Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Zehntes Kapitel. Isoperimetrische Probleme

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Zehntes Kapitel.

Isoperimetrische Probleme.

§ 59. Die Euler'sche Regel.

Beim isoperimetrischen Problem[1]) vom einfachsten Typus, welches den Gegenstand des gegenwärtigen Kapitels bildet, besteht — zunächst für den Fall fester Endpunkte — die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ aller zulässigen Kurven aus allen gewöhnlichen Kurven $\mathfrak{C}$, welche von einem gegebenen Punkt P_1 nach einem zweiten gegebenen Punkt P_2 führen, ganz in einem vorgeschriebenen Bereich $\mathfrak{R}$ verlaufen *und dem Integral*

$$K_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} G(x, y, x', y')\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert l erteilen:

$$K_{\mathfrak{C}} = l. \tag{1}$$

Unter diesen zulässigen Kurven ist dann diejenige auszusuchen, welche dem Integral

$$J_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} F(x, y, x', y')\,dt$$

den kleinsten Wert erteilt.

Dies ist das Problem des „absoluten" Minimums, dem sich dann, ganz wie in § 3, b) und § 25, das „relative" an die Seite stellt.

Von den Funktionen F und G soll dabei vorausgesetzt werden, daß sie in x', y' positiv homogen von der Dimension 1 sind und überdies als Funktionen ihrer vier Variabeln von der Klasse C''' in dem Bereich

$$\mathfrak{T}: \qquad (x, y) \text{ in } \mathfrak{R}, \qquad (x', y') \neq (0, 0).$$

a) **Herstellung einer Schar von zulässigen Variationen:**

Wir nehmen an, wir hätten eine zulässige Kurve

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 \tag{2}$$

[1]) Vgl. p. 4. Statt „isoperimetrisches Problem" wird häufig „Problem des relativen Extremums" gesagt. Wir halten jedoch im Gebrauch der Worte absolutes und relatives Extremum an der in §§ 2 und 3 eingeführten Terminologie fest.

gefunden, welche in dem angegebenen Sinn ein relatives Minimum für das Integral J liefert, und welche ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt.

Es handelt sich dann zunächst darum, einen analytischen Ausdruck für eine einfach unendliche Schar von zulässigen Variationen dieser Kurve zu erhalten. Man überzeugt sich leicht, daß man infolge der „isoperimetrischen Bedingung“ (1) jetzt nicht mehr mit Variationen von dem einfachsten Typus (17) von § 26 auskommt, sondern daß es nötig wird, Variationen von dem allgemeineren Typus

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon), \qquad y = \bar{y}(t, \varepsilon) \tag{3}$$

heranzuziehen. Man kann zu solchen einparametrigen Scharen zulässiger Variationen nach WEIERSTRASS folgendermaßen gelangen:

Man wähle irgend zwei Funktionenpaare $\xi(t)$, $\eta(t)$ und $\xi_1(t)$, $\eta_1(t)$ von der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwinden:

$$\begin{aligned} &\xi(t_1) = 0, \qquad \eta(t_1) = 0; \qquad \xi_1(t_1) = 0, \qquad \eta_1(t_1) = 0, \\ &\xi(t_2) = 0, \qquad \eta(t_2) = 0; \qquad \xi_1(t_2) = 0, \qquad \eta_1(t_2) = 0, \end{aligned}$$

und setze

$$X(t, \varepsilon, \varepsilon_1) = \mathring{x}(t) + \varepsilon\xi(t) + \varepsilon_1\xi_1(t), \quad Y(t, \varepsilon, \varepsilon_1) = \mathring{y}(t) + \varepsilon\eta(t) + \varepsilon_1\eta_1(t),$$

wobei ε, ε_1 Konstante bedeuten.

Wenn wir diesen Konstanten nun noch die Bedingung auferlegen, daß sie der Relation

$$K(\varepsilon, \varepsilon_1) \equiv \int_{t_1}^{t_2} G(X, Y, X', Y')\,dt = l \tag{4}$$

genügen sollen, so stellen die Gleichungen

$$x = X(t, \varepsilon, \varepsilon_1), \qquad y = Y(t, \varepsilon, \varepsilon_1) \tag{5}$$

für jedes solche Wertsystem ε, ε_1 eine zulässige Variation der Kurve $\mathfrak{C}_0$ dar, wenn nur $|\varepsilon|$ und $|\varepsilon_1|$ hinreichend klein genommen werden.[1])

[1]) An dieser Stelle zweigt eine von HILBERT in seinen Vorlesungen gegebene elegante Modifikation des Weierstraß'schen Beweises der Euler'schen Regel ab. Statt die Gleichung (4) nach ε_1 aufzulösen, führt er die Aufgabe auf ein *gewöhnliches Extremum mit einer Nebenbedingung* zurück. Es muß nämlich jetzt die Funktion

$$J(\varepsilon, \varepsilon_1) \equiv \int_{t_1}^{t_2} F(X, Y, X', Y')\,dt$$

für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ ein Minimum mit der Nebenbedingung (4) besitzen. Daher muß es unter den Voraussetzungen und in der Bezeichnung des Textes eine von ε und ε_1 unabhängige Größe λ geben, so daß gleichzeitig

$$J_0 + \lambda K_0 = 0, \qquad J_1 + \lambda K_1 = 0.$$

Nun wird die Gleichung (4) befriedigt durch $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, weil ja die Kurve $\mathfrak{C}_0$ als zulässige Kurve der isoperimetrischen Bedingung (1) genügt. Ferner ist die Funktion $K(\varepsilon, \varepsilon_1)$ in der Umgebung der Stelle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ von der Klasse C''. Wenn wir daher ξ, η so wählen, daß die Größe

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right)_0 = \int_{t_1}^{t_2} (G_x \xi_1 + G_y \eta_1 + G_{x'} \xi_1' + G_{y'} \eta_1') dt \equiv K_1$$

von Null verschieden ist, so können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung (4) in der Umgebung der Stelle $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ eindeutig nach ε_1 auflösen, und die erhaltene Lösung: $\varepsilon_1 = \chi(\varepsilon)$ verschwindet für $\varepsilon = 0$, ist in der Umgebung dieser Stelle von der Klasse C'', und es ist

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon}\right)_0 = -\frac{K_0}{K_1}, \tag{6}$$

wenn wir analog

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon}\right)_0 = \int_{t_1}^{t_2} (G_x \xi + G_y \eta + G_{x'} \xi' + G_{y'} \eta') dt \equiv K_0$$

setzen; dabei soll überall der Index 0 das Nullsetzen von ε, resp. von ε und ε_1 andeuten.

Tragen wir für ε_1 die Funktion $\chi(\varepsilon)$ in (5) ein, so erhalten wir eine einparametrige Schar von Variationen der Kurve $\mathfrak{C}_0$:

$$x = X(t, \varepsilon, \chi(\varepsilon)) \equiv \bar{x}(t, \varepsilon), \qquad y = Y(t, \varepsilon, \chi(\varepsilon)) \equiv \bar{y}(t, \varepsilon), \tag{7}$$

welche alle verlangten Eigenschaften besitzt.

Aus (6) folgt, daß für diese Schar

$$\delta x = \varepsilon\left(\xi - \frac{K_0}{K_1}\xi_1\right), \qquad \delta y = \varepsilon\left(\eta - \frac{K_0}{K_1}\eta_1\right). \tag{8}$$

Es wirft sich jedoch die Frage auf, ob sich die Funktionen ξ_1, η_1 stets so wählen lassen, daß $K_1 \neq 0$. Dies ist nur dann unmöglich, wenn das Integral K_1 für alle Funktionen ξ_1, η_1 von den angegebenen Eigenschaften verschwindet. Das würde aber nach § 26, a)

Die zweite Gleichung bestimmt λ und zeigt, daß λ jedenfalls von ξ, η unabhängig ist; aus der ersten folgt dann die Euler'sche Regel.

Dies ist wohl der einfachste strenge Beweis der Euler'schen Regel. Daß wir denselben trotzdem im Text nicht gewählt haben, ist mit Rücksicht auf die Entwicklungen von § 60 über die zweite Variation geschehen.

Vgl. auch Kneser, *Euler und die Variationsrechnung,* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, Bd. XXV (1907), p. 50.

bedeuten, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ eine Extremale für das Integral K wäre. *Wir setzen daher in der Folge voraus, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ nicht zugleich Extremale für das Integral K ist,* d. h. also daß der Ausdruck

$$V \equiv G_{xy'} - G_{yx'} + G_1(x'y'' - y'x''), \tag{9}$$

berechnet für die Kurve $\mathfrak{C}_0$, im Intervall $[t_1 t_2]$ nicht identisch verschwindet.[1])

Da die Kurven der Schar (7) für beliebige Werte von ε der Gleichung $\overline{K} = l$ genügen, so folgt daraus durch Differentiation nach ε

$$\delta K = 0. \tag{10}$$

Umgekehrt gilt aber auch das folgende Lemma, welches später bei der zweiten Variation zur Anwendung kommen wird:

Sind ξ, η zwei vorgegebene Funktionen der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwinden und der Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} (G_x\xi + G_y\eta + G_{x'}\xi' + G_{y'}\eta')dt = 0 \tag{11}$$

genügen, so läßt sich stets eine einparametrige Schar von zulässigen Variationen konstruieren, für welche

$$\delta x = \varepsilon\xi, \qquad \delta y = \varepsilon\eta. \tag{12}$$

Denn wählen wir bei der obigen Konstruktion der Schar (7) für ξ, η die beiden vorgegebenen Funktionen, so ist wegen (11): $K_0 = 0$, und daher gehen die Gleichungen (8) in die verlangten Gleichungen (12) über.

Ist die Kurve $\mathfrak{C}_0$ von der Klasse C'', so können wir auf die Gleichung (11) die Transformation (18) von § 26 anwenden und erhalten das Lemma in der folgenden modifizierten Form, in welcher dasselbe von WEIERSTRASS gegeben worden ist:[2])

Ist w irgendeine Funktion der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwindet und der Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} Vw\,dt = 0 \tag{13}$$

---

[1]) Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so würden gewisse hinreichend kleine Stücke des Bogens $\mathfrak{C}_0$ wenigstens ein schwaches Extremum für das Integral K liefern, und es wäre daher unmöglich, ein solches Stück zu variieren (wenigstens im Sinn der schwachen Variation) ohne den Wert von K zu ändern (WEIERSTRASS).

[2]) Vgl. KNESER, Mathematische Annalen, Bd. LV, p. 100.

genügt, so kann man stets eine Schar zulässiger Variationen konstruieren, für welche

$$y'\delta x - x'\delta y = \varepsilon w.$$

Denn die Funktionen

$$\xi = \frac{wy'}{x'^2 + y'^2}, \qquad \eta = \frac{-wx'}{x'^2 + y'^2}$$

genügen alsdann allen Bedingungen des eben bewiesenen Lemmas, aus welchem dann die Behauptung unmittelbar folgt.

b) **Beweis der Euler'schen Regel:**

Nachdem wir so eine Schar von zulässigen Variationen konstruiert haben, schließen wir jetzt in der üblichen Weise, daß für dieselbe die Kurve $\mathfrak{C}_0$ den Bedingungen

$$\delta J = 0, \qquad \delta^2 J \gtreqless 0 \tag{14}$$

genügen muß. Wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$J_0 = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \xi + F_y \eta + F_{x'} \xi' + F_{y'} \eta') dt,$$

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \xi_1 + F_y \eta_1 + F_{x'} \xi_1' + F_{y'} \eta_1') dt,$$

so lautet die erste der beiden Bedingungen (14), mit der wir es hier zunächst ausschließlich zu tun haben, wenn wir für δx, δy ihre Werte aus (8) einsetzen,

$$J_0 - \frac{K_0}{K_1} J_1 = 0. \tag{15}$$

Wir denken uns jetzt die beiden Funktionen ξ_1, η_1 ein für allemal fest gewählt; dann ist der Quotient

$$\frac{J_1}{K_1} \equiv -\lambda$$

eine ganz bestimmte numerische Konstante, die jedenfalls von der Wahl der beiden Funktionen ξ, η unabhängig ist. Die Gleichung (15) lautet also jetzt

$$J_0 + \lambda K_0 = 0;$$

d. h. aber, wenn wir

$$F(x, y, x', y') + \lambda G(x, y, x', y') = H(x, y, x', y'; \lambda) \tag{16}$$

setzen: Es muß

$$\int_{t_1}^{t_2} (H_x \xi + H_y \eta + H_{x'} \xi' + H_{y'} \eta') dt = 0 \tag{17}$$

sein für alle Funktionen ξ, η von der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwinden. Daraus folgt aber nach § 5, c) und § 26, a) das folgende, unter dem Namen der „*Euler'schen Regel*“[1]) bekannte Resultat:

[1]) Euler hat die nach ihm benannte Regel durch eine sinnreiche Infinitesimalbetrachtung bewiesen (*Methodus inveniendi* etc. [1744], Kap. V, Art. 27). Er betrachtet die Kurve als Polygon von unendlich vielen Seiten, variiert dann die Ordinaten zweier aufeinanderfolgender Ecken desselben, aber so, daß die isoperimetrische Bedingung erfüllt bleibt. Seine Schlüsse entsprechen zwar den heutigen Begriffen von Strenge nicht mehr, sind aber immer noch befriedigender als das meiste, was sonst vor Weierstraß über diesen Gegenstand geschrieben worden ist.

Der erste strenge Beweis der Euler'schen Regel rührt von Weierstrass her (*Vorlesungen* 1877, oder früher); es ist im wesentlichen der im Text gegebene.

Man kann dem Beweis auch eine andere Wendung geben, welche sich mehr an die Schlußweise der älteren Variationsrechnung anschließt, indem man denselben folgendermaßen in zwei scharf getrennte Teile zerlegt:

Angenommen man hätte auf irgendeinem Weg eine Schar zulässiger Variationen der Kurve $\mathfrak{C}_0$ gefunden. Dann müssen für diese Schar gleichzeitig die beiden Gleichungen bestehen

$$\delta J = 0, \qquad \delta K = 0.$$

Daraus hat man nun weiter geschlossen: Also muß $\delta J = 0$ sein für alle Funktionen $\delta x, \delta y$, welche der Bedingung $\delta K = 0$ genügen. Dieser Schluß ist an sich falsch; er wird erst gerechtfertigt, nachdem das unter a) erwähnte Weierstraß'sche Lemma bewiesen ist, welches somit eine wesentliche Lücke der älteren Variationsrechnung ausfüllt.

Weiter zeigt man dann: Ist $\delta J = 0$ für alle Funktionen $\delta x, \delta y$, für welche $\delta K = 0$ ist, so muß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ der Differentialgleichung (I) genügen.

Der Beweis dieses Satzes reduziert sich (nach Anwendung der Lagrange'schen partiellen Integration auf δJ und δK) auf das folgende *Fundamentallemma für isoperimetrische Probleme*, welches sich dem Fundamentallemma von § 5 als Gegenstück an die Seite stellt:

Sind M und N zwei im Intervall $[t_1 t_2]$ stetige Funktionen von t, und ist

$$\int_{t_1}^{t_2} M w \, dt = 0$$

für alle Funktionen w der Klasse C', welche in t_1 und t_2 verschwinden und der Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} N w \, dt = 0$$

genügen, so gibt es eine Konstante λ derart, daß

$$M + \lambda N = 0 \qquad \textit{im ganzen Intervall } [t_1 t_2].$$

Dieses Fundamentallemma ist wohl zuerst von Bertrand bewiesen worden (Journal de Mathématiques, Bd. VII (1842), p. 55). Bekannter ist der Beweis von Du-Bois-Reymond geworden (Mathematische Annalen, Bd. XV (1879), *Jede Lösung des vorgelegten isoperimetrischen Problems, welche nicht zugleich Extremale für das Integral K ist, muß für einen gewissen Wert der Konstanten λ den Differentialgleichungen*

$$H_x - \frac{d}{dt} H_{x'} = 0, \qquad H_y - \frac{d}{dt} H_{y'} = 0 \tag{18}$$

genügen, welche mit der einen Differentialgleichung

$$H_{xy'} - H_{yx'} + H_1(x'y'' - y'x'') = 0 \tag{I}$$

äquivalent sind.

Dabei ist die Funktion H durch die Gleichung (16) definiert, und es ist

$$H_1 = \frac{H_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{H_{x'y'}}{x'y'} = \frac{H_{y'y'}}{x'^2}. \tag{19}$$

Dies ist aber *dieselbe Differentialgleichung, die man erhalten würde, wenn man das Integral*

$$\int (F + \lambda G) dt \tag{20}$$

ohne Nebenbedingung zu einem Extremum zu machen hätte.

Jede der Differentialgleichung (I) für einen bestimmten Wert von λ genügende Kurve soll nach Kneser wieder eine *Extremale* für das vorgelegte Variationsproblem heißen.

Zu den vorangehenden Resultaten fügen wir noch die folgenden Bemerkungen hinzu:

1. Nach der obigen Ableitung könnte es scheinen, als ob die Konstante λ noch von der Wahl der Funktionen ξ_1, η_1 abhängig wäre. Dem ist aber nicht so. Denn aus (15) folgt, wenn auch $K_0 \neq 0$,

$$\frac{J_1}{K_1} = \frac{J_0}{K_0} \, (= -\lambda).$$

---

p. 312, wo noch ein weiterer, von Reiff herrührender Beweis gegeben wird). Die entsprechende Verallgemeinerung für das allgemeinste isoperimetrische Problem bei einfachen Integralen findet man bei Scheeffer, ibid., Bd. XXV (1885), p. 584 und A. Mayer, ibid., Bd. XXVI (1886), p. 78.

Die oben hervorgehobene Lücke ist typisch für die ältere Variationsrechnung. Durch den Lagrange'schen δ-Algorithmus wird die Aufmerksamkeit auf die ersten Variationen $\delta x, \delta y$ abgelenkt, und man vergißt darüber nur zu leicht, daß man aus den Funktionen $\delta x, \delta y$ erst dann etwas schließen kann, wenn man imstande ist, von diesen auf eine Schar von zulässigen Vergleichskurven zurückzugehen. Erst Weierstrass hat hier Klarheit in die Variationsrechnung gebracht.

Die linke Seite dieser Gleichung enthält nur ξ_1, η_1, die rechte nur ξ, η; die beiden Funktionenpaare sind voneinander vollkommen unabhängig; daraus folgt aber, daß *die isoperimetrische Konstante λ auch von der Wahl der Funktionen ξ_1, η_1 unabhängig ist* (WEIERSTRASS).

2. Das allgemeine Integral[1]) der Differentialgleichung (I) enthält außer den beiden Integrationskonstanten noch die Konstante λ:

$$x = f(t, \alpha, \beta, \lambda), \qquad y = g(t, \alpha, \beta, \lambda). \tag{21}$$

Zur *Bestimmung der Konstanten* α, β, λ und der unbekannten Größen t_1, t_2 haben wir — im Fall einer kontinuierlichen Lösung — außer den vier Gleichungen, welche ausdrücken, daß die Kurve für $t = t_1$ durch den Punkt P_1, für $t = t_2$ durch den Punkt P_2 gehen soll, noch die isoperimetrische Bedingung $K = l$, also ebensoviele Gleichungen als Unbekannte.

3. Neben den der Differentialgleichung (I) genügenden Lösungen des Problems kann es dann möglicherweise noch *Lösungen* geben, *welche Extremalen für das Integral K sind*, sogenannte *„starre Lösungen"*,[2]) was in jedem einzelnen Fall durch eine besondere Untersuchung zu entscheiden ist. Man kann diese Lösungen unter die vorigen mit einbegreifen, wenn man einen zweiten Faktor $\varkappa$ einführt, der im allgemeinen Fall $= 1$ ist, während in diesem Ausnahmefall $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ ist, und

$$H \equiv \varkappa F + \lambda G$$

setzt.

4. Bei dem obigen Beweis der Euler'schen Regel war nicht vorausgesetzt, daß die Kurve $\mathfrak{C}_0$ von der Klasse C' ist; sie darf auch eine endliche Anzahl von Ecken haben. Nur hat man dann vor Ausführung der Differentiation nach ε und ε_1 die Integrale $J(\varepsilon, \varepsilon_1)$ und $K(\varepsilon, \varepsilon_1)$ in bekannter Weise in Summen von Integralen zu zerlegen, die Differentiation an den Summanden auszuführen und nach der Differentiation die Integrale wieder unter einem Integralzeichen zu vereinigen. Daraus folgt, daß *auch bei einer „diskontinuierlichen Lösung" die isoperimetrische Konstante λ entlang allen kontinuierlichen Segmenten ein und denselben konstanten Wert hat.*[3])

---

[1]) Näheres hierüber unter e); vgl. übrigens die auch hier gültigen Bemerkungen auf p. 204.

[2]) Vgl. p. 460, Fußnote [1]).

[3]) Diese wichtige Bemerkung rührt von A. MAYER (Mathematische Annalen, Bd. XIII, (1877), p. 65, Fußnote) und WEIERSTRASS her.

Ferner ergibt sich weiter aus (17) nach § 48, b): *In jeder Ecke $t = t_0$ einer diskontinuierlichen Lösung muß die Weierstraß'sche Eckenbedingung*

$$H_{x'}\Big|^{t_0-0} = H_{x'}\Big|^{t_0+0}, \qquad H_{y'}\Big|^{t_0-0} = H_{y'}\Big|^{t_0+0} \tag{22}$$

erfüllt sein.

c) Das spezielle isoperimetrische Problem:

Darunter verstehen wir die folgende Aufgabe, welche der ganzen Klasse von Aufgaben, mit der wir uns gegenwärtig beschäftigen, den Namen gegeben hat:

Beispiel II:[1] *Unter allen gewöhnlichen Kurven von gegebener Länge, welche zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 verbinden, diejenige zu bestimmen, welche mit der Sehne $P_1 P_2$ den größten Flächeninhalt einschließt.*

Wählen wir die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 zur x-Achse, mit $P_2 P_1$ als positiver Richtung, so haben wir das Integral[2])

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(xy' - yx')\,dt$$

zu einem Maximum zu machen, während das Integral

$$K = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert $2l$ besitzen soll, den wir größer als den Abstand $|P_1 P_2|$ voraussetzen.

Für den Bereich $\mathfrak{R}$ können wir hier die ganze x, y-Ebene wählen.

Da

$$H = \tfrac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

so erhalten wir

$$H_1 = \frac{\lambda}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}, \tag{23}$$

und daher wird die Differentialgleichung (I)

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{x'y'' - y'x''}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} = -\frac{1}{\lambda}. \tag{24}$$

Dieselbe zeigt, daß λ stets von Null verschieden ist, und daß die gesuchte Kurve ein *Kreis vom Radius* $|\lambda|$ ist, der im Sinn[3]) des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten beschrieben wird, je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$. Man verifiziert dies auch leicht direkt durch wirkliche Ausführung der Integration, indem man

---

[1]) Vgl. p. 3.

[2]) Hierdurch wird zugleich definiert, was wir unter dem fraglichen Flächeninhalt verstehen; vgl. GOURSAT, *Cours d'Analyse,* I, Nr. 94 und C. JORDAN, *Cours d'Analyse,* I, Nr. 102, 112 und II, Nr. 129—133. Man beachte, daß das Integral J entlang der Geraden $P_1 P_2$ gleich Null ist.

[3]) Vgl. p. 192.

die Differentialgleichung (24) in der Normalform (43) von § 27 schreibt, mit dem Bogen s als unabhängiger Variabeln. Die Integration ergibt bei passender Wahl des Anfangspunktes für den Bogen s

$$x - \alpha = -\lambda \cos\left(-\frac{s}{\lambda}\right), \qquad y - \beta = -\lambda \sin\left(-\frac{s}{\lambda}\right). \tag{25}$$

Da H_1 stets von Null verschieden ist, so können nach (22) und § 48, c), Zusatz I, *keine diskontinuierlichen Lösungen* auftreten.

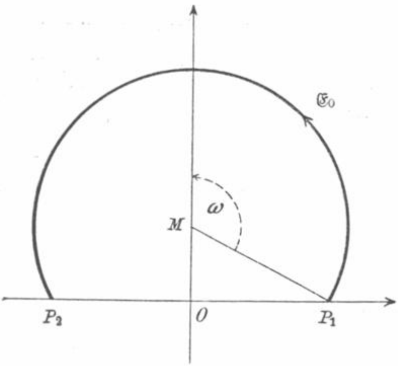

Fig. 106.

Konstantenbestimmung[1]: Wir wählen zur Vereinfachung den Mittelpunkt O der Strecke $P_1 P_2$ zum Koordinatenanfangspunkt, so daß $\alpha = 0$ wird. Ferner beschränken[2] wir uns auf Lösungen, welche nicht über einen vollen Kreisumfang hinausgehen, und auf den Fall $\lambda < 0$. Führt man dann den halben Zentriwinkel ω des Bogens $P_1 P_2$ ein, so normiert, daß derselbe zwischen 0 und π liegt, so ist

$$x_1 = -\lambda \sin\omega, \qquad l = -\lambda\omega, \qquad \beta = \lambda\cos\omega,$$

woraus sich zur Bestimmung von ω die transzendente Gleichung ergibt

$$\frac{x_1}{l}\,\omega = \sin\omega\,.$$

Da nach Voraussetzung $0 < x_1 < l$, so ergibt die Diskussion dieser Gleichung, daß dieselbe stets eine Wurzel ω zwischen 0 und π besitzt. Daraus folgt, daß es stets einen den Anfangsbedingungen genügenden Kreisbogen gibt, für welchen $\lambda < 0$.

Daneben gibt es, wenn x_1/l unter einer gewissen Grenze liegt, dann noch Lösungen, welche über einen vollen Kreisumfang hinausgehen.

