 x}{dt^2} \right),$$

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} + m' \frac{d^2 x'}{dt^2} + mg \cos \theta - m' g \cos \theta' = 0.$$

Weil nun $\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{d^2 x}{dt^2}$, so wird

$$(m + m') \frac{d^2 x}{dt^2} = g(m \cos \theta - m' \cos \theta');$$

daher:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \frac{m \cos \theta - m' \cos \theta'}{m + m'}.$$

Man erhält hieraus durch Integriren, wenn v die Geschwindigkeit von m vorstellt:

$$\frac{dx}{dt} = v = gt \cdot \frac{m \cos \theta - m' \cos \theta'}{m + m'} + c,$$

$$x = \frac{gt^2}{2} \cdot \left(\frac{m \cos \theta - m' \cos \theta'}{m + m'} + ct + c' \right).$$

Die Constanten c , c' müssen aus dem Anfangszustand des Systems bestimmt werden.

Sind x_0 , v_0 die Werthe, welche x und v für $t = 0$ annehmen, dann erhält man:

$$c = v_0, \quad c' = x_0.$$

Ist sowohl v_0 gegeben als x_0 , so sieht sich die Aufgabe vollständig gelöst, denn man kennt nun x und somit x' . Dabei misst der Werth von λ die Spannung des Fadens, welche hier durchaus constant bleibt.

Sind aber bloß x_0 und die Momentankräfte gegeben, welche beim Anfang der Bewegung auf beide materiellen Punkte wirken, so muss man erst die Anfangsgeschwindigkeiten daraus bestimmen, dass an dem System Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen Momentankräften und jenen, in entgegengesetztem Sinn genommen, welche durch die hervorgerufenen Bewegungsgrößen gemessen werden. Es seien ω , ω' diejenigen Geschwindigkeiten, welche die Momentan-

kräfte den beiden Punkten ertheilen würden, wenn letztere frei wären. Diese Kräfte werden dann durch $m\omega$, $m'\omega'$ gemessen, und man findet bei demselben Gange wie vorher:

$$\lambda = m\left(-\omega + \frac{dx}{dt}\right), -m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} + m\omega - m'\omega' = 0.$$

Weil aber $\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt}$, so wird:

$$(m + m')\frac{dx}{dt} = m\omega - m'\omega';$$

daher:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m\omega - m'\omega'}{m + m'} = v_0.$$

Der Werth von λ drückt die durch den Stoss hervorbrachte anfängliche Spannung aus. Setzt man statt $\frac{dx}{dt}$ den gefundenen Werth, dann folgt:

$$\lambda = \frac{-mm'}{m + m'}(\omega + \omega').$$

Wenn man sich $\theta = 0$, $\theta' = 0$ denkt, so ist das betrachtete System nichts Anderes als eine Atwood'sche Maschine, bei welcher jedoch die Masse der Rolle nicht berücksichtigt wird.

43. Betrachten wir jetzt den Fall, wo die beiden Körper durch ein Wellrad auf einander wirken, und wo jeder sich in einer besonderen senkrechten Ebene auf den horizontalen Durchschnitt der schiefen Ebenen bewegt. Das d'Alembert'sche Princip liefert folgende Gleichung, wenn r , r' die Halbmesser des Rades und der Welle bezeichnen:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + mg\cos\theta\delta x + m'g\cos\theta'\delta x' = 0.$$

Man hat ferner dem Absolutwerth nach $\delta x : \delta x' = r : r'$, also:

$$r'\delta x + r\delta x' = 0,$$

da δx und $\delta x'$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dadurch findet sich:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\cos\theta + \lambda r' = 0,$$

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2} + m'g\cos\theta' + \lambda r = 0.$$

Die Elimination von λ unter Rücksicht auf $\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{r'}{r} \frac{d^2 x}{dt^2}$ ergibt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \frac{(mr \cos \theta - m' r' \cos \theta') r}{mr^2 + m' r'^2}.$$

Man könnte die Discussion wie vorher zu Ende führen.

44. Betrachten wir eine homogene Kette, welche auf zwei schiefen Ebenen ohne Reibung gleitet und dabei immer in einer senkrechten Ebene auf dem horizontalen Durchschnitt jener beiden bleibt. Ihre Länge sei l und ε die Masse der Längeneinheit. Man hat daher:

$$x + x' = l,$$

folglich:

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Beide Theile der Kette haben bezüglich die Gewichte $g \varepsilon x$, $g \varepsilon x'$; dagegen sind die Kräfte, welche die stattfindende Beschleunigung erzeugen könnten, $\varepsilon x \frac{d^2 x}{dt^2}$, $\varepsilon x' \frac{d^2 x'}{dt^2}$. Mit Auslassung des gemeinsamen Factors ε giebt das Princip von d'Alembert:

$$-x \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x - x' \frac{d^2 x'}{dt^2} \delta x' + g x \cos \theta \delta x + g x' \cos \theta' \delta x' = 0;$$

demnach:

$$-x \frac{d^2 x}{dt^2} + g x \cos \theta + \lambda = 0, \quad -x' \frac{d^2 x'}{dt^2} + g x' \cos \theta' + \lambda = 0.$$

Durch Wegschaffen von λ und x' findet man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{g}{l} [x \cos \theta + (x - l) \cos \theta'] \\ &= \frac{g}{l} (\cos \theta + \cos \theta') \left(x - \frac{l \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} \right). \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\frac{g}{l} (\cos \theta + \cos \theta') = a^2, \quad x - \frac{l \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} = y,$$

so wird:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 y;$$

daher:

$$y = \alpha e^{at} + \beta e^{-at}, \quad \text{also } x = \alpha e^{at} + \beta e^{-at} + \frac{l \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'}.$$

Die Constanten α , β sind aus dem Anfangszustand zu bestimmen. Für $t = 0$ erhält man:

$$x_0 = \alpha + \beta + \frac{l \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'}, \quad v_0 = \alpha(\alpha - \beta);$$

woraus α , β sich entnehmen lassen, wenn x_0 und v_0 bekannt sind. Kennt man nur diejenigen Momentankräfte, welche die Anfangsgeschwindigkeit v_0 erzeugen, zugleich mit der anfänglichen Lage, so ist zu verfahren wie in den vorhergehenden Fällen.

Der Werth von $\frac{d^2 x}{dt^2}$ wird Null, sobald:

$$x = \frac{l \cos \theta'}{\cos \theta + \cos \theta'} \text{ und folglich } x' = \frac{l \cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta'}.$$

Wenn daher x , x' den Längen der schiefen Ebenen proportional sind und die Kette in dieser Lage keine Anfangsgeschwindigkeit hat, so beharrt sie beständig in derselben.

45. Bewegung eines biegsamen Fadens. — Es sei ε die Masse der Längeneinheit eines Fadens, von dem sämtliche Punkte durch Kräfte angegriffen werden, deren Componenten, auf die Längeneinheit bezogen, wir mit X , Y , Z bezeichnen. An den Endpunkten mögen die Kräfte X_1 , Y_1 , Z_1 , X_2 , Y_2 , Z_2 angreifen.

Auf ein Element ds wirken Xds , Yds , Zds ; folglich muss man haben dem Princip des d'Alembert gemäss:

$$\left. \begin{aligned} \int ds \left[\left(X - \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y \right. \\ \left. + \left(Z - \varepsilon \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] \\ + X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Das Integral erstreckt sich von einem Endpunkt des Fadens bis zum anderen.

Man hat ferner, weil der Faden nicht ausdehnbar sein soll, für alle Punkte desselben $\delta ds = 0$ oder:

$$\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch einen unbestimmten Multiplicator λ , der von der Zeit abhängig und für jeden

Punkt ein anderer sein wird; addirt man darauf alle von ihr vorgestellten Gleichungen zu der ersten, so kommt:

$$\int ds \left[\left(X - \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \varepsilon \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] + \int \lambda \left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z \right) + X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 \Bigg\} = 0.$$

Die theilweise Integration der Glieder des zweiten Integrals, welches gleiche Grenzen mit dem ersten hat, liefert:

$$\lambda \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) - \int \left(\delta x d \cdot \lambda \frac{dx}{ds} + \delta y d \cdot \lambda \frac{dy}{ds} + \delta z d \cdot \lambda \frac{dz}{ds} \right).$$

Fassen wir nun alle Glieder unter dem Integralzeichen zusammen, so müssen die Coëfficienten von δx , δy , δz der Null gleich gesetzt werden. Die Ausdrücke aber, welche keiner Integration unterworfen sind und sich bloß auf die beiden Grenzen beziehen, müssen sich unter einander aufheben.

Man erhält daher für irgend einen Punkt des Fadens die drei Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \left(X - \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \right) ds - d \cdot \lambda \frac{dx}{ds} = 0, \\ \left(Y - \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} \right) ds - d \cdot \lambda \frac{dy}{ds} = 0, \\ \left(Z - \varepsilon \frac{d^2 z}{dt^2} \right) ds - d \cdot \lambda \frac{dz}{ds} = 0. \end{cases}$$

Und wenn die beiden Endpunkte unabhängig sind von einander, so hat man noch:

$$(2) \quad \begin{cases} \left\{ X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 - \lambda_1 \left(\frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 \right) \right\} = 0, \\ \left\{ X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 + \lambda_2 \left(\frac{dx_2}{ds_2} \delta x_2 + \frac{dy_2}{ds_2} \delta y_2 + \frac{dz_2}{ds_2} \delta z_2 \right) \right\} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1) würden ungeändert bleiben, wenn auf irgend ein Fadenelement ds statt seiner Verbindung mit den anderen eine Kraft wirkte, welche zu Componenten hätte:

$$- d \cdot \lambda \frac{dx}{ds}, \quad - d \cdot \lambda \frac{dy}{ds}, \quad - d \cdot \lambda \frac{dz}{ds}.$$

Oder es könnten auch an seinen Endpunkten solche Tangentialkräfte angreifen, deren Componenten wären am ersten Endpunkt:

$$+ \lambda \frac{dx}{ds}, + \lambda \frac{dy}{ds}, + \lambda \frac{dz}{ds}$$

und am zweiten:

$$- \left(\lambda \frac{dx}{ds} + d.\lambda \frac{dx}{ds} \right), - \left(\lambda \frac{dy}{ds} + d.\lambda \frac{dy}{ds} \right), - \left(\lambda \frac{dz}{ds} + d.\lambda \frac{dz}{ds} \right).$$

Der Erfolg der Verbindung der Fadenelemente ist daher in jedem Punkt die Erzeugung einer durch $-\lambda$ ausgedrückten Spannung.

Die Elimination von λ aus (1) ergibt zwei Gleichungen zwischen x, y, z, t , welche den Ort sämtlicher Punkte des Fadens durch die Zeit bestimmen. Was die Gleichungen (2) betrifft, so hat man damit anzufangen, dass man die Anzahl der darin enthaltenen Variationen auf die kleinstmögliche zurückführt. Die Coëfficienten der übrig bleibenden setzt man darauf gleich Null und erhält dadurch Gleichungen, welche in Verbindung mit den für den Anfangszustand und die Fadenlänge geltenden Bedingungen jeden Augenblick den Ort der Endpunkte bestimmen sowie die bei der Integration eingehenden willkürlichen Grössen.

Sind die Kräfte an den Endpunkten Null und diese zugleich beweglich, so kann den Gleichungen (2) nur dadurch genügt werden, dass man $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ setzt, welches zeigt, dass dann die Endspannungen beständig Null sind. Doch muss man hier den sehr besonderen Fall ausnehmen, wenn ein Endpunkt eine Curve oder Oberfläche nicht verlassen kann und zugleich der Faden auf dieser fortwährend senkrecht steht. Für diesen Endpunkt wäre:

$$dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1 + dz_1 \delta z_1 = 0;$$

es brauchte deshalb nicht mehr $\lambda_1 = 0$ zu sein. Dasselbe gilt von dem anderen Ende.

Wenn die Endpunkte fest sind, so werden die Gleichungen (2) von selbst erfüllt. Man kennt dann $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ und hat auszudrücken, dass diese Coordinaten für jedes t den Gleichungen der Curve genügen; welcher Umstand zur Bestimmung der willkürlichen Grössen beiträgt.

46. Man vermag die vorhergehenden Gleichungen auf folgende Weise unmittelbar zu erhalten. Bezeichnet T die Span-

nung an einem beliebigen Punkt, so wirken an dem Element ds Kräfte, welche die mit den Axen parallelen Componenten haben:

$$Xds + d.T \frac{dx}{ds}, \quad Yds + d.T \frac{dy}{ds}, \quad Zds + d.T \frac{dz}{ds}.$$

Das Princip des d'Alembert, auf dieses Element angewendet, giebt sofort:

$$\left(X - \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \right) ds + d.T \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\left(Y - \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} \right) ds + d.T \frac{dy}{ds} = 0,$$

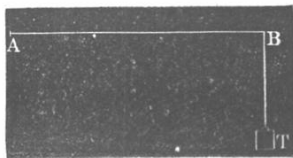
$$\left(Z - \varepsilon \frac{d^2 z}{dt^2} \right) ds + d.T \frac{dz}{ds} = 0.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (1) nur dadurch, dass T statt $-\lambda$ steht.

An jedem Ende des Fadens muss Gleichgewicht bestehen zwischen allen auf dasselbe wirkenden Kräften mit Einbegriff der Spannung. Denn ein geometrischer Punkt würde durch irgend eine Kraft in endlicher Zeit eine unendliche Geschwindigkeit erlangen. Daraus gehen Gleichungen hervor, welche mit (2) übereinstimmen.

47. Wir wollen jetzt insbesondere den nachstehenden Fall betrachten. Die stetigen Kräfte X, Y, Z seien Null. Der Faden sei gerade ausgespannt, und seine in allen Punkten gleiche Spannung werde durch ein Gewicht T gemessen. A, B (Fig. 6)

Fig. 6.



seien die Endpunkte des Fadens in diesem Zustand. Die Gerade AB , welche l zur Länge haben mag, bildet seine Gleichgewichtslage.

Während der Faden sich bewegt, wird vorausgesetzt, dass seine Endpunkte A, B fest bleiben und dass alle anderen Punkte desselben sich in Ebenen bewegen, welche in den respectiven Ruhelagen senkrecht stehen auf AB . Aus dieser Geraden soll sich der Faden so wenig entfernen, dass man von seiner Verlängerung absehen und ihn als unausgedehnt betrachten darf. Auch sollen die Tangenten zu sämtlichen Punkten der verschiedenen Curven, welche er nach einander

während seiner Bewegung bildet, sich sehr wenig aus AB entfernen.

Unter diesen Voraussetzungen allein wird die Bewegung betrachtet. Nehmen wir den Punkt A zum Ursprung und die Gleichgewichtslage AB zur x -Axe. Die Abscisse x bleibt für jeden Punkt des Fadens während der ganzen Bewegung constant; und ferner ist nach unserer Annahme der veränderliche Bogen s so wenig von x verschieden, dass man $s = x$ setzen kann. Damit ist zugleich $\frac{ds}{dx} = 1$ gegeben im Sinne der für die Tangenten gemachten Voraussetzung.

Bringen wir nun den Faden entsprechend wenig aus seiner Gleichgewichtslage und überlassen ihn sich selbst, nachdem wir allen Punkten desselben gewisse Anfangsgeschwindigkeiten in den senkrechten Ebenen auf jene Lage beigebracht haben, so lässt sich die Bewegung wie folgt bestimmen.

Weil die Abscisse x eines jeden Punktes constant ist, so hat man $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$; daher geht aus der ersten Gleichung (1)

hervor $d.\lambda \frac{dx}{ds} = 0$. Da aber $\frac{dx}{ds} = 1$, so wird $d\lambda = 0$ oder $\lambda = c$; welches zeigt, dass die Spannung sich nicht ändert, sondern beständig dem Gewicht T gleich bleibt.

Für $s = x$ und $-\lambda = T$ ergeben die beiden anderen Gleichungen (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon} \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon} \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Nehmen wir um der Einfachheit willen an, dass die anfängliche Lage des Fadens in einer und derselben Ebene enthalten sei. Die Anfangsgeschwindigkeiten sollen in dieser Ebene senkrecht auf die Gleichgewichtslage ertheilt werden; nothwendig wird dann die ganze Bewegung darin vorgehen. Wenn wir die Axe der y in derselben Ebene nehmen, so bleibt allein die Gleichung zu betrachten:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon} \frac{d^2y}{dx^2},$$

deren vollständiges Integral ist:

$$(3) \quad y = F\left(x + t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right) + f\left(x - t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right).$$

Hier bezeichnen F und f willkürliche Functionen, welche man aus den Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten sämtlicher Punkte zu bestimmen hat.

Die Gleichung $y = \varphi(x)$ möge die anfängliche Gestalt des Fadens zwischen A und B ausdrücken; die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes von der Abscisse x habe den Ausdruck $\psi(x)$. Dann muss die Gleichung (3) für $t = 0$ ergeben $y = \varphi(x)$ und $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$. Dies führt zu:

$$F(x) + f(x) = \varphi(x), \quad \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} [F'(x) - f'(x)] = \psi(x).$$

Daraus würde man leicht $F(x)$ und $f(x)$ finden.

Wir werden später Gelegenheit haben, Untersuchungen dieser Art umständlicher durchzuführen. Für jetzt beschränken wir uns auf Betrachtung des Falles, wo die Anfangsgeschwindigkeit $\psi(x)$ durchaus Null ist.

Man hat nun:

$$F'(x) - f'(x) = 0; \text{ also } F(x) = f(x) + C,$$

wenn C eine willkürliche Constante bezeichnet. Aus dieser Gleichung und aus $F(x) + f(x) = \varphi(x)$ ergibt sich:

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{C}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{C}{2}.$$

Die Gleichung (3) wird daher:

$$(4) \quad y = \frac{\varphi\left(x + t \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right) + \varphi\left(x - t \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right)}{2}.$$

Die Function φ ist nur für solche Werthe der Veränderlichen gegeben, welche zwischen 0 und l liegen; und gerade diese Unbestimmtheit macht es möglich, der Bedingung zu genügen, dass die Punkte A und B fest bleiben, oder dass man $y = 0$ habe bei $x = 0$ wie bei $x = l$ für jedes t . Es müssen daher, indem man u statt $t \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ schreibt, für jedes u die beiden Gleichungen stattfinden:

$$(5) \quad \varphi(u) + \varphi(-u) = 0, \quad \varphi(l+u) + \varphi(l-u) = 0.$$

Sie lehren uns, dass die Curve, welche durch $y = \varphi(u)$ vorgestellt wird, sowohl A als B zu Mittelpunkten hat. Dadurch bestimmt sich ihre Gestalt in der ganzen Ausdehnung der Ab-

scissenaxe, sobald dieselbe zwischen A und B bekannt ist. Sie kehrt periodisch wieder, dergestalt, dass zwei Punkte, deren Abscissen um $2l$ verschieden sind, dieselbe Ordinate haben. Man beweist dies aus den Gleichungen (5) dadurch, dass man $l + u$ statt u schreibt, wodurch die zweite übergeht in $\varphi(2l + u) + \varphi(-u) = 0$. Da nun $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, so hat man:

$$\varphi(2l + u) = \varphi(u).$$

Die Function φ ändert sich also nicht, wenn die Variable um $2l$ zu- oder abnimmt.

Jetzt, wo wir die Function φ für alle positiven und negativen Werthe der Veränderlichen bestimmt haben, lässt die Gleichung (4) in der Vergangenheit wie in der Zukunft die Bewegung eines jeden Punktes des Fadens erkennen.

Aus dem über die Form der Function φ Gesagten erhellt, dass, wenn $t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ sich um $2l$ ändert, der frühere Zustand aller Punkte des Fadens wiederkehrt. Die Bewegung ist mithin periodisch; und die Dauer θ der Periode ergibt sich aus $\theta\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} = 2l$, nämlich:

$$\theta = 2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}.$$

Denkt man sich den Faden cylindrisch, bezeichnet D den Durchmesser des senkrechten Querschnitts sowie $\mathcal{A}$ die Dichte der Substanz, so findet man die ganze Schwingungsdauer gleich:

$$lD\sqrt{\frac{\pi\mathcal{A}}{T}}.$$

Der durch Schwingungen einer Saite hervorgebrachte Ton ist um so höher, je kürzer die Schwingungsdauer; man sieht daher, dass die Tonhöhe einer schwingenden Saite von den vier Grössen l , D , $\mathcal{A}$, T in der Weise abhängt, wie der vorstehende Ausdruck es zeigt.

Allgemeine Gesetze der Bewegung freier Systeme.

48. Welche Verbindungen auch in einem bewegten System vorhanden sein mögen, so findet doch nach dem Vorhergehenden mit Hülfe derselben Gleichgewicht statt zwischen den Kräften, welche an jedem Punkt die Componenten haben:

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dieses Gleichgewicht würde nicht gestört werden, wenn man zu den vorhandenen Verbindungen solche neue hinzufügte, dass dieselben das System zu einem starren machten. Daher finden die Gleichungen, welche dann das Gleichgewicht ausdrücken, wirklich statt, während man die Verbindungen so lässt, wie sie gegeben sind.

Wir wollen diese Betrachtung anwenden auf den Fall eines vollkommen freien Systems. Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines freien starren Systems giebt es sechs. Drei davon drücken aus, dass die Summen der Componenten aller Kräfte parallel mit den Axen einzeln Null sind. Die drei anderen lehren, dass auch die Momentensummen aller Kräfte Null sein müssen in Bezug auf jede von denselben rechtwinkligen Axen. Wir werden nach einander die Folgerungen untersuchen, welche sich an beide Arten von Bedingungen knüpfen.

49. Bewegung des Schwerpunkts. — Die drei ersten Gleichungen, von denen so eben gesprochen wurde, sind:

$$\begin{aligned} \sum \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= 0, & \sum \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= 0, \\ \sum \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Sie ergeben:

$$(1) \quad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen lassen sich dadurch transformiren, dass man die veränderlichen Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Schwerpunkts des vorgelegten Systems einführt, worunter man denjenigen Punkt versteht, welcher in irgend einem Zeitpunkt der Bewegung zum Schwerpunkt des Systems werden würde, wenn man augenblicklich alle Punkte fest verbände.

In der That, die Coordinaten dieses Punktes müssen beständig den Gleichungen genügen:

(2) $\Sigma m x = M x_1, \quad \Sigma m y = M y_1, \quad \Sigma m z = M z_1,$ während M die Gesamtmasse des Systems bedeutet. Man kann dieselben, weil sie in jedem Zeitpunkt stattfinden, nach t differenziiiren und erhält dabei:

$$(3) \quad \Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_1}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{dy_1}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dz_1}{dt}.$$

Differenziirt man neuerdings, so kommt:

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}, & \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = M \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \\ \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = M \frac{d^2 z_1}{dt^2}. \end{cases}$$

Daher mit Rücksicht auf (1):

$$(5) \quad M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma X, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Die letzten Gleichungen lehren uns, dass die Beschleunigungscomponenten der Bewegung des Schwerpunkts jenen gleich sind, welche man für einen Punkt mit der Masse M finden würde, auf den alle gegebenen Kräfte, parallel versetzt, wirkten. Dächte man sich diesen Punkt von demselben Ort, mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit und in der nämlichen Richtung ausgehend wie den Schwerpunkt, so würden die Coordinaten beider durch dieselben Gleichungen bestimmt; folglich müssten die zwei Punkte nothwendig jeden Augenblick zusammenfallen.

Was die Anfangsbewegung des Systems betrifft, so wollen wir annehmen, sie werde durch Momentankräfte hervorgebracht, welche die Componenten A, B, C an dem Punkt m haben mögen, A', B', C' an m' , etc. Diese Kräfte können an einer

beliebigen Zahl von Punkten Null sein. Setzen wir in dem Vorhergehenden an die Stelle der stetigen Kräfte die momentanen, so erhalten wir statt der Gleichungen (1) folgende:

$$(6) \quad \Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma A, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma B, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma C.$$

Die Gleichungen (3) haben vom Beginn der Bewegung an Geltung; wir können sie daher zu Hülfe nehmen und erhalten:

$$(7) \quad M \frac{dx_1}{dt} = \Sigma A, \quad M \frac{dy_1}{dt} = \Sigma B, \quad M \frac{dz_1}{dt} = \Sigma C,$$

welche den Gleichungen (5) entsprechen.

Man sieht demnach, dass die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts denen eines freien Punktes gleich sind, welcher die Masse M hat und auf den alle jene Momentankräfte parallel versetzt wirken, welche dem ruhenden System seine Anfangsgeschwindigkeiten ertheilen. Fassen wir nun die beiden Wahrheiten zusammen, so haben wir nachstehenden Lehrsatz:

Die Bewegung des Schwerpunkts irgend eines freien Systems geschieht gerade so, als wenn man alle Massen der verschiedenen Punkte in ihm vereinigte und sowohl jene Momentankräfte als jene stetigen Kräfte parallel mit sich an ihn versetzte, welche den Anfangszustand und die folgenden Zustände des Systems hervorbringen.

