universität innsbruck

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

# Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

## Vorlesungen über Variationsrechnung

**Bolza, Oskar**

**Leipzig [u.a.], 1909**

Übungsaufgaben zum zehnten Kapitel

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

# Übungsaufgaben zum zehnten Kapitel.[1]

1. Die $x, y$-Ebene sei mit Masse (Bodenpreisen) belegt und die Dichtigkeit im Punkt $x$, $y$ sei $\mu(x, y)$; in dieser Ebene sei eine Kurve $\mathfrak{K}$ gegeben und auf ihr zwei Punkte $P_1, P_2$. Unter allen Kurven von gegebener Länge, welche von $P_1$ nach $P_2$ gezogen werden können, diejenige zu bestimmen, welche mit dem Bogen $P_2 P_1$ von $\mathfrak{K}$ zusammen die Fläche von größter Masse (Gesamtpreis) einschließt (*Problem der Dido*).

Lösung: Die Extremalen sind durch die Gleichung

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu(x, y)}{\lambda}$$

charakterisiert.

Andeutung: Mache vom Green'schen Satz Gebrauch. (Lord Kelvin)

2. *Auf einer Fläche ist eine Kurve $\mathfrak{K}$ gegeben und auf ihr zwei Punkte $P_1$ und $P_2$. Unter allen Kurven von gegebener Länge $l$, welche auf der Fläche von $P_1$ nach $P_2$ gezogen werden können, diejenige zu bestimmen, welche mit dem Bogen $P_2 P_1$ von $\mathfrak{K}$ den größten Flächenraum umschließt* (§ 59).

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche seien durch zwei Parameter $u, v$ ausgedrückt; die Kurve $\mathfrak{K}$ sei gegeben durch die Gleichungen

$$\mathfrak{K}: \qquad u = \tilde{u}(\tau), \qquad v = \tilde{v}(\tau);$$

die gesuchte Kurve werde in der Form

$$\mathfrak{C}: \qquad u = u(t), \qquad v = v(t)$$

angenommen. Sind dann $M$ und $N$ zwei Funktionen von $u$ und $v$, für welche

$$N_u - M_v = \sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2},$$

so hat man das Integral

$$J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} [M(u, v)u' + N(u, v)v']dt + \varepsilon \int_{\tau_2}^{\tau_1} [M(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}' + N(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}']d\tau,$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, zu einem Maximum zu machen mit der Nebenbedingung, daß

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\, dt = l.$$

Es sollen die analogen Stetigkeitsannahmen gemacht werden wie bei Beispiel XVI.

[1]) Die zulässigen Kurven werden überall, wo nichts besonderes festgesetzt wird, als „gewöhnliche“ Kurven angenommen.

Lösung: Die gesuchte Kurve ist ein *geodätischer Kreis*, [1]) d. h. eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung:

$$K_g = -\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Ferner muß $\lambda$ negativ sein.

Andeutungen: Zur Ableitung des Ausdrucks für $J$ wende den Green'schen Satz an, wobei sich auch die Bestimmung des Vorzeichens $\varepsilon$ ergibt. Wende die Euler'sche Differentialgleichung in der Weierstraß'schen Form an und mache von Gleichung (40) von § 26 Gebrauch. (Minding, Darboux)

3. Dieselbe Aufgabe mit der Modifikation, daß der Punkt $P_1$ nicht gegeben, sondern auf $\mathfrak{K}$ frei beweglich ist (§ 65, a)).

Dasselbe Resultat mit der weiteren Bedingung, daß die gesuchte Kurve im Punkt $P_1$ die Kurve $\mathfrak{K}$ *senkrecht* schneiden muß.

4. Für *Rotationsflächen* läßt sich die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Kreise auf Quadraturen zurückführen. (Minding, Darboux)

Andeutungen: Das Linienelement läßt sich in der Form schreiben

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2.$$

Ist dann: $\psi(u) = \int \varphi(u)\,du$, so sind die geodätischen Kreise dargestellt durch die Gleichung

$$v = \beta + \int \frac{(\alpha - \varepsilon\psi(u))\,du}{\varphi(u)\sqrt{\lambda^2\varphi^2(u) - (\alpha - \varepsilon\psi(u))^2}}.$$

Man mache von der Euler'schen Differentialgleichung in der Form (18) Gebrauch.

5. *Gleichgewichtslage eines auf einer gegebenen Fläche ohne Reibung aufliegenden schweren Fadens, der an seinen beiden Endpunkten befestigt ist* (§ 59, b) und d)).

Die positive $z$-Achse werde vertikal nach oben gewählt; die Fläche sei durch zwei Parameter $u, v$ dargestellt. Dann ist das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} z\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\,dt$$

zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\,dt = l.$$

Lösung: Die Weierstraß'sche Form der Euler'schen Differentialgleichung führt zu folgender charakteristischen Eigenschaft [2]) der gesuchten Kurve: Man konstruiere in einem Punkt $P$ der Kurve den Vektor $PM$ nach dem Mittelpunkt $M$ der geodätischen Krümmung; dann liegt der Endpunkt $N$ des zu $PM$ entgegengesetzten Vektors $PN$ in der konstanten Ebene

$$z + \lambda = 0.$$

---

[1]) in der Terminologie von Darboux.

