

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Übungsaufgaben zu Kapitel XI bis XIII

Übungsaufgaben zu Kapitel XI bis XIII.

1*. *Bestimmung der geodätischen Linien des Rotationsellipsoids im n -dimensionalen Euklidischen Raum (§ 68).*

Es handelt sich darum, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2} dt$$

zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} = 1.$$

Lösung: Setzt man

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2,$$

so erhält man für die Extremalen

$$\left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 = \frac{1 - \frac{k^2}{a^2} - \frac{x_n^2}{b^2}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} x_n^2}, \quad \lambda = \frac{\frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{k^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} x_n^2\right)^2},$$

wobei k eine Integrationskonstante und λ der Multiplikator ist. Die Funktionen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ genügen sämtlich derselben homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \lambda \frac{x_i}{a^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

man kann sie daher durch zwei linear unabhängige Integrale x, y dieser Differentialgleichung homogen und linear ausdrücken, und zwar kann man die letzteren so wählen, daß

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x^2 + y^2,$$

womit das Problem auf das entsprechende dreidimensionale zurückgeführt wird.

(RUDIO)

2. *Geodätische Linien des n -dimensionalen Raumes.¹⁾*

Im Raum R_n der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sei die Länge einer „Kurve“

$$x_i = x_i(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

definiert durch das bestimmte Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} x_i' x_k'} dt, \quad \left(x_i' = \frac{dx_i}{dt}\right),$$

¹⁾ Vgl. BIANCHI-LUKAT, *Differentialgeometrie* (1899), p. 568.

wobei die a_{ik} gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind und die quadratische Differentialform

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k, \quad (a_{ki} = a_{ik})$$

definit und positiv ist.

Es soll die kürzeste, zwei gegebene Punkte des R_n verbindende Kurve („geodätische Linie“) bestimmt werden (§§ 66, 69, 70).

Lösung: Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien sind, wenn s als unabhängige Variable gewählt wird,

$$\sum_i a_{ih} \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{i,k} [ik]_h \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0, \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

wobei

$$[ik]_h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kh}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_h} \right)$$

das „Christoffel'sche Drei-Index-Symbol erster Art“ bedeutet.¹⁾

Dieses Resultat soll abgeleitet werden 1) indem man zunächst von einem beliebigen Parameter t ausgeht, 2) indem man von vorn herein s zur unabhängigen Variablen wählt.

3. Das im fünften Kapitel behandelte ebene Variationsproblem in Parameterdarstellung läßt sich auch als Lagrange'sches Funktionenproblem behandeln, wenn man den Bogen s als unabhängige Variable einführt. Es ist dann das Integral

$$J = \int_0^{s_2} F(x, y, x', y') ds$$

zu einem Extremum zu machen mit der Nebenbedingung

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

bei nicht vorgeschriebener oberen Grenze s_2 (§ 70, a)).

Hiernach die Extremalen für Beispiel I und XV zu bestimmen.

4. Wird die Aufgabe dahin modifiziert, daß die Länge der zulässigen Kurven vorgeschrieben ist, so hat man ein Lagrange'sches Problem mit festen Endpunkten, auf welches sich die Resultate von §§ 74–77 anwenden lassen.

Hiernach Beispiel II und XXI vollständig durchzuführen.

Dieselbe Methode läßt sich allgemein auf das in Kapitel X behandelte isoperimetrische Problem anwenden, wenn die Funktion $G(x, y, x', y')$ im Sinn von § 33, c) definit ist, da man dann das Integral

$$v = \int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y') dt$$

als unabhängige Variable einführen kann.

¹⁾ Ibid. p. 43.

5. Analoge Bemerkungen gelten für räumliche Variationsprobleme. Hier-
nach folgende Aufgaben als Lagrange'sche Probleme mit der Bogenlänge als
unabhängiger Variablen zu behandeln:

Beispiel XVI (*Geodätische Linien*). (LINDELÖF-MOIGNO)

Aufgabe Nr. 15 auf p. 298 (*Allgemeine Brachistochrone auf einer Fläche*).