Bemerkung. — Wir wollen hier eine oft anwendbare Bemerkung machen bezüglich der Momentankräfte, d. h. solcher Kräfte, welche so gross sind, dass sie während einer unangebbar kleinen Zeit merkliche Wirkungen hervorbringen. Wenn man die aus den Gleichungen (5) gezogene Folgerung auf diese Art von Kräften anwendet während der sehr kurzen Zeit, welcher sie zur Erzeugung der Anfangsgeschwindigkeiten bedürfen, so zeigt sich aufs Neue, dass die Componenten der dem Schwerpunkt zukommenden Anfangsgeschwindigkeit genau dieselben sind, als wenn alle Massen in ihm vereinigt wären und sämmtliche Kräfte mit Beibehaltung ihrer Wirkungsweise an ihn versetzt würden. Es ergiebt sich dies für jede Componente durch eine Integration. Und in der That gehen auf diesem Wege die Gleichungen (7) aus den allgemeinen (5) hervor, wenn man letztere auf sehr grosse Kräfte anwendet, welche

eine sehr kurze Zeit wirken. Die Gleichung, welche uns überall dient, wo Momentankräfte vorkommen, nämlich die Anwendung des d'Alembert'schen Principis auf dieselben, ist durch eine ähnliche Integration der Gleichung stetiger Kräfte erhalten worden. Hat man aber diesen Punkt einmal wohl verstanden, dann ist es vorzuziehen, dass man nicht immer darauf zurückkommt, sondern die Momentankräfte direct einführt, wie wir es zu thun gelehrt haben. Aus diesem Grunde haben wir die Gleichungen (6) und (7) hingeschrieben, während wir uns derselben nach dem Gesagten hätten überheben können. Jedoch konnten wir sie auch zuerst aufstellen vor Betrachtung der folgenden Zustände des Systems.

Enthält das System feste Punkte, Linien oder Flächen, so darf man es als frei betrachten, indem man die Kräfte einführt, welche diese Bedingungen zu ersetzen vermöchten. Der vorhergehende Lehrsatz würde dann zwar noch bestehen; man müsste aber auf Kräfte Rücksicht nehmen, welche nicht gegeben sind und nur bekannt werden können, wenn die Bewegung bestimmt ist.

50. Aus unserem Lehrsatz folgt für den Fall, wo keine äussere Kraft am System wirkt, dass der Schwerpunkt eine gleichförmige und geradlinige Bewegung hat. Die Richtung derselben ist jene der Anfangsgeschwindigkeit, folglich der Resultante aller Momentankräfte, welche das System in Bewegung versetzt haben, oder auch derjenigen Momentankräfte, welche ihm in irgend einem Augenblick die Bewegung beibringen würden, welche es wirklich besitzt.

Aber selbst, wenn die Punkte des Systems auf einander gleiche und entgegengesetzte Wirkungen ausüben, diese mögen stetig oder plötzlich sein, so wird die Bewegung des Schwerpunkts dadurch nicht geändert. Denn diese Kräfte zerstören sich zu zwei, wenn man sie an denselben versetzt. Stösse zwischen den Körpern des Systems, plötzlich hergestellte Verbindungen zwischen ihnen, innere Explosionen haben nothwendig gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkungen zur Folge und können deshalb die Bewegung des Schwerpunkts in Nichts ändern. Hierin besteht das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Wesentlich ist die Bemerkung, dass alle vorhergehenden Sätze unabhängig sind von der Natur der Kräfte und den Gesetzen ihrer Wirkung.

51. Princip der Flächen. — Betrachten wir nunmehr die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen, welche ausdrücken, dass die Momentensummen der Kräfte $X - m \frac{d^2 x}{dt^2}$, $Y - m \frac{d^2 y}{dt^2}$, $Z - m \frac{d^2 z}{dt^2}$, etc. in Bezug auf die rechtwinkligen Axen Null sind. Sie lauten:

$$\Sigma \left[y \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) - z \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right] = 0,$$

$$\Sigma \left[z \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - x \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \right] = 0,$$

$$\Sigma \left[x \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \right] = 0$$

und können auf die Form gebracht werden:

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (yZ - zY), \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \Sigma (zX - xZ), \\ \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (xY - yX). \end{cases}$$

Diese Gleichungen, welche für jeden Zeitpunkt der Bewegung gelten, sagen aus, dass die Momentensummen der gegebenen Kräfte in Bezug auf die rechtwinkligen Axen gleich sind den Momentensummen jener Kräfte, welche den freien Punkten die wirklich stattfindende Bewegung ertheilen würden.

Wir wollen uns insbesondere mit dem Fall beschäftigen, wo die zweiten Glieder der Gleichungen (1) Null sind. Er liegt zunächst vor, wenn man für sämtliche Kräfte $X, Y, Z, \dots$ Null hat, wenn also das bewegte System sich selbst überlassen bleibt ohne äussere Einflüsse.

Derselbe Fall findet ferner statt, wenn die Punkte solchen Kräften unterworfen sind, dass diese sich das Gleichgewicht halten würden, wenn das System starr wäre. Denn die zweiten Glieder stellen die Momentensummen der Kräfte in Bezug auf die Axen vor und sind folglich Null, da die Kräfte an dem starren System im Gleichgewicht stehen. Dabei ist der

Fall von gegenseitigen gleichen und entgegengesetzten Wirkungen, z. B. von beliebigen Stößen zwischen den verschiedenen Theilen des Systems einbegriffen.

Endlich werden die zweiten Glieder Null, wenn alle Kräfte, welche an den verschiedenen Punkten des Systems wirken, durch einen und denselben Punkt gehen, sofern dieser zum Ursprung genommen wird. In der That, unter dieser Voraussetzung sind die Componenten X , Y , Z irgend einer Kraft unter sich den Coordinaten ihres Angriffspunktes proportional; man hat also, wie behauptet:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0.$$

Der Fall, welcher uns beschäftigt, hat demnach noch eine beträchtliche Allgemeinheit. Die Gleichungen (1) werden für ihn:

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0, & \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0, \\ \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Integrirt man nach t und bezeichnet mit c , c' , c'' drei willkürliche Constanten, so folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c, & \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c', \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c''. \end{cases}$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen stellen in Bezug auf die Axen die Momentensummen der Kräfte vor, welche an jedem Punkt die Componenten $m \frac{dx}{dt}$, $m \frac{dy}{dt}$, $m \frac{dz}{dt}$ haben, d. h. die Momentensummen jener Momentankräfte, welche den freien Punkt aus der Ruhe in diejenige Bewegung versetzen würden, welche ihm wirklich zukommt.

Dem gemäss drücken die Gleichungen (3) aus, dass in Bezug auf jede von drei rechtwinkligen Axen die Momentensummen aller einzelnen Bewegungsgrößen, welche das System besitzt, constant sind; was natürlich nun auch für jede beliebige Richtung stattfindet. Oder mit anderen Worten: Wenn man in irgend einem Augenblick die Momentankräfte betrachtet,

welche sämmtliche Punkte des Systems, frei gedacht, aus der Ruhe in die wirklich ihnen zukommenden Bewegungen versetzen würden; wenn man darauf jede solche Kraft in drei andere nach den Coordinatenaxen gerichtete und drei Kräftepaare zerlegt, welche diese Richtungen zu Axen haben; so ist die Momentensumme aller Paare, nach jeder von den drei Richtungen genommen, constant.

Jedes System von Momentankräften, welches die wirklich stattfindende Bewegung erzeugt, steht nach dem d'Alembert'schen Princip im Gleichgewicht mit dem betrachteten in entgegengesetztem Sinn. Es ergibt sich daher unmittelbar, dass allen solchen Systemen die gleichen Momentensummen c , c' , c'' zukommen.

52. Bei dem Folgenden habe man das in der Statik über die Reduction eines beliebigen Kräftesystems Gesagte vor Augen. Wir machen die Voraussetzung, dass auf das bewegte System keine anderen als solche Kräfte wirken, welche an dem starren System sich das Gleichgewicht halten würden.

Wenn man nun in irgend einem Zeitpunkt die Grössen der Bewegung, welche den verschiedenen Punkten des Systems entsprechen, als Kräfte betrachtet und so zusammensetzt, als ob sie an einem starren System wirkten, so findet man für denselben Versammlungspunkt *) aller Kräfte stets die nämliche Resultante und das nämliche mittlere Paar. Hieraus und aus dem von der Bewegung des Schwerpunkts Bemerkten fliessen die nachstehenden Sätze:

Wenn man die Bewegungsgrössen der verschiedenen Punkte des Systems nach gleicher Richtung zerlegt, so ist ihre Summe constant.

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich parallel mit der Resultante aller an einen Punkt versetzten Bewegungsgrössen.

Ihre Momentensumme in Bezug auf eine und dieselbe Gerade ist constant.

Versammelt man alle Bewegungsgrössen an einem Punkt

*) Dieser war in Nro. 51 der Coordinatenursprung.

und nimmt ihre Momente in Bezug auf sämtliche durch ihn gehende Geraden, so hat die Summe derselben für eine bestimmte Gerade den grössten Werth. Diese ist die Axe des mittleren Paares der Bewegungsgrössen für den gewählten Versammlungspunkt und deshalb unveränderlich während der ganzen Bewegung. Zieht man durch diesen Punkt die Richtung der Resultante, so kann man ihren Angriffspunkt darin nehmen, wo man will, und doch bleiben Richtung und Grösse der Axe des zugehörigen grössten Moments ungeändert.

Wenn alle Bewegungsgrössen sich auf eine einzige reduciren lassen und man durch deren Richtung irgend eine Ebene legt, so erhält die Axe des grössten Moments für sämtliche Punkte dieser Ebene einerlei Richtung. Ihre Grösse aber ist nur für jene Punkte gleich, welche auf derselben Parallelen zur Resultante liegen. Ausser den angeführten zwei Fällen findet keine Uebereinstimmung der Richtung statt.

Es giebt eine einzige zur Resultante parallele Centralaxe, mit welcher stets die Richtung der Axe des grössten Moments zusammenfällt, welchen ihrer Punkte man auch zum Angriffspunkt der Resultante nehmen mag. Für alle ihre Punkte hat das grösste Moment gleichen Werth, und dabei ist es kleiner als für jeden ausser ihr gelegenen Punkt. Sie lässt sich leicht bestimmen, sobald man die Resultante und das zu irgend einem Versammlungspunkt gehörige mittlere Paar kennt. In dem Falle, wo die von den Bewegungsgrössen vorgestellten Kräfte sich auf eine einzige Kraft reduciren, ist deren Richtung die Centralaxe.

53. Die Gerade, welche der Schwerpunkt beschreibt, ist parallel zur Resultante. In ihr kann man daher den Versammlungspunkt nehmen, wo man will, und erhält doch immer in Richtung und Grösse dieselbe Axe des grössten Moments oder mittleren Paares.

Ein beliebiger Punkt x_1, y_1, z_1 auf dieser Geraden, den der Schwerpunkt in irgend einem Augenblick einnimmt, sei Versammlungspunkt. Legen wir durch ihn parallele Coordinatenachsen mit den Axen der x, y, z , so haben wir, wenn man durch c, c', c'' die Componenten des zu ihm gehörigen mittleren Paares bezeichnet:

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma m \left[(y - y_1) \frac{dz}{dt} - (z - z_1) \frac{dy}{dt} \right] = c, \\ \Sigma m \left[(z - z_1) \frac{dx}{dt} - (x - x_1) \frac{dz}{dt} \right] = c', \\ \Sigma m \left[(x - x_1) \frac{dy}{dt} - (y - y_1) \frac{dx}{dt} \right] = c''. \end{cases}$$

Für jeden anderen Punkt auf derselben Geraden würden die nämlichen Werthe c , c' , c'' gelten.

Betrachten wir jetzt die Coordinaten x_1 , y_1 , z_1 des Schwerpunkts als veränderlich. Es bestehen die Gleichungen:

(5) $\Sigma m (x - x_1) = 0$, $\Sigma m (y - y_1) = 0$, $\Sigma m (z - z_1) = 0$, weil die Summe der Momente Null ist in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene. Daraus erkennt man sofort die Richtigkeit der nachstehenden:

$$(6) \quad \begin{cases} \Sigma m \left[(y - y_1) \frac{d(z - z_1)}{dt} - (z - z_1) \frac{d(y - y_1)}{dt} \right] = c, \\ \Sigma m \left[(z - z_1) \frac{d(x - x_1)}{dt} - (x - x_1) \frac{d(z - z_1)}{dt} \right] = c', \\ \Sigma m \left[(x - x_1) \frac{d(y - y_1)}{dt} - (y - y_1) \frac{d(x - x_1)}{dt} \right] = c''. \end{cases}$$

Bewegt man drei rechtwinklige Axen parallel zu sich selbst, so dass der Schwerpunkt fortwährend ihren Ursprung bildet, und hat man nur die relative Bewegung gegen dieselben im Auge; dann haben die Bewegungsgrößen, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen,

$$m \frac{d(x - x_1)}{dt}, \quad m \frac{d(y - y_1)}{dt}, \quad m \frac{d(z - z_1)}{dt}$$

zu Componenten an dem Punkt von der Masse m und den Coordinaten x , y , z . Die Gleichungen (6) drücken daher aus, dass die Momentensummen der relativen Bewegungsgrößen in Bezug auf die bewegten Axen constant sind, und dass folglich Richtung und Grösse der Axe des grössten Moments unverändert bleiben. Dieses grösste relative Moment ist gleich dem absoluten bei festen durch irgend einen Ort des Schwerpunkts gehenden Axen, weil die Constanten in (4) und (6) übereinstimmen.

54. Man kann einen allgemeineren Satz für einen bewegten Ursprung erhalten. Ziehen wir durch den willkürlichen festen

Coordinatenanfang eine Parallele zu der vom Schwerpunkt beschriebenen Geraden, so bleibt für alle ihre Punkte die Axe des mittleren Paares der absoluten Bewegungsgrößen in Grösse und Richtung dieselbe, wenn man sich jeden solchen Punkt als festen Versammlungspunkt denkt. Lassen wir aber drei Coordinatenaxen sich parallel mit den festen und so bewegen, dass ihr Durchschnittspunkt immer auf der durch den Anfang gezogenen Geraden bleibt, dann werden die Bewegungsgrößen, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen, im Allgemeinen nicht das nämliche mittlere Paar geben wie die absoluten. Man kann nun untersuchen, unter welchen Bedingungen dies stattfindet.

Bezeichnen α, β, γ die Coordinaten des bewegten Ursprungs, x_1, y_1, z_1 jene des Schwerpunkts; so hat man:

$$(7) \quad \alpha : \beta : \gamma = d\alpha : d\beta : d\gamma = dx_1 : dy_1 : dz_1,$$

wie übrigens auch die Bewegung des neuen Ursprungs beschaffen sein mag. Die Momentensummen der Bewegungsgrößen in Bezug auf die festen Axen seien mit c, c', c'' bezeichnet; ihre Werthe sind durch (3) gegeben. Die Summe der Momente, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen, in Bezug auf die mit der x -Axe parallel sich bewegendende Axe wird ausgedrückt durch:

$$\Sigma m \left[(y - \beta) \frac{d(z - \gamma)}{dt} - (z - \gamma) \frac{d(y - \beta)}{dt} \right]$$

und ist folglich, wie man leicht aus (5) erkennt, gleich:

$$c + M \left(z_1 \frac{d\beta}{dt} - y_1 \frac{d\gamma}{dt} \right) + M \left(\gamma \frac{dy_1}{dt} - \beta \frac{dz_1}{dt} \right) \\ + M \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} \right),$$

wobei M statt Σm steht. Aus (7) folgt nun:

$$\gamma \frac{dy_1}{dt} - \beta \frac{dz_1}{dt} = 0, \quad \beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Das betrachtete Moment würde daher c werden, wenn man hätte:

$$d\beta : d\gamma = y_1 : z_1.$$

Für jede der beiden anderen Axen ergibt sich eine analoge Bedingung; weshalb das mittlere Paar, welches der relativen

Bewegung entspricht, eine in Grösse und Richtung constante Axe erhält unter der Bedingung, dass:

$$d\alpha : d\beta : d\gamma = x_1 : y_1 : z_1$$

oder mit Rücksicht auf (7):

$$\alpha : \beta : \gamma = x_1 : y_1 : z_1,$$

d. h. wenn die Gerade, worauf sich der Ursprung bewegt, die vom Schwerpunkt beschriebene ist.

Der neue Satz ist viel allgemeiner als der vorige, denn er verlangt nicht, dass der bewegte Ursprung beständig im Schwerpunkt genommen werde, ja er fordert nicht einmal eine gleichförmige Bewegung für ihn.

55. Das gefundene Resultat bezieht sich auf die Bedingung, dass die relativen Momente nicht allein constant sondern auch gleich den absoluten seien, welche zu dem festen Ursprung gehören. Wir wollen nun blos die erste Bedingung stellen; dann genügt es, dass man habe:

$$\Sigma m \left[(y - \beta) \frac{d^2(z - \gamma)}{dt^2} - (z - \gamma) \frac{d^2(y - \beta)}{dt^2} \right] = 0$$

sowie zwei ähnliche Gleichungen bezüglich der mit den y und z parallelen Axen.

Weil die Kräfte an dem starren System im Gleichgewicht stehen sollen, so ist:

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Es bleiben demnach von der vorstehenden Gleichung nur die Glieder übrig:

$$- \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \Sigma m (y - \beta) + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \Sigma m (z - \gamma),$$

und diese sind gleich mit:

$$M \left[\frac{d^2 \beta}{dt^2} (z_1 - \gamma) - \frac{d^2 \gamma}{dt^2} (y_1 - \beta) \right].$$

Sie werden deshalb Null sowohl für:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = 0$$

als auch, wenn:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} : \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = y_1 - \beta : z_1 - \gamma.$$

Für die beiden anderen Axen gelten analoge Bedingungen. Man sieht daher, dass die relativen Momente in zwei Fällen constant sind: einmal, wenn

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0,$$

d. h. wenn die Bewegung des Ursprungs geradlinig und gleichförmig geschieht; und ausserdem, sobald:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} : \frac{d^2\beta}{dt^2} : \frac{d^2\gamma}{dt^2} = x_1 - \alpha : y_1 - \beta : z_1 - \gamma,$$

oder wenn der Ursprung sich wie ein Punkt bewegt, auf den eine beständig nach dem Schwerpunkt gerichtete Kraft wirkt. Der zweite Fall liegt z. B. vor, wenn der Ursprung irgendwie die vom Schwerpunkt beschriebene Gerade durchläuft; und wir haben in Nr. 54 gesehen, dass dann die relativen Momente dieselben sind, als wenn der Ursprung fest wäre.

Alle bisherigen Sätze hängen von dem Gesetz der gegenseitigen Wirkungen nicht ab; sie setzen nur voraus, dass dieselben zu zwei gleich und entgegengesetzt sind.

56. Die Gleichungen (3) lassen sich aus einem anderen Gesichtspunkt auffassen und ergeben dann eine merkwürdige geometrische Eigenschaft jeder Bewegung, für welche sie gelten. Der Radius vector vom Ursprung nach dem Punkt x, y, z beschreibt bei der Bewegung des letzten eine Kegelfläche. Die Projectionen derselben auf die Coordinatenebenen sind jene Flächenräume, welche von den Projectionen des Leitstrahls durchstrichen werden. Wir wollen sie berechnen.

Die Projection r des Leitstrahls auf die Ebene YZ bildet mit der Axe der positiven y einen veränderlichen Winkel. Er sei θ , von der Axe der positiven y gegen die der positiven z hin gezählt. Diese Drehrichtung ist direct in Bezug auf die positive x -Axe. Man hat $\tan \theta = \frac{z}{y}$; dabei sind die Vorzeichen nach gewohnter Weise zu nehmen.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{d\theta}{\cos \theta^2} = \frac{y dz - z dy}{y^2};$$

und da $y = r \cos \theta$, so ergibt sich:

$$r^2 d\theta = y dz - z dy.$$

Der Ausdruck $ydz - zdy$ stellt somit das doppelte Differential des vom Radius r durchstrichenen Flächenraums dar. Er stimmt mit $d\theta$ im Zeichen überein; daher dieses positiv ist bei directer und negativ bei rückläufiger Bewegung.

Die Projection des Leitstrahls auf die Ebene YZ hat eine directe Bewegung, wenn die Axe der im Raum beschriebenen unendlich kleinen ebenen Fläche einen spitzen Winkel macht mit der positiven x -Axe. Rückläufig ist dagegen ihre Bewegung, wenn dieser Winkel stumpf wird. Folglich ist $ydz - zdy$ in Grösse und Zeichen gleich der doppelten im Raum beschriebenen unendlich kleinen Fläche, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Axe mit jener der positiven x bildet.

Wenn man jetzt mit $\lambda, \lambda', \lambda''$ die Summe derjenigen Flächenräume bezeichnet, welche von den Projectionen der verschiedenen Leitstrahlen auf die Coördinatenebenen beschrieben werden und wobei jeder Flächenraum mit der Masse des entsprechenden Punktes multiplicirt ist, so kann man offenbar statt der Gleichungen (3) folgende schreiben:

$$\frac{d\lambda}{dt} = c, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = c', \quad \frac{d\lambda''}{dt} = c''.$$

Daraus geht hervor:

$$\lambda = ct, \quad \lambda' = c't, \quad \lambda'' = c''t,$$

wenn man die Flächen von $t = 0$ anfangen lässt.

Diese Gleichungen gelten, wenn die Punkte des freien Systems nur ihren gegenseitigen Wirkungen (Stösse unter einander einbegriffen) ausgesetzt sind; und allgemeiner, wenn sie unter dem Einfluss solcher Kräfte stehen, welche sich im Gleichgewicht halten würden, wenn das System starr wäre, sowie unter dem von beliebigen durch den Ursprung gerichteten Kräften. Bei diesen Voraussetzungen sind die drei Summen der Projectionen jener Flächen, welche von den Leitstrahlen nach sämtlichen Punkten beschrieben werden, jede Fläche multiplicirt mit der Masse des betreffenden Punktes, der Zeit proportional, sofern man die mit directer Bewegung durchstrichenen Räume als positiv betrachtet und die mit rückläufiger Bewegung durchstrichenen als negativ. Darin besteht das Princip der Erhaltung der Flächeninhalte.

57. Wenn zwei Mittelpunkte der Wirkung vorhanden

wären, so würden die zweiten Glieder der Gleichungen (1) selbst dann nicht mehr Null sein, wenn man einen von ihnen zum Ursprung nehmen wollte. Jedoch verschwindet ein Glied, sofern man die Gerade, welche durch die beiden festen Centren geht, zu einer der Axen z. B. zur z -Axe nimmt; denn man hat nun:

$$X : Y = x : y \quad \text{oder} \quad xY - yX = 0.$$

Demnach kommt dem Princip der Flächen in diesem Fall Geltung zu nur für die Projectionen auf eine senkrechte Ebene zu der Geraden durch die beiden Centren. Und die nach den Axen zerlegten Paare, welche von den Bewegungsgrößen des Systems herrühren, liefern ein unveränderliches Paar bloß nach der Axe, welche jene zwei Punkte verbindet.

58. Unveränderliche Ebene. — Sucht man diejenige Ebene, auf welcher die von den Massen multiplicirten Flächen die grösste Projectionensumme geben, so findet man nach dem in den Vorbemerkungen Bewiesenen, dass die Winkel p, q, r der Richtung ihrer Axe mit den Coordinatenaxen folgende Cosinus haben:

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}}, & \cos q &= \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}}, \\ \cos r &= \frac{\lambda''}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \cos p &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}, & \cos q &= \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}, \\ \cos r &= \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}. \end{aligned}$$

Die Richtung dieser Ebene ist demnach von der Zeit unabhängig. Laplace, welcher dies zuerst erkannte, hat ihr deshalb den Namen unveränderliche Ebene gegeben. Die Gleichungen (3) zeigen, dass man sie zu bestimmen vermag, wenn man die Massen der verschiedenen Punkte des Systems und für irgend einen Zeitpunkt die Lagen derselben sowie ihre Seitengeschwindigkeiten kennt. Die gegenseitigen Wirkungen der Punkte, ihre etwaigen Stöße unter einander ändern die Richtung jener Ebene nicht, weil die zweiten Glieder der Gleichungen (1) darum nicht aufhören Null zu sein.

Das Gesagte hat noch Geltung, wenn ein fester Mittelpunkt der Wirkung oder ein fester Punkt im System vorhanden ist und man ihn zum Ursprung nimmt.

Man sieht, dass diese Ebene keine andere ist als diejenige, worin das mittlere Paar der Bewegungsgrössen liegt, weshalb alle für die zweite geltenden Sätze bei ihr Anwendung finden.

