Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Neuntes Kapitel. Das absolute Extremum

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Neuntes Kapitel.

Das absolute Extremum.

§ 55. Einleitende Bemerkungen.

Wir haben bei der Definition des absoluten und relativen Extremums in § 3 gesehen, daß das Problem des absoluten Extremums sich auf dasjenige des relativen reduzieren läßt, insofern eine Kurve, welche für ein bestimmtes Integral in Beziehung auf eine gegebene Mannigfaltigkeit von zulässigen Kurven ein absolutes Extremum liefert, allemal auch ein relatives liefert. Kennt man also alle Lösungen des relativen Problems, und kann man a priori die Existenz eines absoluten Extremums beweisen, so ist mit dem relativen Problem — wenigstens wenn dasselbe nur eine endliche Anzahl von Lösungen besitzt —, zugleich auch das absolute gelöst. Kann man dagegen einen solchen Existenzbeweis nicht führen, so bleibt das absolute Problem ungelöst, selbst wenn man das relative vollständig gelöst hat.

Daher die fundamentale Wichtigkeit der Aufgabe: Für ein gegebenes Variationsproblem a priori die Existenz oder Nichtexistenz eines absoluten Extremums nachzuweisen. In älterer Zeit hat man geglaubt, aus der bloßen Existenz einer endlichen unteren Grenze für die Integralwerte ohne weiteres auf die Existenz eines absoluten Extremums schließen zu dürfen. So ist z. B. das berühmte Dirichlet'sche Prinzip gerade auf den Schluß basiert, daß das Doppelintegral

$$J = \int\int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

notwendig ein Minimum besitzen müsse, weil sein Wert stets $\gtreqless 0$ ist.

Weierstrass hat zuerst gezeigt, daß der Schluß falsch ist, da derselbe auf einer Verwechslung von unterer Grenze und Minimum beruht, und hat zugleich ein Beispiel[1]) angegeben, welches die Unhaltbarkeit der Dirichlet'schen Schlußweise drastisch illustriert. Es ist die Aufgabe, das Integral

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 dx$$

---

[1]) Weierstrass, *Werke*, Bd. II, p. 49.

zu einem Minimum zu machen in Beziehung auf die Gesamtheit aller in der Form $y = y(x)$ darstellbaren Kurven der Klasse C', welche durch zwei gegebene Punkte $(-1, a)$ und $(+1, b)$ gehen, wobei $a \neq b$.

Die untere Grenze dieses Integrals ist gleich Null. Denn einerseits kann das Integral sicher nie negative Werte annehmen, während andererseits zulässige Kurven angegeben werden können, welche dem Integral einen beliebig kleinen Wert erteilen. So ist z. B. die Funktion

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{\operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

eine zulässige Funktion, für welche man leicht die Ungleichung

$$J < \int_{-1}^{+1} (x^2 + \varepsilon^2) y'^2 \, dx = \frac{\varepsilon (b-a)^2}{2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

verifiziert, aus der durch Verkleinerung des Parameters ε die Behauptung folgt.

Die untere Grenze des Integrals ist also in der Tat gleich Null. Trotzdem gibt es keine zulässige Kurve, für welche das Integral den Wert Null annimmt. Denn wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von y' wäre dies nur möglich, wenn der Integrand beständig gleich Null, d. h. y konstant wäre, und dies widerspricht der Voraussetzung $a \neq b$.

Obgleich somit der Schluß von der Existenz einer endlichen unteren Grenze auf die Existenz eines Minimums nicht haltbar ist, so wirft sich doch die Frage auf, ob es nicht möglich ist, bei einem gegebenen Variationsproblem der Funktion unter dem Integrationszeichen oder der Mannigfaltigkeit der zulässigen Kurven (oder beiden) solche Beschränkungen aufzuerlegen, daß man die Existenz eines absoluten Extremums a priori feststellen kann, ähnlich wie man etwa von einer in einem Intervall $[ab]$ definierten Funktion $f(x)$ a priori die Existenz eines Maximums und Minimums behaupten kann, vorausgesetzt, daß man der Funktion die Bedingung der Stetigkeit auferlegt.

Hilbert[1]) hat nun in der Tat eine Methode ersonnen, durch die diese wichtige Frage in Angriff genommen und in gewissen Fällen vollständig erledigt werden kann. Er hat den Grundgedanken derselben an dem Beispiel der kürzesten Linie auf einer Fläche erläutert

[1]) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII (1899), p. 184.

und auch einige Andeutungen über die Ausdehnung der Methode auf das allgemeine Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

gegeben[1]).

Die Hilbert'sche Methode ist inzwischen von LEBESGUE[2]) und CARATHEODORY[3]) nicht unwesentlich vereinfacht worden, und unter Benutzung dieser Vereinfachungen[4]) soll in diesem Kapitel die Existenz eines absoluten Minimums des Integrals

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt,$$

bei festen Endpunkten, bewiesen werden, und zwar unter den folgenden Voraussetzungen:

A) Die Funktion $F(x, y, x', y')$ *ist von der Klasse* C''' und genügt der *Homogeneitätsbedingung*

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'), \qquad k > 0$$

in dem Bereich

$$\mathfrak{T}: \qquad (x, y) \text{ in } \mathfrak{R}, \qquad x'^2 + y'^2 \neq 0.$$

B) Das Problem ist *positiv definit*[5]) in einem im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{R}_0$.

---

[1]) In *Vorlesungen*, Göttingen, Sommer 1900. NOBLE hat in seiner Dissertation „*Eine neue Methode in der Variationsrechnung*", (Göttingen 1901) in §§ 5—14 diese Andeutungen im einzelnen durchgeführt. Seine Schlüsse entbehren jedoch derjenigen Strenge, welche bei einer Untersuchung dieser Art unerläßlich ist. Insbesondere sind die Entwicklungen in §§ 9, 10 und 13 nicht einwandfrei

Andeutungen eines auf wesentlich anderen Prinzipien beruhenden Existenzbeweises für dasselbe Integral gibt HADAMARD, Comptes Rendus, Bd. CXLIII (1906), p. 1127. Der Beweis knüpft an die Transformation der ersten Variation von Du-Bois-Reymond an.

HILBERT selbst hat später das Dirichlet'sche Prinzip ausführlich mittels seiner Methode behandelt, vgl. *Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*; Mathematische Annalen, Bd. LIX (1901), p. 161; Journal für Mathematik, Bd. CXXIX (1905), p. 63.

Einen direkten Existenzbeweis für den Fall des Dirichlet'schen Prinzips hat neuerdings unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auch BEPPO LEVI gegeben, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXII (1906).

[2]) Annali di Matematica (3), Bd. VII (1902), p. 342.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 493.

[4]) In engerem Anschluß an das ursprüngliche Hilbert'sche Verfahren ist der Beweis in meinen *Lectures*, Kap. VII durchgeführt.

[5]) Vgl. p. 277.

C) Das Problem ist *positiv regulär*[1]) in demselben Bereich $\mathfrak{R}_0$.

D) Der Bereich $\mathfrak{R}_0$ ist *beschränkt*, *abgeschlossen* und *konvex*[2]), d. h. die Verbindungsgerade je zweier Punkte von $\mathfrak{R}_0$ liegt ganz in $\mathfrak{R}_0$.

Aus der Voraussetzung C) folgt nach § 35, c), daß das (verallgemeinerte) Integral J entlang jeder ganz in $\mathfrak{R}_0$ gelegenen rektifizierbaren Kurve einen bestimmten endlichen Wert hat.

Es soll nun unter den Voraussetzungen A) bis D) bewiesen werden:

Sind A_1 und A_2 irgend zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{R}_0$, so gibt es stets mindestens eine von A_1 nach A_2 führende, ganz in $\mathfrak{R}_0$ gelegene rektifizierbare Kurve $\mathfrak{H}$, welche für das verallgemeinerte Integral J ein absolutes Minimum liefert in Beziehung auf die Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven, welche in $\mathfrak{R}_0$ von A_1 nach A_2 gezogen werden können.

Diese Kurve $\mathfrak{H}$ besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Extremalenbogen der Klasse C''', welche abgesehen von ihren Endpunkten im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ liegen, und aus Punkten oder Punktmengen der Begrenzung von $\mathfrak{R}_0$. Die Kurve $\mathfrak{H}$ hat überdies keine Doppelpunkte.

§ 56. Ein Hilfssatz über die Existenz einer Grenzkurve.

Wir basieren den zu führenden Existenzbeweis nach dem Vorgang von Lebesgue[3]) und Caratheodory[4]) auf den folgenden allgemeinen Satz über die Existenz einer Grenzkurve:

Es sei eine unendliche Menge von rektifizierbaren Kurven, $\{\mathfrak{C}\}$, gegeben, welche zwei gegebene Punkte A_1 und A_2 verbinden, und welche die Eigenschaft haben, daß die Menge ihrer Längen beschränkt ist.

Alsdann kann man aus der Menge $\{\mathfrak{C}_\nu\}$ eine unendliche Folge von Kurven

$$\mathfrak{M}: \quad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$$

herausgreifen derart, daß die Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ gegen eine ebenfalls die Punkte A_1 und A_2 verbindende, rektifizierbare Kurve $\mathfrak{H}$ konvergieren.

---

[1]) Vgl. p. 214.

[2]) Die folgenden Resultate bleiben bestehen, wenn die Voraussetzung D) durch die allgemeinere Voraussetzung D′) ersetzt wird:

D′) Der Bereich $\mathfrak{R}_0$ ist beschränkt, perfekt, zusammenhängend und zu jedem positiven ε gehört eine zweite positive Größe d_ε, derart, daß je zwei Punkte P', P'' von $\mathfrak{R}_0$, deren Entfernung kleiner ist als d_ε, durch mindestens eine ganz in $\mathfrak{R}_0$ gelegene, gewöhnliche Kurve $\mathfrak{K}$ verbunden werden können, für welche: $J_{\mathfrak{K}} < \varepsilon$. (Vgl. eine analoge Bemerkung von Hahn, Monatshefte für Mathematik, Bd. XVII (1906), p. 67, Fußnote [3])).