(LINDELÖF-MOIGNO)

Aufgabe Nr. 2 auf p. 528 (*Spezielles isoperimetrisches Problem auf einer Fläche*).

(LINDELÖF-MOIGNO)

6*. Zwischen zwei gegebenen Punkten die kürzeste Raumkurve von gegebener
konstanter erster Krümmung $\frac{1}{R}$ zu ziehen (§ 71). (DELAUNAY)

Lösung¹⁾: Wenn man die Bogenlänge s als unabhängige Variable einführt
und setzt: $x' = \xi$, $y' = \eta$, $z' = \zeta$, so hat man ein Lagrange'sches Funktionen-
problem mit gemischten Bedingungen, bei welchem die obere Grenze s_2 nicht
vorgeschrieben ist. Bei passender Wahl der z -Achse findet man

$$ds = \frac{R(\zeta + a) d\zeta}{\sqrt{G(\zeta)}},$$

wobei: $G(\zeta) = (\zeta + a)^2(1 - \zeta^2) - c^2$. Die Größen a und c sind konstant.
Setzt man

$$\xi + i\eta = \varrho e^{i\varphi}, \quad x + iy = r e^{i\omega},$$

so findet man weiter

$$\varrho^2 = 1 - \zeta^2, \quad d\varphi = \frac{c d\zeta}{(1 - \zeta^2) \sqrt{G(\zeta)}}.$$

und nach geeigneter Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes in der x, y -
Ebene

$$r^2 = R^2[(\zeta + a)^2 - c^2], \quad d\omega = \frac{c(\zeta + a) \zeta d\zeta}{[(\zeta + a)^2 - c^2] \sqrt{G(\zeta)}}.$$

Setzt man

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{G(\zeta)}} = du,$$

so kann man sämtliche Variablen mittels der Funktionen σu , φu ausdrücken.
 $G(\zeta)$ hat genau dieselbe Form wie in Aufgabe Nr. 13 p. 532; daher dieselbe
Realitätsdiskussion wie dort.

Ausartungen: 1) Ein *Kreisbogen* ($c = 0$), zuerst von DELAUNAY an-
gegeben, von H. A. SCHWARZ²⁾ auf Hinlänglichkeit untersucht. Dies ist die ein-
zige mögliche Lösung, wenn die Tangentenrichtungen in beiden Endpunkten
nicht vorgeschrieben sind.

2) Eine *Schraubenlinie*, zuerst von TODHUNTER angegeben, von VENSKE
genauer untersucht.

¹⁾ Vgl. die *Dissertation* von O. VENSKE, Göttingen 1891, auch für die son-
stige Literatur über das Problem.

²⁾ Berliner Berichte, 1906, p. 365.

7. Für das Problem

$$\int f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx = \text{Minimum.}$$

a) nachzuweisen, daß stets der „Hauptfall“ eintritt (§§ 66, 69, d), 74).

(v. ESCHERICH)

b) die Bedingungen (II), (III), (IV) aufzustellen (§§ 66, 74, 75, 76).

(JACOBI, ZERMELO)

8*. Die Stabilitätsgrenzen für einen an seinen beiden Enden festgeklebten ebenen elastischen Draht zu bestimmen.¹⁾ (§ 69, 74, 75).

9*. Für das räumliche Variationsproblem in Parameterdarstellung ohne Nebenbedingungen:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, z, x', y', z') dt = \text{Minimum}$$

lauten die Hamilton'schen Formeln für die partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals $\mathfrak{B}(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_1} &= -F_{x'}|_1, & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y_1} &= -F_{y'}|_1, & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_1} &= -F_{z'}|_1, \\ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x_2} &= F_{x'}|_2, & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y_2} &= F_{y'}|_2, & \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_2} &= F_{z'}|_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Für das spezielle Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} G(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \quad (72)$$