59. Anwendung auf das Weltsystem. — Wenn die Sonne, die Planeten und ihre Satelliten nur durch ihre gegenseitigen Wirkungen angegriffen werden, so muss sich der Schwerpunkt des Systems in gerader Linie gleichförmig bewegen mit einer Geschwindigkeit, die abhängt von den Geschwindigkeiten, welche alle diese Körper damals hatten, als sie sich selbst überlassen wurden. Einen festen Punkt kennen wir nicht. Wollen wir nun doch einen solchen Ursprung für die Flächen haben, welcher derjenigen Ebene eine unveränderliche Richtung giebt, worauf die Projectionensumme den grössten Werth hat; so müssen wir einen Punkt wählen, der sich parallel bewegt mit der vom Schwerpunkt beschriebenen Geraden. Da aber diese Gerade nicht bekannt ist, so bleibt nur der Schwerpunkt selbst übrig. Die Ebene des mittleren Paares der relativen Bewegungsgrössen oder der grössten Projectionensumme der relativen Flächen kann zu irgend einer Epoche bestimmt werden. Und weil sie immer dieselbe bleibt, so kann sie, wenn man alle Punkte des Systems darauf bezieht, zur Vergleichung der astronomischen Beobachtungen aller Zeiten dienen.

Wir bemerken, dass diese Ebene, da sie unabhängig ist von der Grösse der gegenseitigen Wirkungen, unverändert bleiben würde, selbst wenn das Attractionsgesetz ein anderes werden sollte. Ebenso wenig hängt sie ab von den Veränderungen, welche in der Gestalt der Körper des Systems eintreten können, weil diese immer von gleichen und entgegengesetzten Kräften herrühren. Die flüssigen und gasförmigen Theile eines Planeten können sich mit seiner festen Masse fest verbinden; die Planeten können auf beliebige Weise unter einander in Verbindung treten oder sich stossen; sie können durch Explosionen zertrümmert werden, ohne dass jene Ebene dadurch geändert wird.

Sie würde noch dieselbe bleiben, wenn auf alle Körper des Systems parallele, den Massen proportionale Kräfte wirk-

ten. Denn die Bewegungen in Bezug auf drei durch den Schwerpunkt nach constanten Richtungen geführte Axen könnten durch diese Kräfte nicht geändert werden, und folglich würden die Projectionensummen der relativen Flächen auf die Coordinatenebenen dieselben bleiben.

60. Gleichung der lebendigen Kräfte. — Sie wird durch Betrachtung einer besonderen virtuellen Versetzung erhalten, derjenigen nämlich, welche übereintrifft mit der Verrückung, die während einer unendlich kleinen Zeit bei der wirklichen Bewegung des Systems stattfindet.

Diese virtuelle Versetzung ist aber keineswegs in allen Fällen mit den Verbindungen verträglich, welche gerade in dem betrachteten Augenblick bestehen. Um deshalb zu erkennen, wann sie erlaubt ist, so sei $L = 0$ eine der gegebenen Bedingungsgleichungen. Die virtuellen Versetzungen müssen der Gleichung genügen:

$$\frac{dL}{dx} \delta x + \frac{dL}{dy} \delta y + \frac{dL}{dz} \delta z + \frac{dL}{dx'} \delta x' + \dots = 0;$$

denn selbst wenn L die Variable t explicit enthält, so darf man sie doch nicht variiren, weil die virtuellen Versetzungen sich auf denselben Augenblick beziehen.

Bezeichnen wir jetzt durch dx , dy , dz , etc. die unendlich kleinen Coordinatenzuwächse, welche innerhalb der Zeit dt bei der wirklichen Bewegung des Systems erlangt werden, so müssen wir, weil die Gleichung $L = 0$ beständig erfüllt sein will, als Zuwachs ihres ersten Gliedes am Ende von dt Null haben. Dies giebt, wenn man der Allgemeinheit wegen die Variable t explicit darin voraussetzt:

$$\frac{dL}{dt} dt + \frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \frac{dL}{dz} dz + \frac{dL}{dx'} dx' + \dots = 0.$$

Wollte man nun

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \text{ etc.}$$

nehmen, so würden beide Gleichungen einander widersprechen.

Diese Annahme ist daher nur erlaubt, wenn man $\frac{dL}{dt} = 0$ hat

für jedes t . Daraus sieht man, dass allein in dem Falle, wo keine Bedingungsgleichung die Zeit explicit enthält, die unendlich kleine Verrückung, welche die Punkte des Systems bei

ihrer wirklichen Bewegung gleichzeitig erfahren, zur virtuellen Versetzung genommen werden darf.

Machen wir deshalb ausdrücklich diese Voraussetzung und nehmen darauf:

$$\delta x = dx, \delta y = dy, \delta z = dz$$

in der allgemeinen Gleichung

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0;$$

dann kommt:

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Das erste Glied ist das halbe Differential von

$$\sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) \text{ oder von } \Sigma m v^2,$$

wenn v die Geschwindigkeit des Punktes mit der Masse m bezeichnet. Vorstehende Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

$$(1) \quad \frac{1}{2} d \Sigma m v^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Wenn nun $\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$ das vollständige Differential einer Function φ von $x, y, z, x', y', z', \dots$ vorstellt, während man diese Grössen sämmtlich als unabhängige Variablen betrachtet; so lässt sich die Gleichung (1) zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten integriren, wobei man erhält:

$$(2) \quad \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \varphi(x, y, z, x', \dots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \dots).$$

In diesem Falle also vermag man den Zuwachs an lebendiger Kraft zu bestimmen, sobald man nur die Lagen aller Punkte für die betrachteten zwei Epochen kennt. Und so oft das bewegte System in die nämliche Lage zurückkehrt, wird die Summe der lebendigen Kräfte wieder dieselbe.

Sind die Kräfte X, Y, Z Null, dann ist das zweite Glied der Gleichung (2) auch Null und die Summe der lebendigen Kräfte constant. Darin besteht das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

61. Wenn alle Punkte des Systems nur der Schwere unterworfen sind, so hat man:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g dm;$$

dabei ist die Axe der positiven z der Schwere entgegengesetzt. Die Gleichung der lebendigen Kräfte wird daher, wenn z_0 und

z_1 die Werthe von z für den Schwerpunkt des Systems bezeichnen sowie M dessen Gesamtmasse:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = -g M (z_1 - z_0).$$

Die Summe der lebendigen Kräfte hängt demnach allein von der Höhe des Schwerpunktes ab und wird wieder dieselbe, so oft dieser Punkt auf die nämliche Horizontalebene zurückkehrt.

62. Wenn das bewegte System durch eine solche Lage geht, worin es sich im Gleichgewicht befinden würde, wenn die Punkte keine Geschwindigkeit besäßen, so hat man:

$$\Sigma m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0$$

für alle virtuellen Versetzungen aus dieser Lage. Und da wir

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz$$

nehmen dürfen, so folgt:

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Das Differential des zweiten Gliedes der Gleichung (2) ist somit Null, folglich das Glied selbst im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum unter den Werthen, welche es nach einander bei der Bewegung annimmt. Demnach hat die Summe der lebendigen Kräfte des Systems ihre grössten und kleinsten Werthe, während das System durch diejenigen Lagen geht, worin es im Gleichgewicht sein würde, wenn seine Punkte ohne Geschwindigkeit wären.

63. Wir wollen jetzt zeigen, dass der Ausdruck

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$$

allemaal dann ein vollständiges Differential ist, wenn man darin keine anderen Kräfte berücksichtigt als jene, welche die gegenseitigen Wirkungen zwischen den Punkten des Systems verursachen, dabei den Massen proportional sind und allein von den Entfernungen abhängen.

Bezeichnen wir durch x, y, z, x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte mit den Massen m, m' ; ihre Entfernung sei f . Ihre gegenseitige Wirkung beträgt $mm'F$, wo F eine Function von f allein bedeutet. Die Componenten der Wirkung des Punktes m' auf m sind daher, wenn man sich dieselbe anziehend denkt:

$$mm'F \cdot \frac{x' - x}{f}, \quad mm'F \cdot \frac{y' - y}{f}, \quad mm'F \cdot \frac{z' - z}{f}.$$

Von ihnen gehen in den Ausdruck

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$$

folgende Glieder ein:

$$mm'F \frac{(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz}{f}.$$

Diejenigen Glieder, welche von den Componenten der anziehenden Wirkung des Punktes m auf m' herrühren, sind

$$mm'F \frac{(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz'}{f}.$$

Durch Zusammenfassen beider erhält man:

$$-mm'F \frac{(x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz')}{f}$$

oder $-mm'F \cdot df$, wie man aus der Gleichung

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = f^2$$

erkennt. Bei abstossender Wirkung würde man $+mm'F \cdot df$ gefunden haben.

Somit ist bewiesen, dass alle Ausdrücke $Xdx + Ydy + Zdz$, welche von den gegenseitigen Wirkungen der Punkte auf einander herrühren, vollständige Differentiale sind, sobald diese Wirkungen nur von der Entfernung abhängen und mit den Massen in Proportion stehen.

In Nro. 203 des ersten Theils haben wir gezeigt, dass Gleiches für alle durch feste Centren gerichteten Kräfte stattfindet, welche nach irgend einer Function der Entfernung allein wirken.

Ist aber der Widerstand eines Mittels oder Reibung vorhanden, dann hängen die darauf bezüglichen Kräfte von der Geschwindigkeit ab oder vom Druck gegen die reibenden Flächen und Linien, so dass:

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

kein vollständiges Differential mehr sein kann.

Man bemerkt, wie das Differential $-mm'F \cdot df$, welches sich auf gegenseitige Anziehungen bezieht, negativ ist für ein positives df und positiv für ein negatives df . Die gegenseitigen Anziehungen haben daher Zuwachs an lebendiger Kraft zur Folge, wenn die Punkte sich nähern; Abnahme, wenn sie sich entfernen. Bei abstossenden Wirkungen wächst die Summe der lebendigen Kräfte während der Entfernung der Punkte; sie nimmt dagegen ab während ihrer Annäherung.

64. Wenn die Punkte des Systems einander stossen bei vollkommener Elasticität der sich stossenden Körper, so gehen dieselben während der zweiten Hälfte des Stosses ge-

nau durch dieselben Zustände hindurch wie während der ersten bis zum Augenblick des grössten Zusammenpressens, und die abstossende Kraft, welche sie auf einander ausüben, ist die nämliche für die gleichen Zustände. Man hat dann gegenseitige Wirkungen, welche blos von der Entfernung der Punkte abhängen, zwischen denen sie stattfinden. Und die Summe der lebendigen Kräfte erleidet durch den Stoss keine Aenderung; denn sie erfährt während des ersten Theils einen Verlust, welcher dem durch den zweiten Theil des Stosses erlangten Zuwachs genau gleich ist.

Anders verhält es sich, wenn die sich stossenden Körper nicht mehr vollkommen elastisch sind.

65. Verlust an lebendiger Kraft in Folge des Stosses. — Nehmen wir an, dass die sich stossenden Körper gar keine Elasticität besitzen, und bezeichnen wir durch a , b , c die Seitengeschwindigkeiten irgend eines Punktes m vor dem Stoss sowie durch A , B , C ihre Werthe nach beendigtem Stoss, welcher zwischen beliebigen Theilen des Systems stattfinden mag.

Zufolge des Princips von d'Alembert, dessen Anwendbarkeit auf Momentankräfte in Nro. 40 nachgewiesen wurde, besteht Gleichgewicht zwischen den zu zwei gleichen und gerade entgegengesetzten Stosskräften und jenen Momentankräften, welche an jedem Punkt die Componenten haben:

$$m \left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx}{dt} \right), \quad m \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy}{dt} \right), \quad m \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz}{dt} \right)$$

oder vermöge der vorstehenden Bezeichnungen:

$$m(a - A), \quad m(b - B), \quad m(c - C).$$

Indem wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden und diejenige virtuelle Versetzung betrachten, welche nach beendigtem Stoss bei der Bewegung wirklich stattfindet, erhalten wir eine von den unbekannten Stosskräften unabhängige Gleichung. In der That, der Stoss ist beendet, sobald die Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die virtuellen Momente der zwei gleichen und entgegengesetzten Kräfte sind daher jetzt gleich und mit verschiedenen Zeichen behaftet, so dass man sie nicht in die Gesamtsumme aufzunehmen braucht und deshalb die Gleichung erhält:

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

und folglich:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} v^2 &= \frac{dx_1^2}{dt^2} + \frac{dy_1^2}{dt^2} + \frac{dz_1^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} \\ &+ 2 \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d\zeta}{dt} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir wissen, dass

$$\Sigma m \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Bezeichnet man nun mit v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und mit V die relativen Geschwindigkeiten in Bezug auf diesen, so hat man unmittelbar:

$$(4) \quad \Sigma m v^2 = \Sigma m V^2 + M v^2,$$

während M die Gesamtmasse des Systems bedeutet. Wir erhalten jetzt unsere Gleichung in folgender Form:

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 = \frac{M}{2} (v_0^2 - v^2) +$$

$$\varphi(x, y, z, x', \dots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \dots).$$

67. Bezüglich des Schwerpunkts ist noch eine oft nützliche Bemerkung zu machen. Seine Bewegung geschieht gerade so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und alle Kräfte parallel zu sich selbst an ihn versetzt würden. Man findet deshalb Eigenschaften für die Bewegung des Schwerpunkts eines Systems mit Hülfe der Bewegungsgesetze eines einfachen materiellen Punktes, auf welchen gegebene Kräfte wirken.

Nehmen wir insbesondere die Gleichung der lebendigen Kraft eines Punktes, so erhalten wir, wenn v wieder die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und x_1, y_1, z_1 dessen Coordinaten bedeuten:

$$(5) \quad \frac{1}{2} d.Mv^2 = dx_1 \Sigma X + dy_1 \Sigma Y + dz_1 \Sigma Z;$$

welche Gleichung in vielen Fällen augenblicklich v liefert. Wir bedienen uns derselben hier, um eine merkwürdige Eigenschaft des Schwerpunkts zu zeigen.

Die Gleichung (1) der Nr. 60 giebt, wenn wir statt $\Sigma m v^2$ seinen Werth aus (4) schreiben:

$$\frac{1}{2} d \Sigma m V^2 + \frac{1}{2} d.Mv^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Bezeichnen jetzt ξ, η, ζ Coordinaten in Bezug auf solche Axen, welche sich parallel mit den Axen der x, y, z bewegen und

dabei immer durch den Schwerpunkt gehen, so hat man:

$$x = x_1 + \xi, y = y_1 + \eta, z = z_1 + \zeta$$

und folglich:

$$dx = dx_1 + d\xi, dy = dy_1 + d\eta, dz = dz_1 + d\zeta.$$

Unter Rücksicht auf (5) wird daher die vorstehende Gleichung:

$$\frac{1}{2}d \cdot \Sigma m V^2 = \Sigma (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta).$$

Demnach hat die Gleichung der lebendigen Kräfte in Bezug auf den bewegten Schwerpunkt gerade so Geltung wie in Bezug auf einen festen Punkt.

Anwendung auf den unmittelbaren Stoss kugelförmiger Körper.

68. Denken wir uns zwei aus homogenen Schichten bestehende Kugeln, deren Mittelpunkte gleichförmige Bewegungen auf derselben Geraden besitzen. Stossen die beiden Kugeln zusammen, so ändern sich ihre Geschwindigkeiten, aber die Mittelpunkte fahren fort sich auf der Geraden nach der einen oder anderen Richtung zu bewegen. Wir stellen uns die Aufgabe, die Formeln zu finden, welche die Geschwindigkeiten nach dem Stoss durch jene vor demselben ausdrücken.

Wir betrachten nur die zwei Fälle, wo die Kugeln entweder ganz weich oder vollkommen elastisch sind. Und um alle Schwierigkeiten zu entfernen, welche ihre Gestalt nach dem Stosse sowie innere Bewegungen verursachen könnten, so betrachten wir sie als zwei materielle Punkte. Wir nehmen an, dass wenn sie sich in sehr kleiner Entfernung von einander befinden, eine abstossende Kraft zwischen ihnen rege wird, welche für den Fall vollkommen elastischer Körper nur von der Entfernung abhängt, dagegen für den Fall weicher Körper bei einem gewissen Grade der Annäherung Null wird.

Beziehen wir den Ort beider Punkte auf einen festen Ursprung in der Geraden, worauf die Bewegung vorgeht. Die Abscissen der Punkte seien x, x' ; m, m' ihre Massen; v, v' ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss und V, V' nach dem Stoss. Die Geschwindigkeiten werden als positiv betrachtet, wenn die Bewegung nach der Richtung der positiven x geschieht; als negativ bei der entgegengesetzten Richtung. Sie

werden daher immer in Grösse und Zeichen durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ dargestellt.

Bezeichnet x_1 die Abscisse des Schwerpunkts beider Punkte, so hat man beständig:

$$mx + m'x' = (m + m')x_1$$

und:

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = (m + m') \frac{dx_1}{dt}.$$

Gemäss dem Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts bleibt $\frac{dx_1}{dt}$ constant und vor wie nach dem Stosse von demselben Werth. Darum muss auch die erste Seite der Gleichung vor und nach dem Stoss gleichen Werth haben, was uns folgende Relation giebt:

$$(1) \quad mv + m'v' = mV + m'V'.$$

Die Grössen v , v' , V , V' haben dabei beliebige Vorzeichen, und die Körper können weich sein oder elastisch.

Unterscheiden wir jetzt diese zwei Fälle.

1. Besitzen die Körper keine Elasticität, dann hört ihre gegenseitige Wirkung auf, sobald ihre Geschwindigkeiten in Grösse und Richtung gleich geworden sind. Man hat alsdann $V = V'$; die Gleichung (1) giebt daher:

$$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Daraus sehen wir, dass die Körper nach dem Stoss in Ruhe bleiben werden, wenn $mv + m'v' = 0$, d. h. wenn ihre Bewegungsgrössen gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt waren.

Auch überzeugt man sich leicht, dass in jedem Falle die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoss kleiner ist als zuvor, und dass der Verlust jene Summe beträgt, welche den verlorenen Geschwindigkeiten entspricht, wie es der Lehrsatz von Carnot verlangt.

2. Wenn die Körper vollkommen elastisch sind, so erleidet die Summe an lebendiger Kraft durch den Stoss keine Aenderung; man hat folglich:

$$(2) \quad mv^2 + m'v'^2 = mV^2 + m'V'^2.$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen V und V' durch v , v' .

Wir schreiben dieselben:

$$m(V - v) = m'(v' - V'),$$

$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2)$$

und erhalten durch Division:

$$V + v = V' + v'$$

oder:

$$(3) \quad V - V' = -(v - v').$$

Demnach ist die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoss gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt.

Aus (1) und (3) findet man:

$$V = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'}, \quad V' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'}.$$

Diese Formeln geben für gleiche Massen:

$$V = v', \quad V' = v,$$

so dass die Körper in diesem Falle stets ihre Geschwindigkeiten austauschen.

Befand sich ein Körper in Ruhe, z. B. der von der Masse m' , dann wird:

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \quad V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

Der bewegte Körper wird daher zurückgeworfen, wenn seine Masse kleiner ist als die des ruhenden. Bei grösserer Masse setzt er seine Bewegung in demselben Sinn fort. Die relative Geschwindigkeit beträgt in beiden Fällen $-v$, wie die Gleichung (3) lehrt.

Wäre ausserdem noch $m = m'$, so würde man finden:

$$V = 0, \quad V' = v.$$

Der ruhende Körper, nachdem er die Geschwindigkeit des bewegten erlangt hat, würde wie dieser zur Ruhe gebracht werden, wenn er auf einen anderen elastischen Körper von gleicher Masse und ohne Geschwindigkeit träfe, und so fort; ein Resultat, welches die Erfahrung bestätigt.

Anwendung der Gleichung der lebendigen Kräfte
auf die Stabilität des Gleichgewichts eines
Systems.

69. Wenn ein System unter dem Einfluss gewisser Kräfte im Gleichgewicht steht, und man es noch so wenig aus der

Gleichgewichtslage verrückt, nachher aber denselben Kräften überlässt, dann ereignet sich von zwei Fällen einer: entweder bleiben die Verrückungen eines jeden Punktes in Bezug auf dessen Gleichgewichtslage beständig sehr klein, oder der Punkt entfernt sich mehr und mehr aus derselben und seine Entfernung erreicht einen endlichen Werth nach einer gewissen Zeit. Im ersten Falle nennen wir das Gleichgewicht stabil, im zweiten labil.

Betrachten wir ein System von Punkten, dessen Verbindungen von der Zeit nicht abhängen und welches durch solche Kräfte angegriffen wird, dass $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ das vollständige Differential einer Function $\varphi(x, y, z, x', \dots)$ darstellt, während man sämtliche Grössen $x, y, z, x', \dots$ als von einander unabhängig ansieht.

Wie bekannt, ist in der Gleichgewichtslage diese Function im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum in Bezug auf alle wirklich unabhängigen Variablen. Wir wollen beweisen, dass dem Maximum das stabile Gleichgewicht entspricht.

Nehmen wir daher an, unser System befinde sich im Gleichgewicht. Dann ist zufolge des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten das Differential von φ Null für alle unendlich kleinen, den Verbindungen genügenden Versetzungen. Es möge der Fall des Maximums vorliegen in Bezug auf alle Werthe, welche φ bei diesen Versetzungen annimmt. Die Werthe von $x, y, z, x', \dots$ in der Gleichgewichtslage seien durch $a, b, c, a', \dots$ bezeichnet. Versetzen wir sämtliche Punkte um sehr kleine Grössen und theilen ihnen sehr kleine Geschwindigkeiten mit; zu zeigen ist, dass die Verrückung des Systems beständig sehr klein bleibt, dass also das Gleichgewicht stabil war.

Wir schreiben zu dem Ende:

$x = a + h, y = b + k, z = c + l, x' = a' + h', \text{ etc.}$ und bezeichnen durch $v_0, v_0', \dots$ die sehr kleinen Geschwindigkeiten, welche den einzelnen Punkten mitgetheilt wurden. Die Gleichung der lebendigen Kräfte liefert:

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \varphi(a + h, b + k, c + l, \dots) \\ \quad \quad \quad - \varphi(a + h_0, b + k_0, c + l_0, \dots); \end{cases}$$

darin stellen $h_0, k_0, l_0, \dots$ die anfänglichen sehr kleinen Versetzungen, nach den Axen zerlegt, vor,

Die Function $\varphi(x, y, z, x', \dots)$ soll ein Maximum sein, wenn $x, y, z, \dots$ die Werthe $a, b, c, \dots$ haben. Daher fallen aus der Entwicklung von $\varphi(a + h, b + k, c + l, \dots)$ alle Glieder weg, welche in Bezug auf $h, k, l, \dots$ vom ersten Grade sind. Und die Glieder des zweiten Grades können, wenn man ihnen die entgegengesetzten Zeichen giebt, als eine Summe von Quadraten solcher Grössen dargestellt werden, welche lineare Functionen von $h, k, l, \dots$ ohne unabhängige Glieder sind. Die Anzahl dieser Quadrate ist gleich jener der unabhängigen Variablen. Bezeichnen $s, s', s'', \dots$ die verschiedenen Grössen, deren Quadrate man nehmen soll, und R den Rest der Reihe; dann hat man:

$\varphi(a + h, b + k, c + l, \dots) = \varphi(a, b, c, \dots) - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \dots) + R$
und ebenso:

$\varphi(a + h_0, b + k_0, c + l_0, \dots) = \varphi(a, b, \dots) - (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \dots) + R_0$.
Die Gleichung (1) wird demnach:

$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = - (s^2 + s'^2 + \dots) + (s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \dots) + R - R_0$;
folglich erhalten wir:

(2) $\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = c - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \dots) + R$,
wenn c die sehr kleine Grösse bedeutet:

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 + s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 + \dots - R_0.$$

Die Grössen $h, k, l, h', \dots$ sind in der That nicht alle von einander unabhängig; man könnte vielmehr eine gewisse Zahl derselben vermöge der Verbindungsgleichungen des Systems eliminiren. Die übrig bleibenden würden in der ersten Potenz in die verschiedenen Glieder der Grössen $s, s', s'', \dots$ eingehen, deren Anzahl gerade so gross ist als die der unabhängigen Variablen. Daraus folgt, dass wenn diese letzten sehr kleine Werthe haben, dasselbe auch für $s, s', s'', \dots$ stattfindet; sowie umgekehrt. Wenn wir daher nachweisen, dass $s, s', \dots$ beständig sehr klein bleiben, so haben wir zugleich dargethan, dass dieses auch mit den Verrückungen sämmtlicher Punkte des Systems der Fall ist.