[3]) loc. cit. p. 346.

[4]) loc. cit. p. 493. Der im Text gegebene Beweis schließt sich im wesentlichen an die Darstellung von Caratheodory an.

Darunter ist folgendes zu verstehen. Die Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ und $\mathfrak{H}$ lassen sich derart durch einen zwischen denselben Grenzen variierenden Parameter ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{lll}\mathfrak{C}_\nu: & x = \varphi_\nu(t), & y = \psi_\nu(t), \\ \mathfrak{H}: & x = \varphi(t), & y = \psi(t),\end{array}\right\} t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

daß für jedes t im Intervall $[t_1 t_2]$

$$\underset{\nu=\infty}{L}\varphi_\nu(t) = \varphi(t), \qquad \underset{\nu=\infty}{L}\psi_\nu(t) = \psi(t),$$

und zwar gleichmäßig in Beziehung auf das Intervall: $t_1 \leqq t \leqq t_2$.

Zur besseren Übersicht heben wir die verschiedenen Etappen des Beweises ausdrücklich hervor.

a) **Vorbereitende Bemerkungen:**

Wir bemerken zunächst, daß sämtliche Kurven der Menge $\{\mathfrak{C}\}$ in einem beschränkten Bereich der x, y-Ebene gelegen sind. Denn nach Voraussetzung gibt es eine positive Größe G derart, daß für jede unserer Kurven $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$l_{\mathfrak{C}} < G \tag{1}$$

gilt, wenn wir mit $l_{\mathfrak{C}}$ die Länge der Kurve $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Ist daher P ein Punkt von $\mathfrak{C}$, so ist

$$|A_1 P| \leqq \operatorname{arc} A_1 P \leqq l_{\mathfrak{C}} < G. \tag{2}$$

Wir wählen als Parameter zur Darstellung der Kurve $\mathfrak{C}$ die Größe

$$t = \frac{\operatorname{arc} A_1 P}{l_{\mathfrak{C}}}, \tag{3}$$

und erhalten so eine Parameterdarstellung, bei welcher der Parameter auf sämtlichen Kurven der Menge $\{\mathfrak{C}\}$ von 0 bis 1 wächst, während die Kurve von A_1 bis A_2 beschrieben wird.

Sind dann t', t'' irgend zwei Werte von t im Intervall $[0 1]$, und bezeichnen $P_{\mathfrak{C}}(t')$, $P_{\mathfrak{C}}(t'')$ die denselben auf der Kurve $\mathfrak{C}$ entsprechenden Punkte, so folgt aus (3) und (2) die *fundamentale Ungleichung*

$$|P_{\mathfrak{C}}(t') P_{\mathfrak{C}}(t'')| < G|t' - t''|. \tag{4}$$

b) **Konstruktion der Kurvenfolge $\mathfrak{M}$:**

Wir greifen jetzt aus dem Intervall: $0 \leqq t \leqq 1$ eine abzählbare, in diesem Intervall überall dichte[1]) Punktmenge

$$\{\tau_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

[1]) Vgl. A I 6. Eine den Anforderungen genügende Menge ist z. B. die Gesamtheit der rationalen Zahlen im Intervall $[0 1]$.

heraus und betrachten zunächst die Menge der dem Wert $t = \tau_1$ auf den verschiedenen Kurven $\mathfrak{C}$ entsprechenden Punkte:

$$\{P_{\mathfrak{C}}(\tau_1)\}. \tag{6}$$

Dieselbe ist nach dem vorigen beschränkt und besitzt daher mindestens einen Häufungspunkt, den wir mit $H(\tau_1)$ bezeichnen. Wir können dann aus $\{\mathfrak{C}\}$ eine unendliche Folge von Kurven

$$\mathfrak{M}_1: \qquad \mathfrak{C}_1^1, \ \mathfrak{C}_2^1, \ldots, \ \mathfrak{C}_\lambda^1, \ldots$$

herausgreifen, sodaß[1])

$$\underset{\lambda=\infty}{L} \ P_\lambda^1(\tau_1) = H(\tau_1),$$

indem wir mit $P_\lambda^1(\tau_1)$ den dem Wert $t = \tau_1$ entsprechenden Punkt der Kurve $\mathfrak{C}_\lambda^1$ bezeichnen. Der Punkt $H(\tau_1)$ ist dann zugleich der einzige[2]) Häufungspunkt der Menge

$$\{P_\lambda^1(\tau_1)\}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Jetzt betrachten wir weiter die Punktmenge

$$\{P_\lambda^1(\tau_2)\}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots \tag{6a}$$

Sei $H(\tau_2)$ einer ihrer Häufungspunkte und $\{P_{\lambda_\mu}^1(\tau_2)\}$, $\mu = 1, 2, \ldots$ eine in (6a) enthaltene unendliche Teilfolge, für welche

$$\underset{\mu=\infty}{L} \ P_{\lambda_\mu}^1(\tau_2) = H(\tau_2).$$

Wir schreiben $\mathfrak{C}_\mu^2$ statt $\mathfrak{C}_{\lambda_\mu}^1$ und P_μ^2 statt $P_{\lambda_\mu}^1$, und erhalten so eine zweite, in $\mathfrak{M}_1$ enthaltene, unendliche Kurvenfolge

$$\mathfrak{M}_2: \qquad \mathfrak{C}_1^2, \ \mathfrak{C}_2^2, \ldots,$$

für welche

$$\underset{\mu=\infty}{L} \ P_\mu^2(\tau_2) = H(\tau_2).$$

Zugleich ist aber auch

$$\underset{\mu=\infty}{L} \ P_\mu^2(\tau_1) = H(\tau_1).$$

Denn da die Punktmenge $\{P_\mu^2(\tau_1)\} \equiv \{P_{\lambda_\mu}^1(\tau_1)\}$ in der Menge (7) enthalten ist, so ist jeder ihrer Häufungspunkte, deren sie mindestens einen besitzt, zugleich Häufungspunkt der Menge (7); diese hat aber

---

[1]) Nach A I 4. Wegen der Bezeichnung vgl. p. 156, Fußnote [2]).

[2]) Nach dem leicht zu beweisenden Lemma: „Ist die unendliche Folge $\{a_\nu\}$ konvergent und l ihre Grenze, so ist l der einzige Häufungspunkt der Menge $\{a_\nu\}$; umgekehrt: Ist $\{a_\nu\}$ eine abzählbare, beschränkte lineare Punktmenge, welche nur einen einzigen Häufungspunkt l besitzt, so ist die unendliche Folge $\{a_\nu\}$ konvergent und l ihre Grenze."

nur den einen Häufungspunkt $H(\tau_1)$, woraus die Behauptung nach dem oben[1]) angeführten Lemma folgt.

Jetzt betrachten wir weiter die Punktmenge

$$\{P_\mu^2(\tau_3)\}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \tag{6b}$$

und wenden auf sie die analogen Schlüsse an, und indem wir so fortfahren, gelangen wir nach n-maliger Wiederholung des Verfahrens zu einer unendlichen Kurvenfolge

$$\mathfrak{M}_n: \qquad \mathfrak{C}_1^n, \ \mathfrak{C}_2^n, \ldots,$$

welche in $\mathfrak{M}_{n-1}$ enthalten ist, und welche die Eigenschaft hat, daß

$$\underset{\nu=\infty}{L} \ P_\nu^n(\tau_k) = H(\tau_k)$$

für $k = 1, 2 \ldots n$, wobei $P_\nu^n(\tau_k)$ den dem Wert $t = \tau_k$ entsprechenden Punkt der Kurve $\mathfrak{C}_\nu^n$ bezeichnet.

Nunmehr bezeichnen wir: $\mathfrak{C}_k^k = \mathfrak{C}_k$, $P_k^k = P_k$; *alsdann hat die Kurvenfolge*

$$\mathfrak{M}: \qquad \mathfrak{C}_1, \ \mathfrak{C}_2, \ldots$$

die Eigenschaft, daß für jedes k

$$\underset{\nu=\infty}{L} \ P_\nu(\tau_k) = H(\tau_k). \tag{8}$$

Denn da $\mathfrak{M}_{k+m}$ in $\mathfrak{M}_k$ enthalten ist, so ist die Punktmenge

$$P_k(\tau_k), \qquad P_{k+1}(\tau_k), \qquad P_{k+2}(\tau_k), \ldots,$$

welche dieselben Häufungspunkte hat wie die Menge

$$\{P_\nu(\tau_k)\}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

in der Menge

$$\{P_\nu^k(\tau_k)\}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

enthalten und hat daher ebenso wie diese den einzigen Häufungspunkt $H(\tau_k)$, woraus, wie oben, die Behauptung (8) folgt.

c) **Konstruktion der Grenzkurve $\mathfrak{H}$:**

Von dieser Kurvenfolge $\{\mathfrak{C}_\nu\}$ müssen wir nun nachweisen, daß sie in dem angegebenen Sinn gegen eine Grenzkurve konvergiert.

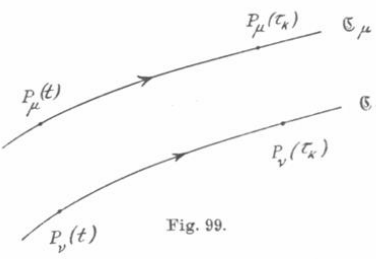

Fig. 99.