folgt hieraus: Sind die beiden Endpunkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, resp. $P_2(x_2, y_2, z_2)$, auf zwei Raumkurven $\mathfrak{K}_1$, resp. $\mathfrak{K}_2$, beweglich, welche durch ihre respektiven Bogenlängen s_1 und s_2 dargestellt sind, und bezeichnet ω_1 , resp. ω_2 , den Winkel zwischen der Extremalen $P_1 P_2$ und der positiven Richtung von $\mathfrak{K}_1$ im Punkt P_1 , resp. der Kurve $\mathfrak{K}_2$ im Punkt P_2 , so lautet das Differential des Extremalenintegrals von P_1 nach P_2 :

$$d\mathfrak{B} = G(x_2, y_2, z_2) \cos \omega_2 ds_2 - G(x_1, y_1, z_1) \cos \omega_1 ds_1. \quad (73)$$

(THOMSON und TAIT)

Hiernach den folgenden Satz von THOMSON und TAIT zu beweisen:

Zieht man von den Punkten einer gegebenen Fläche $\mathcal{S}$ aus Extremalen für das Integral (72) senkrecht zur Fläche und schneidet auf jeder derselben von ihrem Schnittpunkt P mit der Fläche aus, nach derselben Seite hin, einen Bogen PQ ab, welcher für das Integral einen konstanten Wert liefert, so ist der geometrische Ort der Endpunkte Q eine Fläche, welche sämtliche Extremalen senkrecht schneidet (§ 78).

¹⁾ Siehe Aufgabe Nr. 21 auf p. 536 und die dort zitierte Dissertation von BORN.

10. Das Doppelintegral

$$\iint [G(x, y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2} + H(x, y, z)] dx dy$$

zu einem Extremum zu machen (§ 79, a).

Lösung: Die Extremalflächen sind charakterisiert durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{G} [XG_x + YG_y + ZG_z + H_z],$$

wo X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Normalen und ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind. (JELLETT)

11. *Unter allen geschlossenen Flächen, welche ein gegebenes Volumen einschließen, diejenige kleinste Oberfläche zu bestimmen (§ 79, d).*

Dabei sollen die zulässigen Flächen in räumlichen Polarkoordinaten in der Form

$$r = r(\theta, \varphi)$$

darstellbar sein.

Die Lagrange'sche Differentialgleichung aufzustellen und zu zeigen, daß die Kugel mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt derselben genügt.¹⁾

12. *Die Fläche niedrigsten Schwerpunktes bei gegebenem Flächeninhalt und gegebener Begrenzung zu konstruieren (§ 79, d).*

Lösung: Die positive z -Achse werde vertikal nach unten gewählt. Dann haben die Extremalflächen die charakteristische Eigenschaft, daß

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{N},$$

wo N das Stück der Flächennormale zwischen der Fläche und der konstanten horizontalen Ebene: $z + \lambda = 0$ bedeutet. (JELLETT)

13. Ein gegebenes Quantum homogener Materie ist nach oben begrenzt von einer horizontalen Ebene, nach unten von einer Fläche von gegebenem Flächeninhalt. Die Fläche so zu bestimmen, daß der Schwerpunkt der Masse möglichst tief liegt (§ 79, d).

Lösung: Die positive z -Achse werde vertikal nach unten gewählt. Dann haben die Extremalflächen die charakteristische Eigenschaft, daß

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{z + \lambda}{\mu},$$

wo λ und μ die beiden isoperimetrischen Konstanten sind.

Überdies muß die Fläche die gegebene horizontale Ebene senkrecht schneiden (§ 80, c). (LINDELÖF-MOIGNO)

¹⁾ Wegen des Nachweises, daß die Kugel wirklich die kleinste Oberfläche bei gegebenem Volumen besitzt, vgl. H. A. SCHWARZ, Göttinger Nachrichten, 1884, p. 1; MINKOWSKI, Mathematische Annalen, Bd. LVII (1903), p. 447; und die auf p. 661, Fußnote ²⁾ zitierte Dissertation von J. O. MÜLLER.