Der *Ausnahmefall*, daß eine Extremale für das Integral K, d. h. also eine Gerade, Lösung des Problems ist, kann nur eintreten wenn $2l = |P_1 P_2|$. Alsdann ist aber diese Gerade überhaupt die einzige zulässige Kurve, kann also gar nicht den Bedingungen der Aufgabe gemäß variiert werden.

d) Gleichgewichtslage eines schweren, an seinen beiden Endpunkten befestigten Fadens:

Nach physikalischen Prinzipien ist die Aufgabe mit der folgenden äquivalent:

Beispiel XXI: *In einer vertikalen Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 diejenige Kurve von gegebener Länge zu ziehen, deren Schwerpunkt möglichst niedrig liegt.*

Wir nehmen die positive y-Achse vertikal nach oben; dann wird die Ordinate des Schwerpunktes gegeben durch den Quotienten

[1]) Vgl. C. Jordan, *Cours d'Analyse,* III, p. 498.

[2]) Vgl. § 61, c).

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}.$$

Da jedoch der Nenner bei allen zulässigen Kurven konstant bleibt, so haben wir einfach das Integral

$$J=\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

zu einem Minimum zu machen, während gleichzeitig das Integral

$$K=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

einen vorgeschriebenen Wert l haben soll, den wir **größer als** den Abstand $|P_1 P_2|$ voraussetzen.

Wir haben hier

$$H=(y+\lambda)\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Indem wir von der ersten der beiden Gleichungen (18) Gebrauch machen, erhalten wir sofort ein erstes Integral der Differentialgleichung (I):

$$H_{x'}\equiv\frac{(y+\lambda)x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\alpha.$$

Ist $\alpha=0$, so erhalten wir die Lösung[1])

$$x=\text{konst.},$$

welche nur dann statthaben kann, wenn die beiden gegebenen Punkte in derselben Vertikalen liegen.

Ist dagegen $\alpha\neq 0$, so erhalten wir als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (I) zwei Systeme von Kettenlinien

$$x=\beta+\alpha t,\qquad y+\lambda=\pm\alpha\,\mathrm{Ch}\,t. \tag{26}$$

Aus (22) folgt, daß die Konstante α selbst im Fall einer diskontinuierlichen Lösung entlang der ganzen Kurve denselben Wert behalten muß. Sehen wir daher von dem trivialen Fall $\alpha=0$ ab, so können nach § 48, c), Zusatz I, keine diskontinuierlichen Lösungen auftreten; denn

$$H_1(x,y,\cos\theta,\sin\theta;\lambda)=y+\lambda,$$

und dies ist im Fall $\alpha\neq 0$ entlang jeder Extremalen von Null verschieden.

Konstantenbestimmung[2]): Nehmen wir an, daß $x_1<x_2$, so muß $\alpha>0$ sein,

---

[1]) Die Gerade: $y+\lambda=0$ ist keine Extremale, da sie der zweiten der Differentialgleichungen (18) nicht genügt.

[2]) Nach Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; vgl. auch Appell, *Traité de Mécanique,* I, p. 191.

damit $t_1 < t_2$. Da die Kurve durch die beiden Punkte P_1 und P_2 gehen soll, so müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein

$$x_1 = \beta + \alpha t_1, \qquad y_1 + \lambda = \pm \alpha \operatorname{Ch} t_1,$$
$$x_2 = \beta_2 + \alpha t_2, \qquad y_2 + \lambda = \pm \alpha \operatorname{Ch} t_2.$$

Ferner muß die Kurve die vorgeschriebene Länge haben; das gibt die weitere Gleichung

$$\alpha(\operatorname{Sh} t_2 - \operatorname{Sh} t_1) = l.$$

Aus diesen fünf Gleichungen haben wir die Unbekannten $\alpha, \beta, \lambda, t_1, t_2$ zu bestimmen. Führt man statt t_1 und t_2 die beiden Größen

$$\mu = \frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{x_2 + x_1 - 2\beta}{2\alpha},$$
$$\nu = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{\alpha}$$

ein, so leitet man leicht aus den obigen Gleichungen die folgenden ab

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \pm 2\alpha \operatorname{Sh}\mu \operatorname{Sh}\nu, \\ l &= 2\alpha \operatorname{Ch}\mu \operatorname{Sh}\nu. \end{aligned} \tag{27}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Th}\mu = \pm \frac{y_2 - y_1}{l}. \tag{28}$$

Da nach Voraussetzung

$$l > \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} > |y_2 - y_1|,$$

so hat jede der beiden in (28) enthaltenen Gleichungen eine Lösung μ. Ferner folgt aus (27)

$$\sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2} = 2\alpha \operatorname{Sh}\nu, \quad \text{also} \quad \frac{\operatorname{Sh}\nu}{\nu} = \frac{\sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2}}{x_2 - x_1} \equiv k.$$

Da $k > 1$, so hat diese transzendente Gleichung eine positive Wurzel ν, wie sich aus der Diskussion der durch die Funktion $\operatorname{Sh}\nu - k\nu$ von ν dargestellten Kurve ergibt.

Nachdem μ und ν bestimmt sind, ergeben sich die Werte von $\alpha, \beta, \lambda, t_1, t_2$ unmittelbar.

Jedes der beiden Systeme von Kettenlinien (26) enthält also eine Kettenlinie, welche den Anfangsbedingungen genügt. [1]

e) Existenztheoreme für isoperimetrische Extremalen:

Aus dem Satz von § 27, a) folgt unmittelbar: Durch einen Punkt $A_0(a_0, b_0)$ im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ läßt sich in einer vorgeschriebenen Richtung γ_0 eine und nur eine Extremale der Klasse C' mit einem vorgeschriebenen Wert λ_0 der isoperimetrischen Konstanten λ konstruieren, vorausgesetzt daß

$$H_1(a_0, b_0, \cos\gamma_0, \sin\gamma_0; \lambda_0) \neq 0. \tag{29}$$

[1] Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 1—9, 18—22 am Ende dieses Kapitels.

Diese Extremale, die wir schreiben

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{30}$$

läßt sich dann wieder auf ein ganz bestimmtes Maximalintervall

$$t_1^* < t < t_2^*$$

fortsetzen.

Ist $t = t_0$ der Parameter des Punktes A_0, und sind T_1, T_2 zwei der Ungleichung

$$t_1^* < T_1 < t_0 < T_2 < t_2^*$$

genügende Werte, so läßt sich eine positive Größe d angeben derart, daß die folgenden Sätze gelten:

1. Ist

$$|x_0 - a_0| \lesseqgtr d, |y_0 - b_0| \lesseqgtr d, |\theta_0 - \gamma_0| \lesseqgtr d, |\lambda - \lambda_0| \lesseqgtr d,$$

so läßt sich auch durch den Punkt x_0, y_0 in der Richtung θ_0 eine Extremale mit dem Wert λ der isoperimetrischen Konstanten konstruieren. Bedeutet insbesondere t die Bogenlänge, so können wir diese Extremale unter Benutzung der in § 27, b) definierten Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ schreiben:

$$x = \mathfrak{X}(t - t_0; x_0, y_0, \theta_0, \lambda), \qquad y = \mathfrak{Y}(t - t_0; x_0, y_0, \theta_0, \lambda), \tag{31}$$

wobei wir im gegenwärtigen Fall noch λ mit unter die Argumente aufnehmen müssen. Dazu kommt dann noch für den Tangentenwinkel θ in Punkt t die Gleichung

$$\theta = \Theta(t - t_0;\ x_0, y_0, \theta_0, \lambda).$$

2. Für

$$x_0 = a_0, \quad y_0 = b_0, \quad \theta_0 = \gamma_0, \quad \lambda = \lambda_0$$

geht die Extremale (31) in die Extremale (30) über.

3. In dem Bereich

$$T_1 \lesseqgtr t \lesseqgtr T_2, |x_0 - a_0| \lesseqgtr d, |y_0 - b_0| \lesseqgtr d, |\theta_0 - \gamma_0| \lesseqgtr d, |\lambda - \lambda_0| \lesseqgtr d \tag{32}$$

sind die Funktionen

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_t, \mathfrak{X}_{tt};\quad \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}_{tt};\quad \Theta, \Theta_t$$

als Funktionen der Variabeln $t, x_0, y_0, \theta_0, \lambda$ von der Klasse C'.

4. In dem Bereich (32) ist

$$H_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{X}_t, \mathfrak{Y}_t; \lambda) \neq 0 \tag{33}$$

und

$$\frac{\partial(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta)}{\partial(x_0, y_0, \theta_0)} \neq 0. \tag{34}$$

Endlich liegt die Extremale (31) für jedes den Ungleichungen (32) genügende Wertsystem von $t, x_0, y_0, \theta_0, \lambda$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$.

Zum Beweis dieser Behauptungen schreibe man die Differentialgleichung (I) unter Einführung des Tangentenwinkels θ in der den Gleichungen (43) von § 27 entsprechenden Normalform und betrachte λ als vierte, der Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

genügende unbekannte Funktion. Auf das so erweiterte System von Differentialgleichungen wende man dann die Sätze von § 24 an.

Gibt man in (31) einer der Größen x_0, y_0, θ_0 einen festen numerischen Wert und betrachtet die übrigen beiden als Integrationskonstanten, so erhält man das bereits unter b) erwähnte „allgemeine Integral" der Differentialgleichung (I), zunächst in einer Normalform, von der man dann wie in § 27, c) zur allgemeinsten Form übergehen kann.

§ 60. Die zweite und vierte notwendige Bedingung.

Wir nehmen jetzt an, wir hätten eine Extremale

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2$$

gefunden, welche der Differentialgleichung (I) mit einem bestimmten Wert λ_0 der isoperimetrischen Konstanten genügt, von P_1 nach P_2 führt und dem Integral K den vorgeschriebenen Wert l erteilt. Weiter setzen wir voraus, die Kurve $\mathfrak{E}_0$ sei von der Klasse C''' und liege ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$, und endlich verschärfen wir die in § 59, a) über die Funktion V gemachte Annahme dahin, daß sie entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ in keinem noch so kleinen Teilintervall von $[t_1 t_2]$ identisch verschwinden soll.

a) Das Analogon der Legendre'schen Bedingung:

Zur Aufstellung weiterer notwendiger Bedingungen wenden wir uns nunmehr zunächst zur Untersuchung der zweiten Variation. Wir betrachten irgendeine einparametrige Schar von zulässigen Variationen (3); für dieselbe muß dann nach (14)

$$\delta^2 J \gtreqless 0 \tag{35}$$

sein. Bei der Bildung von $\delta^2 J$ haben wir zu beachten, daß im gegenwärtigen Fall der Integrand nicht nur die schon beim Problem ohne Nebenbedingungen (§ 28) auftretende quadratische Form in $\delta x, \delta y,$

$\delta x', \delta y'$ enthält, sondern nach § 8, b) außerdem noch eine lineare Form der zweiten Variationen, nämlich

$$F_x \delta^2 x + F_y \delta^2 y + F_{x'} \delta^2 x' + F_{y'} \delta^2 y',$$

weil wir es hier nicht mit Variationen von dem einfachsten Typus (17) von § 26 zu tun haben, sondern mit solchen von dem allgemeineren Typus (3).

Diese zweiten Variationen lassen sich nun aber eliminieren,[1]) wenn man die Ungleichung (35) mit der aus der Differentiation der Gleichung: $\overline{K} = l$ nach ε folgenden Gleichung: $\delta^2 K = 0$ in der Weise kombiniert, daß man die letztere mit der Konstanten λ_0 multipliziert zur ersteren addiert:

$$\delta^2 J + \lambda_0 \delta^2 K \gtreqless 0. \tag{36}$$

Die Glieder, welche zweite Variationen der unbekannten Funktionen enthalten, vereinigen sich nunmehr zu dem Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (H_x \delta^2 x + H_y \delta^2 y + H_{x'} \delta^2 x' + H_{y'} \delta^2 y') dt, \tag{37}$$

wobei in der Funktion H die Konstante $\lambda = \lambda_0$ zu setzen ist.

Wendet man auf dieses Integral die Lagrange'sche partielle Integration an und beachtet einerseits, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ den Differentialgleichungen (18) mit dem Wert λ_0 der isoperimetrischen Konstanten genügt, andererseits, daß die Funktionen $\delta^2 x, \delta^2 y$ in t_1 und t_2 verschwinden, wie sich durch zweimalige Differentiation der in ε identischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_1, \varepsilon) &= x_1, & \bar{y}(t_1, \varepsilon) &= y_1, \\ \bar{x}(t_2, \varepsilon) &= x_2, & \bar{y}(t_2, \varepsilon) &= y_2 \end{aligned}$$

ergibt, so erkennt man, daß das Integral (37) gleich Null ist, und daß sich daher die Ungleichung (36) auf

$$\delta^2 J \equiv \int_{t_1}^{t_2} [H_{xx} (\delta x)^2 + \ldots + H_{y'y'} (\delta y')^2] dt \gtreqless 0 \tag{38}$$

reduziert. Diese Ungleichung muß bestehen für jedes Funktionenpaar δx, δy, welches aus einer einparametrigen Schar von zulässigen Variationen durch den δ-Prozeß ableitbar ist. Die Gesamtheit dieser Funktionenpaare ist aber nach dem Weierstraß'schen Lemma von § 59, a) identisch mit der Gesamtheit derjenigen Funktionenpaare

[1]) Vgl. eine hierauf bezügliche Bemerkung von Swift, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. XIV (1908), p. 373.

$\delta x, \delta y$, welche in $[t_1 t_2]$ von der Klasse D' sind, in t_1 und t_2 verschwinden und überdies der Gleichung $\delta K = 0$ genügen. Für alle diese Funktionenpaare muß daher die Ungleichung (38) gelten.

Auf das Integral auf der linken Seite von (38) kann man jetzt die Weierstraß'sche Transformation von § 28, a) anwenden und gleichzeitig auf δK die Transformation (18 a) von § 26, so daß in beiden Integralen δx und δy nur mehr in der Verbindung

$$y'\delta x - x'\delta y = \varepsilon w$$

vorkommen. Wendet man dementsprechend das Weierstraß'sche Lemma in der zweiten am Ende von § 59, a) gegebenen Form an, so erhält man den folgenden Satz:[1])

Für ein Minimum des Integrals J mit der Nebenbedingung $K = l$ ist weiter notwendig, daß das Integral

$$\delta^2 J \equiv \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[H_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + H_2 w^2 \right] dt \gtreqless 0 \tag{39}$$

für alle Funktionen w von der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwinden, und für welche

$$\int_{t_1}^{t_2} V w\, dt = 0. \tag{13}$$

Dabei sind die Funktionen H_1, H_2 aus der Funktion $H = F + \lambda_0 G$ genau so abgeleitet wie in § 28, a) die Funktionen F_1, F_2 aus der Funktion F; die Funktion V ist durch (9) definiert, und die Funktionen H_1, H_2, V sind für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ berechnet.

Hieraus folgt nun leicht der Satz:

Die zweite notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals J mit der Nebenbedingung $K = l$ ist, daß

$$H_1 \gtreqless 0 \tag{II}$$

entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$, d. h.

$$H_1(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t), \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t); \lambda_0) \gtreqless 0 \quad in\ [t_1 t_2].$$

Zum Beweis können wir genau wie in § 9, b) und § 28, a) verfahren, nur daß jetzt noch zu zeigen ist, daß wir zu jedem vor-

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1879. Man kann dieses Resultat auch ohne Benutzung des Weierstraß'schen Lemmas ableiten, indem man in konsequenter Weiterführung des Hilbert'schen Gedankengangs (p. 458, Fußnote [1])), die zweite notwendige Bedingung dafür entwickelt, daß die Funktion $J(\varepsilon, \varepsilon_1)$ für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ ein Minimum mit der Nebenbedingung $K(\varepsilon, \varepsilon_1) = l$ besitzen soll; vgl. Bolza, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. XV (1909), p. 213.

geschriebenen Teilintervall $[\tau'\tau'']$ von $[t_1 t_2]$ eine Funktion w konstruieren können, welche in $[\tau'\tau'']$ von der Klasse C' ist, in τ' und τ'' verschwindet, ohne im ganzen Intervall identisch zu verschwinden, und welche der Bedingung (13) genügt. Dazu wähle man zwei beliebige Funktionen w_1, w_2, welche den ersten beiden der drei aufgezählten Bedingungen genügen, und überdies w_2 so, daß

$$\int_{\tau'}^{\tau''} V w_2 dt \neq 0,$$

was nach der im Eingang dieses Paragraphen über die Funktion V gemachten Voraussetzung stets möglich ist. Dann setze man: $w = w_1 + cw_2$ und bestimme die Konstante c so, daß (13) erfüllt ist.

Die Bedingung (II) ist das *Analogon der Legendre'schen Bedingung* für das isoperimetrische Problem. Wir werden dieselbe in der ganzen weiteren Entwicklung in der stärkeren Form:

$$H_1 > 0, \tag{II'}$$

entlang $\mathfrak{E}_0$, voraussetzen. Es folgt dann nach § 27, c), daß sich die Extremale $\mathfrak{E}_0$ über das Intervall $[t_1 t_2]$ hinaus fortsetzen läßt, und es gelten für die so fortgesetzte Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ die Sätze von § 59, e). Insbesondere folgt, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ aus dem allgemeinen Integral (21) der Differentialgleichung (I) abgeleitet werden kann, indem man den Größen α, β, λ gewisse spezielle Werte $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \lambda = \lambda_0$ gibt, so daß also

$$\mathring{x}(t) \equiv f(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0), \qquad \mathring{y}(t) \equiv g(t, \alpha_0, \beta_0, \lambda_0). \tag{40}$$

b) **Die Weierstraß'sche Bedingung:**

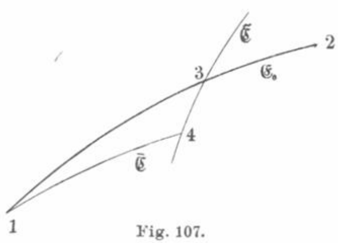

Fig. 107.

Um spätere Entwicklungen nicht unterbrechen zu müssen, schließen wir gleich hier die Weierstraß'sche Bedingung an. Wir wenden dasselbe Verfahren wie in § 30, a) an, wobei jedoch einige Modifikationen nötig werden. Unter Festhaltung der dortigen Bezeichnung handelt es sich darum, eine einparametrige Schar von Vergleichskurven

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon), \qquad y = \bar{y}(t, \varepsilon)$$

aufzustellen, welche nicht nur, wie dort, die Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, 0) &= \mathring{x}(t), & \bar{y}(t, 0) &= \mathring{y}(t), \\ \bar{x}(t_1, \varepsilon) &= x_1, & \bar{y}(t_1, \varepsilon) &= y_1, \\ \bar{x}(t_3, \varepsilon) &= \tilde{x}(\tau_3 - \varepsilon), & \bar{y}(t_3, \varepsilon) &= \tilde{y}(\tau_3 - \varepsilon), \end{aligned}$$

sondern auch die *isoperimetrische Bedingung*

$$\overline{K}_{14} + \widetilde{K}_{43} = K_{13} \tag{41}$$

erfüllen. Dazu setzen wir die Vergleichskurven in der Form an

$$x = \mathring{x}(t) + \varepsilon_1 \xi_1(t) + \varepsilon_2 \xi_2(t) + \varepsilon_3 \xi_3(t),$$
$$y = \mathring{y}(t) + \varepsilon_1 \eta_1(t) + \varepsilon_2 \eta_2(t) + \varepsilon_3 \eta_3(t),$$

wo ξ_i, η_i willkürliche Funktionen von t von der Klasse C' sind, welche in t_1 verschwinden, und bestimmen nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ als Funktionen von ε durch die Gleichungen:

$$x_3 + \varepsilon_1 \xi_1(t_3) + \varepsilon_2 \xi_2(t_3) + \varepsilon_3 \xi_3(t_3) = \tilde{x}(t_3 - \varepsilon),$$
$$y_3 + \varepsilon_1 \eta_1(t_3) + \varepsilon_2 \eta_2(t_3) + \varepsilon_3 \eta_3(t_3) = \tilde{y}(t_3 - \varepsilon),$$
$$\overline{K}_{14} + \widetilde{K}_{43} = K_{13}.$$

Dies ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen stets möglich, wenn

$$\begin{vmatrix} \xi_1(t_3) & \xi_2(t_3) & \xi_3(t_3) \\ \eta_1(t_3) & \eta_2(t_2) & \eta_3(t_3) \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

wobei

$$K_i = \int_{t_1}^{t_3} [G_x \xi_i + G_y \eta_i + G_{x'} \xi_i' + G_{y'} \eta_i'] \, dt.$$

Das ist stets leicht zu erreichen; man wähle z. B. ξ_1, η_1 so, daß

$$\xi_1(t_3) = 0, \qquad \eta_1(t_3) = 0, \qquad K_1 \neq 0,$$

was nach der im Eingang dieses Paragraphen über die Funktion V gemachten Annahme stets möglich ist; ferner

$$\xi_2(t_3) = 0, \qquad \eta_2(t_3) \neq 0, \qquad \xi_3(t_3) \neq 0.$$

Nachdem so eine allen Anforderungen genügende Schar von Vergleichskurven hergestellt ist, muß für alle hinreichend kleinen positiven Werte von ε die Ungleichung

$$\overline{J}_{14} + \widetilde{J}_{43} \overline{\overline{>}} J_{13}$$

stattfinden, welche man mit Rücksicht auf (41) auch schreiben kann:

$$(\overline{J}_{14} + \lambda_0 \overline{K}_{14}) + (\widetilde{J}_{43} + \lambda_0 \widetilde{K}_{43}) \overline{\overline{>}} J_{13} + \lambda_0 K_{13}.$$

Die weitere Behandlung dieser Ungleichung führt nun ganz wie in § 30, a) zu dem folgenden Resultat: Es bezeichne

$$\begin{gathered} \mathcal{E}(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}'; \lambda) = \\ H(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}'; \lambda) - \tilde{x}' H_{x'}(x, y, x', y'; \lambda) - \tilde{y}' H_{y'}(x, y, x', y'; \lambda). \end{gathered} \tag{42}$$

Dann gilt der Satz[1]):

Die vierte notwendige Bedingung für ein starkes Minimum des Integrals J mit der Nebenbedingung $K = l$ besteht darin, daß

$$\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}; \lambda_0) \geqq 0 \tag{IV}$$

entlang[2]) *dem Extremalenbogen* $\mathfrak{E}_0$.

§ 61. Die Weierstraß'sche Theorie der konjugierten Punkte beim isoperimetrischen Problem.

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß, soweit es sich um die Bedingungen (I), (II) und (IV) handelt, das vorgelegte isoperimetrische Problem äquivalent ist mit dem Problem, das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (F + \lambda_0 G) dt \tag{43}$$

ohne Nebenbedingung zu einem Minimum zu machen.

Man hat lange geglaubt, daß beide Probleme überhaupt äquivalent seien; dies ist jedoch falsch, wie zuerst LUNDSTRÖM[3]) gefunden hat. Die weitere Untersuchung der zweiten Variation zeigt nämlich, daß auch beim isoperimetrischen Problem ein konjugierter Punkt P_1' existiert, über welchen hinaus ein Extremum nicht mehr stattfinden kann; dieser Punkt fällt aber im allgemeinen nicht mit dem konjugierten Punkt für das Integral (43) ohne Nebenbedingung, den wir mit $\overline{P}_1'$ bezeichnen wollen, zusammen, vielmehr ist im allgemeinen $P_1' \succ \overline{P}_1'$, wie dies auch a priori nicht anders zu erwarten ist. Denn beim Problem ohne Nebenbedingung muß die Ungleichung (39) für alle Funktionen w der Klasse D' erfüllt sein, welche in t_1 und t_2 verschwinden, beim isoperimetrischen Problem dagegen nur für diejenigen, welche außerdem noch der Bedingung (13) genügen; daraus folgt schon, daß sicher $P_1' \succeqq \overline{P}_1'$ sein muß.

Bei der dritten notwendigen Bedingung hört also die Äquivalenz der beiden Probleme auf.

a) Definition der konjugierten Punkte:

Wir wenden zunächst auf das Integral (39) die Jacobi'sche Transformation von § 10, b) an. Ist $[\tau_1 \tau_2]$ irgend ein Teilintervall von

[1]) Nach WEIERSTRASS, *Vorlesungen* 1879.

[2]) In demselben Sinn wie in § 30, a).

[3]) Vgl. „*Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique*“, Nova acta reg. soc. sc. Upsaliensis, Ser. 3, Bd. VII (1869); vgl. auch A. MAYER, Mathematische Annalen, Bd. XIII (1878), p. 54.

