universität innsbruck

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Übungsaufgaben zu Kapitel VI bis IX

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Übungsaufgaben zu Kapitel VI bis IX.

1. Für Beispiel XVII: $F = \frac{y y'^3}{x'^2 + y'^2}$ *die Transversalitätsbedingung* aufzustellen (§ 36).

Lösung:

$$y_1 \sin^2\theta_1 \left(-\sin 2\theta_1 \cos\tilde{\theta}_1 + (2 + \cos 2\theta_1) \sin\tilde{\theta}_1\right) = 0.$$

(Kneser)

2. Für Beispiel XIII: $F = G(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$ *die Transversalitätsbedingung mittels der Indikatrix* abzuleiten (§ 36).

3. Für Beispiel XIV:

$$F = \tfrac{1}{2}(xy' - yx') - R\sqrt{x'^2 + y'^2}:$$

a) Die *Transversalitätsbedingung* aufzustellen. Elementargeometrische Konstruktion von θ_1, wenn $x_1, y_1, \tilde{\theta}_1$ gegeben sind (§ 36).

b) *Zu der Extremalenschar durch den Koordinatenanfangspunkt O die Transversalenschar zu bestimmen* (§§ 31, 44).

Lösung: Die Schar konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt O.

c) Die Kurve $\mathfrak{K}$ schneide die Extremale $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 transversal: *den Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ zu bestimmen,* sowohl nach der Formel (47) von § 39 als mittels der Extremalenschar, welche von $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird (§ 40).

Lösung: Sind $\theta_1, \tilde{\theta}_1$ die Tangentenwinkel von $\mathfrak{E}_0$, beziehungsweise $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1, $\tilde{r}_1$ der Krümmungsradius von $\mathfrak{K}$ in P_1, D_1 der Abstand des Punktes P_1 vom Koordinatenanfangspunkt O, γ die Amplitude des Vektors OP_1, so lautet die Gleichung zur Bestimmung des Tangentenwinkels θ_1'' von $\mathfrak{E}_0$ im Brennpunkt P_1'':

$$2\tilde{r}_1 \sin(\theta_1'' - \tilde{\theta}_1) \sin^2(\theta_1 - \tilde{\theta}_1) + \sin(\theta_1'' - \theta_1)(D_1 \sin(\theta_1 - \gamma) - 2R) = 0.$$

Wenn insbesondere $\tilde{r}_1 = \infty$, so ist die Tangente an $\mathfrak{E}_0$ in P_1'' parallel der Tangente an $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1.

4*. *Für das Aktionsintegral*[1])

$$\mathfrak{A} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U(x, y) + h)}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$

die Bedingung zur Bestimmung des Punktes P_0 aufzustellen, wenn der Anfangspunkt P_0 auf einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ beweglich, der Endpunkt P_1 fest ist (§ 36, b)).

[1]) Vgl. Aufgabe 9, p. 296.

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 und das Potential $U(x, y)$ von den Koordinaten der Endpunkte unabhängig sind, und daß die Konstante h bestimmt ist durch die Gleichung

$$v_0^2 = 2\,(U(x_0, y_0) + h).$$

Lösung: Die Gleichung zur Bestimmung des Punktes P_0 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ lautet:

$$v_0 \cos(\tilde{\theta}_0 - \theta_0) + (t_1 - t_0)(X_0 \cos\tilde{\theta}_0 + Y_0 \sin\tilde{\theta}_0) = 0.$$

Dabei bedeutet t die Zeit, X_0, Y_0 die Komponenten der Kraft im Punkt P_0.

Für den speziellen Fall eines *schweren materiellen Punktes*[1]) reduziert sich die Bedingung darauf, daß die Tangente an die Extremale im Punkt P_1 senkrecht zur Tangente an die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_0 sein muß, also dieselbe Bedingung wie bei der Brachistochrone. (Buck)

5*. *Die Gleichung zur Bestimmung des Brennpunktes für das Integral*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

aufzustellen (§ 39).

Lösung: Die Kurve $\mathfrak{K}$ sei gegeben in der Form: $y = \tilde{y}(x)$; sie schneide die Extremale $\mathfrak{E}_0 : y = y(x)$ transversal im Punkt P_1; $\Delta(x, x_1)$ habe dieselbe Bedeutung wie in § 12. Setzt man dann

$$\begin{aligned} A_1 &= f_x + (2\tilde{y}' - y')f_y + \tilde{y}''f_{y'} + (\tilde{y}' - y')^2 f_{y'y}\,|^1, \\ B_1 &= (\tilde{y}' - y')^2 f_{y'y'}\,|^1, \end{aligned} \tag{39}$$

so lautet die Gleichung zur Bestimmung des Brennpunktes der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$:

$$A_1\,\Delta(x, x_1) + B_1 \frac{\partial\Delta(x, x_1)}{\partial x_1} = 0. \tag{40}$$

6. *Das Integral*[2])

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 - y^2)\,dx$$

soll zu einem Minimum gemacht werden; der Anfangspunkt ist fest und fällt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammen; der Endpunkt ist auf der Kurve

$$y = (\alpha - x)^{\frac{1}{3}}, \qquad (\alpha > 0)$$

beweglich (§ 38).

