Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Dreizehntes Kapitel. Elemente der Theorie der Extrema von Doppelintegralen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Dreizehntes Kapitel.

Elemente der Theorie der Extrema von Doppelintegralen.

§ 79. Die erste Variation von Doppelintegralen mit x, y als unabhängigen Variabeln.

Die Theorie der Extrema von Doppelintegralen ist noch nicht zu einem ähnlichen Abschluß gelangt wie die analoge Theorie der einfachen Integrale. In der Tat läßt sich zwar ein Teil der Betrachtungen, die wir bei einfachen Integralen durchgeführt haben, ohne große Mühe auf Doppelintegrale ausdehnen, bei einem anderen Teil dagegen wachsen die Schwierigkeiten beim Übergang zu Doppelintegralen ganz außerordentlich, was in erster Linie damit zusammenhängt, daß hier an Stelle der gewöhnlichen Differentialgleichungen partielle Differentialgleichungen treten. Wir werden uns daher bei der folgenden Darstellung auf die einfachste Klasse von Problemen und auf die einfachsten darauf bezüglichen Fragestellungen beschränken.

Wir unterscheiden wieder „Funktionenprobleme", bei denen eine Funktion zweier unabhängiger Variabeln zu bestimmen ist, und „Flächenprobleme", bei welchen es sich um die Bestimmung einer Fläche in allgemeiner Parameterdarstellung handelt. Die Theorie der ersten Variation werden wir für beide Probleme durchführen (§§ 79, 80), uns dagegen bei der Theorie der zweiten Variation (§ 81) und der hinreichenden Bedingungen (§ 82) auf den Fall des Funktionenproblems beschränken.

a) **Die Lagrange'sche Differentialgleichung**[1]:

Es sei einerseits eine Funktion $f(x, y, z, p, q)$ der unabhängigen Variabeln x, y, z, p, q und andererseits eine geschlossene Raumkurve $\mathfrak{L}$ gegeben. Wir betrachten die Aufgabe: *Unter allen, in rechtwinkligen Koordinaten in der Form*

$$z = z(x, y) \tag{1}$$

[1] Vgl. dazu die Darstellung von Goursat, *Cours d'Analyse*, Bd. II (1905), Nr. 456, der wir im wesentlichen gefolgt sind.

darstellbaren Flächen[1]), *welche von der Kurve* $\mathfrak{L}$ *begrenzt werden, diejenige zu bestimmen, für welche das Doppelintegral*

$$J = \iint f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy \tag{2}$$

den kleinsten Wert annimmt.

Dabei ist in dem Integranden des Doppelintegrals

$$z = z(x, y), \qquad p = z_x(x, y), \qquad q = z_y(x, y)$$

zu setzen und das Integral ist über die Projektion $\mathfrak{A}$ der Fläche (1) auf die x, y-Ebene zu erstrecken.

Über die Funktion $f(x, y, z, p, q)$ wird vorausgesetzt, daß sie von der Klasse C'' ist, wenn der Punkt (x, y, z) in einem gewissen Bereich $\mathfrak{R}$ des Raumes liegt und p und q beliebige endliche Werte haben.

Die geschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ soll ganz im Inneren dieses Bereiches $\mathfrak{R}$ liegen und, ebenso wie ihre Projektion $\mathfrak{K}$ auf die x, y-Ebene, eine gewöhnliche[2]) Kurve ohne mehrfache Punkte sein. Überdies soll es eine ganze Zahl n geben derart, daß jede Gerade der x, y-Ebene, welche zur x-Achse oder zur y-Achse parallel ist, die Kurve $\mathfrak{K}$ höchstens in n Punkten trifft, es sei denn, daß sie eine ganze Strecke mit ihr gemein hat. Das Innere[3]) der Kurve $\mathfrak{K}$ zusammen mit der Kurve $\mathfrak{K}$ selbst ist dann der oben mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete Integrationsbereich.

Von den „zulässigen Flächen" wird, abgesehen davon, daß sie von der Kurve $\mathfrak{L}$ begrenzt sein sollen, vorausgesetzt, daß sie ganz im Inneren des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegen und von der Klasse[4]) D' sein sollen. Unter diesen Voraussetzungen hat das Integral (2) für jede zulässige Fläche einen bestimmten endlichen Wert.[5])

Wir nehmen an, wir hätten eine zulässige Fläche $\mathfrak{F}_0$ von der Klasse C'' gefunden, — dieselbe sei durch die Gleichung (1) dargestellt —, welche dem Integral J einen nicht größeren Wert erteilt als jede andere zulässige Fläche $\mathfrak{F}$ in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{F}_0$. Ist dann $\zeta(x, y)$ irgend eine Funktion, welche in $\mathfrak{A}$ von der Klasse D' ist und entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}$ verschwindet:

$$\zeta\,\Big|^{\mathfrak{K}} = 0, \tag{3}$$

[1]) Das Wort „Fläche" wird hier überall im Sinn von „Flächenstück" gebraucht.

[2]) Vgl. die Definition in § 25, a), die sich unmittelbar auf Raumkurven übertragen läßt.

[3]) Vgl. A VI 2.

[4]) D. h. die Funktion $z(x, y)$ soll stetig sein im Bereich $\mathfrak{A}$, und dieser Bereich soll sich in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegen lassen, in deren jedem $z(x, y)$ von der Klasse C' ist, wobei die Trennungslinien denselben allgemeinen Charakter haben sollen wie die Kurve $\mathfrak{K}$.

[5]) Vgl. Jordan, *Cours d'Analyse,* Bd. I, Nr. 66; Stolz, *Grundzüge,* etc., Bd. III, p. 69.

so stellt die Gleichung

$$z = z(x,y) + \varepsilon\zeta(x,y), \quad (x,y) \text{ in } \mathfrak{A} \tag{4}$$

bei hinreichend kleinem $|\varepsilon|$ eine Schar von zulässigen Variationen der Fläche $\mathfrak{F}_0$ dar. Daher muß die Funktion

$$J(\varepsilon) = \iint\limits_{\mathfrak{A}} f(x, y, z + \varepsilon\zeta, z_x + \varepsilon\zeta_x, z_y + \varepsilon\zeta_y)\,dx\,dy$$

für $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzen, es muß also[1])

$$\delta J \equiv \varepsilon \iint\limits_{\mathfrak{A}} (f_z\zeta + f_p\zeta_x + f_q\zeta_y)\,dx\,dy = 0$$

sein, wobei die Argumente in den Ableitungen von f sich auf die Fläche $\mathfrak{F}_0$ beziehen. Nun ist aber[2])

$$f_p\zeta_x = \frac{\partial}{\partial x} f_p\zeta - \zeta\frac{\partial f_p}{\partial x}, \qquad f_q\zeta_y = \frac{\partial}{\partial y} f_q\zeta - \zeta\frac{\partial f_q}{\partial y}$$

und nach dem Green'schen Satz[3]) ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{A}} \frac{\partial(f_p\zeta)}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\mathfrak{K}} f_p\zeta\,dy, \qquad \iint\limits_{\mathfrak{A}} \frac{\partial(f_q\zeta)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\mathfrak{K}} f_q\zeta\,dx,$$

wobei die Linienintegrale auf der rechten Seite im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers über die Kurve $\mathfrak{K}$ zu erstrecken sind, wenn, wie wir stets voraussetzen, die positive y-Achse links von der positiven x-Achse liegt. Auf diese Weise erhalten wir für die erste Variation den Ausdruck

$$\delta J = \varepsilon \iint\limits_{\mathfrak{A}} \zeta\left(f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q\right) dx\,dy + \varepsilon \int\limits_{\mathfrak{K}} \zeta(f_p\,dy - f_q\,dx). \tag{5}$$

---

[1]) Wegen der Differentiation eines Doppelintegrals nach einem Parameter vgl. Jordan, loc. cit. Nr. 83.

[2]) Diese der partiellen Integration von § 5, a) entsprechende Transformation der ersten Variation rührt von Lagrange her, die Einführung des Linienintegrals von Gauss (1830), *Werke*, Bd. V, p. 60. Dabei ist von der vorausgesetzten Existenz und Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen von z Gebrauch gemacht. Will man nur die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitungen voraussetzen, so hat man analog wie in § 5, c) zu verfahren; mit dieser Verallgemeinerung der Du-Bois-Reymond'schen Methode beschäftigen sich Hilbert, Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), p. 166; Mason, Ibid. Bd. LXI (1905), p. 450; Hadamard, Comptes Rendus, Bd. CXLIV (1907), p. 1092. Vgl. unten Beispiel XXX.

[3]) Vgl. z. B. Stolz, *Grundzüge*, Bd. III, p. 94.

Wegen (3) ist das Linienintegral gleich Null, und es muß also das Doppelintegral für alle zulässigen Funktionen ζ verschwinden.

Dem Fundamentallemma von § 5, b) entspricht nun hier der Satz:

Ist die Funktion $M(x, y)$ stetig im Bereich $\mathfrak{A}$, und ist

$$\iint\limits_{\mathfrak{A}} \zeta M \, dx \, dy = 0 \tag{6}$$

für alle Funktionen ζ, welche in $\mathfrak{A}$ von der Klasse C' sind und entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{A}$ verschwinden, so ist

$$M(x, y) \equiv 0 \quad \text{in } \mathfrak{A}.$$

Denn angenommen, es sei $M(x_0, y_0) \neq 0$, etwa > 0, für einen inneren Punkt $P_0(x_0, y_0)$ von $\mathfrak{A}$, so können wir die positive Größe ϱ so klein wählen, daß $M(x, y) > 0$ in der Kreisfläche $\mathfrak{C}$ mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt P_0, und daß gleichzeitig dieser Kreis ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt. Dann hat die durch die Festsetzung

$$\zeta = \begin{cases} [\varrho^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^2 & \text{in } \mathfrak{C} \\ 0 & \text{außerhalb } \mathfrak{C} \end{cases}$$

definierte Funktion ζ die verlangten Eigenschaften und macht trotzdem das Integral (6) positiv. Daraus folgt, daß $M(x, y) \equiv 0$ sein muß, zunächst im Innern von $\mathfrak{A}$, und wegen der Stetigkeit von M alsdann auch auf der Begrenzung $\mathfrak{K}$.

Wendet man dieses Lemma auf die Gleichung $\delta J = 0$ in der zuletzt erhaltenen Form an, so erhält man den Satz[1]):

Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum des Doppelintegrals J besteht darin, daß die Funktion z der partiellen Differentialgleichung

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0 \tag{I}$$

genügen muß.

Dabei sind die Differentiationen nach x und y so zu verstehen, daß vor der Differentiation in f_p und f_q für z, p, q die Funktionen

[1]) Zuerst von LAGRANGE (1760) für den Fall der Minimalflächen gegeben, vgl. *Oeuvres*, Bd. I, p. 356.

Mit dem „*inversen Problem*" (vgl. § 6, c)), die Funktion f so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung (I) mit einer vorgegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung identisch wird, beschäftigen sich HIRSCH, Mathematische Annalen, Bd. XLIX (1897), p. 49; HERTZ in seiner Dissertation „*Ueber partielle Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen*" (Kiel, 1903); KÜRSCHAK, Mathematische Annalen Bd. LX (1904), p. 157 und Bd. LXII (1906), p. 148; und KÖNIGSBERGER, Berliner Berichte, 1905, p. 205.

$z(x, y)$, $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ einzusetzen sind, so daß die Differentialgleichung in ausgeschriebener Form lautet:

$$f_{pp}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2f_{pq}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+f_{qq}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+f_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+f_{py}\frac{\partial z}{\partial y}+f_{px}+f_{qy}-f_z=0. \quad (7)$$

Man hat es also mit einer *partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung* von dem nach MONGE und AMPÈRE benannten Typus[1]) zu tun.

Man hätte nun weiter zunächst die allgemeine Lösung derselben zu finden und die darin enthaltenen willkürlichen Funktionen so zu bestimmen, daß die Funktion z entlang der Kurve $\mathfrak{R}$ die durch die Kurve $\mathfrak{L}$ vorgeschriebenen Randwerte annimmt, eine Aufgabe von ungleich größerer Schwierigkeit als die entsprechende Aufgabe im Fall des einfachen Integrals.

Jede Fläche, welche der Lagrange'schen Differentialgleichung (I) genügt, nennen wir eine *„Extremalfläche“*[2]) für das Doppelintegral (2).

Beispiel XXIX: Das Integral

$$J=\iint(p^2+q^2)\,dx\,dy \tag{8}$$

zu einem Minimum zu machen.

Hier findet man als Differentialgleichung des Problems die *Laplace'sche Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{9}$$

deren allgemeines Integral bekanntlich[3]) ist

$$z=\Re\varphi(x+iy),$$

wo φ eine willkürliche analytische Funktion von $x+iy$ bedeutet und der Buchstabe $\Re$ anzeigt, daß der reelle Teil derselben genommen werden soll.

