Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Zwölftes Kapitel. Weitere notwendige, sowie hinreichende Bedingungen beim Lagrange´schen Problem

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Zwölftes Kapitel.

Weitere notwendige, sowie hinreichende Bedingungen beim Lagrange'schen Problem.

§ 74. Analoga der Bedingungen von Weierstraß und Legendre.

In diesem Kapitel sollen zunächst die den Bedingungen von LEGENDRE, JACOBI und WEIERSTRASS entsprechenden Bedingungen (II), (III), (IV) für das Lagrange'sche Problem aufgestellt werden. Wir werden diese Bedingungen zuerst ohne Benutzung der zweiten Variation ableiten, indem wir mit der Weierstraß'schen Bedingung beginnen und daraus die Bedingung (II) herleiten (§ 74), während sich die Bedingung (III) aus einer Verallgemeinerung des Enveloppensatzes ergeben wird (§ 75). Alsdann werden wir, wenn auch nur kurz, auf die Theorie der zweiten Variation eingehen, teils ihres großen historischen Interesses wegen, teils weil dieselbe, wie sich herausstellen wird, zur Vervollständigung der vorangegangenen Theorie der konjugierten Punkte unentbehrlich ist (§ 76).

Den Abschluß des Kapitels bildet dann die Aufstellung hinreichender Bedingungen auf Grund des allgemeinen Hilbert'schen Unabhängigkeitssatzes (§ 77) und die Theorie der Mayer'schen Extremalenscharen (§ 78).

Wir beschränken uns dabei durchweg auf den Fall des *„Funktionenproblems" mit festen Endpunkten* bei welchem *sämtliche Nebenbedingungen Differentialgleichungen* sind.[1])

Ferner machen wir über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ dieselben Voraussetzungen A), B), C) wie in § 72, b), fügen denselben aber noch eine *weitere Voraussetzung* D) hinzu:

---

[1]) Der einzige Fall, welcher außerdem bisher vollständig durchgeführt worden ist, ist das räumliche Variationsproblem ohne Nebenbedingungen, welches kürzlich MASON und BLISS eingehend behandelt haben, und zwar in Parameterdarstellung bei festen und bei variabeln Endpunkten, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IX (1908), p. 440; vgl. auch die Dissertation von NADESCHDA GERNET (Göttingen 1902), die dasselbe Problem mit x als unabhängiger Variabeln bei festen Endpunkten behandelt.

D) Die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ soll sich in Beziehung auf jedes noch so kleine Teilintervall $[\xi_1 \xi_2]$ des in § 72, b) definierten „Regularitätsintervalls“

$$x_1^* < x < x_2^*$$

normal verhalten (§ 69, d)), d. h. das einzige System von m Funktionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, welche in $[\xi_1 \xi_2]$ von der Klasse C' sind und den n linearen Differentialgleichungen

$$\sum_\beta \left(\lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

genügen, ist

$$\lambda_1 \equiv 0, \quad \lambda_2 \equiv 0, \quad \cdots, \quad \lambda_m \equiv 0 \quad \text{in } [\xi_1 \xi_2].$$

Wir drücken diese Voraussetzung nach v. Escherich[1]) dadurch aus, daß wir sagen, es soll der „*Hauptfall*“ des Lagrange'schen Problems vorliegen.

In den Voraussetzungen A) bis D) ist enthalten, daß die Konstante l_0 von § 69 den Wert 1 hat, sodaß also in den Euler'-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$F = f + \sum_\beta \lambda_\beta \varphi_\beta$$

zu setzen ist.

a) **Die Weierstraß'sche Bedingung**[2]):

Zur Herleitung der Weierstraß'schen Bedingung wählen wir auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ zwischen P_1 und P_2 einen beliebigen Punkt P_3. Es folgt dann aus der Voraussetzung C), daß im Punkt P_3 mindestens eine Determinante $m$ten Grades der Matrix (43) von § 69 von Null verschieden ist; es sei etwa

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)}{\partial(y_1', y_2', \cdots, y_m')}\right|^{x_3} \neq 0. \tag{1}$$

Diese Determinante ist dann auch noch in einer gewissen Umgebung des Punktes P_3 von Null verschieden. In dieser Umgebung wählen wir auf $\mathfrak{E}_0$ und vor P_3 einen Punkt P_0. Wir ziehen dann durch P_3 eine beliebige Kurve

$$\tilde{\mathfrak{C}}: \qquad y_i = \tilde{y}_i(x)$$

[1]) Vgl. Wiener Berichte, Bd. CVIII (1899), p. 1290.

[2]) Zuerst von Hahn auf etwas anderem Wege abgeleitet, vgl. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVII (1906), p. 295; für den Fall endlicher Bedingungsgleichungen ist die Ausdehnung der Weierstraß'schen Bedingung auf das Lagrange'sche Problem schon vorher von Rudio gegeben worden, vgl. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, Jahrgang XLIII (1898), p. 340.

der Klasse C', welche den m Differentialgleichungen[1])

$$\varphi_\beta(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) = 0$$

genügt, und für welche das Wertsystem

$$x_3, \; y_1(x_3), \ldots, y_n(x_3), \; \tilde{y}_1'(x_3), \; \ldots, \; \tilde{y}_n'(x_3) \tag{2}$$

ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{T}$ von § 69 liegt. Wie sich aus den Existenztheoremen über Differentialgleichungen ergibt, ist dies stets möglich, und wir können die Werte

$$\tilde{y}_1'(x_3), \; \ldots, \; \tilde{y}_n'(x_3)$$

beliebig vorschreiben, vorausgesetzt, daß für das Wertsystem (2) mindestens eine Determinante $m$ten Grades der Matrix

$$\left\| \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \right\| \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n, \\ \beta = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \tag{3}$$

von Null verschieden ist.

Es sei jetzt P_4 derjenige Punkt von $\tilde{\mathfrak{C}}$, dessen Abszisse den Wert $x_4 = x_3 - \varepsilon$ hat, unter ε eine kleine positive Größe verstanden. Dann können wir stets, und zwar für beliebige, hinreichend kleine Werte von ε, eine Kurve

$$\bar{\mathfrak{C}}: \qquad y_i = \bar{y}_i(x, \varepsilon)$$

von den erforderlichen Stetigkeitseigenschaften konstruieren, welche durch P_0 und P_4 geht:

$$\bar{y}_i(x_0, \varepsilon) = y_i(x_0), \qquad \bar{y}_i(x_4, \varepsilon) = \tilde{y}_i(x_4), \tag{4}$$

sich für $\varepsilon = 0$ auf $\mathfrak{C}_0$ reduziert:

$$\bar{y}_i(x, 0) = y_i(x),$$

und den m Differentialgleichungen

$$\varphi_\beta(x, \bar{y}(x, \varepsilon), \bar{y}'(x, \varepsilon)) = 0$$

genügt.

Zum Beweis dieser Behauptung verfahren wir ganz ähnlich wie in § 69, a). Wir wählen $n(n-m)$ Funktionen[2]) $\eta_{m+r}^k(x)$ von der Klasse C'', welche sämtlich in x_0 verschwinden, sonst aber willkürlich sind, und setzen

$$Y_{m+r}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = y_{m+r}(x) + \sum_k \varepsilon_k \eta_{m+r}^k(x).$$

Alsdann können wir nach § 24, e) m Funktionen

$$y_\alpha = Y_\alpha(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

---

[1]) Wir benutzen dieselben abkürzenden Bezeichnungen wie in §§ 68 und 72.

[2]) Wegen der Bedeutung der Indizes vgl. die Verabredung im Eingang von § 68.

von den dort angegebenen Stetigkeitseigenschaften bestimmen, welche mit den Funktionen Y_{m+r} zusammen den m Differentialgleichungen

$$\varphi_\beta(x, Y, Y') = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$Y_\alpha(x, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad Y_\alpha(x_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = y_\alpha(x_0)$$

genügen.

Gelingt es nun, die Größen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ so als Funktionen von ε zu bestimmen, daß sie den n Gleichungen

$$Y_i(x_4, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \tilde{y}_i(x_4) \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung: $\varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_n = 0$ für $\varepsilon = 0$ genügen, so besitzt die Kurve

$$y_i = Y_i(x, \varepsilon_1(\varepsilon), \ldots, \varepsilon_n(\varepsilon)) \equiv \bar{y}_i(x, \varepsilon)$$

alle verlangten Eigenschaften.

Eine solche Bestimmung der ε_i ist nun aber in der Tat stets möglich. Denn da nach der Konstruktion der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$

$$y_i(x_3) = \tilde{y}_i(x_3), \tag{6}$$

so werden die Gleichungen (5) durch das Wertsystem $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0, \ldots, \varepsilon_n = 0$ befriedigt, und überdies läßt sich zeigen, daß die willkürlichen Funktionen η^k_{m+r} sich so wählen lassen, daß die Funktionaldeterminante der Auflösung von Null verschieden ist. Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß die durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial Y_\alpha}{\partial \varepsilon_k}\right)_0 = \eta^k_\alpha$$

definierten Funktionen η^k_α den Differentialgleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i}\eta^k_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y'_i}\eta^{k\prime}_i = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$\eta^k_\alpha(x_0) = 0$$

genügen, woraus wie in § 69, b) folgt, daß die Funktionen η^k_α nur von den Funktionen η^k_{m+r} mit demselben oberen Index abhängen und nach Wahl derselben eindeutig bestimmt sind.

Da ferner nach unserer Voraussetzung D) die Extremale $\mathfrak{E}_0$ sich in Beziehung auf das Intervall $[x_0 x_3]$ normal verhält, so folgt nach § 69, d), daß sich die Funktionen η^β_{m+r} so wählen lassen, daß sie in x_3 verschwinden, und daß für die hiernach in der eben angegebenen Weise bestimmten Funktionen η^β_α die Determinante

$$\left| \eta^\beta_\alpha(x_3) \right| \neq 0. \tag{7}$$

Wählt man jetzt schließlich noch die Funktionen η^{m+s}_{m+r} so, daß

$$\eta^{m+s}_{m+r}(x_3) = \delta_{rs},$$

unter δ_{rs} wieder das Kronecker'sche Symbol verstanden, so reduziert sich die fragliche Funktionaldeterminante auf die Determinante (7), womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nachdem so eine Schar von zulässigen Variationen von den gewünschten Eigenschaften hergestellt ist, betrachten wir das Integral J vom Punkt P_1 entlang $\mathfrak{E}_0$ bis P_0, von da entlang $\overline{\mathfrak{E}}$ bis P_4, dann von P_4 entlang $\tilde{\mathfrak{E}}$ nach P_3 und endlich von P_3 entlang $\mathfrak{E}_0$ bis P_2. Den Wert desselben als Funktion von ε bezeichnen wir mit $J(\varepsilon)$. Da sowohl die Funktionen $y_i(x)$, als $\bar{y}_i(x,\varepsilon)$, als $\tilde{y}_i(x)$ den Differentialgleichungen $\varphi_\beta = 0$ genügen, so können wir $J(\varepsilon)$ auch schreiben

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_0} F\,dx + \int_{x_0}^{x_4} \overline{F}\,dx + \int_{x_4}^{x_3} \tilde{F}\,dx + \int_{x_3}^{x_2} F\,dx,$$

wobei die in F, resp. $\overline{F}$ und $\tilde{F}$ vorkommenden Funktionen λ_β die zur Extremalen $\mathfrak{E}_0$ gehörigen Multiplikatoren sind.

Beachtet man jetzt Gleichung (6) sowie die aus (4_2) folgende Relation

$$\frac{\partial \bar{y}_i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|^{x_4} - \bar{y}_i'(x_4,\varepsilon) = -\tilde{y}_i'(x_4),$$

so erhält man nach einfacher Rechnung unter Anwendung der Lagrange'schen partiellen Integration und unter Benutzung der Bezeichnung (120) von § 72:

$$\begin{aligned} J'(0) = {} & F(x, y(x), \tilde{y}'(x), \lambda(x)) - F(x, y(x), y'(x), \lambda(x)) \\ & - \sum_i (\tilde{y}_i'(x) - y_i'(x)) F_{n+i}(x, y(x), y'(x), \lambda(x)) \Big|^{x_3}. \end{aligned}$$

Definiert man daher die Weierstraß'sche $\mathcal{E}$-Funktion für das vorliegende Lagrange'sche Problem als Funktion ihrer $3n + m + 1$ Argumente

$$x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$$

durch die Gleichung

$$\mathcal{E}(x,y;p,\tilde{p};\lambda) = F(x,y,\tilde{p},\lambda) - F(x,y,p,\lambda) - \sum_i (\tilde{p}_i - p_i) F_{n+i}(x,y,p,\lambda), \quad (8)$$

so folgt hieraus der Satz[1]):

Soll die Extremale $\mathfrak{E}_0$ ein starkes Minimum für das Integral J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$ liefern, so muß

$$\mathcal{E}(x, y(x); y'(x), \tilde{p}; \lambda(x)) \geqq 0 \quad \text{(IV)}$$

---

[1]) Vgl. Hahn, loc. cit., p. 303. Hier, wie bei allen folgenden Sätzen über das Lagrange'sche Problem, sind stets die Voraussetzungen A) bis D) noch hinzuzufügen.

sein für jedes x im Intervall $[x_1 x_2]$ und für jedes endliche Wertsystem $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$, welches den Bedingungen

$$\varphi_\beta(x, y(x), \tilde{p}) = 0 \tag{9}$$

genügt, und für welches der Punkt $(x, y(x), \tilde{p})$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{T}$ liegt und mindestens einer Determinante mten Grades der Matrix (3) einen von Null verschiedenen Wert erteilt.

b) **Die Clebsch'sche Bedingung:**

Aus der Weierstraß'schen Bedingung läßt sich nun leicht die der Legendre'schen entsprechende Bedingung (II) ableiten.[1])

Dazu müssen wir zunächst den folgenden *Hilfssatz* beweisen:

Es sei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ irgend ein System von Größen, welche den m Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \zeta_i = 0 \tag{10}$$

genügen. Alsdann kann man stets n Funktionen $\tilde{p}_i(\varepsilon)$ bestimmen, welche in der Umgebung der Stelle $\varepsilon = 0$ von der Klasse C'' sind, für beliebige, hinreichend kleine Werte von $|\varepsilon|$ den m Gleichungen

$$\varphi_\beta(x_3, y(x_3), \tilde{p}(\varepsilon)) = 0 \tag{11}$$

und den Anfangsbedingungen

$$\tilde{p}_i(0) = 0, \qquad \tilde{p}_i'(0) = \zeta_i \tag{12}$$

genügen.

Die Argumente von $\partial \varphi_\beta / \partial y_i'$ sind dabei $(x_3, y(x_3), y'(x_3))$.

Zum Beweis definieren wir zunächst

$$\tilde{p}_{m+r}(\varepsilon) = y_{m+r}'(x_3) + \varepsilon \zeta_{m+r}.$$

Dann können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die m Gleichungen

$$\varphi_\beta(x_3, y_1(x_3), \ldots, y_n(x_3), \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m, \tilde{p}_{m+1}(\varepsilon), \ldots, \tilde{p}_n(\varepsilon)) = 0$$

in der Umgebung des Wertsystems $\varepsilon = 0$, $\tilde{p}_1 = y_1'(x_3), \ldots, \tilde{p}_m = y_m'(x_3)$ eindeutig nach $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m$ auflösen. Denn die Gleichungen werden durch dieses spezielle Wertsystem befriedigt, und die Funktionaldeterminante der Auflösung ist nach (1) von Null verschieden. Wir erhalten daher eine Lösung $\tilde{p}_\alpha = \tilde{p}_\alpha(\varepsilon)$ der verlangten Art, von der nur noch zu zeigen ist, daß sie auch der Bedingung (12_2) genügt. Differentiieren wir die in ε identischen Gleichungen (11) nach ε und setzen dann $\varepsilon = 0$, so erhalten wir

$$\sum_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_\alpha'} p_\alpha'(0) + \sum_r \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_{m+r}'} \zeta_{m+r} = 0,$$

[1]) Vgl. Hahn, loc. cit. p. 303. Der Beweis von Hahn ist übrigens durch den hier gegebenen Hilfssatz zu ergänzen.

woraus durch Vergleich mit (10) wegen (1) folgt, daß: $p'_\alpha(0) = \zeta_\alpha$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wegen (11), (12_1) und (1) muß nun im Fall eines Minimums die Weierstraß'sche Bedingung

$$\mathcal{E}(x_3, y(x_3); y'(x_3), \tilde{p}(\varepsilon); \lambda(x_3)) \overline{\geqq} 0$$

für alle hinreichend kleinen Werte von $|\varepsilon|$ erfüllt sein. Bezeichnen wir die linke Seite als Funktion von ε mit $E(\varepsilon)$, so ergibt eine einfache Rechnung unter Benutzung von (12):

$$E(0) = 0, \qquad E'(0) = 0, \qquad E''(0) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \zeta_i \zeta_k.$$[1]

Da nach dem Taylor'schen Satz

$$E(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}[E''(0) + (\varepsilon)],$$

so folgt hieraus der Satz:

Für ein Minimum des Integrals J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$ ist weiter notwendig, daß in jedem Punkt des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \zeta_i \zeta_k \overline{\geqq} 0 \tag{II}$$

für alle den m Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y'_i} \zeta_i = 0 \tag{13}$$

genügenden Wertsysteme der Größen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$.