[2]) In etwas anderer Form gegeben von Lindelöf-Moigno, *Leçons*, p. 314.

6. *Unter allen zwei gegebene Punkte $P_1$ und $P_2$ verbindenden Kurven, welche zusammen mit den Ordinaten dieser beiden Punkte und der x-Achse eine Fläche von gegebenem Inhalt begrenzen, diejenige zu bestimmen, welche durch Rotation um die x-Achse die Oberfläche kleinsten Inhalts erzeugt* (§ 59). (Euler)

Lösung: Es werde die Bedingung: $y \gtreqless 0$ hinzugefügt. Ist $\lambda^2 > 1$, so gehen die *Extremalen* aus den *verkürzten Zykloiden*

$$X = \frac{t}{\lambda} + \sin t, \qquad Y = \lambda + \cos t$$

durch die Transformation

$$X = -\frac{\gamma(x-\beta)\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda}, \qquad Y = \gamma y$$

hervor. Ist $\lambda^2 < 1$, so ersetze man $t$ durch $it$. Ist $\lambda^2 = 1$, so erhält man rationale Kurven 3. Ordnung. Außerdem sind sämtliche Geraden der Ebene Extremalen.

Die Möglichkeit *diskontinuierlicher Lösungen* zu untersuchen.

7. Die *Brachistochrone bei gegebener Länge* zu bestimmen. Die genauere Formulierung soll, abgesehen von der isoperimetrischen Bedingung, dieselbe sein wie in § 26, b).

Lösung: Die Extremalen lassen sich schreiben, wenn $\alpha^2 > \lambda^2$,

$$x + \beta = \frac{\alpha}{(\alpha^2-\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(2\lambda^2+\alpha^2)t - 4\alpha\lambda\sin t + \alpha^2\sin t\cos t\right],$$

$$y - y_1 + k = \frac{(\lambda - \alpha\cos t)^2}{(\alpha^2-\lambda^2)^2}.$$

Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s = \left[\frac{\alpha}{(\alpha^2-\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}(3\alpha\lambda t - 2(\lambda^2+\alpha^2)\sin t + \alpha\lambda\sin t\cos t)\right]_{t_1}^{t}.$$

Ist $\alpha^2 < \lambda^2$, so ist $t$ durch $it$ zu ersetzen. Für $\alpha^2 = \lambda^2$ werden die Extremalen algebraisch. (Euler, *Mechanica*, Bd. II, Art. 401)

8. Unter allen Kurven, welche von einem Punkt $A$ der $x$-Achse nach einem Punkt $B$ der oberen Halbebene gezogen werden können, und welche zusammen mit der Abszisse $AD$ und der Ordinate $DB$ einen *gegebenen Flächenraum* einschließen, diejenige zu bestimmen, welche zusammen mit ihrem Spiegelbild $AB'$ an der $x$-Achse den *kleinsten Widerstand* erfährt, wenn die Kurve $B'AB$ in ihrer Ebene in einem widerstehenden Medium in der Richtung der negativen $x$-Achse bewegt wird (Siehe Fig. 94; Fall eines flachen oder eines zylindrischen Schiffes mit horizontaler Direktrix).

Für den Widerstand findet man nach der Newton'schen Methode von p. 408 das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'^3\,dt}{x'^2 + y'^2}.$$

Aus denselben Gründen wie in § 54 wird man die Gefällbeschränkungen

$$x' \geqq 0, \qquad y' \geqq 0$$

hinzufügen.

Die Extremalen sind rationale Kurven 4. Ordnung mit drei Spitzen:

$$x = \frac{1}{\lambda}\frac{p^2-1}{(1+p^2)^2} + \alpha, \qquad y = \frac{1}{\lambda}\frac{2p^3}{(1+p^2)^2} + \beta, \tag{136}$$

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

(Euler, *Scientia Navalis*, Art. 531)

9. Den *Rotationskörper kleinsten Widerstandes bei gegebenem Volumen* zu bestimmen. Die genauere Formulierung soll, abgesehen von der isoperimetrischen Bedingung, dieselbe sein wie in § 54.

Die Extremalen sind gegeben durch die Gleichungen

$$\lambda x = \alpha + \frac{p^2-1}{2(1+p^2)^2} + \int \frac{(3-p^2)p^4\,dp}{(1+p^2)^3\sqrt{P}},$$

$$\lambda y = \frac{p^3}{(1+p^2)^2} + \frac{\sqrt{P}}{(1+p^2)^2},$$

wobei

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad P = p^6 + \gamma\lambda(1+p^2)^4.$$

Soll die Extremale die $x$-Achse treffen, so muß $\gamma = 0$ sein, und man erhält die Kurve (136) mit dem Wert $\beta = 0$.

Halbiert man den Rotationskörper mittels einer Meridianebene, so erhält man den Fall eines Schiffes, dessen zur Längsrichtung senkrechte Schnitte Halbkreise sind. (Euler, *Scientia Navalis*, Art. 690)

10. Die *reziproke Aufgabe zu Beispiel II* (p. 465) im einzelnen durchzuführen und daran das Mayer'sche Reziprozitätsgesetz zu verifizieren (§ 61, e)).