Wir haben also zunächst zu zeigen, daß nicht nur für die Werte $t = \tau_k$ der Menge (5), sondern für jeden beliebigen Wert von t im Intervall [0 1] der zugehörige Punkt $P_\nu(t)$ der

[1]) Vgl. p. 424, Fußnote [2]).

Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ für $\nu = \infty$ gegen einen Grenzpunkt konvergiert. Wir gehen dazu von der Ungleichung aus

$$|P_\mu(t) P_\nu(t)| \overline{\gtrless} |P_\mu(t) P_\mu(\tau_k)| + |P_\mu(\tau_k) P_\nu(\tau_k)| + |P_\nu(t) P_\nu(\tau_k)|,$$

unter τ_k irgendeinen Punkt der Menge (5) verstanden.

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist nach (4) kleiner als

$$2G|t - \tau_k| + |P_\mu(\tau_k) P_\nu(\tau_k)|.$$

Ist jetzt eine positive Größe ε beliebig vorgegeben, so können wir einerseits den Index k so wählen, daß

$$|t - \tau_k| < \frac{\varepsilon}{3G},$$

da ja t, wie jeder Punkt des Intervalls $[0\,1]$, ein Häufungspunkt der Menge (5) ist. Andererseits können wir wegen (8) eine positive Größe N angeben, sodaß

$$|P_\mu(\tau_k) P_\nu(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sobald μ und ν beide größer als N sind. Daher ist alsdann

$$|P_\mu(t) P_\nu(t)| < \varepsilon, \tag{9}$$

und daraus folgt nach dem allgemeinen Konvergenzprinzip[1]), daß der Punkt $P_\nu(t)$ für $\nu = \infty$ gegen einen Grenzpunkt konvergiert, den wir mit $H(t)$ bezeichnen:

$$\underset{\nu=\infty}{L} P_\nu(t) = H(t). \tag{10}$$

Zu jedem Wert von t im Intervall $[0\,1]$ gehört somit ein Grenzpunkt $H(t)$. Die Gesamtheit dieser Grenzpunkte bildet eine Kurve, die wir mit

$$\mathfrak{H}: \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad 0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} 1$$

bezeichnen.

Es ist jetzt weiter zu zeigen, daß die Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ gegen diese Grenzkurve $\mathfrak{H}$ gleichmäßig konvergiert: Die ganze Zahl N hängt von ε und τ_k ab, wir bezeichnen sie dementsprechend mit $N(\varepsilon, \tau_k)$. Wählen wir jetzt aus der Menge (5) eine endliche Anzahl von Elementen τ_{k_i} aus, so daß

$$0 < \tau_{k_1} < \tau_{k_2} < \cdots < \tau_{k_m} < 1 \tag{11}$$

und so, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Größen der Reihe (11) kleiner ist als $\varepsilon/3G$, und ist N_ε die größte der m ganzen Zahlen

$$N(\varepsilon, \tau_{k_1}), \qquad N(\varepsilon, \tau_{k_2}), \ \ldots, \qquad N(\varepsilon, \tau_{k_m}),$$

[1]) Vgl. A II 4. Man wende das Prinzip auf die Funktionen $\varphi_\nu(t)$, $\psi_\nu(t)$ an.

so gilt die Ungleichung (9) für jedes t im Intervall $[0\,1]$, sobald μ und ν beide größer als N_ε sind, womit die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bewiesen ist.

d) **Eigenschaften der Grenzkurve $\mathfrak{H}$:**

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die Grenzkurve $\mathfrak{H}$ von A_1 nach A_2 führt und rektifizierbar ist.

Das erstere ergibt sich unmittelbar daraus, daß nach unserer Wahl des Parameters t

$$P_\nu(0) = A_1, \qquad P_\nu(1) = A_2,$$

woraus durch Grenzübergang folgt

$$H(0) = A_1, \qquad H(1) = A_2. \tag{12}$$

Weiter folgt aus der fundamentalen Ungleichung (4) für je zwei Werte t', t'' von t im Intervall $[0\,1]$:

$$|P_\nu(t')P_\nu(t'')| < G\,|t' - t''|,$$

und hieraus durch Grenzübergang

$$|H(t')H(t'')| \overline{\overline{<}} G\,|t' - t''|. \tag{13}$$

Es ist also a fortiori

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \overline{\overline{<}} G\,|t' - t''|,$$
$$|\psi(t') - \psi(t'')| \overline{\overline{<}} G\,|t' - t''|.$$

Daraus folgt aber sofort, daß die beiden Funktionen $\varphi(t), \psi(t)$ stetig und „von beschränkter Variation“[1]) sind, und dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurve $\mathfrak{H}$ *rektifizierbar*[2]) ist, womit der im Eingang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz in allen seinen Teilen bewiesen ist.

---

[1]) Vgl. Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. I, Nr. 67. Es sei $f(t)$ eine in einem Intervall $[t_0\, t_1]$ definierte Funktion und

$$\Pi: \qquad t_0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots < \tau_n < t_1$$

irgendeine Teilung dieses Intervalls. Wenn dann die obere Grenze der Summe

$$\sum_{\nu=0}^{n} |f(\tau_{\nu+1}) - f(\tau_\nu)|, \qquad (\tau_0 = t_0, \tau_{n+1} = t_1),$$

für alle Teilungen Π endlich ist, so heißt $f(t)$ „von beschränkter Variation“ (à variation bornée) in $[t_0\, t_1]$.

[2]) Vgl. Jordan, loc. cit. Nr. 105, 110.

§ 57. Beweis des Hilbert'schen Existenztheorems.

Wir gehen jetzt dazu über, den im vorangehenden Paragraphen bewiesenen Hilfssatz auf das in § 55 formulierte Existenztheorem anzuwenden.

a) **Eigenschaften der unteren Grenze** $i(P'P'')$:

Wir werden uns dabei der folgenden abkürzenden Bezeichnungsweise bedienen: Wenn P', P'' irgend zwei Punkte des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ sind, (die auch zusammenfallen dürfen), so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}(P'P'')$ die Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven, welche in $\mathfrak{R}_0$ von P' nach P'' gezogen werden können, und mit $i(P'P'')$ die untere Grenze der Werte, welche unser Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt,$$

in der verallgemeinerten Bedeutung von § 35, b) und c), entlang den verschiedenen Kurven der Menge $\mathfrak{M}(P'P'')$ annimmt.

Diese untere Grenze ist stets positiv, wenn $P' \neq P''$. Denn nach Voraussetzung A) und B) hat die Funktion $F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ in dem abgeschlossenen Bereich: (x, y) in $\mathfrak{R}_0$; $0 \leqq \gamma \leqq 2\pi$ ein positives Minimum m und ein positives Maximum M. Ist daher $\mathfrak{C}$ irgendeine Kurve von $\mathfrak{M}(P'P'')$, so erhalten wir, indem wir die Bogenlänge auf der Kurve $\mathfrak{C}$ als Parameter einführen[1]),

$$0 < m\,|P'P''| \leqq m l_{\mathfrak{C}} \leqq J_{\mathfrak{C}}(P'P'') \leqq M l_{\mathfrak{C}}, \tag{14}$$

unter $l_{\mathfrak{C}}$ die Länge der Kurve $\mathfrak{C}$ verstanden. Daraus folgt unsere Behauptung und zugleich, daß

$$i(P'P'') \geqq m\,|P'P''|. \tag{15}$$

Dagegen ist *die untere Grenze* $i(P'P'')$ *gleich Null, wenn* $P'' = P'$:

$$i(P'P') = 0. \tag{16}$$

Denn gehen wir von P' nach irgendeinem anderen Punkt P'' von $\mathfrak{R}_0$ entlang der Geraden[2]) $P'P''$ und dann von P'' entlang derselben Geraden nach P' zurück, so stellt dieser Weg nach unseren Voraussetzungen über den Bereich $\mathfrak{R}_0$ eine Kurve der Menge $\mathfrak{M}(P'P')$ dar; indem wir aber den Punkt P'' längs einer Geraden gegen P' konvergieren lassen, können wir den Integralwert unter jede Grenze herunterdrücken, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

---

[1]) Daß die Ungleichung (14) auch für das verallgemeinerte Integral gilt, folgt aus Gleichung (204a) von § 35.

[2]) Im Fall der Voraussetzung D') ist anstelle der Geraden $P'P''$ eine $\mathfrak{K}$-Kurve von P' nach P'', resp. von P'' nach P' zu setzen, vgl. p. 422, Fußnote[2]).

Da der Bereich $\mathfrak{R}_0$ konvex sein sollte, so dürfen wir die Ungleichung (14) auf die Gerade[1]) $P'P''$ anwenden und erhalten so die weitere Ungleichung

$$i(P'P'') \overline{\overline{<}} M\,|\,P'P''\,|, \tag{17}$$

aus welcher unmittelbar folgt, daß

$$\underset{P''=P'}{L}\, i(P'P'') = 0. \tag{18}$$

Aus den beiden charakteristischen Eigenschaften der unteren Grenze folgt weiter, daß für irgend drei Punkte P, P', P'' des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ die Ungleichung gilt

$$i(PP') + i(P'P'') \overline{\overline{>}} i(PP''), \tag{19}$$

die sich sofort auf eine beliebige Anzahl von Punkten ausdehnen läßt.