Lösung:

$$y = \frac{y_2 \sin x}{\sin x_2},$$

wo x_2 der Gleichung

$$3\,(x_2 - \alpha) - \sin 2\,x_2 = 0$$

---

[1]) Vgl. Aufgabe 10, p. 296. [2]) Vgl. Aufgabe 3, p. 144.

genügt. Für ein Minimum ist notwendig, daß: $x_2 < \alpha$, und $x_2 \overline{\overline{<}} \pi$. Diese Bedingungen sind nur vereinbar, wenn

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi .$$

Numerisches Beispiel: $\alpha = 2$; dann ist $x_2 = 1.88$, $\quad y_2 = 0.55$.

Andeutung: Wende die „Differentiationsmethode" von § 38 an und mache von den Formeln (75) von p. 147 Gebrauch. (A. Mayer)

7. *Konstruktion einer Kettenlinie mit der x-Achse als Direktrix, welche durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade senkrecht schneidet* (§ 39).

Lösung: Die Konstantenbestimmung, bei der man von dem Satz, daß alle Kettenlinien ähnlich sind, Gebrauch machen kann, führt auf eine transzendente Gleichung von der Form

$$\operatorname{Ch} u = a u + b .$$

8*. *Es sei eine Kurve $\mathfrak{K}$ gegeben und auf ihr ein Punkt P_1; einen zweiten Punkt P_2 auf $\mathfrak{K}$ und eine von P_1 nach P_2 führende Kurve $\mathfrak{C}$ von gegebener Länge l zu bestimmen derart, daß der von dem Bogen $P_1 P_2$ der Kurve $\mathfrak{K}$ und dem Bogen $P_1 P_2$ der Kurve $\mathfrak{C}$ eingeschlossene Flächenraum ein Maximum wird.*

Andeutungen: Führe Polarkoordinaten ein mit dem Punkt P_1 als Pol. Ist P ein beliebiger Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$ und $|P_1 P| = r$, so bedeute $\varphi(r)$ den Inhalt der zwischen der Geraden $P_1 P$ und dem Bogen $P_1 P$ der Kurve $\mathfrak{K}$ enthaltenen Fläche. Führt man dann auf den zulässigen Kurven die Bogenlänge s, gemessen vom Punkt P_1 aus, als unabhängige Variable ein (vgl. Aufgabe 35 von p. 149), so ist die gegebene Aufgabe mit der folgenden äquivalent: Das Integral

$$J = \tfrac{1}{2} \int_0^l \left(r \sqrt{1 - r'^2} + 2 \varphi'(r)\, r'\right) ds$$

zu einem Maximum zu machen in Beziehung auf die Gesamtheit der Kurven

$$r = r(s), \qquad 0 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} l$$

in der r, s-Ebene, welche vom Koordinatenanfangspunkt nach der Geraden $s = l$ gezogen werden können, und welche abgesehen von Stetigkeitsbedingungen den Ungleichungen

$$r(s) \overline{\overline{>}} 0, \qquad |r'(s)| \overline{\overline{<}} 1 \quad \text{für} \quad 0 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} l$$

genügen (§§ 7, 38—41).

Lösung: Die gesuchte Kurve in der x, y-Ebene ist ein Kreisbogen, welcher im Punkt P_2 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ senkrecht steht. Ist 2χ der Zentriwinkel des Kreisbogens $P_1 P_2$, ferner $r_2 = |P_1 P_2|$ und ϱ_2 der Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_2, so muß überdies die Ungleichung

$$\frac{r_2}{\varrho_2} \overline{\overline{<}} \frac{\sin 2\chi - 2\chi \cos 2\chi}{2(\sin \chi - \chi \cos \chi)}$$

erfüllt sein. (Erdmann, Kneser)

9*. *Die Bliss'sche Bedingung von § 42 mittels des Extremalenintegrals herzuleiten.* (Dresden)

10*. *Zwischen zwei koaxialen Kreisringen die Rotationsfläche kleinsten Inhalts zu spannen* (§ 42).[1])

Konstantenbestimmung. Bei welcher Entfernung der beiden Kreisringe hört das Minimum auf? Behandle zunächst den Fall kongruenter Kreisringe.