Dabei sind die Argumente der zweiten Ableitungen von F: $(x, y(x), y'(x), \lambda(x))$, diejenigen von $\partial\varphi_\beta/\partial y'_i$: $(x, y(x), y'(x))$.

Wir werden diese Bedingung die „*Clebsch'sche Bedingung*" nennen, da sie zuerst von Clebsch[2]) gegeben worden ist, und zwar mit Hilfe der zweiten Variation.

In der Theorie der quadratischen Formen wird gezeigt[3]), daß die Bedingung (II) damit äquivalent ist, daß unter den Wurzeln der Gleichung

---

[1]) Das Summationszeichen $\sum\limits_{i,k}$ bedeutet hier und in der Folge stets die Doppelsumme $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}$.

[2]) Journal für Mathematik, Bd. LV (1858), p. 254. Vgl. auch unten § 76, f).

[3]) Weierstrass, *Vorlesungen über Variationsrechnung* 1879; C. Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. III, Nr. 392.

$$G(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} R_{11}-\varrho, & R_{12}, & \cdots, & R_{1n}, & L_{11}, & \cdots, & L_{1m} \\ R_{21}, & R_{22}-\varrho, & \cdots, & R_{2n}, & L_{21}, & \cdots, & L_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1}, & R_{n2}, & \cdots, & R_{nn}-\varrho, & L_{n1}, & \cdots, & L_{nm} \\ L_{11}, & L_{21}, & \cdots, & L_{n1}, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1m}, & L_{2m}, & \cdots, & L_{nm}, & 0, & \cdots, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (14)$$

welche bekanntlich alle reell sind[1]), sich keine negativen befinden, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} = R_{ik}, \qquad \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} = L_{i\beta}$$

gesetzt ist.

Für $\varrho = 0$ reduziert sich die Determinante $G(\varrho)$ auf die Determinante R von § 72, a), die nach Voraussetzung C) entlang $\mathfrak{E}_0$ von Null verschieden ist. Somit kann unter den Wurzeln der Gleichung (14) die Null nicht vorkommen. Das hat zur Folge, daß unter der Voraussetzung C) die Bedingung (II), wenn überhaupt, nur in der stärkeren Form

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \zeta_i \zeta_k > 0 \qquad \text{(II')}$$

für alle den Gleichungen (13) genügenden, nicht sämtlich verschwindenden Werte $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ erfüllt sein kann.

Da die Wurzeln der Gleichung (14) sämtlich reell sind, so er-

---

[1]) Siehe GUNDELFINGER in HESSE, *Analytische Geometrie des Raumes* (1876) p. 518; WEIERSTRASS, *Vorlesungen über Variationsrechnung* 1879. Den folgenden einfachen Beweis verdanke ich Herrn LÖWY:

Ist ϱ eine Wurzel der Gleichung (14), so gibt es $n+m$ reelle oder komplexe Größen $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, welche nicht alle gleich Null sind und den $n+m$ Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} R_{i1}x_1 + R_{i2}x_2 + \cdots + R_{in}x_n + L_{i1}y_1 + L_{i2}y_2 + \cdots + L_{im}y_m &= \varrho x_i, \\ L_{1\beta}x_1 + L_{2\beta}x_2 + \cdots + L_{n\beta}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Dabei können wegen (1) nicht alle Größen x_i gleich Null sein.

Es seien jetzt $\bar{x}_i, \bar{y}_\beta$ die zu x_i, y_β konjugiert imaginären Größen; dann folgt, indem wir die i te Gleichung mit $\bar{x}_i$, die $(n+\beta)$te mit $\bar{y}_\beta$ mnltiplizieren und dann addieren,

$$\sum_{i,k} R_{ik} x_k \bar{x}_i + \sum_{i,\beta} L_{i\beta}(x_i \bar{y}_\beta + \bar{x}_i y_\beta) = \varrho \sum_i x_i \bar{x}_i.$$

Da R_{ik}, $L_{i\beta}$ reell sind, und $R_{ik} = R_{ki}$, so ist die linke Seite reell; da überdies auch $\sum_i x_i \bar{x}_i$ reell und von Null verschieden ist, so folgt, daß ϱ reell sein muß.

gibt sich aus der Descartes'schen Regel ein sehr einfaches Mittel, um zu entscheiden, ob die Bedingung (II') erfüllt ist: Man ordne die ganze Funktion $G(\varrho)$ nach absteigenden Potenzen von ϱ; alsdann müssen die Koeffizienten der so erhaltenen ganzen Funktion abwechselnde Vorzeichen haben.

§ 75. Die Kneser'sche Theorie der konjugierten Punkte beim Lagrange'schen Problem.

Wir werden in diesem Paragraphen nach dem Vorgang von Kneser den Enveloppensatz von § 44, c) und § 62, d) auf den Fall des Lagrange'schen Problems ausdehnen und daraus die der Jacobischen Bedingung entsprechende Bedingung (III) ableiten. Wir halten dabei an den Voraussetzungen A) bis D) von §§ 72 und 74 über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ fest.

a) Definition des konjugierten Punktes:

Wir gehen aus von der Betrachtung der *Gesamtheit*[1]) *der Extremalen durch den Anfangspunkt* $P_1(x_1, y_{11}, \cdots, y_{n1})$ des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$. Dieselbe bildet eine n-parametrige Schar, die sich nach den Resultaten von § 72, c) mittels der Funktionen $\mathfrak{Y}_i$ in der folgenden *Normalform* darstellen läßt:

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; x_1, y_{11}, \cdots, y_{n1}, c_1, \cdots, c_n) \equiv Y_i(x, c_1, \cdots, c_n), \tag{15}$$

mit $c_1, \cdots, c_n$ als Parametern. In der Tat ist nach Gleichung (136_1) von § 72

$$Y_i(x_1, c_1, \cdots, c_n) = y_{i1}, \tag{16}$$

woraus sich durch Differentiation nach c_k ergibt

$$\left.\frac{\partial Y_i}{\partial c_k}\right|^{x_1} = 0. \tag{17}$$

Die Schar (15) enthält die Extremale $\mathfrak{E}_0$ und zwar in der Bezeichnung von § 72, Gleichung (122), für:

$$c_1 = v_1(x_1) \equiv c_1^0, \cdots, \qquad c_n = v_n(x_1) \equiv c_n^0,$$

sodaß also

$$Y_i(x, c_1^0, \cdots, c_n^0) = y_i(x).$$

[1]) Streng genommen handelt es sich nur um Extremalen, die zu solchen Lösungen der Differentialgleichungen (I) gehören, welche nur wenig von der Lösung (119) von § 72 abweichen. Daß die Gleichungen (15) alle diese Extremalen darstellen, folgt daraus, daß nach Gleichung (143) von § 72 die Determinante $|\partial \mathfrak{Y}_i / \partial b_k|$ von Null verschieden ist.

Die Funktionaldeterminante der Schar bezeichnen wir mit

$$D(x, c_1, \cdots, c_n) = \frac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(c_1, \cdots, c_n)}.$$

Es folgt dann aus (17), daß

$$D(x_1, c_1, \cdots, c_n) = 0,$$

insbesondere also auch

$$D(x_1, c_1^0, \cdots, c_n^0) = 0. \tag{18}$$

Wir wollen nun die Annahme machen, daß der Punkt x_1 ein *isolierter Nullpunkt* der Funktion $D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0)$ ist, d. h. daß sich eine Umgebung von x_1 angeben läßt, in welcher diese Funktion, abgesehen vom Punkt x_1, von Null verschieden ist. Es wird sich später zeigen[1]), daß dies in Wirklichkeit keine weitere beschränkende Annahme, sondern eine Folge unserer bisherigen Voraussetzungen A) bis D) ist.

Es folgt dann, daß entweder[2])

$$D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0) \neq 0 \text{ für } x_1 < x < x_2^*$$

oder aber, daß es zwischen x_1 und x_2^* einen zunächst[3]) auf x_1 folgenden Nullpunkt x_1' dieser Funktion gibt, sodaß also

$$\begin{aligned} &D(x_1', c_1^0, \cdots, c_n^0) = 0, \\ &D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0) \neq 0 \text{ für } x_1 < x < x_1'. \end{aligned} \tag{19}$$

Im zweiten Fall heißt der dem Wert $x = x_1'$ entsprechende Punkt P_1' der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ wieder der zu P_1 *konjugierte Punkt.*

Die Funktionaldeterminante D läßt sich auch als Determinante $2n$ter Ordnung schreiben; definiert man nämlich nach A. Mayer[4]) die Funktion $\Delta(x, x_1)$ durch die Determinante

$$\Delta(x, x_1) = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial b_1}\right|^{x_1}, \cdots, \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial b_n}\right|^{x_1}, & \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_1}\right|^{x_1}, \cdots, \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_n}\right|^{x_1} \\ \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial b_1}\right|^{x}, \cdots, \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial b_n}\right|^{x}, & \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_1}\right|^{x}, \cdots, \left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_n}\right|^{x} \end{vmatrix} \tag{20}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei in den partiellen Ableitungen der Funktionen $\mathfrak{Y}_i(x; a, b, c)$ nach

[1]) Siehe § 76, g). Sind die Funktionen f und φ_β analytisch und regulär im Bereich $\mathfrak{T}$, so ist diese Annahme damit gleichbedeutend, daß $D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0)$ nicht identisch verschwinden soll.

[2]) Wegen der Bedeutung des Zeichens x_2^* siehe § 72, b).

[3]) Vgl. den am Ende von § 61, b) erwähnten Hilfssatz über stetige Funktionen.

[4]) Journal für Mathematik, Bd. LXIX (1868), p. 250.

der Differentiation $a = x_1, b_1 = y_{11}, \cdots, b_n = y_{n1}, c_1 = c_1^0, \cdots, c_n = c_n^0$ zu setzen ist, so ist

$$D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0) = \Delta(x, x_1), \tag{21}$$

wie sich unmittelbar aus den Gleichungen (143) von § 72 ergibt.

In dieser Form Δ wird uns die Determinante in der Theorie der zweiten Variation wieder begegnen; man pflegt sie die *Mayer'sche Determinante* zu nennen.

Geht man von der Normalform (15) der Extremalenschar durch den Punkt P_1 zu einer andern Darstellungsform über, indem man an Stelle der Parameter $c_1, \cdots, c_n$ andere n unabhängige Parameter einführt, so wird die Funktionaldeterminante $D(x, c_1, \cdots, c_n)$ der Schar nach bekannten allgemeinen Sätzen über Funktionaldeterminanten nur mit einem konstanten, nicht verschwindenden Faktor multipliziert. Dasselbe gilt von der Determinante $\Delta(x, x_1)$, wenn man von den „kanonischen Konstanten" $b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_n$ zu beliebigen anderen Integrationskonstanten übergeht.

Für die weitere Diskussion werden wir die *beschränkende Annahme* machen, daß im konjugierten Punkt, falls ein solcher existiert,

$$D_x(x_1', c_1^0, \cdots, c_n^0) \neq 0. \tag{22}$$

Dann können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung

$$D(x, c_1, \cdots, c_n) = 0$$

in der Umgebung der Stelle $x = x_1', c_1 = c_1^0, \cdots, c_n = c_n^0$ eindeutig nach x auflösen[1]. Die Lösung sei

$$x = \mathfrak{x}(c_1, \cdots, c_n),$$

sodaß also

$$D(\mathfrak{x}, c_1, \cdots, c_n) = 0$$

identisch in $c_1, \cdots, c_n$ und

$$\mathfrak{x}(c_1^0, \cdots, c_n^0) = x_1'.$$

Es besitzt dann auch jede der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ benachbarte Extremale (c) der Schar (15) einen zu P_1 konjugierten Punkt, und die Abszisse desselben ist $\mathfrak{x}(c_1, \cdots, c_n)$.

Den geometrischen Ort dieser konjugierten Punkte, d. h. also die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit

$$x = \mathfrak{x}(c_1, \cdots, c_n), \qquad y_i = Y_i(\mathfrak{x}, c_1, \cdots, c_n)$$

[1]) Dabei müssen wir allerdings voraussetzen, daß auch die zweiten Ableitungen $\partial^2 Y_i / \partial c_k \partial c_j$ existieren und stetig sind; das wird nach p. 178, Zusatz I sicher der Fall sein, wenn wir die ursprünglichen Voraussetzungen von § 69 über die Funktionen f und φ_β dahin verschärfen, daß dieselben im Bereich $\mathfrak{T}$ von der Klasse C^{IV} sind.

im Raum der Variabeln $x, y_1, \cdots, y_n$ könnte man die *„Brennhyperfläche"* der Schar (15) nennen. Es lassen sich für dieselbe ähnliche Betrachtungen anstellen, wie im Fall des isoperimetrischen Problems (§ 62, b)).

b) **Das ausgezeichnete Extremalenbüschel durch den Punkt P_1:**[1])

Wir greifen jetzt aus der n-fach unendlichen Extremalenschar (15) eine einfach-unendliche, die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthaltende Schar (ein „Büschel") heraus, indem wir die Größen c_i durch Funktionen eines Parameters α ersetzen, welche für einen bestimmten Wert $\alpha = \alpha_0$ die Werte c_i^0 annehmen und in der Umgebung von α_0 von der Klasse C' sind:

$$c_i = \tilde{c}_i(\alpha), \qquad \tilde{c}_i(\alpha_0) = c_i^0, \tag{23}$$

sodaß das Büschel dargestellt wird durch die Gleichungen

$$y_i = Y_i(x, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n), \tag{24}$$

und stellen uns nunmehr die Aufgabe, die Funktionen $\tilde{c}_i(\alpha)$ so zu bestimmen, daß dieses Büschel eine *Enveloppe* besitzt, d. h., daß es eine Kurve $\mathfrak{F}$ gibt, welche von sämtlichen Kurven des Büschels berührt wird.

Angenommen es existiere eine solche Kurve $\mathfrak{F}$, und es sei $\tilde{x}(\alpha)$ die Abszisse des Berührungspunktes P_3 der Extremalen $\mathfrak{E}_\alpha$ des Büschels (24) mit $\mathfrak{F}$. Die Ordinaten von P_3 sind dann $Y_i(\tilde{x}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$, und die Kurve $\mathfrak{F}$ ist in Parameterdarstellung gegeben durch die Gleichungen

$$\mathfrak{F}: \qquad x = \tilde{x}(\alpha), \qquad y_i = Y_i(\tilde{x}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n) \equiv \tilde{y}_i(\alpha). \tag{25}$$

Im Punkt P_3 sollen sich die beiden Kurven $\mathfrak{E}_\alpha$ und $\mathfrak{F}$ berühren, worunter wir verstehen, daß die n Gleichungen bestehen sollen:

$$\tilde{x}'(\alpha)[Y_i'] = \tilde{y}_i'(\alpha), \tag{26}$$

wenn wir durch die Klammer [ ] die Substitution von $\tilde{x}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$ für $x, c_1, \ldots, c_n$ andeuten. Da nach (25)

$$\tilde{y}_i'(\alpha) = [Y_i']\tilde{x}'(\alpha) + \sum_k \left[\frac{\partial Y_i}{\partial c_k}\right]\tilde{c}_k'(\alpha), \tag{27}$$

so reduzieren sich die Gleichungen (26) auf

$$\sum_k \left[\frac{\partial Y_i}{\partial c_k}\right]\tilde{c}_k'(\alpha) = 0. \tag{28}$$

---

[1]) Im wesentlichen nach Kneser, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft zu Charkow, zweite Serie, Bd. VII (1902); vgl. auch für den speziellen Fall $n = 2$, $m = 0$ die schon oben erwähnte Arbeit von Mason und Bliss, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IX (1908), p. 446.

Da ferner die Funktionen $\tilde{c}_k$ nicht sämtlich konstant sein sollen, so muß die Determinante des Gleichungssystems (28) verschwinden, d. h. es muß

$$D(\tilde{x}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n) = 0 \tag{29}$$

sein. Diese Gleichung sagt aus, daß der Berührungspunkt P_3 ein zu P_1 auf der Extremalen $\mathfrak{E}_\alpha$ konjugierter Punkt (im weiteren Sinn) sein muß. Wir betrachten insbesondere den Fall, wo der Berührungspunkt der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ mit $\mathfrak{F}$ der konjugierte Punkt im engeren Sinn, P_1', ist, also

$$\tilde{x}(\alpha_0) = x_1'.$$

Dann folgt aus (29) nach der am Ende von Absatz a) gemachten Bemerkung unter der Voraussetzung (22), daß

$$\tilde{x}(\alpha) = \mathfrak{x}(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$$

für alle Werte von α in der Nähe von α_0.

Gibt man dem $\tilde{x}(\alpha)$ diesen Wert, so ist es möglich, den Gleichungen (28) durch Werte der Größen $\tilde{c}_k'(\alpha)$ zu genügen, welche nicht sämtlich null sind, und zwar sind die Verhältnisse dieser Größen durch die Gleichungen (28) eindeutig bestimmt. Denn wegen der Voraussetzung (22) sind die Subdeterminanten des Koeffizientensystems dieser Gleichungen nicht sämtlich gleich Null, da

$$D_x(x, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i,k} D_{ik} \frac{\partial Y_i'}{\partial c_k},$$

wenn D_{ik} die Subdeterminante des Elementes $\partial Y_i / \partial c_k$ in der Determinante D bedeutet. Es sei z. B.

$$[D_{nn}] \neq 0 \tag{30}$$

für $\alpha = \alpha_0$ und daher auch in einer gewissen Umgebung von α_0. Dann ergibt die Auflösung von (28)

$$\tilde{c}_k'(\alpha) = \varrho [D_{nk}]. \tag{31}$$

Den Proportionalitätsfaktor ϱ dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 annehmen, da wir dies durch Einführung eines passenden neuen Parameters an Stelle von α stets erreichen können.