Das erste Glied der Gleichung (2) hat einen wesentlich positiven Werth, deshalb auch das zweite. Hieraus lässt sich leicht einsehen, dass jede der Grössen $s^2, s'^2, \dots$ beständig kleiner bleibt als c . In der That, der Werth von c zeigt, dass dies zu Anfang der Fall ist; darauf ändern sie sich stetig. Nehmen wir nun an, eine von ihnen z. B. s^2 würde gleich c , während noch

keine andere über c liegen soll; dann würde diese Grösse sowie alle anderen noch immer sehr klein sein. Folglich wären $h, k, l, \dots$ sehr klein und R unvergleichbar kleiner als jede von den Grössen $s^2, s'^2, \dots$. Die Annahme $s^2 = c$ zöge daher die unmögliche Folge nach sich, dass das zweite Glied von (2) negativ würde. Demnach bleiben $s, s', s'', \dots$ sämmtlich unter $\sqrt{c}$ und somit sehr klein. Die Verrückungen $h, k, l, \dots$ bleiben deshalb auch sehr klein, oder das Gleichgewicht war stabil.

Ist die Function $\varphi(x, y, z, x', \dots)$ ein Minimum, so vermag man nicht durch analoge Schlüsse die Labilität des Gleichgewichts darzuthun. Man muss vielmehr jeden besonderen Fall für sich betrachten.

Anwendung der Gleichung der lebendigen Kräfte beim Berechnen der Leistung von Maschinen.

70. Die Maschinen werden im Allgemeinen nur durch ihre Bewegung nützlich und haben dann den Zweck, gewisse Widerstände zu überwinden und ihre Angriffspunkte so zu bewegen, dass deren Verrückungen, zerlegt nach der Richtung jener Widerstände oder Widerstandskräfte, dieser entgegengesetzt seien. Unter bewegenden Kräften versteht man die zur Erzeugung der Bewegung angewandten.

In der Regel kann eine Maschine nur zwei verschiedene, einander gerade entgegengesetzte Bewegungen annehmen, in welchen die Lage eines Punktes die aller anderen bestimmt. Zur Bestimmung der Bewegung genügt daher eine Gleichung, wenn man noch den Sinn kennt. Am bequemsten eignet sich dazu die der lebendigen Kräfte:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Die Summen des ersten Gliedes erstrecken sich über sämmtliche Punkte des Systems. Die Summe des zweiten Gliedes bezieht sich auf alle bewegenden und widerstehenden Kräfte, welche daran angebracht sind. Das Integral wird zwischen zwei beliebigen Grenzen genommen, denen die Geschwindigkeiten v_0 und v des Punktes von der Masse m entsprechen.

Wir wollen die Unterscheidung der Kräfte in bewegende und widerstehende in (1) bemerklich machen. Es sei deshalb

P irgend eine bewegende Kraft und dp die unendlich kleine Verrückung ihres Angriffspunktes, geschätzt auf ihrer Richtung. Dann ist $\Sigma P dp$ derjenige Theil von $\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz)$, welcher von den bewegenden Kräften herrührt. Ferner bezeichne Q eine beliebige widerstehende Kraft, dq die Verrückung ihres Angriffspunktes, projectirt auf ihre Richtung und absolut genommen. Der den widerstehenden Kräften entsprechende Theil ist somit $-\Sigma Q dq$; und die Gleichung (1) darf geschrieben werden:

$$(2) \quad \frac{1}{2} \Sigma m v^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

71. Man kann jede Kraft durch ein Gewicht ersetzen, welches an einem Faden hängt, der an ihrem Angriffspunkt befestigt ist und dessen Richtung von da ab mit der Kraft-Richtung vermöge einer Handrolle zusammenfällt. Nehmen wir auf diese Weise statt der Kraft P ein ihr gleiches Gewicht, so wird dasselbe bei einer unendlich kleinen Bewegung der Maschine um diejenige Grösse dp sinken, welche die Projection der Verrückung des Fadenendes auf die Fadenrichtung ist. Verfahren wir ebenso für irgend eine Kraft Q , dann drückt dq die Grösse aus, um welche das mit Q gleiche Gewicht gehoben wird, während P um dp sinkt.

Wenn wir uns daher alle Kräfte constant denken, so sagt die Gleichung (2), dass der Zuwachs der halben Summe an lebendiger Kraft zwischen zwei beliebigen Epochen gleich ist der Summe der Producte der Gewichte P in ihre respectiven Fallhöhen, weniger die Summe der Producte der Gewichte Q in die Höhen, um welche sie gehoben wurden.

Wir verstehen mit Coriolis unter Arbeitsgrösse das Product eines Gewichts in die Höhe, um welche es sich gehoben oder gesenkt hat, und allgemein das Product irgend einer Kraft in die Projection der Verrückung ihres Angriffspunktes auf ihre Richtung. Ist die Intensität der Kraft veränderlich, so betrachtet man die unendlich kleinen Theile der Bewegung. Die elementaren Arbeitsgrössen, welche denselben entsprechen, hängen von dem Gesetz der Kraftänderung ab; und das Integral, welches ihre Summe darstellt, ist die Arbeitsgrösse der Kraft, welche der ganzen Verrückung ihres Angriffspunktes entspricht.

Nennt man bewegende Arbeit diejenige, welche den bewegenden Kräften angehört, und widerstehende Arbeit die den Widerstandskräften zukommende; dann spricht die Gleichung (2) aus, dass der Zuwachs der halben Summe an lebendiger Kraft gleich ist dem Ueberschuss der bewegenden Arbeit über die widerstehende.

72. Wird die Bewegung der Maschine von dem Augenblick ihrer Ruhe an betrachtet, so hat man $v_0 = 0$ und daher statt der Gleichung (2):

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

Folglich ist das zweite Glied immer positiv, oder die bewegende Arbeit überwiegt die widerstehende. Beide werden gleich, wenn die Maschine wieder zur Ruhe kommt.

Wenn die Bewegung gleichförmig wird, was in der Regel den meisten Vortheil gewährt, und man sie nach hergestellter Gleichförmigkeit betrachtet, dann ist das erste Glied der Gleichung (2) beständig Null, folglich auch das zweite. Die bewegende Arbeit ist demnach während eines beliebigen Zeitintervalls der widerstehenden gleich. Weil aber die letzte nicht allein aus der Arbeit besteht, welche man durch die Maschine ausüben wollte und die Nutzeffect genannt wird, sondern noch aus derjenigen, welche der Reibung, dem Widerstand der Mittel, der Fortpflanzung der Bewegung auf die umgebenden Körper, etc. entspricht, so ergiebt sich, dass bei jeder Maschine mehr Arbeit verbraucht wird, als man mit ihr ausübt. Die beste ist diejenige, bei welcher der geringste Verlust stattfindet; und der Nutzen der Maschinen besteht nur in Verwandlung aber nicht in Vermehrung der Arbeit.

Wenn die Geschwindigkeiten constant geworden sind, dann müssen alle Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und in der That kommt man von

$$\int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq = 0$$

auf die Gleichung:

$$\Sigma P dp - \Sigma Q dq = 0,$$

welche bei jedem im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystem erfüllt wird und hier die hinreichende Bedingung dafür ist.

73. Um die Arbeit der Reibung eines bewegten Körpers auszuwerthen, wenn der Berührungspunkt immer ein anderer

wird, muss man als ihren Angriffspunkt für ein unendlich kleines Zeitintervall nicht den fortwährend wechselnden Berührungspunkt betrachten, sondern es ist die Entfernung der zwei durch dieses Intervall getrennten Berührungspunkte als der vom Angriffspunkt beschriebene Weg zu nehmen. Die Anwendung des Princip's der lebendigen Kräfte verlangt, dass die Kräfte während der den Verrückungen dx, dy, dz entsprechenden unendlich kleinen Zeit die nämlichen materiellen Punkte angreifen. Die tangirende Reibung darf so lange als denselben Punkt angreifend betrachtet werden, weil man dabei nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung fehlt. Man nimmt daher zu ihrer elementaren Arbeit das Product dieser Kraft in die Projection der wirklichen Verrückung desjenigen Körperpunktes auf die Tangente, welcher in dem betrachteten Augenblick Berührungspunkt war.

74. Ereignen sich Stösse zwischen solchen Theilen der Maschine, welche man als unelastisch betrachten darf, so findet augenblicklich ein Verlust an lebendiger Kraft statt gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche den von allen Punkten des Systems verlorenen Geschwindigkeiten entsprechen. Bezeichnet u die von irgend einer Masse m verlorene Geschwindigkeit und v die Geschwindigkeit derselben nach dem Stoss, so haben wir, da während seiner Dauer die Integrale in (2) sich unmerklich ändern:

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma mu^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

Man muss folglich, um die Geschwindigkeiten v auf bestimmten Höhen zu erhalten, eine Arbeitsgrösse $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$ mehr aufwenden, weshalb es gut ist, Stösse soviel als möglich zu vermeiden.

75. Die Bewegung einer Maschine ist entweder gleichförmig oder periodisch; und wenn die Integrale der Gleichung (2) sich über eine ganze Zahl Perioden erstrecken, so hat man $v = v_0$, folglich ist die bewegende Arbeit der widerstehenden gleich, wie wenn die Bewegung gleichförmig wäre. Es genügt aber nicht, dass man dieselbe Arbeitsgrösse ausübt, sondern fast immer kommt es darauf an, dass dies gleichförmig geschehe. Vollkommene Gleichförmigkeit zu erzielen ist beinahe unmöglich; doch kann man die Aenderungen der Geschwindigkeit während einer Periode nahezu unmerklich machen.

Das gewöhnlich angewandte Mittel besteht darin, dass man mit der Maschine eine hinreichend beträchtliche drehbare Masse in Verbindung setzt. Man nimmt dieselbe, damit sie die Stützen weniger belaste, so klein als für den Zweck möglich und giebt ihr deshalb die Form eines Rades (das sogenannte Schwungrad), dessen Masse sich fast ganz an der Peripherie befindet. Bezeichnet ω seine Winkelgeschwindigkeit und μ das Product seiner Masse in das Quadrat des Radius, dann beträgt die Summe seiner lebendigen Kräfte nahezu $\mu\omega^2$. Man könnte ihren Werth leicht genau ermitteln, wie auch die Masse vertheilt wäre. Die Summe der lebendigen Kräfte aller anderen Maschinentheile sei Σmv^2 ; durch ω' , v_0 mögen die Werthe von ω , v zu einer und derselben Epoche bezeichnet werden. Dann können wir die Gleichung (2) schreiben:

$$\frac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{\mu}{2}(\omega^2 - \omega'^2) = \int (\Sigma P dp - \Sigma Q dq).$$

Nehmen wir zu Grenzen zwei solche Epochen, dass die Differenz zwischen $\int \Sigma P dp$ und $\int \Sigma Q dq$ so gross wird als möglich. Man sieht leicht, dass dies zwei nächste von den Epochen sein müssen, bei welchen die Kräfte an der Maschine im Gleichgewicht stehen; denn darüber hinaus ändern die Elemente des Integrals der Gleichung ihr Zeichen. Die erste Seite ist also dann am grössten, und die Geschwindigkeiten haben die grösste Verschiedenheit, welcher sie fähig sind. Je grösser nun μ , desto enger ist offenbar der Spielraum, welcher den Geschwindigkeiten gestattet bleibt, und man vermag in jedem Falle die angebrachte Masse so zu bestimmen, dass die Aenderungen innerhalb hinlänglich kleiner Grenzen liegen.

Princip der kleinsten Wirkung.

76. Dieses Princip hat nur für solche Systeme Geltung, auf welche die Gleichung der lebendigen Kräfte anwendbar ist. Es besteht in Folgendem: Wenn man die Bewegungsgrösse eines jeden Punkts durch das Element der von ihm beschriebenen Curve multiplicirt und das Product zwischen zwei beliebigen, für das ganze System gleichen Epochen integrirt, dann ist die Summe aller Integrale ein Minimum; näm-

lich kleiner, als wenn man durch neue Verbindungen die Punkte zwänge, unter dem Einfluss derselben Kräfte andere Curven zwischen den nämlichen Endpunkten zu durchlaufen.

Um den Beweis zu führen, muss man zeigen, dass die Variation Null beträgt, wenn man alle Punkte der Curven mit Festhaltung der Endpunkte unendlich wenig variirt. Es liegt in der Natur dieser Summe, dass dieselbe im Allgemeinen kein Grösstes werden kann und daher, sehr besondere Fälle ausgenommen, ein Kleinstes sein wird.

Man hat:

$$\delta \int \Sigma m v ds = \int \Sigma m \delta (v ds) = \int \Sigma m (\delta v \cdot ds + v \delta ds).$$

Zur Berechnung des ersten Theils setzen wir $v dt$ statt ds ; dabei bezieht sich dt auf die wirklich stattfindende Bewegung. Dadurch wird:

$$\delta v \cdot ds = v \delta v \cdot dt = \frac{1}{2} dt \delta \cdot v^2,$$

folglich:

$$\Sigma m \delta v \cdot ds = \frac{1}{2} dt \Sigma m \delta \cdot v^2.$$

Wir haben, wenn C eine Constante bezeichnet:

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \varphi(x, y, z, x', \dots) + C;$$

und zwar muss die Form des zweiten Gliedes bei allen Bewegungen, welche man betrachten mag, dieselbe bleiben, weil die nämlichen Kräfte wirken. Wir nehmen die Variation dieser Gleichung und erhalten:

$$\frac{1}{2} \Sigma m \delta \cdot v^2 = \frac{d\varphi}{dx} \delta x + \frac{d\varphi}{dy} \delta y + \text{etc.} = \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Zufolge der allgemeinen Gleichung der Bewegung [Gl. (1) in Nro. 37] ist der letzte Ausdruck gleich:

$$\Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right).$$

Demnach:

$$\Sigma m \delta v \cdot ds = \Sigma m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt.$$

Um den zweiten Theil zu berechnen, bemerken wir, dass aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt:

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz.$$

Daher:

$$v \delta ds = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z,$$

also:

$$\Sigma m v \delta ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z \right).$$

Vereinigen wir jetzt die zwei Theile der Variation von $\Sigma m v ds$, so kommt:

$$\delta \Sigma m v ds = \Sigma m d \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right).$$

Die Integration giebt:

$$\delta \int \Sigma m v ds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) + C'.$$

Die Variationen δx , δy , δz sind an den Integralgrenzen Null, weil die Endpunkte fest bleiben. Das zweite Glied ist deshalb Null, und man hat:

$$\delta \int \Sigma m v ds = 0,$$

was zu beweisen war.

Daraus sieht man, dass das Integral

$$\int \Sigma m v ds \text{ oder } \int \Sigma m v^2 dt$$

bei der Bewegung des Systems ein Minimum ist.

77. Wenn keine Kräfte wirken, so hat man:

$$\Sigma m v^2 = k,$$

wo k constant ist. Deshalb:

$$\int \Sigma m v^2 dt = k(t - t_1);$$

t und t_1 bezeichnen die Zeitgrenzen. Das Integral ist ein Minimum, folglich auch $t - t_1$. Das System rückt daher aus einer Lage in die andere während kürzerer Zeit, als wenn man neue Verbindungen herstellt.

Ein Punkt, der sich auf einer festen Oberfläche bewegen muss, hat constante Geschwindigkeit, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Da nun die Zeit, welche er zum Uebergang nach einer andern Stelle bedarf, ein Minimum ist, so muss auch die Länge der durchlaufenen Linie ein Minimum sein. Dasselbe haben wir im ersten Theil (Nr. 211) auf andere Art bewiesen.

Von den Trägheitsmomenten.

78. Die Bestimmung der Bewegung eines festen Körpers macht die Betrachtung gewisser bestimmten Integrale nothwendig, welche sich über den ganzen Körper erstrecken. Deshalb wollen wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen.

Die Körper bestehen aus Molekülen, welche durch sehr kleine Intervalle getrennt sind; die Materie bietet also nicht Stetigkeit dar. Aber wenn es sich nur um äussere Kräfte handelt, so darf man den Körper in solcher Weise als ein Continuum betrachten, dass man sich jedes sehr kleine Raumtheilchen, welches noch eine grosse Zahl Moleküle enthalten kann, von der Materie stetig erfüllt vorstellt, die ihm nach Maassgabe der Dichte zukommt; alle diese Raumtheilchen schliessen sich stetig an einander. Die äusseren Kräfte zeigen im Umfang eines solchen Theilchens keine merkliche Verschiedenheit; wir werden daher bei unserer Annahme, welche die Rechnung sehr erleichtert, die Wirkungen auf die Theile des Körpers von den wirklich ausgeübten nicht verschieden finden.

79. Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Gerade nennt man die Summe der Producte der Massen aller Elemente in das Quadrat ihres Abstands von der Geraden. Nimmt man sie zur z -Axe, so wird das Trägheitsmoment:

$$\Sigma (x^2 + y^2) dm;$$

dm bedeutet die Masse des Elements mit den Coordinaten x, y, z , und das Integral erstreckt sich über die ganze Masse. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der y und x sind:

$$\Sigma (x^2 + z^2) dm, \quad \Sigma (y^2 + z^2) dm.$$

80. Ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Gerade bekannt, so kann man es leicht in Bezug auf jede Parallele finden.

Nehmen wir die erste zur z -Axe; durch die zweite gehe die Ebene der z , x .

Die Entfernung beider Geraden sei a und M die Masse des Körpers; Mk^2 bezeichne sein Trägheitsmoment in Bezug auf die z -Axe. Das Moment in Bezug auf die Parallele wird ausgedrückt durch:

$\Sigma [(x-a)^2 + y^2] dm = \Sigma (x^2 + y^2) dm - 2a \Sigma x dm + Ma^2$,
also durch

$$M(k^2 + a^2) - 2a Mx_1,$$

wenn x_1 die Abscisse des Schwerpunkts bedeutet.

81. Befände sich der Schwerpunkt auf der z -Axe, dann wäre $x_1 = 0$, und der vorstehende Ausdruck würde:

$$M(k^2 + a^2).$$

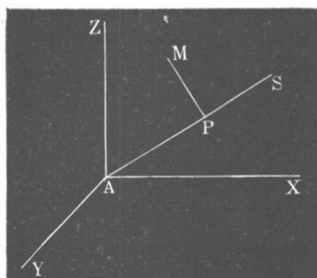
Man sieht, dass derselbe nur von dem Abstand a abhängt; weshalb das Trägheitsmoment das nämliche ist in Bezug auf alle Erzeugungslinien eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis, dessen Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Ferner ergibt sich, wenn man in Bezug auf irgend zwei parallele Geraden die Trägheitsmomente nimmt, dass ihre Differenz gleich ist der Masse des Körpers multiplicirt mit dem Unterschied der Quadrate der Abstände der Geraden vom Schwerpunkt.

Endlich bemerkt man, dass von allen Parallelen zu einer Richtung das kleinste Trägheitsmoment zu der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden gehört.

82. Suchen wir jetzt das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Gerade AS , welche durch den Ursprung geführt ist unter den Winkeln α , β , γ mit den Coordinatenaxen. Hat man dasselbe, so bestimmt sich das Trägheitsmoment leicht in Bezug auf irgend eine Parallele, d. i. irgend eine Gerade im Raum.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes M (Fig. 7) des Körpers und dm die Masse des Elements, welches diesen Punkt enthält. Fällt man MP senkrecht auf AS , dann wird:



$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma \\ &\quad - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf AS , d. i. $\Sigma \overline{MP}^2 dm$ durch μ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mu &= a \sin^2 \alpha + b \sin^2 \beta + c \sin^2 \gamma \\ &\quad - 2d \cos \beta \cos \gamma - 2e \cos \alpha \cos \gamma - 2f \cos \alpha \cos \beta,\end{aligned}$$

während:

$$\begin{aligned}\Sigma x^2 dm &= a, \quad \Sigma y^2 dm = b, \quad \Sigma z^2 dm = c, \\ \Sigma yz dm &= d, \quad \Sigma xz dm = e, \quad \Sigma xy dm = f.\end{aligned}$$

Die Constanten a, b, c, d, e, f werden bestimmt durch die Natur des Körpers und seine Stellung zu den Axen.

Denken wir uns die Trägheitsmomente μ in Bezug auf alle durch A möglichen Geraden AS berechnet, und tragen wir auf jeder Geraden die ihr entsprechende Länge $AN = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ auf, dann wird der Ort aller Punkte N eine vollkommen geschlossene Oberfläche bilden, weil AN stets reelle endliche Werthe hat, welche stetig neben einander liegen. Um ihre Gleichung zu finden, bezeichnet man die Coordinaten von N mit x, y, z und erhält:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= x \sqrt{\mu}, \quad \cos \beta = y \sqrt{\mu}, \quad \cos \gamma = z \sqrt{\mu}, \\ \frac{1}{\mu} &= x^2 + y^2 + z^2.\end{aligned}$$

Wenn man vermöge dieser Gleichungen aus jener, welche oben den Werth von μ gab, $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ eliminirt, so folgt:

$$(1) (b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2 - 2dyz - 2exz - 2fxy = 1.$$

Der Ort ist daher eine Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, und zwar ein Ellipsoid, da kein Radius unendlich werden kann. Poinso't nennt es das Central-ellipsoid.

Gestalt und Lage dieses Ellipsoids hängen für denselben Ursprung von der Annahme der Coordinatenaxen nicht ab. Aber die Gleichung wird einfacher, wenn man seine rechtwinkligen Axen dazu nimmt.

Nehmen wir daher an, wir hätten dieses Axensystem gewählt. Die Constanten a, b, c, d, e, f erhalten dadurch bestimmte Werthe und zwar solche, dass die Producte der Coordinaten aus der Gleichung des Centralellipsoids wegfallen. Man hat folglich:

$$d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0$$

oder:

$$\Sigma yz dm = 0, \quad \Sigma xz dm = 0, \quad \Sigma xy dm = 0.$$

Demnach giebt es für jeden Ursprung ein solches Axensystem, dass diese drei Integrale Null werden, welche Gestalt auch der Körper haben mag, und selbst dann, wenn man irgend eine Zahl von getrennten Körpern hätte. Dieses System ist das der Axen des Centralellipsoids und deshalb nur ein einziges, wenn dieselben ungleich sind. Sind zwei von ihnen gleich, so bleibt die dritte Axe zwar unveränderlich, aber statt der beiden ersten können wir irgend zwei rechtwinklige Geraden in derselben Ebene nehmen. Sind alle drei Axen gleich, so hat jedes durch denselben Ursprung gelegte rechtwinklige Axensystem die bemerkte Eigenschaft.

Diese besonderen Richtungen (die Axen des Centralellipsoids) führen den Namen Hauptaxen der Trägheit.

Bezeichnen A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf seine Hauptaxen oder die Hauptträgheitsmomente, so haben wir:

$$b + c = A, \quad a + c = B, \quad a + b = C;$$

die Gleichung (1) des Centralellipsoids wird folglich:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

83. Das Trägheitsmoment μ in Bezug auf irgend eine durch den Ursprung gehende Axe, welche die Winkel α, β, γ

mit den Hauptaxen macht, wird erhalten, indem man beachtet, dass der entsprechende Radius des Ellipsoids $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ beträgt, dass also sein Endpunkt zu Coordinaten hat:

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\mu}}, \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\mu}}, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\mu}}.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung des Centralellipsoids findet sich:

$$\mu = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Offenbar ist das zweite Glied grösser als die kleinste von den Grössen A , B , C und kleiner als die grösste. Daraus sieht man, dass das kleinste und grösste Hauptmoment zugleich das kleinste und grösste ist unter den Momenten, welche sich auf alle durch denselben Punkt gehende Geraden beziehen. Dasselbe zeigt die blosse Ansicht des Centralellipsoids.

Wenn $A = B$, so wird:

$$\mu = A (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + C \cos^2 \gamma$$

oder:

$$\mu = A + (C - A) \cos^2 \gamma.$$

Folglich sind dann die Trägheitsmomente die nämlichen in Bezug auf alle Geraden, welche durch den Ursprung gehen und mit der ungleichen Axe gleiche Winkel machen. Dasselbe zeigt wieder das Centralellipsoid, welches jetzt eine Umdrehungsfläche um die z -Axe ist.

84. Hat man blos:

$$\Sigma xz dm = 0, \quad \Sigma yz dm = 0,$$

so enthält die Gleichung des Centralellipsoids das Product xy , jedoch nicht die zwei anderen. Die Axe der z ist folglich eine Hauptaxe desselben, also eine Hauptaxe der Trägheit in Bezug auf den Coordinatenursprung.

85. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es Punkte giebt, für welche die drei Hauptträgheitsmomente und folglich alle anderen gleich werden. Das Centralellipsoid zu einem solchen Punkt ist eine Kugel, und alle durch den Punkt gehende Geraden sind Hauptaxen. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die zum Schwerpunkt des Körpers gehörenden Hauptaxen Coordinatenaxen seien.