$[t_1 t_2]$, und wählen wir die Funktion w identisch gleich Null außerhalb $[\tau_1 \tau_2]$, gleich Null in τ_1 und τ_2 und von der Klasse C'' in $[\tau_1 \tau_2]$, so können wir hiernach die zweite Variation schreiben

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} w\, \Psi(w)\, dt, \tag{44}$$

wobei

$$\Psi(w) = H_2 w - \frac{d}{dt}\left(H_1 \frac{dw}{dt}\right).$$

Da wir aber nur solche Funktionen w betrachten, welche der Gleichung (13) genügen, so können wir in den Ausdruck für $\delta^2 J$ dadurch eine willkürliche Konstante einführen, daß wir das mit einer Konstanten μ multiplizierte Integral

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} V w\, dt = 0$$

hinzuaddieren. Wir erhalten so:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} w[\Psi(w) + \mu V]\, dt. \tag{45}$$

Wir versuchen nun zunächst, ähnlich wie in § 10, b), die zweite Variation durch passende Wahl der Größen τ_1, τ_2, μ und der Funktion w gleich Null zu machen. Dazu betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Psi(w) + \mu V = 0. \tag{46}$$

Das allgemeine Integral derselben läßt sich mittels eines dem Jacobi'schen Verfahren von § 12, b) und § 29, a) analogen Verfahrens leicht angeben. Denn setzen wir in die Differentialgleichung

$$H_x - \frac{d}{dt} H_{x'} = 0$$

mit unbestimmtem λ für x, y das allgemeine Integral (21) ein, differentiieren nach α, β, λ und setzen schließlich $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\lambda = \lambda_0$, so ergibt sich das folgende Resultat:

Bezeichnen wir

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= g_t f_\alpha - f_t g_\alpha, \\ \vartheta_2(t) &= g_t f_\beta - f_t g_\beta, \\ \vartheta_3(t) &= g_t f_\lambda - f_t g_\lambda, \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \alpha_0,\ \beta = \beta_0,\ \gamma = \gamma_0,$$

so ist

$$\Psi(\vartheta_1(t)) = 0, \qquad \Psi(\vartheta_2(t)) = 0, \qquad \Psi(\vartheta_3(t)) + V = 0. \tag{47}$$

Die ersten beiden dieser Gleichungen werden genau so erhalten wie die analogen Resultate in § 29, a). Bei Ableitung der dritten Gleichung hat man sich zu erinnern, daß die Größe λ nicht nur implizite in den Funktionen f, g vorkommt, sondern auch explizite als Faktor von G in $H = F + \lambda G$. Die Ausführung der Differentiation nach λ ergibt daher zunächst die Gleichung

$$y' \Psi(\vartheta_3(t)) + G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} = 0,$$

woraus dann das obige Resultat auf Grund der nach Gleichung (23) von § 26 gültigen Relation

$$G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} = y' V$$

folgt.

Aus den Gleichungen (47) ergibt sich, daß die Funktion

$$w = c_1 \vartheta_1(t) + c_2 \vartheta_2(t) + \mu \vartheta_3(t) \tag{48}$$

der Differentialgleichung (46) genügt, und da sie zwei willkürliche Konstanten c_1, c_2 enthält, so ist sie zugleich das allgemeine Integral. Dasselbe kann nur dann in einem Intervall $[\tau_1 \tau_2]$ identisch verschwinden, wenn $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\mu = 0$. Denn wäre $w \equiv 0$, so würde zunächst aus (46) folgen, daß $\mu = 0$ sein muß, da $V \not\equiv 0$ vorausgesetzt ist; weiter würde dann $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ folgen, da $\vartheta_1(t)$ und $\vartheta_2(t)$ zwei nach § 29, a) linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung $\Psi(w) = 0$ sind.

Sollte es nun möglich sein, die Konstanten c_1, c_2, μ und einen der Ungleichung

$$t_1 < t_1' \overline{\gtrless} t_2$$

genügenden Wert t_1' so zu bestimmen, daß gleichzeitig

$$w(t_1) \equiv c_1 \vartheta_1(t_1) + c_2 \vartheta_2(t_1) + \mu \vartheta_3(t_1) = 0,$$
$$w(t_1') \equiv c_1 \vartheta_1(t_1') + c_2 \vartheta_2(t_1') + \mu \vartheta_3(t_1') = 0,$$
$$\int_{t_1}^{t_1'} V w\, dt \equiv c_1 \int_{t_1}^{t_1'} V \vartheta_1\, dt + c_2 \int_{t_1}^{t_1'} V \vartheta_2\, dt + \mu \int_{t_1}^{t_1'} V \vartheta_3\, dt = 0,$$

so könnte man die zweite Variation durch eine allen Bedingungen genügende Funktion w gleich Null machen, indem man w in $[t_1 t_1']$ gleich dem Integral (48) mit diesen speziellen Werten von c_1, c_2, μ setzt, dagegen identisch gleich Null in $[t_1' t_2]$. Daraus würde dann, wie wir wenigstens als wahrscheinlich erwarten dürfen, folgen, daß $\Delta J < 0$.

Wir können somit den folgenden Satz[1]) aussprechen:

Soll $\delta^2 J > 0$ *sein für alle zulässigen, in* $[t_1 t_2]$ *nicht identisch verschwindenden Funktionen* w, *so muß*

$$D(t, t_1) \equiv \begin{vmatrix} \vartheta_1(t_1), & \vartheta_2(t_1), & \vartheta_3(t_1) \\ \vartheta_1(t), & \vartheta_2(t), & \vartheta_3(t) \\ \int\limits_{t_1}^{t} V\vartheta_1 dt, & \int\limits_{t_1}^{t} V\vartheta_2 dt, & \int\limits_{t_1}^{t} V\vartheta_3 dt \end{vmatrix} \neq 0 \tag{49}$$

sein für

$$t_1 < t \overline{\gtrless} t_2.$$

Indem wir mit t_1' die zunächst[2]) auf t_1 folgende Wurzel der Gleichung

$$D(t, t_1) = 0$$

bezeichnen, können wir die Bedingung (49) auch schreiben

$$t_2 < t_1'.$$

Der dem Wert t_1' auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ entsprechende Punkt P_1' heißt wieder *der zu* P_1 *konjugierte Punkt.*

Eine leichte Modifikation der obigen Schlußweise führt zu dem folgenden, wenigstens scheinbar allgemeineren Resultat: Wenn

$$D(t'', t') = 0$$

für zwei den Ungleichungen

$$t_1 \overline{\gtrless} t' < t'' \overline{\gtrless} t_2$$

genügende Werte t', t'', so kann man $\delta^2 J = 0$ machen durch eine zulässige Funktion w.

b) **Eigenschaften der Funktion** $D(t, t_1)$:

Für die weitere Entwicklung haben wir den folgenden Hilfssatz[3]) über die Funktion $D(t, t_1)$ nötig:

Die Funktion $D(t, t_1)$ *wechselt im Punkt* t_1' *ihr Zeichen, außer wenn* t_1' *zugleich konjugierter Punkt (im weiteren Sinn) für das Integral* (43) *ohne Nebenbedingung ist.*

Zum Beweis bringen wir zunächst $D(t, t_1)$ auf eine für die Diskussion bequemere Form. Wir führen dazu die beiden folgenden Funktionen ein:

---

[1]) Satz und Beweis nach WEIERSTRASS, *Vorlesungen* 1872.

[2]) Vgl. die Bemerkung am Ende von Absatz b).

[3]) Derselbe rührt von WEIERSTRASS her, siehe die Dissertationen von HOWE, Berlin 1887, und HORMANN, Göttingen 1887; einen Beweis hat zuerst KNESER gegeben, Mathematische Annalen, Bd. LV (1902), p. 86.

$$u = \vartheta_1(t_1)\vartheta_2(t) - \vartheta_2(t_1)\vartheta_1(t) \equiv u(t, t_1),$$
$$v = C_1\vartheta_1(t) + C_2\vartheta_2(t) - \vartheta_3(t) \equiv v(t, t_1),$$

wobei die beiden Konstanten C_1, C_2 der Gleichung

$$C_1\vartheta_1(t_1) + C_2\vartheta_2(t_1) - \vartheta_3(t_1) = 0$$

genügen. Die beiden Funktionen u, v genügen den Differentialgleichungen

$$\Psi(u) = 0, \qquad \Psi(v) = V \tag{50}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(t_1) = 0, \qquad v(t_1) = 0. \tag{51}$$

Mit Hilfe von elementaren Determinantensätzen läßt sich dann die Funktion $D(t, t_1)$ folgendermaßen durch u und v ausdrücken:

$$D(t, t_1) = mv - nu, \tag{52}$$

wo

$$m = \int_{t_1}^{t} V u\, dt \equiv m(t, t_1), \qquad n = \int_{t_1}^{t} V v\, dt \equiv n(t, t_1).$$

Aus (50) folgt

$$v\,\Psi(u) - u\,\Psi(v) = \frac{d}{dt} H_1(uv' - vu') = -uV.$$

Integriert man diese Gleichung und bestimmt die Integrationskonstanten aus (51), so kommt

$$H_1(uv' - vu') = -m. \tag{53}$$

Differentiiert man andererseits (52) nach t, so folgt aus der Definition der Funktionen m und n, daß

$$D' = mv' - nu', \tag{53a}$$

und daher

$$Du' - D'u = \frac{m^2}{H_1}. \tag{54}$$

Wir schließen hieraus zunächst, daß die Funktion $D(t, t_1)$ in keinem noch so kleinen Teilintervall von $[t_1 t_2]$ identisch verschwinden kann; denn sonst müßte dasselbe mit D' und daher auch mit m der Fall sein, was mit der im Eingang von § 60 über die Funktion V gemachten Annahme im Widerspruch steht.

Weiter folgt aber aus (54), daß

$$\frac{d}{dt}\frac{D}{u} = -\frac{m^2}{H_1}, \tag{55}$$

und dies zeigt, da $H_1 > 0$, daß der Quotient D/u sein Zeichen wechselt, wenn t durch den Wert t_1' hindurchgeht; dasselbe tut also auch die

Funktion D, wenn $u(t_1') \neq 0$, und das ist eben der oben ausgesprochene Satz, da ja die Gleichung $u(t) = 0$ die konjugierten Punkte (im weiteren Sinn) für das Integral (43) ohne Nebenbedingung bestimmt.

Da u in t_1 nach (50) und § 11, a) nur von der ersten Ordnung verschwindet, m und D dagegen von höherer[1]) Ordnung, so folgt durch Integration von (55),

$$D = -u \int_{t_1}^{t} \frac{m^2 dt}{H_1 u^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, in Übereinstimmung mit den Bemerkungen im Eingang dieses Paragraphen, daß $D \neq 0$ für $t_1 < t < \bar{t}_1'$; denn $\bar{t}_1'$ ist nach Definition die zunächst auf t folgende Wurzel der Gleichung $u(t) = 0$. Kombiniert man dieses Resultat mit dem folgenden, leicht zu beweisenden Satz über stetige Funktionen:

„Ist die Funktion $f(x)$ stetig in $[ab]$, positiv in a, aber nicht in allen Punkten von $[ab]$, so gibt es in $[ab]$ einen Punkt c, so daß

$$f(x) > 0 \text{ für } a \overline{\overline{<}} x < c, \qquad f(c) = 0\text{“},$$

so folgt: Wenn die Funktion $D(t, t_1)$ überhaupt im Intervall $t_1 < t < t_2^*$ verschwindet, so besitzt sie stets auch einen zunächst auf t_1 folgenden Nullpunkt.

c) Nachweis der Notwendigkeit der Bedingung: $P_2 \overline{\overline{<}} P_1'$:

Die in Absatz a) bewiesenen Resultate machen es wahrscheinlich,[2]) daß das Extremum jenseits des konjugierten Punktes P_1' nicht mehr bestehen kann, und in der Tat läßt sich durch eine Modifikation der von Weierstraß[3]) für den analogen Zweck beim Problem ohne Nebenbedingung angewandten Methode beweisen,[4]) daß man die zweite Variation und daher auch ΔJ negativ machen kann, wenn $P_1' < P_2$.

Dazu schreiben wir den Ausdruck (45) für die zweite Variation in der Form

$$\delta^2 J = -\varepsilon^2 k \int_{t_1}^{t_2} w^2 dt + \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} w[\widetilde{\Psi}(w) + \mu V] dt,$$

[1]) Sind die Funktionen H_1, H_2, V regulär, und verschwindet V in t_1 von der Ordnung $k (\overline{\overline{>}} 0)$, so verschwindet m in t_1 von der Ordnung $k + 2$, D von der Ordnung $2k + 4$.

[2]) Vgl. die Bemerkungen bei der analogen Diskussion auf p. 62, insbesondere Fußnote [1]).

[3]) Vgl. p. 82, Fußnote [2]).

[4]) Der Beweis ist zuerst von Kneser gegeben worden in der auf p. 478, Fußnote [3]) zitierten Arbeit. Nach den Mitteilungen, die Howe und Hormann in ihren ebendort erwähnten Dissertationen machen, scheint es, daß Weierstrass im Besitz eines ähnlichen Beweises war; doch ist mir nicht bekannt, ob er denselben in Vorlesungen vorgetragen hat. Einen wesentlich hiervon verschiedenen, ebenfalls von Kneser herrührenden Beweis werden wir in § 62 geben.

wobei k eine willkürliche positive Konstante bedeutet, während

$$\widetilde{\Psi}(w) = (H_2 + k)w - \frac{d}{dt}\left(H_1 \frac{dw}{dt}\right).$$

Es seien jetzt $\tilde{u}, \tilde{v}$ diejenigen partikulären Integrale der Differentialgleichungen

$$\Psi(\tilde{u}) = 0, \qquad \Psi(\tilde{v}) = V,$$

welche den Anfangsbedingungen

$$\tilde{u}(t_1) = u(t_1) = 0, \qquad \tilde{u}'(t_1) = u'(t_1),$$
$$\tilde{v}(t_1) = v(t_1) = 0, \qquad \tilde{v}'(t_1) = v'(t_1)$$

genügen. Dann folgt aus dem Einbettungssatz[1]) von § 24, b), daß

$$\underset{k=0}{L}[\tilde{u}(t) - u(t)] = 0, \qquad \underset{k=0}{L}[\tilde{v}(t) - v(t)] = 0,$$

und zwar *gleichmäßig in Beziehung auf das Intervall* $[t_1 t_2]$.

Setzen wir daher entsprechend

$$\tilde{m} = \int_{t_1}^{t_2} V\tilde{u}\,dt, \qquad \tilde{n} = \int_{t_1}^{t_2} V\tilde{v}\,dt,$$

$$\widetilde{D}(t, t_1) = \tilde{m}\tilde{v} - \tilde{n}\tilde{u},$$

so folgt, daß auch

$$\underset{k=0}{L}\widetilde{D}(t, t_1) = D(t, t_1), \tag{56}$$

ebenfalls *gleichmäßig* in $[t_1\, t_2]$.

Angenommen es sei jetzt

$$t_1' < t_2$$

und zunächst

$$u(t_1') \neq 0.$$

Dann wechselt, wie wir unter b) gezeigt haben, die Funktion $D(t, t_1)$ in t_1' ihr Zeichen; wir können daher zwei der Ungleichung

$$t_1 < t_3 < t_1' < t_4 < t_2$$

genügende Werte t_3, t_4 von t angeben, für welche $D(t, t_1)$ entgegengesetzte Zeichen hat. Und nunmehr können wir wegen (56) die

[1]) Man schreibe die Differentialgleichung $\widetilde{\Psi}(u) = 0$ in der Normalform (20) von § 23 mit u, u', k als unbekannten Funktionen und mit der Zusatzdifferentialgleichung $dk/dt = 0$. Dann gibt es nach § 24, b) eine positive Größe d, so daß die Funktion $\tilde{u}(t)$ in dem Bereich $t_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2, |k| \overline{\overline{<}} d$ eine stetige Funktion von t und k ist, welche für $k = 0$ in $u(t)$ übergeht; daraus folgt dann die Behauptung nach dem Satz über gleichmäßige Stetigkeit, vgl. A II 6 und A III 3. Dasselbe gilt für die Funktion $\tilde{v}$.

Größe k so klein wählen, daß auch $\widetilde{D}(t, t_1)$ in t_3 und t_4 entgegengesetzte Zeichen hat; daher muß $\widetilde{D}(t, t_1)$ in einem zwischen t_3 und t_4 gelegenen Punkt $\tilde{t}_1'$ verschwinden. Wenn aber $\widetilde{D}(\tilde{t}_1', t_1) = 0$, so können wir zwei Konstante c_1, c_2, nicht beide gleich Null, so bestimmen, daß

$$c_1 \tilde{u}(\tilde{t}_1') + c_2 \tilde{v}(\tilde{t}_1') = 0,$$

$$c_1 \tilde{m}(\tilde{t}_1') + c_2 \tilde{n}(\tilde{t}_1') = 0.$$

Wählen wir jetzt

$$w = c_1 \tilde{u} + c_2 \tilde{v} \quad \text{in } [t_1 \tilde{t}_1'],$$

$$w \equiv 0 \qquad \text{in } [\tilde{t}_1' t_2]$$

und geben der Konstanten μ den Wert $-c_2$, so hat w alle in dem Satz von § 60, a) verlangten Eigenschaften und genügt überdies der Differentialgleichung

$$\widetilde{\Psi}(w) + \mu V = 0.$$

Diese Funktion w macht aber $\delta^2 J$ negativ, da für sie

$$\delta^2 J = -\varepsilon^2 k \int_{t_1}^{t_2} w^2 dt.$$

Es bleibt jetzt noch der Ausnahmefall:[1]) $u(t_1') = 0$ zu untersuchen. Derselbe kann nur dann eintreten, wenn gleichzeitig $m(t_1') = 0$ und $v(t_1') = 0$, wie sofort aus (54) und (53) folgt, wenn man beachtet, daß $H_1 \neq 0$ in $[t_1 t_2]$, und daß u und u' nach § 11, a) nicht gleichzeitig verschwinden können.

In diesem Fall können wir nun zunächst $\delta^2 J = 0$ machen durch die zulässige Funktion

$$w = u \text{ in } [t_1 t_1'], \qquad w \equiv 0 \text{ in } [t_1' t_2],$$

wie aus der Form (44) der zweiten Variation folgt, wobei man sich der Definition der Funktion m zu erinnern hat.

Darüber hinaus läßt sich dann aber mittels einer Modifikation des von Schwarz für den Beweis der Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung beim Problem ohne Nebenbedingung benutzten Methode (§ 14, b)) beweisen, daß man $\delta^2 J$ auch negativ machen kann.

Man zeigt nämlich leicht, daß man stets eine Funktion ω von t bilden kann, welche in $[t_1 t_2]$ von der Klasse C'' ist und den Bedingungen

$$\omega(t_1) = 0, \qquad \omega(t_2) = 0, \qquad \omega(t_1') \neq 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \omega V dt = 0$$

---

[1]) Vgl. wegen dieses Ausnahmefalles Bolza, Mathematische Annalen, Bd. LVII (1903), p. 44.

genügt. Setzt man dann

$$w = u + k\omega \text{ in } [t_1 t_1'], \qquad w = k\omega \text{ in } [t_1' t_2],$$

unter k eine Konstante verstanden, so ist die so definierte Funktion w stetig in $[t_1 t_2]$, ihre erste Ableitung erleidet aber einen Sprung an der Stelle t_1'; ferner verschwindet w in t_1 und t_2 und genügt der Bedingung (13).

Wir können daher auf die zweite Variation in der ursprünglichen Form (39) die Jacobi'sche Transformation in der modifizierten Form von § 10, c) anwenden und erhalten genau wie in § 14, b)

$$\delta^2 J = 2\varepsilon^2 k H_1(t_1')\omega(t_1')u'(t_1') + k^2 \int_{t_1}^{t_2} \omega \Psi(\omega) dt. \;.$$

Da der Koeffizient von k von Null verschieden ist, so folgt hieraus in der Tat, daß wir $\delta^2 J$ durch passende Wahl von k negativ machen können.

Somit ist bewiesen, daß ohne Ausnahme der Satz gilt:

Für ein Extremum des Integrals J mit der Nebenbedingung $K = l$ ist weiterhin notwendig, daß

$$D(t, t_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad t_1 < t < t_2,$$

oder anders ausgedrückt, daß

$$P_2 \overline{\overline{<}} P_1'. \tag{III}$$

Beispiel II (Siehe p. 465).

Aus der Gleichung (23) folgt, daß *im Fall eines Maximums λ negativ* sein muß. Von den beiden in Beziehung auf die Gerade $P_1 P_2$ symmetrischen Kreisbogen, welche den Anfangsbedingungen genügen, kann also nur derjenige oberhalb der x-Achse ein Maximum liefern. Für denselben dürfen wir

$$t = -\frac{s}{\lambda}$$

als Parameter einführen und erhalten so aus (25) für den Bogen $\mathfrak{E}_0$ die analytische Darstellung

$$x = \alpha_0 - \lambda_0 \cos t, \qquad y = \beta_0 - \lambda_0 \sin t, \qquad t_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2.$$

Hieraus folgt

$$\vartheta_1(t) = -\lambda_0 \cos t, \qquad \vartheta_2(t) = -\lambda_0 \sin t, \qquad \vartheta_3(t) = \lambda_0.$$

Ferner

$$V = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3},$$

was sich nach (24) für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ auf $-1/\lambda_0$ reduziert. Eine leichte Rechnung ergibt dann für $D(t, t_1)$ den Ausdruck:

$$D(t, t_1) = 4\lambda_0^2 \sin\tau(\sin\tau - \tau\cos\tau), \tag{57}$$

wobei

$$\tau = \frac{t - t_1}{2}.$$

Den beiden Faktoren von $D(t, t_1)$ entsprechend erhalten wir zwei Reihen von konjugierten Punkten im weiteren Sinn, einerseits $\tau = \nu\pi$, andererseits die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau = \tau,$$

deren zunächst auf $\tau = 0$ folgende Wurzel im dritten Quadranten liegt.

Der zu P_1 im engeren Sinn konjugierte Punkt wird also geliefert durch den Wert

$$t_1' = t_1 + 2\pi.$$

Ein Kreisbogen, welcher über einen vollen Kreisumfang hinausgeht, kann also keine Lösung für das isoperimetrische Problem liefern.

Andererseits ist, wie wir bereits auf p. 234 gesehen haben, für das Problem, das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [\tfrac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda_0 \sqrt{x'^2 + y'^2}]\, dt$$

ohne Nebenbedingungen zu einem Extremum zu machen, der zu t_1 konjugierte Wert

$$\bar{t}_1' = t_1 + \pi,$$

so daß also in der Tat: $t_1' > \bar{t}_1'$, in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie.

Da ferner:

$$u(t) = -\lambda_0^2 \sin(t - t_1),$$

so tritt hier gerade der oben erwähnte Ausnahmefall ein, daß $u(t_1') = 0$.

Beispiel XXI (Siehe p. 466):

Da hier

$$H_1 = \frac{y + \lambda}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3},$$

so ist für ein Minimum notwendig, daß $y + \lambda > 0$. Da nach unseren Festsetzungen die Konstante $\alpha > 0$, so erfüllt von den beiden den Anfangsbedingungen genügenden Kettenlinien (27) *nur die nach unten konvexe* die Bedingung (II), d. h. also die Kettenlinie

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x = \beta_0 + \alpha_0 t, \qquad y + \lambda = \alpha_0 \operatorname{Ch} t.$$

Für dieselbe erhält man

$$\vartheta_1(t) = \alpha_0(t \operatorname{Sh} t - \operatorname{Ch} t), \qquad \vartheta_2(t) = \alpha_0 \operatorname{Sh} t, \qquad \vartheta_3(t) = \alpha_0,$$

$$V = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{1}{\alpha_0 \operatorname{Ch}^2 t}.$$

Hieraus folgt

$$\int_{t_1}^{t} V\vartheta_1\, dt = \left[-\frac{t}{\operatorname{Ch} t}\right]_{t_1}^{t}, \quad \int_{t_1}^{t} V\vartheta_2\, dt = \left[-\frac{1}{\operatorname{Ch} t}\right]_{t_1}^{t}, \quad \int_{t_1}^{t} V\vartheta_3\, dt = [\operatorname{Th} t]_{t_1}^{t},$$

woraus sich für $D(t, t_1)$ das folgende Resultat[1]) ergibt:

$$D(t, t_1) = \alpha_0^2[2 - 2\,\mathrm{Ch}(t - t_1) + (t - t_1)\mathrm{Sh}(t - t_1)],$$

oder wenn wir

$$t - t_1 = 2\tau$$

setzen,

$$D(t, t_1) = -4\alpha_0^2\,\mathrm{Sh}\,\tau(\mathrm{Sh}\,\tau - \tau\,\mathrm{Ch}\,\tau).$$

Die Funktion $\mathrm{Sh}\,\tau$ ist positiv für positive Werte von τ, und die Funktion

$$\varphi(\tau) = \mathrm{Sh}\,\tau - \tau\,\mathrm{Ch}\,\tau$$

ist negativ für alle positiven Werte von τ, da

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(\tau) = -\tau\,\mathrm{Sh}\,\tau.$$

Es existiert also kein zu P_1 konjugierter Punkt, und die Bedingung (III) ist stets erfüllt.[2])

d) **Hinlänglichkeit der Bedingung: $P_2 \prec P_1'$ für ein permanentes Zeichen von $\delta^2 J$:**[3])

Soll $\delta^2 J > 0$ sein für alle nicht identisch verschwindenden zulässigen Funktionen w, so ist, wie wir in § 60, a) und § 61, a) gesehen haben, notwendig, daß $H_1 \overline{\geqq} 0$ in $[t_1 t_2]$ und $P_2 \prec P_1'$. Es soll jetzt die Umkehrung dazu bewiesen werden:

Wenn für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die beiden Bedingungen

$$H_1 > 0 \quad \textit{in} \quad [t_1 t_2], \tag{II'}$$

$$P_2 \prec P_1' \tag{III'}$$

erfüllt sind, so ist $\delta^2 J > 0$ für alle nicht identisch verschwindenden zulässigen Funktionen w.

Es sei t_0 irgend ein der Ungleichung[4])

$$t_1^* < t_0 < t_2^*$$

genügender Wert von t. Zu demselben gehören dann vier Funktionen

$$u = u(t, t_0), \qquad v = v(t, t_0), \qquad m = m(t, t_0), \qquad n = n(t, t_0),$$

welche der Stelle t_0 in derselben Weise zugeordnet sind wie unter b) die Funktionen $u(t, t_1)$ usw. der Stelle t_1.