Andeutungen: Wähle den Punkt $P_1$ zum Koordinatenanfang. Die Konstantenbestimmung, und damit die Weierstraß'sche Konstruktion, führt auf die Aufgabe, eine Zykloide mit gegebener Basis und Spitze zu konstruieren, welche durch einen gegebenen Punkt geht, vgl. p. 208, Fußnote [2]).

11*. *Mit Hilfe der Fourier'schen Reihen einen direkten Beweis für den Satz zu geben, daß der Kreis unter allen geschlossenen Kurven von gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt einschließt* (§ 64, a)).

Andeutungen: Wähle den Bogen $s$ als unabhängige Variable zur Darstellung irgendeiner geschlossenen Kurve von der Länge $l$. Entwickle $x$ und $y$ in Fourier'sche Reihen, fortschreitend nach Kosinus und Sinus der Vielfachen von $2\pi/l$, und berechne daraus den Flächeninhalt. Vergleiche denselben mit dem Ausdruck für den Flächeninhalt eines Kreises von demselben Umfang $l$, den man durch Integration der Gleichung

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

nach $s$ zwischen den Grenzen 0 und $l$ erhält. (Hurwitz)

12. Die Aufgaben Nr. 2 und 3 im einzelnen durchzuführen für den Fall, wo die gegebene Fläche eine *Kugel* und die gegebene Kurve ein größter Kreis derselben ist (§ 59—65).[1]

Lösung: Die geodätischen Kreise sind *Kreise*. Ist $u$ das Komplement der Breite und $v$ die Länge, so lassen sich dieselben bei passender Wahl der Konstanten schreiben

$$\cos\gamma\cos u + \sin\gamma\sin u\cos(v-\beta) = \cos\alpha.$$

Ist $2\tau$ der Zentriwinkel des Kreisbogens von $P_1$ bis zum konjugierten, resp. Brennpunkt, so ist $\tau$ durch die folgenden Gleichungen zu bestimmen:

a) wenn $P_1$ gegeben ist

$$\sin\tau(\tau\cos\tau - \sin\tau) = 0;$$

b) wenn $P_1$ auf $\mathfrak{K}$ beweglich ist

$$\operatorname{tg}(2\tau) = 2\tau;$$

also in beiden Fällen dieselben Gleichungen wie in den entsprechenden ebenen Problemen (Beispiel II und XXII).

Die Möglichkeit der Weierstraß'schen Konstruktion zu diskutieren.

13*. Die Aufgabe Nr. 5 für den speziellen Fall der Kugel im einzelnen durchzuführen (*Sphärische Kettenlinie*).[2]

Andeutungen: Die Kugel werde dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a\cos u\cos v, \qquad y = a\cos u\sin v, \qquad z = a\sin v.$$

Dann ist die sphärische Kettenlinie dargestellt durch die Gleichung

$$v = \beta + \int \frac{a\alpha\,dz}{(a^2-z^2)\sqrt{R(z)}},$$

wo

$$R(z) = (z+\lambda)^2(a^2-z^2) - \alpha^2.$$

Die Größen $z, x+iy$ durch die Funktionen $\sigma(t)$, $\wp(t)$ auszudrücken, wenn

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Eingehende Diskussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln von $R(z)$ und entsprechende Fallunterscheidungen bei den elliptischen Funktionen. Diskussion der Gestalt des Fadens. Wann wird derselbe ganz auf der oberen Hemisphäre aufliegen, wann zum Teil frei herabhängen; im letzteren Fall Bestimmung der Übergangspunkte. Die Gleichung zur Bestimmung des konjugierten Punktes aufzustellen und zu diskutieren.

---

[1] Das isoperimetrische Problem auf der Kugel ist neuerdings von Bernstein ohne Benutzung der Variationsrechnung eingehend behandelt worden, Mathematische Annalen Bd. LX (1905), p. 117.

[2] Vgl. Gudermann, Crelle's Journal, Bd. XXXIII (1846), p. 189; Clebsch, ibid., Bd. LVII (1860), p. 103; Biermann, Berliner *Dissertation*, 1865; Schlegel, Programm des Wilhelms-Gymnasiums, Berlin 1884; Appell, Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. XIII (1885), p. 65.

14. Für das auf p. 518, Fußnote [1]), formulierte *isoperimetrische Problem mit $x$ als unabhängiger Variabeln* die Gleichung zur Bestimmung des konjugierten Punktes abzuleiten, entweder direkt oder aus den Resultaten von § 61, a) nach § 25, e).