Die untere Grenze $i(P'P'')$ ist überdies eine *stetige* Funktion der Koordinaten der beiden Punkte P', P''. Denn aus (19) folgt für je zwei Punktepaare P', P'' und Q', Q'' von $\mathfrak{R}_0$ die Ungleichung

$$-i(P'Q') - i(Q''P'') \overline{\overline{<}} i(Q'Q'') - i(P'P'') \overline{\overline{<}} i(Q'P') + i(P''Q''),$$

aus welcher nach (18) unsere Behauptung unmittelbar folgt, wenn wir Q' gegen P' und Q'' gegen P'' konvergieren lassen.

b) **Konstruktion der Hilbert'schen Kurve:**

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit $\mathfrak{M}(A_1 A_2)$ aller rektifizierbaren Kurven, welche in $\mathfrak{R}_0$ von A_1 nach A_2 gezogen werden können, und bezeichnen die untere Grenze der zugehörigen Integralwerte mit K:

$$i(A_1 A_2) = K.$$

Dann gibt es entweder unter den Kurven von $\mathfrak{M}(A_1 A_2)$ eine, welche dem Integral J den Wert K erteilt, in welchem Fall unsere Behauptung bewiesen ist, oder aber wir können eine unendliche Folge von Kurven

$$\mathfrak{M}^0: \quad \mathfrak{C}_1^0,\ \mathfrak{C}_2^0,\ \ldots,\ \mathfrak{C}_\nu^0,\ \ldots$$

aus der Menge $\mathfrak{M}(A_1 A_2)$ herausgreifen derart, daß die zugehörigen Werte des Integrals J, die wir mit

$$J_1^0,\ J_2^0,\ \ldots,\ J_\nu^0,\ \ldots$$

bezeichnen, für $\nu = \infty$ gegen K konvergieren[2]):

$$\underset{\nu=\infty}{L}\, J_\nu^0 = K. \tag{20}$$

Alsdann erfüllt die Kurvenfolge $\{\mathfrak{C}_\nu^0\}$ die Bedingungen des Hilfs-

---

[1]) Vgl. Fußnote [2]) auf p. 428.

[2]) Vgl. A I 4. Die Größe K ist Häufungspunkt der Menge der Integralwerte.

satzes von § 56. Denn die Kurven $\mathfrak{C}_\nu^0$ verbinden sämtlich die beiden Punkte A_1 und A_2, sie sind rektifizierbar, und die Menge ihrer Längen ist beschränkt. Aus (20) folgt nämlich, daß die Menge $\{J_\nu^0\}$ beschränkt ist, und die Ungleichung (14) zeigt dann, daß dasselbe für die Menge der Längen gilt.

Somit können wir aus der Folge $\mathfrak{M}^0$ eine Teilfolge

$$\mathfrak{M}: \qquad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\nu \ldots$$

herausgreifen, welche gegen *eine die beiden Punkte* A_1 *und* A_2 *verbindende, rektifizierbare Grenzkurve* $\mathfrak{H}$ *konvergiert:*

$$\underset{\nu=\infty}{L}\ \mathfrak{C}_\nu = \mathfrak{H}. \tag{21}$$

Da der Bereich $\mathfrak{R}_0$ abgeschlossen ist, so liegt *die Kurve* $\mathfrak{H}$ *ganz in* $\mathfrak{R}_0$.

Bezeichnen wir mit J_ν den Wert des Integrals J entlang der Kurve $\mathfrak{C}_\nu$, so folgt aus (20), daß auch

$$\underset{\nu=\infty}{L}\ J_\nu = K = i(A_1 A_2), \tag{22}$$

da die Folge $\{J_\nu\}$ in der Folge $\{J_\nu^0\}$ enthalten ist.

Die Kurvenfolge $\{\mathfrak{C}_\nu\}$ hat nun die wichtige Eigenschaft, daß ein analoger Satz für jeden Bogen der Kurve $\mathfrak{H}$ gilt:

Wir wählen auf den Kurven $\mathfrak{C}_\nu$ und $\mathfrak{H}$ den Parameter t in derselben Weise wie in § 56, a). Sind dann $t' < t''$ zwei Werte von t im Intervall $[0\,1]$, und bezeichnen wir vorübergehend mit $[J_\nu]_{t'}^{t''}$ den Wert des Integrals J entlang der Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ vom Punkt t' bis zum Punkt t'', und mit H', H'' die beiden entsprechenden Punkte $H(t')$, $H(t'')$ der Kurve $\mathfrak{H}$, so gilt allgemein der *Satz*[1]), daß

$$\underset{\nu=\infty}{L}\ [J_\nu]_{t'}^{t''} = i(H'H''). \tag{23}$$

Zum Beweis gehen wir aus von der nach Gleichung (210) von § 35 auch für das verallgemeinerte Integral geltenden Gleichung

$$[J_\nu]_0^{t'} + [J_\nu]_{t'}^{t''} + [J_\nu]_{t''}^{1} = J_\nu. \tag{24}$$

Da wegen der Voraussetzung B): $[J_\nu]_{t'}^{t''} \gtreqless J_\nu$, so ist die Menge

$$\{[J_\nu]_{t'}^{t''}\},\ \nu = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

beschränkt; sie besitzt also mindestens einen Häufungspunkt $L_{t'}^{t''}$, und wir können eine Teilfolge aus (25) herausgreifen derart, daß

$$\underset{i=\infty}{L}\ [J_{\nu_i}]_{t'}^{t''} = L_{t'}^{t''}.$$

[1]) Vgl. Carathéodory, loc. cit., p. 497.

Ebenso besitzt die Menge

$$\{[J_{\nu_i}]_0^{t'}\},\ i = 1, 2, \ldots$$

mindestens einen Häufungspunkt $L_0^{t'}$ und es existiert eine Teilfolge, so daß

$$\underset{k=\infty}{L}\ [J_{\nu_{i_k}}]_0^{t'} = L_0^{t'};$$

gleichzeitig ist dann auch

$$\underset{k=\infty}{L}\ [J_{\nu_{i_k}}]_{t'}^{t''} = L_{t'}^{t''}.$$

Nunmehr folgt aus (24) und (22), daß auch die Grenze

$$\underset{k=\infty}{L}\ [J_{\nu_{i_k}}]_{t''}^{1} = L_{t''}^{1}$$

existiert und endlich ist, und daß

$$L_0^{t'} + L_{t'}^{t''} + L_{t''}^{1} = K. \tag{26}$$

Wir schreiben der Einfachheit halber μ_k statt ν_{i_k} und markieren auf den beiden Kurven $\mathfrak{C}_{\mu_k}$ und $\mathfrak{H}$ die Punkte:

$$P' = P_{\mu_k}(t'),\ P'' = P_{\mu_k}(t'');\quad H' = H(t'),\ H'' = H(t''),$$

und ziehen die Geraden[1]) $H'P'$ und $P''H''$, die nach unserer Voraussetzung D) im Bereich $\mathfrak{R}_0$ liegen. Dann gehört die aus der Geraden $H'P'$, dem Bogen $P'P''$ der Kurve $\mathfrak{C}_{\mu_k}$ und der Geraden $P''H''$ zusammengesetzte Kurve zu $\mathfrak{M}(H'H'')$. Der Wert des Integrals J entlang dieser Kurve ist also $\overline{\gtrless}\ i(H'H'')$. Gehen wir zur Grenze $k = \infty$ über, so konvergieren die Punkte P', P'' gegen H', H'', also das Integral J entlang den Geraden $H'P'$ und $P''H''$ gegen Null Daher erhalten wir

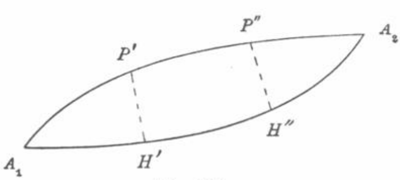

Fig. 100.

$$L_{t'}^{t''} \overline{\gtrless}\ i(H'H''). \tag{27}$$

Ebenso zeigt man, indem man die Kurvenzüge[1]) $A_1P'H'$, resp. $H''P''A_2$ betrachtet, daß

$$L_0^{t'} \overline{\gtrless}\ i(A_1H'), \qquad L_{t''}^{1} \overline{\gtrless}\ i(H''A_2). \tag{27a}$$

Addiert man jetzt die drei Ungleichungen (27), (27a) und benutzt (26), so erhält man

$$K \overline{\gtrless}\ i(A_1H') + i(H'H'') + i(H''A_2).$$

---

[1]) Für den Fall der Voraussetzung D'), vgl. p. 422, Fußnote [2]).

Andererseits ist aber nach (19) die rechte Seite $\gtreqqless K$. Die beiden Resultate sind nur vereinbar, wenn in (27) und (27a) überall das Gleichheitszeichen gilt. Somit ist

$$L_0^{t'} = i(A_1 H'), \qquad L_{t'}^{t''} = i(H'H''), \qquad L_{t''}^1 = i(H''A_2). \tag{28}$$

Nun war aber $L_{t'}^{t''}$ irgendein Häufungspunkt der Menge (25); aus dem eben erhaltenen Resultat folgt daher, daß es der einzige sein muß, und daher folgt das zu beweisende Resultat (23) nach dem auf p. 424 Fußnote [2]) gegebenen Lemma.

c) **Minimaleigenschaft der Hilbert'schen Kurve:**

Wir wollen nunmehr nachweisen, daß das Integral J entlang der Hilbert'schen Kurve $\mathfrak{H}$ gleich der unteren Grenze K ist:

$$J_{\mathfrak{H}} = K. \tag{29}$$

Der Beweis gründet sich auf folgende *charakteristische Eigenschaft der Hilbert'schen Kurve:*

Sind H, H', H'' drei in dieser Ordnung aufeinanderfolgende Punkte der Hilbert'schen Kurve $\mathfrak{H}$, so ist

$$i(HH') + i(H'H'') = i(HH''). \tag{30}$$

Ist nämlich: $0 \lesseqqgtr t < t' < t'' \lesseqqgtr 1$, und: $H = H(t)$, $H' = H(t')$, $H'' = H(t'')$, so ist

$$[J_\nu]_t^{t'} + [J_\nu]_{t'}^{t''} = [J_\nu]_t^{t''},$$

woraus nach (23) durch Grenzübergang unmittelbar die Gleichung (30) folgt.