Die Gleichungen (31) stellen nunmehr ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung in der Normalform dar, welche zusammen mit den Anfangsbedingungen (23_2) nach dem Cauchy'schen Existenztheorem von § 23, a) die Funktionen $\tilde{c}_k(\alpha)$ eindeutig bestimmen, und zwar sind dieselben wegen (30) nicht etwa sämtlich konstant.[1])

Für das so erhaltene Funktionensystem $\tilde{c}_k(\alpha)$ gelten dann in der Tat die Gleichungen (26) in der Umgebung von $\alpha = \alpha_0$. Falls $\tilde{x}'(\alpha_0) \neq 0$, so ist die Berührung eine eigentliche. Ist dagegen $\tilde{x}'(\alpha_0) = 0$, so ist auch $\tilde{y}_i'(\alpha_0) = 0$. Ist dabei $\tilde{x}'(\alpha) \not\equiv 0$, so ist P_1' ein singulärer Punkt der Enveloppe $\mathfrak{F}$. Ist dagegen $\tilde{x}'(\alpha) \equiv 0$, so ist auch $\tilde{y}_i'(\alpha) \equiv 0$, d. h. die Enveloppe $\mathfrak{F}$ degeneriert in einen Punkt, und zwar in den Punkt P_1', wie sich aus den Anfangsbedingungen für $\alpha = \alpha_0$ ergibt.

Es gilt also der folgende von Kneser herrührende Satz:

Unter der Voraussetzung (22) gibt es in der n-fach unendlichen Extremalenschar (15) durch den Punkt P_1 ein und nur ein die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthaltendes ausgezeichnetes Extremalenbüschel, welches eine Enveloppe besitzt, die im Punkt P_1' entweder die Extremale $\mathfrak{E}_0$ berührt, oder in P_1' einen singulären Punkt besitzt, oder aber in den Punkt P_1' degeneriert.

c) **Der verallgemeinerte Enveloppensatz:**[2])

Wir betrachten jetzt unser Integral J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_\alpha$ des ausgezeichneten Büschels vom Punkt P_1 bis zum konjugierten Punkt P_3. Dasselbe ist eine eindeutige Funktion von α, die wir mit $J(\alpha)$ bezeichnen:[3])

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{\tilde{x}} f(x, Y(x, \tilde{c}), Y'(x, \tilde{c}))\,dx.$$

Nach der Definition der Funktion $\mathfrak{U}$ von § 73, a) ist dann

$$J(\alpha) = \mathfrak{U}(\tilde{x}; x_1, y_{11}, \ldots, y_{n1}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n). \tag{32}$$

Daher können wir mit Hilfe der allgemeinen Formeln (145) und (146)

[1]) Hieraus folgt, daß die Extremale $\mathfrak{E}_\alpha$ nicht etwa für alle Werte von α in der Umgebung von α_0 mit $\mathfrak{E}_0$ identisch sein kann. Denn aus der Identität

$$Y_i(x, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n) \equiv y_i(x)$$

würde durch Differentiation nach α folgen, daß

$$\sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial c_k}\bigg|^{c=\tilde{c}} \cdot \tilde{c}_k'(\alpha) = 0,$$

was wegen (19_2) nicht möglich ist.

Diese Bemerkung ist für den unter d) folgenden Beweis von Wichtigkeit.

[2]) Vgl. Kneser, loc. cit.

[3]) Wir schreiben analog den früheren Abkürzungen

$$(x, \tilde{c}) \quad \text{statt} \quad (x, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n).$$

von § 73 den Ausdruck für die Ableitung $J'(\alpha)$ unmittelbar hinschreiben, wobei wir uns der Definition (15) der Funktionen Y_i sowie der Bedeutung des Zeichens [ ] zu erinnern haben. Man findet

$$\begin{aligned} J'(\alpha) &= f(\tilde{x}, Y(\tilde{x}, \tilde{c}), Y'(\tilde{x}, \tilde{c}))\tilde{x}' \\ &+ \sum_{i,k} F_{n+i}(\tilde{x}, Y(\tilde{x}, \tilde{c}), Y'(\tilde{x}, \tilde{c}), \Lambda(\tilde{x}, \tilde{c})) \left[\frac{\partial Y_i}{\partial c_k}\right] \tilde{c}_k'. \end{aligned}$$

Die Doppelsumme ist aber gleich Null, da ja das Extremalenbüschel das durch die Gleichungen (28) definierte ausgezeichnete Büschel sein sollte. Es kommt also schließlich

$$J'(\alpha) = f(\tilde{x}, Y(\tilde{x}, \tilde{c}), Y'(\tilde{x}, \tilde{c}))\tilde{x}'. \tag{33}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

Fall I: $\tilde{x}'(\alpha) \not\equiv 0$, *die Enveloppe* $\mathfrak{F}$ *degeneriert nicht.*

Wir beschränken uns dabei auf den Fall

$$\tilde{x}'(\alpha_0) \neq 0, \tag{34}$$

indem wir den Ausnahmefall, wo die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in P_1' einen singulären Punkt hat, bei Seite lassen. Dann können wir nach (25) und (26) die Gleichung (33) schreiben

$$J'(\alpha) = f\left(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha), \frac{\tilde{y}'(\alpha)}{\tilde{x}'(\alpha)}\right)\tilde{x}'(\alpha). \tag{35}$$

Andererseits können wir wegen (34) die Gleichung $x = \tilde{x}(\alpha)$ in der Umgebung von $\alpha = \alpha_0$ eindeutig nach α auflösen; es sei: $\alpha = \mathfrak{a}(x)$. Wir können daher die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in der Form schreiben:

$$\mathfrak{F}: \quad y_i = \tilde{y}_i(\mathfrak{a}(x)) \equiv \tilde{Y}_i(x),$$

woraus folgt

$$\tilde{Y}_i'(x) = \frac{\tilde{y}_i'(\mathfrak{a})}{\tilde{x}'(\mathfrak{a})}.$$

Wir erhalten also, wenn wir die Gleichung (35) nach α integrieren und x als Integrationsvariable einführen,

$$J(\alpha_0) - J(\alpha) = \int_{\tilde{x}}^{x_1'} f(x, \tilde{Y}(x), \tilde{Y}'(x))\,dx. \tag{36}$$

Wir wählen nun $\alpha \lesseqgtr \alpha_0$, je nachdem $\tilde{x}'(\alpha_0) \gtreqless 0$, sodaß in beiden Fällen $\tilde{x}(\alpha) < \tilde{x}(\alpha_0)$, d. h.

$$\tilde{x} < x_1'.$$

Dann können wir die Gleichung (36) schreiben:

$$J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_1') = J_{\mathfrak{E}_\alpha}(P_1 P_3) + J_{\mathfrak{F}}(P_3 P_1'). \tag{37}$$

Diese Gleichung stellt den von KNESER herrührenden *verallgemeinerten Enveloppensatz* dar.

Fall II: $\tilde{x}'(\alpha) \equiv 0$, *die Enveloppe degeneriert in einen Punkt.* Dann folgt aus (33): $J'(\alpha) \equiv 0$, also $J(\alpha) = J(\alpha_0)$, d. h.

$$J_{\mathfrak{E}_\alpha}(P_1 P_1') = J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_1'). \tag{38}$$

Die Extremalen des ausgezeichneten Büschels, welche in diesem Fall sämtlich durch P_1 und P_1' gehen, liefern also für das Integral J, genommen von P_1 bis P_1', sämtlich denselben Wert.

d) **Notwendigkeit der Mayer'schen Bedingung:**

Mit Hilfe des Enveloppensatzes läßt sich nunmehr zeigen, daß ein Extremum jenseits des konjugierten Punktes nicht mehr bestehen kann. Angenommen es sei

$$x_1' < x_2. \tag{39}$$

Dann folgt aus dem Enveloppensatz zunächst, daß man $\Delta J = 0$ machen kann durch eine zulässige Variation des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$. Für den Fall II ist dies unmittelbar klar. Für den Fall I ist nur noch zu zeigen, daß auch der Bogen $P_3 P_1'$ von $\mathfrak{F}$ den Bedingungsgleichungen $\varphi_\beta = 0$ genügt. In der Tat folgt dies aus der Gleichung

$$\varphi_\beta(x,\ Y(x, \tilde{c}),\ Y'(x, \tilde{c})) = 0,$$

wenn man darin zunächst x durch $\tilde{x}(\alpha)$ und dann α durch $\mathfrak{a}(x)$ ersetzt. Daher stellt die aus dem Bogen $P_1 P_3$ von $\mathfrak{E}_\alpha$ und dem Bogen $P_3 P_1'$ von $\mathfrak{F}$ zusammengesetzte Kurve eine zulässige Variation[1]) des Bogens $P_1 P_1'$ von $\mathfrak{E}_0$ dar, für welche $\Delta J = 0$. Damit ist bewiesen, daß kein eigentliches Extremum stattfinden kann, wenn $x_1' \overline{\gtrless} x_2$.

Es muß aber noch weiter gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung (39) auch kein uneigentliches Extremum stattfinden kann, d. h. daß man $\Delta J < 0$ machen kann.

Wir betrachten zunächst den Fall I. Angenommen der Kurvenzug $P_1 P_3 P_1'$ liefere ein Minimum für das Integral J; dann muß der Bogen $P_3 P_1'$ der Enveloppe $\mathfrak{F}$ ein Extremalenbogen sein. Aus Stetigkeitsgründen folgt, daß für denselben ebenso wie für den Bogen $P_1 P_3$ die Bedingungen B), C) von § 72 und[2]) die Bedingung D) von § 74 erfüllt sind, wenn α hinreichend nahe bei α_0 gewählt wird. Nehmen wir dann noch an, daß die Enveloppe $\mathfrak{F}$ von der Klasse C'' ist, was

---

[1]) Man beachte auch die Ungleichung $\tilde{x} < x_1'$, sowie die Bemerkung in Fußnote [1]) auf p. 615.

[2]) Für die Bedingung D) kann ich dies allerdings nur als Vermutung aussprechen.

stets der Fall sein wird, wenn die Stetigkeitsvoraussetzungen von § 69 über die Funktionen f und φ_β hinreichend verschärft werden, so können wir auf den Kurvenzug $P_1 P_3 P_1'$ den Zusatz von § 70, b) über diskontinuierliche Lösungen anwenden. Darnach muß, da die beiden Kurven $\mathfrak{E}_\alpha$ und $\mathfrak{F}$ sich im Punkt P_3 berühren,

$$Y_i''(\tilde{x}, \tilde{c}) = \widetilde{Y}_i''(\tilde{x}) \tag{40}$$

sein. Nun ist aber nach (26), identisch in α,

$$Y_i'(\tilde{x}, \tilde{c}) = \widetilde{Y}_i'(\tilde{x}).$$

Daraus folgt durch Differentiation nach α

$$Y_i''(\tilde{x}, \tilde{c})\,\tilde{x}' + \sum_k \left[\frac{\partial Y_i'}{\partial c_k}\right] \tilde{c}_k' = \widetilde{Y}_i''(\tilde{x})\,\tilde{x}'.$$

Die n Gleichungen (40) sind also nur möglich, wenn

$$\sum_k \left[\frac{\partial Y_i'}{\partial c_k}\right] \tilde{c}_k' = 0.$$

Da aber außerdem die Gleichungen (28) bestehen und die n Größen $\tilde{c}_k'$ nicht sämtlich gleich Null sind, so schließt man, daß die n Determinanten, die aus der Determinante $D(\tilde{x}, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$ hervorgehen, wenn man je eine Zeile $[\partial Y_i/\partial c_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$ durch die entsprechende $[\partial Y_i'/\partial c_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$ ersetzt, verschwinden müssen. Daraus würde aber folgen, daß $D_x(\tilde{x}, \tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n) = 0$ sein muß, was wegen (22) nicht stattfinden kann, wenn α hinreichend nahe bei α_0 liegt.

Damit ist bewiesen, daß der Kurvenzug $P_1 P_3 P_1'$ kein Minimum für das Integral J liefern kann; man kann denselben daher so variieren, daß das Integral J einen kleineren Wert annimmt, d. h. daß $\Delta J < 0$ wird.

Aber auch im Fall II kann man $\Delta J < 0$ machen, wenn $x_1' < x_2$. Denn nehmen wir an, die aus dem Bogen $P_1 P_1'$ von $\mathfrak{E}_\alpha$ und dem Bogen $P_1' P_2$ von $\mathfrak{E}_0$ zusammengesetzte Kurve liefere ein Minimum für das Integral J, so müssen im Punkt P_1' die Eckenbedingungen (74) von § 70, b) erfüllt sein. Aus denselben folgt, daß im Punkt P_1'

$$\overline{F} - F - \sum_i F_{n+i}(\overline{y}' - y_i') = 0$$

sein muß, wobei sich die unüberstrichenen Buchstaben auf $\mathfrak{E}_\alpha$, die überstrichenen auf $\mathfrak{E}_0$ beziehen. Man zeigt aber leicht, daß diese Bedingung für hinreichend kleine Werte von $|\alpha - \alpha_0|$ nicht erfüllt sein kann, wenn die Clebsch'sche Bedingung für die Extremale $\mathfrak{E}_\alpha$ in der stärkeren Form (II') erfüllt ist.

Unter der einschränkenden Annahme (22) und unter Beiseitelassung des Ausnahmefalles, in welchem die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in P_1' einen singulären Punkt besitzt, können wir also den Satz aussprechen[1]):

Für ein Extremum des Integrals J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$ ist weiterhin notwendig, daß

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 < x < x_2 \tag{III}$$

oder, anders geschrieben,

$$x_2 \overline{\gtrless} x_1'.$$

Dieser Satz ist zuerst von A. MAYER[2]) gegeben worden, der denselben aus der zweiten Variation ableitet.

§ 76. Die zweite Variation beim Lagrange'schen Problem.

In den vorangehenden Paragraphen haben wir die Notwendigkeit der beiden Bedingungen (II) und (III) ohne Benutzung der zweiten Variation bewiesen. Im gegenwärtigen Paragraphen soll nunmehr im Anschluß an die Untersuchungen von v. ESCHERICH eine gedrängte Darstellung der Theorie der zweiten Variation[3]) gegeben und wenigstens angedeutet werden, wie man mit deren Hilfe ebenfalls die Notwendigkeit dieser Bedingungen beweisen kann. Zugleich wird sich

---

[1]) Der in Fußnote [2]) p. 617 erwähnte Punkt wäre dabei noch aufzuklären.

[2]) Loc. cit. p. 258. Freilich beweist Mayer nur, daß $\delta^2 J = 0$ gemacht werden kann, wenn $x_1' \overline{\gtrless} x_2$; vgl., auch wegen der weiteren Literatur, p. 625 Fußnote [3]). Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 4, 7, 8 am Ende von Kap. XIII.

[3]) Wegen der Geschichte dieser Theorie verweisen wir auf die *Encyklopädie* II A, pp. 591—601 (KNESER) und pp. 633—635 (ZERMELO und HAHN), sowie auf die historische Einleitung der unten angeführten Arbeit von SCHEFFER. Die für unsere Zwecke wichtigsten Arbeiten sind:

CLEBSCH, *„Ueber die Reduktion der zweiten Variation auf ihre einfachste Form"*, Journal für Mathematik, Bd. LV (1858), pp. 254—270.

CLEBSCH, *„Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten"*, Ibid. pp. 335—355.

A. MAYER, *„Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale"*, Journal für Mathematik, Bd. LXIX (1868), pp. 238—263.

SCHEEFFER, *„Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen"*, Mathematische Annalen, Bd. XXV (1885), pp. 522—593.

v. ESCHERICH, *„Die zweite Variation der einfachen Integrale"*, Wiener Berichte, Abt. IIa, Bd. CVII (1898), pp. 1191—1250, 1267—1326, 1383—1430; Bd. CVIII (1899), pp. 1269—1340.

KNESER, *„Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums aus der Theorie der zweiten Variation"*, Mathematische Annalen, Bd. II (1899), p. 321—345.