Lösung für den Fall kongruenter Kreisringe: Ist R der Radius des erzeugenden Kreises und D der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse, so ist der Abstand der Mittelebenen der beiden Kreisringe im Moment, wo das Minimum aufhört, gegeben durch

$$\frac{2}{\operatorname{Ch} t_1}\{R - Dt_1 - Rt_1 \operatorname{Th} t_1\}$$

wo t_1 der Gleichung genügt:

$$\frac{R}{D} = \frac{\operatorname{Ch} t_1 (t_1 \operatorname{Sh} t_1 - \operatorname{Ch} t_1)}{(1 - \operatorname{Sh}^2 t_1) t_1 + 2 \operatorname{Sh} t_1 \operatorname{Ch} t_1}.$$

(Mary E. Sinclair)

11. *Den kürzesten Abstand zwischen einer Parabel und einem Kreis zu bestimmen.* Detaillierte Diskussion der verschiedenen möglichen Fälle. Unterscheidung von relativem und absolutem Minimum (§ 42).

12*. *Es sei ein Kreis $\mathfrak{K}_0$ und eine von ihm ausgehende Kurve $\mathfrak{K}_1$ gegeben: von einem nicht vorgeschriebenen Punkt des Kreises $\mathfrak{K}_0$ nach der Kurve $\mathfrak{K}_1$ eine Kurve $\mathfrak{C}$ von gegebener Länge zu ziehen, welche mit den Kurven $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ zusammen eine Fläche maximalen Inhalts einschließt* (§ 38—42).

(Kneser, Mathematische Annalen Bd. LVI, p. 200)

13*. Den *Transversalensatz* und den *Enveloppensatz* mittels des Extremalenintegrals abzuleiten (§§ 37, 44).

14. Sind zwei Punkte P_1 und P_2 auf zwei Kurven $\mathfrak{K}_1$, resp. $\mathfrak{K}_2$ beweglich, welche durch ihre Bogenlängen s_1, resp. s_2 als Parameter dargestellt sind, so ist *das Differential des Abstandes* $|P_1 P_2|$ *beider Punkte,* als Funktion der beiden unabhängigen Variabeln s_1, s_2:

$$d\,|P_1 P_2| = \cos\omega_2\, ds_2 - \cos\omega_1\, ds_1, \tag{41}$$

wenn ω_i den Winkel zwischen der Richtung $P_1 P_2$ und der positiven Tangente an die Kurve $\mathfrak{K}_i$ im Punkt P_i bedeutet (§ 37).

15. Ausdehnung des vorangehenden Satzes auf geodätische Linien. Daraus die Sätze von § 43, a) und c) abzuleiten. (Darboux)

16. Zieht man von einem Punkt P die Normalen PP_1 und PP_2 nach zwei gegebenen Kurven $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$, so hat die Kurve

$$|PP_1| + |PP_2| = \text{konst.} \tag{42}$$

---

[1]) Das bekannte Plateau'sche Experiment, wenn die Dimensionen des Drahtquerschnitts berücksichtigt werden.

die Eigenschaft, daß ihre Tangente im Punkt P den Winkel zwischen der Geraden PP_2 und der Verlängerung der Geraden PP_1 halbiert; dagegen halbiert die Tangente der Kurve

$$|PP_1| - |PP_2| = \text{konst.} \tag{43}$$

im Punkt P den Winkel der beiden Geraden PP_1 und PP_2.

Die beiden Kurvenscharen (42) und (43) sind orthogonal. Schrumpfen die beiden Kurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ zu Punkten zusammen, so erhält man bekannte Sätze über Ellipse und Hyperbel (§ 37; vgl. Aufgabe Nr. 14).

17. Den vorangehenden Satz einerseits auf geodätische Linien zu verallgemeinern (Darboux; *geodätische Ellipsen und Hyperbeln*), andererseits auf das Variationsproblem, für welches

$$F = G(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

18. Ist θ irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\mathsf{G}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2\mathsf{F}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \mathsf{E}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2} = 1, \tag{44}$$

so stellt die Gleichung

$$\theta(u, v) = \text{konst.}$$

eine Schar von *„Parallelkurven"* der Fläche dar, für welche das Linienelement gegeben ist durch: $ds^2 = \mathsf{E}du^2 + 2\mathsf{F}du\,dv + \mathsf{G}dv^2$. Umgekehrt läßt sich jede Schar von Parallelkurven in dieser Form darstellen (§ 20, b), § 31 c), § 43).