Aus dieser Eigenschaft der Kurve $\mathfrak{H}$ ergibt sich nun der Beweis von (29) durch folgende Überlegung:

Wegen der Voraussetzung C) ist das verallgemeinerte Integral $J_{\mathfrak{H}}$ die Grenze der in § 35, c) definierten Summe

$$U_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} J_{\mathfrak{E}_\nu}(P_\nu P_{\nu+1})$$

für $\Delta\tau = 0$. Wird die Teilung Π so fein genommen, daß für jedes ν die Entfernung $|P_\nu P_{\nu+1}|$ kleiner ist als die in § 33, c) für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ definierte Größe d_0, so liefert die „kürzeste" Extremale $\mathfrak{E}_\nu$ von P_ν nach $P_{\nu+1}$ einen nicht größeren Wert für das Integral J als jede andere rektifizierbare[1]) Kurve, welche in $\mathfrak{R}_0$ von P_ν nach $P_{\nu+1}$ gezogen werden kann.

[1]) Vgl. p. 278, Fußnote [1]), und p. 291, Gleichung (211).

Liegt daher $\mathfrak{C}_\nu$ selbst ganz in $\mathfrak{R}_0$, so ist

$$J_{\mathfrak{C}_\nu}(P_\nu P_{\nu+1}) = i(P_\nu P_{\nu+1}).$$

Liegt dagegen $\mathfrak{C}_\nu$ teilweise außerhalb $\mathfrak{R}_0$, so ist

$$J_{\mathfrak{C}_\nu}(P_\nu P_{\nu+1}) \overline{\overline{<}} \, i(P_\nu P_{\nu+1});$$

daraus folgt, daß

$$U_\Pi \overline{\overline{<}} \sum_{\nu=0}^{n} i(P_\nu P_{\nu+1}).$$

Nun ist aber nach (30) die rechte Seite gleich $K = i(A_1 A_2)$; indem man zur Grenze $\Delta\tau = 0$ übergeht, erhält man also

$$J_{\mathfrak{H}} \overline{\overline{<}} K.$$

Andererseits folgt aber aus der Definition der unteren Grenze K, daß $J_{\mathfrak{H}} \overline{\overline{>}} K$, es muß also $J_{\mathfrak{H}} = K$ sein.

Somit liefert in der Tat die Hilbert'sche Kurve $\mathfrak{H}$ in dem angegebenen Sinn *das absolute Minimum für das Integral* J.

Aus der Gleichung (29) folgt noch, daß für je zwei aufeinanderfolgende Punkte H', H'' der Kurve $\mathfrak{H}$:

$$J_{\mathfrak{H}}(H'H'') = i(H'H''). \tag{31}$$

Denn die linke Seite kann sicher nicht kleiner sein als die rechte; wäre sie aber größer, so könnte man, wie aus den charakteristischen Eigenschaften der unteren Grenze $i(H'H'')$ folgt, durch Abänderung des Bogens $H'H''$ der Kurve $\mathfrak{H}$ eine neue Kurve herleiten, welche dem Integral J einen Wert erteilen würde, der kleiner wäre als K, was nicht möglich ist.

d) **Weitere Eigenschaften der Hilbert'schen Kurve:**

Es sind jetzt noch die in § 55 behaupteten Eigenschaften der Kurve $\mathfrak{H}$ nachzuweisen.

Es ist zunächst klar, daß die Kurve $\mathfrak{H}$ *keine Doppelpunkte* besitzen kann, d. h. daß zwei verschiedenen Werten von t stets zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{H}$ entsprechen. Denn wäre $H(t') = H(t'')$, $t' < t''$, so könnte man durch Unterdrückung des Bogens $[t't'']$ aus $\mathfrak{H}$ eine neue Kurve herleiten, entlang welcher der Wert des Integrals J wegen unserer Voraussetzung $B)$ kleiner wäre als K, was unmöglich ist.

Die Punkte der Kurve $\mathfrak{H}$ werden nun im allgemeinen zum Teil im Innern von $\mathfrak{R}_0$ liegen, zum Teil auf der Begrenzung. Es sei $\mathfrak{J} = \{u\}$, resp. $\mathfrak{B} = \{v\}$ die Gesamtheit derjenigen Werte von t im Intervall $[01]$, welchen Punkte der Kurve $\mathfrak{H}$ entsprechen, die im

Innern, resp. auf der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ liegen. Aus der Stetigkeit der Kurve $\mathfrak{H}$ folgt dann, daß jeder Punkt u von $\mathfrak{J}$ zugleich ein innerer Punkt der Menge $\mathfrak{J}$ ist, mit Ausnahme von $t = 0$ und $t = 1$, falls diese Punkte überhaupt zu $\mathfrak{J}$ gehören sollten. Daher läßt sich ein den Punkt u in seinem Innern enthaltendes Teilintervall $[\alpha\beta]$ von $[01]$ bestimmen, derart daß alle inneren Punkte des Intervalls $[\alpha\beta]$ zu $\mathfrak{J}$ gehören, während die Endpunkte α, β zu $\mathfrak{B}$ gehören, außer falls dieselben etwa mit 0 oder 1 zusammenfallen sollten. Die Menge $\mathfrak{J}$ besteht daher aus einer endlichen oder unendlichen Menge solcher offenen Intervalle, die sich nicht gegenseitig überdecken. Nach einem Satz von CANTOR[1]) ist die Menge dieser Intervalle **abzählbar**, so daß wir sie mit

$$\{[\alpha_\nu \beta_\nu]\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

bezeichnen dürfen.

Wir haben jetzt zu beweisen, daß jedem solchen Intervall $[\alpha_\nu \beta_\nu]$ auf der Kurve $\mathfrak{H}$ ein einziger Extremalenbogen $A_\nu B_\nu$ entspricht, welcher, abgesehen von den Endpunkten, ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ verläuft.

Sei in der Tat t_0 ein Wert von t zwischen α_ν und β_ν, und H_0 der entsprechende Punkt der Kurve $\mathfrak{H}$; derselbe liegt dann im Innern von $\mathfrak{R}_0$; daher können wir eine Umgebung (d) des Punktes H_0 angeben, welche ganz in $\mathfrak{R}_0$ liegt. Ferner gehört zum Bereich $\mathfrak{R}_0$ eine wie in § 34, b) definierte positive Größe r_0; es sei σ die kleinere der beiden Größen $\frac{d}{4}$, $\frac{r_0}{2}$. Dann können wir wegen der Stetigkeit der Kurve $\mathfrak{H}$ rechts und links von t zwei Werte τ_2 und τ_1 so nahe bei t_0 annehmen, daß der dem Intervall $[\tau_1 \tau_2]$ von t entsprechende Bogen $H_1 H_2$ der Kurve $\mathfrak{H}$ ganz im Innern des Kreises (H_0, σ) liegt.

Da alsdann $|H_1 H_2| < 2\sigma \overline{\gtrless}\, r_0$, so können wir von H_1 nach H_2 eine „kürzeste" Extremale $\mathfrak{E}$ ziehen; dieselbe ist von der Klasse C''', besitzt keine mehrfachen Punkte[2]) und liegt ganz im Innern des Kreises $(H_1, 2\sigma)$. Sie liegt daher auch a fortiori im Innern des Kreises $(H_0, 4\sigma)$, also sicher auch im Kreis (H_0, d) und somit ganz im Bereich $\mathfrak{R}_0$, woraus folgt, daß

$$J_{\mathfrak{E}}(H_1 H_2) \overline{\gtrless}\, i(H_1 H_2).$$

Andererseits ist der Bogen $H_1 H_2$ der Kurve $\mathfrak{H}$ von der Klasse[3]) K, er liegt im Innern des Kreises (H_0, σ) und daher a fortiori im Innern von $(H_1, 2\sigma)$, somit auch im Innern des Kreises (H_1, r_0). Angenommen dieser Bogen enthielte mindestens einen Punkt, welcher nicht auf dem

[1]) Mathematische Annalen, Bd. XX (1882), p. 118.

[2]) Vgl. Satz I von § 33. [3]) Vgl. § 35, b).

Extremalenbogen $\mathfrak{E}$ liegt, so würde nach § 35, d), Ende, auf Grund des Osgood'schen Satzes[1]) folgen, daß

$$J_{\mathfrak{H}}(H_1 H_2) > J_{\mathfrak{E}}(H_1 H_2).$$

Das ist aber wegen (31) ein Widerspruch mit dem eben gefundenen Resultat; also muß jeder Punkt des Bogens $H_1 H_2$ der Kurve $\mathfrak{H}$ auf dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}$ liegen.

Sind die beiden Bogen dargestellt durch

$$\begin{aligned} &\mathfrak{H}: \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \tau_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \tau_2, \\ &\mathfrak{E}: \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_1 \overline{\gtrless} s \overline{\gtrless} s_2, \end{aligned}$$

so bedeutet das eben bewiesene Resultat analytisch, daß es eine im Intervall $[\tau_1 \tau_2]$ eindeutig definierte Funktion $s = s(t)$ gibt, für welche in diesem Intervall

$$s_1 \overline{\gtrless} s(t) \overline{\gtrless} s_2,$$

$$x(s(t)) = \varphi(t), \quad y(s(t)) = \psi(t).$$

Um die Identität der beiden Bogen nachzuweisen, ist nun überdies noch zu zeigen, daß diese Funktion $s(t)$ stetig ist und beständig zunimmt.

Um die Stetigkeit in einem Punkt t' zu beweisen, betrachten wir irgend eine Folge $\{t_\nu\}$ von Werten der Variabeln t, welche t' zur Grenze hat, und für welche die Folge $\{s(t_\nu)\}$ konvergent ist; sei s' der Grenzwert. Dann folgt aus der Tatsache, daß der Bogen $\mathfrak{E}$ keine Doppelpunkte hat, daß $s' = s(t')$ sein muß, woraus sich in bekannter Weise[2]) die Stetigkeit von $s(t)$ in t' ergibt.