Endlich ist auch die Darstellung in C. JORDAN's *Cours d'Analyse*, Bd. III (1896), pp. 499—527 zu erwähnen.

dabei eine wichtige Ergänzung unserer bisherigen Entwicklungen ergeben, insofern der in § 75 ohne Beweis benutzte Satz über das Verschwinden der Funktion $\Delta(x, x_1)$ seine Erledigung finden wird.

a) Vorbereitungssatz über die zweite Variation:

Wir halten an den Voraussetzungen A) bis D) von §§ 72 und 74 über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ fest. Dann gilt auf Grund der Voraussetzung D) das „Ergänzungslemma" von § 69, e) für jedes Teilintervall des Integrationsintervalls $[x_1 x_2]$. Daher können wir jedes Stück $[\xi_1 \xi_2]$ des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$ für sich variieren, und zwar können wir zu jedem System von Funktionen η_i, welche in $[\xi_1 \xi_2]$ von der Klasse C'' sind, in ξ_1 und ξ_2 verschwinden und den m Differentialgleichungen

$$\Phi_\beta(\eta) \equiv \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i' \right) = 0 \qquad (41)$$

genügen, eine einparametrige Schar von zulässigen Variationen

$$y_i = \bar{y}_i(x, \varepsilon)$$

des Bogens $[\xi_1 \xi_2]$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ konstruieren, für welche

$$\delta y_i = \varepsilon \eta_i.$$

Für diese Schar muß nun im Fall eines Minimums

$$\delta^2 J \geqq 0 \qquad (42)$$

sein; gleichzeitig folgt aus den Gleichungen: $\varphi_\beta(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0$, daß

$$\delta^2 \varphi_\beta = 0.$$

Daher können wir die Ungleichung (42) auch schreiben

$$\delta^2 J + \sum_\beta \int_{\xi_1}^{\xi_2} \lambda_\beta \delta^2 \varphi_\beta \, dx \geqq 0,$$

wo die λ_β die zur Extremalen $\mathfrak{E}_0$ gehörigen Lagrange'schen Multiplikatoren von § 69, c) sind. Wie bei der analogen Untersuchung von § 60, a) fallen nun in dieser Ungleichung infolge des Bestehens der Differentialgleichungen (I) die zweiten Variationen $\delta^2 y_i$ heraus, und wir erhalten wie dort den Satz:

Im Fall eines Minimums muß das Integral

$$\delta^2 J \equiv \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_{i,k} (P_{ik} \eta_i \eta_k + 2\, Q_{ik} \eta_i \eta_k' + R_{ik} \eta_i' \eta_k')\, dx \geqq 0 \qquad (43)$$

sein für je zwei den Ungleichungen $x_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq x_2$ genügende Werte ξ_1, ξ_2

und für alle Funktionensysteme η_i der Klasse C'', welche in ξ_1 und ξ_2 verschwinden und den m Differentialgleichungen (41) genügen.

Darin bedeutet

$$P_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}, \quad Q_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'}, \quad R_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'},$$

wobei die Argumente in den zweiten Ableitungen von F sind: $(x, y(x), y'(x), \lambda(x))$.

b) **Erste Transformation der zweiten Variation**[1]):

Multipliziert man die Differentialgleichungen (41) mit unbestimmten Funktionen von x von der Klasse C', $2\mu_\beta$, integriert zwischen den Grenzen ξ_1 und ξ_2 und addiert die erhaltenen Resultate zu (43), so kann man die zweite Variation auch in der Form schreiben

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} 2\Omega(\eta, \eta', \mu)\, dx, \tag{44}$$

wobei $2\Omega(\eta, \eta', \mu)$ die folgende quadratische Form der Größen

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n', \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

bedeutet:

$$\begin{aligned} 2\Omega(\eta, \eta', \mu) = & \sum_{i,k} (P_{ik}\eta_i\eta_k + 2\, Q_{ik}\eta_i\eta_k' + R_{ik}\eta_i'\eta_k') \\ & + \sum_{\beta, i} 2\mu_\beta \left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \eta_i' \right). \end{aligned} \tag{45}$$

Nach dem Euler'schen Satz über homogene Funktionen ist

$$2\Omega = \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} \eta_i + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i'} \eta_i' \right) + \sum_\beta \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\beta} \mu_\beta.$$

Die letzte Summe ist null, da nach (41)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\beta} = \Phi_\beta(\eta) = 0.$$

Setzt man den so erhaltenen Ausdruck für Ω in (44) ein, wendet partielle Integration an und beachtet, daß die Funktionen η_i an beiden Grenzen verschwinden, so erhält man für $\delta^2 J$ den Ausdruck[2]):

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_i \eta_i\, \Psi_i(\eta, \mu)\, dx, \tag{46}$$

---

[1]) Nach A. Mayer, loc. cit., p. 243; vgl. auch C. Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. III, Nr. 378.

[2]) Verallgemeinerung der Formeln (12) von § 10 und (45) von § 61.

wenn

$$\Psi_i(\eta, \mu) = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i'}, \tag{47}$$

oder ausgeschrieben,

$$\begin{aligned}\Psi_i(\eta, \mu) = & \sum_k [P_{ik}\eta_k + Q_{ik}\eta_k' - \frac{d}{dx}(Q_{ki}\eta_k + R_{ik}\eta_k')] \\ & + \sum_\beta \left[\mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'}\right)\right].\end{aligned} \tag{47a}$$

Wir versuchen nun zunächst wieder, die zweite Variation gleich Null zu machen. Dies ist stets möglich, wenn es eine Lösung

$$(u, \varrho) \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_n; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$$

des Systems von $n + m$ homogenen linearen Differentialgleichungen

$$\Psi_i(u, \varrho) = 0, \qquad \Phi_\beta(u) = 0 \tag{48}$$

gibt, in welcher die Funktionen u_i von der Klasse C'', die Funktionen ϱ_β von der Klasse C' sind, und sämtliche Funktionen u_i in zwei Punkten ξ_1 und ξ_2 des Integrationsintervalles $[x_1 x_2]$ verschwinden, ohne jedoch im Intervall $[\xi_1 \xi_2]$ sämtlich identisch zu verschwinden. Denn variieren wir dann nur den Bogen $[\xi_1 \xi_2]$, indem wir in diesem Intervall $\eta_i = u_i$ und zugleich $\mu_\beta = \varrho_\beta$ setzen, so erhalten wir ein zulässiges System von Funktionen η_i, für welches nach (46): $\delta^2 J = 0$.

c) **Integration des akzessorischen Systems linearer Differentialgleichungen;**

Es kommt nunmehr alles auf die Integration des Systems linearer Differentialgleichungen (48) an, das wir nach v. Escherich[1]) das *„akzessorische System linearer Differentialgleichungen"* nennen wollen. Man kann dieses System zunächst auf ein System linearer Differentialgleichungen in der Normalform reduzieren, indem man, ähnlich wie in § 72, a), die Gleichungen (48_2) nach x differentiiert und die so modifizierten Gleichungen (48) nach den Größen u_i'', ϱ_β' auflöst, wobei die Auflösungsdeterminante mit der Determinante R von § 72, a) identisch ist, welche nach Voraussetzung C) von Null verschieden ist. Daraus schließt man nach allgemeinen Existenzsätzen über Systeme linearer Differentialgleichungen, daß in jeder Lösung (u, ϱ) des Systems (48) die Funktionen u_i von der Klasse C'', die Funktionen ϱ_β von der Klasse C' sind in dem in § 72, b) definierten „Regularitätsintervall" $x_1^* < x < x_2^*$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$.

---

[1]) Vgl. v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, p. 1236.

Ferner gilt nun auch hier, in Verallgemeinerung des Jacobi'schen Theorems von § 12, b), der Satz[1]), daß sich das allgemeine Integral des Systems (48) aus dem allgemeinen Integral der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen (I) durch Differentiation nach den Integrationskonstanten ableiten läßt:

Ist

$$y_i = y_i(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n}), \qquad \lambda_\beta = \lambda_\beta(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n})$$

das allgemeine Integral der Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen (I), mit beliebigen Integrationskonstanten γ_ν, so wird das akzessorische System linearer Differentialgleichungen (48) durch die $2n$ Systeme von Funktionen

$$u_1^\nu = \frac{\partial y_1}{\partial \gamma_\nu}, \ldots, u_n^\nu = \frac{\partial y_n}{\partial \gamma_\nu}; \qquad \varrho_1^\nu = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma_\nu}, \ldots, \varrho_m^\nu = \frac{\partial \lambda_m}{\partial \gamma_\nu}, \tag{49}$$
$$\nu = 1, 2, \cdots, 2n,$$

befriedigt, in denen nach der Differentiation die γ_ν durch die speziellen, die Extremale $\mathfrak{E}_0$ liefernden Werte γ_ν^0 zu ersetzen sind.

Zusatz I: Diese $2n$ Lösungen bilden ein „*Fundamentalsystem*", d. h. sie sind linear unabhängig in dem Sinne, daß es keine $2n$ Konstanten C_ν, die nicht alle null sind, gibt, derart daß in irgend einem Teilintervall von $[x_1 x_2]$

$$\sum_\nu C_\nu u_i^\nu \equiv 0, \qquad \sum_\nu C_\nu \varrho_\beta^\nu \equiv 0$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$; $\beta = 1, 2, \ldots, m$.

Zusatz II: Jede andere Lösung (u, ϱ) des Systems (48) läßt sich linear und homogen durch diese $2n$ Lösungen ausdrücken:

$$u_i = \sum_\nu C_\nu u_i^\nu, \qquad \varrho_\beta = \sum_\nu C_\nu \varrho_\beta^\nu. \tag{50}$$

Der Beweis des Hauptsatzes ergibt sich sofort, wenn man die Funktionen $y_i(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n})$, $\lambda_\beta(x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n})$ an Stelle von y_i, λ_β in die Differentialgleichungen (I) einsetzt und die so erhaltenen Identitäten nach γ_ν differentiiert.

Insbesondere folgt, daß die aus den Lösungen

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; a, b, c), \qquad \lambda_\beta = \mathfrak{L}_\beta(x; a, b, c)$$

von § 72, c) abgeleiteten $2n$ Funktionensysteme

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial c_k}, \ldots, \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_n}{\partial c_k}; & \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial c_k}, \ldots, \dfrac{\partial \mathfrak{L}_m}{\partial c_k}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial b_k}, \ldots, \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_n}{\partial b_k}; & \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial b_k}, \ldots, \dfrac{\partial \mathfrak{L}_m}{\partial b_k}, \end{matrix} \tag{51}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

[1]) Vgl. Clebsch, loc. cit. p. 259.

in denen nach der Differentiation $b_i = y_i(a)$, $c_i = v_i(a)$ zu setzen ist, Lösungen des akzessorischen Systems (48) sind. Wir wollen dieselben *das dem Punkt $x = a$ zugeordnete „kanonische Lösungssystem"* von (48) nennen.

An diesem speziellen[1]) Lösungssystem beweist man auch am einfachsten den Zusatz I. Aus den Identitäten

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu \frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_\nu} \equiv 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu \frac{\partial \mathfrak{L}_\beta}{\partial c_\nu} \equiv 0,$$

in denen wir c_{n+i} statt b_i geschrieben haben, würde nämlich zunächst folgen

$$\sum_\nu C_\nu \frac{\partial \mathfrak{Y}_i'}{\partial c_\nu} \equiv 0,$$

und dann weiter nach Gleichung (142_2) von § 72

$$\sum_\nu C_\nu \frac{\partial \mathfrak{B}_i}{\partial c_\nu} \equiv 0,$$

was wegen der Ungleichung (138) von § 72 nicht möglich ist.

Wegen des Beweises von Zusatz II verweisen wir auf die allgemeinen Entwicklungen von v. Escherich[2]) über Fundamentalsysteme des Systems (48).

Aus diesen Resultaten folgt nun weiter: Soll es eine Lösung (u, ϱ) des akzessorischen Systems (48) von den am Ende von Absatz b) postulierten Eigenschaften geben, so müssen sich $2n$ Konstanten $C_1, \ldots, C_{2n}$, nicht alle gleich Null, so bestimmen lassen, daß gleichzeitig die $2n$ Gleichungen erfüllt sind

$$\sum_\nu C_\nu \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_\nu}\bigg|^{\xi_1} = 0, \qquad \sum_\nu C_\nu \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_\nu}\bigg|^{\xi_2} = 0,$$

und dazu ist notwendig, daß die Mayer'sche Determinante $2n$-ten Grades

$$\Delta(\xi_2, \xi_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_1}\Big|^{\xi_1}, & \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_2}\Big|^{\xi_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_{2n}}\Big|^{\xi_1} \\ \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_1}\Big|^{\xi_2}, & \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_2}\Big|^{\xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_{2n}}\Big|^{\xi_2} \end{vmatrix} \qquad (52)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

gleich Null ist.

---

[1]) Vgl. die Bemerkung in § 75, a) über den Übergang von den kanonischen Integrationskonstanten zu beliebigen anderen.

[2]) Siehe Fußnote [1]) auf p. 622.

Ist umgekehrt $\Delta(\xi_2, \xi_1) = 0$, so ist die verlangte Bestimmung der Konstanten C_ν stets möglich, und die so erhaltenen Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ können nicht im ganzen Intervall $[\xi_1, \xi_2]$ sämtlich verschwinden. Denn sonst würden die zugehörigen Funktionen ϱ_β, welche wegen Zusatz I sicher nicht ebenfalls sämtlich identisch verschwinden, nach (48_1) den n Differentialgleichungen genügen:

$$\sum_\beta \left[\varrho_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\varrho_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'}\right)\right] = 0, \tag{53}$$

was mit der Voraussetzung D) im Widerspruch steht.

Wir erhalten also das folgende von A. MAYER[1]) herrührende Schlußresultat dieser Betrachtung:

Wenn es zwei dem Integrationsintervall $[x_1 x_2]$ angehörige Punkte ξ_1, ξ_2 gibt, für welche

$$\Delta(\xi_2, \xi_1) = 0,$$

so gibt es zulässige, nicht identisch verschwindende Funktionensysteme η_i, für welche $\delta^2 J = 0$.

Insbesondere kann man also $\delta^2 J = 0$ machen, wenn die zunächst[2]) auf x_1 folgende Wurzel x_1' der Gleichung

$$\Delta(x, x_1) = 0$$

zwischen x_1 und x_2 liegt oder mit x_2 zusammenfällt. Man wird dann als wahrscheinlich erwarten dürfen, daß ein Extremum nicht eintreten kann.[3])

Wählt man bei der soeben gegebenen Ableitung für das Fundamentalsystem (49) das dem Punkt ξ_1 zugeordnete kanonische Lösungssystem (51), so erhält man die Determinante $\Delta(\xi_2, \xi_1)$ in der Normal-

---

[1]) Vgl. MAYER, loc. cit. pp. 250, 258.

[2]) Vgl. § 76, g).

[3]) Vgl. § 10, b) und § 61, a). Wenn $x_1' < x_2$, so kann man, wie in den einfacheren Fällen von § 14 und § 61, c), nicht nur $\delta^2 J = 0$, sondern sogar $\delta^2 J < 0$ machen, womit dann die Notwendigkeit der Bedingung (III) bewiesen ist; vgl. SCHEEFFER, Mathematische Annalen, Bd. XXV (1885), p. 522 und v. ESCHERICH, Wiener Berichte, Bd. CVII, p. 1418 und Bd. CVIII, p. 1300. Der Beweis von Scheeffer, der übrigens nicht ganz vollständig ist, und der zweite Beweis von v. Escherich beruhen auf einer Verallgemeinerung der Methode von Erdmann von § 14, a), der erste Beweis von v. Escherich dagegen auf einer Verallgemeinerung der Methode von Weierstraß von p. 82, Fußnote [2]) und § 61, c). Wir gehen auf diesen Nachweis nicht ein, da wir in § 75 bereits auf anderem Wege die Notwendigkeit der Bedingung (III) bewiesen haben, allerdings unter Beiseitelassung gewisser Ausnahmefälle, die bei den eben erwähnten Beweisen nicht ausgeschlossen zu werden brauchen.

form (20) von § 75, womit die Bezeichnung $\Delta(\xi_2, \xi_1)$ für die Determinante (52) gerechtfertigt ist.

d) **Konjugierte Systeme von Lösungen des akzessorischen Systems linearer Differentialgleichungen:**

Sind

$$(z, r) \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_n; r_1, r_2, \cdots, r_m)$$

und

$$(u, \varrho) \equiv (u_1, u_2, \cdots, u_n; \varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_m)$$

irgend zwei Systeme von $n + m$ Funktionen von x von den erforderlichen Stetigkeitseigenschaften, so gilt nach einem bekannten Satz über quadratische Formen für die durch (45) definierte Funktion Ω die Formel:

$$\sum_i \left[u_i \frac{\partial \Omega(z, z', r)}{\partial z_i} + u_i' \frac{\partial \Omega(z, z', r)}{\partial z_i'}\right] + \sum_\beta \varrho_\beta \frac{\partial \Omega(z, z', r)}{\partial r_\beta}$$
$$= \sum_i \left[z_i \frac{\partial \Omega(u, u', \varrho)}{\partial u_i} + z_i' \frac{\partial \Omega(u, u', \varrho)}{\partial u_i'}\right] + \sum_\beta r_\beta \frac{\partial \Omega(u, u', \varrho)}{\partial \varrho_\beta}.$$

Mit Hilfe derselben verifiziert man leicht die folgende *Relation von Clebsch*[1]):

$$\sum_i [u_i \Psi_i(z,r) - z_i \Psi_i(u,\varrho)] + \sum_\beta [\varrho_\beta \Phi_\beta(z) - r_\beta \Phi_\beta(u)] = \frac{d}{dx} \psi(z,r;u,\varrho), \tag{54}$$

wo

$$\begin{aligned} \psi(z, r; u, \varrho) &= \sum_i \left[z_i \frac{\partial \Omega(u, u', \varrho)}{\partial u_i'} - u_i \frac{\partial \Omega(z, z', r)}{\partial z_i'}\right] \\ &= \sum_{i,k} [Q_{ki}(z_i u_k - u_i z_k) + R_{ik}(z_i u_k' - u_i z_k')] + \sum_{i,\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} (z_i \varrho_\beta - u_i r_\beta). \end{aligned} \tag{55}$$

Wenn daher (z, r) und (u, ϱ) zwei Lösungen des akzessorischen Systems (48) sind, so ist

$$\psi(z, r; u, \varrho) = \text{konst.} \tag{56}$$

Wenn nun insbesondere diese Konstante den Wert null hat, so heißen die beiden Lösungen nach v. Escherich *„zueinander konjugiert“*, und ein System von n linear unabhängigen Lösungen des akzessorischen Systems (48), von denen je zwei zueinander konjugiert sind, heißt ein *„konjugiertes System“*. Unter der *„Determinante eines konjugierten Systems“*

$$u^1, \varrho^1; u^2, \varrho^2; \cdots; u^n, \varrho^n$$

---

[1]) Vgl. Clebsch, loc. cit. p. 260 und v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, p. 1244. Die Formel ist eine Verallgemeinerung von Gleichung (14) von § 10.

verstehen wir die Determinante

$$\nabla(u^1, u^2, \cdots, u^n) = |u_k^i|, \qquad i, k = 1, 2, \cdots, n.$$

Ein solches konjugiertes System bilden z. B. die n ersten Lösungen des kanonischen Fundamentalsystems (51):

$$\frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial c_k}, \cdots, \frac{\partial \mathfrak{Y}_n}{\partial c_k}; \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial c_k}, \cdots, \frac{\partial \mathfrak{L}_m}{\partial c_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{57}$$

Denn bildet man die Gleichung (56) für irgend zwei Lösungen dieses Systems und berechnet den Wert der Konstanten aus dem speziellen Wert $x = a$, so folgt

$$\psi\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial c_j}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c_j}; \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial c_k}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c_k}\right) = 0, \tag{58}$$

da nach Gleichung (143) von § 72

$$\left.\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_k}\right|^a = 0; \tag{59}$$

damit ist zugleich die Existenz von konjugierten Systemen bewiesen.