Die Frage nach der Existenz einer Lösung, welche durch die gegebene geschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ geht, ist identisch mit dem berühmten *Dirichlet'schen Problem.*[4])

Hat man eine der Differentialgleichung (9) genügende Fläche gefunden, welche von der gegebenen Kurve $\mathfrak{L}$ begrenzt wird, so liefert dieselbe stets ein *absolutes Minimum* für das Integral (8). Ist nämlich $\omega(x, y)$ eine beliebige Funktion von x, y, welche in $\mathfrak{A}$ von der Klasse C' ist und entlang der Begrenzung $\mathfrak{R}$ verschwindet, so findet man für die totale Variation des Integrals (8) beim Übergang von z zu $z+\omega$

$$\Delta J=2\iint(z_x\omega_x+z_y\omega_y)\,dx\,dy+\iint(\omega_x^2+\omega_y^2)\,dx\,dy.$$

[1]) Vgl. z. B. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Chap. II.

[2]) KNESER sagt statt dessen einfach „Extremale“, vgl. *Lehrbuch*, p. 271.

[3]) Vgl. z. B. PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. II (1905), p. 6.

[4]) Vgl. darüber z. B. PICARD, loc. cit. pp. 36—50, 81—108.

Wie sich aus der oben allgemein durchgeführten Transformation der ersten Variation ergibt, ist das erste Integral gleich Null, weil z der Differentialgleichung (9) genügt und ω entlang dem Rande verschwindet. Es ist also in der Tat $\Delta J > 0$, außer wenn $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, d. h. $\omega \equiv 0$ in $\mathfrak{A}$. Dasselbe gilt auch noch, wenn die Funktion ω von der Klasse D' ist, wie man sich überzeugt, wenn man vor der erwähnten Transformation das fragliche Integral in eine Summe von Integralen zerlegt, entsprechend den Teilbereichen von $\mathfrak{A}$, in welchen ω von der Klasse C' ist.

Kann man a priori die Existenz eines Minimums für das Integral (8) beweisen, so folgt daraus die Existenz einer Lösung der partiellen Differentialgleichung (9) mit den vorgeschriebenen Randwerten (*Dirichlet'sches Prinzip*) [1].

Beispiel V [2]: *Die Fläche kleinsten Inhalts zu bestimmen, welche von einer gegebenen geschlossenen Raumkurve begrenzt wird.*

Hier hat man das Integral

$$J = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy \tag{10}$$

zu einem Minimum zu machen. Die Lagrange'sche Differentialgleichung lautet [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

oder wenn man die Differentiationen ausführt und von den in der Flächentheorie üblichen Abkürzungen

$$p = z_x, \quad q = z_y, \quad r = z_{xx}, \quad s = z_{xy}, \quad t = z_{yy}$$

Gebrauch macht,

$$r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung hat eine einfache geometrische Bedeutung. [4] Die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 in einem Punkt einer in der Form (1) dargestellten Fläche sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung [5]

$$(rt - s^2)\varrho^2 - \{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\varrho + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Daraus folgt für die mittlere Krümmung der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)^3}. \tag{12}$$

Die gesuchte Fläche hat also die charakteristische Eigenschaft, daß in jedem ihrer Punkte *die mittlere Krümmung gleich Null* ist.

Jede Fläche, welche diese Eigenschaft besitzt, heißt eine *Minimalfläche.* Das allgemeine Integral [6] der Differentialgleichung (11) ist zuerst von Monge

---

[1]) Vgl. § 55, insbesondere die Fußnote [1]) auf p. 421.

[2]) Vgl. p. 7.

[3]) Schon von Lagrange gefunden (1760).

[4]) Zuerst von Meusnier angegeben (1776).

[5]) Vgl. z. B. Knoblauch, *Krumme Flächen,* p. 40.

[6]) Vgl. darüber auch p. 667.

angegeben worden (1784). Mit der Aufgabe, eine Minimalfläche zu konstruieren, welche von einer gegebenen geschlossenen Raumkurve begrenzt wird, hat sich besonders H. A. SCHWARZ[1]) beschäftigt. Experimentell wird dieselbe durch die Gleigewichtslage einer zwischen der Begrenzung ausgespannten Flüssigkeitslamelle gelöst (*Plateau'sches Problem*).[2])

Beispiel XXX: Das Integral

$$J=\iint (p^2-q^2)\,dx\,dy$$

zu einem Extremum zu machen.

Die Lagrange'sche Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$z=\varphi(x+y)+\psi(x-y),$$

wo φ und ψ zwei willkürliche Funktionen sind.

Das Beispiel illustriert[3]) zwei Eigentümlichkeiten von Variationsproblemen mit zwei unabhängigen Variabeln, welche im Fall einer unabhängigen Variabeln kein Analogon haben.

1) *Die Lagrange'sche Differentialgleichung eines analytischen Variationsproblems kann nicht-analytische Lösungen besitzen.* Man braucht nur für φ und ψ nicht-analytische Funktionen der Classe C'' zu wählen.

2) *Die erste Variation kann verschwinden, ohne daß die Lagrange'sche Differentialgleichung befriedigt wird.* Wählt man für φ und ψ zwei Funktionen, welche stetige erste, aber keine zweiten Ableitungen besitzen, so erhält man eine Funktion z, welche der Lagrange'schen Differentialgleichung nicht genügt, aber trotzdem die erste Variation für alle zulässigen Funktionen ζ der Klasse C'' zum Verschwinden bringt, da hier

$$f_z\zeta+f_p\zeta_x+f_q\zeta_y=\frac{\partial}{\partial y}F\zeta_x-\frac{\partial}{\partial x}F\zeta_y,$$

wenn

$$F=2\,[\varphi(x+y)-\psi(x-y)],$$

und

$$\zeta_x dx+\zeta_y dy=0 \text{ entlang } \mathfrak{K}.$$

Der Du-Bois-Reymond'sche Einwand ist also bei Doppelintegralen viel einschneidender als bei einfachen Integralen.[4])

---

[1]) *Gesammelte mathematische Abhandlungen,* Bd. I.

[2]) PLATEAU, *Statique expérimentale et théorique des liquides* (1873); vgl. auch *Encyklopädie* V 9, Nr. 10 (MINKOWSKI).

[3]) Nach HADAMARD, vgl. die Fußnote [2]) auf p. 654. Die beiden Eigentümlichkeiten hängen damit zusammen, daß das vorliegende Beispiel kein „reguläres Variationsproblem" ist, vgl. p. 675 Fußnote [1]).

[4]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 10, 20 am Ende von Kap. XIII.

b) Ausartung der Lagrange'schen Differentialgleichung in eine Identität:[1]

Für spätere Anwendung betrachten wir noch den Fall, wo die Lagrange'sche Differentialgleichung (I) in eine Identität degeneriert, und zwar soll dies in dem Sinn stattfinden, daß die Differentialgleichung in ihrer ausgeschriebenen Form (7)

$$f_{pp}r + 2f_{pq}s + f_{qq}t + f_{pz}p + f_{qz}q + f_{px} + f_{py} - f_z = 0$$

für jeden Punkt (x, y, z) in einem gewissen, im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{R}_0$ und für alle endlichen Wertsysteme p, q, r, s, t erfüllt sein soll.

Man zeigt leicht, daß hierfür notwendig und hinreichend ist, daß die Funktion f von der Form

$$f = L(x, y, z) + M(x, y, z)p + N(x, y, z)q$$

ist, und die Funktionen L, M, N in $\mathfrak{R}_0$ identisch der Relation

$$L_z = M_x + N_y$$

genügen.

Es sei jetzt eine diesen Bedingungen genügende Funktion f gegeben; die Funktionen L, M, N seien im Bereich $\mathfrak{R}_0$ von der Klasse C' und überdies möge der Bereich $\mathfrak{R}_0$ in Beziehung auf die z-Richtung konvex[2]) sein und die vorgegebene geschlossene Kurve $\mathfrak{L}$ enthalten.

Dann ist der Wert des Doppelintegrals (2), genommen über irgend eine in der Form (1) darstellbare Fläche von der Klasse C', welche von der Kurve $\mathfrak{L}$ begrenzt wird und ganz in $\mathfrak{R}_0$ liegt, nur von der Begrenzungskurve $\mathfrak{L}$, nicht aber von der sonstigen Gestalt der Fläche abhängig.

Denn sind

$$z = z_1(x,y) \quad \text{und} \quad z = z_2(x,y),$$
$$(x,y) \text{ in } \mathfrak{A},$$

zwei diesen Bedingungen genügende Flächen, so genügt auch jede Fläche der Schar

$$z = z_1(x,y) + \alpha(z_2(x,y) - z_1(x,y)) \equiv Z(x,y;\alpha),$$
$$(x,y) \text{ in } \mathfrak{A};\ 0 \overline{\gtrless} \alpha \overline{\gtrless} 1,$$

---

[1]) Vgl. die analogen Betrachtungen in § 6, b) und Jellett, *Treatise on the Calculus of Variations*, p. 340; ferner wegen verschiedener Verallgemeinerungen Königsberger, Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 118.

[2]) D. h. sind P_1 und P_2 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{R}_0$ mit denselben x, y-Koordinaten, so liegt stets die ganze Strecke $P_1 P_2$ in $\mathfrak{R}_0$.

denselben Bedingungen. Berechnet man jetzt die Ableitung des Doppelintegrals

$$J(\alpha) = \iint\limits_{\mathfrak{A}} f(x, y, Z, Z_x, Z_y)\, dx\, dy$$

nach α und benutzt dabei die unter a) bei der Berechnung von δJ angewandte Umformung[1]), so ergibt sich

$$J'(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \gtreqless \alpha \gtreqless 1.$$

Denn in der der Gleichung (5) entsprechenden Formel verschwindet das Doppelintegral, weil nach Voraussetzung die Lagrange'sche Differentialgleichung (I) in dem obigen Sinn identisch erfüllt ist, und das Linienintegral, weil $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ entlang der Kurve $\mathfrak{K}$. Hieraus folgt aber, daß $J(0) = J(1)$, d. h. die beiden Flächen liefern für das Doppelintegral J denselben Wert, was zu beweisen war.

Umgekehrt zeigt man leicht, daß das identische Erfülltsein der Lagrange'schen Differentialgleichung zugleich die notwendige Bedingung für die Invarianz des Doppelintegrals in dem angegebenen Sinn ist.

c) **Der einfachste Fall variabler Begrenzung:**

Die Formel (5) für die erste Variation führt auch leicht zur Erledigung des Falles, wo die Begrenzung $\mathfrak{L}$ der gesuchten Fläche zwar nicht selbst gegeben ist, wohl aber ihre Projektion $\mathfrak{K}$ auf die x, y-Ebene, d. h. also des Falles, wo *die Kurve $\mathfrak{L}$ der Bedingung unterworfen ist, auf einem gegebenen, zur x, y-Ebene senkrechten Zylinder zu liegen.*

Man schließt zunächst durch Betrachtung von Variationen, welche die Begrenzung nicht ändern, daß die gesuchte Fläche auch in diesem Fall der Differentialgleichung (I) genügen muß, also eine *Extremalfläche* sein muß. Man betrachtet dann weiter eine beliebige Variation der Form (4), welche die Begrenzung auf dem angegebenen Zylinder variiert. Dabei ist für das Integral $J(\varepsilon)$ der Integrationsbereich derselbe wie für das Grundintegral $J(0)$. Daher ändert sich nichts an der obigen Transformation der ersten Variation, und man erhält, da jetzt ζ längs der Kurve $\mathfrak{K}$ nicht verschwindet, die weitere Bedingung

$$\int_{s_1}^{s_2} \zeta \left(f_p \frac{dy}{ds} - f_q \frac{dx}{ds} \right) ds = 0,$$

[1]) Bei dieser Umformung muß vorausgesetzt werden, daß f_p und f_q von der Klasse C' sind; dazu genügt es im gegenwärtigen Fall wegen der speziellen Form von f, daß Z von der Klasse C' ist.

wobei wir auf der Kurve $\mathfrak{K}$ den Bogen s als Parameter eingeführt haben. Hieraus schließt man leicht, daß wegen der Willkürlichkeit von ζ der Faktor von ζ entlang der Kurve $\mathfrak{K}$ verschwinden muß, daß also die „*Grenzgleichung*"

$$f_p \frac{dy}{ds} - f_q \frac{dx}{ds} \Big|^{\mathfrak{K}} = 0 \tag{13}$$

erfüllt sein muß.