Weiter hat aber auch die Kurve $\mathfrak{H}$, wie wir gesehen haben, keine Doppelpunkte. Daraus folgt, daß zwei verschiedenen Werten von t stets zwei verschiedene Werte von $s(t)$ entsprechen, und hieraus schließt man nunmehr leicht, daß die Funktion $s(t)$ beständig wächst.

Die beiden Bogen sind also identisch, da ihre analytischen Darstellungen durch eine zulässige Parametertransformation ineinander übergeführt werden können (vgl. § 25, a)).

Nun war aber t_0 ein beliebiger Wert von t zwischen α_ν und β_ν; daraus folgt, daß *der Bogen $A_\nu B_\nu$ der Kurve $\mathfrak{H}$ aus einem einzigen Extremalenbogen der Klasse C'''* besteht.

Hiermit ist der in § 55 ausgesprochene Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

---

[1]) Der Satz von § 33, c) würde nur zu der Ungleichung $J_{\mathfrak{H}}(H_1 H_2) \overline{>} J_{\mathfrak{E}}(H_1 H_2)$ führen; erst die Anwendung des Osgood'schen Satzes liefert die hier nötige stärkere Ungleichung mit dem Zeichen $>$.

[2]) Vgl. z. B. Veblen and Lennes, *Introduction to Analysis*, p. 70, Corollary 7.

Wir erwähnen noch folgenden Zusatz zum Existenztheorem:

Ist der Bereich $\mathfrak{R}_0$ beschränkt, perfekt, zusammenhängend und extremal-konvex[1]*, so besteht die Hilbert'sche Kurve $\mathfrak{H}$ aus einem einzigen Extremalenbogen.*

Zunächst folgt nämlich aus Gleichung (184b) von § 33, daß in diesem Fall die Voraussetzung D') erfüllt ist, wobei die kürzeste Extremale von P' nach P'' an Stelle der Kurve $\mathfrak{K}$ tritt. Sodann gelten die obigen Schlüsse nunmehr für jeden Bogen H_1H_2 der Kurve $\mathfrak{H}$, mag derselbe Punkte der Begrenzung von $\mathfrak{R}_0$ enthalten oder nicht, wofern nur die beiden Punkte H_1, H_2 hinreichend nahe beieinander gewählt werden. Denn unter unserer gegenwärtigen Voraussetzung liegt die kürzeste Extremale von H_1 nach H_2 dann stets ganz im Bereich $\mathfrak{R}_0$. Daraus folgt, daß die dort für den Bogen $A_\nu B_\nu$ abgeleiteten Resultate jetzt für die Kurve $\mathfrak{H}$ in ihrer ganzen Ausdehnung gelten.

Beispiel I: (Vgl. pp. 1, 33, 79, 398).

Wir wollen schließlich noch das Hilbert'sche Existenztheorem auf die Frage des absoluten Minimums bei dem Problem der Rotationsfläche kleinsten Inhalts anwenden. Es handelt sich darum, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

zu einem absoluten Minimum zu machen in Beziehung auf die Gesamtheit aller gewöhnlichen Kurven, welche in dem Bereich $\mathfrak{R} : y \geqq 0$ von P_1 nach P_2 gezogen werden können.

Wenn es überhaupt eine Kurve gibt, welche ein absolutes Minimum für das Integral J liefert, so muß dieselbe a fortiori auch ein relatives Minimum liefern. Nun haben wir aber früher[2] das Problem des relativen Minimums vollständig gelöst: dasselbe hat je nach der Lage des Punktes P_2 entweder eine einzige Lösung, nämlich die Goldschmidt'sche diskontinuierliche Lösung $\mathfrak{K}$, oder aber zwei Lösungen, nämlich die diskontinuierliche Lösung $\mathfrak{K}$ und außerdem noch eine Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$ mit der x-Achse als Direktrix, welche den zu P_1 konjugierten Punkt nicht enthält. Sobald wir also beweisen können, daß ein absolutes Minimum überhaupt existiert, so folgt im ersten Fall unmittelbar, daß dasselbe von der Kurve $\mathfrak{K}$ geliefert wird, während im zweiten Fall die Lösung diejenige unter den beiden Kurven $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{K}$ sein muß, welche den kleineren Wert für das Integral J liefert.

Wir können nun zwar das Hilbert'sche Existenztheorem in der Formulierung von § 55 nicht direkt auf unser Beispiel anwenden, da unsere Voraussetzungen im Bereich $\mathfrak{R}$ nicht erfüllt sind. Dagegen führt die folgende von Mary E. Sinclair[3] herrührende Überlegung zum Ziel:

[1] Nach der Definition von § 33, b). [2] Vgl. p. 399.

[3] Vgl. Annals of Mathematics (2), Bd. IX, (1908) p. 151.

Wenn zunächst die Entfernung der beiden Punkte P_1, P_2 größer oder gleich $y_1 + y_2$ ist, so ist die Länge jeder zulässigen Kurve $\overline{\overline{>}} y_1 + y_2$, und daher folgt nach dem in § 52, b) mitgeteilten Satz von Todhunter sofort, daß in diesem Fall die diskontinuierliche Lösung $\mathfrak{K}$ einen kleineren Wert für das Integral J liefert als jede andere zulässige Kurve.

Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, wo: $|P_1 P_2| < y_1 + y_2$. In diesem Fall konstruieren wir die Ellipse mit den Brennpunkten P_1, P_2, für deren Punkte P

$$|P_1 P| + |P_2 P| = y_1 + y_2,$$

und bezeichnen das Innere derselben zusammen mit der Ellipse selbst mit $\mathfrak{R}_0$. Für irgend einen nicht auf der Ellipse gelegenen Punkt Q ist dann: [1])

$$|P_1 Q| + |P_2 Q| < y_1 + y_2 \text{ oder } > y_1 + y_2,$$

je nachdem der Punkt im Innern oder außerhalb der Ellipse liegt. Daraus folgt, daß die Ellipse ganz im Innern der oberen Halbebene liegt.

Ferner folgt, daß die Länge jeder zulässigen Kurve, welche nicht ganz im Innern der Ellipse verläuft, $\overline{\overline{>}} y_1 + y_2$, und daher liefert nach dem eben erwähnten Todhunter'schen Satz jede solche Kurve für das Integral J einen größeren Wert als die diskontinuierliche Lösung $\mathfrak{K}$.

Andererseits sind für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ die Voraussetzungen A) bis D) für das Existenztheorem erfüllt. Daher gibt es mindestens eine rektifizierbare, von P_1 nach P_2 führende, ganz in $\mathfrak{R}_0$ verlaufende Kurve $\mathfrak{H}$, welche einen nicht größeren Wert für das Integral J liefert, als jede andere rektifizierbare Kurve, welche in $\mathfrak{R}_0$ von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.

Liegt die Kurve $\mathfrak{H}$ ganz im Innern der Ellipse, so besteht sie nach dem Existenztheorem aus einem einzigen Extremalenbogen, sie muß also mit der oben erwähnten Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$ identisch sein. In diesem Fall liefert daher entweder die Extremale $\mathfrak{E}_0$ oder die diskontinuierliche Lösung $\mathfrak{K}$ oder beide das gewünschte absolute Minimum, je nachdem $J_{\mathfrak{E}_0} <$ oder $>$ oder $= J_{\mathfrak{K}}$.

Liegt dagegen die Kurve $\mathfrak{H}$ nicht ganz im Innern der Ellipse, so ist ihre Länge $> y_1 + y_2$, da sie mindestens einen Punkt P der Ellipse enthält und nicht mit dem Geradenzug $P_1 P P_2$ identisch sein kann. Daher ist, wie man leicht aus dem Satz von Todhunter ableitet, $J_{\mathfrak{H}} > J_{\mathfrak{K}}$, woraus folgt, daß in diesem Fall die Kurve $\mathfrak{K}$ das absolute Minimum liefert.

Nachdem so die Existenz eines absoluten Minimums bewiesen ist, bleibt nur noch übrig, für den Fall, wo der Punkt P_2 im Innern des auf p. 81 definierten Bereiches I liegt, zu entscheiden, welche von den beiden Kurven $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{K}$ den kleineren Wert für das Integral J liefert. Diese Frage ist von Mac Neish [2]) untersucht worden. Er findet folgende Resultate:

Auf jeder vom Punkt P_1 ausgehenden Kettenlinie mit der x-Achse als Direktrix gibt es zwischen P_1 und dem zu P_1 konjugierten Punkt P_1' einen und nur einen Punkt P_1'', für welchen der Bogen $P_1 P_1''$ der Kettenlinie dem

---

[1]) Vgl. z. B. Briot et Bouquet, *Leçons de Géometrie analytique*, 14ème ed. p. 224.

[2]) Annals of Mathematics; (2), Bd. VII (1905), p. 72.

Integral J denselben Wert erteilt, wie die diskontinuierliche von P_1 nach P_1'' führende Lösung.

Der Ort der Punke P_1'' ist eine Kurve $\mathfrak{G}$, welche eine ähnliche Gestalt hat wie die Kurve $\mathfrak{F}$, und welche den Bereich I in zwei Teile I′ und I″ zerlegt (siehe Fig. 101). Liegt der Punkt P_2 im Innern von I′, so liefert die Kettenlinie den kleineren Wert; liegt der Punkt P_2 auf der Kurve $\mathfrak{G}$, so liefern beide Lösungen denselben Wert; liegt der Punkt P_2 im Innern des Bereiches I″, so liefert die diskontinuierliche Lösung den kleineren Wert.

