

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Anhang

Anhang.

Im folgenden werden die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Theorie der reellen Funktionen reeller Variablen, von denen im Text Gebrauch gemacht ist, mit den nötigen Literaturnachweisen zusammengestellt. Es wird dabei nicht beabsichtigt, die Sätze in möglichster Allgemeinheit zu formulieren, sondern in einer für die Anwendung auf die Variationsrechnung bequemen Form. Bei den Literaturnachweisen wird von den folgenden Abkürzungen Gebrauch gemacht.

D: DINI, *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe*, übersetzt von LÜROTH und SCHEPP (1892).

E: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II A, die Artikel von PRINGSHEIM über Allgemeine Funktionentheorie und von Voss über Differential- und Integralrechnung (1899).

G: GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, Bd. I (1902).

J: JORDAN, *Cours d'Analyse*, Bd. I (1893).

O: OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. I (1907).

Pe: PEANO, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung*, übersetzt von BOHLMANN und SCHEPP (1899).

Pi: PIERPONT, *Lectures on the Theory of Functions of real Variables*, Bd. I (1905).

Sch: SCHÖNFLIES, *Bericht über die Mengenlehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. VIII (1900).

St: STOLZ, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, Bd. I (1893).

St. G: STOLZ und GMEINER, *Einleitung in die Funktionentheorie*, I. Abt. (1904).

T: TANNERY, *Introduction à la Théorie des Fonctions d'une Variable*, Bd. (1904).

V: VEBLEN and LANNES, *Introduction to Infinitesimal Analysis* (1907).

Im folgenden bedeuten die Zahlen Seiten.

I. Punktmengen.

1. Die *Umgebung* (ϱ) eines Punktes $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ im Gebiet der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist die Gesamtheit der Wertsysteme (Punkte) $x_1, x_2, \dots, x_n$, für welche

$$|x_1 - a_1| < \varrho, \quad |x_2 - a_2| < \varrho, \dots, \quad |x_n - a_n| < \varrho.$$

Wir bezeichnen dieselbe in Übereinstimmung mit § 21 mit $(\varrho)_A$.

Vgl. E. 44; Pi. 155.

2. Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Gebiet der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ heißt *beschränkt* (borné, bounded), wenn es eine feste Zahl G gibt, so daß für jeden Punkt $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Menge

$$|x_1| < G, \quad |x_2| < G, \dots, \quad |x_n| < G.$$

Vgl. J. 22, 23; Pi. 156; T. 66; V. 3,

3. Definition und Existenz der *oberen und unteren Grenze* einer beschränkten linearen Punktmenge.

Vgl. § 2, a) und D. 28, G. 159; J. 22; O. 33; Pe. 13; T. 66.

4. Ein Punkt H heißt ein *Häufungspunkt* (Grenzpunkt; point limite; limit-point, cluster-point) einer Punktmenge $\mathfrak{M}$, wenn es in jeder Umgebung von H Punkte von $\mathfrak{M}$ gibt, die von H verschieden sind. (NB.: H braucht nicht zu $\mathfrak{M}$ zu gehören.)

Folgerungen:

a) In jeder Umgebung von H gibt es unendlich viele Punkte von $\mathfrak{M}$.

b) Man kann stets eine unendliche Folge $\{P_r\}$ von Punkten von $\mathfrak{M}$ herausgreifen, derart, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r = H, \quad L = \lim$$

d. h. wenn

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad P_r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r);$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x_i^r = h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$, der nicht zugleich Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ ist, heißt ein *isolierter Punkt* von $\mathfrak{M}$.

Vgl. D. 22; Pi. 157; E. I, 185; T. 71; V. 39.

5. Jede beschränkte Punktmenge, welche unendlich viele verschiedene Punkte enthält, hat *wenigstens einen Häufungspunkt*. (NB.: Derselbe braucht nicht selbst zur Menge zu gehören.)

Vgl. J. 23; D. 22; Pi. 163; T. 71; V. 39.