Für die beiden Beispiele XXIX und V lautet die Grenzgleichung

$$p \frac{dy}{ds} - q \frac{dx}{ds} \Big|^{\mathfrak{K}} = 0.$$

Nun sind aber

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

die Richtungskosinus der (positiven) Normalen der Extremalfläche, dagegen

$$\frac{dy}{ds}, \qquad -\frac{dx}{ds}, \qquad 0$$

diejenigen der Normalen des gegebenen Zylinders; die Grenzgleichung drückt also aus, daß in jedem Punkt der Begrenzung $\mathfrak{L}$ *die Extremalfläche den Zylinder senkrecht schneiden* muß.[1])

d) Die Euler'sche Regel für Doppelintegrale:[2])

Auch die Euler'sche Regel für isoperimetrische Probleme läßt sich leicht auf Doppelintegrale übertragen. Sind die zulässigen Flächen außer den unter a) angegebenen Bedingungen noch der isoperimetrischen Bedingung unterworfen, daß sie einem zweiten Doppelintegral derselben Form

$$K = \iint\limits_{\mathfrak{A}} g(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

einen vorgeschriebenen Wert l erteilen sollen, so betrachte man wie in § 59, a) Variationen von der Form

$$z = z(x, y) + \varepsilon \zeta(x, y) + \varepsilon_1 \zeta_1(x, y) \equiv Z(x, y; \varepsilon, \varepsilon_1),$$

wobei $\zeta(x, y)$, $\zeta_1(x, y)$ beliebige Funktionen der Klasse D' sind, welche

[1]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 15, 16 am Ende von Kap. XIII.

[2]) Für die weitere Theorie der isoperimetrischen Probleme bei Doppelintegralen verweisen wir auf Kobb, Acta Mathematica, Bd. XVII (1893), p. 321 und J. O. Müller, „*Über die Minimaleigenschaft der Kugel*", Dissertation, Göttingen 1903.

entlang der Kurve $\mathfrak{K}$ verschwinden, während die Größen $\varepsilon, \varepsilon_1$ Konstanten sind, welche der Gleichung

$$K(\varepsilon, \varepsilon_1) \equiv \iint\limits_{\mathfrak{A}} g(x, y, Z, Z_x, Z_y)\, dx\, dy = l \tag{14}$$

genügen. Die Funktion

$$J(\varepsilon, \varepsilon_1) \equiv \iint\limits_{\mathfrak{A}} f(x, y, Z, Z_x Z_y)\, dx\, dy$$

muß dann an der Stelle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ ein Extremum mit der Nebenbedingung (14) besitzen. Indem man genau wie auf p. 458, Fußnote [1]) weiter schließt, erhält man das Resultat, daß die gesuchte Fläche der partiellen Differentialgleichung

$$h_z - \frac{\partial}{\partial x} h_p - \frac{\partial}{\partial y} h_q = 0 \tag{15}$$

genügen muß, wobei

$$h = f + \lambda g$$

und λ eine Konstante ist. Ausgenommen ist wieder der Fall, wo die Fläche zugleich Extremalfläche für das Integral K ist.

Für den unter c) betrachteten speziellen Fall variabler Begrenzung lautet hier die Grenzgleichung:

$$h_p \frac{dy}{ds} - h_q \frac{dx}{ds}\Big|^{\mathfrak{K}} = 0.$$

Beispiel XXXI: Unter allen Flächen, welche von einer gegebenen geschlossenen Kurve $\mathfrak{L}$ begrenzt werden und zusammen mit dem die Kurve $\mathfrak{L}$ auf die x, y-Ebene projizierenden Zylinder und dessen Basis in der x, y-Ebene ein *gegebenes Volumen* einschließen, diejenige zu bestimmen, welche den *kleinsten Flächeninhalt* besitzt.

Hier hat man das Integral

$$J = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung

$$\iint z\, dx\, dy = a^3.$$

Es ist also

$$h = \sqrt{1 + p^2 + q^2} + \lambda z,$$

woraus sich die partielle Differentialgleichung [1]) ergibt

$$\frac{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t}{\left(\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right)^3} = \lambda.$$

Nach (12) drückt dieselbe aus, daß die Extremalflächen *Flächen konstanter mittlerer Krümmung* sind.

---

[1]) Schon von LAGRANGE gegeben (1760), *Oeuvres*, Bd. I, p, 356.

Auch hier läßt sich die Fläche experimentell darstellen durch eine Flüssigkeitslamelle, welche zwischen dem Rand eines zylindrischen Gefäßes ausgespannt ist und in letzterem ein bestimmtes Volumen Luft abschließt.[1] Auch die Oberfläche eines Öltropfens, der in einer gleich schweren Mischung von Wasser und Alkohol frei schwebt oder sich an eingetauchte feste Körper anlehnt, nimmt im Gleichgewichtszustand die Figur einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung an.[2]

§ 80. Die erste Variation von Doppelintegralen in Parameterdarstellung.

Aus denselben Gründen, wie bei einfachen Integralen[3], ist eine erschöpfende Behandlung von geometrischen Variationsproblemen auch bei Doppelintegralen nur unter Benutzung der Parameterdarstellung[4] möglich.

a) Allgemeines über Flächen in Parameterdarstellung:

Es sei eine Fläche in Parameterdarstellung gegeben durch die Gleichungen

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v). \tag{16}$$

Die unabhängigen Variabeln u, v (die „Parameter") deuten wir als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer u, v-Ebene. Die Funktionen $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ seien von der Klasse C' (resp. $C^{(n)}$, $D^{(n)}$) in einem Bereich $\mathfrak{A}$ der u, v-Ebene, welcher von einer endlichen Anzahl gewöhnlicher, geschlossener Kurven ohne mehrfache Punkte begrenzt wird, deren Gesamtheit wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen; die Kurve $\mathfrak{K}$ soll die Eigenschaft haben, von jeder zur u-Achse oder zur v-Achse parallelen Geraden höchstens eine bestimmte endliche Anzahl von Malen geschnitten zu werden, es sei denn, daß sie eine ganze Strecke mit ihr gemein hat. Überdies sollen die drei Funktionaldeterminanten

$$\mathsf{A} = y_u z_v - z_u y_v, \qquad \mathsf{B} = z_u x_v - x_u z_v, \qquad \mathsf{C} = x_u y_v - y_u x_v$$

in keinem Punkt von $\mathfrak{A}$ gleichzeitig verschwinden.

Die Gleichungen (16) ordnen jedem Punkt (u, v) des Bereiches $\mathfrak{A}$ einen Punkt (x, y, z) der Fläche zu, dem ganzen Bereich $\mathfrak{A}$ ein Stück

[1] Vgl. *Encyklopädie* V 9 (Minkowski), Nr. 10.

[2] Ibid. Nr. 9. Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 11—16 am Ende von Kap, XIII.

[3] Vgl. § 25, e).

[4] Dieselbe ist zuerst von Poisson auf Variationsprobleme angewandt worden, allerdings nur als Mittel zur Ableitung der Grenzgleichungen bei Problemen mit variabler Begrenzung, Mémoires de l'Académie de France, Bd. XII (1833), p. 286. Systematisch auf die allgemeine Theorie der Extrema von Doppelintegralen angewandt wurde dieselbe zuerst von Kobb, Acta Mathematica, Bd. XVI (1892), p. 65; vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, Abschnitt VIII.

$\mathfrak{F}$ der Fläche, der Begrenzung $\mathfrak{K}$ des Bereiches $\mathfrak{A}$ die Begrenzung $\mathfrak{L}$ des Flächenstückes $\mathfrak{F}$. Umgekehrt soll auch jedem Punkt von $\mathfrak{F}$ nur ein Punkt von $\mathfrak{A}$ entsprechen[1]). Ein allen diesen Bedingungen entsprechendes Flächenstück soll *eine Fläche der Klasse* C' (resp. $C^{(n)}$, $D^{(n)}$) heißen.

Eine solche Fläche hat in jedem ihrer Punkte eine bestimmte positive *Normale*[2]), deren Richtungskosinus sind:

$$\frac{\mathsf{A}}{\sqrt{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2+\mathsf{C}^2}}, \qquad \frac{\mathsf{B}}{\sqrt{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2+\mathsf{C}^2}}, \qquad \frac{\mathsf{C}}{\sqrt{\mathsf{A}^2+\mathsf{B}^2+\mathsf{C}^2}}.$$

Unter einer *„zulässigen Parametertransformation"* verstehen wir eine Transformation

$$p = P(u,v), \qquad q = Q(u,v) \tag{17}$$

von folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktionen P, Q sind im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C';

b) ihre Funktionaldeterminante ist positiv in $\mathfrak{A}$;

c) die Transformation (17) definiert eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich $\mathfrak{A}$ und dessen Bild $\mathfrak{B}$ in der u, v-Ebene.

Ist

$$u = U(p,q), \qquad v = V(p,q)$$

die zu (17) inverse Transformation, so läßt sich die Fläche $\mathfrak{F}$ auch darstellen durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= x(U,V) \equiv X(p,q),\\ y &= y(U,V) \equiv Y(p,q),\\ z &= z(U,V) \equiv Z(p,q), \end{aligned}\right\} (p,q) \text{ in } \mathfrak{B}.$$

Bei einer zulässigen Parametertransformation bleibt wegen b) die positive Richtung der Normalen erhalten.

Wir betrachten jetzt ein Doppelintegral von der Form

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{A}} F(x,y,z,x_u,y_u,z_u,x_v,y_v,z_v)\,du\,dv, \tag{18}$$

wobei die Funktion F von der Klasse C''' sein soll, wenn x, y, z in einem gewissen Bereich $\mathfrak{R}$ des Raumes liegt und die übrigen sechs Argumente von F beliebige endliche Werte haben, für welche

$$\mathsf{A}^2 + \mathsf{B}^2 + \mathsf{C}^2 \neq 0.$$

Die Fläche $\mathfrak{F}$ soll ganz in diesem Bereich $\mathfrak{R}$ liegen.

---

1) Vgl. wegen dieser verschiedenen Einschränkungen z. B. KNOBLAUCH, *Krumme Flächen*, p. 7.

2) Vgl. z. B. SCHEFFERS, *Theorie der Flächen*, pp. 27, 30.

Wir fragen zunächst: Unter welchen Bedingungen ist der Wert des Integrals (18) von der Wahl der Parameter unabhängig und nur von der Fläche $\mathfrak{F}$ abhängig? Eine den Entwicklungen von § 25, b) genau parallel laufende Schlußweise, bei welcher man von dem Satz[1]) über die Einführung neuer Variabeln in ein Doppelintegral Gebrauch zu machen hat, führt ohne Schwierigkeit zu dem Resultat[2]):

Soll der Wert des Doppelintegrals (18) bei jeder zulässigen Parametertransformation invariant bleiben, so ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion F in dem oben angegebenen Bereich ihrer Argumente die Relation

$$F(x, \cdots, \varkappa x_u + \mu x_v, \cdots, \lambda x_u + \nu x_v, \cdots) = (\varkappa\nu - \lambda\mu) F(x, \cdots, x_u, \cdots, x_v, \cdots) \quad (19)$$

für jedes Wertsystem der konstanten $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ erfüllt, für welches

$$\varkappa\nu - \lambda\mu > 0.$$

Dabei gehen die nicht hingeschriebenen Argumente aus den hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z hervor.

Differentiiert man die Identität (19) der Reihe nach nach $\varkappa$, λ, μ, ν und setzt nach der Differentiation: $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, so erhält man die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} &\sum F_{x_u} x_u = F, \qquad &\sum F_{x_v} x_u = 0, \\ &\sum F_{x_u} x_v = 0, \qquad &\sum F_{x_v} x_v = F, \end{aligned} \quad (20)$$

wobei die Summation sich auf eine zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z bezieht.

Führt man auf einer in der Form (1) gegebenen Fläche durch eine den Bedingungen einer zulässigen Parametertransformation genügende Transformation

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

die Parameter u, v ein, so wird

$$z_u = p x_u + q y_u, \qquad z_v = p x_v + q y_v,$$

also

$$p = -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{C}}, \qquad q = -\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{C}};$$

daher geht nach den Regeln für die Einführung neuer Variabeln in ein Doppelintegral das über die Fläche genommene Doppelintegral (2) in ein Integral von der Form (18) über, in welchem

$$F = f\left(x, y, z, -\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{C}}, -\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{C}}\right)\mathsf{C}.$$

---

[1]) Vgl. z. B. Serret, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, Bd. II, (1899), p. 271.

[2]) Zuerst gegeben von Kobb, loc. cit. p. 68.