Lösung: Ist

$$y = Y(x, \alpha, \beta, \lambda)$$

das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung und

$$N = g_y - \frac{d}{dx} g_{y'},$$

so lautet die Gleichung

$$\begin{vmatrix} Y_\alpha(x_0), & Y_\beta(x_0), & Y_\lambda(x_0) \\ Y_\alpha(x), & Y_\beta(x), & Y_\lambda(x) \\ \int\limits_{x_1}^{x} Y_\alpha N dx, & \int\limits_{x_1}^{x} Y_\beta N dx, & \int\limits_{x_1}^{x} Y_\lambda N dx \end{vmatrix} = 0, \tag{137}$$

wobei die dritte Zeile auch durch

$$Z_\alpha(x), \quad Z_\beta(x), \quad Z_\lambda(x)$$

ersetzt werden kann, wenn

$$Z(x, \alpha, \beta, \lambda) = \int\limits_{x_1}^{x} g(x, Y, Y') dx.$$

Dabei sind überall nach Ausführung der Differentiation $\alpha, \beta, \lambda$ durch $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0$ zu ersetzen, und $N$ ist für $\mathfrak{E}_0$ zu berechnen. (A. Mayer)

15*. *Das Integral*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

*bei festen Endpunkten mit der Nebenbedingung*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2 dx = l$$

*zu einem Minimum zu machen.*

Lösung: Die *Extremalen* sind

1. $y = \alpha \sin(\mu x + \beta)$, wenn $\lambda < 0$, $(\lambda = -\mu^2)$,
2. $y = \alpha x + \beta$, wenn $\lambda = 0$,
3. $y = \alpha \operatorname{Sh} \mu x + \beta \operatorname{Ch} \mu x$, wenn $\lambda > 0$, $(\lambda = \mu^2)$.

Im ersten Fall lautet die Gleichung zur Bestimmung des *konjugierten Punktes*

$$u(\sin u - u \cos u) = (u^2 - \sin^2 u) \cos(u + 2a),$$

wenn

$$u = \mu_0 (x - x_1), \qquad a = \mu_0 x_1 + \beta_0.$$

Sie zeigt, daß stets ein konjugierter Punkt im Intervall: $\pi \overline{<} u < 2\pi$ existiert. In den beiden andern Fällen existiert kein konjugierter Punkt.

*Konstantenbestimmung:* Je nachdem

$$3l \gtreqless (x_2 - x_1)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2),$$

gibt es eine[1]) Lösung vom ersten Typus, für welche: $0 < \mu(x_2 - x_1) < \pi$, oder eine Lösung vom zweiten Typus, oder eine vom dritten.

Hiernach die Weierstraß'sche Konstruktion und die Frage des absoluten Extremums zu diskutieren. (Lunn, Miles)

16*. Unter allen Kurven, welche zwei gegebene Punkte $P_1, P_2$ der oberen Halbebene ($y \gtreqless 0$) verbinden, ganz in dieser Halbebene verlaufen und durch Umdrehung um die $x$-Achse eine *Fläche von gegebenem Inhalt* erzeugen, diejenige zu bestimmen, für welche diese Fläche zusammen mit den beiden durch Rotation der Ordinaten von $P_1$ und $P_2$ erzeugten Kreisen das *größte Volumen* einschließt (*Unduloid, Nodoid*)[2]). (Euler)

Andeutungen: Erstes Integral

$$y^2 + \lambda y \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \beta.$$

Führt man statt $\lambda$ und $\beta$ zwei neue Konstanten $\varrho$ und $\gamma$ ein durch die Gleichungen

$$\varrho = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \beta} - \frac{\lambda}{2}, \qquad -\varrho \cos\gamma = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \beta} + \frac{\lambda}{2},$$

und setzt: $\varkappa = \sin\gamma$, $\varkappa' = \cos\gamma$, so lautet das *allgemeine Integral* in der Legendre'schen Bezeichnung:

$$x = \alpha + \varrho[\varkappa' F(\varkappa, t) + E(\varkappa, t)],$$
$$y = \varrho \Delta(\varkappa, t).$$

Die Extremalen werden beschrieben durch den einen Brennpunkt eines auf der $x$-Achse rollenden Kegelschnitts (Delaunay). Diskussion der Gestalt der Extremalen. Spezielle, resp. Grenzfälle: Halbkreis über der $x$-Achse, Kettenlinie und Gerade[3]) parallel der $x$-Achse

Diskussion der *konjugierten Punkte* (Howe, Hormann).

Ecken von etwaigen *diskontinuierlichen Lösungen* müssen auf der $x$-Achse liegen, und diskontinuierliche Lösungen müssen sich aus Stücken der $x$-Achse (§ 52) und aus Kreisbogen mit dem gleichen Radius, deren Mittelpunkte auf der $x$-Achse liegen, zusammensetzen (Todhunter).

Die *reziproke Aufgabe* ist identisch mit der Bestimmung der Gleichgewichtslage von Seifenblasen, welche die Ränder zweier koaxialer Kreisscheiben verbinden (Plateau).

---

[1]) Eine Ausnahme tritt ein für $y_2 = -y_1$.

[2]) Vgl. W. Howe, *Berliner Dissertation* 1887 und G. Hormann, *Göttinger Dissertation* 1887.

[3]) Vgl. dazu Almansi, Annali di Matematica (3), Bd. XII (1905), p. 1.