Durch Vergleich[1]) mit (21) erhält man zugleich den Satz:

Die Mayer'sche Determinante $\Delta(x, a)$ ist zugleich die Determinante eines konjugierten Systems, nämlich des dem Punkt a zugeordneten kanonischen konjugierten Systems (57).

In derselben Weise findet man unter Benutzung von Gleichung (143a) von § 72

$$\psi\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial b_j}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b_j}; \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial c_k}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial c_k}\right) = \delta_{jk}, \tag{60}$$

wo δ_{jk} wieder das Kronecker'sche Symbol ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist für uns der folgende Satz von v. Escherich[2]):

Zu jedem Punkt $x = a$ im Innern des Regularitätsintervalls: $x_1^* < x < x_2^*$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ läßt sich ein konjugiertes System

$$z^1, r^1; z^2, r^2; \cdots; z^n, r^n$$

konstruieren, dessen Determinante

$$\nabla(z^1, z^2, \cdots, z^n) = |z_i^k|, \qquad i, k = 1, 2, \cdots, n$$

im Punkt $x = a$ von Null verschieden ist.

Zum Beweis gehen wir von dem dem Punkt a zugeordneten kanonischen Fundamentalsystem (51) aus, das wir schreiben

$$u^1, \varrho^1; u^2, \varrho^2; \cdots; u^n, \varrho^n; u^{n+1}, \varrho^{n+1}; \cdots; u^{2n}, \varrho^{2n}.$$

[1]) Statt des speziellen Punktes $x = x_1$ haben wir hier einen beliebigen Punkt $x = a$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$.

[2]) Wiener Berichte, Bd. CVIII, p. 1339.

Darin bilden, wie wir gesehen haben, die n ersten Lösungen ein konjugiertes System. An Stelle der n letzten Lösungen führen wir andere n Lösungen (z^h, r^h) ein durch die Substitution

$$z_i^h = u_i^{n+h} + \sum_j \alpha_j^h u_i^j, \qquad r_\beta^h = \varrho_\beta^{n+h} + \sum_j \alpha_j^h \varrho_\beta^j.$$

Aus den Eigenschaften der Funktion ψ als bilinearer Form folgt dann, daß

$$\psi(z^h, r^h; z^k, r^k) = \psi(u^{n+h}, \varrho^{n+h}; u^{n+k}, \varrho^{n+k})$$
$$+ \sum_i \alpha_i^k \psi(u^{n+h}, \varrho^{n+h}; u^i, \varrho^i) + \sum_j \alpha_j^h \psi(u^j, \varrho^j; u^{n+k}, \varrho^{n+k})$$
$$+ \sum_{i,j} \alpha_i^k \alpha_j^h \psi(u^j, \varrho^j; u^i, \varrho^i),$$

was sich nach (58) und (60) auf

$$\psi(z^h, r^h; z^k, r^k) = \psi(u^{n+h}, \varrho^{n+h}; u^{n+k}, \varrho^{n+k}) + \alpha_h^k - \alpha_k^h \tag{61}$$

reduziert. Daraus folgt aber, daß wir die Konstanten α stets so wählen können, daß

$$\psi(z^h, r^h; z^k, r^k) = 0, \qquad \text{für } h, k = 1, 2, \cdots, n,$$

d. h. so, daß die n Lösungen

$$z^1, r^1; z^2, r^2; \cdots; z^n, r^n$$

ein konjugiertes System bilden.

Die Determinante dieses konjugierten Systems ist aber für $x = a$ von Null verschieden, da nach Gleichung (143) von § 72

$$z_i^h(a) = \delta_{ih},$$

womit der Satz bewiesen ist.

e) **Die Escherich'sche Fundamentalformel**[1]):

Es sei jetzt

$$u^1, \varrho^1; u^2, \varrho^2; \cdots; u^n, \varrho^n \tag{62}$$

irgend ein konjugiertes System, dessen Determinante $U = \nabla(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ in einem Teilintervall $[\xi_1 \xi_2]$ von $[x_1 x_2]$ von Null verschieden ist. Ferner sei (z_i, r_β) ein, abgesehen von Bedingungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit, *beliebiges* System von $n + m$ Funktionen von x. Setzt man dann mit unbestimmten Multiplikatoren w_i^h, v_β^h die n Ausdrücke an

$$w_h(z) = \sum_i w_i^h \psi(u^i, \varrho^i; z, r) + \sum_\beta v_\beta^h \Phi_\beta(z),$$

[1]) Nach v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVIII, p. 1278, wo der Leser auch die im Text übergangenen Einzelheiten der Rechnung nachlesen möge.

welche lineare, homogene Funktionen der Größen z_i, z'_i, r_β sind, so kann man für das Intervall $[\xi_1 \xi_2]$ die Multiplikatoren w_i^h, v_β^h so bestimmen, daß in dem Ausdruck $w_h(z)$ alle Größen r_β herausfallen, sowie alle Ableitungen z'_i mit Ausnahme von z'_h, welches den Koeffizienten 1 erhält, sodaß also $w_h(z)$ die Form annimmt

$$w_h(z) = z'_h + \sum_k q_k^h z_k.$$

Das Resultat dieser Bestimmung ist

$$w_h(z) = \frac{1}{RU} \sum_{i,k} A_{hk} U_k^i \psi(u^i, \varrho^i; z, r) + \frac{1}{R} \sum_\beta \varphi_\beta^h \Phi_\beta(z).$$

Darin bedeutet R die durch Gleichung (113) von § 72 definierte Determinante, A_{hk} ist die Subdeterminante von R_{hk}, φ_β^h diejenige von $\partial \varphi_\beta / \partial y'_h$ in der Determinante R; endlich ist U_k^i die Subdeterminante von u_k^i in der Determinante U.

Nun läßt sich aber noch eine zweite Form für die Funktion $w_h(z)$ mit diesen speziellen Werten der Multiplikatoren angeben. Denn aus der Definition der konjugierten Systeme folgt, daß die n Funktionen $w_h(z)$ identisch verschwinden, wenn für z, r irgend eines der obigen Lösungssysteme u^i, ϱ^i von (48) gesetzt wird. Wir kennen also n linear unabhängige Lösungen des Systems von n homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung: $w_h(z) = 0$, und können daher nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen die Koeffizienten von $w_h(z)$ durch die partikulären Lösungen u_i^k ausdrücken. Bezeichnen wir mit $\chi_h(z)$ die Determinante

$$\chi_h(z) = \begin{vmatrix} z'_h; & z_1, & z_2, & \cdots, & z_n \\ u_h^{1\prime}; & u_1^1, & u_2^1, & \cdots, & u_n^1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_h^{n\prime}; & u_1^n, & u_2^n, & \cdots, & u_n^n \end{vmatrix}, \tag{63}$$

so ist

$$w_h(z) = \frac{1}{U} \chi_h(z). \tag{64}$$

Für die weitere Diskussion machen wir die spezialisierende Annahme, daß die Funktionen z_i den m Differentialgleichungen

$$\Phi_\beta(z) = 0$$

genügen. Dann vereinfacht sich die durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $w_h(z)$ erhaltene Formel, und man erhält

$$\chi_h(z) = \frac{1}{R} \sum_{i,k} A_{hk} U_k^i \psi(u^i, \varrho^i; z, r). \tag{65}$$

Hieraus folgt zunächst die wichtige Relation

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \chi_i(z) = 0, \tag{66}$$

wenn man von der Gleichung

$$\sum_i A_{ik} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} = 0 \tag{67}$$

Gebrauch macht, die sich aus der Betrachtung der Subdeterminanten der Determinante R ergibt.

Weiterhin leitet man aber aus (65) die folgende, von v. Escherich herrührende *Fundamentalformel* ab:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k} R_{ik} \chi_i(z) \chi_k(z) \\ = &\sum_i \psi(u^i, \varrho^i; z, r) \{ \nabla(u^1, u^2, \cdots, u^n) \nabla'(u^1, \cdots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \cdots, u_n) \\ &\quad - \nabla'(u^1, u^2, \cdots, u^n) \nabla(u^1, \cdots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \cdots, u_n) \}. \end{aligned} \tag{68}$$

Darin bedeutet ∇' die Ableitung von ∇ nach x, und die Formel gilt, ebenso wie (66), unter der Voraussetzung, daß die Funktionen z_i den Differentialgleichungen (64) genügen.

Zum Beweis setze man auf der linken Seite von (68) für einen der beiden Faktoren $\chi(z)$ den Ausdruck (65) ein und mache dann von den folgenden beiden Determinantenrelationen Gebrauch:

$$\sum_h R_{hi} A_{hk} + \sum_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \varphi_\beta^k = \delta_{ik} R, \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \sum_k U_k^i \chi_k(z) = &\nabla(u^1, u^2, \cdots, u^n) \nabla'(u^1, \cdots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \cdots, u^n) \\ &- \nabla'(u^1, u^2, \cdots, u^n) \nabla(u^1, \cdots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \cdots, u^n), \end{aligned} \tag{70}$$

deren erste, wie (67), aus der Betrachtung der Determinante R folgt, während sich die zweite aus den Sätzen[1]) über Determinanten von Subdeterminanten, angewandt auf die Determinante $\chi_k(z)$, und über die Differentiation einer Determinante ergibt.

f) Die zweite Transformation der zweiten Variation:[2])

Aus der Fundamentalformel (68) ergibt sich nun ohne Mühe eine zweite Transformation der zweiten Variation, und zwar auf die der Jacobi'schen Formel (11) von § 10 entsprechende reduzierte Form.

[1]) Vgl. z. B. Baltzer, *Determinanten* (1875), p. 60; es handelt sich um die Formel

$$\alpha_{fi}\alpha_{gk} - \alpha_{fk}\alpha_{gi} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{fi} \partial a_{gk}}.$$

Der rechten Seite derselben entspricht bei der Anwendung das Produkt $\chi_k(z) U_k^i$.

[2]) Nach v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, p. 1284.

Immer unter der Voraussetzung, daß die Determinante des konjugierten Systems (62) im Intervall $[\xi_1 \xi_2]$ nicht verschwindet:

$$\nabla(u^1, u^2, \ldots u^n) \neq 0 \quad \text{in} \quad [\xi_1 \xi_2],$$

kann man die Gleichung (68) auch schreiben

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{i,k} R_{ik}\chi_i(z)\chi_k(z)}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)^2} = &-\sum_i \frac{\nabla(u^1, \ldots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \ldots, u_n)}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)} \frac{d}{dx}\psi(u^i, \varrho^i; z, r) \\ &+ \frac{d}{dx}\sum_i \frac{\nabla(u^1, \ldots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \ldots, u^n)}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)} \psi(u^i, \varrho^i; z, r).\end{aligned} \tag{71}$$

Darin ersetze man die Ableitung von $\psi(u^i, \varrho^i; z, r)$ durch den aus (54) sich ergebenden Wert und beachte, daß

$$\Psi_k(u^i, \varrho^i) = 0, \qquad \Phi_\beta(u^i) = 0, \qquad \Phi_\beta(z) = 0,$$

und daß nach einfachen Determinantensätzen

$$\sum_i u_k^i \nabla(u^1, \ldots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \ldots, u_n) = z_k \nabla(u^1, \ldots, u^n).$$

Dann geht die Gleichung (71) über in

$$\begin{aligned}\sum_k z_k \Psi_k(z, r) = &\frac{\sum\limits_{i,k} R_{ik}\chi_i(z)\chi_k(z)}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)^2} \\ &- \frac{d}{dx}\sum_i \frac{\nabla(u^1, \ldots, u^{i-1}, z, u^{i+1}, \ldots, u_n)}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)} \psi(u^i, \varrho^i; z, r).\end{aligned} \tag{72}$$

Nun ist aber nach (46), wenn nur der Bogen $[\xi_1 \xi_2]$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ variiert wird,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_i \eta_i \Psi_i(\eta, \mu)\, dx. \tag{46}$$

Darin waren die η_i irgend ein System von Funktionen der Klasse C'', welche sämtlich in ξ_1 und ξ_2 verschwinden und den m Differentialgleichungen (41) genügen, während die μ_β beliebige Funktionen der Klasse C' waren. Man darf daher in (72): $z_i = \eta_i$, $r_\beta = \mu_\beta$ setzen. Integriert man die so erhaltene Gleichung zwischen den Grenzen ξ_1 und ξ_2 und beachtet, daß die Determinante $\nabla(u^1, \ldots, u^{i-1}, \eta, u^{i+1}, \ldots, u^n)$ zugleich mit den Funktionen η_i in ξ_1 und ξ_2 verschwindet, so erhält man die folgende, zuerst von Clebsch[1]) gegebene *reduzierte Form*

[1]) Vgl. Clebsch, loc. cit. p. 266. Aus der reduzierten Form (73) läßt sich die Notwendigkeit der Bedingung (II) für ein schwaches Minimum herleiten, siehe v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, p. 1393.

der zweiten Variation:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sum_{i,k} R_{ik} \zeta_i \zeta_k}{\nabla(u^1, \ldots, u^n)^2} dx, \tag{73}$$

wo zur Abkürzung

$$\zeta_i = \chi_i(\eta)$$

gesetzt ist. Wegen (66) genügen die Funktionen ζ_i den m Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i'} \zeta_i = 0. \tag{74}$$

Wir wollen nun annehmen, daß für unsern Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Clebsch'sche Bedingung von § 74, b) in der stärkeren Form (II') erfüllt ist. Dann folgt, daß $\delta^2 J > 0$, außer wenn gleichzeitig

$$\chi_1(\eta) = 0, \qquad \chi_2(\eta) = 0, \ldots, \qquad \chi_n(\eta) = 0$$

im ganzen Intervall $[\xi_1 \xi_2]$. Das würde aber bedeuten, daß das Funktionensystem η_i eine Lösung dieser n homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung wäre, und da nach (63) die Funktionen $u_1^i, \ldots, u_n^i$ n Lösungen desselben Systems sind, welche nach der Definition eines konjugierten Systems linear unabhängig sind, so würde folgen

$$\eta_k = \sum_i C_i u_k^i.$$

Nun verschwinden aber sämtliche Funktionen η_k in ξ_1, während die Determinante $|u_k^i(\xi_1)|$ nach Voraussetzung von Null verschieden ist; also muß $C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$ sein.

Wir erhalten also den folgenden Satz:[1])

Ist für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingung (II') erfüllt, und gibt es ein konjugiertes System, dessen Determinante im Intervall $[\xi_1 \xi_2]$ von Null verschieden ist, so ist die zweite Variation für dieses Intervall positiv für alle nicht identisch verschwindenden Funktionensysteme η_i der Klasse C'', welche in ξ_1 und ξ_2 verschwinden und den Differentialgleichungen (41) genügen.

g) **Sätze über die Mayer'sche Determinante $\Delta(x, \xi)$:**

Hält man den letzten Satz mit dem am Ende von Absatz c) bewiesenen zusammen, so erhält man das folgende „*Oszillationstheorem*":[2])

Ist die Bedingung (II') für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ erfüllt, und gibt

---

[1]) Vgl. A. Mayer, loc. cit. p. 256. [2]) Vgl. A. Mayer, loc. cit. p. 258.

es ein konjugiertes System, dessen Determinante in einem Teilintervall $[\xi_1 \xi_2]$ *von* $[x_1 x_2]$ *von Null verschieden ist, so ist*

$$\Delta(\xi'', \xi') \neq 0$$

für je zwei den Ungleichungen: $\xi_1 \overline{\gtrless} \xi' < \xi'' \overline{\gtrless} \xi_2$ *genügende Werte* ξ', ξ''.