6. Eine Punktmenge heißt

a) *abgeschlossen* (fermé¹⁾, closed), wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält;

b) *in sich dicht*, wenn jeder ihrer Punkte zugleich Häufungspunkt ist;

c) *perfekt*, wenn sie zugleich abgeschlossen und in sich dicht ist.

Eine lineare Punktmenge heißt in einem Intervall *überall dicht*, wenn jeder Punkt des Intervalls ein Häufungspunkt der Menge ist.

Vgl. E. I, 195; J. 19; O. 32; Pi. 167; Sch. 58; T. 112; V. 41.

7. Ein Punkt A einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Gebiet der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ heißt ein *innerer Punkt* der Menge, wenn alle Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

¹⁾ JORDAN gebraucht dafür „parfait“, abweichend von CANTOR.

in einer gewissen Umgebung des Punktes A ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören. Die Gesamtheit aller innerer Punkte einer Menge heißt „das Innere“ der Menge.

Ein Punkt B liegt *außerhalb* der Menge $\mathfrak{M}$, wenn kein Punkt einer gewissen Umgebung von B zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Ein Punkt C gehört der *Begrenzung* der Menge an, wenn jede Umgebung von C mindestens einen Punkt enthält, welcher zu $\mathfrak{M}$ gehört, und mindestens einen, welcher nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Vgl. E. 45; J. 20; Pi. 154.

8. Eine Punktmenge heißt *zusammenhängend* (d'un seul tenant, connected), wenn man zwischen irgend zwei Punkten A und B von $\mathfrak{M}$, nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε , eine endliche Anzahl von Punkten von $\mathfrak{M}$: $P_1, P_2, \dots, P_m$ derart einschalten kann, daß der Abstand je zweier aufeinander folgender Punkte (A und B inbegriffen) kleiner ist als ε .

Dabei ist unter dem „Abstand“ zweier Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ der Ausdruck

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

verstanden.

Vgl. E. 45; J. 25; Pi. 149.

9. Unter einem *Bereich* verstehen wir eine Punktmenge, welche innere Punkte enthält; unter einem *stetigen Bereich* eine Punktmenge, welche nur innere Punkte enthält.

Ein *Kontinuum* ist ein zusammenhängender stetiger Bereich.

Vgl. E. 46; O. 124.

II. Grenzwerte.

1. *Obere und untere Grenze einer Funktion.* Vgl. § 2, b) und D. 28, 57; E. 12.

2. Die Funktion $f(x)$ sei in der Umgebung der Stelle $x = a$ eindeutig definiert. Wenn dann eine feste endliche Größe b existiert, so daß zu jedem positiven ε ein positives δ gehört, derart daß

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \text{ wenn } a < x < a + \delta,$$

so sagt man: $f(x)$ nähert sich beim Grenzübergang $x \rightarrow a + 0$ der Grenze b ; in Zeichen:

$$Lf(x) = b \quad (= f(a_+ + 0)).$$

Analog ist $f(a - 0)$ definiert. Wenn $f(a + 0)$ und $f(a - 0)$ beide existieren und gleich sind ($= b$), so sagt man $f(x)$ nähert sich bei dem Grenzübergang $x \rightarrow a$ der Grenze b .

Vgl. E. 12, 13; D. 56; T. 222; V. 61.

3. Wenn $f(x)$ beständig wächst (oder doch wenigstens nicht abnimmt), während x sich abnehmend dem Wert a nähert, und wenn $f(x)$ überdies dabei

kleiner bleibt als eine feste GröÙe G , so nähert sich $f(x)$ für $x \doteq a + 0$ einer bestimmten endlichen Grenze (*Monotonieprinzip*).

Analog für $x \doteq a - 0$, $+\infty$, $-\infty$ und für abnehmende Funktionen.

Vgl. D. 42; E. 13; O. 26; Pe. 8; St. G. 15; V. 61.