14. Unter allen Flächen von gegebener Begrenzung und gegebenem Flächeninhalt diejenige zu bestimmen, deren Potential in Beziehung auf einen gegebenen Punkt ein Extremum ist (bei Zugrundelegung des Newton'schen Anziehungsgesetzes).

Lösung: Die Extremalflächen haben die charakteristische Eigenschaft, daß in jedem ihrer Punkte

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = -\frac{d}{r^2 + \lambda r^3}.$$

Darin bedeutet r den Abstand des Flächenpunktes P von dem angezogenen Punkt; d den senkrechten Abstand des angezogenen Punktes von der Tangentialebene an die Fläche im Punkt P ; λ die isoperimetrische Konstante.

(JELLETT)

15*. Die Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit in einem Gefäß mit vertikaler zylindrischer Wandung unter der Einwirkung der Schwere und der Kapillarkräfte zu bestimmen (§ 79, d), § 80, c).

Lösung: Die positive z -Achse werde vertikal nach oben gewählt; der Boden des Gefäßes sei eine horizontale Ebene, welche wir zur x, y -Ebene wählen. Es bezeichne V das Volumen der Flüssigkeit, H die Höhe des Schwerpunktes derselben über dem Boden des Gefäßes, ferner T den Inhalt desjenigen Teiles der Oberfläche der Flüssigkeit, welcher die Wand berührt, U den Inhalt des freien Teiles der Oberfläche, welcher entlang der Kurve $\mathfrak{L}$ an die Wand grenzen möge; endlich seien α, β zwei von dem Verhältnis der Schwere zur Intensität der Kapillarkräfte abhängige Konstanten.

Als dann ist die Gleichgewichtslage der Flüssigkeit nach GAUSS¹⁾ dadurch charakterisiert, daß der Ausdruck

$$VH + (\alpha^2 - 2\beta^2)T + \alpha^2 U \quad (74)$$

ein Minimum wird mit der Nebenbedingung, daß das Volumen V einen vorgeschriebenen Wert haben soll, während die Kurve $\mathfrak{L}$ nur der Beschränkung unterworfen ist, auf dem gegebenen Zylinder zu liegen.

Betrachtet man zunächst Variationen, bei welchen $\mathfrak{L}$ ungeändert bleibt, so bleibt T konstant und man hat ein isoperimetrisches Problem, wie das in § 79, d) behandelte. Man erhält als charakteristische Eigenschaft der freien Oberfläche die Relation (LAPLACE)

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = \frac{z + \lambda}{\alpha^2}, \quad (75)$$

wo λ die isoperimetrische Konstante bedeutet.

Bei Variationen, welche die Kurve $\mathfrak{L}$ ändern, ist auch das einfache Integral T zu berücksichtigen. Eine leichte Modifikation der in § 79, c) und d) durchgeführten Schlüsse führt auf das Resultat (LAPLACE, GAUSS), daß entlang der Kurve $\mathfrak{L}$

$$\sin \frac{i}{2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

¹⁾ Werke, Bd. V, pp. 55, 290, wo die Aufgabe für beliebige Gestalt des Gefäßes durchgeführt wird. Vgl. auch KNESER, Lehrbuch, pp. 274, 280, wo die Aufgabe in Parameterdarstellung behandelt wird.

sein muß, wenn i den Neigungswinkel zwischen der Tangentialebene der freien Oberfläche und der vertikalen Richtung bedeutet. (GAUSS.)

16*. Gleichgewichtsfigur eines an einer horizontalen Ebene hängenden Tropfens¹⁾ (§ 79, d), (§ 80, c)).

Lösung: Es muß wieder der Ausdruck (74) ein Minimum werden mit der Nebenbedingung $V = \text{konst.}$ Dabei ist hier

$$T = \iint dx dy$$

und $\beta = \alpha$.

Die Gleichung (75) gilt auch hier. Die Grenzgleichung geht in die Bedingung über, daß die freie Oberfläche des Tropfens die horizontale Ebene berühren muß.