Mit x', y', z' bezeichnen wir die Coordinaten des gesuchten Punkts. Führen wir durch ihn Parallelen mit den Axen der x, y, z ; diese Parallelen sollen Hauptaxen sein zu dem Punkt wie alle anderen durch ihn gehende Geraden. Man muss folglich haben:

$$\Sigma (y - y') (z - z') dm = 0, \quad \Sigma (z - z') (x - x') dm = 0, \\ \Sigma (x - x') (y - y') dm = 0.$$

Der Voraussetzung nach hat man:

$$\Sigma yz dm = 0, \quad \Sigma xz dm = 0, \quad \Sigma xy dm = 0, \\ \Sigma x dm = 0, \quad \Sigma y dm = 0, \quad \Sigma z dm = 0.$$

Die vorhergehenden Gleichungen werden daher, wenn M die Masse des Körpers bedeutet:

$$My'z' = 0, \quad Mx'z' = 0, \quad Mx'y' = 0.$$

Zwei von den Grössen x', y', z' müssen deshalb Null sein. Setzen wir $x' = 0, y' = 0$; die Momente in Bezug auf die neuen Axen werden dann:

$$A + Mz'^2, \quad B + Mz'^2, \quad C.$$

Diese drei Werthe sollen gleich sein, welches fordert:

$$A = B, \quad A + Mz'^2 = C.$$

Folglich müssen zwei Hauptmomente, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, gleich sein; und die gesuchten Punkte können nur auf der dem dritten Moment entsprechenden Axe liegen. Damit z' reell werde, muss man haben $C > A$; das dritte Moment muss daher zugleich das grösste sein. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es zwei der Aufgabe genügende Punkte. Sie liegen in der Axe des grössten Moments auf beiden Seiten des Schwerpunkts in der Entfernung $\sqrt{\frac{C-A}{M}}$ von diesem.

86. Die Hauptaxen der Trägheit eines Körpers, welche durch dessen Schwerpunkt gehen, haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie zu jedem ihrer Punkte Hauptaxen bleiben und dann als zugeordnete Hauptaxen parallele mit den beiden anderen besitzen.

In der That, nehmen wir eine von ihnen, z. B. die der z , und versetzen wir den Ursprung an irgend einen Punkt derselben; dann wird:

$$z = z' + h.$$

Der Voraussetzung nach ist:

$$\Sigma yz dm = 0, \quad \Sigma xz dm = 0, \quad \Sigma xy dm = 0.$$

Ferner:

$$\Sigma yz dm = \Sigma yz' dm + h \Sigma y dm = \Sigma yz' dm;$$

folglich:

$$\Sigma yz' dm = 0.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\Sigma xz' dm = 0.$$

Legt man daher durch irgend einen Punkt einer der Hauptaxen, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, Parallelen mit denselben, so hat man Hauptaxen zu dem Punkt.

87. Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds. — Führen wir durch den Mittelpunkt des homogenen Parallelepipeds drei Parallelen mit den Kanten, so haben wir die Hauptaxen zu dem Schwerpunkt. Bezeichnen a, b, c die Kantenlängen, M die Masse; dann werden die Trägheitsmomente in Bezug auf jene Axen:

$$M \left(\frac{b^2 + c^2}{12} \right), \quad M \left(\frac{a^2 + c^2}{12} \right), \quad M \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right),$$

wie man leicht durch Integriren findet. Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Gerade, welche die Winkel α, β, γ mit den Kanten macht und vom Mittelpunkt um die Strecke d absteht, ist folglich:

$$\frac{M}{12} [(b^2 + c^2) \cos \alpha^2 + (a^2 + c^2) \cos \beta^2 + (a^2 + b^2) \cos \gamma^2] + M d^2.$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Kanten sind:

$$M \left(\frac{b^2 + c^2}{3} \right), \quad M \left(\frac{a^2 + c^2}{3} \right), \quad M \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right).$$

88. Trägheitsmoment eines Ellipsoids. — Es genügt, dass man die Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen der Trägheit kenne. Diese

sind die Axen des Ellipsoids, wenn dieses homogen ist, was wir annehmen. Die Gleichung sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Suchen wir das Trägheitsmoment in Bezug auf die z -Axe. Der Faden über und unter dem Rechteck $dx dy$ beträgt:

$$2c dx dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

Das Moment wird daher, wenn D die Dichte bezeichnet:

$$2cD \iint (x^2 + y^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Dieser Ausdruck lässt sich zerlegen in

$$\begin{aligned} & 2cD \iint x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\ & + 2cD \iint y^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Den ersten Theil integrieren wir nach y zwischen den Grenzen

$$-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad +b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Das Integral

$$\int dy \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}$$

zwischen diesen Grenzen ist die Fläche eines Halbkreises vom

Radius $b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; es hat folglich den Werth

$$\frac{\pi b^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Wir müssen daher nach x den Ausdruck integrieren

$$\pi b c D x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

und zwar von $x = -a$ bis $x = +a$; dies giebt:

$$\frac{4}{15} \pi b c a^3 D \quad \text{oder} \quad \frac{M a^2}{5},$$

wenn M die Masse des Ellipsoids bedeutet.

Die Integration des zweiten Theils liefert auf gleiche Weise $\frac{Mb^2}{5}$. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die z -Axe beträgt daher:

$$M\left(\frac{a^2 + b^2}{5}\right).$$

Für die beiden anderen Axen würde man finden:

$$M\left(\frac{a^2 + c^2}{5}\right), \quad M\left(\frac{b^2 + c^2}{5}\right).$$

In dem Falle, wo $a = b = c$, hat man

$$\frac{2Ma^2}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{8\pi Da^5}{15}$$

als Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf irgend einen Durchmesser.

89. Lässt man den Radius a dieser Kugel um das unendlich kleine Stück da wachsen, so wächst ihr Trägheitsmoment um

$$\frac{8}{3}\pi Da^4 da.$$

Dieser Ausdruck stellt das Trägheitsmoment einer Kugelschale vor vom Radius a , der Dicke da und Dichte D .

Integriert man denselben, während D eine gegebene Function von a ist, zwischen zwei Werthen R, R' , so erhält man das Trägheitsmoment einer nicht homogenen Hohlkugel, deren Dichte allein abhängt von der Entfernung vom Centrum.

90. Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers. — Betrachten wir noch den homogenen Körper, welcher erzeugt wird durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Gerade, die wir zur Axe der y nehmen, und suchen wir sein Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe. Es seien $F(y), \varphi(y)$ die Ausdrücke der Abscissen der beiden Curven, welche die Fläche begrenzen, und D die Dichte der Substanz. Das Trägheitsmoment einer Scheibe, welche enthalten ist zwischen zwei senkrechten Ebenen auf die Axe, die den Ordinaten y und $y + dy$ entsprechen, beträgt $2\pi D dy \int x^2 dx$. Dieses Integral zwischen den Grenzen $\varphi(y), F(y)$ ist gleich:

$$\frac{\pi D dy}{2} [F(y)^4 - \varphi(y)^4];$$

welchen Ausdruck man nach y integrieren muss zwischen den Grenzen der Erzeugungsfläche.

Ist zum Beispiel

$$\varphi(y) = 0, \quad F(y)^2 = a^2 - y^2,$$

dann wird der Körper eine Kugel; und das Trägheitsmoment erhält den schon bekannten Ausdruck:

$$\frac{\pi D}{2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - y^2)^2 dy \quad \text{oder} \quad \frac{8\pi D a^5}{15}.$$

Bewegung eines Körpers um eine feste Axe.

91. Betrachten wir einen Körper von bekannter Gestalt und Dichte, welcher unveränderlich verbunden ist mit einer festen Axe, um die er sich frei drehen kann. Alle seine Punkte oder nur eine endliche Zahl derselben werden durch gegebene Kräfte angegriffen. Man soll die Bewegung bestimmen, wenn entweder die Anfangsgeschwindigkeiten bekannt sind oder die Momentankräfte, welche sie hervorgebracht haben.

Liegen die Krafrichtungen nicht in senkrechten Ebenen auf die Drehaxe, so lässt sich jede Kraft in zwei zerlegen, davon eine parallel zur Axe und die andere in einer senkrechten Ebene. Die erste wird durch den Widerstand der Axe vernichtet; man darf deshalb bei Untersuchung der Bewegung von ihr absehen, und wir nehmen an, dass alle Kräfte in senkrechten Ebenen auf die Drehaxe wirken.

Dem Princip von d'Alembert zufolge findet Gleichgewicht statt zwischen den gegebenen und solchen Kräften, welche gleich und gerade entgegengesetzt sind denjenigen, die den frei gedachten Punkten die Bewegung beibringen würden, welche sie wirklich befolgen. Diese letzten Kräfte sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2y}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2z}{dt^2} dm$$

für das Element von der Masse dm und den Coordinaten x, y, z . Doch betrachten wir besser ihre Tangential- und Normalcomponente. Die erste bewirkt den Zuwachs an Geschwindigkeit; die zweite oder die Centripetalkraft wird durch den Widerstand der Drehaxe aufgehoben, weil jeder Punkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Centrum auf dieser liegt. Wir brauchen daher nur die Tangentialcomponente zu berücksichtigen,

welche durch $\frac{dv}{dt} dm$ vorgestellt wird, wenn v die Geschwindigkeit und dm die Masse des Punktes bezeichnet. Bedeutet r dessen Abstand von der Drehaxe und θ den Winkel zweier durch diese gelegten Ebenen, deren eine fest ist, während die andere sich mit dem Körper bewegt, so hat man:

$$v = r \frac{d\theta}{dt}, \text{ folglich } \frac{dv}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Die Geschwindigkeit wird dabei als positiv betrachtet, wenn der Winkel θ wächst, und die Kraft, wenn sie dies zu bewirken strebt. Das Gleichgewicht eines Körpers um eine feste Axe verlangt, dass die algebraische Summe der Kräfte-momente in Bezug auf diese Axe Null sei, während man als positiv z. B. die Momente der Paare betrachtet, welche den Winkel θ zu vergrössern streben, und als negativ diejenigen, welche ihn verkleinern wollen.

Bezeichnet P irgend eine der gegebenen Kräfte und p ihre Entfernung von der Drehaxe, so liefert das Gleichgewicht zwischen den Kräften P und $-r \frac{d^2\theta}{dt^2}$ folgende Gleichung:

$$\Sigma Pp - \Sigma r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} dm = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma Pp - \frac{d^2\theta}{dt^2} \Sigma r^2 dm = 0,$$

wo die Summen sich über alle Punkte des Körpers erstrecken.

Wir wollen mit Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers bezeichnen in Bezug auf eine zur Drehaxe Parallele, welche durch seinen Schwerpunkt geführt ist; M soll die Masse vorstellen. Die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe sei l ; dann haben wir:

$$\Sigma r^2 dm = M(k^2 + l^2),$$

und die vorletzte Gleichung wird:

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma Pp}{M(k^2 + l^2)}.$$

Die Momente der gegebenen Kräfte ändern sich im Allgemeinen mit der Lage des Körpers. Wenn diese Kräfte nicht von der Zeit abhängen, so werden ihre Momente bekannte Functionen von θ sein, und mittelst Integriren der Gleichung (1) erhält man θ ausgedrückt durch t und zwei Constanten. Diese Constanten und mit ihnen die Bewegung aller Punkte

des Körpers werden bestimmt, wenn man kennt die Werthe von θ und $\frac{d\theta}{dt}$ für $t = 0$, also Lage und Winkelgeschwindigkeit des Körpers beim Anfang der Bewegung.

Um die Gleichung (1) zu integriren, schreiben wir dieselbe

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varphi(\theta).$$

Durch Multipliciren mit $2d\theta$ und Integriren von dem Anfangswerth θ_0 an kommt:

$$(2) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi(\theta) d\theta + \omega^2;$$

ω ist Anfangswerth der Winkelgeschwindigkeit. Daraus geht hervor:

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2 \int_{\theta_0}^{\theta} \varphi(\theta) d\theta + \omega^2}}.$$

Die Quadratur liefert t als Function von θ . Die dabei eingehende Constante wird bestimmt, indem man ausdrückt, dass gleichzeitig

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0.$$

Wenn die gegebenen Kräfte solche sind, dass die Gleichung der lebendigen Kräfte anwendbar ist, so erhält man aus ihr die Formel (2) unmittelbar. Da nämlich die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r von der Axe $r \frac{d\theta}{dt}$ beträgt, so wird die Summe $\Sigma m v^2$ gleich

$$\Sigma m r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} \Sigma m r^2.$$

Drückt man nun auch, was hier immer möglich ist, das zweite Glied der Gleichung der lebendigen Kräfte durch die einzige Variable θ aus, so hat man $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ als Function von θ und damit die Formel (2).

92. Wir wollen insbesondere den Fall eines schweren Körpers betrachten, der sich um eine horizontale Axe bewegt, die wir zur Axe der y nehmen, während die z -Axe der Schwere

entgegengesetzt sei. Der Winkel θ werde gebildet von der Verticalebene YZ mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers geführten Ebene; er wachse von der positiven z -Axe gegen die positive y -Axe hin, d. h. im Sinne der directen Bewegung in Bezug auf die Axe der positiven y . Das Moment der Schwere an dem Element dm beträgt $g x dm$; denn sie strebt den Winkel θ zu vergrössern bei positivem x und ihn zu verkleinern bei negativem x . Die Gleichung (1) wird daher:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \Sigma x dm}{M(k^2 + l^2)}$$

oder, wenn x_1 die Abscisse des Schwerpunkts bezeichnet:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g x_1}{k^2 + l^2}.$$

Man hat $x_1 = l \sin \theta$; folglich:

$$(3) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g l}{k^2 + l^2} \sin \theta.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene, welche die Bewegung eines mit dem Ursprung festen materiellen Punktes in der Ebene XZ bestimmt. Ist nämlich sein Abstand vom Ursprung oder die Länge dieses einfachen Pendels R , so erhält man als Gleichung seiner Bewegung:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{R} \sin \theta.$$

Sie würde aus (3) hervorgehen, wenn man sich die ganze Masse vereinigt dächte in einem Punkt in der Entfernung R von der Axe. Beide Gleichungen werden identisch, indem man setzt:

$$R = \frac{k^2 + l^2}{l} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Lässt man zugleich die Anfangswerthe von θ und $\frac{d\theta}{dt}$ für den Körper und das einfache Pendel übereinstimmen, so wird die Bewegung beider beständig dieselbe sein. Die Bewegung eines schweren Körpers um eine feste Axe ist somit auf die Pendelbewegung zurückgeführt, auf welche wir hinweisen.

93. Wenden wir auf diesen Fall die Gleichung der lebendigen Kräfte an. Die Componenten der irgend ein Massenelement dm angreifenden Kraft sind $X=0$, $Y=0$, $Z=-gdm$; die Gleichung der lebendigen Kräfte giebt daher:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Sigma m r^2 = -2 \Sigma f g dm dz = -2g \Sigma z dm + C.$$

Bezeichnet z_1 das z für den Schwerpunkt des Körpers, so hat man:

$$\Sigma z dm = M z_1 = M l \cos \theta.$$

Setzen wir wie vorher

$$\Sigma m r^2 = M(k^2 + l^2)$$

und bestimmen die Constante C durch die Bedingung, dass θ_0 und ω die Anfangswerthe von θ und $\frac{d\theta}{dt}$ seien; dann erhalten wir

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2gl}{k^2 + l^2} (\cos \theta - \cos \theta_0) + \omega^2$$

als erstes Integral der Gleichung (3). Die Rechnung wird wie in der Pendeltheorie zu Ende geführt.

Wenn die feste Axe nicht horizontal ist, so braucht man bloß die Schwere zu zerlegen und hat dann wieder eine auf den Richtungen der Kräfte senkrechte Drehaxe.

94. Ein fester Körper, der um eine horizontale Axe schwingt, heisst ein zusammengesetztes Pendel. Unter seiner Länge versteht man die Länge desjenigen einfachen Pendels, welches gleiche Bewegung mit ihm hat. Die Länge des betrachteten zusammengesetzten Pendels beträgt daher $l + \frac{k^2}{l}$. Sie ändert sich nicht, wenn man den Körper um die durch den Schwerpunkt geführte Parallele zur Axe dreht; denn l und k bleiben ungeändert.

Man nennt Schwingungspunkt eines zusammengesetzten Pendels jeden Punkt desselben oder jeden fest damit verbundenen Punkt, dessen Bewegung gerade so geschieht, als ob er allein wäre und sich um die Drehaxe bewegte durch die Wirkung der Schwere. Hiernach sind alle jene Punkte Schwingungspunkte, welche sich auf der in der Entfernung $l + \frac{k^2}{l}$

zur Axe Parallelen befinden, die enthalten ist in der durch die Axe und den Schwerpunkt des Körpers geführten Ebene; sie liegen um das Stück $\frac{k^2}{l}$ unterhalb des Schwerpunkts. Einige Schriftsteller nennen insbesondere denjenigen von ihnen den Schwingungspunkt, welcher auf der Verticalen durch den Schwerpunkt liegt.

Die Abstände des Schwerpunkts von der Drehaxe und von der Linie der Schwingungspunkte geben das Product k^2 ; also wird, wenn man den Körper umkehrt, d. h. seinen Schwerpunkt um das Stück $\frac{k^2}{l}$ unterhalb der Drehaxe nimmt, diejenige Gerade zur Linie der Schwingungspunkte werden, welche um l unter dem Schwerpunkt liegt. Die Pendellänge ist dann noch dieselbe, folglich auch die Bewegung.

Pendellänge und Bewegung bleiben ferner ungeändert, wenn man statt der Drehaxe irgend eine Parallele in gleicher Entfernung vom Schwerpunkt nimmt, denn l und k^2 ändern sich dadurch nicht.

Allgemein ist die Bewegung dieselbe um alle Axen, welche für das Pendel gleiche Länge geben. Bezeichnet man durch l den Abstand irgend einer Drehaxe vom Schwerpunkt, durch α, β, γ die Winkel ihrer Richtung mit den zu diesem Punkt gehörigen Hauptaxen der Trägheit, durch A, B, C die Hauptträgheitsmomente; so hat man als Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gelegte Parallele zu dieser Drehaxe:

$$Mk^2 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma;$$

die Pendellänge $l + \frac{k^2}{l}$ beträgt folglich:

$$l + \frac{A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma}{Ml}.$$

Diese Länge kann für unendlich viele Geraden dieselbe bleiben, da α, β, γ, l nicht bestimmt sind.

95. Will man wissen, um welche Axe die Schwingung in der kürzesten Zeit geschieht, so hat man diejenigen Werthe zu suchen, welche die Unbestimmten α, β, γ, l annehmen müssen, damit die Pendellänge ein Minimum werde.

Unter einem System paralleler Axen, für welche k^2 constant ist, entspricht dem Werthe $l = k$ diejenige, welche die Pendellänge $l + \frac{k^2}{l}$ zu einem Minimum macht; diese Länge beträgt dann $2k$. Sie wird am kleinsten, wenn k den kleinsten Werth hat. Hiernach fällt die Schwingungszeit am kürzesten aus, wenn die Drehaxe parallel läuft mit der Axe des zum Schwerpunkt gehörigen kleinsten Trägheitsmoments, und wenn ihre Entfernung k von dieser Axe gleich ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten dieses Moments durch die Masse des Körpers.

Bewegung eines Körpers um eine Axe durch eine Momentankraft.

96. Wir haben die Drehung eines Körpers um eine feste Axe bestimmt, indem wir seine anfängliche Lage und Winkelgeschwindigkeit als bekannt voraussetzten. Wir wollen jetzt bestimmen, welche Winkelgeschwindigkeit der Körper annimmt, wenn er während einer sehr kleinen Zeit der Wirkung einer Kraft unterliegt, die unterdessen einem freien materiellen Punkt eine bekannte Bewegungsgrösse ertheilen würde.

Wir zerlegen sie in zwei Kräfte, davon eine parallel zur Axe und die andere in einer senkrechten Ebene; die letzte ist es allein, welche die Bewegung hervorbringt. Ihren Werth bezeichne P und p ihre Entfernung von der Drehaxe. Das Princip von d'Alembert liefert:

$$\omega \Sigma r^2 dm = Pp,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Hieraus folgt mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$\omega = \frac{Pp}{M(k^2 + l^2)}.$$

Nachdem die durch die Momentankraft erzeugte Geschwindigkeit bekannt ist, bestimmt sich die Bewegung nach dem Vorhergehenden. Die Gleichung (1) giebt, wenn weiter keine Kraft den Körper angreift, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, oder die Winkelgeschwindigkeit bleibt dann constant.

97. Nehmen wir an, die Anfangsgeschwindigkeit werde hervorgebracht durch den Stoss eines Punktes von der Masse μ und Geschwindigkeit v , die gerichtet sei in einer auf die feste Drehaxe senkrechten Ebene nach einer Geraden, welche von der Axe um das Stück f absteht. Die Masse μ möge sich mit dem Körper verbinden in dem Punkt, wo sie ihn trifft; h sei dessen Abstand von der Drehaxe.

Man zerlege die Geschwindigkeit v nach dem Radius und der Tangente des Kreises, den der gestossene Punkt um die Axe beschreibt; die erste Componente wird zerstört, und die zweite hat den Werth $\frac{vf}{h}$. Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems nach dem Stoss, dann hat die Masse μ durch Reaction des Körpers an Geschwindigkeit verloren $\frac{vf}{h} - h\omega$; die entsprechende Bewegungsgrösse beträgt $\mu \left(\frac{vf}{h} - h\omega \right)$. Eine so grosse Momentankraft hat folglich der Masse μ entgegengewirkt; und da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so ist dieser Ausdruck auch das Maass der Momentankraft, welche auf den Körper gewirkt hat. Somit sieht man sich in dem vorher betrachteten Fall und erhält:

$$\mu h \left(\frac{vf}{h} - h\omega \right) = \omega \Sigma r^2 dm, \quad \text{daher} \quad \omega = \frac{\mu v f}{\mu h^2 + \Sigma r^2 dm}.$$

Der Nenner ist das Trägheitsmoment des Körpers und der mit ihm verbundenen Masse. Bezieht man die Summe auf beide, so darf man schreiben:

$$\omega = \frac{\mu v f}{\Sigma r^2 dm}.$$

Wenn statt eines Körpers beliebig viele mit den Massen $\mu, \mu', \mu'', \text{etc.}$ und den Geschwindigkeiten $v, v', v'', \text{etc.}$ in demselben Augenblick stossen, während die Abstände der Geschwindigkeitsrichtungen von der Drehaxe $f, f', f'', \text{etc.}$ betragen, und wenn alle Körper sich mit dem gestossenen verbinden, so erhält man:

$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \text{etc.}}{\Sigma r^2 dm},$$

wo das Trägheitsmoment sich über alle verbundenen Körper erstreckt.

98. Stoss gegen die Drehaxe. — Die Momentankraft, welche den Körper in Bewegung versetzt, bringt eine Erschütterung der festen Axe hervor, die man kennen muss und welche von den Kräften herrührt, die sich mit Hülfe des Widerstands der Axe das Gleichgewicht halten. Nehmen wir die Drehaxe zur Axe der z und zur Ebene der x, y diejenige darauf senkrechte Ebene, welche durch den Angriffspunkt der Kraft geht. Wir zerlegen diese in zwei Kräfte; davon soll eine, Z , parallel zur Drehaxe sein und die andere, P , welche X, Y zu Componenten hat, in der Ebene XY liegen.

Gleichgewicht findet statt zwischen X, Y, Z und dem System der auf alle Elemente des Körpers sich beziehenden Kräfte $-dm \frac{dx}{dt}, -dm \frac{dy}{dt}, -dm \frac{dz}{dt}$; dabei ist zu beachten, dass $\frac{dz}{dt} = 0$, weil die Bewegung um die z -Axe geschieht.

Das Element dm habe die Coordinaten x, y, z und den Abstand r von der Drehaxe; θ sei der Winkel, den die x -Axe bildet mit der Projection von r auf die Ebene XY , und ω die erzeugte Winkelgeschwindigkeit. Man hat:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

und erhält durch Differenzüiren:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \frac{dy}{dt} = r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \text{ oder } \frac{dx}{dt} = -\omega y, \frac{dy}{dt} = \omega x.$$

Daher:

$$-dm \frac{dx}{dt} = \omega y dm, -dm \frac{dy}{dt} = -\omega x dm.$$

Wenn man statt aller im Gleichgewicht stehenden Kräfte drei nach den Coordinatenaxen gerichtete und drei Kräftepaare setzt, deren Axen in denselben Richtungen liegen, so sind die Kräfte:

$$X + \omega M y_1, Y - \omega M x_1, Z;$$

x_1, y_1 gehören dem Schwerpunkt an. Die Momente der Paare werden ausgedrückt durch:

$$bZ + \omega \Sigma x z dm, -aZ + \omega \Sigma y z dm, aY - bX - \omega \Sigma r^2 dm;$$

a, b stellen die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft vor.

Das letzte Moment ist Null wegen des Gleichgewichts

um die feste Drehaxe. Die Wirkungen, welche sie auszuhalten bat, rühren darum nur her von den zwei anderen Paaren und den drei Kräften.