17*. Unter allen Kurven von *gegebener Länge*, welche zwei gegebene Punkte $P_1$ und $P_2$ der oberen Halbebene ($y \overline{>} 0$) verbinden, und ganz in dieser Halbebene liegen, diejenige zu bestimmen, welche zusammen mit den Ordinaten von $P_1$ und $P_2$ den *Rotationskörper größten Volumens* erzeugt. (Euler)

Lösung: Die Extremalen sind *elastische Kurven*, charakterisiert durch: $\frac{1}{r} = \frac{2y}{\lambda}$. Bezeichnet $\alpha$ den konstanten Wert von $H_{x'}$, so sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall I: $\alpha + \lambda < 0$.

$$x = \beta + \varrho[2E(\varkappa, t) - F(\varkappa, t)], \qquad y = 2\varkappa\varrho\cos t, \tag{138}$$

wobei

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda - \alpha}{2\lambda}, \qquad \lambda = -2\varrho^2.$$

Fall II: $\alpha + \lambda > 0$.

$$x = \beta + \varrho\left[E(\varkappa, t) - \left(1 - \frac{\varkappa^2}{2}\right)F(\varkappa, t)\right], \tag{139}$$

$$y = \varrho\,\Delta(\varkappa, t),$$

wobei

$$\varkappa^2 = \frac{2\lambda}{\lambda - \alpha}, \qquad \alpha - \lambda = \varrho^2.$$

Dazwischen der Fall $\alpha + \lambda = 0$, in welchem die elliptischen Integrale degenerieren.

Die Gestalt der Extremalen zu diskutieren. Die Kongruenz räumlicher Extremalen durch den Punkt $P_1$ aufzustellen sowie deren Funktionaldeterminante, wenigstens für spezielle Lagen des Punktes $P_1$. Womöglich etwas über die Existenz und Lage des konjugierten Punktes auszusagen.

18. Die *Euler'sche Regel* für den Fall abzuleiten, daß das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx = l$$

zu einem Extremum zu machen ist.

Andeutung: Vgl. p. 458, Fußnote [1]) und Aufgabe Nr. 45 auf p. 153. (Euler)

19. Die *Euler'sche Regel* für den Fall abzuleiten, daß das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

mit mehreren isoperimetrischen Bedingungen

$$\int_{x_1}^{x_2} g_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx = l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

zu einem Extremum zu machen ist.

Andeutung: Vgl. p. 458, Fußnote [1]), und Aufgabe Nr. 41 auf p. 151.

(SCHEEFFER)

20. Die Aufgabe Nr. 17 dahin abzuändern, daß nicht nur die Länge der Kurve, sondern auch der Inhalt der zwischen der Kurve, den Ordinaten von $P_1$ und $P_2$ und der $x$-Achse eingeschlossenen Fläche vorgeschrieben ist.

Lösung: Die Extremalen sind *elastische Kurven* und gehen aus den Gleichungen (138), resp. (139), hervor, indem man $y$ durch $y+\mu$ und $\alpha$ durch $\alpha+\mu^2$ ersetzt. (EULER)

21*. *Die Gleichgewichtslage eines elastischen, an seinen beiden Enden festgeklemmten Drahtes zu bestimmen.*[1])

Andeutungen: Man hat die potentielle Energie des Drahtes, d. h. wenn $r$ den Krümmungsradius bedeutet, — abgesehen von einem konstanten Faktor — das Integral

$$J=\int_0^l \frac{ds}{r^2}$$

bei gegebener Länge $l$ zu einem Minimum zu machen, während die Endpunkte und die Tangentenrichtungen in denselben gegeben sind. Die zulässigen Kurven sind von der Klasse $C''$ vorauszusetzen.

Die Aufgabe gehört zum Typus von Nr. 18, läßt sich aber auf ein Funktionenproblem vom einfachsten Typus mit zwei isoperimetrischen Bedingungen zurückführen, wenn man die Bogenlänge $s$ als unabhängige und den Tangentenwinkel $\theta$ als abhängige Variable einführt. Man hat dann das Integral

$$J=\int_0^l \theta'^2 ds$$

mit den Nebenbedingungen

$$\int_0^l \cos\theta\, ds = x_2 - x_1\,, \qquad \int_0^l \sin\theta\, ds = y_2 - y_1$$

und den Anfangsbedingungen: $\theta(o)=\theta_1$, $\theta(l)=\theta_2$ zu einem Minimum zu machen.

Lösung: Die *Extremalen* in der $x, y$-Ebene sind *elastische Kurven.* Ein Bogen der elastischen Kurve, welcher keinen Wendepunkt enthält, liefert stets ein starkes Minimum (vgl. Aufgabe Nr. 23, p. 147). (EULER, BORN)

22. Nach der Methode von Nr. 21 läßt sich die allgemeinere Aufgabe behandeln, das Integral

$$\int_0^l f(r)\, ds$$

bei gegebener Länge $l$ zu einem Extremum zu machen, z. B. die Aufgabe Nr. 44 von p. 152 mit der Modifikation, daß die Länge der Kurve vorgeschrieben ist.

[1]) Vgl. die *Dissertation* von M. BORN, Göttingen 1906, wo zahlreiche interessante Modifikationen der Aufgabe theoretisch und experimentell untersucht werden, besonders auch in Beziehung auf die Stabilität.