Daran schließt sich der folgende, zuerst von v. ESCHERICH[1]) bewiesene Satz:

Ist ξ *ein beliebiger Punkt des Regularitätsintervalls der Extremalen* $\mathfrak{E}_0^*$:

$$x_1^* < \xi < x_2^*,$$

und ist die Bedingung (II') in der Umgebung des Punktes ξ *erfüllt, so hat die zum Punkt* ξ *gehörige Mayer'sche Determinante* $\Delta(x, \xi)$ *in* ξ *einen isolierten Nullpunkt.*

Denn nach Absatz d), Ende, können wir stets ein konjugiertes System: $z^1, r^1; \ldots; z^n, r^n$ konstruieren, dessen Determinante $\nabla(z^1, \ldots, z^n)$ im Punkt ξ von Null verschieden ist. Wegen der Stetigkeit der Funktion ∇ läßt sich dann ein Intervall $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ angeben, in welchem auch noch $\nabla \neq 0$. In diesem Intervall kann daher die Funktion $\Delta(x, \xi)$ nur den einen Nullpunkt ξ besitzen, weil sich sonst ein Widerspruch mit dem vorangehenden Satz ergeben würde.

Dieser Satz ist deshalb von ganz besonderer Wichtigkeit, weil ohne ihn die ganze Theorie der konjugierten Punkte in der Luft hängt; denn so lange nicht festgestellt ist, daß der Punkt x_1 ein isolierter Nullpunkt der Funktion $\Delta(x, x_1)$ ist, kann man gar nicht von dem *zunächst* auf x_1 folgenden Nullpunkt dieser Funktion, und daher auch nicht von dem zu P_1 konjugierten Punkt sprechen. Der Satz bildet daher eine unentbehrliche Ergänzung des in § 75 gegebenen Beweises für die Notwendigkeit der Bedingung (III), der erst jetzt als vollständig erbracht angesehen werden kann.

Endlich gilt noch der folgende Satz,[2]) von dem wir später Gebrauch zu machen haben werden:

Ist für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ *die Bedingung (II') erfüllt, und ist*

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x \overline{\gtrless} x_2, \tag{III'}$$

[1]) Wiener Berichte, Bd. CVIII, p. 1299. Wir haben zwar bereits früher hervorgehoben, daß alle in diesem Kapitel abgeleiteten Sätze nur unter den Voraussetzungen A) bis D) von §§ 72 und 74 bewiesen sind, wollen dies aber hier nochmals wiederholen und ganz besonders betonen, daß gerade dieser Satz nur im *„Hauptfall“* richtig ist.

[2]) Nach A. MAYER, loc. cit. p. 259 und C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, Bd. III, Nr. 393.

so läßt sich eine positive Größe d angeben derart, daß

$$\Delta(x, x_0) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 \gtreqless x \gtreqless x_2,$$

wofern $x_1 - d < x_0 < x_1$.

Man beweist denselben genau so, wie den analogen Satz in § 61, d), Ende, wobei man nur noch zu beachten hat, daß die Funktion $\Delta(x, \xi)$ nach d) stets zugleich die Determinante eines konjugierten Systems ist.

Dieser Satz, in Verbindung mit dem am Ende von f) erhaltenen Resultat zeigt, daß die Bedingungen (II') und (III') für ein permanentes Zeichen der zweiten Variation hinreichend sind. Daß dieselben Bedingungen auch *für ein schwaches Minimum des Integrals J hinreichend* sind, beweist KNESER[1]) durch eine Verallgemeinerung der Methode von § 15, b). —

Seitdem Weierstraß und Kneser für das einfachste Problem der Variationsrechnung gezeigt haben, daß zum Beweis der Notwendigkeit der Legendre'schen und Jacobi'schen Bedingung, sowie zur Aufstellung von hinreichenden Bedingungen, die Theorie der zweiten Variation nicht nötig ist, ist dieselbe wegen ihrer geringeren Anschaulichkeit etwas in Mißkredit geraten. Dem gegenüber ist hervorzuheben, daß schon beim einfachsten Problem der Variationsrechnung ein alle Fälle umfassender, strenger Beweis der Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung mittels des Enveloppensatzes mit weit größeren Schwierigkeiten verbunden ist, als sie die zweite Variation darbietet (vgl. § 47); daß aber beim Lagrange'schen Problem die Untersuchung der zweiten Variation solange überhaupt unentbehrlich ist, als nicht die beiden letzten der oben gegebenen Sätze ohne Hilfe der zweiten Variation bewiesen sind, ganz davon zu schweigen, daß hier der Nachweis der Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung für die erwähnten Ausnahmefälle mit Hilfe des Enveloppensatzes überhaupt noch nicht erbracht worden ist.[2])

[1]) Mathematische Annalen, Bd. LI (1899), p. 321; dasselbe beweist auf anderem Weg v. ESCHERICH, Mathematische Annalen, Bd. LV (1902), p. 108.

[2]) An weiterer neuerer Literatur über die zweite Variation erwähnen wir noch eine Abhandlung von v. ESCHERICH, Wiener Berichte, Bd. CX (1901), pp. 1355—1421, in welcher derselbe seine Untersuchungen auf den Fall der Parameterdarstellung ausdehnt, und eine solche von HAHN, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XIV, pp. 1—57, in welcher die Verallgemeinerung der Escherich'schen Resultate für den Fall von gemischten Bedingungen gegeben wird.

§ 77. Hinreichende Bedingungen beim Lagrange'schen Problem.[1])

Wir wenden uns jetzt zur Ausdehnung der Sätze von §§ 16 und 17 über Extremalenfelder auf das Lagrange'sche Problem, und zwar betrachten wir in diesem Paragraphen den speziellen Fall von *Feldern, deren Extremalen durch einen festen Punkt* gehen. Für diesen speziellen Fall lassen sich die früheren Resultate über das Feldintegral, den Unabhängigkeitssatz und den Weierstraß'schen Fundamentalsatz ohne Schwierigkeiten verallgemeinern, und hieraus ergeben sich dann leicht hinreichende Bedingungen des Extremums für das Lagrange'sche Problem bei festen Endpunkten.

Wir werden dabei an den Voraussetzungen A) bis D) von § 72 und § 74 über den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ festhalten.

a) **Das Feldintegral und der Weierstraß'sche Fundamentalsatz:**

Es sei $A_0(a^0, b_1^0, \ldots, b_n^0)$ ein beliebiger Punkt der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$. Durch diesen Punkt geht eine n-parametrige Schar[2]) von Extremalen, die wir in der Normalform

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x;\, a^0, b^0, c) \equiv Y_i(x, c_1, \cdots, c_n) \tag{75}$$

mit $c_1, \ldots, c_n$ als Parametern schreiben. Die zugehörigen Multiplikatoren sind

$$\lambda_\beta = \mathfrak{L}_\beta(x;\, a^0, b^0, c) \equiv \Lambda_\beta(x, c_1, \cdots, c_n).$$

Die Schar (75) enthält die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ für $c_i = c_i^0 = v_i(a^0)$ in der Bezeichnung von § 72, b).

Wir nehmen jetzt an, daß diese Schar ein *Feld* bildet, so daß also die Gleichungen (75) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen einem gewissen Bereich $\mathfrak{A}$ im Gebiet der Variabeln $x, c_1, \ldots, c_n$ und dessen Bild $\mathcal{S}$ im $x, y_1, \ldots, y_n$-Raum definieren und daß gleichzeitig im Bereich $\mathfrak{A}$ die Funktionaldeterminante der Schar, d. h. die Funktion[3])

$$D(x, c_1, \cdots, c_n) \equiv \mathfrak{D}(x;\, a^0, b^0, c)$$

von Null verschieden ist.

Durch jeden Punkt $(x, y_1, \ldots, y_n)$ des Feldes $\mathcal{S}$ geht eine und nur eine Feldextremale, deren Parameter $c_1, \ldots, c_n$ durch die *inversen Funktionen des Feldes*[4])

$$c_i = \mathfrak{c}_i(x, y_1, \cdots, y_n) \equiv \mathfrak{C}_i(a^0, b_1^0, \cdots, b_n^0;\, x, y_1, \cdots, y_n)$$

[1]) Vgl. zu diesem Paragraphen A. Mayer, Leipziger Berichte 1903, p. 131 und Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 476.

[2]) Vgl. § 75, a); unsere jetzige Bezeichnung wird mit der dortigen identisch in dem speziellen Fall, wo $a^0 = x_1$.

[3]) Vgl. wegen der Bezeichnung Gleichung (148) von § 73.

[4]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 73, b).

geliefert werden. Dieselben genügen den Gleichungen

$$Y_i(x, \mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_n) = y_i \tag{76}$$

identisch im Bereich $\mathfrak{J}$ und umgekehrt ist

$$\mathfrak{c}_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) = c_i, \tag{77}$$

identisch im Bereich $\mathfrak{A}$.

Als *Gefällfunktionen des Feldes* bezeichnen wir die n Funktionen

$$p_i(x, y_1, \cdots, y_n) = Y_i'(x, \mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_n); \tag{78}$$

dieselben genügen den m Gleichungen

$$\varphi_\beta(x, y, p) = 0 \tag{79}$$

identisch in den Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$. Dies folgt aus den identisch in $x, c_1, \ldots, c_n$ gültigen Gleichungen

$$\varphi_\beta(x, Y, Y') = 0,$$

wenn man darin c_i durch $\mathfrak{c}_i$ ersetzt.

Ferner verstehen wir unter den *Multiplikatoren des Feldes* die Funktionen[1])

$$\mu_\beta(x, y_1, \cdots, y_n) = \Lambda_\beta(x, \mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_n). \tag{80}$$

Endlich verstehen wir unter dem *Feldintegral* das Integral J, genommen vom Punkt A_0 bis zum Punkt $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ des Feldes entlang der eindeutig definierten Feldextremalen, welche diese beiden Punkte verbindet. Wir bezeichnen dieses Integral mit $W(x, y_1, \ldots, y_n)$, sodaß in der Bezeichnung von § 73, c)

$$W(x, y_1, \cdots, y_n) = \mathfrak{W}(a^0, b_1^0, \cdots, b_n^0; x, y_1, \cdots, y_n).$$

Daher können wir die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen des Feldintegrals unmittelbar aus den allgemeinen Formeln (158) von § 73 entnehmen; wir erhalten so unter Berücksichtigung der Definition der Funktionen p_i und μ_β

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= f(x, y, p) - \sum_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu), \\ \frac{\partial W}{\partial y_k} &= F_{n+k}(x, y, p, \mu). \end{aligned} \tag{81}$$

Hieraus folgt unmittelbar der *Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz* für das Lagrange'sche Problem[2]):

---

[1]) Die Funktionen μ_β haben natürlich mit den in § 76, b) eingeführten, ebenso bezeichneten Funktionen nichts zu tun.

[2]) Für den allgemeinen Fall zuerst bewiesen von A. Mayer, loc. cit. p. 140; für die speziellen Fälle $n = 2$, $m = 0$, und $m = 2$, $n = 1$ schon vorher von Nadeschda-Gernet, Göttinger Dissertation 1902, pp. 21 und 63.

Der Wert des Integrals

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int\limits_{\mathfrak{C}} \left\{ f(x, y, p) - \sum_i \left(p_i - \frac{dy_i}{dx} \right) F_{n+i}(x, y, p, \mu) \right\} dx, \tag{82}$$

genommen entlang einer ganz im Feld $\mathcal{S}$ gelegenen Kurve $\mathfrak{C}$ der Klasse C' von einem Punkt $P'(\xi', \eta_1', \ldots, \eta_n')$ bis zu einem Punkt $P''(\xi'', \eta_1'', \ldots, \eta_n'')$, hängt nur von der Lage der beiden Endpunkte P', P'' ab, nicht aber von der sonstigen Gestalt der Kurve $\mathfrak{C}$, da nach (81)

$$J^*_{\mathfrak{C}}(P'P'') = W(\xi'', \eta_1'', \ldots, \eta_n'') - W(\xi', \eta_1', \ldots, \eta_n').$$

Liegen insbesondere die beiden Endpunkte P', P'' auf derselben Feldextremalen $\mathfrak{E}$, so ist

$$J^*_{\mathfrak{C}}(P'P'') = J^*_{\mathfrak{E}}(P'P'') = J_{\mathfrak{E}}(P'P''),$$

wie daraus folgt, daß nach (77) und (78)

$$p_i(x, Y_1, \cdots, Y_n) = Y_i'(x, c_1, \cdots, c_n).$$

Liegt daher $\mathfrak{E}_0$ ganz im Innern des Feldes $\mathcal{S}$, und ist

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad y_i = \overline{y}_i(x), \qquad x_1 \gtreqless x \gtreqless x_2$$

irgend eine zulässige Kurve für das vorgelegte Variationsproblem, welche ebenfalls ganz im Innern von $\mathcal{S}$ liegt, so ist, da auch die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von P_1 nach P_2 führt,

$$J_{\mathfrak{E}_0} = J^*_{\mathfrak{E}_0} = J^*_{\overline{\mathfrak{C}}},$$

und daher

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0} = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J^*_{\overline{\mathfrak{C}}}. \tag{83}$$

Die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ genügt als zulässige Kurve den m Differentialgleichungen

$$\varphi_\beta(x, \overline{y}, \overline{y}') = 0.$$

Daher kann man in $J_{\overline{\mathfrak{C}}}$ den Integranden $f(x, \overline{y}, \overline{y}')$ durch $F(x, \overline{y}, \overline{y}', \mu)$ ersetzen; ebenso kann man wegen (79) in dem Ausdruck für $J^*_{\overline{\mathfrak{C}}}$ die Funktion $f(x, \overline{y}, p)$ durch $F(x, \overline{y}, p, \mu)$ ersetzen. Erinnert man sich schließlich noch der Definition (8) der $\mathcal{E}$-Funktion, so erhält man aus (83) den *Weierstraß'schen Fundamentalsatz* für das Lagrange'sche Problem:

$$\Delta J = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}(x, \overline{y};\, p, \overline{y}';\, \mu)\, dx. \tag{84}$$

Darin sind p_i, resp. μ_β, die Gefällfunktionen, resp. Multiplikatoren des Feldes für die Argumente $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$.

b) **Hinreichende Bedingungen:**

Wir nehmen jetzt an, daß für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (II') und (III') von § 74, b) und § 76, g) erfüllt sind. Wählen wir dann den Punkt A_0 auf der Fortsetzung von $\mathfrak{E}_0$ über P_1 hinaus hinreichend nahe bei P_1, so ist nach dem letzten Satz von § 76, g)

$$\Delta(x, a^0) \neq 0 \qquad \text{in } [x_1 x_2],$$

was wir nach (21) auch schreiben können

$$D(x, c_1^0, \cdots, c_n^0) \neq 0 \qquad \text{in } [x_1 x_2],$$

wenn D dieselbe Bedeutung hat wie unter a).

Hieraus folgt aber nach dem allgemeinen Satz über die Existenz eines Feldes (§ 22, d) Zusatz), daß die Extremalenschar (75) durch den Punkt A_0 ein den Bogen $\mathfrak{E}_0$ in seinem Innern enthaltendes Feld $\mathcal{S}$ liefert. Ist dann $\overline{\mathfrak{C}}$ irgend eine zulässige Kurve, welche ganz im Innern von $\mathcal{S}$ liegt, so gilt für sie der Weierstraß'sche Satz (84). Hieraus folgt aber[1])

Sind für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (II') und (III') erfüllt, und gibt es eine Umgebung (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ derart, daß

$$\mathcal{E}(x, y; p(x, y), \tilde{p}; \mu(x, y)) > 0 \qquad \text{(IV}_b'\text{)}$$

für jedes Wertsystem $x, y_1, \ldots, y_n; \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$, welches den Bedingungen

$$(x, y_1, \ldots, y_n) \ \ in\ (\varrho); \ (x, y_1, \ldots, y_n; \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n) \ \ in\ \mathfrak{T}^{2});$$

$$\varphi_\beta(x, y, \tilde{p}) = 0; \qquad (\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n) \neq (p(x, y), \cdots, p_n(x, y))$$

genügt, so liefert der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ ein starkes, eigentliches Minimum für das Integral J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$.

Daß es sich wirklich um ein eigentliches Minimum handelt, folgt ganz wie in § 19, a): Wäre nämlich $\Delta J = 0$ für eine Vergleichskurve $\overline{\mathfrak{C}}$, so müßten entlang dieser Kurve die n Gleichungen bestehen

$$\bar{y}_k' = p_k(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n). \qquad (85)$$

Dies ist aber unmöglich, wenn $\overline{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{E}_0$ verschieden ist. Denn differentiiert man die aus (76) folgenden Gleichungen

$$Y_k(x, \bar{\mathfrak{c}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{c}}_n) = \bar{y}_k, \qquad (86)$$

in welchen: $\bar{\mathfrak{c}}_i = \mathfrak{c}_i(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$, nach x, so würde aus der Annahme (85) folgen, daß die n Gleichungen bestehen müßten

$$\sum_i \frac{\partial Y_k}{\partial c_i} \bar{\mathfrak{c}}_i' = 0.$$

Die Determinante derselben, d. h. die Funktion $D(x, \bar{\mathfrak{c}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{c}}_n)$ ist aber in $[x_1 x_2]$ von Null verschieden, wenn $\overline{\mathfrak{C}}$ ganz im Felde liegt,

[1]) Immer unter den beschränkenden Annahmen A) bis D) von §§ 72 und 74.