99. Mittelpunkt des Stosses. — Suchen wir jetzt die Bedingungen, unter welchen die feste Axe keinen Stoss erleidet. Dazu ist erforderlich, dass unabhängig von derselben das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Principis stattfinde, dass also die nach den Axen gerichteten Kräfte und die in den Coordinatenebenen liegenden Paare Null seien. Wenn man der Einfachheit wegen die Ebene der x, z durch den Schwerpunkt des Körpers führt und ausserdem das Coordinatensystem der Nr. 98 beibehält, so muss man demnach haben, weil jetzt y_1 Null ist:

$$Z = 0, \quad X = 0, \quad Y = \omega M x_1,$$

$$\Sigma x z dm = 0, \quad \Sigma y z dm = 0, \quad a Y = \omega \Sigma r^2 dm.$$

Die vierte und fünfte Gleichung zeigen, dass die Drehaxe eine von den zu dem Coordinatenursprung gehörenden Hauptaxen der Trägheit sein muss. Die erste und zweite sagen, die Krafrichtung müsse senkrecht stehen auf der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers bestimmten Ebene.

Um den Abstand a zu finden, welchen die Richtung der Momentankraft von der Drehaxe haben muss, entnimmt man aus der dritten Gleichung den Werth für ω und setzt diesen in die sechste; dadurch erhält man:

$$a = \frac{\Sigma r^2 dm}{M x_1}.$$

Bezeichnet $M k^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine zur Drehaxe Parallele durch den Schwerpunkt, so geht diese Gleichung über in:

$$a = x_1 + \frac{k^2}{x_1}.$$

Demnach muss a gleich sein dem Abstand der Drehaxe vom Schwingungspunkt *) des Körpers um dieselbe.

*) Diese Bezeichnung wird hier ausgedehnt auf den Fall einer nicht horizontalen Axe.

Damit die Drehaxe keinen Stoss erleide, so ist hiernach nothwendig und hinreichend:

1) Dass die Krafrichtung senkrecht stehe auf der die Drehaxe mit dem Schwerpunkt des Körpers verbindenden Ebene.

2) Dass die Drehaxe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers sei in Bezug auf ihren Durchschnittspunkt mit der auf ihr senkrechten Ebene, welche die Krafrichtung enthält.

3) Dass die Entfernung der Kraft von der Drehaxe ebenso gross sei als der Abstand des Schwingungspunktes des Körpers um diese Axe.

Die letzte Bedingung zeigt die Unmöglichkeit, wenn der Schwerpunkt auf der Drehaxe liegt; denn die Kraft müsste dann in unendliche Entfernung rücken.

Der Durchschnittspunkt der Krafrichtung mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt gehenden Ebene wird Mittelpunkt des Stosses genannt; er liegt auf der Linie der Schwingungspunkte.

Man könnte umgekehrt den im Drehen um die Axe begriffenen Körper plötzlich einhalten vermöge einer den Mittelpunkt des Stosses angreifenden Kraft, ohne dass dadurch irgend eine Wirkung auf die Drehaxe ausgeübt würde, wenn die angegebenen Umstände stattfinden.

100. Hätte man nur:

$$\sum xzdm = 0, \sum yzdm = 0, Z = 0;$$

dann wäre der von der Axe auszuhaltende Stoss, wie aus Nro. 98 hervorgeht, eine durch den Ursprung gehende Kraft. In diesem Falle erzeugt daher die Momentankraft, wenn blos der Ursprung fest ist, eine Anfangsdrehung um die z -Axe, als ob diese fest wäre. Ebenso verhält es sich, wenn man irgend eine Zahl Momentankräfte in derselben Ebene hat; denn mit Hülfe des festen Punktes lassen sie sich immer auf eine einzige reduciren.

101. Druck auf die Drehaxe während der Bewegung. — In jedem Augenblick verursacht das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princip's Drucke auf die Drehaxe, welche wir berechnen wie in dem Falle einer Momentankraft den Stoss.

Es seien Xdm , Ydm , Zdm die Componenten der das

Element dm angreifenden stetigen Kraft. Gleichgewicht besteht zwischen allen Kräften:

$$Xdm, Ydm, Zdm$$

und allen:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} dm, -\frac{d^2y}{dt^2} dm, -\frac{d^2z}{dt^2} dm.$$

Die letzte Kraft ist Null, weil die Drehung um die z -Axe geschieht.

Der Abstand irgend eines Punktes des Körpers von der Drehaxe sei r ; der Winkel der x -Axe mit der Projection von r auf die Ebene der x, y sei θ und ω die Winkelgeschwindigkeit. Man hat:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \frac{d\theta}{dt} = \omega;$$

daher:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x \frac{d\omega}{dt}.$$

Setzt man wieder statt aller sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte drei nach den Axen gerichtete und drei Paare in den Coordinatenebenen, so werden die Kräfte:

$$\Sigma Xdm + \omega^2 Mx_1 + My_1 \frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Ydm + \omega^2 My_1 - Mx_1 \frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Zdm.$$

Die Momente der Paare, deren Axen bezüglich nach den Axen der x, y, z gerichtet sind, betragen:

$$\Sigma (yZ - zY)dm - \omega^2 \Sigma yzdm + \frac{d\omega}{dt} \Sigma xzdm,$$

$$\Sigma (zX - xZ)dm + \omega^2 \Sigma xzdm + \frac{d\omega}{dt} \Sigma yzdm,$$

$$\Sigma (xY - yX)dm - \frac{d\omega}{dt} \Sigma r^2 dm.$$

Das letzte Moment ist Null wegen des Gleichgewichts; daher $\frac{d\omega}{dt} = 0$, wenn keine stetige Kraft wirkt. Der Druck auf die Axe wird daher in jedem Augenblick hervorgebracht durch die beiden anderen Paare und die an den Ursprung versetzten Kräfte.

102. Permanente Drehaxen. — Nehmen wir an, die z -Axe sei eine zum Coordinatenursprung gehörende Hauptträgheitsaxe des Körpers; dann ist

$$\Sigma xz dm = 0, \Sigma yz dm = 0.$$

Ferner wirke keine äussere Kraft. Der Druck auf die z -Axe ist jetzt beständig durch den festen Ursprung gerichtet. Deshalb braucht diese Axe nicht fest zu sein, sondern die Drehung, wenn sie um dieselbe begonnen hat, fährt nothwendig so fort, als ob sie fest wäre.

Somit kommt jedem mit einem Körper fest verbundenen Punkt, den man fest macht, die Eigenschaft zu, dass wenn der Körper sich anfänglich dreht um eine zu dem Punkt gehörende Hauptträgheitsaxe und keine Kraft wirkt, die Drehung um diese Axe gleichförmig fortfährt, als wenn sie fest wäre. Dies findet für keine andere Axe statt. Die drei Hauptaxen der Trägheit zu dem festen Punkt heissen deshalb permanente Drehaxen.

Ist der Schwerpunkt des Körpers Ursprung, so hat man $x_1 = 0, y_1 = 0$, wodurch die an ihn versetzten Kräfte Null werden, weshalb dieser Punkt nicht fest zu sein braucht. Man folgert daraus:

Wenn ein ganz freier Körper sich um eine zu seinem Schwerpunkt gehörende Hauptträgheitsaxe dreht und keine Kraft auf ihn wirkt, so setzt er seine Drehung um diese Axe gleichförmig fort.

Die drei permanenten Drehaxen in Bezug auf den Schwerpunkt werden natürliche Drehaxen genannt.

Anfangsbewegung eines Körpers, welcher einen festen Punkt hat, und auf den Momentankräfte wirken.

103. Die den Körper gleichzeitig angreifenden Momentankräfte mögen sein, welche sie wollen, man kann sie immer zusammensetzen in eine durch den festen Punkt gehende Kraft und ein Paar. Die Kraft wird zerstört und die Bewegung durch das Paar allein hervorgebracht. Zerlegen wir dasselbe in drei andere, deren Axen gerichtet seien nach den zu dem festen Punkt gehörenden Hauptträgheitsaxen des Körpers.

Nehmen wir diese zu Axen der x, y, z und bezeichnen durch L, M, N die Momente der drei Seitenpaare.

Wir wissen aus Nro. 41, dass die durch jeden Punkt des Körpers erlangte Geschwindigkeit erhalten werden kann durch Zusammensetzen der Geschwindigkeiten, welche jedes Seitenpaar für sich hervorbringen würde.

Das Paar L liegt in einer senkrechten Ebene gegen die Gerade, die in Bezug auf ihren festen Durchschnittspunkt mit der Ebene Hauptträgheitsaxe ist. Es erzeugt daher nach Nro. 100 eine Drehung um diese Axe. Ihre Winkelgeschwindigkeit beträgt $\frac{L}{A}$ nach Nro. 96, wenn A das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die x -Axe vorstellt.

Bedeutet B, C seine Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der y und z , so bewirken die zwei anderen Paare Drehungen um diese Axen, deren Winkelgeschwindigkeiten durch $\frac{M}{B}, \frac{N}{C}$ ausgedrückt werden. Wir haben daher, wenn $\omega, \omega', \omega''$ die Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen:

$$\omega = \frac{L}{A}, \omega' = \frac{M}{B}, \omega'' = \frac{N}{C}.$$

Diese drei Bewegungen müssen zusammengesetzt werden nach den Regeln für geometrische Bewegungen. Daraus resultirt eine Anfangsdrehung mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2}$ um diejenige Axe, deren Richtung mit den Coordinatenaxen Winkel α, β, γ macht, deren Cosinus mit $\omega, \omega', \omega''$ proportional sind.

Die Gleichung des Centralellipsoids ist:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Der conjugirte Durchmesser in demselben zu der Ebene

$$Lx + My + Nz = 0$$

bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus proportional sind den Grössen $\frac{L}{A}, \frac{M}{B}, \frac{N}{C}$. Die anfängliche Drehaxe ist daher der dieser Ebene zugeordnete Durchmesser.

Eine Senkrechte auf dieselbe Ebene macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie L, M, N . Sie ist deshalb die Axe des stossenden Kräftepaares, und dieses liegt in der Ebene. Somit hat man folgenden Lehrsatz:

Die anfängliche Axe der Drehung eines Körpers mit einem festen Punkt, welche durch ein Momentankräftepaar hervorgebracht wird, ist der Ebene dieses Paares zugeordnete Durchmesser in dem Centralellipsoid, welches zu dem festen Punkt gehört.

Zweifache Bewegung eines freien Körpers.

104. Wenn ein Körper sich frei bewegt in Folge anfänglicher Stösse und beliebiger stetigen Kräfte, so kann man seine Bewegung während eines jeden unendlich kleinen Zeitintervalls betrachten als zusammengesetzt aus Verschiebung und Drehung.

Zu dem Ende nehme man irgend einen Punkt des Körpers und ertheile dem System eine solche Bewegung, dass jeder Punkt desselben eine unendlich kleine Gerade beschreibt, welche gleich und parallel ist der von dem betrachteten Punkt wirklich beschriebenen. Dann halte man diesen Punkt fest und drehe den Körper so lange, bis jeder Punkt die Lage eingenommen hat, welche er am Ende des unendlich kleinen Intervalls einnehmen soll.

Man kann den Punkt, dessen Bewegung jeden Augenblick die Verschiebung des Körpers bestimmen soll, nach Belieben wählen, nur muss er fest mit dem Körper verbunden sein; aber es gewährt grossen Vortheil, wenn man den Schwerpunkt nimmt.

Denn wir haben gezeigt, dass derselbe sich so bewegt, als wenn die ganze Masse des Körpers darin vereinigt wäre und alle Kräfte an ihn versetzt würden. Man kennt daher sogleich Richtung und Grösse der ihm zukommenden Anfangsgeschwindigkeit.

Um die Anfangsbewegung des Körpers vollständig zu kennen, denken wir uns alle gegebenen Kräfte reducirt auf eine den Schwerpunkt angreifende Kraft und ein Paar. Bestimmt man die beiden Bewegungen, welche Kraft und Paar getrennt hervorbringen würden, und setzt dieselben für jeden Punkt zusammen, so erhält man nach Nro. 41 die durch gleichzeitige Wirkung aller Kräfte erzeugte Anfangsbewegung.

Die den Schwerpunkt angreifende Mittelkraft kann zerlegt werden in Kräfte, welche parallel und an allen gleichen Massenelementen des Körpers gleich sind; sie ertheilt folglich allen Punkten gleiche und parallele Geschwindigkeiten oder bewirkt gemeinsame Verschiebung.

Das mittlere Paar kann den Schwerpunkt nicht verrücken, denn die beiden Kräfte, an ihn versetzt, zerstören sich. Die Bewegung, welche das Paar erzeugt, bleibt daher dieselbe, wenn man den Schwerpunkt fest macht. Dann aber darf man die Resultantkraft einführen, da sie durch den festen Punkt zerstört wird, und auf diese Weise hat man das System aller gegebenen Kräfte. Man kann daher die Anfangsdrehung so auffassen, als ob sie hervorgebracht würde durch die in ihren respectiven Angriffspunkten auf den Körper wirkenden Stosskräfte, während dessen Schwerpunkt befestigt wäre.

Somit haben wir folgenden ersten Lehrsatz:

Man kann die Geschwindigkeiten, welche alle Punkte eines freien Körpers augenblicklich annehmen, betrachten als Resultanten der Geschwindigkeiten, welche zwei von einander unabhängigen Bewegungen angehören: nämlich einer Verschiebung, bewirkt durch die an den Schwerpunkt versetzten Stosskräfte, und einer Drehung, bewirkt durch das System der gegebenen, den Körper angreifenden Kräfte, wenn der Schwerpunkt befestigt ist.

Durch diesen Satz sind wir im Stande, die Anfangsbewegung eines Körpers vollständig zu bestimmen, denn wir haben ihre Bestimmung um einen festen Punkt gelernt.

Was die fernere Bewegung betrifft, so bewegt sich der Schwerpunkt stets so, als ob alle Masse in ihm vereinigt wäre und alle stetigen Kräfte ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung daran versetzt würden. Diese Kräfte hängen aber im Allgemeinen von der Lage der Punkte und dadurch von der Drehung ab; weshalb man die Bewegung des Schwerpunkts nicht getrennt berechnen kann, den Fall ausgenommen, wo die Kräfte constante Grössen und Richtungen haben wie z. B. die Schwere.

Uebrigens bleibt der Lehrsatz auch für die stetigen Kräfte

wahr. In der That, betrachten wir den Körper in irgend einem Augenblick. Man kann sich denken, dass er aus der Ruhe hervorginge, indem solche Momentankräfte auf ihn wirkten, welche jedem Punkt die Geschwindigkeit ertheilen würden, die er hat, und ausserdem noch die stetigen Kräfte. Die letzten bringen während eines unendlich kleinen Zeitintervalls nur unendlich kleine Geschwindigkeiten hervor und können betrachtet werden als Momentankräfte, welche am Anfang eines jeden unendlich kleinen Intervalls wirken. Nach dem in Nro. 41 enthaltenen Princip hat man die Geschwindigkeiten, welche beide Kräftesysteme getrennt hervorbringen, zu bestimmen und sie nachher zusammenzusetzen. Das erste System bewirkt die Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick wirklich stattfand. Das zweite erzeugt eine unendlich kleine Verschiebungsgeschwindigkeit, die man dadurch erhält, dass man alle stetigen Kräfte an den Schwerpunkt versetzt, und ferner eine Drehung um den fest gedachten Schwerpunkt, indem alle Kräfte wirken, wie sie gegeben sind.

Denkt man sich daher durch den Schwerpunkt des Körpers drei rechtwinklige, parallel zu sich bleibende Axen, so bewegt sich ihr Durchschnittspunkt so, als ob die ganze Körpermasse in demselben vereinigt wäre und alle momentanen sowie stetigen Kräfte daran angriffen. Die Bewegung des Körpers in Bezug auf diese Axen ist dieselbe, als wenn ihr Durchschnittspunkt fest wäre und alle Kräfte an denselben Angriffspunkten und gerade so wirkten wie bei der wirklichen Bewegung.

105. Anwendung auf das schwere Ellipsoid. — Nehmen wir an, ein homogenes Ellipsoid empfangen einen Stoss, dessen Richtung enthalten sei in der Ebene zweier seiner Hauptträgheitsaxen in Bezug auf den Schwerpunkt, welche seine rechtwinkligen Axen sind. Darauf werde das Ellipsoid der Wirkung der Schwere überlassen. Bezeichne μv die Bewegungsgrösse, welche die Momentankraft misst, und f den Abstand der Krafrichtung vom Mittelpunkt; b, c seien die beiden Halbaxen, in deren Ebene die Krafrichtung liegt, a die dritte Halbaxe; M bedeute die Masse des Ellipsoids und V die Anfangsgeschwindigkeit seines Schwerpunkts.

Der Schwerpunkt, d. i. hier das Centrum des Ellipsoids bewegt sich so, als wenn die Masse M in demselben vereinigt wäre und anfänglich die Kraft μv auf ihn wirkte sowie nachher die Schwere. Er erhält daher zuerst die Geschwindigkeit:

$$V = \frac{\mu v}{M}$$

nach paralleler Richtung mit der des Stosses, und folglich beschreibt er eine diese Richtung tangirende Parabel, deren Gleichung sich berechnet wie für einen freien Punkt.

Um die Bewegung des Ellipsoids in Bezug auf drei durch seinen Schwerpunkt mit festen Richtungen parallele Axen zu erhalten, denke man sich den Schwerpunkt fest und lasse Stosskraft und Schwere wirken. Die Schwere kann ausser Acht bleiben, weil der Schwerpunkt fest ist, und man hat blos die durch den Stoss bewirkte Drehung zu bestimmen. Die Stosskraft liegt in einer senkrechten Ebene auf eine Gerade, welche Hauptträgheitsaxe ist in Bezug auf ihren festen Durchschnittpunkt mit der Ebene. Daher findet die Drehung ohne Ende gleichförmig um diese Axe statt. Ihre Winkelgeschwindigkeit ω wird dadurch erhalten, dass man das Moment $\mu v f$ der Kraft theilt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehaxe. Daher:

$$\omega = \frac{5 \mu v f}{M(b^2 + c^2)}$$

oder durch Einführen der Anfangsgeschwindigkeit V des Schwerpunkts:

$$\omega = \frac{5 V f}{b^2 + c^2}.$$

Die Drehaxe rückt parallel fort, und der Körper dreht sich gleichförmig um dieselbe. Ihre Lage ist bekannt, weil man die Bewegung des Schwerpunkts kennt. Es bestimmt sich daher leicht die Lage aller Punkte des Ellipsoids für irgend einen Augenblick.

Hat man eine volle oder hohle Kugel, die entweder homogen ist oder aus homogenen concentrischen Schichten besteht, dann ist jeder Durchmesser eine Hauptaxe der Trägheit. Die Drehung geschieht um denjenigen, welcher senkrecht steht auf der durch das Centrum und die Richtung der Stosskraft geführten Ebene, und die Richtung dieser Drehaxe bleibt parallel zu sich selbst.

Die Drehung einer solchen Kugel wird nicht geändert, wenn alle ihre Punkte gegen andere durch Kräfte hingezogen werden, welche den Massen und einer Function der Entfernung proportional sind, weil die Resultante der durch irgend einen Punkt auf die ganze Kugelmasse ausgeübten Wirkungen durch ihren Schwerpunkt geht. Dies würde aber nicht mehr der Fall sein, wenn der Körper noch so wenig von der Kugelform verschieden wäre, was z. B. bei der Erde stattfindet.

Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

106. In den Vorbemerkungen ist der Beweis dafür enthalten, dass jede Verrückung eines starren Systems, welches einen festen Punkt hat, erzielt werden kann vermöge Drehung um eine gewisse durch diesen Punkt gehende Axe; was nicht hindert, dass dasselbe auf unzählig viele andere Arten möglich ist. Daraus folgte, jede stetige Verrückung lasse sich hervorbringen durch eine Folge unendlich kleiner Drehungen um stetig variirende Axen. Dort wurden nur bequeme Verfahrensarten beabsichtigt, um gegebene Versetzungen zu erreichen ohne Rücksicht auf ihre Ursachen; bei verschiedenen Gelegenheiten haben wir mit Nutzen davon Gebrauch gemacht. Wir wollen uns jetzt mit Bestimmung der wirklichen Bewegung eines Körpers beschäftigen, der einen festen Punkt hat und auf den gegebene Kräfte wirken.

Hierzu wählen wir drei rechtwinklige Geraden, welche durch den festen Punkt gehen und unveränderlich mit dem Körper verbunden sind. Die Aufgabe kommt auf Bestimmung der Bewegung dieser Geraden hinaus. Ihre Lage bestimmt sich, wie man in den Vorbemerkungen gesehen hat, entweder durch die Winkel, welche jede von ihnen mit drei festen rechtwinkligen Axen macht, oder vortheilhafter durch drei andere Winkel.

Zunächst betrachten wir Hilfsgrößen zur Bestimmung der Verrückung, welche die drei mit dem Körper fest verbundenen Axen während unendlich kleiner Zeit erleiden. Wären diese Größen allgemein bekannt, so könnte man durch Integration von einer Lage auf irgend eine andere übergehen.

Bezeichnen X_1 , Y_1 , Z_1 die Axen in irgend einer Lage und X' , Y' , Z' ihre unendlich nahe Lage nach der Zeit dt . Die neue Lage ist bestimmt, wenn man die Winkel kennt,

welche jede der Axen X', Y', Z' mit X_1, Y_1, Z_1 macht, oder nur die Cosinus derselben; und diese wollen wir einführen. Die drei Winkel $X_1 X', Y_1 Y', Z_1 Z'$ sind unendlich klein von der ersten Ordnung; ihre Cosinus sind daher gleich der Einheit mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung. Demnach bleiben sechs unendlich kleine Cosinus der ersten Ordnung zu bestimmen, da ihre Winkel sich vom rechten um unendlich Kleine dieser Ordnung unterscheiden. Man erkennt leicht, dass dieselben zu zwei gleich und entgegengesetzt sind. In der That, die Ebene $Z' X'$ z. B. ist unendlich wenig geneigt gegen $Z_1 X_1$; die Projection von $Z' X'$ auf $Z_1 X_1$ ist daher ein rechter Winkel, wenn man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung weglässt. Ebenso hat man die Winkel $Z' X_1, X' Z_1$ als ihren Projectionen gleich zu betrachten. Sie ergänzen sich folglich zu zwei Rechten und haben deshalb gleiche und entgegengesetzte Cosinus. Gleiches gilt von den vier anderen Winkeln; daher:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos Y' Z_1 = -\cos Z' Y_1, \\ \cos Z' X_1 = -\cos X' Z_1, \\ \cos X' Y_1 = -\cos Y' X_1. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Lage des Körpers nach der Zeit dt reichen demnach drei unendlich kleine Grössen hin, welche wir so schreiben:

$$\cos Y' Z_1 = p dt, \cos Z' X_1 = q dt, \cos X' Y_1 = r dt.$$

Sie werden leicht ausgedrückt vermöge der Winkel, welche die Axen X_1, Y_1, Z_1 mit den festen X, Y, Z einschliessen. Indem wir die Bezeichnung der Vorbemerkungen beibehalten, haben die durch Z_1 und Y' mit den festen Axen gebildeten Winkel bezüglich folgende Cosinus:

$$c, c', c'' \text{ und } b + db, b' + db', b'' + db''.$$

Da nun:

$$cb + c'b' + c''b'' = 0,$$

so hat man:

$$\cos Y' Z_1 = cdb + c'db' + c''db''.$$

Ebenso die beiden anderen; daher:

$$(2) \quad \begin{cases} p dt = cdb + c'db' + c''db'', \\ q dt = adc + a'dc' + a''dc'', \\ r dt = bda + b'da' + b''da''. \end{cases}$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen können unter anderer Form dargestellt werden. Aus

$$cb + c'b' + c''b'' = 0$$

folgt durch Differenzieren:

$$cdb + c'db' + c''db'' = -bdc - b'dc' - b''dc''.$$

Statt der beiden anderen Glieder erhält man:

$$-cda - c'da' - c''da'' \text{ und } -adb - a'db' - a''db''.$$

Um die Lage der beweglichen Axen durch drei Winkel φ , ψ , θ zu bestimmen, drückt man p , q , r durch diese Winkel aus. Dies geschieht vermöge folgender in den Vorbemerkungen gegebenen Formeln:

$$(3) \quad \begin{cases} p dt = \cos \varphi d\theta + \sin \varphi \sin \theta d\psi, \\ q dt = -\sin \varphi d\theta + \cos \varphi \sin \theta d\psi, \\ r dt = d\varphi + \cos \theta d\psi. \end{cases}$$

Es genügt daher, dass die Bedingungen der Bewegung drei andere Gleichungen zwischen p , q , r , θ , φ , ψ liefern, damit das Problem auf Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen zurückgebracht sei.

107. Augenblickliche Drehaxe. — Untersuchen wir, ob es Punkte giebt, die während unendlich kleiner Zeit dt ihren Ort im Raum nicht ändern, sei es nun, dass diese Punkte dem System bereits angehören, oder dass man sie erst unveränderlich damit verbinden müsste. Wenn ein Punkt ohne Geschwindigkeit vorhanden wäre, so würden alle Punkte auf der durch ihn und den festen Ursprung gehenden Geraden in demselben Falle sein, und die Bewegung während der Zeit dt würde bestehen in einer Drehung um diese Gerade. Um ihre Richtung zu finden, wenn es eine solche giebt, braucht man offenbar blos die feste durch den Ursprung gehende Gerade zu suchen, welche innerhalb des Intervalls dt ihre Winkel mit den sich bewegendenden Axen nicht ändert.