4. Damit die Funktion $f(x)$ für $x \doteq a + 0$ sich einer bestimmten, endlichen Grenze nähert, ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem positiven ε ein positives δ gehört derart, daß

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

für jedes Wertsystem x', x'' , für welches

$$a < x' < a + \delta, \quad a < x'' < a + \delta.$$

(*Allgemeines Konvergenzprinzip*). Analoger Satz für $x \doteq a - 0$, a , $+\infty$, $-\infty$.

Vgl. D. 38; E. 14; O. 27; Pe. 9; Pi. 179; St. G. 21; V. 66.

5. Ist $Y(h)$ die (endliche oder unendliche) obere Grenze der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, a + h]$, wo $h > 0$, so besitzt die Funktion $Y(h)$ für $h \doteq +0$ stets eine bestimmte (endliche oder unendliche) Grenze, welche der rechtsseitige obere Limes (auch Unbestimmtheitsgrenze) von $f(x)$ für $x \doteq a$ genannt wird, in Zeichen:

$$\overline{L}f(x) = \overline{f(a+0)}.$$

$x = a + 0$

Analog $\underline{f(a+0)}$, $\overline{f(a-0)}$, und $\underline{f(a-0)}$. Wenn $\overline{f(a+0)} = \underline{f(a+0)}$, so existiert $f(a+0)$, endlich oder unendlich.

Vgl. E. 14; Pi. 205; St. G. 17; T. 233; V. 84.

6. *Gleichmäßige Konvergenz*: Die Funktion $f(x, y)$ sei definiert für jedes x, y , für welches x dem Bereich: $a < x < D$ und gleichzeitig y einer gewissen Punktmenge Y angehört. Alsdann sagt man, die Funktion $f(x, y)$ nähere sich bei dem Grenzübergang $x \doteq a + 0$ einer bestimmten endlichen Grenze $\varphi(y)$ gleichmäßig in Beziehung auf die Menge Y , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von y unabhängige positive GröÙe δ gehört derart, daß

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

für jedes $a < x < a + \delta$ und für jedes y der Menge Y .

Analoge Definition für $x \doteq a - 0$, a , $+\infty$, $-\infty$.

Vgl. E. 52; Pi. 200; St. G. 78.

III. Stetigkeit.

1. Die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei definiert in einer Menge $\mathfrak{N}$, und es sei $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein Punkt von $\mathfrak{N}$. Alsdann heißt $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stetig¹⁾

¹⁾ Nach dieser von C. JORDAN gegebenen Definition ist die Funktion f in jedem isolierten Punkt von $\mathfrak{N}$ stetig. Gewöhnlich beschränkt man den Stetigkeitsbegriff auf Häufungspunkte.

in A^* (in bezug auf $\mathfrak{M}$), wenn zu jedem positiven ε ein positives δ gehört, derart daß

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)| < \varepsilon$$

für jeden Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von $\mathfrak{M}$ in $(\delta)_A$.

Vgl. J. 46; Pi. 208; Sch. 116; T. 223.

2. *Vorzeichensatz*: Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stetig im Punkt $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, und ist $f(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$, so läßt sich eine positive GröÙe ϱ angeben, so daß $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ in allen Punkten von $(\varrho)_A$, welche zu $\mathfrak{M}$ gehören.

Vgl. Pe. 11, 121; Pi. 214; V. 88.

3. Die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heißt *stetig in der Punktmenge* $\mathfrak{M}$, wenn sie in jedem Punkt von $\mathfrak{M}$ stetig ist.

Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stetig in einer *beschränkten, abgeschlossenen* Punktmenge $\mathfrak{M}$, so gelten die folgenden Sätze:

- a) Die Funktion f besitzt in $\mathfrak{M}$ eine endliche obere Grenze G und eine endliche untere Grenze K .
- b) Die Funktion f nimmt die Werte G und K in $\mathfrak{M}$ wirklich an (*Maximum und Minimum*).
- c) Zu jedem positiven ε gehört ein positives δ , derart daß

$$|f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - f(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)| < \varepsilon$$

für je zwei Punkte $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ und $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ von $\mathfrak{M}$, für welche

$$|x'_1 - x''_1| < \delta, \dots, |x'_n - x''_n| < \delta.$$

(*Gleichmäßige Stetigkeit*.)