Daraus leitet man ab:

$$\left.\begin{aligned}
F_{x_u} &= p f_q x_v + (f - p f_p) y_v, & F_{x_v} &= -p f_q x_u - (f - p f_p) y_u, \\
F_{y_u} &= -q f_p y_v - (f - q f_q) x_v, & F_{y_v} &= q f_p y_u + (f - q f_q) x_u, \\
F_{z_u} &= -f_q x_v + f_p y_v, & F_{z_v} &= f_q x_u - f_p y_u.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

b) Die Differentialgleichung des Problems im Fall der Parameterdarstellung:

Unter der Voraussetzung, daß die Relation (19) für die Funktion F erfüllt ist, nehmen wir jetzt an, wir hätten eine Fläche $\mathfrak{F}_0$ der Klasse C'' gefunden, dargestellt durch die Gleichungen (16), welche dem Integral J einen nicht größeren Wert erteilt als jede andere Fläche der Klasse D', welche dieselbe Begrenzung $\mathfrak{L}$ besitzt und in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{F}_0$ liegt. Wir betrachten dann Variationen von der Form

$$x = x(u, v) + \varepsilon \xi(u, v), \qquad y = y(u, v) + \varepsilon \eta(u, v), \qquad z = z(u, v) + \varepsilon \zeta(u, v),$$

wobei die Funktionen ξ, η, ζ entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}$ des Bildes $\mathfrak{A}$ der Fläche $\mathfrak{F}_0$ in der u, v-Ebene verschwinden. Das in § 79 angewandte Verfahren führt dann auf den folgenden Ausdruck für die erste Variation:

$$\begin{aligned}
\delta J = \varepsilon \iint\limits_{\mathfrak{A}} \sum \xi \left(F_x - \frac{\partial}{\partial u} F_{x_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{x_v} \right) du\, dv \\
+ \varepsilon \int\limits_{\mathfrak{K}} \sum \xi (F_{x_u} dv - F_{x_v} du),
\end{aligned} \tag{22}$$

wobei die Summation sich wieder auf eine zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z, resp. ξ, η, ζ bezieht.

Hieraus schließt man wie in § 79, daß *die erste notwendige Bedingung für ein Extremum* des Doppelintegrals (18) darin besteht, daß die Funktionen x, y, z den drei partiellen Differentialgleichungen genügen müssen

$$\left.\begin{aligned}
F_x - \frac{\partial}{\partial u} F_{x_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{x_v} = 0, \\
F_y - \frac{\partial}{\partial u} F_{y_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{y_v} = 0, \\
F_z - \frac{\partial}{\partial u} F_{z_u} - \frac{\partial}{\partial v} F_{z_v} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Wie man a priori zu erwarten hat, sind diese drei Differentialgleichungen nicht voneinander unabhängig. In der Tat bestehen zwischen den linken Seiten derselben, die wir zur Abkürzung mit P, Q, R bezeichnen wollen, zwei identische Relationen. Setzt man nämlich in den Gleichungen (20) für x, y, z irgendwelche Funktionen von u und v ein und differentiiert die erste Gleichung nach u, die zweite nach v und addiert, so findet man, daß

$$Px_u + Qy_u + Rz_u = 0,$$

und ebenso ergibt sich aus den beiden letzten der Gleichungen (20)

$$Px_v + Qy_v + Rz_v = 0.$$

Hieraus folgt aber, daß es eine Funktion T der Funktionen x, y, z und ihrer ersten und zweiten partiellen Ableitungen gibt, so daß

$$P = \mathsf{A}T, \quad Q = \mathsf{B}T, \quad R = \mathsf{C}T.$$

Die drei Differentialgleichungen (23) sind also mit der einen Differentialgleichung[1])

$$T = 0 \tag{24}$$

äquivalent.

Beispiel V: Die Minimalflächen in Parameterdarstellung. (Siehe p. 657). Hier ist

$$F = \sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}.$$

Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen (23) zunächst in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathsf{G}x_u - \mathsf{F}x_v}{\sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathsf{E}x_v - \mathsf{F}x_u}{\sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}}\right) = 0 \tag{25}$$

und zwei weitere, die durch zyklische Vertauschung von x, y, z hieraus hervorgehen.

Nunmehr wählen wir für die bisher willkürlich gelassenen Parameter u, v insbesondere *isometrische Parameter*[2]), was zur Folge hat, daß

$$\mathsf{E} = \mathsf{G}, \qquad \mathsf{F} = 0. \tag{26}$$

Dann reduzieren sich die Differentialgleichungen (25) auf

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0. \tag{27}$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind bekanntlich[3])

$$x = \Re f(w), \qquad y = \Re g(w), \qquad z = \Re h(w), \tag{28}$$

wo $f(w)$, $g(w)$, $h(w)$ drei willkürliche analytische Funktionen der komplexen Variabeln

$$w = u + iv$$

sind. Da die Funktionen x, y, z aber nicht nur den Differentialgleichungen (27), sondern auch den beiden Differentialgleichungen (26) genügen müssen, so sind die Funktionen f, g, h einer Beschränkung zu unterwerfen. Setzt man nämlich

$$f(w) = x + i\mathfrak{x}, \qquad g(w) = y + i\mathfrak{y}, \qquad h(w) = z + i\mathfrak{z},$$

---

[1]) Explizite ausgeschrieben findet sich der Ausdruck für T bei Kobb, loc. cit. p. 79, Gleichung (14).

[2]) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, *Differentialgeometrie*, p. 72.

[3]) Vgl. wegen der Bezeichnung p. 656.

so ist nach CAUCHY[1])

$$f'(w) = x_u + i\mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_u - i x_v,$$
$$g'(w) = y_u + i\mathfrak{y}_u = \mathfrak{y}_u - i y_v,$$
$$h'(w) = z_u + i\mathfrak{z}_u = \mathfrak{z}_u - i z_v.$$

Daher sind die beiden reellen Gleichungen (26) mit der einen komplexen Gleichung

$$f'^2(w) + g'^2(w) + h'^2(w) = 0$$

äquivalent. Man kann der letzteren in allgemeinster Weise genügen, indem man setzt

$$f' = i(G^2 - H^2), \qquad g' = G^2 + H^2, \qquad h' = 2iGH,$$

wo $G(w)$, $H(w)$ zwei beliebige analytische Funktionen von w sind. Führt man schließlich eine neue komplexe Variable ein mittels der Gleichung

$$s = -\frac{G(w)}{H(w)} \tag{29}$$

und definiert die Funktion $\mathfrak{F}(s)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = -iH^2(w)\frac{dw}{ds},$$

so erhält man den folgenden von WEIERSTRASS[2]) herrührenden *allgemeinsten Ausdruck einer Minimalfläche*

$$x = \Re\int(1 - s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad y = \Re\int i(1 + s^2)\mathfrak{F}(s)\,ds, \quad z = \Re\int 2s\mathfrak{F}(s)\,ds. \tag{30}$$

c) Der Fall variabler Begrenzung[3]):

Die Methode der Parameterdarstellung eignet sich besonders auch zur Behandlung von Aufgaben, bei welchen die Begrenzung nicht vorgeschrieben, sondern nur gewissen weniger weitgehenden Beschränkungen unterworfen ist, weil man bei Benutzung derselben die Variation

---

[1]) Vgl. z. B. PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. II (1905), pp. 2, 4.

[2]) Vgl. die grundlegende Arbeit von WEIERSTRASS, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, p. 612. Im übrigen verweisen wir für die Theorie der Minimalflächen, die durch ihren Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Funktionen ein besonderes Interesse gewonnen hat, auf die *Encyklopädie*, III D 5 (v. LILIENTHAL), sowie auf die Darstellungen in den Lehrbüchern von SCHEFFERS, *Theorie der Flächen*, Zweiter Abschnitt, § 15; BIANCHI-LUKAT, *Differentialgeometrie*, Kap. XIV, XV; DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Bd. I, Livre III. Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 17—19 am Ende von Kap. XIII.

[3]) GAUSS war der erste, welcher ein spezielles Variationsproblem dieser Art behandelte (1830), *Werke*, Bd. V, p. 58. Den allgemeinen Ausdruck für die erste Variation bei variabler Begrenzung hat zuerst POISSON gegeben (1833) in der auf p. 663, Fußnote [4]) zitierten Arbeit. Vgl. darüber, sowie über die analoge Aufgabe für mehrfache Integrale, KNESER's Artikel in der *Encyklopädie*, II A, p. 616; ferner C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, Bd. III. Nr. 395—400, und KNESER, *Lehrbuch*, § 65.

des Integrationsbereiches vermeiden kann, welche andernfalls im allgemeinen nötig ist und große Komplikationen herbeiführt.

Man schließt zunächst in bekannter Weise, daß die das Extremum liefernde Fläche

$$\mathfrak{F}_0: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \text{ in } \mathfrak{A}$$

auch in diesem Fall eine *Extremalfläche* sein muß.

Um die Grenzgleichungen zu erhalten, hat man dann allgemeinere Variationen der Fläche $\mathfrak{F}_0$ von der Form

$$x = X(u, v; \varepsilon), \quad y = Y(u, v; \varepsilon), \quad z = Z(u, v; \varepsilon), \quad (u, v) \text{ in } \mathfrak{A} \tag{31}$$

zu betrachten. Die Funktionen X, Y, Z müssen sich für $\varepsilon = 0$ auf $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ reduzieren und die üblichen Stetigkeitseigenschaften besitzen, und überdies muß die Begrenzung $\mathfrak{L}_\varepsilon$ der Fläche (31) bei beliebigem ε den vorgeschriebenen Grenzbedingungen genügen. Schreiben wir die Begrenzung $\mathfrak{R}$ des Bereiches $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\mathfrak{R}: \quad u = \tilde{u}(t), \quad v = \tilde{v}(t), \quad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2,$$

so ist die Begrenzung $\mathfrak{L}_\varepsilon$ dargestellt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{L}_\varepsilon: \quad x = X(\tilde{u}, \tilde{v}; \varepsilon), \quad y = Y(\tilde{u}, \tilde{v}; \varepsilon) \quad z = Z(\tilde{u}, \tilde{v}; \varepsilon),$$

wofür wir einfach $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ schreiben werden.

Für die Schar (31) muß nun die erste Variation des Integrals J verschwinden. Wir können dieselbe auf die Form (22) bringen, wobei nunmehr

$$\xi = X_\varepsilon(u, v; 0), \quad \eta = Y_\varepsilon(u, v; 0), \quad \zeta = Z_\varepsilon(u, v; 0). \tag{32}$$

Da die Fläche $\mathfrak{F}_0$ den Differentialgleichungen (23) genügt, so reduziert sich daher die Gleichung $\delta J = 0$ auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \tilde{\xi} \left(F_{x_u} \tilde{v}' - F_{x_v} \tilde{u}'\right) dt = 0, \tag{33}$$

wobei $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$ aus den Ausdrücken (32) für ξ, η, ζ durch die Substitution von $\tilde{u}, \tilde{v}$ für u, v hervorgehen; die Argumente der Ableitungen von F sind: $x(\tilde{u}, \tilde{v}), \cdots, x_u(\tilde{u}, \tilde{v}), \cdots, x_v(\tilde{u}, \tilde{v}), \cdots$.

Die Funktionen $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$ sind gewissen aus den gegebenen Grenzbedingungen folgenden Beschränkungen unterworfen; aus diesen zusammen mit der Gleichung (33) hat man dann die Grenzgleichungen abzuleiten.

Wir wenden diese allgemeinen Überlegungen zunächst auf den Fall an, wo die *Begrenzungen* der zulässigen Flächen der Bedingung unterworfen sind, *auf einer gegebenen Fläche*

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{34}$$

zu liegen. Hier muß also für jedes ε die Gleichung

$$\varphi(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}) = 0$$

erfüllt sein, aus welcher sich durch den Variationsprozeß ergibt

$$\varphi_x \tilde{\xi} + \varphi_y \tilde{\eta} + \varphi_z \tilde{\zeta} = 0, \tag{35}$$

wobei die Argumente von φ_x, φ_y, φ_z sich auf die Begrenzung $\mathfrak{L}$ der Fläche $\mathfrak{F}_0$ beziehen.

Man verfährt nun ganz wie beim Beweis der Multiplikatorenregel für den Fall endlicher Bedingungsgleichungen (§ 68): Man multipliziert die Gleichung (35) mit einer unbestimmten Funktion $\nu(t)$, integriert von t_1 bis t_2 und addiert das Resultat zu (33); so erhält man

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \tilde{\xi} \left[F_{x_u} \tilde{v}' - F_{x_v} \tilde{u}' + \nu \varphi_x \right] dt = 0.$$

Nun schließt man weiter[1]): Von den drei Funktionen $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ kann man zwei willkürlich wählen, die dritte ist dann durch die Gleichung (35) bestimmt. Daraus folgert man wie in § 68, daß es eine Funktion $\nu(t)$ geben muß derart, daß die Faktoren von $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ unter dem Integralzeichen einzeln verschwinden. Daraus folgt durch Elimination von $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, ν das Resultat:

Ist die Begrenzung der gesuchten Fläche nicht vorgeschrieben, sondern nur der Bedingung unterworfen, auf einer gegebenen Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ zu liegen, so muß entlang der Begrenzung die Gleichung erfüllt sein

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

---

[1]) Der Beweis leidet an denselben Mängeln wie die älteren Beweise der Multiplikatorenregel (vgl. die Kritik derselben auf p. 568). Es müßte gezeigt werden: Sind $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ irgend welche Funktionen von t, welche der Gleichung (35) genügen, so kann man stets eine Schar von zulässigen Variationen (31) konstruieren, für welche $X_\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{v}, 0) = \tilde{\xi}$, etc.