[2]) Vgl. §§ 68 und 69.

und daher würde folgen $\bar{\mathfrak{c}}_i = C_i$, einer Konstanten, deren Wert sich aus $x = x_1$ als c_i^0 ergibt. Das bedeutet aber nach (86), daß $\bar{\mathfrak{C}} \equiv \mathfrak{E}_0$. Es ist also in der Tat $\Delta J > 0$ für jede von $\mathfrak{E}_0$ verschiedene Vergleichskurve $\bar{\mathfrak{C}}$, welche ganz in der Umgebung (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ gelegen ist, vorausgesetzt, daß ϱ so klein gewählt wird, daß (ϱ) ganz im Innern von $\mathcal{S}$ liegt.

§ 78. Mayer'sche Extremalenscharen.

Im vorangehenden Paragraphen haben wir den Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz für den speziellen Fall von n-parametrigen Extremalenscharen durch einen festen Punkt bewiesen. Im gegenwärtigen Paragraphen soll dieser Satz nun auf allgemeinere n-parametrige Extremalenscharen ausgedehnt werden. Es wird sich dabei das Resultat ergeben, daß der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz und seine Folgerungen beim allgemeinen Lagrange'schen Problem nicht für beliebige n-parametrige Extremalenscharen gilt, sondern nur für eine ganz bestimmte spezielle Klasse solcher Scharen, die wir nach ihrem Entdecker „*Mayer'sche Extremalenscharen*" nennen werden.

a) Die allgemeinste Form des Hilbert'schen Unabhängigkeitssatzes:

Es sei[1])

$$y_i = Y_i(x, b_1, \ldots, b_n), \qquad v_i = V_i(x, b_1, \ldots, b_n) \tag{87}$$

eine beliebige n-parametrige Schar von Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \qquad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \tag{88}$$

von § 72, welche unsere spezielle Lösung

$$y_i = y_i(x), \qquad v_i = v_i(x)$$

enthält, und zwar für $b_i = b_i^0$. Diese Schar möge ein Feld $\mathcal{S}$ um den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ liefern; die inversen Funktionen des Feldes bezeichnen wir mit

$$b_i = \mathfrak{b}_i(x, y_1, \ldots, y_n),$$

die Gefällfunktionen und Multiplikatoren des Feldes mit

$$p_i(x, y_1, \ldots, y_n) = Y_i'(x, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n),$$
$$\mu_\beta(x, y_1, \ldots, y_n) = \Lambda_\beta(x, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n),$$

---

[1]) Die Zeichen $Y_i, V_i, \Lambda_\beta, b_i$ usw. haben hier also eine allgemeinere Bedeutung als in § 77.

wenn

$$\lambda_\beta = \Lambda_\beta(x, b_1, \ldots, b_n)$$

die zur Lösung (87) gehörigen Multiplikatoren bedeuten.

In dem speziellen Fall, wo die sämtlichen Extremalen der Schar

$$y_i = Y_i(x, b_1, \ldots, b_n) \tag{89}$$

durch einen festen Punkt gehen, ist dann der mit diesen Funktionen p_i, μ_β als Argumenten gebildete Differentialausdruck

$$[f(x, y, p) - \sum_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu)]dx + \sum_k F_{n+k}(x, y, p, \mu)dy_k \tag{90}$$

nach § 77, a) ein vollständiges Differential. Es fragt sich jetzt: Gilt dies auch noch für eine ganz beliebige n-parametrige Extremalenschar, wie dies beim einfachsten Variationsproblem ($n = 1$, $m = 0$) in der Tat der Fall war?

Zur Entscheidung dieser Frage[1]) ziehen wir quer durch das Feld eine beliebige n-dimensionale Mannigfaltigkeit („Hyperfläche" in der Terminologie[2]) der mehrdimensionalen Geometrie) $\mathfrak{K}$, welche jede Extremale des Feldes in einem und nur einem Punkt schneidet. Eine solche Hyperfläche kann man darstellen in der Form

$$\mathfrak{K}: \qquad x = \xi(b_1, \ldots, b_n), \qquad y_i = Y_i(\xi, b_1, \ldots, b_n), \tag{91}$$

wenn $\xi(b_1, \ldots, b_n)$ die Abszisse des Schnittpunktes der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ mit der Extremalen $\mathfrak{E}_b$ der Schar (89) ist.

Wir betrachten dann das Integral J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_b$, von deren Schnittpunkt P_4 mit der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ bis zum Punkt P_3, dessen Abszisse x ist, d. h. also das Integral

$$U(x, b_1, \ldots, b_n) = \int_{\xi(b_1, \ldots, b_n)}^{x} f(x, Y, Y')dx.$$

Dasselbe Integral, betrachtet als Funktion der Koordinaten $x, y_1, \ldots, y_n$ des Punktes P_3 bezeichnen wir mit $W(x, y_1, \ldots, y_n)$, sodaß also

$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = U(x, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n). \tag{92}$$

Die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ nennen wir die „Ausgangshyperfläche" für die Funktion W.

Wir berechnen jetzt die partiellen Ableitungen der Funktion W. Dabei machen wir zur Vereinfachung der Rechnung von der leicht

---

[1]) Vgl. für das Folgende Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 478.

[2]) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, *Differentialgeometrie*, p. 564.

zu verifizierenden[1]) Bemerkung Gebrauch, daß jede n-parametrige Schar von Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen (88), welche ein Feld von Extremalen um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ liefert, sich durch eine Parametertransformation auf die kanonische Form bringen läßt:

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b, C), \qquad v_i = \mathfrak{B}_i(x; a^0, b, C), \tag{93}$$

wobei die Größen $C_1, \ldots, C_n$ Funktionen von $b_1, \ldots, b_n$ sind, welche den Anfangsbedingungen

$$C_i(b_1^0, \ldots, b_n^0) = c_i^0 \tag{93a}$$

genügen. Die Größen $a^0, b_1^0, \ldots, b_n^0$ sind dabei die Koordinaten eines Punktes der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$, und $c_i^0 = v_i(a^0)$.

Wir nehmen an, die Parameter der Schar (87) seien gerade diese kanonischen Parameter, sodaß also

$$Y_i(x, b_1, \ldots, b_n) \equiv \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b, C), \quad V_i(x, b_1, \ldots, b_n) \equiv \mathfrak{B}_i(x; a^0, b, C). \tag{94}$$

Es folgt dann nach Gleichung (136) von § 72, daß

$$Y_i(a^0, b_1, \ldots, b_n) = b_i, \qquad V_i(a^0, b_1, \ldots, b_n) = C_i. \tag{95}$$

Weiter folgt, daß das Integral U sich durch die in § 73, a) definierte Funktion $\mathfrak{U}$ ausdrücken läßt:

$$U(x, b_1, \ldots, b_n) = \mathfrak{U}(x; a^0, b, C) - \mathfrak{U}(\xi; a^0, b, C).$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= f(x, Y, Y'), \\ \frac{\partial U}{\partial b_k} &= \left[\frac{\partial \mathfrak{U}(x)}{\partial b_k}\right] + \sum_j \left[\frac{\partial \mathfrak{U}(x)}{\partial c_j}\right] \frac{\partial C_j}{\partial b_k} - \frac{\partial [\mathfrak{U}(\xi)]}{\partial b_k}, \end{aligned} \tag{96}$$

wobei die Klammer [ ] die Substitution von a^0, C_i für a, c_i andeuten soll.

[1]) Ist die Schar von Lösungen des kanonischen Systems (88) zunächst mit beliebigen Parametern $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ gegeben

$$y_i = \overline{Y}_i(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_n), \qquad v_i = \overline{V}_i(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

wobei die Extremale $\mathfrak{E}_0$ dem speziellen Wertsystem $\gamma_i = \gamma_i^0$ entsprechen möge, so wähle man auf $\mathfrak{E}_0^*$, aber noch im Innern des Feldes, einen beliebigen Punkt $(a^0, b_1^0, \ldots, b_n^0)$ und setze

$$\overline{Y}_i(a^0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = b_i.$$

Diese n Gleichungen können wir, da die Extremalenschar ein Feld bilden sollte, in der Umgebung der Stelle γ_i^0, b_i^0 eindeutig nach $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ auflösen; sei

$$\gamma_i = \Gamma_i(b_1, \ldots, b_n).$$

Definiert man dann

$$C_i(b_1, \ldots, b_n) = \overline{V}_i(a^0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n),$$

so ist nach der Definition der Funktionen $\mathfrak{Y}_i, \mathfrak{B}_i$ von § 72, c)

$$\overline{Y}_i(x, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) \equiv \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b, C), \qquad \overline{V}_i(x, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) \equiv \mathfrak{B}_i(x; a^0, b, C),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Hierin setze man die Ausdrücke für die Ableitungen von $\mathfrak{U}(x)$ aus Gleichung (146) von § 73 ein und beachte, daß nach (94)

$$\frac{\partial Y_i}{\partial b_k} = \left[\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial b_k}\right] + \sum_j \left[\frac{\partial \mathfrak{Y}_i}{\partial c_j}\right] \frac{\partial C_j}{\partial b_k}$$

und nach (95) und nach Gleichung (142) von § 72

$$F_{n+k}(a^0, Y(a^0), Y'(a^0), \Lambda(a^0)) = V_k(a^0, b_1, \ldots, b_n) = C_k.$$

Dann erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial b_k} = \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda) \frac{\partial Y_i}{\partial b_k} + M_k, \tag{97}$$

wo M_k die folgende Funktion von $b_1, \ldots, b_n$ ist:

$$M_k = -C_k - \frac{\partial [\mathfrak{U}(\xi)]}{\partial b_k}. \tag{98}$$

Geht man jetzt zur Funktion $W(x, y_1, \ldots, y_n)$ über, indem man von der Definitionsgleichung (92) und von den durch Differentiation der Identitäten

$$Y_i(x; \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n) = y_i$$

folgenden Relationen Gebrauch macht, so erhält man[1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= f(x, y, p) - \sum_i p_i F_{n+i}(x, y, p, \mu) + \sum_i (M_i) \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial y_k} &= F_{n+k}(x, y, p, \mu) + \sum_i (M_i) \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_k}, \end{aligned} \tag{99}$$

wobei die Klammer ( ) die Substitution von $\mathfrak{b}_i$ für b_i andeutet.

Hieraus folgt: Soll der Differentialausdruck (90) ein vollständiges Differential sein, so ist notwendig und hinreichend, daß auch der Differentialausdruck

$$dx \sum_i (M_i) \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial x} + \sum_k dy_k \sum_i (M_i) \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_k}$$

ein vollständiges Differential ist. Die Integrabilitätsbedingung, welche die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ausdrückt, reduziert sich nach einfacher Rechnung auf die Bedingungen[2])

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial b_k}\right) = \left(\frac{\partial M_k}{\partial b_i}\right),$$

[1]) Vgl. die entsprechenden Entwicklungen in § 73, c).

[2]) Man erhält zunächst

$$\sum_{i,k} \left\{ \left(\frac{\partial M_i}{\partial b_k}\right) - \left(\frac{\partial M_k}{\partial b_i}\right) \right\} \frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_\mu} \frac{\partial \mathfrak{b}_k}{\partial y_\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n; y_0 = x.$$

aus denen durch die Substitution $y_i = Y_i$ folgt, daß auch

$$\frac{\partial M_i}{\partial b_k} = \frac{\partial M_k}{\partial b_i}$$

sein muß. Es muß also eine Funktion $N(b_1, \ldots, b_n)$ geben, so daß

$$M_k = \frac{\partial N}{\partial b_k},$$

d. h. also

$$C_k = -\frac{\partial [\mathfrak{U}(\mathfrak{x})]}{\partial b_k} - \frac{\partial N}{\partial b_k}. \tag{100}$$

Wir haben also den folgenden, von A. Mayer[1]) herrührenden Satz bewiesen:

Soll für eine in der kanonischen Form

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b, C(b)) \tag{101}$$

gegebene n-parametrige Extremalenschar der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz bestehen, d. h. soll der Differentialausdruck (90) ein vollständiges Differential sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $C_i(b_1, \ldots, b_n)$ den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial C_i}{\partial b_k} = \frac{\partial C_k}{\partial b_i} \tag{102}$$

genügen, also die partiellen Ableitungen ein und derselben Funktion $B(b_1, \ldots, b_n)$ sind:

$$C_i = \frac{\partial B(b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_i}. \tag{103}$$

Die Funktion $B(b_1, \ldots, b_n)$ ist, abgesehen von Stetigkeitsbedingungen, nur der aus (93a) folgenden Anfangsbedingung

$$\left.\frac{\partial B(b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_i}\right|^{b=b^0} = c_i^0 \tag{104}$$

unterworfen.

Wir werden eine n-parametrige Extremalenschar, welche, in die kanonische Form (101) gebracht, diese Bedingung erfüllt, eine *Mayer'sche Extremalenschar* nennen.

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, gilt für die Extremalenschar durch einen festen Punkt der Hilbert'sche Un-

---

Hieraus folgt das im Text gegebene Resultat, da im Feld $\mathcal{S}$ die Determinante

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{b}_i}{\partial y_j}\right|, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist.

[1]) Von A. Mayer auf anderem Weg bewiesen in den Leipziger Berichten 1905, p. 49.

abhängigkeitssatz; daher müssen diese speziellen Scharen Mayer'sche Scharen sein. Dies läßt sich leicht mit Hilfe der Resultate von § 73 verifizieren. Wir fanden dort für die Extremale durch die beiden Punkte $(a, b_1, \ldots, b_n)$ und $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ in der dortigen Bezeichnung den Ausdruck

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; a, b, \mathfrak{C}),$$

und nach Gleichung (159) von § 73 war

$$\mathfrak{C}_k = -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial b_k}.$$

Wir können die Extremale also schreiben

$$y_i = \mathfrak{Y}_i\left(x; a, b_1, \ldots, b_n, -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial b_1}, \cdots, -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial b_n}\right).$$

Halten wir darin die Größen $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ sowie a fest und variieren die Parameter $b_1, \ldots, b_n$, so stellen diese Gleichungen die Extremalenschar durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ in der kanonischen Form (101) dar und zeigen daher, daß diese Schar in der Tat eine Mayer'sche Schar ist.

b) **Verallgemeinerung des Kneser'schen Transversalensatzes**[1]):

Wir betrachten eine beliebige, die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthaltende n-parametrige Extremalenschar in der kanonischen Form (93)

$$y_i = Y_i(x, b_1, \ldots, b_n) \equiv \mathfrak{Y}_i(x; a^0, b, C).$$

Die Funktionen C_i sollen in der Umgebung der Stelle $b_1^0, \ldots, b_n^0$ von der Klasse C' sein und den Anfangsbedingungen (93a) genügen, und die Schar soll ein Feld um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ liefern.

Und nunmehr stellen wir uns die Aufgabe[2]), die Ausgangshyperfläche $\mathfrak{K}$ für das Integral W so zu bestimmen, daß die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von W dieselbe einfache Form (81) annehmen wie in dem speziellen Fall einer Schar von Extremalen durch einen festen Punkt. Dazu ist nach (99) notwendig und hinreichend, daß die durch (98) definierten Funktionen M_k sämtlich identisch verschwinden, daß also

$$C_k = -\frac{\partial [\mathfrak{U}(\xi)]}{\partial b_k}. \tag{105}$$

Die verlangte Bestimmung der Fläche $\mathfrak{K}$ ist also nur möglich, wenn die gegebene Schar eine Mayer'sche Schar ist, wie dies auch a priori aus dem unter a) erhaltenen Resultat folgt. Diese Bedingung sei erfüllt, und es sei

$$C_k = \frac{\partial B(b_1, \ldots, b_n)}{\partial b_k}.$$

---

1) Vgl. hierzu Bolza, loc. cit. p. 483.

2) In Verallgemeinerung eines von Kneser für das einfachste Variationsproblem durchgeführten Gedankengangs, vgl. § 31, c).

Dann folgt aus (105) durch Integration

$$\mathfrak{U}\left(\xi; a^0, b, \frac{\partial B}{\partial b}\right) + B = c, \tag{106}$$

wo c eine von $b_1, \ldots, b_n$ unabhängige numerische Konstante ist. Dieser Gleichung muß also die gesuchte Funktion ξ genügen.