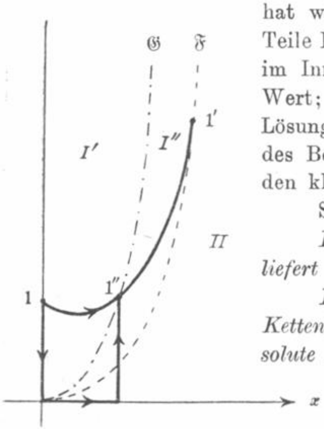

Fig. 101.

Somit erhalten wir folgendes Schlußresultat:

Liegt der Punkt P_2 im Innern des Bereiches I′, so liefert die Kettenlinie, und nur sie, das absolute Minimum.

Liegt der Punkt P_2 auf der Kurve $\mathfrak{G}$, so liefern die Kettenlinie und die diskontinuierliche Lösung beide das absolute Minimum.

Für jede andere Lage des Punktes P_2 liefert die diskontinuierliche Lösung, und nur sie, das absolute Minimum.

§ 58. Ein Satz von Darboux über das absolute Extremum.

Wenn längs einer vom Punkt P_1 ausgehenden Extremalen $\mathfrak{E}$ die Bedingungen (II′) und (IV′) von § 32, b) erfüllt sind, so wird ein Bogen P_1P_2 dieser Extremalen ein starkes relatives Minimum für das Integral J liefern, solange der Punkt P_2 zwischen P_1 und dem zu P_1 konjugierten Punkt P_1' liegt; das relative Minimum wird dagegen aufhören (abgesehen von den beiden in § 47, c) angeführten Ausnahmefällen), wenn der Punkt P_2 mit P_1' zusammenfällt.

Aus der Beziehung zwischen dem relativen und dem absoluten Extremum folgt daher a priori, daß das absolute Extremum spätestens im Punkt P_1' aufhören muß. Darboux[1]) hat nun aber gezeigt, daß *das absolute Minimum stets schon vor dem relativen aufhört,* wenn die eben erwähnten Ausnahmefälle ausgeschlossen werden.

Denn da wir voraussetzen, daß der Extremalenbogen P_1P_1' schon kein relatives Minimum mehr liefert, so können wir eine benachbarte, von P_1 nach P_1' führende Kurve $\mathfrak{C}$ angeben, für welche die Differenz

$$J_{\mathfrak{E}}(P_1P_1') - J_{\mathfrak{C}}(P_1P_1') = k$$

einen positiven Wert hat. Wählen wir dann den Punkt P_2 zwischen P_1 und P_1' so nahe bei P_1', daß zugleich[2])

[1]) *Théorie des surfaces*, Bd. III (1894), p. 89; vgl. auch Zermelo, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. XI (1902), p. 184.

[2]) Wegen der Bezeichnung $\mathfrak{E}^{-1}$ vgl. § 25, b).

$$\left|J_{\mathfrak{C}}(P_2 P_1')\right| < \frac{k}{2}, \quad \text{und} \quad \left|J_{\mathfrak{C}^{-1}}(P_1' P_2)\right| < \frac{k}{2},$$

so erteilt der aus der Kurve $\mathfrak{C}$ und dem Bogen $P_1' P_2$ der Kurve $\mathfrak{C}^{-1}$ zusammengesetzte Weg dem Integral J einen kleineren Wert als der Extremalenbogen $P_1 P_2$; letzterer liefert also sicher kein absolutes Minimum.

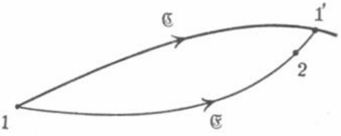

Fig. 102.

Darboux schließt dann weiter (wenigstens für den speziellen Fall der geodätischen Linien), daß *es zwischen P_1 und P_1' einen ganz bestimmten Punkt P_1'' geben muß*[1]*, derart daß der Extremalenbogen $P_1 P_2$ für $P_1 \prec P_2 \overset{=}{\prec} P_1''$ das absolute Minimum liefert, dagegen nicht mehr für $P_1'' \prec P_2$.*

Um eine feste Grundlage für den Beweis zu haben, nehmen wir an, daß für das betrachtete Variationsproblem die Voraussetzungen A), B), C) und D') von § 55 erfüllt sind, und daß der Bogen $P_1 P_1'$ der Extremalen $\mathfrak{C}$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ liegt.

Wir wählen den Punkt P_2 beliebig auf dem Extremalenbogen $P_1 P_1'$ und betrachten in der Bezeichnung von § 57 die Differenz

$$J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_2) - i(P_1 P_2). \tag{32}$$

Sind t_1, t_2, t_1' die Parameter der Punkte P_1, P_2, P_1' auf der Extremalen $\mathfrak{C}$, so ist die Differenz (32) eine im Intervall $t_1 \leqq t_2 \leqq t_1'$ eindeutig definierte Funktion von t_2, die wir mit $f(t_2)$ bezeichnen. Nach § 57, a) ist dieselbe in dem angegebenen Intervall stetig und nach der Definition des Zeichens $i(P_1 P_2)$ ist überdies

$$f(t_2) \geqq 0 \text{ für } t_1 \leqq t_2 \leqq t_1'. \tag{33}$$

Ist t_2 hinreichend nahe bei t_1, so ist $f(t_2) = 0$, weil dann nach § 33, a) und c) der Extremalenbogen $P_1 P_2$ das absolute Minimum des Integrals J liefert; ebenso ist wegen (16): $f(t_1) = 0$.

Andererseits ist nach der über den konjugierten Punkt P_1' gemachten Annahme

$$f(t_1') > 0.$$

Es sei jetzt t_1'' die untere Grenze derjenigen Werte von t_2 im Intervall $[t_1 t_1']$, für welche $f(t_2) > 0$. Dann folgt aus der Stetigkeit von $f(t_2)$, daß $f(t_1'') = 0$, sodaß also wegen (33)

$$f(t_2) = 0 \text{ für } t_1 \leqq t_2 \leqq t_1''. \tag{34}$$

Dagegen ist

$$f(t_2) > 0 \text{ für } t_1'' < t_2 \leqq t_1'. \tag{35}$$

[1]) Wegen der Bedeutung des Zeichens $\prec$ siehe p. 190.

Denn wenn t_2 zwischen den angegebenen Grenzen liegt, so können wir nach der Bedeutung von t_1'' stets zwischen t_1'' und t_2 einen Wert t_3 finden, für welchen $f(t_3) > 0$. Dann gibt es nach der Bedeutung des Zeichens $i(P_1 P_3)$ eine der Menge $\mathfrak{M}(P_1 P_3)$ angehörige Kurve $\mathfrak{C}$, für welche

$$J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_3) < J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_3).$$

Also liefert auch die aus der Kurve $\mathfrak{C}$ und dem Bogen $P_3 P_2$ von $\mathfrak{E}$ zusammengesetzte Kurve einen kleineren Wert für das Integral J als der Bogen $P_1 P_2$ von $\mathfrak{E}$, es muß also in der Tat $f(t_2) > 0$ sein. Die hiermit bewiesenen Relationen (34), (35) drücken aber gerade den oben ausgesprochenen Satz aus. Darüber hinaus gilt aber noch der folgende Satz:

Liegt der Punkt P_2 zwischen P_1 und P_1'', so ist der Bogen $P_1 P_2$ der Extremalen $\mathfrak{E}$ die einzige Kurve, welche das absolute Minimum liefert, mit anderen Worten: dieser Bogen erteilt dem Integral J einen kleineren Wert als jede andere rektifizierbare Kurve, welche in $\mathfrak{R}_0$ von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.

Denn angenommen, es gäbe eine von dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}$ verschiedene Kurve $\mathfrak{C}$ der Menge $\mathfrak{M}(P_1 P_2)$, für welche

$$J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_2) = J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_2) \quad (= i(P_1 P_2)); \tag{36}$$

dann hat die Kurve $\mathfrak{C}$ alle in § 57, d) von der Hilbert'schen Kurve $\mathfrak{H}$ bewiesenen Eigenschaften. Da der Punkt P_2 ein innerer Punkt von $\mathfrak{R}_0$ ist, so besteht sie daher, falls sie ganz im Innern von $\mathfrak{R}_0$ liegt, aus einem einzigen Extremalenbogen, oder aber sie besitzt, falls sie Punkte mit der Begrenzung von $\mathfrak{R}_0$ gemeinsam hat, einen letzten der Begrenzung von $\mathfrak{R}_0$ angehörigen Punkt P_3, und es ist dann der Bogen $P_3 P_2$ ein Extremalenbogen. In beiden Fällen kann die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkte P_2 die Extremale $\mathfrak{E}$ nicht gleichsinnig berühren; denn sonst müßte nach § 23, c) und d) und § 27, a) wegen der Voraussetzung C) entweder die Kurve $\mathfrak{C}$ mit dem Bogen $P_1 P_2$ der Extremalen $\mathfrak{E}$ identisch sein, oder sie müßte diesen Bogen als Bestandteil enthalten; ersteres verstößt gegen unsere Annahme über die Kurve $\mathfrak{C}$, letzteres gegen die Voraussetzung B) und die Gleichung (36).

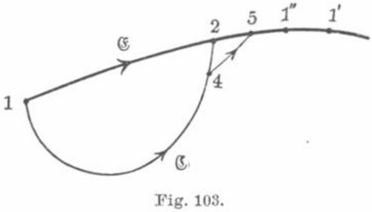

Fig. 103.

Nunmehr[1]) können wir einerseits auf der Kurve $\mathfrak{C}$ einen Punkt P_4 und andererseits auf der Extremalen $\mathfrak{E}$ zwischen P_2 und P_1'' einen

[1]) Vgl. für diesen Schluß Darboux, loc. cit. p. 90, Fußnote.