Beispiel V (siehe p. 667): Im Fall der *Minimalflächen* reduziert sich (36) auf die Gleichung

$$\mathbf{A}\varphi_x + \mathbf{B}\varphi_y + \mathbf{C}\varphi_z = 0,$$

welche aussagt, daß *die Minimalfläche entlang der Randkurve $\mathfrak{L}$ auf der gegebenen Fläche* senkrecht stehen muß. —

Aus der Gleichung (36) kann man die entsprechende Grenzgleichung für das Integral (2) mittels der Übergangsformeln (21) ableiten. Man erhält nach einfacher Rechnung [1])

$$f[\varphi_x f_p + \varphi_y f_q - \varphi_z(f - pf_p - qf_q)] = 0. \tag{36a}$$

Eine andere Art der Grenzbedingung besteht darin, daß für sämtliche zulässige Flächen *ein entlang der Begrenzung genommenes einfaches Integral* von der Form

$$\int H(x, y, z, x', y', z')\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert haben soll.

Hier sind die Funktionen $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ der Bedingung unterworfen, daß

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum (H_x\tilde{\xi} + H_{x'}\tilde{\xi}')\,dt = 0. \tag{37}$$

Auf diese Gleichung wende man die Lagrange'sche partielle Integration an, wobei das vom Integral freie Glied wegfällt, weil die Begrenzungskurven der zulässigen Flächen geschlossen sind. Nunmehr schließt[2]) man nach dem Fundamentallemma für isoperimetrische Probleme (p. 462, Fußnote [1])), daß es eine Konstante λ geben muß, sodaß gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned}
F_{x_u}\tilde{v}' - F_{x_v}\tilde{u}' + \lambda\left(H_x - \frac{d}{dt}H_{x'}\right) &= 0,\\
F_{y_u}\tilde{v}' - F_{y_v}\tilde{u}' + \lambda\left(H_y - \frac{d}{dt}H_{y'}\right) &= 0,\\
F_{z_u}\tilde{v}' - F_{z_v}\tilde{u}' + \lambda\left(H_z - \frac{d}{dt}H_{z'}\right) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

---

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 15, 16 am Ende von Kap. XIII.

[2]) Einen strengen Beweis erhält man, indem man Variationen von der Form

$$x = x(u, v) + \varepsilon\xi(u, v) + \varepsilon_1\xi_1(u, v), \quad \text{etc.}$$

ansetzt und dann nach der auf p. 458, Fußnote [1]) erklärten Methode von Hilbert weiter schließt.

§ 81. Die zweite Variation bei Doppelintegralen.[1])

Wir kehren jetzt zu dem in § 79 definierten „Funktionenproblem“ mit x, y als unabhängigen Variabeln und mit fester Begrenzung zurück und wenden uns zur Betrachtung der zweiten Variation. Man erhält für dieselbe den Ausdruck

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} 2\Omega\, dx\, dy, \tag{39}$$

wobei 2Ω die folgende quadratische Form von ζ, ζ_x, ζ_y bedeutet:

$$2\Omega = f_{zz}\zeta^2 + 2f_{zp}\zeta\zeta_x + 2f_{zq}\zeta\zeta_y + f_{pp}\zeta_x^2 + 2f_{pq}\zeta_x\zeta_y + f_{qq}\zeta_y^2. \tag{40}$$

Die Argumente der Ableitungen der Funktion f beziehen sich dabei auf die Fläche

$$\mathfrak{F}_0: \qquad z = z(x, y), \qquad (x, y) \text{ in } \mathfrak{A},$$

von welcher wir voraussetzen, daß sie von der Klasse C'' ist, der Lagrange'schen Differentialgleichung (I) genügt und die vorgeschriebene Begrenzung $\mathfrak{L}$ besitzt. Diese Ableitungen sind daher Funktionen von x, y, welche im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C' sind.

Es sollen in diesem Paragraphen die den Bedingungen von LEGENDRE und JACOBI entsprechenden Bedingungen abgeleitet werden.

---

[1]) Der erste, welcher Untersuchungen über die zweite Variation von Doppelintegralen angestellt hat, scheint BRUNACCI gewesen zu sein (Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano, Bd II, Teil II (1810), p. 121). Derselbe überträgt den Legendre'schen Kunstgriff von § 9, b) in der Lagrange'schen Modifikation (§ 15, b)) auf Doppelintegrale, indem er zur zweiten Variation das bei fester Begrenzung verschwindende Integral

$$\varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} \left[\frac{\partial(\alpha\zeta^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\zeta^2)}{\partial y}\right] dx\, dy$$

mit unbestimmten Funktionen α, β hinzufügt und dann die Funktionen α, β so zu wählen sucht, daß die alsdann unter dem Doppelintegral erscheinende quadratische Form von ζ, ζ_x, ζ_y definit wird. Damit wird zunächst nur bewiesen, daß die unten mit (II') bezeichnete Bedingung für ein permanentes Zeichen von $\delta^2 J$ hinreichend ist, wenn der Integrationsbereich hinlänglich klein ist.

Die analoge Transformation für den Fall, daß höhere Ableitungen von z unter dem Doppelintegral vorkommen, gibt DELAUNAY, Journal de l'École Polytechnique, Bd. XVII, Cahier XXIX (1843), p. 90.

Weitergehende Folgerungen haben an die Brunacci'sche Transformation MAINARDI (siehe unter c)), KOBB und KNESER geknüpft (siehe unter c), Ende).

Die zweite Variation von Doppelintegralen für den Fall der *Parameterdarstellung* haben H. A. SCHWARZ (siehe die Zitate auf p. 682, Fußnote [3])), KOBB, (Acta Mathematica, Bd. XVI (1892), pp. 86—116) und KNESER, *Lehrbuch* §§ 67, 68 behandelt.

a) **Das Analogon der Legendre'schen Bedingung:**

Dasselbe lautet folgendermaßen[1]):

Die zweite notwendige Bedingung für ein Minimum des Doppelintegrals (2) besteht darin, daß

$$f_{pp} \geqq 0, \qquad f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \geqq 0 \tag{II}$$

im ganzen Bereich $\mathfrak{A}$.

Dies läßt sich auch so ausdrücken: Es muß

$$f_{pp}X^2 + 2f_{pq}XY + f_{qq}Y^2 \geqq 0 \tag{41}$$

sein für jeden Punkt (x, y) des Bereiches $\mathfrak{A}$ und für jedes reelle Wertsystem X, Y.

Zum Beweis[2]) nehmen wir an, die Bedingung sei nicht erfüllt, es gäbe also einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ des Bereiches $\mathfrak{A}$, — und zwar möge es zunächst ein innerer Punkt sein —, und ein reelles Wertsystem X_0, Y_0, so daß in leicht verständlicher Bezeichnung

$$(f_{pp})_0 X_0^2 + 2(f_{pq})_0 X_0 Y_0 + (f_{qq})_0 Y_0^2 < 0. \tag{42}$$

Dann lassen sich zwei mod π verschiedene Winkel α_1, α_2 angeben, so daß auch

$$(f_{pp})_0 \cos^2\alpha_i + 2(f_{pq})_0 \cos\alpha_i \sin\alpha_i + (f_{qq})_0 \sin^2\alpha_i < 0,$$
$$i = 1, 2.$$

Aus der Stetigkeit der Funktionen f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} folgt dann weiter, daß sich eine Umgebung (ϱ) des Punktes P_0 und eine positive Größe k^2 angeben lassen, so daß

$$f_{pp}\cos^2\alpha_i + 2f_{pq}\cos\alpha_i \sin\alpha_i + f_{qq}\sin^2\alpha_i < -k^2, \tag{43}$$
$$i = 1, 2,$$

für jeden Punkt (x, y) von (ϱ).

Nach diesen Vorbereitungen konstruieren wir in der x, y-Ebene das Parallelogramm, dessen Seiten durch die Gleichungen gegeben sind

$$(a)\colon\ d - u_1 = 0, \qquad (c)\colon\ d + u_1 = 0,$$
$$(b)\colon\ d - u_2 = 0, \qquad (d)\colon\ d + u_2 = 0,$$

---

[1]) Für ein *Maximum* lautet die Bedingung

$$f_{pp} \leqq 0, \qquad f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \geqq 0,$$

sodaß also im Fall $f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 < 0$ weder Maximum noch Minimum eintritt.

[2]) Im wesentlichen nach Mason (Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. XIII (1907), p. 293).

wobei d eine positive Konstante ist und

$$u_i = (x - x_0)\cos\alpha_i + (y - y_0)\sin\alpha_i, \qquad i = 1, 2.$$

Der Mittelpunkt dieses Parallelogramms ist der Punkt P_0. Wir können daher d so klein wählen, daß das Parallelogramm ganz im Innern der eben definierten Umgebung (ϱ) und zugleich im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt.

Das Parallelogramm wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke A, B, C, D geteilt, welche resp. die Seiten $(a), (b), (c), (d)$ enthalten. Wir definieren jetzt eine Funktion $\zeta(x, y)$ folgendermaßen: Außerhalb des Parallelogramms soll $\zeta \equiv 0$ sein; in jedem der vier eben definierten Dreiecke gleich der linken Seite der Gleichung, durch welche wir oben die dem betreffenden Dreieck angehörende Seite des Parallelogramms dargestellt haben. In einem Punkt $P(x, y)$ des Dreiecks A ist dann ζ gleich dem positiv gerechneten Abstand des Punktes P von der Seite (a), und analog für die übrigen drei Dreiecke.

Daraus folgt, daß die so für den ganzen Bereich $\mathfrak{A}$ eindeutig definierte Funktion ζ in $\mathfrak{A}$ von der Klasse D' ist und überdies auf der Begrenzung $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{A}$ verschwindet. Für diese Funktion ζ muß daher im Fall eines Minimums die zweite Variation positiv sein.

Zur Berechnung des Wertes derselben zerlegen wir $\delta^2 J$ in die beiden Bestandteile

$$\delta_1^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} [f_{zz}\zeta^2 + 2f_{zp}\zeta\zeta_x + 2f_{zq}\zeta\zeta_y]\,dx\,dy$$

und

$$\delta_2^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} [f_{pp}\zeta_x^2 + 2f_{pq}\zeta_x\zeta_y + f_{qq}\zeta_y^2]\,dx\,dy.$$

Für den absoluten Wert des ersten Integrals können wir leicht eine obere Grenze angeben. Denn aus der Definition der Funktion ζ folgt, daß im ganzen Bereich $\mathfrak{A}$

$$|\zeta| \overline{\gtrless} d, \qquad |\zeta_x| \overline{\gtrless} 1, \qquad |\zeta_y| \overline{\gtrless} 1,$$

und überdies folgt aus der Stetigkeit der Funktionen $|f_{zz}|, |f_{zp}|, |f_{zq}|$, daß dieselben im Bereich $\mathfrak{A}$ endliche Maximalwerte besitzen, deren größten wir mit M bezeichnen. Ist daher S der Flächeninhalt des Bereiches $\mathfrak{A}$, so ist

$$|\delta_1^2 J| \overline{\gtrless} \varepsilon^2 d(4 + d) MS.$$

Andererseits ist im Dreieck A:

$$\zeta_x = -\cos\alpha_1, \qquad \zeta_y = -\sin\alpha_1$$

und analog für die übrigen Dreiecke. Daraus folgt wegen (43)

$$\delta_2^2 J \overline{\gtrless} - \varepsilon^2 k^2 S.$$

Durch Verkleinerung der Größe d kann man nunmehr bewirken, daß $\delta^2 J < 0$ wird, womit unsere Behauptung bewiesen ist, wenn man noch hinzufügt, daß aus dem Bestehen der Ungleichung (42) für einen Punkt P_0 der Begrenzung $\mathfrak{K}$ sofort folgt, daß dieselbe auch für innere Punkte von $\mathfrak{A}$ in der Nähe von P_0 erfüllt ist.