Zu Anfang des Intervalls seien diese Axen in der Lage X_1 , Y_1 , Z_1 ; nach der Zeit dt sei X' , Y' , Z' ihre Lage. Die gesuchte Gerade bilde mit den ersten die Winkel α , β , γ . Die Cosinus ihrer Winkel mit X' , Y' , Z' werden durch die gewöhnliche Formel erhalten; und zwar findet man mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta \cos X' Y_1 + \cos \gamma \cos X' Z_1, \\ \cos \beta + \cos \alpha \cos Y' X_1 + \cos \gamma \cos Y' Z_1, \\ \cos \gamma + \cos \alpha \cos Z' X_1 + \cos \beta \cos Z' Y_1. \end{aligned}$$

Diese Werthe sollen von $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ nicht verschieden sein. Dazu wird es erfordert und reicht hin, dass die zwei letzten Summanden eines jeden sich aufheben. Dies giebt mit Rücksicht auf (1):

$$\frac{\cos \alpha}{\cos Y' Z_1} = \frac{\cos \beta}{\cos Z' X_1} = \frac{\cos \gamma}{\cos X' Y_1}$$

oder, indem man p , q , r einführt:

$$\frac{\cos \alpha}{p} = \frac{\cos \beta}{q} = \frac{\cos \gamma}{r}.$$

Diese Gerade, wenn man sie mit dem System unveränderlich verbindet, hat zu den als fest betrachteten Richtungen X_1 , Y_1 , Z_1 eine Lage, welche von dt nicht abhängt. Daher haben alle ihre Punkte dieselbe Lage im Raume zu allen von der betrachteten unendlich wenig entfernten Epochen. Die Bewegung dieser mit dem Körper verbundenen Linie im Raum ist nicht absolut Null, weil die unendlich Kleinen zweiter Ordnung vernachlässigt wurden, aber sie ist von derselben Ordnung. Die Geschwindigkeit ihrer Punkte beträgt Null in dem betrachteten Augenblick. Und man darf die wirkliche Bewegung des Körpers mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung während unendlich kleiner Zeit ansehen als Drehung um eine feste Axe, welche im Allgemeinen von einer Epoche zur anderen wechselt und deshalb augenblickliche Drehaxe genannt wird.

Die Cosinus der Winkel, welche dieselbe jeden Augenblick mit den beweglichen Axen bildet, sind p , q , r proportional und haben daher folgende Werthe:

$$\begin{aligned} \cos X_1 &= \pm \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos Y_1 &= \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos Z_1 &= \pm \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{aligned}$$

Dabei muss man alle oberen oder alle unteren Zeichen nehmen.

Wenn p , q , r constant sind oder nur constante Verhält-

nisse haben, so behält die augenblickliche Drehaxe in Bezug auf den Körper beständig dieselbe Lage. Dann sind also immer die nämlichen Punkte des Systems ohne Geschwindigkeit, oder die Drehaxe ändert auch ihre Lage im Raum nicht. Das System kann folglich nur eine Umdrehungsbewegung um diese Axe haben, welche nicht mehr augenblicklich ist sondern permanent. Die Umkehrung liegt auf der Hand. Wir werden diese Wahrheiten bald durch andere Betrachtungen wiederfinden.

Für die Winkel der augenblicklichen Drehaxe mit den festen Axen X, Y, Z hat man:

$$\cos X = \pm \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos Y = \pm \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos Z = \pm \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Die Grössen p, q, r sind im Allgemeinen veränderlich. Man kann daher die Bewegung betrachten als stetige Folge von unendlich kleinen Drehungen um Axen, welche durch den festen Punkt gehen und ihre Lage sowohl im Körper als im absoluten Raum auf stetige Weise ändern.

108. Geschwindigkeit irgend eines Punktes. — Die Geschwindigkeit irgend eines Punktes im Körper kann zerlegt werden parallel mit den drei festen Axen oder, wenn man es vorzieht, parallel mit den beweglichen Axen in der Lage, welche sie in dem Augenblick einnehmen, den man betrachtet. Die Werthe der ersten Componenten sind:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Die zweiten Componenten beziehen sich auf Axen von veränderlicher Richtung und können daher nicht dargestellt werden durch die Ableitungen der Coordinaten in Bezug auf diese Axen. Wir wollen sie mit u, v, w bezeichnen.

Die Gleichungen, welche beide Coordinatensysteme verknüpfen, sind:

$$\begin{aligned}x &= ax_1 + by_1 + cz_1, \\y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1.\end{aligned}$$

Man erhält hieraus, indem man beachtet, dass x_1, y_1, z_1 für denselben Punkt des Körpers constant bleiben, folgende Werthe der ersten Componenten:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{db}{dt} + z_1 \frac{dc}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = x_1 \frac{da'}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{dc'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = x_1 \frac{da''}{dt} + y_1 \frac{db''}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Um die Componente nach der Axe X_1 zu erhalten, muss man die Summe der Projectionen darauf bilden. Das giebt:

$$a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt},$$

welcher Ausdruck sich reducirt auf $qz_1 - ry_1$. Für die beiden anderen verfährt man ebenso und erhält:

$$(5) \quad \begin{cases} u = qz_1 - ry_1, \\ v = rx_1 - pz_1, \\ w = py_1 - qx_1. \end{cases}$$

Diese Formeln liefern sogleich die Punkte, deren Geschwindigkeit Null ist. Man setzt zu dem Ende:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

und findet:

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Sie liegen demnach sämmtlich auf einer durch den festen Punkt gehenden Geraden, welche mit den beweglichen Axen Winkel macht, deren Cosinus mit p, q, r proportional sind. Die wirkliche Bewegung des Körpers besteht also während unendlich kleiner Zeit in einer Drehung um diese Gerade. Somit haben wir das schon gefundene Resultat wieder; doch hatten wir bei Bildung der Werthe für u, v, w einen wichtigeren Zweck im Auge als diese Verification.

109. Grösse und Richtung der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit. — Um die Drehgeschwindigkeit zu erhalten, braucht man nur die absolute Geschwindigkeit irgend eines Punktes zu suchen und sie durch seinen Ab-

stand von der augenblicklichen Drehaxe zu theilen. Nehmen wir den Punkt, welcher auf Z_1 in der Entfernung 1 vom Ursprung liegt. Seine Coordinaten sind:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 1.$$

Die Gleichungen (5) geben für ihn:

$$u = q, v = -p, w = 0;$$

seine absolute Geschwindigkeit beträgt daher $\sqrt{p^2 + q^2}$. Der Abstand desselben von der augenblicklichen Drehaxe ist der

Sinus ihres Winkels mit Z_1 oder $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. Demnach

hat die Winkelgeschwindigkeit, welche wir durch ω bezeichnen, den Werth:

$$(6) \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Es ist nun leicht, ihre Componenten um die beweglichen Axen zu finden. Ein starres System lässt sich bekanntlich in die Lage, in welche es durch unendlich kleine Drehung um eine Axe kommt, auch bringen durch drei in beliebiger Ordnung sich folgende Drehungen um rechtwinklige Axen. Diese Drehungen heissen die componirenden der ersten. Die Winkel, welche ihnen entsprechen, sind beziehlich gleich den Producten des wirklichen Drehungswinkels in die Cosinus der Winkel der augenblicklichen Drehaxe mit den drei rechtwinkligen Axen. Wir wissen ferner: wenn man unter Richtung einer Drehaxe immer diejenige versteht, in Bezug auf welche die Bewegung von links nach rechts vorgehend erscheint, dann geben die Producte der absoluten Drehung in die Cosinus der Winkel ihrer Axenrichtung mit den drei positiven Axen durch Grösse und Zeichen Werth und Richtung der componirenden Drehungen.

In dem vorliegenden Falle hat die Drehung während der unendlich kleinen Zeit dt den Werth ωdt . Indem man aus diesem und aus den Werthen der Componenten den gemeinsamen Factor dt weglässt, bezieht man sie alle auf die Zeiteinheit und hat dann die Componenten der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit. Ihre Werthe sind bezüglich:

$$+p, +q, +r \text{ oder } -p, -q, -r,$$

je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen der Ausdrücke für $\cos X_1, \cos Y_1, \cos Z_1$ nehmen muss. Es ist uner-

länglich dies zu bestimmen, damit man die Drehrichtung kenne. Dazu genügt es, zu wissen, ob die z. B. zur Axe der positiven z_1 gehörende Drehcomponente $+r$ ist oder $-r$.

Zu dem Ende legen wir durch den Ursprung eine Ebene senkrecht auf die augenblickliche Drehaxe. Wir nehmen in dieser Ebene einen Punkt mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 , verbinden denselben mit dem Ursprung und betrachten die Bewegung der Projection seines Leitstrahls auf die Ebene $X_1 Y_1$. Wir wissen: die Axe dieser Bewegung hat die Richtung der positiven z_1 -Axe, wenn die augenblickliche Drehaxe einen spitzen Winkel mit dieser macht; sie hat dagegen die Richtung der negativen z_1 -Axe, wenn derselbe Winkel stumpf ist. Das Zeichen des Cosinus des Winkels der augenblicklichen Drehaxe mit der Axe der positiven z_1 stimmt daher überein mit dem Zeichen der Drehung der Projection unseres Leitstrahls, sofern man diese als positiv betrachtet, wenn sie stattfindet von der Axe der positiven x_1 gegen die der positiven y_1 hin.

Die Geschwindigkeitscomponenten des in der senkrechten Ebene gewählten Punktes parallel mit X_1, Y_1, Z_1 seien u, v, w . Seine Projection auf die Ebene $X_1 Y_1$ hat die Coordinaten x_1, y_1 und die Geschwindigkeitscomponenten u, v . Die Bewegung ihres Leitstrahls ist den Vorbemerkungen, Seite 11 zufolge gerichtet von der Axe der positiven x_1 gegen die der positiven y_1 , wenn $v x_1 - u y_1$ positiv, und umgekehrt, wenn dieser Ausdruck negativ ist. Sein Zeichen stimmt daher überein mit dem Zeichen des Cosinus des Winkels, den die Richtung der augenblicklichen Drehaxe mit der Axe der positiven z_1 macht.

Wir wollen deshalb $v x_1 - u y_1$ bilden für einen besonderen Punkt der senkrechten Ebene, z. B. für einen Punkt ihrer Spur auf $X_1 Y_1$. Für einen solchen Punkt hat man $z_1 = 0$, also:

$$v = r x_1, \quad u = -r y_1 \quad \text{und} \quad v x_1 - u y_1 = r (x_1^2 + y_1^2).$$

Das Zeichen ist das von r . Die Componente der Drehgeschwindigkeit in der Ebene $X_1 Y_1$ wird folglich der Grösse und dem Zeichen nach durch r ausgedrückt; ebenso die beiden anderen durch q und p . Und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung OI der augenblicklichen Drehaxe mit

den positiven X_1, Y_1, Z_1 macht, stimmen im Zeichen überein respective mit p, q, r . Ihre Werthe sind daher:

$$(7) \quad \begin{cases} \cos IOX_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IOY_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IOZ_1 = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{cases}$$

Die Wurzel ist absolut gemeint. Die Cosinus der Winkel mit den festen Axen haben folgende Werthe:

$$(8) \quad \begin{cases} \cos IOX = \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IOY = \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IOZ = \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{cases}$$

110. Componenten der beschleunigenden Kraft irgend eines Punktes. — Diese Componenten parallel mit drei beliebigen festen Richtungen sind die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit. Wir wollen aber diejenigen Richtungen wählen, welche die beweglichen Axen in irgend einem Augenblick haben. Die Componenten der Geschwindigkeit nach diesen Axen sind:

$$u, v, w.$$

Nach der Zeit dt werden sie:

$$u + du, \quad v + dv, \quad w + dw$$

parallel mit den Richtungen X', Y', Z' , welche dann die beweglichen Axen haben. Um die Componenten nach den Axen X_1, Y_1, Z_1 zu erhalten, muss man diese Werthe auf jede derselben projiciren. Zieht man nachher respective u, v, w ab und theilt durch dt , so hat man die Componenten der beschleunigenden Kraft parallel mit X_1, Y_1, Z_1 . Wir bezeichnen dieselben durch u', v', w' . Die Gleichungen (5) geben:

$du = z_1 dq - y_1 dr, \quad dv = x_1 dr - z_1 dp, \quad dw = y_1 dp - x_1 dq.$
Die Cosinus, deren man bedarf um die Projectionen zu bilden, sind die Einheit und die in den Gleichungen (1) stehenden,

welche durch $p dt$, $q dt$, $r dt$ bezeichnet wurden. Man findet mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen:

$$(9) \quad \begin{cases} u' = z_1 \frac{dq}{dt} - y_1 \frac{dr}{dt} + q(py_1 - qx_1) - r(rx_1 - pz_1), \\ v' = x_1 \frac{dr}{dt} - z_1 \frac{dp}{dt} + r(qz_1 - ry_1) - p(py_1 - qx_1), \\ w' = y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt} + p(rx_1 - pz_1) - q(qz_1 - ry_1). \end{cases}$$

111. Gleichungen der Bewegung. — Bezeichnet man durch X_1 , Y_1 , Z_1 die mit den beweglichen Axen parallelen Componenten der äusseren bewegendes Kraft an irgend einem Punkt, so liefert das Princip von d'Alembert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma (y_1 w' - z_1 v') dm &= \Sigma (y_1 Z_1 - z_1 Y_1), \\ \Sigma (z_1 u' - x_1 w') dm &= \Sigma (z_1 X_1 - x_1 Z_1), \\ \Sigma (x_1 v' - y_1 u') dm &= \Sigma (x_1 Y_1 - y_1 X_1). \end{aligned}$$

Die Summen der ersten Glieder erstrecken sich über die ganze Masse. Die Summen der zweiten Glieder beziehen sich auf alle äusseren Kräfte, sowohl diejenigen, welche alle Punkte des Körpers angreifen, als jene, welche an einer endlichen Zahl von besonderen Punkten angebracht sind. Die äusseren Kräfte können jeden Augenblick ausgedrückt werden mittelst der Elemente, welche die Lage des Körpers bestimmen. Die zweiten Glieder sind daher bekannte Functionen der Winkel φ , ψ , θ und der Zeit, wenn die Kräfte von dieser abhängen.

Die ersten Glieder nehmen eine sehr einfache Gestalt an, wenn man die Hauptträgheitsaxen des Körpers zu Axen X_1 , Y_1 , Z_1 wählt. Die Summen $\Sigma y_1 z_1 dm$, $\Sigma z_1 x_1 dm$, $\Sigma x_1 y_1 dm$ werden dadurch Null. Bedeuten A , B , C die respectiven Hauptträgheitsmomente des Körpers und L , M , N die bekannten Functionen, welche die zweiten Glieder vorstellen; so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + L, \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A) rp + M, \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq + N. \end{cases}$$

Diese in Verbindung mit (3) bilden ein System von sechs Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welches die sechs Functionen $p, q, r, \varphi, \psi, \theta$ von t bestimmt. Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmen die sechs Constanten.

Verschiedene Eigenschaften dieser Bewegung für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken.

112. Anwendung des Princip's der Flächen. — Die Geschwindigkeiten, welche zu irgend einer Epoche sämtlichen Punkten des um den festen Punkt beweglichen Körpers zukommen, können augenblicklich hervorgebracht werden durch Momentankräfte, die auf den Körper wirken, während derselbe in der gerade stattfindenden Lage ruht. Alle diese Kräfte lassen sich vermöge des festen Punktes auf ein Paar reduciren. Dieses Paar ist identisch mit demjenigen, welches aus den Bewegungsgrössen aller Punkte des Körpers resultirt. Zerlegt man jedes der beiden Paare in drei andere, deren Axen nach festen rechtwinkligen Geraden gerichtet sind, so stimmen auch die Seitenpaare überein.

Das Princip der Flächen lehrt, dass wenn keine äusseren Kräfte wirken, die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf drei feste Axen constant sind und daher ein constantes mittleres Moment mit constanter Axenrichtung geben. Die Momentankräfte, welche jeden Augenblick dem Körper, wenn derselbe in der gerade stattfindenden Lage ruhte, die Geschwindigkeiten ertheilen würden, welche er wirklich besitzt, lassen sich folglich auf ein Paar mit constanter Axe und constantem Moment reduciren. Wir wollen Axe und Moment bestimmen.

Zerlegen wir deshalb die Bewegungsgrössen in irgend einem Zeitpunkt nach den mit dem Körper festen Hauptträgheitsaxen, auf welchen wir im Folgenden immer die x_1, y_1, z_1 zählen wollen. Die Momente der resultirenden Seitenpaare werden ausgedrückt durch:

$$\Sigma(y_1 w - z_1 v) dm, \quad \Sigma(z_1 u - x_1 w) dm, \quad \Sigma(x_1 v - y_1 u) dm.$$

Indem man für u, v, w die Werthe der Gleichungen (5) setzt, findet man:

$$(11) \quad \begin{cases} \Sigma (y_1 w - z_1 v) dm = Ap, \\ \Sigma (z_1 u - x_1 w) dm = Bq, \\ \Sigma (x_1 v - y_1 u) dm = Cr; \end{cases}$$

A, B, C bezeichnen die Hauptträgheitsmomente.

Diese Grössen sind nicht constant, denn die Axen der x_1, y_1, z_1 sind nicht fest; dagegen ist die Summe ihrer Quadrate constant, weil das resultirende Moment constant ist. Bezeichnen wir seinen Werth durch k , so haben wir:

$$(12) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2.$$

Kennt man den Anfangszustand des Körpers, d. h. Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeiten desselben oder statt der letzten die hervorbringenden Momentankräfte, so kennt man auch die Anfangswerthe von Ap, Bq, Cr und folglich von p, q, r .

Die Axe des mittleren Paares der Bewegungsgrössen habe die Richtung OK . Folgende Gleichungen bestimmen diese Richtung in Bezug auf die beweglichen Axen:

$$(13) \quad \cos KOX_1 = \frac{Ap}{k}, \quad \cos KOY_1 = \frac{Bq}{k}, \quad \cos KOZ_1 = \frac{Cr}{k}.$$

In Bezug auf die festen Axen hat man:

$$(14) \quad \begin{cases} \cos KOX = \frac{Aap + Bbq + Ccr}{k}, \\ \cos KOY = \frac{Aa'p + Bb'q + Cc'r}{k}, \\ \cos KOZ = \frac{Aa''p + Bb''q + Cc''r}{k}. \end{cases}$$

Die Zähler dieser drei Quotienten sind constant, weil OK fest ist.

Die Formeln (11) zeigen, was schon bewiesen wurde, dass die Cosinus der Winkel, welche die augenblickliche Drehaxe macht mit X_1, Y_1, Z_1 , dieselben Zeichen haben wie p, q, r .

Denn die Componenten der augenblicklichen Drehung um die Richtungen X_1, Y_1, Z_1 sind jene Drehungen, welche die Seitenpaare Ap, Bq, Cr erzeugen würden. Sie haben folglich gleiche Zeichen mit diesen Paaren, also mit p, q, r .

113. Anwendung des Princip's der lebendigen Kräfte. — Das Princip der lebendigen Kräfte bleibt geltend, wenn feste Punkte im System vorhanden sind, und man braucht auf die von ihnen geäusserten Kräfte keine Rücksicht zu neh-

men. Im vorliegenden Fall, wo keine äusseren Kräfte wirken, ist die Summe der lebendigen Kräfte constant. Bezeichne h ihren Werth; derselbe ist bekannt, wenn man den Anfangszustand des Körpers kennt. Das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes x_1, y_1, z_1 beträgt:

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2(y_1^2 + z_1^2) + q^2(z_1^2 + x_1^2) + r^2(x_1^2 + y_1^2) \\ - 2qry_1z_1 - 2rpz_1x_1 - 2pqx_1y_1.$$

Durch Multipliciren mit dm und Integriren über die ganze Ausdehnung der Masse erhält man die constante Summe h der lebendigen Kräfte. Man findet:

$$(15) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Nimmt man zu (12) und (15) die Bedingung hinzu, dass die Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ constant sein soll, so hat man drei Gleichungen zwischen p, q, r , wodurch diese Grössen bestimmt werden, wenn A, B, C ungleich sind. Die Drehaxe ist dann fest. Den Gleichungen (10) zufolge müssen zwei von den Grössen p, q, r Null sein, weil dp, dq, dr, L, M, N sämmtlich Null sind. Die Bewegung geschieht daher um eine der Hauptträgheitsaxen, wie man leicht vorhersehen konnte.

114. Winkel der augenblicklichen Drehaxe und der Axe des mittleren Paares. — Bezeichnet ε den Winkel beider Axen, so ergeben die Cosinus ihrer Winkel mit Z_1, Y_1, Z_1 :

$$\cos \varepsilon = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{k \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

oder:

$$\cos \varepsilon = \frac{h}{k\omega}.$$

Daher:

$$\omega \cos \varepsilon = \frac{h}{k};$$

was die merkwürdige Eigenschaft zeigt, dass die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eine constante Componente hat um die Axe des resultirenden Paares, dessen Ebene die der grössten Flächeninhalte oder die unveränderliche Ebene ist.

115. Lage der augenblicklichen Drehaxe im Centralellipsoid. — Das Centralellipsoid hat die Gleichung:

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1.$$

Die Normale zu irgend einem Punkt x_1, y_1, z_1 desselben macht mit den beweglichen Axen Winkel, deren Cosinus den Grössen Ax_1, By_1, Cz_1 proportional sind.

Die Cosinus der Winkel, welche die Axe des mittleren Paares mit denselben Axen bildet, sind proportional mit Ap, Bq, Cr . Beide Geraden fallen daher zusammen, wenn $\frac{x_1}{p} =$

$\frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$, d. h. wenn der nach dem Punkt x_1, y_1, z_1 geführte Radius des Ellipsoids zusammenfällt mit der augenblicklichen Drehaxe. Somit hat man folgenden von Poinsoth gegebenen Satz:

Legt man an das Centralellipsoid eine tangirende Ebene parallel mit der Ebene des resultirenden Paares, so ist der Leitstrahl nach dem Berührungspunkt derselben die augenblickliche Drehaxe.

116. Die Winkelgeschwindigkeit als Function des Radius des Centralellipsoids. — Den Punkt, in welchem die augenblickliche Drehaxe durch das Centralellipsoid geht, nennen wir den Pol der Drehung. Seine Coordinaten sind p, q, r proportional. Bezeichnen wir den Abstand desselben vom Mittelpunkt durch R und durch P das Perpendikel vom Mittelpunkt auf die tangirende Ebene im Pol; so bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r} \\ = \frac{\sqrt{Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{A^2x_1^2 + B^2y_1^2 + C^2z_1^2}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}.$$

Die drei letzten Glieder ergeben:

$$\frac{R}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{Pk}; \text{ daher } \omega = R \sqrt{h}, P = \frac{\sqrt{h}}{k}.$$

Hieraus folgen mehrere wichtige Wahrheiten, welche man Poinsoth verdankt.

Die Gleichung $\omega = R \sqrt{h}$ lehrt:

Die Winkelgeschwindigkeit ist proportional der Länge desjenigen Radius des Ellipsoids, um welchen augenblicklich die Drehung stattfindet.

Die Gleichung $P = \frac{\sqrt{h}}{k}$ zeigt, dass das Perpendikel aus dem festen Punkt auf die tangirende Ebene im Pol constant ist. Diese Ebene bleibt parallel zu der festen Ebene des mittleren Paares; sie bleibt daher selbst fest. Man hat somit den anderen Satz:

Das Centralellipsoid tangirt beständig die Ebene, welche parallel ist zur Ebene des mittleren Paares und von dem festen Punkt absteht um die Strecke $\frac{\sqrt{h}}{k}$. Sein Berührungspunkt mit derselben ist der Pol der Drehung und hat folglich keine gleitende Bewegung auf der festen Ebene.

Diese Eigenschaft gewährt eine erste sehr klare geometrische Vorstellung der Bewegung des Körpers.

117. Poloide. — Bewegt man eine Ebene so, dass sie immer das fest gedachte Centralellipsoid und eine concentrische Kugel vom Halbmesser $\frac{\sqrt{h}}{k}$ tangirt, dann bildet nach dem letzten Satze der Ort ihrer Berührungspunkte mit dem Ellipsoid die Curve der Pole auf diesem. Sie liegt symmetrisch gegen zwei der Hauptebenen und wird in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen des Körpers durch nachstehende Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 &= 1, \\ A^2x_1^2 + B^2y_1^2 + C^2z_1^2 &= \frac{k^2}{h}; \end{aligned}$$

aus welchen folgt

(16) $A(k^2 - Ah)x_1^2 + B(k^2 - Bh)y_1^2 + C(k^2 - Ch)z_1^2 = 0$: eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Hauptaxen die des Ellipsoids sind. Diese bildet in Bezug auf den Körper den Ort aller augenblicklichen Drehaxen.