Für die Diskussion derselben schreiben wir der Kürze halber

$$\mathfrak{U}\left(x; a^0, b, \frac{\partial B}{\partial b}\right) + B = G(x, b_1, \ldots, b_n)$$

und machen die *beschränkende Annahme*, daß

$$f(x, y(x), y'(x)) \neq 0 \text{ in } [x_1 x_2]. \tag{107}$$

Unter dieser Voraussetzung betrachten wir die Aufgabe, die Gleichung

$$G(x, b_1, \ldots, b_n) = c \tag{108}$$

nach x aufzulösen. Da nach (104) und Gleichung (145) von § 73

$$G_x(x, b_1^0, \ldots, b_n^0) = f(x, y(x), y'(x)),$$

so sind wegen (107) die Voraussetzungen des erweiterten Satzes über implizite Funktionen von § 22, e) erfüllt, und man erhält durch Anwendung desselben das folgende Resultat:

Es sei c_1, resp. c_2, das Minimum, resp. Maximum, der Funktion $G(x, b_1^0, \ldots, b_n^0)$ im Intervall $[x_1 x_2]$ und $x = \xi_0(c)$ die wegen (107) im Intervall $[c_1 c_2]$ eindeutige Lösung der Gleichung

$$G(x, b_1^0, \ldots, b_n^0) = c.$$

Dann läßt sich die Gleichung (108) in der Umgebung der Punktmenge

$$\mathfrak{C}: \qquad x = \xi_0(c), \qquad b_i = b_i^0, \qquad c_1 \leqq c \leqq c_2$$

eindeutig nach x auflösen. Die Lösung sei

$$x = \xi(b_1, \ldots, b_n; c).$$

Schreiben wir dann noch

$$Y_i(\xi(b_1, \ldots, b_n; c), b_1, \ldots, b_n) = \eta_i(b_1, \ldots, b_n; c), \tag{109}$$

so stellen die Gleichungen

$$x = \xi(b_1, \ldots, b_n; c), \qquad y_i = \eta_i(b_1, \ldots, b_n; c)$$

eine Hyperfläche von den verlangten Eigenschaften dar, die wir mit $\mathfrak{T}_c$ bezeichnen. Lassen wir die Konstante c variieren, so erhalten wir eine einfach unendliche Schar von solchen Hyperflächen, die wir die „*Transversalhyperflächen*“ des Feldes nennen wollen. Man beweist leicht, daß bei gehöriger Beschränkung des Feldes durch jeden Punkt desselben eine und nur eine Transversalhyperfläche hindurchgeht. Wir können dann unser Resultat in den Satz zusammenfassen:

Damit die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen der Funktionen $W(x, y_1, \ldots, y_n)$ *dieselbe einfache Form (81) annehmen wie bei einer Schar von Extremalen durch einen festen Punkt, ist notwendig und hinreichend, daß die zugrunde liegende Extremalenschar eine Mayer'sche Schar ist, und daß die Ausgangshyperfläche für die Funktion W eine Transversalhyperfläche des Feldes dieser Schar ist.*

Weiter folgt nun unmittelbar die Verallgemeinerung des Kneser-schen Transversalensatzes für das Lagrange'sche Problem[1]):

Zwei Transversalhyperflächen $\mathfrak{T}_{c'}$ *und* $\mathfrak{T}_{c''}$ *eines von einer Mayer-schen Schar gebildeten Feldes schneiden auf den verschiedenen Extremalen der Schar Bogen aus, welche für das Integral J denselben konstanten Wert liefern, nämlich den Wert* $c'' - c'$.

Denn es ist nach der Definition der Funktionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{x}$:

$$\int_{\xi(b;c')}^{\xi(b;c'')} f(x, Y, Y')dx = \mathfrak{U}\left(\xi(b; c''); a^0, b, \frac{\partial B}{\partial b}\right) - \mathfrak{U}\left(\xi(b; c'); a^0, b, \frac{\partial B}{\partial b}\right)$$

$$= G(\xi(b; c''), b) - G(\xi(b; c'), b) = c'' - c'.$$

Hieraus folgt weiter: Wird als Ausgangshyperfläche bei der Definition der Funktion W eine Transversalhyperfläche des Feldes gewählt, so sind die Transversalhyperflächen identisch mit den Hyperflächen

$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{konst.} \tag{110}$$

Kombiniert man dieses Resultat mit dem unter a) bewiesenen Satz, daß der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz für ein beliebiges Mayer'sches Extremalenfeld gilt, so erkennt man, indem man genau wie in § 41, Ende, schließt, daß der *Weierstraß'sche Fundamentalsatz* (84) seine Gültigkeit behält, wenn das Feld statt von einer Extremalenschar durch einen festen Punkt von einer beliebigen Mayer'schen Schar gebildet wird, und die Vergleichskurve $\overline{\mathfrak{C}}$ statt vom Punkt P_1 von einem beliebigen Punkt der durch P_1 gehenden Transversalhyperfläche $\mathfrak{T}$ des Feldes ausgeht.

Damit hat man zugleich hinreichende Bedingungen für die Aufgabe gewonnen, das Integral J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$ zu einem Extremum zu machen, wenn der erste Endpunkt auf der Hyperfläche $\mathfrak{T}$ frei beweglich, dagegen der zweite fest ist.

c) Zusammenhang mit der Transversalitätsbedingung:

Um die Analogie der im vorangehenden entwickelten Theorie mit den entsprechenden Untersuchungen von Kneser für den ein-

[1]) Hierzu die *Übungsaufgabe* Nr. 9 am Ende von Kap. XIII.

fachsten Fall $n = 1$, $m = 0$ zu vervollständigen, haben wir nun zu zeigen, daß die Transversalhyperflächen auch durch ein System von partiellen Differentialgleichungen definiert werden können, welche die Verallgemeinerung der Transversalitätsbedingung des einfachsten Falles sind.

Dazu differentiieren wir die Gleichung (106), durch welche die Funktion $\xi(b_1, \ldots, b_n; c)$ definiert wird, partiell nach b_k und machen von den bei der Ableitung der Gleichungen (97) erhaltenen Resultaten Gebrauch. Dann kommt

$$f(x, Y, Y')\Big|^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda) \frac{\partial Y_i}{\partial b_k}\Big|^{\xi} = 0. \qquad (111)$$

Umgekehrt: Ist ξ eine Funktion von $b_1, \ldots, b_n$, welche diesen n partiellen Differentialgleichungen genügt, so folgt rückwärts die Gleichung (106). Die Transversalhyperflächen können also in der Tat durch die n partiellen Differentialgleichungen (111) für die Funktion ξ definiert werden; dieselben sind infolge der Relationen (102) miteinander verträglich.

Führt man die durch die Gleichungen (109) definierten Funktionen η_i ein, so gehen die Gleichungen (111) über in

$$f(x, Y, Y') - \sum_i Y_i' F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\Big|^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \sum_i F_{n+i}(x, Y, Y', \Lambda)\Big|^{\xi} \frac{\partial \eta_i}{\partial b_k} = 0. \qquad (112)$$

Für $n = 1$, $m = 0$ reduzieren sich diese Gleichungen auf die eine Gleichung

$$f(x, Y, Y') - Y' f_{y'}(x, Y, Y')\Big|^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial b} + f_{y'}(x, Y, Y')\Big|^{\xi} \frac{\partial \eta}{\partial b} = 0, \qquad (112\text{a})$$

d. h. eben auf die bekannte Transversalitätsbedingung.

Hiermit sind zunächst rein formal die Transversalhyperflächen als Verallgemeinerung der Transversalen des einfachsten Falles nachgewiesen. Es bleibt jetzt aber noch zu zeigen, daß die Differentialgleichungen (112) für das Lagrange'sche Problem mit einem variablen Endpunkt dieselbe Bedeutung haben wie die Transversalitätsbedingung (112a) für den einfachsten Fall.

Wir betrachten daher jetzt die Aufgabe, — gleich etwas allgemeiner, als für unsern unmittelbaren Zweck nötig wäre —, das Integral J mit den Nebenbedingungen $\varphi_\beta = 0$ zu einem Extremum zu machen, wenn der Punkt P_2 fest ist, während der Anfangspunkt auf einer gegebenen q-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ beweglich ist, welche in Parameterdarstellung gegeben sein möge durch die Gleichungen

$$x = \xi(b_1, \cdots, b_q), \qquad y_i = \eta_i(b_1, \cdots, b_q),$$

wo $q \overline{\overline{<}} n$.

Die gesuchte Kurve $\mathfrak{C}_0$ muß dann eine Extremale sein, und wenn ihr Anfangspunkt P_1 auf $\mathfrak{K}$ den Parameterwerten $b_1 = b_1^0, \cdots, b_q = b_q^0$ entspricht, so muß nach der in § 38 entwickelten Differentiationsmethode in der Bezeichnung von § 73, c) die Funktion

$$\mathfrak{W}(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n; x_3, y_{13}, \cdots, y_{n3})$$

der unabhängigen Variabeln $b_1, \cdots, b_q$ für $b_1 = b_1^0, \cdots, b_q = b_q^0$ ein Extremum besitzen; dabei ist $(x_3, y_{13}, \cdots, y_{n3})$ ein Punkt der Extremalen $\mathfrak{C}_0$, der so nahe bei P_1 gewählt ist, daß $\Delta(x_1, x_3) \neq 0$.[1]) Dies führt nach den Gleichungen (158) von § 73 auf die Bedingungen:

$$\begin{aligned}[][f(x_1, y(x_1), y'(x_1)) - \sum_i y_i'(x_1) F_{n+i}(x_1, y(x_1), y'(x_1), \lambda(x_1))] \left(\frac{\partial \xi}{\partial b_\varrho}\right)_0 \\ + \sum_i F_{n+i}(x_1, y(x_1), y'(x_1), \lambda(x_1)) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial b_\varrho}\right)_0 = 0, \\ \varrho = 1, 2, \cdots, q,\end{aligned} \tag{113}$$

wobei der Index 0 die Substitution von b_i^0 für b_i andeuten soll.

Dieselben lassen sich unter Einführung der Funktionen $v_i(x)$ nach den Gleichungen (122) und (129a) von § 72 auch einfacher schreiben in der Form

$$H(x_1, y(x_1), v(x_1)) \left(\frac{\partial \xi}{\partial b_\varrho}\right)_0 - \sum_i v_i(x_1) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial b_\varrho}\right)_0 = 0. \tag{114}$$

Diese q Gleichungen, welche im allgemeinen die Lage des Punktes P_1 auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ bestimmen, bilden zusammen die *„Transversalitätsbedingung"* für das vorgelegte Variationsproblem; wenn dieselbe erfüllt ist, werden wir sagen, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ schneide die Extremale $\mathfrak{C}_0$ im Punkt P_1 *transversal.* —

Die Gleichungen (112) sagen also aus, daß die durch Gleichung (106) definierte Transversalhyperfläche $\mathfrak{K}$ in jedem ihrer Punkte die durch denselben hindurchgehende Extremale der Mayer'schen Schar transversal schneidet, womit die Bezeichnung Transversalhyperfläche ihre Rechtfertigung findet.

d) Zwei Aufgaben über Transversalhyperflächen:

Hieran schließen sich naturgemäß zwei Aufgaben, deren Lösung eine wichtige Ergänzung zu den unter a) und b) gegebenen Entwicklungen liefern wird; zunächst die Aufgabe:

Zu einer beliebig gegebenen Hyperfläche $\mathfrak{K}$ eine n-fach unendliche Extremalenschar zu bestimmen, welche von $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird.

---

[1]) Vgl. § 73, b), insbesondere p. **597**, Fußnote [2]) und § 76, g).

Dabei wird angenommen, daß die spezielle Extremale $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 von $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird. Die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ sei wieder gegeben in der Form

$$x = \xi(b_1, \cdots, b_n), \qquad y_i = \eta_i(b_1, \cdots, b_n).$$

Durch den Punkt (b) derselben ziehen wir zunächst eine beliebige Extremale, die wir in der Normalform von § 72, c)

$$y_i = \mathfrak{Y}_i(x; \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, c_1, \cdots, c_n),$$

ansetzen. Dann ist nach (114) die Bedingung dafür, daß diese Extremale von der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt transversal geschnitten wird:

$$H(\xi, \eta, c)\frac{\partial \xi}{\partial b_k} - \sum_i c_i \frac{\partial \eta_i}{\partial b_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{115}$$

da nach Gleichung (136) von § 72

$$\mathfrak{V}_k(\xi; \xi, \eta_1, \cdots, \eta_n, c_1, \cdots, c_n) = c_k.$$

Da nach Voraussetzung die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ die Extremale $\mathfrak{E}_0$ in P_1 transversal schneidet, so werden die n Gleichungen (115) befriedigt durch das spezielle Wertsystem $b_i = b_i^0$, $c_i = c_i^0 \equiv v_i(x_1)$. Daher können wir dieselben in der Umgebung dieser Stelle eindeutig nach $c_1, \cdots, c_n$ auflösen, wofern an derselben die Funktionaldeterminante der Auflösung von Null verschieden ist. Erinnert man sich, daß nach (88)

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i},$$

so erhält man für die fragliche Funktionaldeterminante nach einfachen Determinantensätzen die Determinante $n+1$ten Grades

$$\begin{vmatrix} 1, & y_1'(x_1), & y_2'(x_1), \cdots, & y_n'(x_1) \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial b_k}\right)_0, & \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial b_k}\right)_0, & \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial b_k}\right)_0, \cdots, & \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial b_k}\right)_0 \end{vmatrix} \tag{116}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$

Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn die Determinante (116) von Null verschieden ist[1]*), so läßt sich stets eine und nur eine, die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthaltende n-parametrige Extremalenschar konstruieren, welche von der Hyperfläche $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird.*

---

[1]) D. h. geometrisch: Wenn die Hyperfläche $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1 die Extremale $\mathfrak{E}_0$ nicht berührt.

Die zweite der oben erwähnten Aufgaben ist die zur ersten inverse Aufgabe:

Zu einer gegebenen n-parametrigen Extremalenschar eine Transversalhyperfläche zu konstruieren.

Wir nehmen dabei an, daß die gegebene Schar die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthält, und präzisieren die Aufgabe genauer dahin, daß die zu konstruierende Transversalhyperfläche durch einen gegebenen Punkt $A_0(a^0, b_1^0, \cdots, b_n^0)$ von $\mathfrak{E}_0$ gehen soll.

Wir schreiben die gegebene Extremalenschar in der kanonischen Form (93) mit der Nebenbedingung (93a) und schneiden, wie unter a), die Schar mit einer beliebigen durch den Punkt A_0 gehenden Hyperfläche $\mathfrak{K}$, die wir wieder durch die Gleichungen (91) analytisch darstellen. Soll dann $\mathfrak{K}$ jede Extremale der Schar transversal schneiden, so muß die Funktion $\xi(b_1, \cdots, b_n)$ den n partiellen Differentialgleichungen (111) genügen. Führen wir jetzt wie unter a) die Funktion $U(x, b_1, \cdots, b_n)$ ein und machen von den Formeln (96) und (97) Gebrauch, so gehen die Gleichungen (111) über in

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|^{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \frac{\partial U}{\partial b_k}\Big|^{\xi} - M_k = 0,$$

was wir auch schreiben können

$$\frac{\partial U(\xi, b)}{\partial b_k} - M_k = 0.$$

Da aber $U(\xi, b_1, \cdots, b_n) \equiv 0$, so folgt: $M_k = 0$. Hiermit sind wir aber auf die bereits unter b) gelöste Aufgabe zurückgeführt und erhalten daher den Satz:

Soll es möglich sein, zu einer gegebenen n-parametrigen Extremalenschar eine Transversalhyperfläche zu konstruieren, so ist notwendig und hinreichend, daß die gegebene Schar eine Mayer'sche Schar ist.

Durch Kombination mit dem oben gefundenen Resultat ergibt sich hieraus der weitere Satz[1]):

Konstruiert man zu einer beliebigen Hyperfläche $\mathfrak{K}$ die von ihr transversal geschnittene Extremalenschar, so ist letztere eine Mayer'sche Schar, und umgekehrt kann jede Mayer'sche Schar auf diese Weise erzeugt werden.

---

[1]) Hiermit ist die Verbindung zwischen den Resultaten von A. Mayer und Hilbert hergestellt. Letzterer hatte nämlich, noch vor Veröffentlichung der oben zitierten Mayer'schen Arbeit, an dem Fall $n = 2$, $m = 0$ in sehr einfacher Weise durch vollständige Induktion bewiesen, daß für jede n-parametrige Extremalenschar, welche von einer Hyperfläche transversal geschnitten wird, der Unabhängigkeitssatz gilt, vgl. *Zur Variationsrechnung,* Göttinger Nachrichten 1905, p. 159 und Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 351.

Hiermit ist zugleich eine von der speziellen Normalform (93) unabhängige Definition der Mayer'schen Scharen gewonnen.

Beispiel XXVIII: Für das Problem der kürzesten Verbindungskurve zweier Punkte im drei-dimensionalen Raum die Mayer'schen Extremalenscharen zu bestimmen.

Hier hat man das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

ohne Nebenbedingung ($m = 0$) zu einem Minimum zu machen.

Die Extremalen sind die Geraden des Raumes. Eine $n (= 2)$-parametrige Extremalenschar ist eine *Kongruenz von Geraden.* Die Bedingung, daß eine Fläche (= Hyperfläche)

$$x = \xi(b_1, b_2), \qquad y = \eta(b_1, b_2), \qquad z = \zeta(b_1, b_2)$$

die Extremale

$$y = \alpha x + \beta, \qquad z = \gamma x + \delta$$

transversal schneidet, wird durch die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \frac{\partial \xi}{\partial b_k} + \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \frac{\partial \eta}{\partial b_k} + \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial b_k} = 0, \quad k = 1, 2.$$

ausgedrückt. Transversal ist also mit *orthogonal* identisch. Für das vorliegende Problem sind also *die Mayer'schen Extremalenscharen Normalenkongruenzen.*[1])

Der Kneser'sche Transversalensatz geht in den bekannten Satz über *Parallelflächen* über[2]): Trägt man auf den Normalen einer Fläche von ihren Fußpunkten aus eine konstante Strecke ab, so bilden die Endpunkte derselben eine Fläche, welche die Normalen der ersten Fläche wieder senkrecht schneidet (eine „Parallelfläche" der ersten).

---

1) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, *Differentialgeometrie*, § 143.

2) Vgl. z. B. Scheffers, *Theorie der Flächen,* p. 205.