Sind dann p, q irgend zwei Funktionen von t, welche im Intervall $[t_1 t_2]$ von der Klasse C' sind, und setzt man

$$\omega = pu + qv,$$

---

[1]) Zuerst von A. Mayer gegeben, Mathematische Annalen, Bd. XIII (1878), p. 67.

[2]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 12—17,21 am Ende dieses Kapitels.

[3]) Von dem Inhalt dieses Absatzes ist nur das am Schluß gegebene Lemma für die späteren Entwicklungen erforderlich und auch dieses erst in § 64.

[4]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 59, e).

so gilt die folgende Relation[1]):

$$\begin{aligned} H_1\omega'^2 + H_2\omega^2 = H_1(p'u+q'v)^2 - 2q(p'm+q'n) \\ + \frac{d}{dt}[H_1(pu+qv)(pu'+qv') + (pm+qn)q]. \end{aligned} \tag{58}$$

Man verifiziert dieselbe leicht, indem man einerseits die Werte von ω und ω' einsetzt und ausmultipliziert und dann die dabei auftretenden Produkte $H_2 u$, $H_2 v$ mittels der Differentialgleichung (50) eliminiert, andererseits die Differentiation nach t ausführt und von der Relation (53) Gebrauch macht.

Wir wollen zunächst annehmen, t_0 ließe sich so wählen, daß

$$D(t, t_0) \neq 0 \text{ für } t_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2. \tag{59}$$

Ist dann w irgend eine in $[t_1 t_2]$ nicht identisch verschwindende zulässige[2]) w-Funktion, so bestimmen wir die beiden Funktionen p, q aus den beiden Gleichungen

$$pu + qv = w, \qquad pm + qn = \int_{t_1}^{t} V w\, dt, \tag{60}$$

deren Determinante nach (59) in $[t_1 t_2]$ von Null verschieden ist, da ja der Gleichung (52) entsprechend die Relation

$$D(t, t_0) = m(t, t_0)v(t, t_0) - n(t, t_0)u(t, t_0)$$

gilt. Hieraus und aus den Eigenschaften der Funktion w folgt, daß die so definierten Funktionen p, q im Intervall $[t_1 t_2]$ von der Klasse D' sind und in t_1 und t_2 verschwinden, ohne identisch in $[t_1 t_2]$ zu verschwinden. Ferner folgt aus (60) durch Differentiation

$$p'm + q'n = 0. \tag{61}$$

Sind nun die Funktionen p und q zunächst von der Klasse C' in $[t_1 t_2]$, so gilt für sie die Relation (58), durch deren Integration wir erhalten[3])

$$\int_{t_1}^{t_2} (H_1 w'^2 + H_2 w^2)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} H_1 (p'u + q'v)^2\, dt.$$

Wegen der Voraussetzung (II') kann die rechte Seite nur dann gleich Null sein, wenn $p'u + q'v \equiv 0$ in $[t_1 t_2]$, was wegen (61) und (59)

[1]) Vgl. A. Mayer, Mathematische Annalen, Bd. XIII (1878). p. 53, und Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. III (1902) p. 309.

[2]) Vgl. § 60, a).

[3]) Dies ist das Analogon der Jacobi'schen Formel (11) von § 10.

mit den nachgewiesenen Eigenschaften der Funktionen p und q unvereinbar ist; es ist also in diesem Fall $\delta^2 J > 0$.

Dasselbe Resultat bleibt aber auch bestehen, wenn die Funktionen p, q von der Klasse D' sind, wie man in bekannter Weise durch Zerlegen des Intervalles $[t_1 t_2]$ in Teilintervalle und nachherige Integration zeigt, wobei man zu beachten hat, daß die Funktionen p, q selbst stetig bleiben, auch wo ihre Ableitungen Unstetigkeiten erleiden.

Hiermit ist das folgende vorläufige Resultat gewonnen:

Ist die Bedingung (II') erfüllt, und läßt sich t_0 so wählen, daß

$$D(t, t_0) \neq 0 \text{ für } t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

so ist $\delta^2 J > 0$ für alle nicht identisch verschwindenden zulässigen Funktionen w.

Um nun von hier aus zu dem im Eingang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satze zu gelangen, bemerken wir zunächst, daß aus der Vergleichung des eben erhaltenen Resultates mit dem unter a) bewiesenen folgt, daß für die Funktion $D(t, t_0)$ das folgende, dem Sturm'schen Satz von § 11, c) analoge Lemma gilt:

Wenn
$$D(t, t_0) \neq 0 \textit{ in } [t_1 t_2], \tag{59}$$
so muß $D(t'', t') \neq 0$ *sein für je zwei der Ungleichung:* $t_1 \leqq t' < t'' \leqq t_2$ *genügende Werte* t', t''.

Hieraus folgt nun weiter: Wenn $t_2 < t_1'$, so läßt sich stets t_0 so wählen, daß die Bedingung (59) erfüllt ist.[1] Denn da unsere Voraussetzung gleichbedeutend ist mit

$$D(t, t_1) \neq 0 \text{ für } t_1 < t \leqq t_2, \tag{III'}$$

so ist insbesondere $D(t_2, t_1) \neq 0$. Daher können wir wegen der Stetigkeit der Funktion D in Beziehung auf ihre beiden Argumente eine positive Größe d angeben derart, daß

$$D(t'', t') \neq 0 \quad \text{für:} \quad |t' - t_1| \leqq d, \qquad |t'' - t_2| \leqq d. \tag{62}$$

Daher ist: $D(t, t_1) \neq 0$ für $t_1 + d \leqq t \leqq t_2 + d$. Daraus folgt aber nach dem obigen Lemma, daß

$$D(t_2 + d, t) \neq 0 \quad \text{für } t_1 + d \leqq t < t_2 + d,$$

während aus (62) folgt, daß

$$D(t_2 + d, t) \neq 0 \quad \text{für } t_1 - d \leqq t \leqq t_1 + d.$$

Es ist also

$$D(t_2 + d, t) \neq 0 \quad \text{für } t_1 - d \leqq t \leqq t_2,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist, da: $D(t, t_2 + d) = -D(t_2 + d, t)$.

[1]) Beweis nach C. Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. III, Nr. 393.

Nunmehr folgt aber aus dem oben erhaltenen vorläufigen Resultat der im Eingang dieses Absatzes formulierte Satz.

Wir fügen hier noch ein weiteres Lemma über die Funktion $D(t, t_0)$ an, das wir später gebrauchen werden. Wählen wir nämlich t_0 im Intervall $t_1 - d < t_0 < t_1$, so folgt aus der bewiesenen Ungleichung: $D(t, t_2 + d) \neq 0$ für $t_1 - d \leqq t \leqq t_2$ nach dem obigen Lemma[1]):

Sind die Bedingungen (II') und (III') erfüllt, so läßt sich eine positive Größe d angeben derart, daß

$$D(t, t_0) \neq 0 \quad \textit{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

sobald $t_1 - d < t_0 < t_1$.

e) **Das Mayer'sche Reziprozitätsgesetz für isoperimetrische Probleme:**

Schon Euler[2]) hat bemerkt, daß das Problem: das Integral J zu einem Extremum zu machen, während das Integral K einen vorgeschriebenen Wert hat, und das dazu *„reziproke Problem"*: das Integral K zu einem Extremum zu machen, während das Integral J einen vorgeschriebenen Wert hat, zu *derselben Gesamtheit von Extremalen* führen.

Denn beziehen sich durchweg die überstrichenen Größen auf das zweite Problem, so haben wir

$$\overline{H} = G + \overline{\lambda} F = \overline{\lambda}\left(F + \frac{1}{\overline{\lambda}} G\right),$$

also wenn wir

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{setzen,} \tag{63}$$

$$\overline{H} = \frac{1}{\lambda} H,$$

woraus folgt, daß die Differentialgleichungen der beiden Probleme durch die Substitution $\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ ineinander übergehen.

A. Mayer[3]) hat diese Bemerkung von Euler dahin erweitert, daß die beiden genannten Probleme auch in Beziehung auf die übrigen notwendigen Bedingungen eines Extremums äquivalent sind.

Wir nehmen dabei an, die Endpunkte seien bei beiden Problemen dieselben, und die vorgeschriebenen Integralwerte seien in beiden

[1]) Für den Fall, daß die Funktion $D(t, t_0)$ in der Umgebung der Stelle $t = t_1$, $t_0 = t_1$ regulär ist und $V(t_1) \neq 0$, gibt Kneser einen von der Betrachtung der zweiten Variation unabhängigen Beweis dieses Lemmas, *Lehrbuch* §§ 31 und 42.

[2]) Vgl. *Methodus inveniendi* etc., Kap. V, Art. 37.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. XIII (1878), p. 60; vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, p. 131 und 136.

Problemen so gewählt, daß ein und dieselbe Extremale $\mathfrak{E}_0$ die Anfangsbedingungen für beide Probleme befriedigt. Überdies möge die zugehörige Größe λ_0 endlich und von Null verschieden sein. Dann folgt die behauptete Äquivalenz zunächst für *die Bedingungen von Weierstraß und Legendre* unmittelbar, da nach (63)

$$\left.\begin{aligned} \overline{H}_1 &= \frac{1}{\lambda_0} H_1, \\ \overline{\mathcal{E}}(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}'; \overline{\lambda}_0) &= \frac{1}{\lambda_0} \mathcal{E}(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}'; \lambda_0). \end{aligned}\right\} \qquad (63\text{a})$$

Nur ist dabei zu beachten, daß einem Minimum des ersten Problems ein Minimum oder Maximum des zweiten entspricht, je nachdem λ_0 positiv oder negativ ist.

Aber auch *die konjugierten Punkte sind bei beiden Problemen dieselben.* Denn nach dem über die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen der beiden Probleme Gesagten ist

$$\overline{f}(t, \alpha, \beta, \overline{\lambda}) = f\left(t, \alpha, \beta, \frac{1}{\overline{\lambda}}\right), \qquad \overline{g}(t, \alpha, \beta, \overline{\lambda}) = g\left(t, \alpha, \beta, \frac{1}{\overline{\lambda}}\right).$$

Daraus folgt

$$\overline{\vartheta}_1(t) = \vartheta_1(t), \qquad \overline{\vartheta}_2(t) = \vartheta_2(t), \qquad \overline{\vartheta}_3(t) = -\lambda_0^2 \vartheta_3(t).$$

Ferner ist:

$$\overline{V} = T, \qquad \text{also, da entlang } \mathfrak{E}_0\text{:} \qquad T + \lambda_0 V = 0,$$

$$\overline{V} = -\lambda_0 V.$$

Nunmehr folgt aus (49)

$$\overline{D}(t, t_1) = \lambda_0^3 D(t, t_1),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Der Satz wird nach Mayer das *Reziprozitätsgesetz für isoperimetrische Probleme* genannt.[1])

§ 62. **Die Kneser'sche Theorie der konjugierten Punkte beim isoperimetrischen Problem.**

Die Kneser'sche Theorie der konjugierten Punkte geht — ähnlich wie die analoge Theorie von § 29, b) — von der Betrachtung der Extremalenschar durch den Punkt P_1 aus. Daraus ergibt sich dann eine doppelte geometrische Deutung des konjugierten Punktes, welche zu einer Übertragung des Enveloppensatzes von § 44, c) auf isoperimetrische Probleme und mit dessen Hilfe zu einem neuen Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung (III) führt.

---

[1]) Hierzu die *Übungsaufgabe* Nr. 10 am Ende dieses Kapitels.

a) **Die Doppelschar von Extremalen durch den Punkt P_1:**

Durch den Punkt P_1 geht eine doppelt unendliche Schar von Extremalen. Nach den Ergebnissen von § 59, e) können wir dieselbe in der Normalform[1]) schreiben:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}(t-t_1;\, x_1, y_1, \varkappa, \lambda) \equiv \varphi(t, \varkappa, \lambda), \\ y &= \mathfrak{Y}(t-t_1;\, x_1, y_1, \varkappa, \lambda) \equiv \psi(t, \varkappa, \lambda). \end{aligned} \tag{64}$$

Der Kurvenparameter t hat dabei die Bedeutung der Bogenlänge; von den beiden Scharparametern $\varkappa, \lambda$ ist $\varkappa$ der Tangentenwinkel der betreffenden Extremalen im Punkt P_1, während λ wie bisher die isoperimetrische Konstante bedeutet. Auf allen Kurven der Doppelschar entspricht der Punkt P_1 demselben konstanten Wert $t = t_1$, so daß also, identisch in $\varkappa, \lambda$:

$$\varphi(t_1, \varkappa, \lambda) = x_1, \qquad \psi(t_1, \varkappa, \lambda) = y_1,$$

woraus durch Differentiation folgt

$$\begin{aligned} \varphi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) &= 0, \qquad \psi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) = 0, \\ \varphi_\lambda(t_1, \varkappa, \lambda) &= 0, \qquad \psi_\lambda(t_1, \varkappa, \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Ferner folgt aus der geometrischen Bedeutung der Größen t und $\varkappa$

$$\varphi_t(t_1, \varkappa, \lambda) = \cos\varkappa, \qquad \psi_t(t_1, \varkappa, \lambda) = \sin\varkappa. \tag{66}$$

Die einem bestimmten Wertsystem $\varkappa, \lambda$ entsprechende Extremale der Doppelschar (64) bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$.

Die Extremale $\mathfrak{E}_0$ ist in der Doppelschar (64) enthalten, und zwar möge dies eintreten für $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$, so daß also, wenn auch auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ die Bogenlänge mit passendem Anfangspunkt als Parameter gewählt wird,

$$\varphi(t, \varkappa_0, \lambda_0) \equiv \mathring{x}(t), \qquad \psi(t, \varkappa_0, \lambda_0) \equiv \mathring{y}(t).$$

Aus den in § 59, e) unter 3) und 4) aufgezählten Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ folgen schließlich noch die entsprechenden Eigenschaften der Funktionen φ, ψ.

Wir führen, ähnlich wie in § 27, d), die permanente Bezeichnung ein

$$\begin{aligned} F(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t) &= \mathfrak{F}(t, \varkappa, \lambda), \\ G(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t) &= \mathcal{G}(t, \varkappa, \lambda), \\ H(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t;\, \lambda) &= \mathcal{H}(t, \varkappa, \lambda), \end{aligned} \tag{67}$$

---

[1]) Von der Normalform (64) der Doppelschar kann man durch eine Transformation von der Form

$$\tau = \mathfrak{T}(t, \varkappa, \lambda), \qquad a = \mathfrak{A}(\varkappa, \lambda), \qquad b = \mathfrak{B}(\varkappa, \lambda)$$

zu deren allgemeinster Darstellung übergehen, wobei die Funktionen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ähnlichen Beschränkungen zu unterwerfen sind wie auf p. 220.

die wir dann auch auf die partiellen Ableitungen dieser Funktionen, sowie auf die Funktionen H_1, H_2, V ausdehnen.

Setzen wir

$$\mathfrak{u} = \varphi_t\psi_\varkappa - \psi_t\varphi_\varkappa, \qquad \mathfrak{v} = \varphi_t\psi_\lambda - \psi_t\varphi_\lambda, \tag{68}$$

so folgt ganz wie in § 61, a), daß diese beiden Funktionen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2\mathfrak{u} - \frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}_1\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right) &= 0, \\ \mathcal{H}_2\mathfrak{v} - \frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}_1\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) &= \mathfrak{V} \end{aligned} \tag{69}$$

genügen, und aus (65) und (66) folgt, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(t_1) &= 0, \qquad \mathfrak{u}'(t_1) = 1, \\ \mathfrak{v}(t_1) &= 0, \qquad \mathfrak{v}'(t_1) = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Für $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$ gehen die Differentialgleichungen (69) in die Differentialgleichungen (50) über, und durch Vergleichung von (70) und (51) folgt dann, daß

$$\mathfrak{u}(t, \varkappa_0, \lambda_0) = \varrho u(t), \qquad \mathfrak{v}(t, \varkappa_0, \lambda_0) = v(t), \tag{71}$$

vorausgesetzt, daß die in § 61, b) nur bis auf ein additives konstantes Vielfaches von $u(t)$ bestimmte Funktion v passend normiert wird; ϱ ist eine von Null verschiedene Konstante.

b) **Die Kongruenz von räumlichen Extremalen durch den Punkt P_1:**

Wir betrachten jetzt das Integral K, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ vom Punkt $P_1(t_1)$ bis zu einem variabeln Punkt $P(t)$ und bezeichnen den Wert desselben als Funktion von $t, \varkappa, \lambda$ mit $\chi(t, \varkappa, \lambda)$:

$$\chi(t, \varkappa, \lambda) = \int_{t_1}^{t} \mathcal{G}(t, \varkappa, \lambda)\, dt. \tag{72}$$

Und nunmehr errichten wir nach dem Vorgang von WEIERSTRASS[1]) im Punkt P eine Normale zur x, y-Ebene, die nach Größe und Richtung gleich dem Integralwert $\chi(t, \varkappa, \lambda)$ ist, indem wir eine bestimmte Richtung der Normalen als positiv festlegen. Führen wir diese Konstruktion für jeden Punkt von $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ aus, so erhalten wir eine der ebenen Extremalen $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ zugeordnete räumliche[2]) Extremale $\mathfrak{E}'_{\varkappa\lambda}$, welche

[1]) *Vorlesungen* 1879.

[2]) Die Bezeichnung ist insofern gerechtfertigt, als diese Raumkurve Extremale für das folgende Variationsproblem ist, welches in gewissem Sinn mit dem gegebenen isoperimetrischen Problem äquivalent ist: *Unter allen Raumkurven, welche die beiden Punkte $x = x_1$, $y = y_1$, $z = 0$ und $x = x_2$, $y = y_2$, $z = l$ ver-*

auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen analytisch gegeben ist durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t, \varkappa, \lambda), \qquad y = \psi(t, \varkappa, \lambda), \qquad z = \chi(t, \varkappa, \lambda). \tag{73}$$

Lassen wir $\varkappa$ und λ variieren, so stellen die Gleichungen (73) eine der Doppelschar von ebenen Extremalen (64) zugeordnete *Kongruenz*[1]) *von räumlichen Extremalen* dar, welche wegen

$$\chi(t_1, \varkappa, \lambda) = 0$$

sämtlich vom Punkt P_1 der x, y-Ebene ausgehen. Insbesondere entspricht der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ eine räumliche Extremale $\mathfrak{E}_0'$.

Die Funktionaldeterminante der Schar (73) bezeichnen wir mit

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(t, \varkappa, \lambda)}.$$

Es gilt dann nach Kneser der Satz[2]):

Die Funktionaldeterminante der Kongruenz räumlicher Extremalen durch den Punkt P_1, berechnet für die räumliche Extremale $\mathfrak{E}_0'$, unterscheidet sich von der Weierstraß'schen Funktion $D(t, t_1)$ nur um einen von Null verschiedenen konstanten Faktor:

$$\Delta(t, \varkappa_0, \lambda_0) = C D(t, t_1), \qquad C \neq 0. \tag{74}$$

Zum Beweis berechnen wir die partiellen Ableitungen der Funktion χ. Wendet man bei der Berechnung von $\chi_\varkappa$ und χ_λ die Lagrangesche partielle Integration sowie die den Formeln (23) von § 26 entsprechenden Relationen an, so erhält man, der Formel (18a) von § 26 entsprechend, das Resultat

$$\begin{aligned} \chi_t &= \mathfrak{G}_{x'}\varphi_t + \mathfrak{G}_{y'}\psi_t, \ (= \mathfrak{G}), \\ \chi_\varkappa &= \mathfrak{G}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{G}_{y'}\psi_\varkappa - \int_{t_1}^{t} \mathfrak{V}\mathfrak{u}\,dt, \\ \chi_\lambda &= \mathfrak{G}_{x'}\varphi_\lambda + \mathfrak{G}_{y'}\psi_\lambda - \int_{t_1}^{t} \mathfrak{V}\mathfrak{v}\,dt, \end{aligned} \tag{75}$$

wobei man noch von den Gleichungen (65) Gebrauch zu machen hat.

---

binden und der Differentialgleichung: $z' = G(x, y, x', y')$ *genügen, diejenige zu bestimmen, welche das Integral*

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt$$

zu einem Minimum macht. Vgl. übrigens auch § 64, b) Ende.

[1]) Unter einer „*Kongruenz*" von Raumkurven versteht man allgemein ein zweiparametriges System von Raumkurven, vgl. Darboux, *Théorie des surfaces*, Bd. II (1889), p. 1. [2]) Vgl. *Lehrbuch*, § 42.

Setzt man diese Werte in die Determinante Δ ein, so folgt nach einfachen Determinantensätzen

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) = m v - n u, \tag{76}$$

wobei

$$m = \int_{t_1}^{t} \Theta u \, dt, \qquad n = \int_{t_1}^{t} \Theta v \, dt. \tag{77}$$

Für $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$ geht aber die rechte Seite von (76) nach (71), abgesehen von einem konstanten Faktor, in $mv - nu$ über, womit nach (52) unsere Behauptung bewiesen ist.

Aus bekannten Eigenschaften der Funktionaldeterminante folgt, daß der Satz (74), sowie die weiter unten folgenden geometrischen Anwendungen, von der speziellen Normalform, in welcher wir die Doppelschar (64) angenommen haben, unabhängig sind.[1])

Wir bezeichnen jetzt den dem Wert $t = t_1'$ entsprechenden Punkt von $\mathfrak{E}_0'$, dessen Projektion also der Punkt P_1' ist, mit Q_1' und nennen ihn den *räumlichen konjugierten Punkt*. Für denselben ergibt sich nunmehr aus der allgemeinen Theorie der Kongruenzen von Raumkurven eine einfache geometrische Deutung.

Ersetzt man in (73) $\varkappa$ und λ durch Funktionen eines neuen Parameters α:

$$\varkappa = \tilde{\varkappa}(\alpha), \qquad \lambda = \tilde{\lambda}(\alpha),$$

welche für einen gewissen Wert $\alpha = \alpha_0$ die Werte $\varkappa_0$, λ_0 annehmen, so gehen die Gleichungen (73) in eine einparametrige, in der Kongruenz (73) enthaltene Kurvenschar („Kurvenbüschel")

$$x = \varphi(t, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}), \qquad y = \psi(t, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}), \qquad z = \chi(t, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}) \tag{78}$$

über, welche die Kurve $\mathfrak{E}_0'$ enthält, oder anders ausgedrückt, in eine „Fläche der Kongruenz (73)", welche durch die Kurve $\mathfrak{E}_0'$ hindurchgeht.

Konstruiert man dann in einem beliebigen Punkt Q von $\mathfrak{E}_0'$ die Tangentialebene an die Fläche (78), so wird dieselbe im allgemeinen von der Wahl der Funktionen $\tilde{\varkappa}(\alpha)$, $\tilde{\lambda}(\alpha)$ abhängen. Dagegen hat der Punkt Q_1' die Eigentümlichkeit, daß *alle Flächen der Kongruenz, welche durch $\mathfrak{E}_0'$ hindurchgehen, im Punkt Q_1' dieselbe Tangentialebene besitzen* (oder aber sämtlich einen singulären Punkt in Q_1' haben). Dies ist aber die definierende Eigenschaft[2]) des *„Brennpunktes"* der Kongruenz (73). Das ergibt den Satz:

Der räumliche konjugierte Punkt Q_1' ist ein Brennpunkt der Kongruenz (73) *auf der räumlichen Extremalen $\mathfrak{E}_0'$ und zwar der zunächst auf P_1 folgende.*

---

[1]) Vgl. p. 490, Fußnote [1]). [2]) Vgl. Darboux, loc. cit., p. 4.

Zum Beweis der erwähnten Eigentümlichkeit des Punktes Q_1' schließt man folgendermaßen: Es mögen zunächst nicht alle Unterdeterminanten der Determinante dritter Ordnung $\Delta(t_1', \varkappa_0, \lambda_0)$ gleich Null sein. Dann folgt aus der Gleichung

$$\Delta(t_1', \varkappa_0, \lambda_0) = 0, \tag{79}$$

daß sich drei Größen a, b, c, von denen b und c nicht beide gleich Null sind, so bestimmen lassen, daß für $t = t_1'$, $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$:

$$\begin{aligned} a\varphi_t + b\varphi_\varkappa + c\varphi_\lambda &= 0, \\ a\psi_t + b\psi_\varkappa + c\psi_\lambda &= 0, \\ a\chi_t + b\chi_\varkappa + c\chi_\lambda &= 0. \end{aligned}$$

Bildet man jetzt für die Fläche (78) und den Punkt Q_1' die drei in der Flächentheorie mit A, B, C bezeichneten Funktionaldeterminanten, welche den Richtungskosinus der Normalen in Q_1' proportional sind, so folgt auf Grund dieser Relationen, daß die Verhältnisse der drei Größen A, B, C von der Wahl der Funktionen $\tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}$ unabhängig sind.

Sind dagegen alle Unterdeterminanten von Δ gleich Null, so sind die drei Größen A, B, C gleich Null, wie auch die Funktionen $\tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}$ gewählt sein mögen, d. h. sämtliche Flächen haben in Q_1' einen singulären Punkt. Wie aus den Gleichungen (75) folgt, tritt dieser Ausnahmefall stets und nur dann ein, wenn gleichzeitig

$$u(t_1') = 0, \qquad v(t_1') = 0, \qquad m(t_1') = 0, \qquad n(t_1') = 0.$$

In der allgemeinen Theorie der Kongruenzen[1]) wird weiter bewiesen, daß die Brennfläche der Kongruenz, d. h. der geometrische Ort sämtlicher Brennpunkte, von allen Kurven der Kongruenz in den jeweiligen Brennpunkten berührt wird. Daher kann der Punkt Q_1' auch charakterisiert werden als *derjenige Punkt, in welchem die Kurve $\mathfrak{C}_0'$ zum ersten Mal (von P_1 aus gerechnet) die Brennfläche der Kongruenz* (73) *berührt*, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Brennfläche ganz oder zum Teil auch in Kurven oder Punkte degenerieren kann.