Vgl. D. 63, 68; E. 18, 19, 49; G. 162, 163; J. 48, 53; O. 13, 15, 34; Pe. 15, 122, 123; Pi. 214, 215, 216; Sch. 119; St. G. 17, 53, 97, 98; T. 237, 238; V. 89, 90, 91.

4. *Zusammengesetzte Funktionen*: Vgl. unten IV 9, Zusatz.

5. *Die inverse Funktion*: Wenn die Funktion $y = f(x)$ im Intervall: $a \leq x \leq b$ stetig ist und mit wachsendem x beständig zunimmt, und zwar von $y = g$ bis $y = h$, so hat die Gleichung: $y = f(x)$ für jeden Wert von y im Intervall $[gh]$ eine und nur eine Wurzel $x = \varphi(y)$ im Intervall $[ab]$, und die hierdurch für das Intervall $[gh]$ eindeutig definierte inverse Funktion $\varphi(y)$ ist stetig in $[gh]$.

Vgl. Pe. 21; Pi. 133, 134; St. G. 48; T. 246; V. 45, 93.

IV. Die Ableitung.

1. Wenn der Quotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{resp.} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}, \quad (h > 0)$$

für $h \rightarrow 0$ sich einer bestimmten, endlichen Grenze nähert, so heißt dieselbe die *vordere*, resp. *hintere*, *Derivierte* von $f'(x)$ im Punkt x_0 . Sie werde mit $f^+(x_0)$, resp. $f^-(x_0)$ bezeichnet.

Sind beide einander gleich, so heißt der gemeinsame Wert, $f'(x_0)$, die *Ableitung* von $f(x)$ im Punkt x_0 , und die Funktion $f(x)$ heißt *differentierbar* im Punkt x_0 .

Wegen der Definition von Funktionen der Klasse $C^{(p)}$, $D^{(p)}$ vgl. pp. 13, 63. Vgl. D. 87; E. 61; Pi. 223; St. 31; T. 341; V. 118.

2. *Der Satz von Rolle*: Es sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und $f'(x)$ existiere für jedes x zwischen a und b . Wenn alsdann $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Wert ξ zwischen a und b , für welchen $f'(\xi) = 0$.

Vgl. G. 9; Pe. 43; Pi. 246; St. 51; T. 359; V. 132.

3. *Der Mittelwertsatz*: Wenn $f(x)$ stetig ist in $[a, b]$ und $f'(x)$ für jedes x zwischen a und b existiert, so gibt es einen Wert ξ zwischen a und b , für welchen

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Vgl. D. 92; E. 65; G. 9; Pe. 44; Pi. 248; St. 52; T. 370; V. 133.

4. Es sei $f'(x)$ stetig in $[a, b]$ und von der Klasse C' für $a < x < b$. Ferner nähere sich $f'(x)$ für $x \rightarrow a + 0$ einer bestimmten, endlichen Grenze $f'(a + 0)$. Als dann existiert $f^+(a)$ und es ist $f^+(a) = f'(a + 0)$.

Vgl. D. 109.

5. *Der Taylor'sche Satz*: Ist $f(x)$ von der Klasse $C^{(n)}$ in $[a, a + h]$, so ist

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h),$$

wo

$$0 < \theta < 1.$$

Vgl. E. 75; G. 102; J. 245; Pe. 68; St. 95; V. 135.

6. Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von der Klasse C' in der Umgebung von $a_1, a_2, \dots, a_n$, so ist für hinreichend kleine Werte von $|h_1|, |h_2|, \dots, |h_n|$:

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ = h_1 f_{x_1}(a_1, \dots, a_n) + h_2 f_{x_2}(a_1, \dots, a_n) + \dots \\ + h_n f_{x_n}(a_1, \dots, a_n) + h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + h_n \alpha_n, \end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ unendlich klein werden, wenn $h_1, h_2, \dots, h_n$ simultan und voneinander unabhängig gegen Null konvergieren. (*Totales Differential*.)