Lösung: Die *Extremalen* gehen aus den Kurven

$$x = \alpha(t - \sin t) - \beta \cos \frac{t}{2},$$

$$y = \alpha(1 - \cos t) + \beta \sin \frac{t}{2}$$

durch die allgemeinste rechtwinklige Koordinatentransformation hervor.

(Jellet)

23. Unter allen Kurven, welche die beiden Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ verbinden und zusammen mit den beiden Ordinaten $M_1 P_1$, $M_2 P_2$ ihrer Endpunkte und dem Stück $M_1 M_2$ der $x$-Achse eine *Fläche von gegebenem Inhalt* einschließen, diejenige zu bestimmen, für welche der *Schwerpunkt eben dieser Fläche am tiefsten* liegt, unter der Voraussetzung, daß die positive $y$-Achse vertikal nach oben gerichtet ist (§ 65, a)). (Euler)

Lösung: Eine *horizontale Gerade.* Da die Euler'sche Differentialgleichung degeneriert, so läßt sich der allgemeine Hinlänglichkeitsbeweis nicht anwenden. Man berechne daher direkt die totalen Variationen $\Delta J$ und $\Delta K$ und beweise daraus, daß die Gerade $\mathfrak{E}_0$ ein schwaches Minimum liefert; auch ein starkes, wenn man sich auf Vergleichskurven beschränkt, für welche $\Delta x \equiv 0$; dagegen kein starkes bei unbeschränkter Variation.

24. *Die Aufgabe Nr. 40 auf p. 151 als isoperimetrisches Problem zu lösen* (§ 65, a)).

Lösung: Bei Benutzung von rechtwinkligen Koordinaten ist

$$J = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) x' \, dt, \qquad K = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 x' \, dt.$$

Die beiden Endpunkte sind auf der $x$-Achse beweglich.

Die Euler'sche Differentialgleichung degeneriert in eine endliche Gleichung (§ 6, b)):

$$y = \sqrt{a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} - x^2}, \qquad 0 \leqq x \leqq a.$$

Die Anziehung des zugehörigen Rotationskörpers verhält sich zu derjenigen einer Kugel von gleichem Volumen wie $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{25}$.

Man versuche einen Hinlänglichkeitsbeweis,[1]) wenigstens für gewisse Klassen von Variationen, aus der zweiten Variation. (Gauss, Airy)

Bei Benutzung von Polarkoordinaten mit der positiven $x$-Achse als Achse ist

$$J = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} r \sin\theta \cos\theta \, \theta' \, dt, \qquad K = \frac{2\pi}{3} \int_{t_1}^{t_2} r^3 \sin\theta \, \theta' \, dt.$$

Die Lösung lautet: $r^2 = a^2 \cos\theta$. (Lindelöf-Moigno)

---

[1]) Einen Hinlänglichkeitsbeweis ohne Benutzung der Variationsrechnung gibt Schellbach, Journal für Mathematik, Bd. XLI (1851), p. 343.

25. *Einen homogenen Rotationskörper von gegebener Masse und möglichst kleinem Trägheitsmoment in Beziehung auf eine zur Rotationsachse senkrechte Achse zu konstruieren* (§ 65, a)).

Lösung: Ein *abgeplattetes Rotationsellipsoid*, dessen Achsen sich verhalten wie $1:\sqrt{2}$. Das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf einen in der Äquatorebene gelegenen Durchmesser verhält sich zum Trägheitsmoment einer gleich großen Kugel in Beziehung auf einen Durchmesser wie $\sqrt[3]{2}$ zu $4/3$. Es gelten ähnliche Bemerkungen wie bei den vorigen beiden Aufgaben. (CARLL)

26.[1]) Unter allen Kurven, welche von der Peripherie eines gegebenen Kreises $(O, r_1)$ nach einem gegebenen Punkt $P_2$ gezogen werden können, und für welche das *Potential des Sektors* mit dem Scheitel $O$ in Bezug auf den Punkt $O$ *einen vorgeschriebenen Wert* hat, diejenige zu bestimmen, welche für das *Potential des Bogens* in Beziehung auf den Punkt $O$ den *kleinsten Wert* liefert, wenn für beide das Newton'sche Anziehungsgesetz zugrunde gelegt wird und die Dichtigkeit als konstant vorausgesetzt wird (§ 65).

Lösung: Die gesuchte Kurve ist ein Kreis durch den Punkt $O$. Die Kongruenz (133) läßt sich in Polarkoordinaten schreiben

$$r = \frac{r_1 \cos(\theta - \beta)}{\cos\gamma},$$

$$z = \frac{r_1 [\sin(\theta - \beta) - \sin\gamma]}{\cos\gamma}.$$

Hiernach läßt sich die Frage des Brennpunktes und der Weierstraß'schen Konstruktion erledigen.

27. Für Beispiel XXII (p. 466) die Konstantenbestimmung im einzelnen durchzuführen.

28. Für Beispiel XXII den Enveloppensatz von § 65, b) zu verifizieren. (KNESER)

29*. *Es sei eine Kurve $\mathfrak{K}$ gegeben und auf ihr ein Punkt $P_2$; unter allen Kurven von gegebener Länge $l$, welche von Punkten der Kurve $\mathfrak{K}$ aus nach dem Punkt $P_2$ gezogen werden können, diejenige zu bestimmen, welche mit der Kurve $\mathfrak{K}$ den größten Flächenraum einschließt* (§ 65)[2]).