Beispiel II (Siehe pp. 465, 483):

Aus der in § 61, c) gebrauchten Form des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung (I) ergibt sich die Doppelschar von Kreisen durch den Punkt P_1 in der Form

$$\begin{aligned} x - x_1 &= -\lambda(\cos t - \cos t^1), \\ y - y_1 &= -\lambda(\sin t - \sin t^1), \end{aligned}$$

wobei t^1 als variabler Parameter zu betrachten ist. Die Länge des Kreisbogens t^1, λ vom Punkt $P_1(t^1)$ bis zu einem variabeln Punkt $P(t)$ hat den Wert

$$z = -\lambda(t - t^1).$$

[1]) Vgl. Darboux, loc. cit., p. 6.

Die Kongruenz räumlicher Extremalen ist also hier ein doppelt unendliches System von *Schraubenlinien mit der Neigung* 45^{0}.

Führen wir statt t und t^1 die für unsere Zwecke bequemeren Größen

$$\frac{t - t^1}{2} = \tau, \qquad t^1 = \varkappa - \frac{\pi}{2}$$

ein, so erhalten wir die Kongruenz in der Form

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= -2\lambda\cos(\tau + \varkappa)\sin\tau, \\ y - y_1 &= -2\lambda\sin(\tau + \varkappa)\sin\tau, \\ z &= -2\lambda\tau, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

wobei nunmehr auf allen Kreisen der Doppelschar der Punkt P_1 demselben Wert $\tau = 0$ entspricht, während $\varkappa$ dieselbe Bedeutung hat wie in der Normalform (64), siehe Fig. 108.

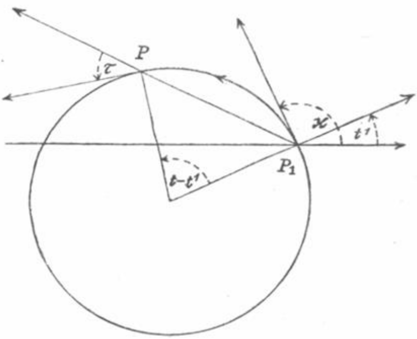

Fig. 108.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich in Übereinstimmung mit (57) und (74)

$$\Delta(\tau, \varkappa, \lambda) = 8\lambda^2 \sin\tau(\sin\tau - \tau\cos\tau). \tag{81}$$

Jede der unendlich vielen Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ liefert einen konjugierten Punkt im weiteren Sinn; und jedem derselben entspricht eine Schale der Brennfläche, die aber auch degenerieren kann.

Letzteres tritt nun gleich bei dem konjugierten Punkt im engeren Sinn ein, für welchen $\tau = \pi$; *die zugehörige Schale der Brennfläche degeneriert in die Gerade*

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

welche von allen Kurven der Kongruenz (80) geschnitten wird.

Wir wollen noch den nächsten konjugierten Punkt betrachten, welcher der im dritten Quadranten gelegenen Wurzel[1])

$$\gamma = \frac{257^{0}27'12''}{360^{0}00'00''} \cdot 2\pi$$

der Gleichung

$$\operatorname{tg}\tau = \tau$$

entspricht. Hier wird die Brennfläche gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= -2\lambda\cos(\gamma + \varkappa)\sin\gamma, \\ y - y_1 &= -2\lambda\sin(\gamma + \varkappa)\sin\gamma, \\ z &= -2\lambda\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

mit $\varkappa$, λ als Flächenparametern; daraus ergibt sich durch Elimination von $\varkappa$ und

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} z^2 = 0.$$

---

[1]) Nach Erdmann, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII (1878), p. 372.

Die zugehörige Schale der Brennfläche ist also ein senkrechter Kreiskegel mit der Geraden $x = x_1, y = y_1$ als Achse. Man verifiziert leicht, daß jede Kurve der Kongruenz (80) in der Tat diesen Kegel in dem fraglichen räumlichen konjugierten Punkt berührt.

c) **Das ausgezeichnete Extremalenbüschel durch den Punkt P_1:**

Wir machen für die folgende Diskussion die *beschränkende Annahme,* daß

$$\Delta_t(t_1', \varkappa_0, \lambda_0) \neq 0. \tag{83}$$

Dann läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) = 0$$

in der Umgebung der Stelle $t_1', \varkappa_0, \lambda_0$ eindeutig nach t auflösen. Die Lösung sei: $t = t'(\varkappa, \lambda)$, so daß also, identisch in $\varkappa, \lambda$,

$$\Delta(t'(\varkappa, \lambda), \varkappa, \lambda) = 0 \tag{84}$$

und überdies

$$t'(\varkappa_0, \lambda_0) = t_1'. \tag{85}$$

Wir greifen jetzt aus der doppelt unendlichen Extremalenschar (64) ein Büschel heraus, welches die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthält, d. h. wir ersetzen $\varkappa, \lambda$ durch zwei Funktionen eines Parameters α: $\varkappa = \tilde{\varkappa}(\alpha)$, $\lambda = \tilde{\lambda}(\alpha)$, welche für einen bestimmten Wert α_0 der Bedingung $\varkappa_0 = \tilde{\varkappa}(\alpha_0)$, $\lambda_0 = \tilde{\lambda}(\alpha_0)$ genügen. Die Funktionen $\tilde{\varkappa}(\alpha)$, $\tilde{\lambda}(\alpha)$ sollen überdies in der Umgebung von α_0 von der Klasse C' sein und die Ableitungen $\tilde{\varkappa}'(\alpha_0)$, $\tilde{\lambda}'(\alpha_0)$ sollen nicht beide gleich Null sein. Auf jeder Kurve des so erhaltenen Extremalenbüschels

$$x = \varphi(t, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}), \qquad y = \psi(t, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}) \tag{86}$$

markieren wir den durch den Parameterwert

$$t = t'(\tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}) \equiv \tilde{t}(\alpha)$$

definierten konjugierten Punkt. Der geometrische Ort $\mathfrak{F}$ dieser konjugierten Punkte ist dann die durch die Gleichungen

$$\mathfrak{F}: \qquad x = \varphi(\tilde{t}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}) \equiv \tilde{x}(\alpha), \qquad y = \psi(\tilde{t}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}) \equiv \tilde{y}(\alpha)$$

dargestellte Kurve. Wir stellen uns jetzt mit Kneser die Aufgabe, das Extremalenbüschel so auszuwählen, daß jede Kurve des Büschels in ihrem konjugierten Punkt $t = \tilde{t}(\alpha)$ die Kurve $\mathfrak{F}$ berührt, oder, anders ausgedrückt, so, daß der geometrische Ort der konjugierten Punkte der Büschelkurven zugleich die Enveloppe des Büschels ist.

Dazu ist notwendig und hinreichend, daß es eine Funktion ϱ von α gibt, so daß, identisch in α,

$$\tilde{x}'(\alpha) = \varrho[\varphi_t], \qquad \tilde{y}'(\alpha) = \varrho[\psi_t], \tag{87}$$

wobei die Klammer [ ] andeutet, daß die Argumente $t, \varkappa, \lambda$ durch $\tilde{t}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}$ zu ersetzen sind. Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$[\varphi_t]\tilde{t}' + [\varphi_\varkappa]\tilde{\varkappa}' + [\varphi_\lambda]\tilde{\lambda}' = \varrho[\varphi_t],$$
$$[\psi_t]\tilde{t}' + [\psi_\varkappa]\tilde{\varkappa}' + [\psi_\lambda]\tilde{\lambda}' = \varrho[\psi_t].$$

Daraus folgt durch Elimination von ϱ in der Bezeichnung (68)

$$[\mathfrak{u}]d\varkappa + [\mathfrak{v}]d\lambda = 0. \tag{88}$$

Gleichzeitig besteht aber mit Rücksicht auf (83) und (76) die Gleichung

$$[\mathfrak{m}][\mathfrak{v}] - [\mathfrak{n}][\mathfrak{u}] = 0. \tag{89}$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Es ist gleichzeitig

$$[\mathfrak{m}]d\varkappa + [\mathfrak{n}]d\lambda = 0. \tag{90}$$

Fall II: Es ist

$$[\mathfrak{m}]d\varkappa + [\mathfrak{n}]d\lambda \neq 0,$$

und daher

$$[\mathfrak{u}] = 0, \qquad [\mathfrak{v}] = 0.$$

Aus einem weiter unten ersichtlichen Grund lassen wir den Fall II beiseite.

Für die Behandlung des Falles I bemerken wir, daß mindestens eine der beiden Funktionen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ für $t = t_1'$, $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$ von Null verschieden ist, wie nach (53a) und (74) aus der Annahme (83) folgt. Daher können wir die Differentialgleichung (90) mit der Anfangsbedingung $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$ integrieren, und die Lösung ist eindeutig. Aus (89) folgt, daß dann die Differentialgleichung (88) von selbst miterfüllt ist. Und nunmehr folgt rückwärts, daß wir ϱ so bestimmen können, daß die Gleichungen (87) erfüllt sind. Freilich kann es vorkommen, daß die so bestimmte Funktion $\varrho(\alpha)$ identisch verschwindet; das bedeutet dann eben, daß die Kurve $\mathfrak{F}$ in einen Punkt degeneriert.

Wir haben also den folgenden, von KNESER herrührenden Satz[1]) gewonnen:

Unter der Voraussetzung, daß

$$\Delta_t(t_1', \varkappa_0, \lambda_0) \neq 0,$$

kann man aus der Doppelschar von Extremalen durch den Punkt P_1 ein ausgezeichnetes Büschel herausgreifen, welches die Extremale $\mathfrak{E}_0$

[1]) Vgl. *Lehrbuch*, § 40.

enthält, und dessen Enveloppe jede Extremale des Büschels in dem zu P_1 konjugierten Punkt berührt.[1])

Für dieses Büschel besteht außerdem die Differentialgleichung (90).

Man kann zu demselben Resultat noch auf einem zweiten Weg gelangen, der zugleich über den oben ausgeschlossenen Fall II Aufschluß gibt. Dazu führt folgende aus der allgemeinen Theorie der Kongruenzen[2]) bekannte Fragestellung:

Greift man aus der Kongruenz (73) ein beliebiges Büschel (78) heraus, so wird dasselbe im allgemeinen keine Enveloppe besitzen, d. h. es wird keine Kurve geben, welche von sämtlichen Kurven des Büschels berührt wird. Man kann sich aber die Aufgabe stellen, *alle in der Kongruenz enthaltenen Büschel zu bestimmen, welche eine Enveloppe besitzen.*

Man wird dann auf die beiden Gleichungen (88) und (90) als notwendige und hinreichende Bedingungen geführt, aus denen sich dann (89) ergibt. Unter den beiden oben gemachten einschränkenden Voraussetzungen folgt daraus, daß es ein und nur ein die Kurve $\mathfrak{E}_0'$ enthaltendes Büschel gibt, welches eine Enveloppe $\mathfrak{F}'$ besitzt; dieselbe berührt die Kurven des Büschels in ihren Brennpunkten und liegt daher auf der Brennfläche.

Projiziert man dieses Büschel räumlicher Extremalen mit seiner Enveloppe $\mathfrak{F}'$ auf die x, y-Ebene, so erhält man das oben bestimmte ausgezeichnete ebene Büschel mit seiner Enveloppe $\mathfrak{F}$.

Dagegen führt der Fall II auf ein Büschel räumlicher Extremalen, welches keine Enveloppe besitzt, dessen Kurven aber sämtlich in ihren jeweiligen Brennpunkten einen auf der x, y-Ebene senkrechten Zylinder berühren. Das aus der Projektion eines solchen Büschels entstehende ebene Büschel hat zwar auch noch die verlangten Eigenschaften, genügt aber nicht mehr der für die weitere Entwicklung wesentlichen Differentialgleichung (90).

Beispiel II (Siehe pp. 465, 483, 494):

Aus den Gleichungen (80) berechnet man

$$u = 4\lambda^2 \sin\tau\cos\tau, \qquad v = -4\lambda\sin^2\tau,$$

$$m = -2\lambda\sin^2\tau, \qquad n = 2\tau - 2\sin\tau\cos\tau.$$

Wir bestimmen zunächst die zum konjugierten Punkt im engeren Sinn gehörige Enveloppe $\mathfrak{F}$. Hier ist nach (81)

$$\tau'(\varkappa, \lambda) = \pi.$$

Die Differentialgleichung (90) wird also

$$2\pi d\lambda = 0$$

mit der Lösung: $\lambda = \lambda_0$.

---

[1]) Es verdient übrigens hervorgehoben zu werden, daß der konjugierte Punkt P_1' nicht notwendig der zunächst auf P_1 folgende Berührungspunkt von $\mathfrak{E}_0$ mit der Enveloppe zu sein braucht; vgl. unten Beispiel II.

[2]) Vgl. Darboux, loc. cit., p. 6, und die Untersuchungen von Bliss und Mason über das räumliche Variationsproblem ohne Nebenbedingungen, *Transactions of the American Mathematical Society,* Bd. IX (1908), p. 450.

Das zum konjugierten Punkt im engeren Sinn gehörige ausgezeichnete Extremalenbüschel ist also das Büschel von Kreisen mit dem konstanten Radius $|\lambda_0|$ *durch den Punkt* P_1.

Die Enveloppe desselben besteht aus dem Kreis mit dem Radius $2|\lambda_0|$ um den Punkt P_1, zusammen mit dem als degenerierte Kurve zu betrachtenden Punkt P_1. Aber nur der letztere Bestandteil der Enveloppe kommt nach der Definition der Kurve $\mathfrak{F}$ für uns in Betracht. Dies geht auch deutlich aus der Betrachtung des zugehörigen Büschels von räumlichen Extremalen (Schraubenlinien) hervor; die Enveloppe $\mathfrak{F}'$ desselben degeneriert in den Punkt Q_1':

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = -2\lambda_0\pi,$$

durch welchen sämtliche Kurven des Büschels für $\tau = \pi$ hindurchgehen. Das zeigt wieder, daß die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in den Punkt $P_1 (\tau = \pi)$ degeneriert.

Interessanter gestaltet sich die Untersuchung für den *zweiten konjugierten Punkt*[1])

$$\tau'(\varkappa, \lambda) = \gamma$$

(vgl. p. 495). Hier lautet die Differentialgleichung (88)

$$\lambda \cos\gamma\, d\varkappa - \sin\gamma\, d\lambda = 0,$$

deren Integration bei passender Konstantenbestimmung ergibt

$$\lambda = \lambda_0 e^{\operatorname{cotg}(\varkappa - \varkappa_0)}.$$

Setzt man diesen Wert von λ in (80) und (82) ein, so erhält man das ausgezeichnete Büschel von räumlichen Extremalen und dessen Enveloppe $\mathfrak{F}'$. Daraus ergeben sich dann durch Projektion auf die x, y-Ebene, d. h. durch Unterdrückung der Gleichung für z, das ausgezeichnete ebene Extremalenbüschel, sowie dessen Enveloppe $\mathfrak{F}$. Für letztere erhält man in Polarkoordinaten mit dem Punkt P_1 als Pol das Resultat

$$r = -2\lambda_0 \sin\gamma\, e^{\operatorname{cotg}\gamma(\varphi - \gamma - \varkappa_0)},$$

also eine *logarithmische Spirale,* welche die radii vectores vom Punkt P_1 aus unter dem konstanten Winkel γ schneidet, ein Resultat, das sich auch a priori aus der charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Spirale und der geometrischen Bedeutung des Winkels τ (siehe Fig. 108) hätte erschließen lassen. Diese logarithmische Spirale berührt in der Tat jeden durch den Punkt P_1 gehenden Kreis des ausgezeichneten Büschels in dem dem Wert $\tau = \gamma$ entsprechenden konjugierten Punkt, freilich auch schon vorher in dem nicht konjugierten Punkt $\tau = \gamma - \pi$.

d) Der Enveloppensatz für isoperimetrische Probleme:

Für das im vorigen Absatz bestimmte ausgezeichnete Extremalenbüschel durch den Punkt P_1 gilt nun ein dem Enveloppensatz von § 44, c) analoger Satz.

---

[1]) Nach Kneser, *Konjugierte Punkte beim isoperimetrischen Problem,* Jahresberichte der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, 1906.

Zum Beweis desselben betrachten wir das Integral J, genommen entlang irgend einer Extremalen $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ der Doppelschar (64) vom Punkt $P_1(t_1)$ bis zu einem variabeln Punkt $P(t)$, und bezeichnen dasselbe mit

$$U(t, \varkappa, \lambda) = \int_{t_1}^{t} \mathfrak{F}(t, \varkappa, \lambda)\, dt.$$

Für die partiellen Ableitungen der Funktion U erhalten wir, ganz analog den Formeln (75),

$$\begin{aligned} U_t &= \mathfrak{F}_{x'}\varphi_t + \mathfrak{F}_{y'}\psi_t, \quad (= \mathfrak{F}),\\ U_\varkappa &= \mathfrak{F}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{F}_{y'}\psi_\varkappa - \int_{t_1}^{t} \mathfrak{T}\mathfrak{u}\, dt, \\ U_\lambda &= \mathfrak{F}_{x'}\varphi_\lambda + \mathfrak{F}_{y'}\psi_\lambda - \int_{t_1}^{t} \mathfrak{T}\mathfrak{v}\, dt, \end{aligned} \tag{91}$$

wobei $\mathfrak{T}$ die für die Extremale $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ berechnete Funktion T von § 26,a) bedeutet.

Addieren wir diese Gleichungen zu den mit λ multiplizierten Gleichungen (75) und erinnern uns, daß die Extremale $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ der Differentialgleichung

$$\mathfrak{T} + \lambda\mathfrak{V} = 0$$

genügt, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} U_t + \lambda\chi_t &= \mathfrak{H}_{x'}\varphi_t + \mathfrak{H}_{y'}\psi_t,\\ U_\varkappa + \lambda\chi_\varkappa &= \mathfrak{H}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{H}_{y'}\psi_\varkappa,\\ U_\lambda + \lambda\chi_\lambda &= \mathfrak{H}_{x'}\varphi_\lambda + \mathfrak{H}_{y'}\psi_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Wir betrachten jetzt insbesondere die beiden Integrale J und K entlang der dem Parameterwert α entsprechenden Extremalen $\mathfrak{E}$ des unter c) bestimmten ausgezeichneten Extremalenbüschels vom Punkt $P_1(t_1)$ bis zu dem dem Wert $t = \tilde{t}(\alpha)$ entsprechenden konjugierten Punkt P'. Die so definierten Integralwerte, d. h. also in unserer früheren Bezeichnung die Größen

$$\begin{aligned} [U] &\equiv U(\tilde{t}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}),\\ [\chi] &\equiv \chi(\tilde{t}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}), \end{aligned}$$

sind eindeutige Funktionen des Parameters α, die wir mit $J(\alpha)$ beziehungsweise $K(\alpha)$ bezeichnen. Wir erhalten dann zunächst für die Ableitung von $K(\alpha)$

$$K'(\alpha) = [\chi_t]\tilde{t}' + [\chi_\varkappa]\tilde{\varkappa}' + [\chi_\lambda]\tilde{\lambda}',$$

also, wenn wir von (75) Gebrauch machen und uns der Definition der die Enveloppe $\mathfrak{F}$ darstellenden Funktionen $\tilde{x}(\alpha)$, $\tilde{y}(\alpha)$ erinnern,

$$K'(\alpha) = [\mathcal{G}_{x'}]\tilde{x}' + [\mathcal{G}_{y'}]\tilde{y}' - ([m]\tilde{\varkappa}' + [n]\tilde{\lambda}').$$

Nun genügen aber die Funktionen $\tilde{\varkappa}(\alpha)$, $\tilde{\lambda}(\alpha)$ für das ausgezeichnete Extremalenbüschel der Differentialgleichung (90), also ist

$$K'(\alpha) = [\mathcal{G}_{x'}]\tilde{x}' + [\mathcal{G}_{y'}]\tilde{y}'. \tag{93}$$

Ganz in derselben Weise folgt aus (92)

$$J'(\alpha) + \tilde{\lambda}(\alpha)K'(\alpha) = [\mathcal{H}_{x'}]\tilde{x}' + [\mathcal{H}_{y'}]\tilde{y}',$$

und hieraus unter Benutzung von (93), da

$$[\mathcal{H}] = [\mathfrak{F}] + \tilde{\lambda}[\mathcal{G}],$$

$$J'(\alpha) = [\mathfrak{F}_{x'}]\tilde{x}' + [\mathfrak{F}_{y'}]\tilde{y}'. \tag{94}$$

Wir unterscheiden jetzt, wie in § 47, zwei Fälle:

Fall I: Die Enveloppe $\mathfrak{F}$ degeneriert nicht in einen Punkt.

Dann können wir nach (87) eine nicht identisch verschwindende Funktion $\varrho(\alpha)$ bestimmen, so daß

$$\tilde{x}' = \varrho[\varphi_t], \qquad \tilde{y}' = \varrho[\psi_t].$$

Wir wollen annehmen, daß $\varrho(\alpha_0) \neq 0$, daß also die Enveloppe $\mathfrak{F}$ im Punkte P_1' keinen singulären Punkt besitzt. Wir dürfen dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\varrho(\alpha_0) > 0$, d. h. daß die Enveloppe und die Extremale sich im Punkt P_1' gleichsinnig berühren, da wir andernfalls zuvor den positiven Sinn auf der Enveloppe durch die Substitution $\alpha' = -\alpha$ umkehren könnten. Nunmehr folgt ganz wie in § 44, c)

$$J'(\alpha) = F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'), \qquad K'(\alpha) = G(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'). \tag{95}$$

Integrieren wir diese Gleichung von α_0 bis zu einem hinreichend nahen Wert α, so erhalten wir den von KNESER[1]) herrührenden *Enveloppensatz für isoperimetrische Probleme:*

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{E}}(P_1P_3) + J_{\mathfrak{F}}(P_3P_1') &= J_{\mathfrak{E}_0}(P_1P_1'), \\ K_{\mathfrak{E}}(P_1P_3) + K_{\mathfrak{F}}(P_3P_1') &= K_{\mathfrak{E}_0}(P_1P_1'). \end{aligned} \tag{96}$$

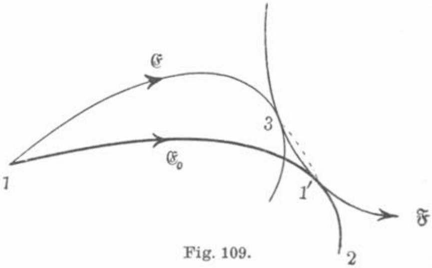

Fig. 109.

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, daß der aus dem Bogen P_1P_3 von $\mathfrak{E}$ und dem Bogen P_3P_1' von $\mathfrak{F}$ zusammengesetzte Kurvenzug eine zulässige Variation des Extremalenbogens P_1P_1' ist. Daher folgt jetzt

[1]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, § 40.

aus der ersten der Gleichungen (96) ähnlich wie in § 47, b), daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ kein Extremum mehr liefern kann, wenn sein Endpunkt P_2 mit P_1' zusammenfällt, also a fortiori auch nicht mehr, wenn $P_1' \prec P_2$

Hiermit haben wir einen *zweiten Beweis*[1]) *für die Notwendigkeit der Bedingung*

$$P_2 \overline{\overline{\prec}} P_1' \tag{III}$$

gewonnen, allerdings unter der beschränkenden Voraussetzung, daß die Bedingung (90) erfüllt ist, und daß die Enveloppe $\mathfrak{F}$ im Punkt P_1' keinen singulären Punkt besitzt.

Fall II: Die Enveloppe degeneriert in einen Punkt, der notwendig mit dem konjugierten Punkt P_1' auf $\mathfrak{E}_0$ zusammenfallen muß. In diesem Fall gehen sämtliche Extremalen des ausgezeichneten Büschels durch den Punkt P_1', und es ist

$$\tilde{x}'(\alpha) \equiv 0, \qquad \tilde{y}'(\alpha) \equiv 0,$$

also

$$J'(\alpha) \equiv 0, \qquad K'(\alpha) \equiv 0.$$

Wir erhalten also in diesem Fall den Satz:

Wenn sämtliche Extremalen des ausgezeichneten Büschels durch den Punkt P_1 zugleich auch durch den konjugierten Punkt P_1' gehen, so hat sowohl das Integral J als das Integral K, genommen entlang den verschiedenen Extremalen des ausgezeichneten Büschels von P_1 nach P_1', einen konstanten Wert:

$$J(\alpha) = J(\alpha_0), \qquad K(\alpha) = K(\alpha_0). \tag{97}$$

Daraus folgt dann wieder wie in § 47, b), daß auch in diesem Fall ein Extremum über den konjugierten Punkt hinaus nicht bestehen kann.

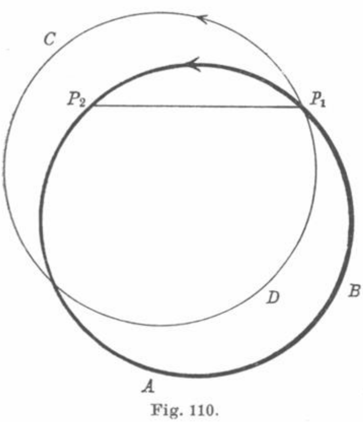

Fig. 110.