(Darboux)

19. Kennt man eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (44), welche eine nicht additive Konstante β enthält, so ist *das allgemeine Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien* gegeben durch

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \alpha.$$

Bei festgehaltenem β sind die beiden Kurvenscharen $\theta =$ konst. und $\partial\theta/\partial\beta =$ konst. orthogonal (§ 20, d), § 31, c), § 43). (Darboux)

20*. *Verallgemeinerung des Begriffs des Winkels:* Es sei A_0A_1 ein Bogen einer Transversalen $\mathfrak{K}$ der vom Punkt $O(x_0, y_0)$ ausgehenden Extremalenschar, und OA_0, OA_1 die beiden nach A_0 und A_1 führenden Extremalen dieser Schar. Ferner bezeichne

$$l = J_{\mathfrak{K}}(A_0A_1),$$

$$r = J_{\mathfrak{E}_0}(OA_0) = J_{\mathfrak{E}_1}(OA_1),$$

und es werde vorausgesetzt, daß

$$F(x_0, y_0, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0$$

für jedes γ. Alsdann definiert Bliss den Grenzwert

$$\Omega = \underset{r=0}{L}\frac{l}{r}$$

als den „verallgemeinerten" Winkel zwischen den Extremalen OA_0 und OA_1. Der Wert desselben wird ausgedrückt durch das bestimmte Integral

$$\Omega = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{F(x_0, y_0, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta})\, d\theta}{F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)\sin(\tilde{\theta} - \theta)}.$$

Dabei sind θ_0, θ_1 die Tangentenwinkel der Extremalen OA_0, OA_1 im Punkt O, und $\tilde{\theta}$ ist diejenige der beiden[1]) zur Richtung θ transversalen Richtungen, welche zur Linken der Richtung θ liegt, wenn, wie vorausgesetzt wird, $\theta_0 < \theta_1$ (§ 44, b)).

Andeutung: Stelle die Extremalenschar durch den Punkt O in der Normalform (188) von § 33 dar. (Bliss)

21. Für das Integral

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (y^2 - y'^2)\, dx$$

den Zusatz III von § 44, b) zu verifizieren (vgl. Aufgabe 3 auf p. 144). (Kneser)

22. Die *kürzeste Entfernung von einem Punkt nach einer Ellipse* zu bestimmen. Den Fall zu diskutieren, wo der gegebene Punkt auf der Evolute der Ellipse liegt (§§ 38—41, 47).

23*. Für das *abgeplattete Rotationsellipsoid*

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b$$

ist der Äquator eine geodätische Linie. Der auf dem Äquator zu einem Punkt A gehörige konjugierte Punkt A' hat gegen A einen Längenunterschied $\pi b/a$. Der Bogen AA' des Äquators liefert ein Minimum der Länge (§ 47).

(v. Braunmühl, Osgood)

24*. Die *Eckenbedingung* für diskontinuierliche Lösungen für das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

abzuleiten (Vgl. p. 367, Fußnote 2)). (Erdmann)

25. Die Weierstraß'sche *Eckenbedingung* für diskontinuierliche Lösungen aus dem Du-Bois-Reymond'schen Lemma von § 5, c) abzuleiten.

(Whittemore)

26. Die Weierstraß'sche *Eckenbedingung* für diskontinuierliche Lösungen mittels des Extremalenintegrals herzuleiten (§§ 37, 48).

27. *Für Beispiel X:*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 (1 + y')^2\, dx$$

die diskontinuierlichen Lösungen zu bestimmen.

[1]) Vgl. § 36, a), Ende.

Lösung: Wenn das Gefälle der Verbindungsgeraden $P_1 P_2$ zwischen 0 und -1 liegt, gibt es zwei diskontinuierliche Lösungen mit je einer Ecke, bestehend aus zwei geraden Segmenten vom Gefälle 0 und -1, beziehungsweise -1 und 0. Dagegen gibt es unendlich viele Lösungen mit mehr als einer Ecke; sie setzen sich ebenfalls aus geraden Segmenten zusammen, die abwechselnd das Gefälle 0 und -1 haben.

28*. *Für das Problem der Kurve kleinsten Trägheitsmoments in Beziehung auf einen Punkt* (Aufgabe 17 von p. 299) *die diskontinuierlichen Lösungen zu bestimmen.*

Lösung: Wenn $|\theta_2 - \theta_1| < \frac{\pi}{3}$, so existiert keine diskontinuierliche Lösung.

Wenn $|\theta_2 - \theta_1| \geqq \frac{\pi}{3}$, so liefert der aus den beiden geraden Segmenten $P_1 P_0$ und $P_0 P_2$ zusammengesetzte Kurvenzug das absolute Minimum. (Mason)

29*. *Das Integral*

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\sqrt{x'^2(y^2+1) - 2xy\,x'y' + y'^2(x^2+1)}}{1+x^2+y^2} - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{4} \right\} dt$$

zu einem Extremum zu machen; insbesondere sollen auch die diskontinuierlichen Lösungen bestimmt werden.

a) Die Extremalen sind gerade Linien. Führe Polarkoordinaten ein: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und setze: $\theta - \varphi = \psi$, unter θ den Tangentenwinkel der betrachteten Kurve verstanden. Dann wird

$$F(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = \frac{\sqrt{1 + r^2\sin^2\psi}}{1+r^2} - \frac{1}{4},$$

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{(1+r^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4}.$$