Wir werden in der weiteren Diskussion voraussetzen, daß die Bedingung (II) in der stärkeren Form[1])

$$f_{pp} > 0, \qquad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0 \text{ in } \mathfrak{A} \tag{II'}$$

erfüllt ist. Dann ist

$$f_{pp} X^2 + 2 f_{pq} XY + f_{qq} Y^2 > 0$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathfrak{A}$ und für jedes reelle, von $(0, 0)$ verschiedene Wertsystem X, Y.

b) **Das Analogon der Jacobi'schen Bedingung:**

Aus dem Euler'schen Satz über homogene Funktionen folgt, daß wir die quadratische Form 2Ω schreiben können

$$2\Omega = \Omega_\zeta \zeta + \Omega_{\zeta_x} \zeta_x + \Omega_{\zeta_y} \zeta_y$$

oder auch

$$2\Omega = \zeta\left(\Omega_\zeta - \frac{\partial}{\partial x}\Omega_{\zeta_x} - \frac{\partial}{\partial y}\Omega_{\zeta_y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega_{\zeta_x}\zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(\Omega_{\zeta_y}\zeta).$$

Integrieren wir jetzt über den Bereich $\mathfrak{A}$ und wenden auf die beiden letzten Glieder den Green'schen Satz an wie in § 79, a), so erhalten wir entsprechend der Jacobi'schen Transformation von § 10, b) die Formel[2])

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \iint_{\mathfrak{A}} \zeta\, \Psi(\zeta)\, dx\, dy + \varepsilon^2 \int_{\mathfrak{K}} \zeta (\Omega_{\zeta_x} dy - \Omega_{\zeta_y} dx), \tag{44}$$

wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$\Psi(\zeta) = \Omega_\zeta - \frac{\partial}{\partial x}\Omega_{\zeta_x} - \frac{\partial}{\partial y}\Omega_{\zeta_y}$$

---

[1]) Variationsprobleme mit zwei unabhängigen Variabeln, bei welchen für die in Betracht kommenden Argumente die Bedingung

$$f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0$$

erfüllt ist, nennt Hilbert *„reguläre Variationsprobleme"* (Göttinger Nachrichten 1900, p. 288).

[2]) Von Todhunter, *History of the Calculus of Variations* (1861), p. 280 gegeben und Mainardi zugeschrieben.

oder auch ausgeschrieben

$$\Psi(\zeta) = \zeta\left(f_{zz} - \frac{\partial}{\partial x} f_{zp} - \frac{\partial}{\partial y} f_{zq}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(f_{pp}\zeta_x + f_{pq}\zeta_y) - \frac{\partial}{\partial y}(f_{qp}\zeta_x + f_{qq}\zeta_y). \tag{45}$$

Die Umformung setzt voraus, daß die Funktion ζ im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C'' ist. Sie gilt aber auch noch, wenn ζ in einem ganz in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Bereich $\mathfrak{A}_0$ von der Klasse C'' ist, auf der Begrenzung[1]) $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{A}_0$ und außerhalb $\mathfrak{A}_0$ dagegen gleich Null ist. Nur ist dann in der Formel (44) das Doppelintegral über den Bereich $\mathfrak{A}_0$, das Linienintegral entlang der Kurve $\mathfrak{K}_0$ zu nehmen.

Hieraus schließen wir zunächst:

Wenn die „akzessorische" lineare partielle Differentialgleichung

$$\Psi(u) = 0 \tag{46}$$

ein Integral u besitzt, welches entlang einer ganz im Bereich $\mathfrak{A}$ gelegenen einfachen geschlossenen Kurve $\mathfrak{K}_0$ verschwindet und in dem von der Kurve $\mathfrak{K}_0$ begrenzten Bereich $\mathfrak{A}_0$ von der Klasse C'' ist und nicht identisch verschwindet, so kann man durch passende Wahl der Funktion ζ die zweite Variation gleich Null machen.

Man braucht nur zu setzen

$$\zeta = \begin{cases} u & \text{in} \quad \mathfrak{A}_0, \\ 0 & \text{außerhalb} \quad \mathfrak{A}_0, \end{cases}$$

und die Formel (44) auf den Bereich $\mathfrak{A}_0$ anzuwenden; das Doppelintegral verschwindet dann wegen (46), das Linienintegral, weil u entlang $\mathfrak{K}_0$ verschwindet.

Darüber hinaus hat Sommerfeld[2]) durch Verallgemeinerung der in § 14, b) entwickelten Schwarz'schen Methode gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen die zweite Variation nicht nur gleich Null, sondern auch negativ gemacht werden kann, wenigstens wenn die Kurve $\mathfrak{K}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt.

Zu diesem Zweck wähle man

$$\zeta = \begin{cases} u + kv & \text{in} \quad \mathfrak{A}_0, \\ \phantom{u+{}} kv & \text{außerhalb} \quad \mathfrak{A}_0, \end{cases}$$

wo k eine Konstante ist und v eine beliebige Funktion von x und y, welche im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C'' ist und entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}$ verschwindet. Diese Funktion ζ ist stetig in $\mathfrak{A}$, da u

[1]) Die Kurve $\mathfrak{K}_0$ muß dieselben allgemeinen Eigenschaften haben wie die Kurve $\mathfrak{K}$ (§ 79, a)), damit die Anwendbarkeit des Green'schen Satzes gesichert ist.

[2]) Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. VIII (1899), p. 188.

entlang $\mathfrak{K}_0$ verschwindet; sie verschwindet auf der Begrenzung von $\mathfrak{A}$ und ist in jedem der beiden Bereiche $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0$ von der Klasse C''.

Um den Wert der zweiten Variation für diese spezielle Funktion ζ zu berechnen, zerlegen wir zunächst $\delta^2 J$ in eine Summe von zwei Integralen, den beiden Teilbereichen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0$ entsprechend. Das auf den zweiten Bereich bezügliche Integral hat den Faktor k^2. Auf das über den Bereich $\mathfrak{A}_0$ zu erstreckende Integral wenden wir die Transformationsformel (44) an. Beachtet man dabei, daß die Operationen Ψ, Ω_{ζ_x}, Ω_{ζ_y} distributiv sind, ferner, daß die Funktion u der Differentialgleichung (46) genügt und entlang $\mathfrak{K}_0$ verschwindet, so erhält man den folgenden Wert für die zweite Variation

$$\begin{aligned}\delta^2 J = {} & \varepsilon^2 k \iint\limits_{\mathfrak{A}_0} u\Psi(v)\,dx\,dy \\ & + \varepsilon^2 k \int\limits_{\mathfrak{K}_0} v[(f_{pp}u_x + f_{pq}u_y)dy - (f_{pq}u_x + f_{qq}u_y)dx] + \varepsilon^2 k^2 H,\end{aligned} \tag{47}$$

wo H eine von k unabhängige Konstante ist.

Das Doppelintegral transformieren wir jetzt mittels der folgenden, leicht zu verifizierenden Identität, welche für irgend zwei Funktionen u, v der Klasse C'' gilt,

$$u\Psi(v) - v\Psi(u) = -\frac{\partial}{\partial x}(f_{pp}\xi + f_{pq}\eta) - \frac{\partial}{\partial y}(f_{pq}\xi + f_{qq}\eta), \tag{48}$$

wo wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$uv_x - vu_x = \xi, \qquad uv_y - vu_y = \eta.$$

Integriert man diese Gleichung über den Bereich $\mathfrak{A}_0$ und wendet den Green'schen Satz an, so erhält man

$$\iint\limits_{\mathfrak{A}_0}(u\Psi(v) - v\Psi(u))\,dx\,dy = -\int\limits_{\mathfrak{K}_0}[(f_{pp}\xi + f_{pq}\eta)dy - (f_{pq}\xi + f_{qq}\eta)dx]. \tag{49}$$

Ist nun insbesondere, wie in Gleichung (47), u eine Lösung von (46), welche entlang $\mathfrak{K}_0$ verschwindet, so folgt durch Anwendung von (49), daß das Doppelintegral in (47) gerade gleich dem in derselben Formel auftretenden Linienintegral ist, sodaß der Ausdruck für $\delta^2 J$ die Form annimmt

$$\delta^2 J = \varepsilon^2\left\{2k\int\limits_{\mathfrak{K}_0} v\left[(f_{pp}u_x + f_{pq}u_y)\frac{dy}{ds} - (f_{pq}u_x + f_{qq}u_y)\frac{dx}{ds}\right]ds + k^2 H\right\}, \tag{50}$$

wenn wir auf der Kurve $\mathfrak{K}_0$ den Bogen s als unabhängige Variable einführen.

Es fragt sich nun, ob man die Funktion v so wählen kann, daß das hierin auftretende Linienintegral von Null verschieden ist. Wäre dasselbe für alle zulässigen Funktionen v gleich Null, so würde durch eine leichte Modifikation des Fundamentallemmas von § 5, b) und § 79, a) folgen, daß der Faktor von v unter dem Integralzeichen entlang $\mathfrak{K}_0$ identisch verschwinden müßte, d. h.

$$\left(f_{pp}\frac{dy}{ds}-f_{pq}\frac{dx}{ds}\right)u_x+\left(f_{pq}\frac{dy}{ds}-f_{qq}\frac{dx}{ds}\right)u_y=0.$$

Gleichzeitig folgt durch Differentiation der Identität

$$u(x(s), y(s))=0$$

nach s, daß entlang der Kurve $\mathfrak{K}_0$ auch

$$\frac{dx}{ds}u_x+\frac{dy}{ds}u_y=0.$$

Es müßte also entweder

$$f_{pp}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2f_{pq}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+f_{qq}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=0$$

sein, was wegen der Voraussetzung (II') nicht möglich ist; oder aber es müßten u_x, u_y entlang $\mathfrak{K}_0$ identisch verschwinden.

Nun folgt aber, wie wir weiter unten näher ausführen werden, unter sehr allgemeinen Voraussetzungen aus dem gleichzeitigen Verschwinden von u, u_x, u_y entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}_0$, daß $u\equiv 0$ im ganzen Bereich $\mathfrak{A}_0$, was unserer Voraussetzung widerspricht.

In allen Fällen, in denen der Schluß auf das identische Verschwinden von u gestattet ist, können wir daher in der Tat v so wählen, daß der Faktor von k^1 in dem Ausdruck (50) für $\delta^2 J$ von Null verschieden ist. Alsdann können wir aber $\delta^2 J<0$ machen, indem wir k numerisch hinreichend klein und von geeignetem Vorzeichen wählen. Damit ist (unter der erwähnten, noch näher zu formulierenden Einschränkung) der Satz bewiesen:

Die dritte notwendige Bedingung für ein Minimum des Doppelintegrals (2) besteht darin, daß keine Lösung u der partiellen Differentialgleichung (46) existieren darf, welche entlang einer einfachen, geschlossenen, ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ gelegenen Kurve $\mathfrak{K}_0$ verschwindet und in dem von derselben begrenzten Bereich $\mathfrak{A}_0$ von der Klasse C'' ist und nicht identisch verschwindet.

Wir haben jetzt noch den Beweis[1]) des Hilfssatzes nachzutragen,

[1]) Vgl. *Encyklopädie* II A, pp. 513, 515 (Sommerfeld) und Hedrick, Göttinger Dissertation (1901), p. 32.

Eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0 \tag{51}$$

wonach $u \equiv 0$ in $\mathfrak{A}_0$, wenn u, u_x, u_y entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}_0$ verschwinden. Es sei $P_0(x_0, y_0)$ ein Punkt im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}_0$, und es werde vorausgesetzt, daß eine zugehörige „Grundlösung" ω der partiellen Differentialgleichung (46) existiert,[1]) d. h. eine Lösung von der Form

$$\omega = \varphi(x, y) \log \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \psi(x, y),$$

wo $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ in $\mathfrak{A}_0$ von der Klasse C'' sind und $\varphi(x_0, y_0) = 1$ ist.

Alsdann konstruiere man um den Punkt P_0 einen ganz im Innern von $\mathfrak{A}_0$ gelegenen Kreis mit dem Radius ϱ und wende die Formel (49) mit $v = \omega$ auf den nach Herausnahme dieses Kreises übrig bleibenden Teil von $\mathfrak{A}_0$ an. Geht man dann zur Grenze $\varrho = 0$ über, so erhält man nach einfacher Rechnung die Formel[2])

$$\begin{aligned}&\pi[f_{pp}(x_0, y_0) + f_{qq}(x_0, y_0)]u(x_0, y_0)\\ &= \int_{\mathfrak{K}_0} (f_{pp}\xi + f_{pq}\eta)dy - (f_{pq}\xi + f_{qq}\eta)dx.\end{aligned}$$

Da wegen der Voraussetzung (II')

$$f_{pp}(x_0, y_0) + f_{qq}(x_0, y_0) \neq 0,$$

so folgt hieraus, daß $u(x_0, y_0) = 0$, wenn u, u_x, u_y entlang $\mathfrak{K}_0$ verschwinden. Somit ist der oben benutzte Hilfssatz und damit die dritte notwendige Bedingung unter der Voraussetzung bewiesen, daß für jeden Punkt im Innern von $\mathfrak{A}_0$ eine Grundlösung existiert.

c) Hinreichende Bedingungen für ein permanentes Zeichen der zweiten Variation:

Den in den beiden vorangehenden Absätzen abgeleiteten notwendigen Bedingungen (II) und (III) lassen sich nun auch hinreichende

---

heißt von elliptischem, parabolischem oder hyperbolischem Typus, je nachdem $AC - B^2 > 0$, $= 0$ oder < 0; sie heißt sich selbst adjungiert, wenn

$$D = A_x + B_y, \qquad E = B_x + C_y.$$

Die Differentialgleichung (46) ist daher wegen der Voraussetzung (II') von *elliptischem Typus* und überdies *sich selbst adjungiert* wegen $f_{pq} = f_{qp}$.