17. Die „Kantenbedingung“ für diskontinuierliche Lösungen (Flächen der Klasse D'') für das Integral (19) aufzustellen (§ 80, b)).

Lösung: Ist $\mathfrak{C}$ die Kurve in der u, v -Ebene, an welcher die partiellen Ableitungen von x, y, z Sprünge erleiden, so müssen beim Überschreiten von $\mathfrak{C}$ die Ausdrücke

$$F_{x_u} v' - F_{x_v} u', \quad F_{y_u} v' - F_{y_v} u', \quad F_{z_u} v' - F_{z_v} u'$$

stetig bleiben, wobei die Ableitungen u', v' entlang der Kurve $\mathfrak{C}$ genommen sind. (KOB.)

18. Zu beweisen, daß die partielle Differentialgleichung (57) befriedigt wird durch die Funktion

$$u = \Re \left[G'(s) - \frac{2\bar{s}}{1+s\bar{s}} G(s) \right], \quad (76)$$

wenn $G(s)$ eine beliebige analytische Funktion von $s = \xi + i\eta$ ist, und $\bar{s} = \xi - i\eta$. (SCHWARZ.)

19*. Die Schraubenfläche

$$x + y \operatorname{tg} z = 0 \quad (77)$$

ist eine Minimalfläche. Bei fester Begrenzung die zweite Variation desjenigen Teiles derselben zu untersuchen, welcher zwischen den beiden Ebenen

$$z = -\alpha\pi \quad \text{und} \quad z = +\alpha\pi$$

und zugleich innerhalb der Zylinderfläche $x^2 + y^2 = R^2$ liegt (§ 81).

Lösung: Es sei

$$\beta = \log(R + \sqrt{1 + R^2})$$

und es bezeichne

$$U(\varrho, \lambda) = \lambda \operatorname{Ch} \lambda \varrho \operatorname{Ch} \varrho - \operatorname{Sh} \lambda \varrho \operatorname{Sh} \varrho.$$

¹⁾ Vgl. *Encyklopädie* V 9 (MINKOWSKI), p. 572 und E. SWIFT, *Über die Form und Stabilität gewisser Flüssigkeitstropfen*, Dissertation, Göttingen 1907, wo eine Anzahl spezieller Fälle im einzelnen durchgeführt werden.

Wenn dann $\alpha < \frac{1}{2}$, so ist $U\left(\varrho, \frac{1}{2\alpha}\right)$ positiv für jedes ϱ , und die zweite Variation ist stets positiv. Ist dagegen $\alpha > \frac{1}{2}$, so besitzt die Gleichung

$$U\left(\varrho, \frac{1}{2\alpha}\right) = 0$$

stets eine positive Wurzel β_0 ; die zweite Variation ist dann stets positiv, wenn $\beta < \beta_0$, sie kann dagegen negativ gemacht werden, wenn $\beta > \beta_0$.

Andeutung: Für die Schraubenfläche (77) ist

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Mache von Nr. 18 Gebrauch, wähle

$$G(s) = s(s^\lambda - s^{-\lambda}), \quad \lambda = \frac{1}{2\alpha}$$

und setze $s = e^{\varrho + i\varphi}$.

(SCHWARZ)

20. Das dreifache Integral

$$J = \iiint f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz$$

durch passende Wahl der Funktion u von x, y, z bei unveränderlichem Integrationsbereich zu einem Extremum zu machen.

Lösung: Die Lagrange'sche Differentialgleichung lautet

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z} f_{u_z} = 0,$$

wobei die angedeuteten Differentiationen sich auch auf die in u, u_x, u_y, u_z als Argumente enthaltenen Variablen x, y, z beziehen.

Andeutung: Wende den allgemeinen Green'schen Satz für dreifache Integrale auf die Transformation der ersten Variation an.

Beispiel: $f = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, (Dirichlet'sches Prinzip für den Raum).