Hieraus die Indikatrix für die verschiedenen Lagen des Punktes x, y zu bestimmen. An derselben liest man zunächst für *kontinuierliche Lösungen* folgende Resultate ab: Sei p die Länge der Senkrechten vom Koordinatenanfangspunkt O auf die betrachtete Gerade. Dann liefert die Gerade stets ein starkes Maximum, wenn: $p > \sqrt{15}$, stets ein schwaches Maximum, wenn: $\sqrt{2^{\frac{4}{3}} - 1} < p < \sqrt{15}$, stets ein Minimum, wenn: $p < \sqrt{2^{\frac{4}{3}} - 1}$, wobei jedoch zwei Fälle zu unterscheiden sind: Sind M und N die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis

$$r = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{1+p^2}} - 1},$$

so ist die Bedingung (IV') für ein starkes Minimum erfüllt für die Punkte der Geraden zwischen M und N; dagegen ist die Bedingung (IV) nicht erfüllt für die Punkte der Geraden außerhalb des Segmentes MN.

b) *Jeder Punkt im Innern des Kreisringes*

$$\sqrt{2^{\frac{4}{3}}-1} \leqq r \leqq \sqrt{3}$$

ist eine mögliche Ecke für diskontinuierliche Minimallösungen; die zugehörigen Richtungspaare werden durch die Gleichungen

$$\frac{1}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2\sin^2\psi}} - \frac{1}{4} = 0, \qquad \bar{\psi} = \pi - \psi$$

bestimmt. Der Winkel $P_1 P_0 P_2$ wird dabei von dem Radius Vektor OP_0 vom Koordinatenanfangspunkt aus halbiert.

Auf einer gegebenen Geraden, welche in diesen Kreisring eintritt, sind die möglichen Ecken gerade die beiden oben mit M und N bezeichneten Punkte.[1])

c) *Jeder Punkt außerhalb des Kreises:* $r = \sqrt{15}$ *ist eine mögliche Ecke für diskontinuierliche Maximallösungen.* Die zugehörigen Richtungspaare werden durch die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2\sin^2\psi}} - \frac{1}{4} = 0, \qquad \bar{\psi} = -\psi$$

bestimmt. Die beiden Stücke $P_1 P_0$ und $P_0 P_2$ der diskontinuierlichen Lösung sind, verlängert, die Tangenten vom Punkt P_0 an den Kreis $r = \sqrt{15}$. Es liegt hier der Fall $\Omega(x, y) \equiv 0$ von § 50, d) vor; die beiden Scharen von Tangenten an den Kreis $r = \sqrt{15}$ sind die dort definierten beiden ausgezeichneten Extremalenscharen. Enthält die gebrochene Linie $P_1 P_0 P_2$ keinen Berührungspunkt mit dem Kreis $r = \sqrt{15}$, so hat man ein starkes, uneigentliches Maximum.

(Caratheodory, Dresden)

30*. *Die beiden notwendigen Bedingungen*

$$E_0 \lessgtr P_1, \qquad P_2 \lessgtr P_1''$$

für diskontinuierliche Lösungen (§ 49, c)) *mittels des Extremalenintegrals herzuleiten.* (Dresden)

31*. *Es sind zwei Punkte P_1 und P_2 im Innern der oberen Halbebene gegeben* ($y_1 > 0$, $y_2 > 0$). *Es soll ein Punkt P_0 der oberen Halbebene* ($y_0 \gtrless 0$) *und ein Punkt P_3 der x-Achse so gewählt und drei gewöhnliche Kurven $P_0 P_1$, $P_0 P_2$, $P_0 P_3$ in der oberen Halbebene* ($y \gtrless 0$) *so gezogen werden, daß die durch Rotation der aus diesen drei Bogen zusammengesetzten Kurve um die x-Achse erzeugte Fläche einen möglichst kleinen Inhalt besitzt*[2]) (§§ 48—50).

Lösung: Die Bogen $P_0 P_1$, resp. $P_0 P_2$ sind Bogen von zwei Kettenlinien $\mathfrak{E}_0$, resp. $\bar{\mathfrak{E}}_0$ mit der x-Achse als Direktrix; der Bogen $P_0 P_3$ ist eine zur x-Achse senkrechte Gerade; die letztere bildet im Punkt P_0 mit jedem der beiden Kettenlinienbogen einen Winkel von 120°.

---

[1]) Vgl. den Satz von Caratheodory auf p. 387.

[2]) Bei dem Plateau'schen Versuch mit zwei kreisförmigen Drähten bildet sich bei geeigneter Anordnung des Versuches die hier vorliegende zusammengesetzte diskontinuierliche Lösung.