[1]) Eine partielle Differentialgleichung der Form (51) vom elliptischen Typus läßt sich durch Einführung von neuen unabhängigen Variabeln auf die Normalform bringen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Für diese Normalform haben Hedrick (loc. cit. p. 37) und Holmgren (Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1903), p. 404) die Existenz einer Grundlösung für den Fall bewiesen, daß die Koeffizienten a, b, c analytische Funktionen sind.

[2]) Dieselbe ist eine Verallgemeinerung der bekannten Green'schen Formel der Potentialtheorie, vgl. z. B. Picard, *Traité d'Analyse*, Bd. II (1905), p. 15.

Bedingungen für ein permanentes Zeichen der zweiten Variation an die Seite stellen.

Dazu stellen wir uns nach CLEBSCH[1]) die Aufgabe, drei Funktionen u, v, w von x und y so zu bestimmen, daß identisch in ζ, ζ_x, ζ_y die Gleichung gilt

$$2\Omega = u^2\left\{f_{pp}\left(\frac{\partial\frac{\zeta}{u}}{\partial x}\right)^2 + 2f_{pq}\frac{\partial\frac{\zeta}{u}}{\partial x}\frac{\partial\frac{\zeta}{u}}{\partial y} + f_{qq}\left(\frac{\partial\frac{\zeta}{u}}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{\partial}{\partial x}(v\zeta^2) + \frac{\partial}{\partial y}(w\zeta^2). \quad (52)$$

Führt man hierin die angedeuteten Differentiationen aus und setzt dann beiderseits die Koeffizienten entsprechender Produkte der Größen ζ, ζ_x, ζ_y einander gleich, so erhält man die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f_{zz} &= \frac{1}{u^2}(f_{pp}u_x^2 + 2f_{pq}u_x u_y + f_{qq}u_y^2) + v_x + w_y, \\ f_{pz} &= -\frac{1}{u}(f_{pp}u_x + f_{pq}u_y) + v, \\ f_{qz} &= -\frac{1}{u}(f_{pq}u_x + f_{qq}u_y) + w. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Berechnet man aus den beiden letzten Gleichungen die Werte von v_x und w_y und setzt dieselben in die erste ein, so erhält man für die Funktion u die partielle Differentialgleichung

$$\Psi(u) = 0, \quad (46)$$

wo Ψ wieder durch (45) definiert ist. Die Werte von v und w ergeben sich alsdann aus (53_2) und (53_3).

Integriert man jetzt die Gleichung (52) über den Bereich $\mathfrak{A}$ und wendet auf die beiden letzten Glieder den Green'schen Satz an, so erhält man für $\delta^2 J$ den Ausdruck

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} (f_{pp}X^2 + 2f_{pq}XY + f_{qq}Y^2)\,dx\,dy + \int\limits_{\mathfrak{K}} \zeta^2(v\,dy - w\,dx), \quad (54)$$

[1]) Journal für Mathematik, Bd. LV (1858), p. 271, wo dieselbe Transformation für r-fache Integrale durchgeführt wird. Eine nicht wesentlich von (54) verschiedene Formel gibt übrigens schon MAINARDI, Annali di scienze matematiche e fisiche (Tortolini), Bd. III (1852), p. 163. In einer späteren Arbeit hat CLEBSCH seine Untersuchungen über die zweite Variation auf r-fache Integrale ausgedehnt, welche n unbekannte Funktionen enthalten (Journal für Mathematik, Bd. LVI (1859), p. 122). Schon im Fall $r = 2$, $n = 2$ treten hier eigentümliche Schwierigkeiten auf, auf welche neuerdings HADAMARD aufmerksam gemacht hat (Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXX (1902), p. 253, und Bd. XXXIII (1905), p. 73.

wo zur Abkürzung

$$u\,\frac{\partial \frac{\zeta}{u}}{\partial x} = X, \qquad u\,\frac{\partial \frac{\zeta}{u}}{\partial y} = Y$$

gesetzt ist.

Die Transformation setzt voraus, daß u im Bereich $\mathfrak{A}$ nicht verschwindet und von der Klasse C'' ist. Da jede zulässige Funktion ζ entlang der Begrenzung $\mathfrak{K}$ verschwindet, so reduziert sich $\delta^2 J$ auf das Doppelintegral, und wir können daher den Satz aussprechen:

Ist die Bedingung (II') erfüllt, und gibt es ein Integral u der akzessorischen Differentialgleichung (46), welches im Integrationsbereich nicht verschwindet und von der Klasse C'' ist (Bedingung (III')), so ist die zweite Variation für jede zulässige Funktion ζ der Klasse C' positiv.

Denn wegen (III') gilt alsdann die Transformation (54), und die unter dem Doppelintegral stehende quadratische Form ist wegen der Voraussetzung (II') positiv, außer wenn X und Y in $\mathfrak{A}$ identisch verschwinden. Daraus würde aber folgen: $\zeta = cu$, was nicht möglich ist, da ζ entlang $\mathfrak{K}$ verschwindet, u aber nicht.

Eine wichtige Ergänzung zu den Resultaten dieses und des vorangehenden Absatzes bildet der folgende, schon von Mainardi und Clebsch gegebene Satz über die Integration der akzessorischen Differentialgleichung (46), welcher *das Analogon des Jacobi'schen Theorems* von § 12, b) ist:

Ist

$$z = \varphi(x, y; a) \tag{55}$$

eine einparametrige Schar von Lösungen der Lagrange'schen Differentialgleichung (I), welche die Fläche $\mathfrak{F}_0$ für $a = a_0$ enthält, so ist

$$u = \varphi_a(x, y; a_0)$$

eine Lösung der akzessorischen Differentialgleichung (46).

Zum Beweis setze man in (I) die Lösung (55) ein, differentiiere die so entstehende, in x, y und a identische Gleichung nach a und setze schließlich $a = a_0$.

Hieraus ergibt sich eine einfache *geometrische Deutung*[1]) der erhaltenen Resultate, welche eine Art Analogon der Sätze über konjugierte Punkte bei einfachen Integralen darstellt:

Man betrachte eine einparametrige Schar (55) von Extremalflächen, welche die Fläche $\mathfrak{F}_0$ für $a = a_0$ enthält. Die Fläche (a) der Schar (55) möge die Fläche $\mathfrak{F}_0$, beziehungsweise ihre Fortsetzung in einer Kurve $\mathfrak{L}_a$ schneiden; läßt man a gegen a_0 konvergieren, so möge $\mathfrak{L}_a$ gegen eine Grenzkurve $\mathfrak{L}_0$ konvergieren.

---

[1]) Vgl. Clebsch, loc. cit. p. 273.

Gibt es dann eine Schar (55), für welche diese Grenzkurve $\mathfrak{L}_0$ eine geschlossene Kurve als Bestandteil enthält, welche ganz auf dem Flächenstück $\mathfrak{F}_0$ liegt, ohne die Begrenzung desselben zu treffen, so findet kein Extremum statt.

Gibt es dagegen eine Schar (55), für welche die Grenzkurve $\mathfrak{L}_0$ ganz außerhalb $\mathfrak{F}_0$ liegt, so ist die zweite Variation stets positiv.

Nach KNESER[1]) läßt sich ferner mittels des auf p. 672 Fußnote [1]) erwähnten Verfahrens von Brunacci beweisen, daß *die Bedingungen (I), (II'), (III') für ein schwaches Extremum des Doppelintegrals* (2) *hinreichend* sind.

Beispiel V (Siehe pp. 657, 667): *Zweite Variation bei Minimalflächen.*

Hier findet man[2])

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} \frac{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + (q\zeta_x - p\zeta_y)^2}{(\sqrt{1+p^2+q^2})^3}\, dx\, dy.$$

Die zweite Variation des Flächeninhaltes eines Minimalflächenstückes ist also stets positiv, wenn sowohl das Minimalflächenstück als die Vergleichsflächen in der Form

$$z = z(x, y)$$

darstellbar vorausgesetzt werden.

Wir wollen noch unsere allgemeinen auf die Jacobi'sche Bedingung bezüglichen Resultate an dem vorliegenden Beispiel verifizieren. Da hier $f_{zz} = 0$, $f_{zp} = 0$, $f_{zq} = 0$, so ist in der akzessorischen Differentialgleichung (46) der Koeffizient von u gleich Null; daher können wir sofort eine Lösung derselben angeben, welche in $\mathfrak{A}$ von Null verschieden ist, nämlich $u = 1$.

Dementsprechend läßt sich eine einparametrige Schar von Minimalflächen angeben, welche die Fläche $\mathfrak{F}_0$ nicht schneiden, nämlich die Schar

$$z = z(x, y) + a,$$

wie daraus hervorgeht, daß die Differentialgleichung der Minimalflächen nur die Ableitungen von z, nicht aber z selbst enthält.

Für den allgemeinen Fall, wo die zulässigen Flächen in Parameterdarstellung vorausgesetzt werden, hat SCHWARZ[3]) unter Benutzung eines speziellen Systems von Parametern einen sehr einfachen Ausdruck für die zweite Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstückes angegeben. Man bilde das Minimalflächenstück $\mathfrak{F}_0$ durch parallele Normalen auf die Einheitskugel mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt ab[4]), projiziere sodann den Bildpunkt Q eines variabeln Punktes P der Minimalfläche vom Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ auf die

[1]) Vgl. *Encyklopädie*, II A, p. 617.

[2]) Schon von TÉDÉNAT gegeben, Annales de Mathématiques par Gergonne, Bd. VII (1816), p. 284.

[3]) Vgl. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I, pp. 156, 187, 236. Vgl. auch die Darstellung bei BIANCHI-LUKAT, *Differentialgeometrie*, p. 414.

[4]) Vgl. z. B. BIANCHI-LUKAT, loc. cit., Kap. V.

Ebene $z = 0$ und wähle die Koordinaten ξ, η der Projektion des Punktes Q als Parameter für die Darstellung der Minimalfläche.[1]) Ferner variiere man das Minimalflächenstück bei fest bleibender Begrenzung in der Weise, daß man jeden Punkt auf der durch ihn gehenden Flächennormale um ein Stück εw verschiebt, wobei w eine willkürliche Funktion von ξ und η ist, welche entlang dem Rande verschwindet. Dann erhält man für die zweite Variation des Flächeninhaltes den folgenden Ausdruck

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \iint\limits_{\mathfrak{A}} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{8w^2}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}\right] d\xi\, d\eta. \tag{56}$$

Die zweite Variation ist also *nur von der Gestalt des sphärischen Bildes*, *nicht aber von der sonstigen Beschaffenheit des Minimalflächenstückes abhängig*.

Auf das Integral (56) lassen sich die unter b) und c) entwickelten Schlüsse anwenden, wobei die akzessorische Differentialgleichung die Form annimmt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{8u}{(1+\xi^2+\eta^2)^2} = 0. \tag{57}$$

Wegen der aus diesen Resultaten zu ziehenden geometrischen Folgerungen verweisen wir auf die oben zitierte Abhandlung von Schwarz.[2])

§ 82. Hinreichende Bedingungen für Extrema von Doppelintegralen.[3])

Der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz lässt sich ohne Schwierigkeit auf Doppelintegrale übertragen; aus ihm folgt dann die Verall-

[1]) Zwischen der durch (29) definierten komplexen Größe s und den Parametern ξ, η besteht nach Weierstrass die Beziehung: $s = \xi + i\eta$.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 18, 19 am Ende von Kap. XIII.

[3]) Hinreichende Bedingungen für Extrema von Doppelintegralen hat zuerst Schwarz für den speziellen Fall von Minimalflächen in Parameterdarstellung entwickelt in der Arbeit „*Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*" (1885), Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I, p. 222. Mit der Aufstellung von hinreichenden Bedingungen für den allgemeinen Fall in Parameterdarstellung beschäftigen sich Kobb (in der auf p. 663 Fußnote [4]) zitierten Arbeit (1892)) und Kneser, *Lehrbuch* § 69 (1900).

Den Unabhängigkeitssatz für Doppelintegrale hat zuerst Hilbert gegeben Göttinger Nachrichten 1900, p. 295; vgl. auch die Darstellung von Osgood (Annals of Mathematics (2), Bd. II (1901), p. 125), der wir im Text gefolgt sind.