Ein fast triviales Beispiel hierzu liefert unser Beispiel II (p. 498). Bei dem Büschel von Kreisen durch den Punkt P_1 mit dem konstanten Radius $|\lambda_0|$ ist für den Bogen $P_1 P_1'$, d. h. für einen vollen Kreisumfang, sowohl die Bogenlänge als der Flächeninhalt konstant. Daraus folgt aber sofort, daß ein über den vollen Kreisumfang hinausgehender Kreisbogen $P_1 A B P_1 P_2$ kein Maximum liefern kann. Denn der aus dem Kreis $P_1 C D P_1$ mit demselben Radius und dem Kreisbogen $P_1 P_2$ zusammengesetzte Kurvenzug ist eine zulässige Variation und liefert denselben Wert für J, der aber nach § 59, b) sicher kein Maximum sein kann wegen der Ecke im Punkt P_1.

[1]) Vgl. Kneser, *Lehrbuch*, § 40.

§ 63. Der Weierstraß'sche Fundamentalsatz für isoperimetrische Probleme.

Auch beim isoperimetrischen Problem beruht der Hinlänglichkeitsbeweis auf einem dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz über die Darstellung der totalen Variation durch die $\mathcal{E}$-Funktion analogen Satz. Zum Beweis desselben haben wir zunächst die Theorie des Feldintegrals und der Hamilton'schen Formeln von § 31 auf isoperimetrische Probleme zu übertragen, wobei wieder die schon im vorangehenden Paragraphen hervortretende Auffassung des isoperimetrischen Problems als eines räumlichen Problems von entscheidender Bedeutung sein wird.

a) **Die Hamilton'schen Formeln für isoperimetrische Probleme:**

Es sei $P_0(t_0)$ ein Punkt auf der Fortsetzung unseres Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$ über den Punkt P_1 hinaus. Dann lassen sich die Entwicklungen von § 62, a) und b) ohne weiteres auch für den Punkt P_0 durchführen. Wir erhalten zunächst eine Doppelschar von ebenen Extremalen durch den Punkt P_0, die wir wieder — also unter Bezeichnungswechsel — mit

$$x = \varphi(t, \varkappa, \lambda), \qquad y = \psi(t, \varkappa, \lambda) \tag{98}$$

bezeichnen; weiter eine Kongruenz von räumlichen Extremalen durch den Punkt P_0

$$x = \varphi(t, \varkappa, \lambda), \qquad y = \psi(t, \varkappa, \lambda), \qquad z = \chi(t, \varkappa, \lambda), \tag{99}$$

wobei nunmehr die Funktion $\chi(t, \varkappa, \lambda)$ den Wert des Integrals K entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ der Doppelschar (98) vom Punkt P_0 bis zu einem variabeln Punkt $P(t)$ bedeutet.

An Stelle der Gleichungen (64) bis (70), (72) bis (77) treten entsprechende auf die Kongruenz durch den Punkt P_0 bezügliche Gleichungen, die wir von jenen durch Überstreichen unterscheiden wollen, und die sich von ihnen nur durch die Substitution von t_0, x_0, y_0 an Stelle von t_1, x_1, y_1, sowie durch die veränderte Bedeutung der Funktionen φ, ψ, χ und dementsprechend der Funktionen $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ etc. unterscheiden.

Wir nehmen jetzt an, daß die Gleichungen (99), als Transformation zwischen einem $t, \varkappa, \lambda$-Raum und einem x, y, z-Raum aufgefaßt, eine ein-eindeutige Beziehung zwischen einem bestimmten Bereich $\mathcal{A}$ des $t, \varkappa, \lambda$-Raumes und dessen Bild $\mathcal{S}'$ im x, y, z-Raum definieren, so daß also durch jeden Punkt des Bereiches $\mathcal{S}'$ eine und nur eine räumliche Extremale der Kongruenz (99) hindurchgeht, für welche das zugehörige Wertsystem $t, \varkappa, \lambda$ dem Bereich $\mathcal{A}$ angehört.

Überdies soll vorausgesetzt werden, daß die Funktionen

$$\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt}; \ \psi, \psi_t, \psi_{tt}$$

als Funktionen ihrer drei Argumente im Bereich $\mathfrak{A}$ von der Klasse C' sind; ferner daß die Projektion $\mathcal{S}$ des Bereiches $\mathcal{S}'$ auf die x, y-Ebene ganz im Bereich $\mathfrak{R}$ enthalten ist, und endlich, daß

$$\mathcal{H}_1(t, \varkappa, \lambda) > 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{A} \tag{100}$$

und

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}. \tag{101}$$

Alle diese Annahmen fassen wir in die Aussage zusammen, daß der Bereich $\mathcal{S}'$ *ein Feld von räumlichen Extremalen* bildet.

Die zugehörigen *inversen Funktionen des Feldes*, welche die Auflösung der Gleichungen (99) nach $t, \varkappa, \lambda$ darstellen, bezeichnen wir mit

$$t = \mathfrak{t}(x, y, z), \qquad \varkappa = \mathfrak{k}(x, y, z), \qquad \lambda = \mathfrak{l}(x, y, z),$$

so daß also, identisch in x, y, z:

$$\varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}) \equiv x, \qquad \psi(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}) \equiv y, \qquad \chi(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}) \equiv z \tag{102}$$

und gleichzeitig, identisch in $t, \varkappa, \lambda$:

$$\mathfrak{t}(\varphi, \psi, \chi) \equiv t, \qquad \mathfrak{k}(\varphi, \psi, \chi) \equiv \varkappa, \qquad \mathfrak{l}(\varphi, \psi, \chi) \equiv \lambda. \tag{103}$$

Es sei jetzt $Q_3(x_3, y_3, z_3)$ irgend ein Punkt von $\mathcal{S}'$, $P_3(x_3, y_3)$ seine Projektion auf die x, y-Ebene. Alsdann geht von P_0 nach Q_3 eine und nur eine räumliche Feldextremale $\mathfrak{E}_3'$; nach der Bedeutung der Ordinate z_3 ist dann die Projektion $\mathfrak{E}_3$ von $\mathfrak{E}_3'$ zugleich die einzige Extremale der Doppelschar (98), welche durch den Punkt P_3 geht, und für welche das Integral K den Wert z_3 besitzt:

$$K_{03} = z_3,$$

und die zu $\mathfrak{E}_3$ gehörige isoperimetrische Konstante hat den Wert

$$\lambda_3 = \mathfrak{l}(x_3, y_3, z_3).$$

Das Integral J, genommen entlang $\mathfrak{E}_3$ von P_0 bis P_3, betrachtet als Funktion von x_3, y_3, z_3, nennen wir das zum Feld $\mathcal{S}'$ gehörige *Feldintegral* und bezeichnen seinen Wert mit $W(x_3, y_3, z_3)$, so daß also nach der Bedeutung der Funktion U

$$W(x, y, z) = U(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}),$$

wenn wir der Einfachheit halber den Index 3 durchweg unterdrücken.

Wir berechnen jetzt die partiellen Ableitungen von W; zunächst ist

$$\left.\begin{aligned} W_x &= (U_t)\mathfrak{t}_x + (U_\varkappa)\mathfrak{k}_x + (U_\lambda)\mathfrak{l}_x, \\ W_y &= (U_t)\mathfrak{t}_y + (U_\varkappa)\mathfrak{k}_y + (U_\lambda)\mathfrak{l}_y, \\ W_z &= (U_t)\mathfrak{t}_z + (U_\varkappa)\mathfrak{k}_z + (U_\lambda)\mathfrak{l}_z, \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

wenn wir durch die Klammer ( ) andeuten, daß $t, \varkappa, \lambda$ durch $\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ zu ersetzen sind.

Multipliziert man jetzt die Gleichungen (104) der Reihe nach mit $\mathfrak{t}_x, \mathfrak{k}_x, \mathfrak{l}_x$ und berücksichtigt die durch Differentiation der Identitäten (102) sich ergebenden Gleichungen

$$(\varphi_t)\mathfrak{t}_x + (\varphi_\varkappa)\mathfrak{k}_x + (\varphi_\lambda)\mathfrak{l}_x = 1,$$
$$(\psi_t)\mathfrak{t}_x + (\psi_\varkappa)\mathfrak{k}_x + (\psi_\lambda)\mathfrak{l}_x = 0,$$
$$(\chi_t)\mathfrak{t}_x + (\chi_\varkappa)\mathfrak{k}_x + (\chi_\lambda)\mathfrak{l}_x = 0,$$

so erhält man

$$W_x = (\mathcal{H}_{x'})$$

und ganz analog

$$W_y = (\mathcal{H}_{y'}), \qquad W_z + \mathfrak{l} = 0.$$

Nun sind aber die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen nach der Bedeutung des Zeichens $\mathcal{H}$ und der Klammer gleich den Funktionen $H_{x'}, H_{y'}$ mit den folgenden Werten ihrer fünf Argumente $x, y, x', y'; \lambda$:

$$(\varphi), (\psi), (\varphi_t), (\psi_t); \mathfrak{l}.$$

Die ersten beiden sind nach (102) identisch gleich x und y; das dritte und vierte dürfen wir wegen der Homogeneität von $H_{x'}, H_{y'}$ ersetzen durch die Funktionen

$$p(x, y, z) = \frac{(\varphi_t)}{\sqrt{(\varphi_t^2) + (\psi_t^2)}}, \qquad q(x, y, z) = \frac{(\psi_t)}{\sqrt{(\varphi_t^2) + (\psi_t^2)}}. \tag{105}$$

Daher erhalten wir schließlich für *die partiellen Ableitungen des Feldintegrals* die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= H_{x'}(x, y, p, q; \mathfrak{l}), \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= H_{y'}(x, y, p, q; \mathfrak{l}), \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= -\mathfrak{l}. \end{aligned} \tag{106}$$

Darin bedeuten die Funktionen $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$ die Richtungskosinus der positiven Tangente der Extremalen $\mathfrak{E}_3$ im Punkt P_3, und $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(x, y, z)$ ist der zur Extremalen $\mathfrak{E}_3$ gehörige Wert λ_3 der isoperimetrischen Konstanten.

Diese Formeln sind das *Analogon der Hamilton'schen Formeln* (148) von § 31 für das isoperimetrische Problem.

b) **Die Weierstraß'sche Konstruktion für isoperimetrische Probleme:**

Aus den Hamilton'schen Formeln ergibt sich nun der Weierstraß'sche Fundamentalsatz entweder mittels der Weierstraß'schen Konstruktion oder mittels des Hilbert'schen Unabhängigkeitssatzes, beide in geeigneter Weise modifiziert. Wir betrachten zuerst die erste der beiden Methoden.

Es sei[1]) $\mathfrak{E}_0'$ der unserem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ in der Kongruenz (99) zugeordnete räumliche Extremalenbogen:

$$\mathfrak{E}_0': \quad x = \varphi(t, \varkappa_0, \lambda_0), \quad y = \psi(t, \varkappa_0, \lambda_0), \quad z = \chi(t, \varkappa_0, \lambda_0), \quad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2.$$

Derselbe führt vom Punkt Q_1: $x = x_1, y = y_1, z = z_1 (= K_{01})$ nach dem Punkt Q_2: $x = x_2, y = y_2, z = z_2 (= K_{02})$.

Wir nehmen an, dieser Bogen $\mathfrak{E}_0'$ sei ganz im Innern des Feldes $\mathfrak{S}'$ gelegen, und ziehen nunmehr in der x, y-Ebene irgendeine zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{E}}$ von P_1 nach P_2

$$\overline{\mathfrak{E}}: \qquad x = \bar{x}(\tau), \qquad y = \bar{y}(\tau), \qquad \tau_1 \gtreqless \tau \gtreqless \tau_2;$$

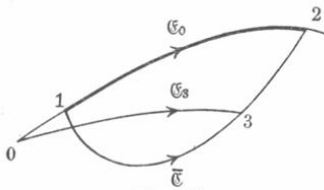

Fig. 111.

als zulässige Kurve genügt dieselbe der isoperimetrischen Bedingung (1)

$$\overline{K}_{12} = l. \tag{107}$$

Den Wert des Integrals K, genommen von P_0 entlang $\mathfrak{E}_0^*$ bis P_1 und von da entlang $\overline{\mathfrak{E}}$ bis zu einem variabeln Punkt $P_3(\tau)$ von $\overline{\mathfrak{E}}$, bezeichnen wir mit $\bar{z}(\tau)$, so daß also

$$\bar{z}(\tau) = K_{01} + \overline{K}_{13} = K_{01} + \int_{\tau_1}^{\tau} G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\,d\tau. \tag{108}$$

Dann ordnen wir der Kurve $\overline{\mathfrak{E}}$ die Raumkurve

$$\overline{\mathfrak{E}}': \qquad x = \bar{x}(\tau), \qquad y = \bar{y}(\tau), \qquad z = \bar{z}(\tau)$$

zu. Da

$$\bar{z}(\tau_1) = K_{01} = z_1, \qquad \bar{z}(\tau_2) = K_{01} + \overline{K}_{12} = K_{01} + K_{12} = z_2,$$

so führt die Kurve $\overline{\mathfrak{E}}'$, ebenso wie $\mathfrak{E}_0'$, vom Punkt Q_1 nach dem Punkt Q_2.

Wir führen jetzt die *beschränkende Annahme* ein, daß auch *die der Kurve $\overline{\mathfrak{E}}$ zugeordnete Raumkurve $\overline{\mathfrak{E}}'$ ganz im räumlichen Feld $\mathfrak{S}'$ gelegen ist.* Für die Kurve $\overline{\mathfrak{E}}$ selbst bedeutet dies: Durch jeden Punkt

[1]) Mit Bezeichnungswechsel(!) gegen § 62, b).

P_3 von $\overline{\mathfrak{C}}$ läßt sich von P_0 aus eine und nur eine ebene Extremale $\mathfrak{E}_3$ ziehen, für welche

$$K_{03} = K_{01} + \overline{K}_{13}. \tag{109}$$

Man pflegt diese Annahme auch dadurch auszudrücken, daß man sagt: *Für die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ soll die Weierstraß'sche Konstruktion möglich sein.*

Jetzt betrachten wir mit Weierstraß das Integral J, genommen von P_0 entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_3$ bis zum Punkt P_3 und von da entlang $\overline{\mathfrak{C}}$ bis P_2; wir bezeichnen dasselbe als Funktion von τ mit $S(\tau)$, so daß also

$$S(\tau) = J_{03} + \overline{J}_{32}.$$

Es ist dann insbesondere

$$S(\tau_1) = J_{01} + \overline{J}_{12}, \qquad S(\tau_2) = J_{02} = J_{01} + J_{12},$$

also

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0} = -[S(\tau_2) - S(\tau_1)], \quad \text{oder}$$

$$\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dS(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Nun ist aber nach (109) und nach der Definition der Funktion W:

$$J_{03} = W(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau)),$$

$$\overline{J}_{32} = \int_{\tau}^{\tau_2} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}') d\tau.$$

Daher kann man nach (106) den Ausdruck für die Ableitung $S'(\tau)$ unmittelbar hinschreiben; derselbe vereinfacht sich, wenn man aus (108) den Wert von $\bar{z}'$ einführt:

$$\bar{z}' = G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'),$$

und man erhält in der Bezeichnung von § 60, b) den *Weierstraß'schen Fundamentalsatz für isoperimetrische Probleme*[1])

$$\Delta J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}; p, q; \bar{x}', \bar{y}'; \mathfrak{l}) d\tau. \tag{110}$$

Dabei ist

$$p = p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \qquad q = q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \qquad \mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

---

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; Weierstraß benutzt die Kongruenz von räumlichen Extremalen durch den Punkt P_1, vgl. p. 259, Fußnote [3]). Die hier gegebene Modifikation, bei welcher der Punkt P_0 an Stelle von P_1 tritt, rührt von Kneser her, *Lehrbuch*, §§ 36 und 38.

oder ohne Bezugnahme auf den Raum ausgedrückt: p, q sind die Richtungskosinus derjenigen von P_0 nach dem Punkt $P_3(\bar{x}, \bar{y})$ der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ führenden Extremalen, für welche

$$K_{03} = K_{01} + \overline{K}_{13},$$

während $\mathfrak{l}$ die isoperimetrische Konstante für eben diese Extremale $\mathfrak{E}_3$ bedeutet.

c) **Der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz für isoperimetrische Probleme:**

Andererseits folgt aus den Hamilton'schen Formeln (106) unmittelbar das Analogon des Hilbert'schen Unabhängigkeitssatzes. Ist nämlich $\mathfrak{C}'$ irgendeine gewöhnliche Raumkurve, welche ganz im Feld $\mathcal{S}'$ gelegen ist und von einem Punkt $Q_3(x_3, y_3, z_3)$ nach einem Punkt $Q_4(x_4, y_4, z_4)$ führt, so ist *der Wert des räumlichen Linienintegrals*

$$J^*_{\mathfrak{C}'} = \int_{\mathfrak{C}'} \{ H_{x'}(x, y, p, q; \mathfrak{l}) dx + H_{y'}(x, y, p, q; \mathfrak{l}) dy - \mathfrak{l} dz \}, \tag{111}$$

genommen entlang der Kurve $\mathfrak{C}'$ von Q_3 nach Q_4, *nur von der Lage der beiden Endpunkte Q_3 und Q_4, nicht aber von der sonstigen Gestalt der Kurve $\mathfrak{C}'$ abhängig.* Denn es ist

$$J^*_{\mathfrak{C}'} = \int_{\mathfrak{C}'} d\,W(x, y, z) = W(x_4, y_4, z_4) - W(x_3, y_3, z_3). \tag{112}$$

Ist die Kurve $\mathfrak{C}'$ insbesondere eine Extremale $\mathfrak{E}'$ des räumlichen Feldes, dargestellt durch die Gleichungen (99), so ist nach (103) und (105)

$$p(\varphi, \psi, \chi) = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_t^2 + \psi_t^2}}, \qquad q(\varphi, \psi, \chi) = \frac{\psi_t}{\sqrt{\varphi_t^2 + \psi_t^2}}, \qquad \mathfrak{l}(\varphi, \psi, \chi) = \lambda.$$

Da ferner in diesem Fall

$$dz = \chi_t(t, \varkappa, \lambda) dt = \mathfrak{G}(t, \varkappa, \lambda) dt,$$

so geht das Integral nach einfacher Reduktion über in

$$J^*_{\mathfrak{E}'} = \int_{t_3}^{t_4} \mathfrak{F}(t, \varkappa, \lambda) dt.$$

Es ist also *entlang einer Extremalen $\mathfrak{E}'$ des räumlichen Feldes*[1])

$$J^*_{\mathfrak{E}'} = J_{\mathfrak{E}}, \tag{113}$$

wenn $\mathfrak{E}$ die Projektion der räumlichen Extremalen $\mathfrak{E}'$ auf die x, y-Ebene bedeutet.

[1]) Vgl. den analogen Satz in § **17**, b).

Nennt man die Flächen

$$W(x, y, z) = \text{konst.}$$

die *Transversalenflächen* des räumlichen Feldes, so folgt aus (112), daß *das Hilbert'sche Integral J^*, genommen zwischen zwei Punkten derselben Transversalenfläche, stets gleich Null ist.*

Aus (113) ergibt sich nun genau wie in § 17, c) ein zweiter Beweis des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes. Denn da die beiden Kurven $\overline{\mathfrak{C}}'$ und $\mathfrak{C}_0'$ in $\mathcal{S}'$ liegen und dieselben Endpunkte haben, so folgt

$$J_{\mathfrak{C}_0} = J^*_{\mathfrak{C}_0'} = J^*_{\overline{\mathfrak{C}}'},$$

und daher

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J^*_{\overline{\mathfrak{C}}'}, \tag{114}$$

woraus sich sofort die Gleichung (110) ergibt.

§ 64. Hinreichende Bedingungen beim isoperimetrischen Problem.

Die Frage der hinreichenden Bedingungen liegt beim isoperimetrischen Problem viel weniger einfach als bei dem Problem ohne Nebenbedingungen. Zwar reicht bei manchen Beispielen der Weierstraß'sche Fundamentalsatz aus, um die Existenz eines starken Extremums zu beweisen. Dagegen genügt dieser Satz nicht, um allgemein zu beweisen, daß die den Bedingungen (I'), (II'), (III'), (IV') von § 32, b) entsprechenden Bedingungen für ein starkes Minimum hinreichen; er gestattet vielmehr nur zu zeigen, daß, falls diese Bedingungen erfüllt sind, $\Delta J > 0$ für alle diejenigen Vergleichskurven in einer gewissen Umgebung des Bogens $\mathfrak{C}_0$, für welche die Weierstraß'sche Konstruktion möglich ist. Das ist aber eine nicht in der Natur der ursprünglichen Aufgabe gelegene, künstliche Beschränkung der Vergleichskurven.

Die hiernach nötige Ergänzung der Weierstraß'schen Theorie ist vor kurzem von Lindeberg[1]) gegeben worden mit Hilfe eines Satzes über Extrema ohne Nebenbedingungen, welcher zusammen mit dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz zu dem Schlußresultat führt, daß auch im Fall des isoperimetrischen Problems die oben genannten vier Bedingungen für ein starkes Extremum hinreichend sind.

[1]) In einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit „*Über einige Fragen der Variationsrechnung*", deren Manuskript mir Herr Lindeberg gütigst zur Verfügung gestellt hat. S. 698

a) Erledigung der beiden Beispiele:

Unsere beiden Beispiele II und XXI gehören gerade zu denjenigen, bei welchen der Weierstraß'sche Satz ausreicht, um die Existenz eines starken Extremums (und zwar sogar eines absoluten) nachzuweisen.

Beispiel II (Siehe pp. 465, 483, 494, 498).

Wir betrachten neben dem Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ eine beliebige von P_1 nach P_2 führende gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von der vorgeschriebenen Länge $2\,l$. Wir nehmen dann auf der Fortsetzung des Kreisbogens $\mathfrak{C}_0$ über P_1 hinaus einen Punkt P_0 an, der nur der einen Bedingung unterworfen ist, nicht auf $\overline{\mathfrak{C}}$ zu liegen.

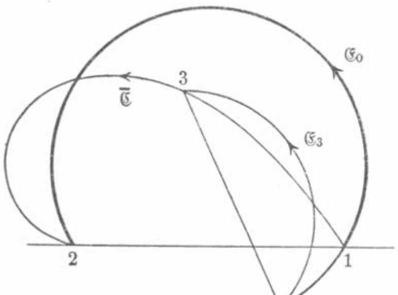

Fig. 112.

Ist dann P_3 irgend ein Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$, so ist P_3 von P_0 verschieden, und die Summe z_3 der Länge des Bogens P_0P_1 von $\mathfrak{C}_0^*$ plus der Länge des Bogens P_1P_3 von $\overline{\mathfrak{C}}$ ist sicher größer als der Abstand $|P_0P_3|$:

$$z_3 > \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} > 0. \quad (115)$$

Daher geht nach den Resultaten der in § 59, c) gegebenen Konstantenbestimmung von P_0 nach P_3 ein und nur ein Kreisbogen $\mathfrak{C}_3$, dessen Länge gleich der eben genannten Bogensumme z_3 ist:

$$K_{03} = K_{01} + \overline{K}_{13} \equiv z_3,$$

und welcher überdies weniger als einen vollen Kreisumfang beträgt und in positivem Sinne durchlaufen wird.

Oder anders ausgedrückt: Die Kongruenz von räumlichen Extremalen durch den Punkt P_0, welche nach (80) durch die Gleichungen

$$x - x_0 = -2\lambda\cos(\tau + \varkappa)\sin\tau,$$
$$y - y_0 = -2\lambda\sin(\tau + \varkappa)\sin\tau,$$
$$z = -2\lambda\tau$$

dargestellt wird, bildet, wenn die Größen τ, $\varkappa$, λ auf den Bereich

$$0 < \tau < \pi, \qquad 0 \overline{\underset{<}{=}} \varkappa < 2\pi, \qquad \lambda < 0$$

beschränkt werden, ein räumliches Feld $\mathcal{S}'$, welches den durch die Ungleichung

$$z > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > 0 \quad (116)$$

definierten Teil des Raumes ausfüllt, und die der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ zugeordnete Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ liegt ganz in diesem Feld $\mathcal{S}'$.

Daher gilt für die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ der Weierstraß'sche Satz (110). Ferner ist in leichtverständlicher Bezeichnung

$$\mathcal{E}(x_3, y_3;\ p_3, q_3;\ \overline{p}_3, \overline{q}_3;\ \lambda_3) = \lambda_3\,[1 - \cos(\overline{\theta}_3 - \theta_3)].$$

λ_3 ist negativ und $\cos(\bar{\theta}_3 - \theta_3)$ kann nicht entlang der ganzen Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ gleich 1 sein, wenn, wie wir annehmen, $\bar{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C}_0$ verschieden ist. Dies folgt, wie unter b) allgemein gezeigt wird, daraus, daß nach (81) entlang der ganzen Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$

$$\Delta(\tau_3, \varkappa_3, \lambda_3) = 8\lambda_3^2 \sin\tau_3 (\sin\tau_3 - \tau_3\cos\tau_3) \neq 0,$$

da

$$0 < \tau_3 < \pi, \quad \lambda_3 < 0.$$

Aus dem Weierstraß'schen Satz folgt daher, daß

$$\Delta J < 0.$$

Wir erhalten also das Resultat: *Der Kreisbogen $\mathfrak{C}_0$ liefert für den Flächeninhalt J einen größeren Wert als jede andere gewöhnliche Kurve derselben Länge, welche von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.*

Durch eine Modifikation der vorangehenden Schlußweise beweist man auch den Satz: *Unter allen geschlossenen gewöhnlichen Kurven von gegebener Länge umschließt der Kreis den größten Flächeninhalt.*[1])

Beispiel XXI (Siehe pp. 466, 484):

Ist irgend eine zulässige Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ gegeben, so wählen wir den Punkt P_0 auf der Fortsetzung des Kettenlinienbogens $\mathfrak{C}_0$ über P_1 hinaus so, daß für jeden Punkt P_3 der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$:

$$x_3 > x_0.$$

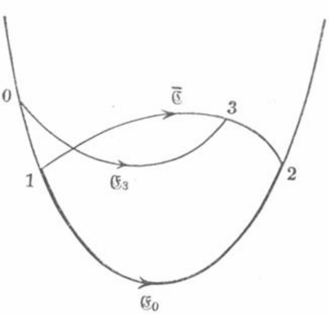

Fig. 113.