Die Tangente an $\mathfrak{E}_0$ (resp. $\overline{\mathfrak{E}}_0$) im Punkt P_0 möge die x-Achse im Punkt T_0 (resp. $\overline{T}_0$) schneiden. Die Tangente von $\overline{T}_0$ aus an den absteigenden Ast von $\mathfrak{E}_0$ möge denselben im Punkt E_0 berühren; die Tangente von T_0 aus an den aufsteigenden Ast von $\overline{\mathfrak{E}}_0$ möge denselben im Punkt $\overline{E}_0$ berühren. Dann muß: $P_1 \geqq E_0$, $P_2 \leqq \overline{E}_0$ sein.

Ferner sei T_1 der Schnittpunkt der Tangente an $\mathfrak{E}_0$ in P_1 mit der x-Achse und P_1'' der Berührungspunkt der Tangente von T_1 aus an den aufsteigenden Ast von $\overline{\mathfrak{E}}_0$. Dann ist es für ein Minimum weiter nötig, daß

$$P_2 \leqq P_1''.$$

Sind diese Bedingungen in der durch Unterdrückung des Gleichheitszeichens charakterisierten stärkeren Form erfüllt, so liefert die gefundene Lösung in der Tat ein Minimum des Flächeninhalts.

Andeutung: Zum Beweis der notwendigen Bedingungen wende man die Differentiationsmethode von § 38, passend modifiziert, an; für den Hinlänglichkeitsbeweis kombiniere man die hinreichenden Bedingungen für ein gewöhnliches Extremum mit den hinreichenden Bedingungen für kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit festen Endpunkten.

(Talqvist, Mary E. Sinclair)

32. Das *Snellius'sche Brechungsgesetz* mit den Methoden von § 51 abzuleiten.

33. Die *Weierstraß'sche Bedingung* (46), (47) von § 52 mittels der Variationsmethode zu beweisen. (Weierstrass)

34. Die dem Beispiel XX entsprechende Verallgemeinerung für geodätische Linien aufzustellen (§§ 52, 53).

Andeutung: Benutze Gleichung (39) von § 26.

35. Beispiel I mit der Modifikation, daß die zulässigen Kurven auf den Bereich

$$y \geqq k > 0$$

beschränkt werden (§§ 52, 53). (Kneser)

36. Im Innern eines konvexen Bereiches $\mathfrak{R}$ sind zwei Punkte P_1, P_2 gegeben. Die kürzeste Verbindungskurve von P_1 nach P_2 zu ziehen, welche den Bereich $\mathfrak{R}$ nicht verläßt und mit der Begrenzung desselben einen nicht vorgeschriebenen Punkt P_0 gemein hat (§ 52).

Lösung: Eine gebrochene Linie $P_1 P_0 P_2$, deren Segmente $P_1 P_0$, $P_0 P_2$ im Punkt P_0 mit der Tangente der Begrenzung gleiche Winkel bilden.

37. Die vorige Aufgabe auf geodätische Linien zu verallgemeinern.

(Kneser)

38*. Bei dem *Prinzip der kleinsten Aktion, angewandt auf die Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einer vertikalen Ebene,*[1]) sind die zulässigen Kurven auf den Bereich: $y \geqq k$ beschränkt.

[1]) Vgl. auch für die Bezeichnung Aufgabe Nr. 10 und 11 auf pp. 296 und 297.

Daraus folgt die Existenz einer *diskontinuierlichen Lösung* $P_0 P_3 P_4 P_1$, bestehend aus der Senkrechten $P_0 P_3$ vom Punkt P_0 auf die Schranke: $y = k$, dem Segment $P_3 P_4$ der Schranke und der Senkrechten $P_4 P_1$ auf die Schranke. Diese diskontinuierliche Lösung liefert stets wenigstens ein relatives Minimum. Läßt man den zweiten Endpunkt P_1 eine kontinuierliche Lösung (Parabel) vom Punkt P_0 an beschreiben, so liefert zunächst die kontinuierliche Lösung den kleineren Wert für das Aktionsintegral, bis der Punkt P_1 mit einem bestimmten zwischen P_0 und P_0' liegenden Punkt P_0'' zusammenfällt, in welchem beide Lösungen denselben Wert liefern. Jenseits des Punktes P_0'' liefert dann die diskontinuierliche Lösung den kleineren Wert. Der geometrische Ort des Punktes P_0'' wird in Polarkoordinaten mit der positiven y-Achse als Achse durch die Gleichung

$$\left(k + r \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(k - r \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = k^{\frac{3}{2}} + (k - r \cos \theta)^{\frac{3}{2}}$$

gegeben (§§ 52, b) und 57, e)).