Punkt P_5 annehmen, beide so nahe bei P_2, daß wir nach § 33, c) von P_4 nach P_5 eine ganz in $\mathfrak{R}_0$ verlaufende „kürzeste" Extremale $\mathfrak{E}'$ ziehen können, welche einen kleineren Wert für das Integral J liefert, als die wegen der Ecke im Punkt P_2 sicher von ihr verschiedene, zusammengesetzte Kurve $P_4 P_2 P_5$. Dann ist aber nach (36)

$$J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_5) = J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_2) + J_{\mathfrak{E}}(P_2 P_5) > J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_4) + J_{\mathfrak{E}'}(P_4 P_5).$$

Das ist aber nicht möglich, weil nach (34): $J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_5) = i(P_1 P_5)$. Es kann also keine Kurve $\mathfrak{C}$ von den angegebenen Eigenschaften geben, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Der Punkt P_1'' hat die weitere, für geodätische Linien ebenfalls schon von Darboux bemerkte Eigentümlichkeit, daß *es eine von dem Bogen $P_1 P_1''$ von $\mathfrak{E}$ verschiedene Kurve $\mathfrak{H}$ der Menge $\mathfrak{M}(P_1 P_1'')$ gibt, für welche*

$$J_{\mathfrak{H}}(P_1 P_1'') = J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_1''). \tag{37}$$

Zum Beweis nehmen wir auf der Extremalen $\mathfrak{E}$ zwischen P_1'' und P_1' eine unendliche Folge von Punkten $\{Q_\nu\}$ an, welche für $\nu = \infty$ gegen P_1'' konvergiert. Für jedes ν gibt es dann nach dem Hilbert'-schen Existenztheorem eine nach (35) von dem Extremalenbogen $P_1 Q_\nu$ von $\mathfrak{E}$ verschiedene Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ von $\mathfrak{M}(P_1 Q_\nu)$, für welche

$$J_{\mathfrak{C}_\nu}(P_1 Q_\nu) = i(P_1 Q_\nu).$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_\nu$ die aus der Kurve $\mathfrak{C}_\nu$ und dem Bogen $Q_\nu P_1''$ von $\mathfrak{E}^{-1}$ zusammengesetzte Kurve, so konvergiert nach § 57, a) der Wert des Integrals $J_{\mathfrak{K}_\nu}(P_1 P_1'')$ für $\nu = \infty$ gegen $i(P_1 P_1'')$. Daher können wir nach § 57, b) aus der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ eine Teilfolge $\{\mathfrak{K}_{\nu_k}\}$ herausgreifen, welche für $k = \infty$ gleichmäßig gegen eine Kurve $\mathfrak{H}$ der Menge $\mathfrak{M}(P_1 P_1'')$ konvergiert, für welche

$$J_{\mathfrak{H}}(P_1 P_1'') = i(P_1 P_1''),$$

und für welche also wegen (34) die Gleichung (37) gilt.

Angenommen diese Kurve $\mathfrak{H}$ wäre mit dem Bogen $P_1 P_1''$ der Extremalen $\mathfrak{E}$ identisch. Dann könnten wir, da der letztere ganz im Inneren von $\mathfrak{R}_0$ liegt, eine ganze Zahl n angeben, so daß sämtliche Kurven $\mathfrak{K}_{\nu_k}$, für welche $k > n$, ebenfalls im Innern von $\mathfrak{R}_0$ liegen. Dann müßten aber nach § 57, d) die Kurven $\mathfrak{C}_{\nu_k}$ für $k > n$ Bogen der Extremalenschar durch den Punkt P_1 sein, deren Schnittpunkte Q_{ν_k} mit der Extremalen $\mathfrak{E}$ für $k = \infty$ gegen P_1'' konvergieren. Da P_1'' kein zu P_1 konjugierter Punkt (im weiteren Sinn) ist, so führt dies, wie man leicht zeigt, zu einem Widerspruch mit der in § 29, c) bewiesenen Eigenschaft nicht-konjugierter Punkte. Somit muß also die

Kurve $\mathfrak{H}$ von dem Bogen $P_1 P_1''$ der Extremalen $\mathfrak{E}$ verschieden sein, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Bestimmt man auf jeder vom Punkt P_1 ausgehenden Extremalen den Punkt P_1'', so ist der geometrische Ort des Punktes P_1'' eine Kurve[1]), die wir mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen, und die für das absolute Extremum dieselbe Rolle spielt, wie die Enveloppe $\mathfrak{F}$ für das relative.

Liegt die oben mit $\mathfrak{H}$ bezeichnete Kurve ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}_0$, so besteht sie aus einem einzigen, von P_1 nach P_1'' führenden Extremalenbogen. Wegen der Voraussetzung B) können wir sowohl auf $\mathfrak{H}$ als auf $\mathfrak{E}$ den Integralwert u als Parameter einführen und beide Kurven in der Normalform (188) von § 33, c) darstellen:

$$\mathfrak{E}: \qquad x = \varphi[u, a_0], \quad y = \psi[u, a_0], \quad 0 \overline{\gtrless} u \overline{\gtrless} c,$$

$$\mathfrak{H}: \qquad x = \varphi[u, a_1], \quad y = \psi[u, a_1], \quad 0 \overline{\gtrless} u \overline{\gtrless} c,$$

wobei c den für beide Kurven gemeinsamen Integralwert im Punkt P_1'' bedeutet, während $a_1 \neq a_0$. Im Punkt P_1'' ist dann

$$\varphi[c, a_1] = \varphi[c, a_0], \quad \psi[c, a_1] = \psi[c, a_0].$$

Diese Gleichungen sagen aber aus, daß *der Punkt P_1'' ein Doppelpunkt der Transversalen*

$$x = \varphi[c, a], \quad y = \psi[c, a], \quad 0 \overline{\gtrless} a \overline{\gtrless} 2\pi \tag{38}$$

der Extremalenschar durch den Punkt P_1 ist.

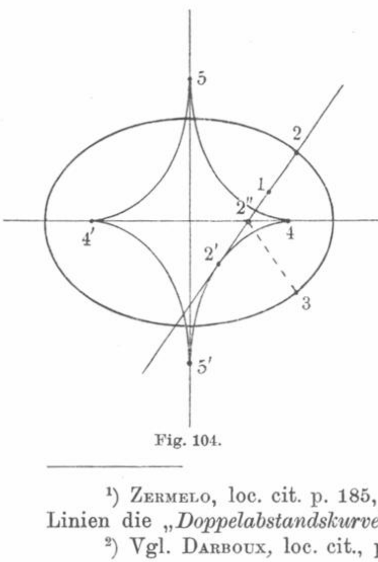

Fig. 104.

Die vorangehenden allgemeinen Sätze werden durch die in § 57, e) für die Rotationsfläche kleinsten Inhalts erhaltenen Resultate bestätigt.

Noch einfacher ist das folgende Beispiel[2]), welches zugleich zeigt, daß analoge Sätze auch für Probleme mit variabeln Endpunkten gelten:

Die kürzeste Kurve von einem gegebenen Punkt P_1 nach einer gegebenen Ellipse zu ziehen.

Die gesuchte Kurve ist nach § 40 eine von P_1 auf die Ellipse gefällte Normale $P_1 P_2$. Ist P_2' der zum Punkt P_2 gehörige Krümmungsmittelpunkt der Ellipse, so liefert die Normale $P_1 P_2$ ein relatives Minimum, wenn der Punkt P_1 auf derselben Seite des Punktes P_2' liegt wie der Punkt P_2. Dagegen hört das relative Minimum auf, wenn P_2 mit P_2' zusammenfällt

[1]) Zermelo, loc. cit. p. 185, nennt diese Kurve für den Fall der geodätischen Linien die „*Doppelabstandskurve*".

[2]) Vgl. Darboux, loc. cit., p. 91.

(außer wenn P_2' mit einer der auf der großen Achse der Ellipse gelegenen Spitzen [1]) P_4 und P_4' der Evolute $\mathfrak{F}$ zusammenfällt).

Zwischen dem Punkt P_2 der Ellipse und dem Krümmungsmittelpunkt P_2' existiert nun (abgesehen von dem eben erwähnten Ausnahmefall) stets ein Punkt P_2'', von dem aus außer der Normalen $P_2''P_2$ noch eine zweite, mit ihr gleichlange Normale $P_2''P_3$ an die Ellipse gezogen werden kann, nämlich der Schnittpunkt der Normalen im Punkt P_2 mit der großen Achse der Ellipse.

Liegt dann der Punkt P_1 zwischen P_2'' und P_2 oder jenseits des Punktes P_2, so liefert die Normale P_1P_2, und nur sie, das absolute Minimum; fällt P_1 mit P_2'' zusammen, so liefern die gleichlangen Normalen $P_2''P_2$ und $P_2''P_3$ beide das absolute Minimum; liegt P_1 zwischen P_2'' und P_2', so liefert die Normale P_1P_2 noch das relative, aber nicht mehr das absolute Minimum; von P_2' an hört auch das relative Minimum auf.

Die Kurve $\mathfrak{G}$ ist also hier das Segment P_4P_4' der großen Achse; dasselbe ist in der Tat (zusammen mit dem entsprechenden Segment P_5P_5' der kleinen Achse) der geometrische Ort der im endlichen gelegenen Doppelpunkte der Parallelkurven [2]) der Ellipse, welche im gegenwärtigen Fall an die Stelle der Transversalenschar (38) tritt.

---

[1]) Diese Spitzen sind nämlich gerade von der ausgeschlossenen Art; in diesem Ausnahmefall, welcher eintritt, wenn der Punkt P_1 auf der großen Achse der Ellipse liegt, gelten auch in der Tat die Darboux'schen Sätze nicht mehr.

[2]) Vgl. z. B. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven,* (1902) p. 648.