Um die Richtung ihrer beiden Flächenäste zu bestimmen, sei A das grösste Trägheitsmoment und C das kleinste. Man findet leicht:

$$(17) \quad \begin{cases} k^2 - Ah = B(B - A)q^2 + C(C - A)r^2, \\ k^2 - Bh = C(C - B)r^2 + A(A - B)p^2, \\ k^2 - Ch = A(A - C)p^2 + B(B - C)q^2. \end{cases}$$

Daher:

$$k^2 - Ah < 0, \quad k^2 - Ch > 0.$$

Diese zwei Ungleichheiten ergeben sich auch unmittelbar, weil $\frac{h}{k^2}$ das Quadrat der Entfernung des Mittelpunkts ist von der Tangentialebene des Ellipsoids durch den Punkt x_1, y_1, z_1 ; woraus folgt $\frac{h}{k^2} > \frac{1}{A}$, $\frac{h}{k^2} < \frac{1}{C}$.

Demnach sind die elliptischen Schnitte des Kegels senkrecht auf die Axe der x_1 , wenn man hat:

$$k^2 - Bh > 0,$$

und senkrecht auf die Axe der z_1 , wenn:

$$k^2 - Bh < 0.$$

Zur ersten dieser beiden Axen gehört das grösste, zur zweiten das kleinste Trägheitsmoment.

Für $B = C$ hat man einen Umdrehungskegel um die Axe der x_1 ; für $B = A$ einen solchen um die Axe der z_1 .

Wenn $A = B = C$, dann sind p, q, r den Gleichungen (10) zufolge constant, und die Bewegung geschieht um eine feste Axe.

Ist k^2 gleich einer von den Grössen Ah, Bh, Ch , so wird der Kegel eine Ebene. Sobald aber nicht A, B, C alle drei gleich sind, hat man nothwendig:

$$k^2 - Ah < 0, \quad k^2 - Ch > 0.$$

Daher kann nur $k^2 - Bh$ Null sein, wenn A, B, C alle drei ungleich sind. Der Ort der augenblicklichen Drehaxen erhält in diesem Falle die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} = \frac{C(B - C)}{A(A - B)};$$

der letzte Ausdruck geht aus der zweiten Formel (17) hervor. Die Gleichung stellt zwei Ebenen dar, welche durch die Axe der y_1 , d. i. die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments gehen und mit $Y_1 Z_1$ gleiche Winkel machen. Sie schneiden das Ellipsoid nach zwei Ellipsen, welche den Ort der Pole bilden. Daher ist der Abstand des Mittelpunkts von den durch alle Punkte dieser Ellipsen gelegten Tangentialebenen des Ellipsoids constant und offenbar gleich dessen mittlerer Halbaxe.

Wenn $k^2 - Bh$ positiv, so legt sich die Kegelfläche um die Axe der x_1 herum, und die Gleichung (16) giebt:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} > \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} > \frac{C(B - C)}{A(A - B)};$$

das Letzte erkennt man wieder aus der zweiten Formel (17). Alle auf Seite der positiven z_1 liegenden Erzeugungslinien befinden sich folglich unterhalb jener beiden Ellipsen.

Wenn dagegen $k^2 - Bh$ negativ, so legt sich die Kegel-
fläche um die Axe der z_1 herum, und die Erzeugungslinien befinden sich oberhalb der Ellipsen.

Diese theilen demnach das Ellipsoid in vier solche Räume, dass die augenblickliche Drehaxe, wenn sie zu irgend einer Epoche sich in einem von ihnen befindet, dann immer in demselben bleibt und sich um die in seiner Mitte enthaltene Hauptaxe herum bewegt. Liegt die augenblickliche Drehaxe in einer der vier Grenzebenen dieser Räume, so tritt sie auch aus ihr nicht heraus.

Aus (7) und (17) mit Benutzung von (12) oder (15) geht hervor: Wenn unter den drei Hauptaxen des Centralellipsoids nicht zwei nahezu gleiche sind, und die augenblickliche Drehaxe sich anfänglich sehr nahe an der kleinsten oder grössten von ihnen befand, dann entfernt sie sich während der ganzen Bewegung nur sehr wenig von derselben. — Sind aber zwei Hauptaxen nahe einander gleich, dann ist diese Eigenschaft nur erwiesen für die Bewegung der augenblicklichen Drehaxe um die dritte Hauptaxe; dagegen braucht die Stabilität nicht stattzufinden bei ihrer Bewegung um die wenig von der mittleren verschiedene Hauptaxe. Zwar wird derjenige von den vier Lappen der Oberfläche des Ellipsoids, in dessen Mitte der Endpunkt dieser Hauptaxe liegt, sehr schmal, allein der Pol kann um seinen Mittelpunkt eine lange Poloide beschreiben.

Befand sich die augenblickliche Drehaxe in der Nähe der mittleren Hauptaxe, dann entfernt sich die Poloide in allen Fällen beträchtlich von dem Endpunkt derselben. Soll die Stabilität dennoch stattfinden, so darf der Pol die Curve nicht ganz durchlaufen.

Ist die Poloide verzeichnet und die anfängliche Drehgeschwindigkeit bekannt sowie die Axe, um welche sie stattfindet, so kann man sich die Bewegung leicht vorstellen ohne Ende fort. Man weiss, um welchen Winkel sich der Körper nach unendlich kleiner Zeit gedreht hat; man vermag also den Punkt der Poloide zu bestimmen, der Berührungspunkt mit der festen Ebene geworden ist; man kennt daher den Radius des Ellipsoids, um welchen die neue Drehung stattfindet, und

folglich den Werth ihrer Winkelgeschwindigkeit. Ebenso bestimmt man Drehaxe und Geschwindigkeit nach einem zweiten Zeitdifferential, und so fort.

Die Punkte, welche nach einander Pole werden, bilden auch auf der festen Tangentialebene eine Curve: die Serpoloide. Man sieht leicht den Weg, auf dem man dieselbe bestimmen könnte.

118. Zweite geometrische Darstellung der Bewegung des Körpers. — Der Ort aller augenblicklichen Drehaxen im absoluten Raum ist eine Kegelfläche, welche ihre Spitze in dem festen Punkt und zur Basis die Serpoloide hat. Es lässt sich leicht zeigen, dass sie beständig die im Körper feste Kegelfläche tangirt, welche den Ort aller augenblicklichen Drehaxen in Bezug auf diesen bildet. Da die augenblickliche Drehaxe sich jeden Augenblick auf beiden Flächen zugleich befindet, so haben diese immer eine gemeinschaftliche Kante. Nach unendlich kleiner Zeit fällt eine unendlich nahe Kante des beweglichen Kegels zusammen mit einer solchen des festen. Weil sie aber bei dieser Bewegung sich nur um unendlich Kleine zweiter Ordnung verrückt, so folgt, dass wenn man auf beiden Kegeln zwei Kanten nimmt, welche von der gemeinschaftlichen um unendlich Kleine erster Ordnung entfernt sind; dieselben von einander nur um Grössen zweiter Ordnung abstehen. Demnach tangiren die beiden Kegel einander. Der bewegliche gleitet übrigens nicht auf dem festen, denn ihre Berührungskante ist die augenblickliche Drehaxe. Die Bewegung des Körpers kann somit hervorgebracht werden vermöge eines Kegels zweiten Grades, der im Körper fest ist und auf einem anderen Kegel rollt, dessen Oberfläche unendlich viele Windungen hat und sich um die Axe des mittleren Paares herum legt.

119. Ort der Lagen, welche die feste Axe des mittleren Paares nach einander im Körper hat. — Bezeichnet man durch x_1, y_1, z_1 die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Axe in Bezug auf die beweglichen Axen, so hat man die aus (13) folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{Ap}{Cr}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{Bq}{Cr}.$$

Die Formeln (12) und (15) ergeben:

$$A (k^2 - Ah) p^2 + B (k^2 - Bh) q^2 + C (k^2 - Ch) r^2 = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}$ zwischen diesen drei Gleichungen erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche:

$$\left(\frac{k^2}{A} - h\right) x_1^2 + \left(\frac{k^2}{B} - h\right) y_1^2 + \left(\frac{k^2}{C} - h\right) z_1^2 = 0.$$

Sie ist ein Kegel zweiten Grades, dessen Schnitte senkrecht auf die Axe des grössten oder kleinsten Trägheitsmoments Ellipsen sind.

Für $B = C$ wird derselbe ein Umdrehungskegel um die Axe der x_1 , für $B = A$ um die Axe der z_1 .

Wenn $A = B = C$, so hat man $k^2 = Ah$. Die aus (12) und (15) gefolgerte Gleichung sagt uns jetzt nichts. Dagegen erhält man

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{p}{r}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{q}{r};$$

welches beweist, dass die Axe des mittleren Paares und die augenblickliche Drehaxe in einander fallen. Dasselbe lässt sich darthun aus der Formel für den Winkel dieser beiden Richtungen. Die Bewegung findet jetzt um eine feste Axe statt.

120. Verschiedene Formeln. — Man findet brauchbare Formeln, wenn man die zweiten Glieder der Gleichungen (4) gleichsetzt den Projectionensummen auf die festen Axen der x, y, z , welche die Grössen u, v, w der Gleichungen (5) geben. Man erhält durch Vergleichung der Coëfficienten von x_1, y_1, z_1 neun Gleichungen:

$$(18) \begin{cases} \frac{da}{dt} = br - cq, & \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, & \frac{da''}{dt} = b''r - c''q, \\ \frac{db}{dt} = cp - ar, & \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, & \frac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\ \frac{dc}{dt} = aq - bp, & \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, & \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p. \end{cases}$$

Aus ihnen folgen:

$$\begin{aligned} pda + qdb + rdc &= 0, \\ pda' + qdb' + rdc' &= 0, \\ pda'' + qdb'' + rdc'' &= 0. \end{aligned}$$

Rechnung für den besonderen Fall, dass keine äussere Kraft wirkt.

121. Wirkt keine äussere Kraft, so hat man

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

und die Gleichungen (10) werden

$$(19) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr, \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A) rp, \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq. \end{cases}$$

Indem man respective mit p, q, r multiplicirt und addirt, erhält man:

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0.$$

Daraus durch Integriren:

$$(20) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Die Constante h ist nach dem Vorhergehenden die Summe der lebendigen Kräfte des Systems.

Man erhält ein anderes Integral, wenn man die Gleichungen (19) mit Ap, Bq, Cr multiplicirt und addirt. Dadurch wird:

$$A^2p \frac{dp}{dt} + B^2q \frac{dq}{dt} + C^2r \frac{dr}{dt} = 0;$$

folglich:

$$(21) \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Die neue Constante k ist das Moment des mittleren Paares der Bewegungsgrössen des Systems.

Die Constanten h, k sowie die Anfangswerthe von p, q, r lassen sich leicht aus den Anfangsdaten bestimmen. Die Axenrichtung des mittleren Paares und sein Moment k sind bekannt, mag man die Anfangsgeschwindigkeiten selbst oder die erzeugenden Momentankräfte kennen. Die anfängliche Lage der Coordinatenaxen X_1, Y_1, Z_1 ist gegeben; man kennt daher die Seitenpaare von k , deren Axen nach X_1, Y_1, Z_1 gerichtet sind. Ihre Momente sind beziehlich Ap, Bq, Cr ; folglich kennt man zu Anfang der Bewegung Grösse und Zeichen von p, q, r . Vermöge (20) ist nun auch h bekannt.

Aus (20) und (21) ergeben sich für p und q Werthe in r . Setzt man diese in die dritte Gleichung (19), so erhält man eine Gleichung, deren Quadratur t als Function von r liefert. Zunächst findet sich:

$$(22) \quad p^2 = \frac{k^2 - Bh + C(B - C)r^2}{A(A - B)}, \quad q^2 = \frac{k^2 - Ah + C(A - C)r^2}{B(B - A)}$$

Was die Zeichen von p , q , r betrifft, so werden dieselben, wie bemerkt, im Anfangszustand bekannt aus der Lage der Axe des mittleren Paares gegen die Hauptträgheitsaxen, deren Lage man für diesen Augenblick kennt. Die Cosinus der Winkel, welche die Axe dieses Paares mit den Hauptaxen macht, sind $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$; woraus sich Grösse und Zeichen von p , q , r für den Anfang ergeben. Man sieht aus (19), dass während diese drei Grössen ihre Zeichen behalten, auch die Derivirten es thun. Mithin ändert sich jede der Grössen p , q , r stets in demselben Sinne, so lange als keine von ihnen Null wird. Wird aber eine Null, dann giebt die entsprechende Gleichung (19) den Werth ihrer Derivirten für diesen Augenblick und damit das Zeichen, welches die Grösse unmittelbar nachher hat; und nun findet das Gesagte wieder statt. Man ist daher niemals im Zweifel wegen der Zeichen von p , q , r .

Durch Einsetzen der Werthe von p , q aus (22) in die dritte Gleichung (19) findet sich:

$$(23) \quad dt = \frac{C \sqrt{AB} \, dr}{\sqrt{k^2 - Bh + C(B - C)r^2} \sqrt{Ah - k^2 + C(C - A)r^2}}.$$

Wir nehmen dt immer positiv und die Wurzeln absolut; dr ist positiv, wenn p und q gleiche Zeichen haben, negativ, wenn ihre Zeichen verschieden sind. Im letzten Fall muss man der zweiten Seite das Zeichen — geben. Das Integral hängt von den elliptischen Functionen ab. Man kann die Integration ausführen, wenn zwei von den Grössen A , B , C einander gleich werden, oder wenn k^2 gleich einer von Ah , Bh , Ch wird; wir haben jedoch gesehen, dass k^2 nur gleich Bh werden kann.

Die Integration von (23) liefert t als Function von r , und die dabei eingehende Constante wird durch den Anfangswerth von r bestimmt. Man findet nun umgekehrt r als Function von t und vermöge (22) auch p und q .

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe bleibt uns noch übrig, die Winkel φ , θ , ψ durch p , q , r zu bestimmen. Dazu dienen folgende drei Gleichungen der Vorbemerkungen:

$$(24) \quad \begin{cases} p = \cos \varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ q = -\sin \varphi \frac{d\theta}{dt} + \cos \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ r = \cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Man kann sich dabei der Formeln (13) bedienen, deren jede in den zwei anderen enthalten ist. Der Einfachheit wegen nehmen wir die Axe des mittleren Paares zu einer der festen Coordinatenachsen, z. B. zur z -Axe. Die ersten Glieder der Formeln (13) werden dann a'' , b'' , c'' , und man erhält nach den in den Vorbemerkungen gegebenen Werthen:

$$(25) \quad \frac{Ap}{k} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{Bq}{k} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{Cr}{k} = \cos \theta.$$

Diese Gleichungen bestimmen $\cos \theta$ und $\tan \varphi$ durch p , q , r , folglich durch t . Da diese trigonometrischen Linien jeden Augenblick ohne Zweideutigkeit des Zeichens bekannt sind und ihre Winkel sich stetig ändern, so sind letztere vollständig bestimmt.

Es handelt sich also noch um Bestimmung von ψ , wozu man die Gleichungen (24) benutzt. Indem man $\frac{d\theta}{dt}$ zwischen den beiden ersten eliminirt, findet sich:

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}$$

oder:

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{k \sin \theta} = \sin \theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Daher:

$$Ap^2 + Bq^2 = k \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = k \left(1 - \frac{C^2 r^2}{k^2}\right) \frac{d\psi}{dt} = h - Cr^2;$$

woraus folgt:

$$(26) \quad d\psi = \frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2 r^2} dt.$$

Setzt man für dt den Werth aus (23), so hat man $d\psi$ als

Function von r und dr . Folglich ergibt sich ψ als Function von r und somit von t durch eine Integration, welche auf die elliptischen Functionen hinauskommt und in denselben Fällen genau ausgeführt werden kann, wie die von dt . Die Constante wird durch die Anfangswerthe von ψ und r bestimmt.

Der Fall, wo $A = B$.

122. Die Gleichungen (19) werden für ihn

$$\frac{dr}{dt} = 0, \text{ daher } r = n,$$

wo n eine durch den Anfangszustand bestimmte Constante, und

$$(\alpha) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{A-C}{A} nq,$$

$$(\beta) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{A} np.$$

Daraus folgt:

$$p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} = 0,$$

also:

$$p^2 + q^2 = m^2.$$

Die Constante m^2 wird durch den Anfangszustand bestimmt.

Die Winkelgeschwindigkeit ist constant, obgleich p und q es nicht sind. Sie hat den Werth:

$$\omega = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Dasselbe würden die Gleichungen (20), (21) ergeben.

Um p als Function von t zu erhalten, eliminirt man q zwischen den Gleichungen (α) , (β) , indem man die erste differenziert und für $\frac{dq}{dt}$ den Werth aus der zweiten setzt. Man

findet:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p^2 = 0,$$

wo

$$\frac{A-C}{A} = \mu.$$

Daher:

$$p = M \sin (\mu n t + \varepsilon);$$

M und ε bezeichnen zwei Constanten.

Nun ergiebt sich:

$$q = \frac{1}{\mu n} \frac{dp}{dt} = M \cos (\mu n t + \varepsilon).$$

Und da $p^2 + q^2 = m^2$, so wird

$$M = \pm m.$$

Wir haben daher für p, q nachstehende Werthe, wobei wir uns m beider Zeichen fähig denken:

$$(\gamma) \quad p = m \sin (\mu n t + \varepsilon), \quad q = m \cos (\mu n t + \varepsilon).$$

Zur Bestimmung von m, ε seien p_0, q_0 die Anfangswerthe von p, q ; dann folgt:

$$m = \pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \quad p_0 = m \sin \varepsilon, \quad q_0 = m \cos \varepsilon.$$

Der Winkel ε ist bestimmt, sobald man ein Zeichen für m gewählt hat. Nähme man das andere Zeichen, so würde ε sich um 180 Grade ändern. Es steht daher frei, welches man nehmen will. Wir setzen z. B.:

$$m = + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}.$$

Bestimmen wir jetzt φ, ψ, θ .

Die Gleichungen (25) geben:

$$\cos \theta = \frac{Cn}{k}, \quad \tan \varphi = \frac{p}{q} = \tan (\mu n t + \varepsilon).$$

Die Bogen φ und $\mu n t + \varepsilon$ haben dieselbe Tangente; sie können sich daher nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, das man beliebig wählen kann. Wir nehmen sie gleich und erhalten:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu n t,$$

wo φ_0 der Anfangswerth von φ .

Die Gleichung (26) wird:

$$d\psi = \frac{k(h - Cn^2)}{k^2 - C^2n^2} dt.$$

Folglich:

$$\psi = \frac{k(h - Cn^2)}{k^2 - C^2n^2} t + \psi_0;$$

ψ_0 ist Anfangswerth von ψ .

Der constante Werth für $\cos \theta$ lehrt, dass die ungleiche Axe des Centralellipsoids eine gerade Kegelfläche um die feste

Axe des mittleren Paares beschreibt, und dass folglich der Aequator des Ellipsoids eine beständige Neigung gegen die Ebene des Paares beibehält.

Der Werth von ψ zeigt, dass die Spur des Aequators des Centralellipsoids auf der festen Ebene des mittleren Paares sich gleichförmig bewegt, und dass folglich auch die ungleiche Axe ihre Kegelfläche gleichförmig beschreibt.

Der Werth von φ beweist, dass ein beliebiger Radius der Aequatorebene sich gleichförmig bewegt in Bezug auf die veränderliche Spur des Aequators auf der Ebene des mittleren Paares. Man darf aber die Winkelgeschwindigkeit μn dieser Bewegung nicht verwechseln mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{m^2 + n^2}$ des Körpers.

Die augenblickliche Drehaxe macht mit Z_1 einen constanten Winkel, dessen Cosinus $\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ ist. Sie beschreibt daher auf dem Centralellipsoid einen Kreis.

Die augenblickliche Drehaxe, die ungleiche Axe des Ellipsoids und die Axen des mittleren Paares liegen beständig in derselben beweglichen Ebene. Um dies nachzuweisen, wollen wir zeigen, dass die Cosinus der Winkel, welche die augenblickliche Drehaxe und die Axe des mittleren Paares mit X_1, Y_1 bilden, proportional sind. Denn dann liegen die beiden Axen in einer durch Z_1 (die ungleiche Axe des Ellipsoids) gehenden Ebene.

Das Verhältniss der zwei ersten Cosinus ist $\frac{p}{q}$, das der zwei anderen $\frac{a''}{b''}$, folglich $\frac{Ap}{Bq}$ nach (25) und also auch $\frac{p}{q}$.

Der Fall, wo $k^2 = Bh$.

123. Wir haben gesehen, dass in diesem Falle der Ort der augenblicklichen Drehaxen nur eine halbe von den zwei Ellipsen sein kann, deren Ebenen durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{C(B-C)}{A(A-B)}$$

dargestellt werden.

Aus den Gleichungen (20), (21) mit Rücksicht auf $k^2 = Bh$ findet man:

$$p^2 = \frac{(C-B)(k^2 - B^2 q^2)}{BA(C-A)}, \quad r^2 = \frac{(B-A)(k^2 - B^2 q^2)}{BC(C-A)}.$$

Daraus folgt, dass stets

$$k^2 - B^2 q^2 > 0 \text{ oder } q^2 < \frac{k^2}{B^2}.$$

Die zweite Gleichung (19) ergibt nun:

$$B \frac{dq}{dt} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}} (k^2 - B^2 q^2).$$

Daher:

$$dt = \frac{B^2 \sqrt{AC}}{\sqrt{(C-B)(B-A)}} \frac{dq}{k^2 - B^2 q^2}.$$

Die Wurzeln nehmen wir absolut und geben der zweiten Seite das Zeichen $-$, wenn dq negativ.

Es sei dq positiv. Setzt man

$$\frac{k}{B} = m, \quad \frac{2k \sqrt{(C-B)(B-A)}}{B \sqrt{AC}} = \mu,$$

wo μ positiv, so ergibt sich durch Integriren:

$$\mu t = \log. \frac{m + q}{\alpha (m - q)};$$

α bezeichnet eine Constante. Folglich:

$$q = m \frac{\alpha e^{\mu t} - 1}{\alpha e^{\mu t} + 1}.$$

Bezeichnet q_0 den Anfangswerth von q , dann ist:

$$q_0 = \frac{m(\alpha - 1)}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{m + q_0}{m - q_0}.$$

Somit:

$$q = m \frac{(m + q_0) e^{\mu t} + q_0 - m}{(m + q_0) e^{\mu t} + m - q_0}.$$

Vermöge dieses Werthes von q hat man auch p und r als Functionen von t .

Die Gleichungen (25) ergeben darauf θ und φ durch t . Die Gleichung (26) giebt, indem man für r seinen Werth in q setzt:

$$d\psi = Bm \frac{(C-B) m^2 + (B-A) q^2}{A (C-B) m^2 + C (B-A) q^2} dt.$$

Die Integration hat keine Schwierigkeit, wenn man für q den Werth in t substituirt.

Lässt man t ohne Ende wachsen, so nähert sich q der Grenze m oder $\frac{k}{B}$; folglich nähern sich p und r der Null. Die Richtung der augenblicklichen Drehaxe (welche durch die Gleichungen (7) gegen $+X_1, +Y_1, +Z_1$ bestimmt wird) strebt jetzt gegen die mittlere Halbaxe $+Y_1$ des Centralellipsoids hin.

Es ist hier folgende wichtige Bemerkung zu machen. Der Grenzwert von q ist $+\frac{k}{B}$ nur unter der Voraussetzung, dass dq beständig positiv. Dies erheischt, dass p und r zu Anfang gleiche Zeichen haben, sofern $C > A$. Die Grössen p, r behalten ihre anfänglichen Zeichen, denn sie können erst dann Null werden, wenn $q^2 = m^2$, und dies findet statt bei $t = \infty$. Hätten p und r zu Anfang verschiedene Zeichen, so würden sie auch diese beibehalten, und dq wäre beständig negativ. Man müsste nun $-\mu$ statt μ schreiben. Dadurch würde man $-m$ oder $-\frac{k}{B}$ als Grenze von q finden.

Demnach strebt die Richtung der augenblicklichen Drehaxe gegen $+Y_1$ oder $-Y_1$ hin, je nachdem p und r in der Anfangslage gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Das erste findet statt, wenn die Winkel, welche die Drehaxe zu Anfang mit $+X_1$ und $+Z_1$ macht, zugleich spitz oder stumpf sind; das letzte, wenn ein Winkel spitz ist und der andere stumpf.

Die augenblickliche Drehaxe hat Stabilität im ersten Falle, sofern sich ihre (durch (7) bestimmte) Richtung anfänglich in der Nähe von $+Y_1$ befand; im zweiten musste sie sich in der Nähe von $-Y_1$ befinden.