Die Frage des absoluten Minimums mittels der auf p. 436 mitgeteilten Methode zu diskutieren. (Todhunter)

39*. *Sollen die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar*

$$U(x, y) = \text{konst.} \tag{45}$$

zugleich Extremalen für das Aktionsintegral[1])

$$\mathfrak{A} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau \tag{46}$$

sein, so ist notwendig und hinreichend, daß das Potential U der partiellen Differentialgleichung genügt

$$U_x U_y (U_{xx} - U_{yy}) = U_{xy}(U_x^2 - U_y^2), \tag{47}$$

welche ausdrückt, daß $U_x^2 + U_y^2$ eine Funktion von U (d. h. also die Kraft eine Funktion des Potentials) ist.[2])

Andeutung: Man beachte, daß für das Integral (46) transversal = orthogonale und wende die Sätze[3]) von § 20, b) an.

Zusätze: 1. Sind die orthogonalen Trajektorien der Schar (45) Extremalen für das Integral (46), so sind sie stets gerade Linien. 2. Sind die orthogonalen

---

[1]) Vgl. Aufgabe Nr. 9 auf p. 296.

[2]) Wegen Verallgemeinerung dieses Satzes auf die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche vgl. De Saint-Germain, Journal de Mathematiques (3) Bd. II (1876), p. 325, Enneper, Göttinger Nachrichten, 1869, p. 62 und Stäckel, *Dissertation,* Berlin 1885, p. 11.

[3]) Der hier in Frage kommende Satz ist folgendermaßen zu berichtigen: „Eine Kurvenschar $F(x, y) = \text{konst.}$ kann nur dann Transversalenschar für ein gegebenes Variationsproblem sein, wenn eine Funktion von F existiert: $W = \psi(F)$, welche der Beltrami-Hamilton'schen Differentialgleichung (47) genügt."

Trajektorien der Schar (45) gerade Linien, so sind sie zugleich stets auch Extremalen für das Integral (46). 3. Besitzt das Integral (46) eine einparametrige Schar von geradlinigen Extremalen, so sind dieselben die orthogonalen Trajektorien der Schar (45).

Andeutung: Die Euler'sche Differentialgleichung für das Integral (46) in der Form (23b) von § 26 lautet:

$$\frac{dx}{ds} U_y - \frac{dy}{ds} U_x = \frac{2(U+h)}{r}. \tag{48}$$

40*. *Bei dem Prinzip der kleinsten Aktion sind die zulässigen Kurven auf das Gebiet*

$$U(x, y) + h \geqq 0 \tag{49}$$

beschränkt. Die hieraus folgenden diskontinuierlichen Lösungen für das Aktionsintegral (46) *zu untersuchen unter der Voraussetzung, daß das Potential U der partiellen Differentialgleichung* (47) *genügt* (§ 52).

Lösung: Die Betrachtung wird auf einen Bereich beschränkt, in welchem U eindeutig definiert und regulär ist, und in welchem U_x und U_y nicht gleichzeitig verschwinden. Es sei $\mathfrak{C}$:

$$x = \tilde{x}(v), \qquad y = \tilde{y}(v)$$

ein regulärer Bogen der Schranke

$$U(x, y) + h = 0; \tag{50}$$

v sei die Bogenlänge, und der positive Sinn sei so gewählt, daß die positive Normale der Kurve $\mathfrak{C}$, d. h. diejenige, deren Richtungskosinus durch: $-\tilde{y}'(v)$, $\tilde{x}'(v)$ gegeben sind, ins Innere des Bereiches (49) gerichtet ist. Man betrachte die Transformation

$$x = \tilde{x}(v) - \tilde{y}'(v)s, \qquad y = \tilde{y}(v) + \tilde{x}'(v)s \tag{51}$$

zwischen der x, y-Ebene und einer v, s-Ebene und bezeichne mit $\mathfrak{S}$ das Bild in der x, y-Ebene des Bereiches

$$0 \leqq s \leqq s_0, \qquad v_0 \leqq v \leqq v_1. \tag{52}$$

Man kann dann stets s_0, v_0, v_1 so wählen, daß die Transformation (51) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Bereichen (52) und $\mathfrak{S}$ definiert, und daß gleichzeitig die Funktionaldeterminante der Transformation (51), nämlich

$$\Delta(s, v) = -1 + \frac{s}{\tilde{r}},$$

wo $\tilde{r}$ den Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt v bezeichnet, im Bereich (52) von Null verschieden ist. Dann gilt der folgende Satz:[1])

Die Funktion U möge der partiellen Differentialgleichung (47) genügen; die zulässigen Kurven mögen auf den Bereich $\mathfrak{S}$ beschränkt werden, und die

[1]) Vgl. Frank, Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), p. 239 und die Berichtigung dazu Ibid. Bd. LXVI.

beiden gegebenen Punkte P_0 und P_1 mögen im Innern von $\mathfrak{S}$ liegen. Dann kann man von P_0 und P_1 aus je eine eindeutig definierte Normale $P_0 P_3$, resp. $P_1 P_4$ auf die Schranke $\tilde{\mathfrak{C}}$ ziehen.