Dann gilt auch hier die Ungleichung (115). Es läßt sich also nach den Resultaten der Konstantenbestimmung von § 59, d) von P_0 nach jedem Punkt P_3 der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ eine und nur eine nach unten konvexe Kettenlinie $\mathfrak{C}_3$ ziehen, deren Direktrix mit der x-Achse parallel ist, und für welche

$$K_{03} = K_{01} + \bar{K}_{13},$$

d. h. die Weierstraß'sche Konstruktion ist auch hier stets möglich für die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$.

Für die Kongruenz von räumlichen Extremalen durch den Punkt P_0 findet man aus (26)

$$x - x_0 = \alpha(t - \varkappa),$$
$$y - y_0 = \alpha(\operatorname{Ch} t - \operatorname{Ch}\varkappa),$$
$$z = \alpha(\operatorname{Sh} t - \operatorname{Sh}\varkappa).$$

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, § 37. Steiner gibt in der Abhandlung *„Über Maxima und Minima bei den Figuren etc."* (Werke, Bd. II, p. 193) einen rein geometrischen Beweis dieses Satzes (jedoch unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung), sowie zahlreiche interessante Modifikationen des speziellen isoperimetrischen Problems. Neuere Beweise ohne Benutzung der Variationsrechnung sind gegeben worden von Hurwitz, *Comptes Rendus*, Bd. CXXXII (1901), p. 401; Bernstein, Mathematische Annalen, Bd. LX (1905), p. 117 und Witting, Archiv der Mathematik (3), Bd. XII (1907), p. 288.

Bei Beschränkung auf den Bereich

$$\alpha > 0, \qquad t > \varkappa$$

bildet dieselbe ein räumliches Feld, welches den durch die Ungleichungen (116) und $x > x_0$ definierten Teil des Raumes ausfüllt. Die der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ zugeordnete Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ liegt ganz in diesem Feld.

Ferner findet man

$$\mathcal{E}(x_3, y_3; p_3, q_3; \bar{p}_3, \bar{q}_3; \lambda_3) = (y_3 + \lambda_3)[1 - \cos(\bar{\theta}_3 - \theta_3)].$$

Da

$$y_3 + \lambda_3 = \alpha_3 \operatorname{Ch} t_3 > 0,$$

und da kein konjugierter Punkt vorhanden ist, so schließt man wie beim vorigen Beispiel, daß

$$\Delta J > 0,$$

d. h. *Bei der Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$ liegt der Schwerpunkt tiefer als bei jeder andern gewöhnlichen Kurve von derselben Länge, welche von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.*[1])

b) Folgerungen aus dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz:

Wir wollen nun zusehen, wie weit sich der Weierstraß'sche Fundamentalsatz zur Aufstellung von hinreichenden Bedingungen beim allgemeinen isoperimetrischen Problem verwerten läßt. Wir machen dabei über den Bogen $\mathfrak{E}_0$ die analogen Voraussetzungen wie in § 32, b), nämlich:

1. Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ genügt der Euler'schen Differentialgleichung (I) mit einem bestimmten Wert λ_0 der isoperimetrischen Konstante; er führt von P_1 nach P_2 und erteilt dem Integral K den vorgeschriebenen Wert l; endlich ist er von der Klasse C', besitzt keine mehrfachen Punkte und liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$. (I')

2. Es ist

$$H_1(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t), \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t); \lambda_0) > 0 \text{ für } t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2. \qquad \text{(II')}$$

3. Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ enthält den zu P_1 (im Sinne des isoperimetrischen Problems) konjugierten Punkt P_1' nicht:

$$P_2 \prec P_1'. \qquad \text{(III')}$$

4. Es ist

$$\mathcal{E}(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t); \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t); \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}; \lambda_0) > 0 \qquad \text{(IV')}$$

für $t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$ und für jede Richtung $\tilde{\theta}$, die von der Richtung der positiven Tangente an $\mathfrak{E}_0$ im Punkt t verschieden ist.

Es fragt sich, ob diese Bedingungen für ein Minimum des Integrals J mit der Nebenbedingung $K = l$ hinreichend sind.

Zunächst folgt nach § 61, d), Ende, aus den ersten drei Voraus-

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, p. 142 Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 10, 11, 12, 15 am Ende dieses Kapitels.

setzungen, daß wir einen Punkt $P_0(t_0)$ auf der Fortsetzung von $\mathfrak{E}_0$ über P_1 hinaus so nahe bei P_1 wählen können, daß

$$D(t, t_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 .$$

Daraus ergibt sich aber mit Rücksicht auf[1]) $(\overline{74})$ nach dem allgemeinen Satz über die Existenz eines Feldes (§ 22, d)), daß die Kongruenz von räumlichen Extremalen (99) durch den Punkt P_0 ein räumliches Feld $\mathcal{S}'$ liefert, welches den dem Bogen $\mathfrak{E}_0$ in der Kongruenz (99) zugeordneten räumlichen Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0'$ in seinem Innern enthält.

Weiter zeigt man, ganz ähnlich wie in § 32, b), mittels der analog wie dort zu definierenden Hilfsfunktion $\mathcal{E}_1$, daß sich auf Grund der Voraussetzungen (II') und (IV') eine räumliche Umgebung (ϱ') von $\mathfrak{E}_0'$ angeben läßt, derart, daß

$$\mathcal{E}(x, y;\ p(x, y, z),\ q(x, y, z);\ \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta};\ \mathfrak{l}(x, y, z)) > 0 \tag{117}$$

im Bereich

$$(x, y, z) \text{ in } (\varrho');\ 0 \overline{\gtrless} \tilde{\theta} \overline{\gtrless} 2\pi;\ (\cos\tilde{\theta},\ \sin\tilde{\theta}) \neq (p, q).$$

Wir wählen ϱ' so klein, daß die Umgebung $(\varrho')_{\mathfrak{E}_0'}$ zugleich ganz im Feld $\mathcal{S}'$ gelegen ist.

Zieht man jetzt von P_1 nach P_2 irgendeine der isoperimetrischen Bedingung $\overline{K} = l$ genügende gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, *deren zugeordnete Raumkurve* $\overline{\mathfrak{C}}'$ *ganz in der Umgebung* (ϱ') *von* $\mathfrak{E}_0'$ *verläuft*, so gilt für diese Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ der Weierstraß'sche Satz (110), und wegen (117) ist dann $\Delta J > 0$, es sei denn, daß in jedem Punkt P_3 von $\overline{\mathfrak{C}}$ die positive Tangente an $\overline{\mathfrak{C}}$ mit der positiven Tangente der oben mit $\mathfrak{E}_3$ bezeichneten Extremalen zusammenfällt:

$$\cos\bar{\theta}_3 = p_3,\ \sin\bar{\theta}_3 = q_3 . \tag{118}$$

Aber auch hier läßt sich ähnlich wie in § 32, b) zeigen[2]), daß dieser Ausnahmefall nur eintreten kann, wenn die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{E}_0$ identisch ist. Denn ersetzen wir in den Identitäten (102) die Variabeln x, y, z durch die die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ definierenden Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ von τ und differentiieren nach τ, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
(\overline{\varphi_t})\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} + (\overline{\varphi_\varkappa})\frac{d\bar{\mathfrak{k}}}{d\tau} + (\overline{\varphi_\lambda})\frac{d\bar{\mathfrak{l}}}{d\tau} &= \bar{x}',\\
(\overline{\psi_t})\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} + (\overline{\psi_\varkappa})\frac{d\bar{\mathfrak{k}}}{d\tau} + (\overline{\psi_\lambda})\frac{d\bar{\mathfrak{l}}}{d\tau} &= \bar{y}',\\
(\overline{\chi_t})\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} + (\overline{\chi_\varkappa})\frac{d\bar{\mathfrak{k}}}{d\tau} + (\overline{\chi_\lambda})\frac{d\bar{\mathfrak{l}}}{d\tau} &= \bar{z}'.
\end{aligned}\right\} \tag{119}$$

---

[1]) Wegen der Bedeutung der überstrichenen Gleichungsnummern siehe § 63, a), Eingang.

[2]) Nach KNESER, *Lehrbuch*, p. 134.

Durch Überstreichen ist dabei angedeutet, daß überall x, y, z durch $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ zu ersetzen sind, während die Klammer die in § 63, a) erklärte Bedeutung hat.

Angenommen, es beständen nun in jedem Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$ die Gleichungen (118), so gäbe es nach (105) eine stets positive Funktion m von τ, derart, daß

$$\bar{x}' = m(\overline{\varphi_t}), \qquad \bar{y}' = m(\overline{\psi_t}).$$

Dann wäre aber auch

$$\bar{z}' = m(\overline{\chi_t}),$$

da einerseits: $\bar{z}' = G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')$, andererseits: $\chi_t = G(\varphi, \psi, \varphi_t, \psi_t)$, und überdies die Funktion G positiv homogen von der Dimension 1 in ihren beiden letzten Argumenten ist.

Setzt man diese Werte von $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ in (119) ein, so erhält man ein System von drei homogenen linearen Gleichungen in

$$\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} - m, \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{k}}}{d\tau}, \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{l}}}{d\tau},$$

deren Determinante $\Delta(\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{k}}, \bar{\mathfrak{l}})$ nach (101) für $\tau_1 \overline{\gtrless} \tau \overline{\gtrless} \tau_2$ von Null verschieden ist, da die Kurve $\mathfrak{C}'$ ganz im Felde liegt. Es muß also

$$\frac{d\bar{\mathfrak{t}}}{d\tau} = m, \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{k}}}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\bar{\mathfrak{l}}}{d\tau} = 0 \tag{120}$$

sein, woraus man wie in § 32, b) schließt, daß die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{C}_0$ identisch sein muß.

Somit haben wir den folgenden Satz[1]) bewiesen:

Sind für den Bogen $\mathfrak{C}_0$ die Bedingungen (I'), (II'), (III'), (IV') *erfüllt, so liefert derselbe für das Integral J einen kleineren Wert als jede andere zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, deren zugeordnete Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ ganz in einer gewissen Umgebung* (ϱ') *des dem Bogen $\mathfrak{C}_0$ zugeordneten räumlichen Bogens $\mathfrak{C}_0'$ gelegen ist.*

Hiermit ist aber noch nicht bewiesen, daß die Bedingungen (I') bis (IV') für ein Minimum unserer isoperimetrischen Aufgabe in dem ursprünglich definierten Sinn hinreichend sind, da den Vergleichskurven hier eine nicht in der Aufgabe begründete Beschränkung auferlegt wird.[2])

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1882; vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, §§ 36 und 38.

[2]) Das erhaltene Resultat ist gleichbedeutend mit dem folgenden Ausspruch: Die Raumkurve $\mathfrak{C}_0'$ liefert ein starkes Minimum für das auf p. 491 Fußnote [2]) formulierte räumliche Variationsproblem, welches gewöhnlich als äquivalent mit dem gegebenen ebenen isoperimetrischen Problem betrachtet wird, jedoch nicht vollkommen äquivalent mit demselben ist, wie sich eben gerade an dieser Stelle zeigt.

c) **Der Lindeberg'sche Satz:**

Wir wenden uns nun zu dem im Eingang dieses Paragraphen erwähnten Satz, mit dessen Hilfe es LINDEBERG gelungen ist, die eben hervorgehobene Lücke auszufüllen. Derselbe bezieht sich auf das Extremum des Integrals

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

ohne Nebenbedingungen, und ist auch unabhängig von seiner Anwendung auf das isoperimetrische Problem von Interesse. Bei der Darstellung desselben müssen wir uns jedoch auf einen kurzen Bericht beschränken und verweisen für die Detailausführung auf die oben zitierte Arbeit von Lindeberg.

Es sei

$$\mathfrak{C}: \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$$

eine von P_1 nach P_2 führende Kurve, über welche wir die folgenden Voraussetzungen machen:

A) Die Kurve $\mathfrak{C}$ ist von der Klasse C'', hat keine mehrfachen Punkte und liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$.

B) Es gilt für sie die Legendre'sche Bedingung in der stärkeren Form (II').

C) Es gilt für sie die Weierstraß'sche Bedingung in der stärkeren Form (IV') von § 32, b).

Wir heben ausdrücklich hervor, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ zwar eine Extremale für das Integral J sein kann, aber nicht zu sein braucht.

Wir können dann die Kurve $\mathfrak{C}$ stets so über das Intervall $[t_1 t_2]$ hinaus auf ein weiteres Intervall $[T_1 T_2]$ fortsetzen, daß die Bedingungen A), B), C) auch für den so erweiterten Bogen $\mathfrak{C}^*$ erfüllt sind.

Es folgt dann zunächst aus den beiden ersten Bedingungen auf Grund der Sätze von § 21, b) und § 27, a): Ist σ eine hinreichend kleine positive Größe, so kann man durch jeden Punkt $P(t)$ der Kurve $\mathfrak{C}^*$ eine und nur eine Extremale des Integrals J ziehen, welche mit der positiven Tangente der Kurve $\mathfrak{C}^*$ im Punkt P den konstanten Winkel σ bildet. Als Parameter möge auf der Extremalen die Bogenlänge s, gemessen vom Punkt P aus, gewählt werden.

Mit Hilfe des Satzes von § 22, d) zeigt man dann weiter: Es lassen sich zwei positive Größen h, k so klein wählen, daß die so erhaltene Extremalenschar ein den Bogen $\mathfrak{C}$ in seinem Innern enthaltendes Feld $\mathcal{S}$ bildet, wenn s und t auf den Bereich

$$|s| \overline{\gtrless} k, \qquad t_1 - h \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 + h$$

beschränkt werden.

Ist dann

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x = \overline{x}(\tau), \qquad y = \overline{y}(\tau), \qquad \tau_1 \overline{\gtrless} \tau \overline{\gtrless} \tau_2$$

irgendeine von P_1 nach P_2 führende gewöhnliche Kurve, welche ganz in diesem Feld $\mathcal{S}$ liegt, so gilt die Formel

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}} = \int_{\overline{\mathfrak{C}}} \mathcal{E}\, d\tau - \int_{\mathfrak{C}} \mathcal{E}\, dt. \tag{121}$$

Zum Beweis wende man auf die beiden Kurven $\overline{\mathfrak{C}}$ und $\mathfrak{C}$ den Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz von § 31, c) an:

$$J^*_{\overline{\mathfrak{C}}} = J^*_{\mathfrak{C}}$$

und addiere links $J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\overline{\mathfrak{C}}}$, rechts $J_{\mathfrak{C}} - J_{\mathfrak{C}}$, wobei sich zugleich die Bedeutung der in der Gleichung (121) gebrauchten abkürzenden Bezeichnung erklärt.

Werden die drei das Feld $\mathcal{S}$ bestimmenden Größen σ, h, k hinreichend klein gewählt, so läßt sich von jedem Punkt des Feldes $\mathcal{S}$ auf die Kurve $\mathfrak{C}^*$ eine und nur eine Normale fällen[1]). Unter dieser Voraussetzung sei $\overline{P}$ (τ) irgend ein Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$ und P der Fußpunkt der von $\overline{P}$ auf die Kurve $\mathfrak{C}^*$ gefällten Normalen; für den Parameter τ werde die Bogenlänge gewählt. Dann bezeichnen wir mit ω (τ) den Winkel zwischen der Richtung der positiven Tangente an $\overline{\mathfrak{C}}$ im Punkt $\overline{P}$ und der Richtung der positiven Tangente an $\mathfrak{C}$ im Punkt P, so normiert, daß

$$-\pi < \omega(\tau) \overline{\gtrless} \pi.$$

Ist dann ε' eine beliebig vorgegebene positive Größe, so läßt sich zeigen, daß die Menge derjenigen Punkte τ des Intervalls $[\tau_1 \tau_2]$, in welchen

$$|\omega(\tau)| > \varepsilon', \tag{122}$$

eine abzählbare Menge von offenen Intervallen ist, deren Längen stets eine endliche Summe haben, welche wir mit

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon')$$

bezeichnen wollen.

Bei dieser Bezeichnungsweise läßt sich nun der *Lindeberg'sche Satz* folgendermaßen formulieren:

Genügt die Kurve $\mathfrak{C}$ den Bedingungen A), B), C) und sind ε, ε' zwei beliebig vorgegebene positive Größen, so läßt sich eine Umgebung (ϱ) *der Kurve $\mathfrak{C}$ bestimmen derart, daß*

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} > J_{\mathfrak{C}} \tag{123}$$

[1]) Vgl. Bliss, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. V (1904), p. 487.

für jede von P_1 nach P_2 führende, ganz in der Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ gelegene gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, für welche

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon') > \varepsilon.$$

Der Beweis beruht darauf, daß das erste Integral auf der rechten Seite von (121) bei fortgesetzter Verkleinerung der Größen σ und k für alle Kurven $\overline{\mathfrak{C}}$ von der angegebenen Beschaffenheit infolge der Voraussetzung C) oberhalb einer bestimmten positiven Grenze bleibt, während gleichzeitig durch Verkleinerung von σ der absolute Wert des zweiten Integrals unter jede Grenze herabgedrückt werden kann.

Die Bedeutung dieses Satzes für das Extremum ohne Nebenbedingung besteht darin, daß derselbe den Anteil feststellt, welchen die Bedingungen von Legendre und Weierstraß, für sich genommen, am Zustandekommen des Extremums haben. Dieser Anteil ist überraschend groß; die beiden genannten Bedingungen verbürgen in der Tat das Bestehen der Ungleichung $\Delta J > 0$, für alle benachbarten Kurven mit Ausnahme gerade derjenigen, welche sich, wie wir es kurz ausdrücken können, in ihrer Tangentenrichtung am engsten an die Curve $\mathfrak{C}$ anschließen. Nur um auch für diese letzteren die Ungleichung $\Delta J > 0$ zu erzwingen, sind die Bedingungen von Euler und Jacobi erforderlich.

d) Anwendung des Lindeberg'schen Satzes auf das isoperimetrische Problem:

Wir nehmen jetzt an, für die Kurve $\mathfrak{E}_0$ seien die unter b) aufgezählten Bedingungen (I'), (II'), (III'), (IV') erfüllt. Dann läßt sich, wie unter b) gezeigt worden ist, eine positive Größe ϱ' angeben, so daß: $J_{\overline{\mathfrak{C}}} > J_{\mathfrak{E}_0}$ für jede von $\mathfrak{E}_0$ verschiedene, im Sinn des isoperimetrischen Problems zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, deren zugeordnete Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ ganz in der Umgebung ϱ' der räumlichen Extremalen $\mathfrak{E}_0'$ liegt.

Lindeberg beweist dann weiter den folgenden *Hilfssatz:*

Ist ϱ' eine beliebig vorgegebene positive Größe, so lassen sich drei positive Größen ϱ_0, ε, ε' angeben, derart, daß die Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ ganz in die Umgebung (ϱ') von $\mathfrak{E}_0'$ fällt für jede zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche ganz in der Umgebung (ϱ_0) von $\mathfrak{E}_0$ liegt, und für welche

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon') \gtreqless \varepsilon,$$

wobei bei der Definition des Symbols $d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon')$ die Extremale $\mathfrak{E}_0$ an die Stelle der Kurve $\mathfrak{C}$ tritt.

Und nunmehr wird folgendermaßen weiter geschlossen:

Für das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (F + \lambda_0 G)\, dt$$

sind die Voraussetzungen des Lindeberg'schen Satzes erfüllt, wobei wieder $\mathfrak{E}_0$ an die Stelle der Kurve $\mathfrak{C}$ tritt. Daher können wir eine positive Größe $\varrho \overline{\overline{<}} \varrho_0$ bestimmen derart, daß

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} + \lambda_0 K_{\overline{\mathfrak{C}}} > J_{\mathfrak{E}_0} + \lambda_0 K_{\mathfrak{E}_0} \tag{124}$$

für jede gewöhnliche, von P_1 nach P_2 gezogene Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche ganz in $(\varrho)_{\mathfrak{E}_0}$ verläuft, und für welche

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon') > \varepsilon.$$

Wir ziehen jetzt in dieser Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{E}_0}$ von P_1 nach P_2 irgend eine im Sinn des isoperimetrischen Problems zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$. Für dieselbe ist entweder

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon') \overline{\overline{<}} \varepsilon;$$

dann liegt nach dem Hilfssatz die Raumkurve $\overline{\mathfrak{C}}'$ in $(\varrho')_{\mathfrak{E}'_0}$, und es ist $\Delta J > 0$ auf Grund des Weierstraß'schen Satzes.

Oder aber es ist

$$d_{\overline{\mathfrak{C}}}(\varepsilon') > \varepsilon;$$

dann ist $\Delta J > 0$ auf Grund des Lindeberg'schen Satzes, da hier insbesondere

$$K_{\overline{\mathfrak{C}}} = K_{\mathfrak{E}_0}.$$

Wir gelangen also zu dem Schlußresultat[1]):

Wenn für den Kurvenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (I'), (II'), (III'), (IV') erfüllt sind, so liefert derselbe ein eigentliches starkes Minimum für das Integral J mit der Nebenbedingung $K = l$.

---

[1]) Der *entsprechende Satz für das x-Problem*, der das Analogon des auf p. 126 erwähnten Satzes über das Problem ohne Nebenbedingungen ist, lautet folgendermaßen:

Es sei $\mathfrak{E}_0$: $y = \mathring{y}(x)$ eine Extremale für das Problem, das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

zu einem Minimum zu machen in Beziehung auf die Gesamtheit aller in der Form $y = y(x)$ darstellbaren Kurven der Klasse C', welche von P_1 nach P_2 führen, in einem gewissen Bereich $\mathfrak{R}$ liegen und dem Integral

$$K = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\, dx$$

§ 65. Einiges über isoperimetrische Probleme bei variablen Endpunkten.

In diesem Paragraphen soll noch kurz die Modifikation des isoperimetrischen Problems besprochen werden, bei welcher der erste Endpunkt auf einer gegebenen Kurve beweglich ist, während der zweite fest ist.

a) **Die Transversalitätsbedingung bei isoperimetrischen Problemen:** Die gegebene Kurve sei durch einen Parameter $\varkappa$ dargestellt.

$$\mathfrak{K}: \qquad x = \tilde{x}(\varkappa), \quad y = \tilde{y}(\varkappa).$$

Wir machen über dieselbe die nämlichen Voraussetzungen wie in § 36; auch die Gesamtheit der zulässigen Kurven ist ebenso definiert wie dort, nur daß dieselben jetzt noch überdies der isoperimetrischen Bedingung (1) genügen müssen.

Eine Kurve

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \quad y = \mathring{y}(t), \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2,$$

welche in Beziehung auf diese Gesamtheit von zulässigen Kurven ein Minimum für das Integral J liefert, muß dann zunächst die sämtlichen notwendigen Bedingungen für ein isoperimetrisches Minimum bei festen Endpunkten erfüllen; sie muß also in erster Linie eine *Extremale* sein. Der zugehörige Wert der isoperimetrischen Kon-

---

einen vorgeschriebenen Wert erteilen; λ_0 sei der zu $\mathfrak{E}_0$ gehörige Wert der isoperimetrischen Konstanten.

Ferner sei

$$f_{y'y'} + \lambda_0 g_{y'y'} > 0$$

entlang $\mathfrak{E}_0$, der Bogen $\mathfrak{E}_0$ enthalte den zu P_1 im Sinn des isoperimetrischen Problems konjugierten Punkt nicht, und es sei

$$\mathcal{E}[x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}; \lambda_0] > 0$$

für

$$x_1 \overline{<} x \overline{<} x_2, \quad 0 < |\tilde{p} - \mathring{y}'(x)| \overline{<} \varrho_0'.$$

Dann läßt sich eine positive Größe ϱ bestimmen derart, daß jede von $\mathfrak{E}_0$ verschiedene zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, für welche

$$|\bar{y}(x) - \mathring{y}(x)| < \varrho, \quad |\bar{y}'(x) - \mathring{y}'(x)| < \varrho_0',$$

für das Integral J einen größeren Wert liefert als $\mathfrak{E}_0$.

Dabei ist die Funktion $\mathcal{E}$ aus der Funktion $f + \lambda_0 g$ in derselben Weise abgeleitet, wie die $\mathcal{E}$-Funktion auf p. 110 aus der Funktion f; über die Funktionen f und g werden dieselben Voraussetzungen gemacht, wie über die Funktion f auf p. 14.

Für diesen Satz hatte Lindeberg bereits in der in Fußnote 2) auf p. 126 zitierten Arbeit einen ausführlichen Beweis gegeben, der sich jedoch wohl nur schwer auf den Fall der Parameterdarstellung übertragen läßt.

stanten sei λ_0. Der Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$, von welchem die Extremale $\mathfrak{E}_0$ ausgeht, sei P_1 und entspreche dem Wert $\varkappa = \varkappa_0$. Wir setzen wie in § 60 voraus, daß kein noch so kleiner Bogen von $\mathfrak{E}_0$ Extremale für das Integral K ist.