Vgl. E. 70; J. 75; Pe. 130; Pi. 271; St. 134.

7. Wenn die Funktion $f(x, y)$ und die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} in der Umgebung der Stelle x_0, y_0 existieren und stetig sind, alsdann existiert

auch $f_{yx}(x_0, y_0)$ und ist gleich $f_{xy}(x_0, y_0)$. (*Vertauschung der Differentiationsordnung.*)

E. 73; Pi. 265; St. 150; T. 366.

8. Der Taylor'sche Satz für Funktionen mehrerer Variablen: Ist $f(x, y)$ von der Klasse $C^{(n)}$ im Bereich: $a \leq x \leq a+h$, $b \leq y \leq b+k$ (resp. $a \geq x \geq a+h$, oder $b \geq y \geq b+k$), so ist in bekannter Abkürzung:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right) f(a, b) + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a, b) + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k),$$

wo

$$0 < \theta < 1.$$

Analog für Funktionen mehrerer Variablen.

Vgl. E. 77; G. 120; J. 249; Pe. 137; St. 161.

9. Es seien die Funktionen:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

von der Klasse $C^{(p)}$ in einem Bereich $\mathcal{A}$, ferner sei die Funktion $F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ von der Klasse $C^{(p)}$ in einem Bereich $\mathcal{B}$, welcher das Bild $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mittels der Transformation (1) enthält. Alsdann ist die zusammengesetzte Funktion

$$F(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

von der Klasse $C^{(p)}$ in $\mathcal{A}$.

Der Satz gilt auch für stetige Funktionen ($p=0$).

Vgl. E. 19, 71; J. 77; Pe. 131; Pi. 209, 274; St. 137; St. G. 94; T. 369.

10. Inverse und implizite Funktionen: Vgl. § 22 und E. 72; G. 40–57; J. 80–85; O. 48–57; Pe. 21, 138–151; Pi. 282–297; St. G. 48; T. 371.

V. Bestimmte Integrale.

1. Definition von *integabel*: Vgl. E. 95; G. 166; J. 37; Pe. 271; Pi. 336; St. 346; V. 153.

2. Jede im Intervall $[ab]$ endliche und mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten stetige Funktion $f(x)$ ist integabel in $[ab]$.

Vgl. D. 332; Pe. 272; Pi. 344; St. 358.

3. Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $[ab]$ endlich und integabel ist, und man ändert ihren Wert in einer endlichen Anzahl von Punkten beliebig ab,

(aber so, daß $f(x)$ endlich bleibt), so ist die neue Funktion in $[ab]$ wieder integrierbar und der Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx$$

ändert sich nicht.

Vgl. D. 353; Pi. 365.

4. Ist $f(x)$ endlich und integrierbar in $[ab]$, so ist die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

stetig in $[ab]$.

In den Punkten, wo $f(x)$ stetig ist, ist $F(x)$ differenzierbar und es ist

$$F'(x) = f(x).$$

In den Punkten, wo $f(x+0)$, resp. $f(x-0)$, existiert, existiert auch die vordere, resp. hintere, Derivierte von $F(x)$ und es ist

$$F^+(x) = f(x+0), \quad \text{resp.} \quad F^-(x) = f(x-0).$$

D. 365—369; E. 99; Pi. 368, 369; V. 171.

5. *Partielle Integration*: Sind $u(x)$ und $v(x)$ von der Klasse C' in $[ab]$, so ist

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = [uv]_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx.$$

Vgl. E. 101; Pi. 384; V. 175.

6. *Erster Mittelwertsatz*: Es seien $P(x)$, $\psi(x)$ endlich und integrierbar in $[ab]$, und es sei $P(x) \geq 0$ in $[ab]$. Alsdann ist

$$\int_a^b P(x) \psi(x) dx = \mu \int_a^b P(x) dx,$$

wo μ ein *Mittelwert* zwischen der unteren und der oberen Grenze von $\psi(x)$ in $[ab]$ ist.