Alsdann liefert der aus den Normalen $P_0 P_3$, dem Bogen $P_3 P_4$ der Schranke und der Normalen $P_4 P_1$ zusammengesetzte Kurvenzug stets ein starkes (relatives) Minimum für das Aktionsintegral (46).

Andeutung: Man zeige zunächst, daß die Funktion U beständig wächst, wenn man längs einer Normalen der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ von $\tilde{\mathfrak{C}}$ aus ins Innere des Bereiches $\mathfrak{S}$ fortschreitet, und wende dann den auf p. 399 angeführten Satz von Todhunter in leichter Modifikation an.

41*. Auf einer in der Form: $z = \varphi(x, y)$ gegebenen Fläche sind zwei Punkte P_1, P_2 gegeben. Die kürzeste Kurve zu bestimmen, welche auf der Fläche von P_1 nach P_2 gezogen werden kann, und deren Steilheit eine gewisse Grenze k nicht übersteigt:

$$\frac{dz}{ds} \leqq k. \tag{53}$$

Lösung: Die Lösungen setzen sich zusammen aus geodätischen Linien, soweit sie die Bedingung (53) erfüllen, und aus „Kurven konstanter Steilheit": $dz/ds = k$. An den Übergangspunkten müssen auch die geodätischen Linien die Steilheit k besitzen. (Zermelo)

42. *Einen abgestumpften Kegel von gegebener Basis und Höhe zu konstruieren, welcher in der Richtung der Achse den geringsten Widerstand erfährt* (§ 54).

Lösung: Entsteht der gesuchte abgestumpfte Kegel durch Rotation der Figur $ABCD$ um die Achse AB, und ist M der Mittelpunkt von AB, so ist $|MS| = |MD|$. (Siehe Fig. 105.) (Newton)

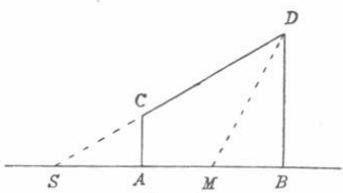

Fig. 105.

43*. *Ist PQ ein Kurvenbogen, dessen Gefälle durchweg > 1 ist, so erfährt die durch Rotation des Bogens PQ um die x-Achse erzeugte Fläche einen größeren Widerstand als die durch Rotation der gebrochenen Linie PRQ erzeugte, wobei PR parallel der y-Achse ist und RP das Gefälle 1 hat* (§ 54).

Andeutung: Zerlege den Bogen PQ in Elemente, wende auf dieselben den vorangehenden Satz an und gehe zur Grenze über. (Newton, Ellis)

44. Der *Widerstand einer Halbkugel* ist gleich der Hälfte des Widerstandes eines Zylinders von derselben Basis und Höhe, wenn beide sich in der Richtung der Achse bewegen (§ 54). (Newton)

Wie groß ist der Widerstand des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes von derselben Basis und Höhe?

Anwort: 0,3748 des Widerstandes des Zylinders.

45*. Den *Rotationskörper kleinsten Widerstandes* zu bestimmen, wenn statt des Newton'schen Gesetzes[1]) für den Widerstand:

$$dW = c \sin^2 \theta \, d\omega$$

eines der folgenden mit der Erfahrung besser übereinstimmenden Gesetze[2]) zu Grunde gelegt wird:

$$dW = c \sin \theta \, d\omega, \qquad \text{(v. Lössl.)}$$

$$dW = \frac{2c \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} d\omega. \qquad \text{(Duchemin)}$$

Lösung: Die Extremalen lassen sich nach derselben Methode wie beim Newton'schen Problem in endlicher Form darstellen mit q als Parameter. Ihre allgemeine Gestalt ist dieselbe wie beim Newton'schen Problem. Der Tangentenwinkel γ an der Spitze wird gegeben durch:

$$\operatorname{cotg} \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma = 54^0\,44', \quad \text{resp.}$$

$$\operatorname{cotg}^2 \gamma = \frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \qquad \gamma = 31^0\,37'.$$

Die Bedingung (IV) wird: $\theta \overline{\overline{<}} \delta$, wo

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \qquad \delta = 38^0\,10', \quad \text{resp.}$$

$$2 \sin^3 \delta + 3 \sin^2 \delta + 2 \sin \delta - 1 = 0, \qquad \delta = 18^0\,30'.$$

Die Lösung setzt sich zusammen aus einem Segment der y-Achse und einem darauf folgenden Extremalenbogen, der mit dem Tangentenwinkel δ ansetzt.

Ganz ähnliche Resultate gelten allgemein für

$$dW = f(q) \, d\omega$$

wenn $f'(q)$ zunächst von 0 bis zu einem endlichen Minimalwert abnimmt und von da beständig bis 0 wächst, während q von 0 bis $+\infty$ wächst. (Miles)

---

[1]) Vgl. wegen der Bezeichnung p. 409.

[2]) Vgl. *Encyclopädie,* IV 17, Nr. 4, 5, 6.