Die Kurve $\mathfrak{K}$ wird in der Form: $y = f(x)$ und von der Klasse $D''$ vorausgesetzt. Dann läßt sich der fragliche Flächeninhalt in der Form darstellen

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (f(x) - y)\, x'\, dt.$$

---

[1]) Unter allgemeineren Voraussetzungen in Beziehung auf das Anziehungsgesetz von HATON DE LA GOUPILLIÈRE gegeben, Association Française, 1893, 2de partie, p. 164; übrigens sind die dort über die Jacobi'sche Bedingung gegebenen Entwicklungen nicht richtig.

[2]) Vgl. Aufgabe 8 auf p. 446.

Lösung: Ein in positivem Sinn durchlaufener *Kreisbogen*, welcher in seinem Anfangspunkt $P_1$ auf $\mathfrak{K}$ senkrecht steht. Wird auf der Kurve $\mathfrak{K}$ als Parameter $\varkappa$ die Bogenlänge gewählt und die positive Richtung so gewählt, daß im Punkt $P_1$ der Kreisbogen zur Linken der positiven Tangente an $\mathfrak{K}$ abgeht ($\tilde{\theta}_1 = t_1$), so lautet die Kongruenz (133)

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}(\varkappa) - \lambda(\cos t - \tilde{x}'(\varkappa)), \\ y &= \tilde{y}(\varkappa) - \lambda(\sin t - \tilde{y}'(\varkappa)), \\ z &= \quad\quad - \lambda(t - \tilde{\theta}), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{x}'(\varkappa) = \cos\tilde{\theta}, \qquad \tilde{y}'(\varkappa) = \sin\tilde{\theta}.$$

Daraus ergibt sich für die Bestimmung des Brennpunktes die Gleichung

$$\varphi(t - t_1) + \frac{4\lambda_0}{\tilde{r}_1}\sin\left(\frac{t - t_1}{2}\right)\varphi\left(\frac{t - t_1}{2}\right) = 0,$$

wenn $\tilde{r}_1$ den Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt $P_1$ bedeutet, und

$$\varphi(t) = \sin t - t\cos t.$$

Die Diskussion dieser Gleichung führt zu folgendem Resultat: Nimmt die Krümmung $1/\tilde{r}_1$ von $+\infty$ bis $-\infty$ beständig ab, so bewegt sich der Brennpunkt $P_1''$ von $P_1$ ausgehend einmal in positivem Sinn um die ganze Kreisperipherie, woraus sich die auf p. 446 gegebene Erdmann'sche Ungleichung als notwendige Bedingung des Extremums ergibt.

Die Möglichkeit der Weierstraß'schen Konstruktion ist für jede spezielle Kurve $\mathfrak{K}$ einzeln zu diskutieren. (Kneser)

30*. *Gleichgewichtslage eines schweren Fadens, dessen erster Endpunkt auf einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ beweglich ist, während der zweite gegeben ist.* Insbesondere soll der Brennpunkt bestimmt werden (§ 59, d), § 65, § 39, b)).

Lösung: Die gesuchte Kurve ist eine *Kettenlinie* $\mathfrak{E}_0$ mit horizontaler Direktrix, welche die gegebene Kurve senkrecht schneidet. Die Kongruenz (133) läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}(\varkappa) + \alpha(t - \gamma), \\ y &= \tilde{y}(\varkappa) + \alpha(\operatorname{Ch} t - \operatorname{Ch}\gamma), \\ z &= \quad\quad \alpha(\operatorname{Sh} t - \operatorname{Sh}\gamma), \end{aligned}$$

wobei $\gamma$ durch die Gleichung

$$\tilde{x}'(\varkappa) + \tilde{y}'(\varkappa)\operatorname{Sh}\gamma = 0$$

als Funktion von $\varkappa$ definiert ist.

Es bezeichne

$$\Phi(t) = 2 - 2\operatorname{Ch}(t - \gamma) + (t - \gamma)\operatorname{Sh}(t - \gamma).$$

Ferner sei $\tilde{\theta}_1$ der Tangentenwinkel und $1/\tilde{r}_1$ die Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt $P_1$; der positive Sinn auf der Kurve $\mathfrak{K}$ werde so festgelegt, daß $\sin\tilde{\theta}_1 > 0$; endlich sei $\alpha_0$ der Wert der Konstanten $\alpha$ für die Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$. Dann lautet die Gleichung zur Bestimmung des *Brennpunktes* $P_1''$ der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$:

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = -\frac{\alpha_0}{\tilde{r}_1\sin\tilde{\theta}_1} + \cos\tilde{\theta}_1.$$

Die Diskussion derselben ergibt das folgende Resultat: Es bezeichne

$$k_0 = \frac{2\sin^2\frac{\tilde{\theta}_1}{2}\sin\tilde{\theta}_1}{\alpha_0}.$$

Wenn dann: $1/\tilde{r}_1 < -k_0$, so existiert ein Brennpunkt, und zwar bewegt sich derselbe vom Punkt $P_1$ bis $+\infty$, wenn, bei festgehaltenem $\tilde{\theta}_1$, $1/\tilde{r}_1$ von $-\infty$ bis $-k_0$ wächst.