Um weitere notwendige Bedingungen zu erhalten, hat man nun zunächst eine einparametrige Schar von zulässigen Variationen

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon), \quad y = \bar{y}(t, \varepsilon)$$

zu konstruieren, welche, abgesehen von Stetigkeitsbedingungen, die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}(t,0) = \mathring{x}(t), && \bar{y}(t,0) = \mathring{y}(t),\\ &\bar{x}(t_1,\varepsilon) = \tilde{x}(\varkappa_0 + \varepsilon), && \bar{y}(t_1,\varepsilon) = \tilde{y}(\varkappa_0 + \varepsilon),\\ &\bar{x}(t_2,\varepsilon) = x_2, && \bar{y}(t_2,\varepsilon) = y_2, \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

$$\bar{K} = l. \tag{126}$$

Eine solche Schar von zulässigen Variationen kann man leicht mit Hilfe der in § 60, b) benutzten Methode herstellen.

Für diese Schar muß nun: $\delta J = 0$ sein, während gleichzeitig aus (126) folgt: $\delta K = 0$. Indem man beide Gleichungen kombiniert, erhält man

$$\delta J + \lambda_0 \, \delta K = 0,$$

woraus man nach Anwendung der Lagrange'schen partiellen Integration wie in § 36, a) das Resultat[1]) schließt:

Im Punkt P_1 muß die Relation

$$H_{x'}(x, y, x', y'; \lambda_0)\, \tilde{x}' + H_{y'}(x, y, x', y'; \lambda_0)\, \tilde{y}' |^1 = 0 \tag{127}$$

erfüllt sein, wobei sich die Ableitungen x', y' auf die Extremale $\mathfrak{E}_0$, dagegen $\tilde{x}'$, $\tilde{y}'$ auf die gegebene Kurve $\mathfrak{K}$ beziehen.

Dies ist die *Transversalitätsbedingung* beim isoperimetrischen Problem. Sie ist identisch mit der Transversalitätsbedingung für die Aufgabe, das Integral (43) mit denselben Endbedingungen, aber ohne Nebenbedingung zu einem Extremum zu machen.[2])

b) **Die Brennpunktsbedingung:**

Wir setzen für die Folge die Transversalitätsbedingung (127) als erfüllt voraus; weiter nehmen wir an, daß entlang dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingung (II') von § 60, a) erfüllt ist.

Dann lassen sich nach Kneser[3]) die Entwicklungen von § 62 folgendermaßen auf den gegenwärtigen Fall übertragen:

---

[1]) Vgl. hierzu Kneser, *Lehrbuch*, § 33.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 3, 23—25 am Ende dieses Kapitels.

[3]) *Lehrbuch*, § 39.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, durch einen dem Punkt P_1 benachbarten Punkt P_3 der Kurve $\mathfrak{K}$ eine Extremale $\mathfrak{E}$ mit vorgegebenem, von λ_0 nur wenig abweichendem Wert λ der isoperimetrischen Konstanten zu konstruieren, welche in P_3 von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird. Ist θ der Tangentenwinkel der gesuchten Extremalen $\mathfrak{E}$ im Punkt P_3 und $\varkappa$ der Parameter von P_3 auf $\mathfrak{K}$, so muß die Gleichung bestehen

$$\begin{aligned} &H_{x'}(\tilde{x}(\varkappa), \tilde{y}(\varkappa), \cos\theta, \sin\theta; \lambda)\,\tilde{x}'(\varkappa) \\ &+ H_{y'}(\tilde{x}(\varkappa), \tilde{y}(\varkappa), \cos\theta, \sin\theta; \lambda)\,\tilde{y}'(\varkappa) = 0. \end{aligned} \tag{128}$$

Man zeigt genau wie in § 40, daß diese Gleichung stets in der Umgebung der Stelle $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\theta = \theta_1$ (unter θ_1 den Tangentenwinkel von $\mathfrak{E}_0$ in P_1 verstanden), eindeutig nach θ auflösbar ist, wenn die beiden Kurven $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{K}$ sich in P_1 nicht berühren, wie wir in der Folge voraussetzen wollen.

Die Lösung der Gleichung (128) sei: $\theta = \theta(\varkappa, \lambda)$; dann wird die gesuchte Extremale $\mathfrak{E}$ in der Bezeichnung von § 27, b) durch die Gleichungen dargestellt

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}(t - t_1; \tilde{x}(\varkappa), \tilde{y}(\varkappa), \theta(\varkappa, \lambda); \lambda) \equiv \varphi(t, \varkappa, \lambda), \\ y &= \mathfrak{Y}(t - t_1; \tilde{x}(\varkappa), \tilde{y}(\varkappa), \theta(\varkappa, \lambda); \lambda) \equiv \psi(t, \varkappa, \lambda), \end{aligned} \tag{129}$$

wenn unter t wieder die Bogenlänge verstanden wird.

Dieselben Gleichungen stellen, wenn $\varkappa, \lambda$ als variable Parameter betrachtet werden, eine doppeltunendliche Schar von Extremalen dar, welche sämtlich von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten werden, und zwar tritt dies auf allen Extremalen der Doppelschar für denselben Wert $t = t_1$ ein. Die Extremale $\mathfrak{E}_0$ erhält man für $\varkappa = \varkappa_0$, $\lambda = \lambda_0$.

Aus der Definition der Funktionen φ, ψ und den Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ergibt sich, daß, identisch in $\varkappa$, λ,

$$\varphi(t_1, \varkappa, \lambda) = \tilde{x}(\varkappa), \qquad \psi(t_1, \varkappa, \lambda) = \tilde{y}(\varkappa),$$

woraus durch Differentiation folgt

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) = \tilde{x}'(\varkappa), \qquad \psi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) = \tilde{y}'(\varkappa), \\ &\varphi_\lambda(t_1, \varkappa, \lambda) = 0, \qquad\qquad \psi_\lambda(t_1, \varkappa, \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Aus diesen Relationen folgt, daß wir die Transversalität der Kurve $\mathfrak{K}$ zur Extremalen $\mathfrak{E}$ in der Bezeichnung (67) auch durch folgende Gleichung ausdrücken können:

$$\mathcal{H}_{x'}(t_1, \varkappa, \lambda)\,\varphi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) + \mathcal{H}_{y'}(t_1, \varkappa, \lambda)\,\psi_\varkappa(t_1, \varkappa, \lambda) = 0. \tag{131}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\chi(t, \varkappa, \lambda)$, resp. $U(t, \varkappa, \lambda)$ die Werte der Integrale K, resp. J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ der

Doppelschar (129) von deren Schnittpunkt $t = t_1$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$ bis zu einem variabeln Punkt $P(t)$, und berechnen die partiellen Ableitungen der Funktionen χ und U. Auf Grund der Gleichungen (130_3) unterscheiden sich die Resultate, die man erhält, von den früheren (75) und (91) nur dadurch, daß in den Ausdrücken für $\chi_\varkappa$, $U_\varkappa$ je ein Zusatzglied

$$-(\mathfrak{G}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{G}_{y'}\psi_\varkappa)\big|^{t_1}, \quad \text{resp.} \quad -(\mathfrak{F}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{F}_{y'}\psi_\varkappa)\big|^{t_1}$$

hinzutritt. Dieses Zusatzglied fällt aber in der Kombination

$$U_\varkappa + \lambda\chi_\varkappa$$

infolge der Transversalitätsbedingung (131) weg, und *daher bleiben die Formeln (92) auch für den Fall einer Doppelschar von Extremalen, welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten werden, bestehen.*

Andererseits aber hat das Auftreten dieses Zusatzgliedes zur Folge, daß der Ausdruck (76) für die Funktionaldeterminante $\Delta(t, \varkappa, \lambda)$ im gegenwärtigen Fall nur dann richtig bleibt, wenn man jetzt unter $\mathfrak{m}$ die Größe

$$\mathfrak{m} = \int_{t_1}^{t} \mathfrak{V}\, u\, dt + (\mathfrak{G}_{x'}\varphi_\varkappa + \mathfrak{G}_{y'}\psi_\varkappa)\big|^{t_1}$$

versteht.

Mit dieser veränderten Bedeutung der Funktion $\mathfrak{m}$ bleiben nun die Entwicklungen von § 62, c) und d) bestehen, und man erhält das folgende Resultat:

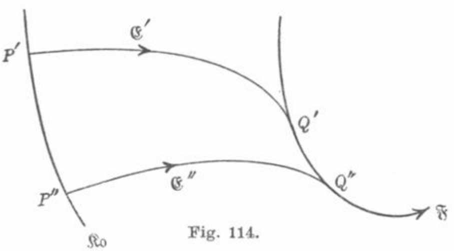

Fig. 114.

Es sei t_1'' die zunächst auf t_1 folgende Wurzel der Gleichung

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) = 0;$$

dann nennen wir den dem Wert $t = t_1''$ entsprechenden Punkt P_1'' der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ den *Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ auf dieser Extremalen.*

Unter denselben beschränkenden Annahmen wie in § 62, c) kann man dann aus der Doppelschar (129) von Extremalen ein *ausgezeichnetes Büschel* herausgreifen, dessen Enveloppe $\mathfrak{F}$ jede Extremale des Büschels in dem auf ihr gelegenen Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ berührt.

Für dieses ausgezeichnete Büschel gilt dann der *Enveloppensatz* in der folgenden Form

$$\left.\begin{aligned} J_{\mathfrak{E}''}(P''Q'') &= J_{\mathfrak{E}'}(P'Q') + J_{\mathfrak{F}}(Q'Q''), \\ K_{\mathfrak{E}''}(P''Q'') &= K_{\mathfrak{E}'}(P'Q') + K_{\mathfrak{F}}(Q'Q''). \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

Daraus schließt man dann wieder wie in § 62, d), daß das isoperimetrische Extremum unter den vorliegenden Anfangsbedingungen jedenfalls nicht über den Brennpunkt P_1'' hinaus bestehen kann:

$$P_2 \leqq P_1''. \tag{III}$$

c) **Hinreichende Bedingungen:**

Der allgemeine Hinlänglichkeitsbeweis für isoperimetrische Probleme mit einem variabeln Endpunkt bietet noch *ungelöste Schwierigkeiten*. Zwar folgt aus dem Bestehen der Formeln (92), daß auch die Hamilton'schen Formeln (106) mit ihren Folgerungen für jedes von der Kongruenz

$$x = \varphi(t, \varkappa, \lambda), \quad y = \psi(t, \varkappa, \lambda), \quad z = \chi(t, \varkappa, \lambda) \tag{133}$$

gebildete räumliche Feld gültig bleiben.

Aber die Kurve $\mathfrak{K}$ kann nie einem solchen Felde angehören; denn da die Funktionen φ, ψ, χ für $t = t_1$ identisch verschwinden, so ist auch

$$\Delta(t_1, \varkappa, \lambda) = 0.$$

Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem isoperimetrischen Problem und dem Problem ohne Nebenbedingungen (§ 41), der zur Folge hat, daß man jetzt aus dem Bestehen der Bedingungen (II') und (III') nicht mehr ohne weiteres schließen kann, daß sich der Bogen $\mathfrak{E}_0'$ mit einem räumlichen Feld umgeben läßt. Vielmehr führt das allgemeine Existenztheorem von § 22, d) hier nur zu einem uneigentlichen räumlichen Feld, welches gegen den Punkt P_1 zu in eine Spitze ausläuft und daher für den Hinlänglichkeitsbeweis bei variablem ersten Endpunkt nicht zu gebrauchen ist.

Wenn sich dagegen in einem speziellen Fall zeigen läßt, daß ein den Punkt P_1 enthaltendes endliches Stück der Kurve $\mathfrak{K}$ der Begrenzung eines den Bogen $\mathfrak{E}_0'$ (abgesehen von seinem Anfangspunkt P_1) umgebenden räumlichen Feldes angehört, so läßt sich für alle Vergleichskurven $\overline{\mathfrak{C}}$, deren zugeordnete Raumkurven $\overline{\mathfrak{C}}'$ (abgesehen von ihren Anfangspunkten) ganz in diesem Feld verlaufen, die Weierstraß'sche Konstruktion mit ihren Folgerungen durchführen.

Beispiel XXII.[1] (Vgl. Beispiel II, pp. 465, 483 und Aufgabe Nr. 37 auf p. 151.)

Von dem einen Schenkel eines gegebenen Winkels nach einem auf dem andern Schenkel gegebenen Punkt P_2 eine den Winkelraum nicht verlassende Kurve von gegebener Länge l zu ziehen, welche mit den beiden Schenkeln eine möglichst große Fläche einschließt.

Der erste Schenkel werde zur positiven x-Achse gewählt; der fragliche Winkelraum werde erzeugt, indem ein vom Koordinatenanfangspunkt O aus-

[1] Vgl. dazu Kneser, *Lehrbuch*, p. 159.

gehender Halbstrahl sich von der positiven x-Achse aus in positivem Sinn um den zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel α dreht.

Wir haben wieder das Integral

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(xy' - yx')\,dt$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = l$$

zu einem Maximum zu machen.

Daher folgt aus den Resultaten von § 59, c) und § 61, c) zunächst, daß die gesuchte Kurve *ein in positivem Sinn beschriebener Kreisbogen* von der Länge l sein muß, welcher, von einem Punkt P_1 der positiven x-Achse ausgehend, durch den Winkelraum α nach dem Punkt P_2 führt.[1])

Da ferner im Punkt $P_1 : \tilde{y}_1' = 0$, $y_1 = 0$, so reduziert sich die Transversalitätsbedingung darauf, daß der Kreisbogen im Punkt P_1 *auf der x-Achse senkrecht* stehen muß.

Wir nehmen an, wir hätten einen diesen Bedingungen genügenden Kreisbogen $\mathfrak{E}_0$ gefunden

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \varkappa_0 - \lambda_0 \cos t, \qquad y = -\lambda_0 \sin t.$$

Die Doppelschar von Extremalen (129) besteht hier aus den Kreisen

$$x = \varkappa - \lambda \cos t, \qquad y = -\lambda \sin t, \tag{134}$$

welche sämtlich für $t = 0$ die x-Achse senkrecht schneiden. Die beiden Gleichungen (134) zusammen mit der Gleichung

$$z = -\lambda t \tag{135}$$

definieren die Kongruenz (133). Daraus erhält man

$$\Delta(t, \varkappa, \lambda) = \lambda(\sin t - t \cos t).$$

Auf allen Kreisen der Doppelschar (134) wird also der *Brennpunkt* der x-Achse durch denselben Wert

$$t = \gamma \equiv \frac{257^\circ\, 27'\, 12''}{360^\circ\, 00'\, 00''} \cdot 2\pi$$

geliefert.

Zur Bestimmung des in (134) enthaltenen *ausgezeichneten Extremalenbüschels* erhält man nach (88) die Differentialgleichung

$$\cos\gamma\, d\varkappa - d\lambda = 0.$$

Daraus folgt, daß das ausgezeichnete Büschel aus denjenigen Kreisen besteht, welche ihre Mittelpunkte auf der x-Achse haben und die im Brennpunkt P_1'' an den Kreis $\mathfrak{E}_0^*$ gezogene Tangente berühren. Die letztere ist also die Enveloppe $\mathfrak{F}$ des Büschels, ein Halbstrahl, welcher mit der positiven x-Achse den Winkel $\gamma - \frac{3\pi}{2}$ bildet.

[1]) Abgesehen von etwaigen unfreien Lösungen (§ 52), welche streckenweise mit den Schenkeln des Winkels zusammenlaufen.

Werden die Variabeln $t, \varkappa, \lambda$ auf den Bereich

$$\mathfrak{A}: \qquad 0 < t < \gamma, \quad -\infty < \varkappa < +\infty, \quad \lambda < 0$$

beschränkt, so bildet die Kongruenz (134), (135) ein räumliches *Feld*, welches den durch die Ungleichungen

$$\mathcal{S}': \qquad z > 0, \quad \cos\gamma < \frac{y}{z} < 1$$

definierten Teil des Raumes ausfüllt.

Zu einem gegebenen Punkt x, y, z von $\mathcal{S}'$ erhält man den zugehörigen Punkt von $\mathfrak{A}$, indem man zunächst die Gleichung

$$\sin t - \frac{y}{z}\, t = 0$$

nach t auflöst; da die Funktion $\sin t/t$ von $+1$ bis $\cos\gamma$ beständig abnimmt, wenn t von 0 bis γ wächst, so hat diese Gleichung eine und nur eine Lösung t zwischen 0 und γ. Die Werte von λ und $\varkappa$ folgen dann aus (134).

Die x-Achse gehört nicht zu diesem Feld $\mathcal{S}'$, wohl aber zu dessen Begrenzung. Daher läßt sich die *Weierstraß'sche Konstruktion* durchführen und zwar auf folgende Weise:

Fall I: $\qquad 0 < \alpha \overline{\overline{<}} \pi$.

Sei $\overline{\mathfrak{C}}$ irgendeine von $\mathfrak{E}_0$ verschiedene Vergleichskurve; sie möge von einem Punkt P_5 der x-Achse ausgehen. Wir setzen zunächst voraus, daß sie nicht mit

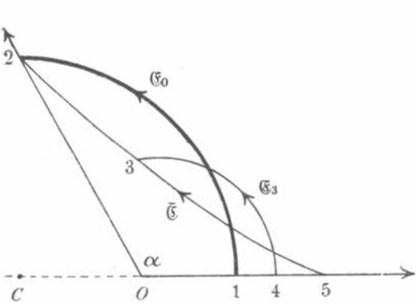

Fig. 115.

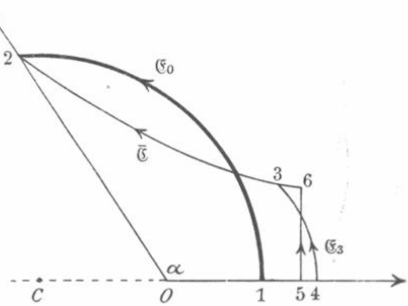

Fig. 116.

einem zur x-Achse senkrechten geraden Segment beginnt (Fig. 115). Ist dann P_3 ein Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$ zwischen P_5 und P_2, so ist die Länge des Bogens $P_5 P_3$ sicher größer als y_3, und $y_3 \overline{\overline{>}} 0$, da ja die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ ganz in dem Winkelraum α verlaufen soll. Daher liegt der Punkt x_3, y_3, z_3 in $\mathcal{S}'$, da $\cos\gamma < 0$; wir können also nach P_3 von der x-Achse aus einen und nur einen Kreisbogen $P_4 P_3$ konstruieren, welcher im Punkt P_4 die x-Achse senkrecht schneidet, in positivem Sinn beschrieben ist, dessen Zentriwinkel t_3 zwischen 0 und γ liegt, und dessen Länge z_3 gleich der Länge des Bogens $P_5 P_3$ der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ ist. Die Betrachtung der Funktion: $S(\tau) = J_{43} + \overline{J}_{32}$ führt nun zum Weierstraß'schen Fundamentalsatz und mit dessen Hilfe wie in § 64, a) zu dem Resultat: $\Delta J < 0$.

Der Beweis ist etwas zu modifizieren[1]), wenn die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ mit einem zur

[1]) Vgl. hierzu Kneser, *Lehrbuch*, p. 148.

x-Achse senkrechten geraden Segment $P_5 P_6$ beginnt (Fig. 116). Für einen Punkt P_3 zwischen P_6 und P_2 gelten dann die vorigen Resultate. Nähert sich der Punkt P_3 dem Punkt P_6, so nähert sich der Kreisbogen $P_4 P_3$ dem geraden Segment $P_5 P_6$, und es ist

$$\underset{\tau_3=\tau_6+0}{L} J_{43} = \bar{J}_{56}, \qquad \underset{\tau_3=\tau_6+0}{L} K_{43} = \bar{K}_{56}.$$

Daraus folgt, daß

$$S(\tau_6+0) = \bar{J}_{56} + \bar{J}_{62} = \bar{J}_{52}, \quad \text{und daher}$$
$$\Delta J = -[S(\tau_2-0) - S(\tau_6+0)],$$

woraus, wie oben, folgt, daß $\Delta J < 0$.

Wir erhalten also das Resultat: *Wenn der Winkel α zwei Rechte nicht übersteigt, so liefert der Kreisbogen $\mathfrak{E}_0$ das **absolute Maximum** für den Flächeninhalt.*

Fall II: $\qquad \pi < \alpha < 2\pi.$

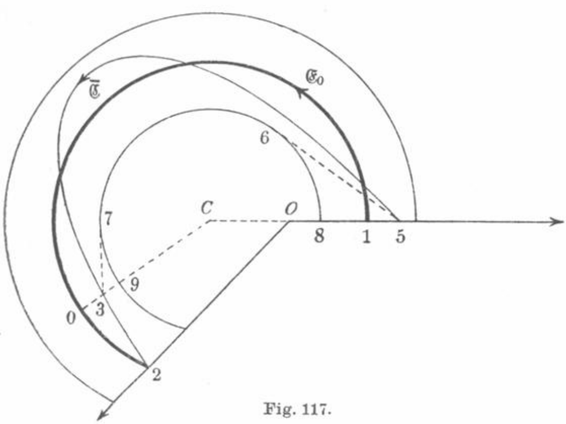

Fig. 117.

Hier ist die Weierstraß'sche Konstruktion nicht immer möglich. Trotzdem läßt sich wenigstens die Existenz eines *starken* ***relativen** Maximums* nachweisen. Dazu verbinden wir die beiden Schenkel des Winkels durch zwei mit $\mathfrak{E}_0$ konzentrische Kreisbogen mit den Radien $R-d$ und $R+d$, wenn $R = -\lambda_0$ den Radius von $\mathfrak{E}_0$ und d eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet, und beschränken die Vergleichskurven auf den zwischen diesen beiden konzentrischen Kreisbogen gelegenen Teil des Winkelraums α. Ist P_3 ein Punkt einer solchen Vergleichskurve, für welchen $y_3 \geqq 0$, so gelten dieselben Betrachtungen wie im Fall I. Ist dagegen $y_3 < 0$, so sei P_0 der Schnittpunkt des Vektors CP_3 oder dessen Verlängerung mit dem Kreis $\mathfrak{E}_0^*$, und z_0 die Länge des Bogens $P_1 P_0$ von $\mathfrak{E}_0^*$. Dann zeigt man leicht (siehe Fig. 117), daß

$$\frac{y_3}{z_3} \gtreqless \frac{R+d}{R-d}\,\frac{y_0}{z_0},$$

und hieraus läßt sich schließen, daß man d so klein wählen kann, daß die Ungleichung

$$\cos\gamma < \frac{y_3}{z_3} < 1$$

für jeden Punkt P_3 jeder ganz zwischen den beiden konzentrischen Kreisbogen verlaufenden Vergleichskurve erfüllt ist, welche nicht mit einem zur x-Achse senkrechten Segment beginnt. Daraus folgt dann wieder die Möglichkeit der Weierstraß'schen Konstruktion und damit die Ungleichung $\Delta J < 0$[1]).

d) Weitere Literatur über isoperimetrische Probleme:

Schon die letzten Entwicklungen haben gezeigt, daß die Theorie des isoperimetrischen Problems noch nicht zu einem ähnlichen Abschluß gelangt ist wie die Theorie des Extremums ohne Nebenbedingungen. Dies gilt auch von den Fragen, die wir für das letztere in Kapitel VI bis IX im einzelnen durchgeführt haben. Wir beschränken uns daher darauf, die wichtigsten hierher gehörigen neueren Arbeiten zusammenzustellen:

Von *diskontinuierlichen Lösungen*[2]) bei isoperimetrischen Problemen handelt Caratheodory in seiner auf p. 367, Fußnote [2]) zitierten Dissertation. Insbesondere wird der Ausnahmefall untersucht, in welchem jede Extremale des Integrals J zugleich Extremale für das Integral K ist.

Für isoperimetrische Probleme mit *Gebietseinschränkung* gilt zunächst der von Weierstrass herrührende Satz, daß alle frei variierbaren Bestandteile der Minimumskurve Extremalen mit demselben Wert λ_0 der isoperimetrischen Konstanten sein müssen. Ferner müssen, wie ebenfalls Weierstrass[3]) gezeigt hat, in den Übergangspunkten in der Bezeichnung von § 52, b) und § 60, b) die Bedingungen

$$\mathcal{E}(x_3, y_3; p_3, q_3; \tilde{p}_3, \tilde{q}_3; \lambda_0) = 0, \qquad \mathcal{E}(x_4, y_4; p_4, q_4; \tilde{p}_4, \tilde{q}_4; \lambda_0) = 0$$

erfüllt sein. Andeutungen über die Bedingung entlang der Schranke gibt Hadamard, „*Sur quelques questions de calcul des variations*", Annales de l'École Normale Supérieure (3), Bd. XXIV, (1907), p. 222.

In derselben Arbeit beschäftigt sich Hadamard mit der Aufgabe das *Hilbert'sche Existenztheorem* auf isoperimetrische Probleme zu übertragen. Dabei ergeben sich eigentümliche Schwierigkeiten, die damit zusammenhängen, daß in den Bedingungen von Legendre und Weierstraß die isoperimetrische Konstante λ auftritt. Hier ist schon der Satz von § 33 über die Existenz eines Minimums im Kleinen nicht mehr richtig. Dagegen läßt sich der Osgood'sche Satz auf das isoperimetrische Problem übertragen, wie Hahn[4]) gezeigt hat.

An weiteren neueren Arbeiten erwähnen wir schließlich noch zwei Göttinger Dissertationen: Cairns, „*Die Anwendung der Integralgleichungen auf die zweite Variation bei isoperimetrischen Problemen*" (1907), und Crathorne, „*Das räumliche isoperimetrische Problem*" (1907).

[1]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 11, b) und 26—35 am Ende dieses Kapitels.

[2]) Vgl. § 59, b), Ende, und Kneser, *Lehrbuch* §§ 45, 46.

[3]) *Vorlesungen* 1879, vgl. auch Hancock, *Lectures,* Art. 205 und Kneser, *Lehrbuch* § 47. Der Beweis folgt leicht nach der Schlußweise von § 60, b); vgl. dazu Fig. 84.

[4]) Vgl. p. 280, Fußnote [2]).