D. 363; E. 97; Pi. 366; V. 168.

7. *Differentiation nach einem Parameter*: Wenn die Funktion $f(x, \alpha)$ stetig ist im Bereich

$$a \leq x \leq b, \quad \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad (2)$$

und a und b von α unabhängig sind, so ist das bestimmte Integral

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

eine stetige Funktion von α in $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Wenn überdies die partielle Ableitung $f_\alpha(x, \alpha)$ im Bereich (2) stetig ist, so ist die Funktion $F(\alpha)$ differentiierbar in $[\alpha_0, \alpha_1]$, und es ist

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx.$$

Dagegen ist

$$F'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha) dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha},$$

wenn a und b Funktionen von α sind, welche in $[\alpha_0, \alpha_1]$ von der Klasse C' sind.

Vgl. E. 102; G. 216; J. 72; O. 84—89; Pi. 388, 392.

VI. Kurven.

1. Definitionen über Kurven: Vgl. § 25, a).

2. *Satz von Jordan*: Jede stetige geschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ ohne mehrfache Punkte („Jordan'sche Kurve“) zerlegt die Ebene in zwei Kontinua, von denen das eine (*das Innere* von $\mathfrak{L}$ genannt), im Endlichen liegt, während das andere (*das Äußere* von $\mathfrak{L}$ genannt), sich ins Unendliche erstreckt. Die Kurve selbst bildet die vollständige Begrenzung beider Bereiche.

Je zwei Punkte des Inneren (Äußeren) können stets durch eine stetige Kurve verbunden werden, welche keinen Punkt mit der Kurve $\mathfrak{L}$ gemein hat. Dagegen hat jede stetige Kurve, welche einen Punkt des Innern mit einem Punkt des Äußeren verbindet, notwendig mindestens einen Punkt mit der Kurve $\mathfrak{L}$ gemein.

Vgl. J. 91—99; O. 140.

VII. Abbildung.

1. Die Funktionen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3)$$

seien stetig in der Menge $\mathfrak{M}$ und es sei $\mathfrak{N}$ die der Menge $\mathfrak{M}$ mittels der Transformation (3) im Raum der Variablen $y_1, y_2, \dots, y_n$ entsprechende Menge (das Bild von $\mathfrak{M}$).

Wenn alsdann $\mathfrak{M}$ beschränkt und abgeschlossen ist, so ist auch $\mathfrak{N}$ beschränkt und abgeschlossen.

Wenn insbesondere $m = n$ und die durch (3) vermittelte Beziehung zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine ein-eindeutige ist (d. h. wenn zwei verschiedenen Punkten von $\mathfrak{M}$ allemal zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{N}$ entsprechen), so definieren die Gleichungen (3) $x_1, x_2, \dots, x_n$ in $\mathfrak{N}$ als eindeutige Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_n$, (inverse Funktionen).

Wenn alsdann die Funktionen f_i stetig sind in $\mathcal{M}$, und $\mathcal{M}$ beschränkt und abgeschlossen ist, so sind auch die inversen Funktionen stetig in $\mathcal{N}$.

J. 51, 53; Sch. 117.

2. *Satz von Schönflies*: Sind die Funktionen

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (4)$$

eindeutig definiert und stetig in dem Bereich

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5)$$

und definiert die Transformation (4) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Quadrat (5) und dessen Bild $\mathcal{J}$ in der ξ, η -Ebene, so ist das Bild des Randes des Quadrates (5) eine stetige geschlossene Kurve $\mathcal{Q}$ ohne mehrfache Punkte, und das Bild $\mathcal{J}$ des Quadrates (5) ist identisch mit dem Inneren der Kurve $\mathcal{Q}$ zusammen mit der Kurve $\mathcal{Q}$ selbst.

(SCHÖNFLIES, Göttinger Nachr., 1899, p. 282; OSGOOD, Ibid., 1900, p. 94; BERNSTEIN, Ibid., 1900, p. 98.