Wenn dagegen: $1/\tilde{r}_1 \gtreqless -k_0$, so existiert kein Brennpunkt. (Kneser)

31. Die Aufgabe Nr. 6 dahin abgeändert, daß der Punkt $P_1$ *auf der $x$-Achse frei beweglich* ist, während $P_2$ im Innern der oberen Halbebene gegeben ist (§ 65).

Man nehme an, daß: $y > 0$ zwischen $P_1$ und $P_2$.

Lösung: Eine *Gerade*. Die Kongruenz (133) besteht aus Parabeln. Brennpunkte existieren nicht. Die Weierstraß'sche Konstruktion ist stets möglich, und es findet ein *absolutes Minimum* statt.

32. *Einen Rotationskörper von gegebener Oberfläche und möglichst großem Volumen zu konstruieren*[1]) (§ 65).

Die zulässigen Kurven in der $x, y$-Ebene, durch deren Rotation um die $x$-Achse die Oberfläche des Rotationskörpers erzeugt wird, sollen von einem nicht gegebenen Punkt der positiven $x$-Achse beginnen und durch das Innere der oberen Halbebene ($y > 0$) nach dem Koordinatenanfang führen.

Lösung: Ein in positivem Sinn durchlaufener Halbkreis; der Rotationskörper ist also eine *Kugel*. Ecken können im Innern der oberen Halbebene nicht auftreten. Die Kongruenz (133) lautet

$$x = \alpha - \lambda\cos t, \qquad y = -\lambda\sin t, \qquad z = \lambda^2(1-\cos t).$$

Daraus: $t_1'' = 2\pi$; der Halbkreis $\mathfrak{E}_0$ enthält also den Brennpunkt $P_1''$ nicht. Die Weierstraß'sche Konstruktion ist stets möglich mit derselben Fallunterscheidung wie in Beispiel XXII. Daher *absolutes Maximum*.

33. Die zur vorigen Aufgabe reziproke Aufgabe: Einen *Rotationskörper von gegebenem Volumen und kleinster Oberfläche* zu konstruieren. Daran das Mayer'sche Reziprozitätsgesetz zu verifizieren (§ 61, e), § 65).

Andeutungen: In der Kongruenz (133) haben $x, y$ dieselben Werte wie in Nr. 32; $z$ ist durch

$$z = -\frac{\lambda^3}{3}(2 - 3\cos t + \cos^3 t)$$

zu ersetzen. Die Weierstraß'sche Konstruktion ist stets möglich für Vergleichskurven, entlang welchen $\bar{z} \gtreqless 0$; jeder Vergleichskurve, für welche $\bar{z}$ in einer endlichen Anzahl von Segmenten negativ ist, kann man eine andere zuordnen, welche einen kleineren Wert für die Oberfläche liefert, und für welche $\bar{z} \gtreqless 0$.

34*. *Den Rotationskörper von gegebener Meridianlänge $l$ und größtem Volumen zu konstruieren.* (Aufgabe Nr. 17 so modifiziert, daß $P_1$ auf der $x$-Achse beweglich ist, während $P_2$ auf der $x$-Achse gegeben ist.)

[1]) Vgl. Aufgabe 39 auf p. 151.

Lösung: Die gesuchte Kurve $\mathfrak{E}_0$ wird dargestellt durch die Gleichungen (138) mit den Worten

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}, \qquad \varrho = \frac{l}{2K}, \qquad -\frac{\pi}{2} \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \frac{\pi}{2}.$$

Die Bestimmung der konjugierten Punkte führt auf die Gleichung

$$u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = 0,$$

welche zeigt, daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ *keinen konjugierten Punkt* enthält. Die Weierstraß'sche Konstruktion führt auf die Gleichung

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{y_3}{z_3} u.$$

Dieselbe zeigt, daß die *Weierstraß'sche Konstruktion stets ausführbar* ist mit denselben Fallunterscheidungen wie in Beispiel XXII; daher liefert der Bogen $\mathfrak{E}_0$ das *absolute Maximum*. Das Maximalvolumen ist

$$V = \frac{\pi l^3}{6 K^2}$$

und weicht um weniger als 1 % von dem Volumen eines abgeplatteten Rotationsellipsoids von derselben Meridianlänge ab, dessen Halbachsen sich wie 3 : 2 verhalten.

35*. Ändert man die Aufgabe Nr. 21 dahin ab, daß *der eine Endpunkt des Drahtes auf der $y$-Achse frei beweglich* sein soll, so geht die Aufgabe in der $s, \theta$-Ebene in ein isoperimetrisches Problem vom einfachsten Typus mit einem variabeln Endpunkt über (§ 65).

Hiernach die von Born, loc. cit. § 8 erhaltenen Resultate zu verifizieren und wo möglich weiter zu führen.