Endlich hat Hilbert in der Arbeit „*Zur Variationsrechnung*" (Göttinger Nachrichten 1905, pp. 171 und 174) den Unabhängigkeitssatz auf den Fall eines Doppelintegrals, welches von zwei unbekannten Funktionen von x und y abhängt, ausgedehnt, sowie auf den Fall, wo die Summe eines Doppelintegrals von der Form (2) und eines einfachen, über einen Teil des Randes erstreckten Integrals zu einem Extremum gemacht werden soll, während z auf dem übrigen Teil des Randes vorgeschriebene Werte hat. Mit der ersteren dieser beiden Aufgaben beschäftigt sich auch Hadamard im Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. XXXIII (1905), p. 73.

gemeinerung des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes. Aus letzterem ergeben sich hinreichende Bedingungen für ein Extremum eines Doppelintegrals, welche den in § 19 für einfache Integrale entwickelten ganz analog sind.

a) **Das Feld und die Gefällfunktionen:**

Wir nehmen an, es existiere eine einparametrige Schar von Extremalflächen

$$z = \varphi(x, y; a), \tag{58}$$

welche unsere spezielle Extremalfläche $\mathfrak{F}_0$ enthält, etwa für $a = a_0$, und für welche

$$\varphi_a(x, y; a_0) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Überdies werde vorausgesetzt, daß die Funktionen $\varphi, \varphi_x, \varphi_y$ von der Klasse C' sind, wenn (x, y) in einem den Integrationsbereich $\mathfrak{A}$ in seinem Innern enthaltenden Bereich der x, y-Ebene liegt und $|a - a_0| \leqq d$ ist.

Wir können dann nach § 21, b) eine Konstante $k \leqq d$ angeben derart, daß

$$\varphi_a(x, y; a) \neq 0 \tag{59}$$

in dem Bereich

$$(x, y) \text{ in } \mathfrak{A}, \qquad |a - a_0| \leqq k. \tag{60}$$

Man schließt dann genau wie in § 16, c) weiter: Das Bild $\mathcal{S}_k$ des Bereiches (60) im x, y, z-Raum mittels der Transformation (58) bildet ein *Feld von Extremalflächen*, d. h. durch jeden Punkt x, y, z von $\mathcal{S}_k$ geht eine und nur eine Fläche der Schar (58), für welche $|a - a_0| \leqq k$, und der zugehörige Wert von a,

$$a = \mathfrak{a}(x, y, z),$$

die *inverse Funktion des Feldes*, ist von der Klasse C' in $\mathcal{S}_k$. Für die partiellen Ableitungen derselben findet man durch Differentiation der Identität

$$\varphi(x, y; \mathfrak{a}) \equiv z$$

die Werte

$$\mathfrak{a}_x = -\frac{(\varphi_x)}{(\varphi_a)}, \qquad \mathfrak{a}_y = -\frac{(\varphi_y)}{(\varphi_a)}, \qquad \mathfrak{a}_z = \frac{1}{(\varphi_a)},$$

wobei die Klammer ( ) die Substitution von $\mathfrak{a}$ für a andeutet.

Als *Gefällfunktionen des Feldes* definieren wir die beiden Funktionen

$$\mathfrak{p}(x, y, z) = \varphi_x(x, y; \mathfrak{a}), \qquad \mathfrak{q}(x, y, z) = \varphi_y(x, y; \mathfrak{a}). \tag{61}$$

Auch sie sind von der Klasse C' in $\mathcal{S}_k$. Durch Differentiation erhält man hieraus die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_z &= (\varphi_{xx}), \qquad & \mathfrak{p}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{p}_z &= (\varphi_{xy}), \\ \mathfrak{q}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_z &= (\varphi_{yx}), \qquad & \mathfrak{q}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{q}_z &= (\varphi_{yy}). \end{aligned} \tag{62}$$

Trägt man jetzt in die Lagrange'sche Differentialgleichung in der Form (7) für z die der Differentialgleichung für jedes a genügende Funktion $\varphi(x, y; a)$ ein und ersetzt dann in der so entstehenden, in x, y, a identischen Gleichung a durch $\mathfrak{a}$, so erhält man die folgende, identisch in x, y, z geltende Gleichung

$$\begin{aligned}[f_{pp}](\mathfrak{p}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_z) + [f_{pq}](\mathfrak{p}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{p}_z + \mathfrak{q}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_z) + [f_{qq}](\mathfrak{q}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{q}_z) \\ + [f_{pz}]\mathfrak{p} + [f_{qz}]\mathfrak{q} + [f_{px}] + [f_{qy}] - [f_z] = 0,\end{aligned} \tag{63}$$

wobei die Klammer [ ] andeuten soll, daß die Argumente der eingeklammerten Funktionen sind

$$x,\, y,\, z,\, \mathfrak{p}(x, y, z),\, \mathfrak{q}(x, y, z).$$

Die Gleichung (63) stellt eine *partielle Differentialgleichung*[1]) *für die beiden Gefällfunktionen* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ dar, die Verallgemeinerung der partiellen Differentialgleichung (19) von § 17. Die Gleichung (63) läßt sich, wie man unmittelbar verifiziert, auf die Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_p] + \frac{\partial}{\partial y}[f_q] = \frac{\partial}{\partial z}([f] - \mathfrak{p}[f_p] - \mathfrak{q}[f_q]). \tag{64}$$

b) **Der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz und seine Folgerungen:**

Die Gleichung (64) gilt im ganzen Bereich $\mathfrak{S}_k$; in demselben Bereich sind die drei Funktionen

$$L = [f] - \mathfrak{p}[f_p] - \mathfrak{q}[f_q], \qquad M = [f_p], \qquad N = [f_q]$$

von der Klasse C' und der Bereich $\mathfrak{S}_k$ ist wegen (59) in Bezug auf die z-Richtung konvex. Daher können wir auf die Funktion

$$L + Mp + Nq$$

den Integrabilitätssatz von § 79, b) anwenden und erhalten so den *Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz für Doppelintegrale*:

Ist $\mathfrak{C}$ eine ganz im Feld $\mathfrak{S}_k$ gelegene, geschlossene Raumkurve[2]), so hat das Doppelintegral

$$J^* = \iint \{[f] + (p - \mathfrak{p})[f_p] + (q - \mathfrak{q})[f_q]\}\, dx\, dy \tag{65}$$

denselben Wert für alle Flächen der Klasse C', welche von der Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt werden und ganz im Felde $\mathfrak{S}_k$ gelegen sind.

Hieran schließt sich analog wie in § 17, b) der

Zusatz: Liegt die Kurve $\mathfrak{C}$ ganz auf einer Extremalfläche des Feldes $\mathfrak{S}_k$, so ist der Wert des Hilbert'schen Integrals J^* über irgend

---

[1]) Eine zweite ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für (φ_{xy}) und (φ_{yx}) in (62).

[2]) Von denselben allgemeinen Eigenschaften wie die vorgegebene Kurve $\mathfrak{L}$ (§ 79, a)).

eine von $\mathfrak{C}$ begrenzte, ganz in $\mathcal{S}_k$ gelegene Fläche der Klasse C' gleich dem Wert des Grundintegrals (2), genommen über das von $\mathfrak{C}$ begrenzte Stück der fraglichen Extremalfläche.

Denn für eine Extremalfläche

$$z = \varphi(x, y; a)$$

des Feldes ist

$$p = \mathfrak{p} = \varphi_x, \qquad q = \mathfrak{q} = \varphi_y,$$

und daher reduziert sich der Integrand von J^* auf

$$[f] = f(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y).$$

Ist jetzt

$$\mathfrak{F}: \qquad z = \bar{z}(x, y)$$

irgend eine Fläche der Klasse C', welche von der vorgeschriebenen Kurve $\mathfrak{L}$ begrenzt wird und ganz im Feld $\mathcal{S}_k$ liegt, so ist nach den beiden eben bewiesenen Sätzen

$$J_{\mathfrak{F}_0} = J^*_{\mathfrak{F}_0} = J^*_{\mathfrak{F}},$$

also

$$\Delta J \equiv J_{\mathfrak{F}} - J_{\mathfrak{F}_0} = J_{\mathfrak{F}} - J^*_{\mathfrak{F}}. \tag{66}$$

Definiert man jetzt die $\mathcal{E}$-Funktion als Funktion von sieben unabhängigen Variabeln durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, z; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) &= f(x, y, z, \tilde{p}, \tilde{q}) - f(x, y, z, p, q)\\ &- (\tilde{p} - p) f_p(x, y, z, p, q) - (\tilde{q} - q) f_q(x, y, z, p, q),\end{aligned} \tag{67}$$

und bezeichnet

$$\bar{p} = \bar{z}_x, \quad \bar{q} = \bar{z}_y, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x, y, \bar{z}), \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}(x, y, \bar{z}),$$

so ergibt sich aus (66), indem man die Integrale rechterhand ausschreibt, unmittelbar der *Weierstraß'sche Fundamentalsatz für Doppelintegrale*

$$\Delta J = \iint\limits_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}(x, y, z; \mathfrak{p}, \mathfrak{q}; \bar{p}, \bar{q})\, dx\, dy. \tag{68}$$

Hieraus folgt[1]), dem Satz von § 19, a) entsprechend, der Satz:

Wenn die Extremalfläche $\mathfrak{F}_0$ sich in ein Feld $\mathcal{S}_k$ einbetten läßt, und wenn überdies

$$\mathcal{E}(x, y, z; \mathfrak{p}(x, y, z), \mathfrak{q}(x, y, z); \tilde{p}, \tilde{q}) > 0 \tag{IV'$_\mathfrak{b}$}$$

für jeden Punkt (x, y, z) dieses Feldes und für jedes endliche, von $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ verschiedene Wertsystem $(\tilde{p}, \tilde{q})$, so liefert $\mathfrak{F}_0$ ein starkes, eigentliches Minimum für das Doppelintegral J.

---

[1]) Bei Beschränkung auf Vergleichsflächen der Klasse C'.

Denn alsdann ist der Integrand von (68) positiv in allen Punkten des Integrationsbereiches mit Ausnahme derjenigen, in welchen

$$\bar{p} = \mathfrak{p}, \qquad \bar{q} = \mathfrak{q}. \tag{69}$$

ΔJ ist also positiv, außer wenn die Gleichungen (69) im ganzen Bereich $\mathfrak{A}$ gelten, in welchem Fall $\Delta J = 0$. Durch eine dem entsprechenden Beweis von § 19, a) genau parallele Schlußweise zeigt man aber, daß letzteres nur dann stattfinden kann, wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_0$ identisch ist.

Auch der Satz von § 19, b) hat sein Analogon bei Doppelintegralen. Aus dem Taylor'schen Satz für Funktionen zweier Variabeln folgt nämlich, entsprechend der Gleichung (28) von § 18, die Formel

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(x, y, z;\, p, q;\, \tilde{p}, \tilde{q}) \qquad\qquad (70)\\ &= \tfrac{1}{2}\{(\tilde{p}-p)^2 f_{pp}(p^*, q^*) + 2(\tilde{p}-p)(\tilde{q}-q) f_{pq}(p^*, q^*) + (\tilde{q}-q)^2 f_{qq}(p^*, q^*)\}, \end{aligned}$$

wo

$$p^* = p + \theta(\tilde{p} - p), \quad q^* = q + \theta(\tilde{q} - q), \quad 0 < \theta < 1,$$

und wir der Einfachheit halber die Argumente x, y, z in den Ableitungen von f unterdrückt haben. Hieraus ergibt sich nun der Satz:

Wenn die Extremalfläche $\mathfrak{F}_0$ sich in ein Feld einbetten läßt, und wenn überdies die Bedingung

$$f_{pp} > 0, \qquad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0 \tag{II'$_b$}$$

mit den Argumenten $x, y, z, \tilde{p}, \tilde{q}$ von f_{pp}, f_{pq}, f_{qq} erfüllt ist für jeden Punkt (x, y, z) einer gewissen Umgebung (ϱ) von $\mathfrak{F}_0$ und für jedes endliche Wertsystem $\tilde{p}, \tilde{q}$, so liefert $\mathfrak{F}_0$ ein starkes, eigentliches Minimum für das Doppelintegral J.

Denn wendet man auf den Integranden von (68) die Formel (70) an, so geht derselbe in eine quadratische Form der Größen $(\bar{p} - \mathfrak{p})$, $(\bar{q} - \mathfrak{q})$ über, welche wegen (II'$_b$) im ganzen Integrationsbereich positiv ist, außer wo $\bar{p} = \mathfrak{p}$, $\bar{q} = \mathfrak{q}$, vorausgesetzt, daß man, was stets möglich ist, die Größe k so klein gewählt hat, daß das Feld $\mathcal{S}_k$ ganz in der Umgebung (ϱ) von $\mathfrak{F}_0$ liegt.

Beispiel V (siehe pp. 657, 682): *Minimalflächen.*

Ist $z = z(x, y)$ das betrachtete Minimalflächenstück, so stellt die Gleichung

$$z = z(x, y) + a; \quad (x, y) \text{ in } \mathfrak{A}; \quad -\infty < a < +\infty$$

eine Schar von Minimalflächen dar, welche ein Feld bilden. Da überdies

$$f_{pp} = \frac{1 + q^2}{(\sqrt{1 + p^2 + q^2})^3}, \quad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

so ist auch die Bedingung (II'$_b$) erfüllt, und daher besitzt das Minimalflächenstück $\mathfrak{F}_0$ einen kleineren Flächeninhalt als jede andere Fläche $z = \bar{z}(x, y)$ der Klasse C', welche dieselbe Begrenzung besitzt *(absolutes Minimum).*