universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Achtes Kapitel. Diskontinuierliche Lösungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Achtes Kapitel.

Diskontinuierliche Lösungen.

§ 48. Die Weierstraß-Erdmann'sche Eckenbedingung.

Bei der Formulierung[1]) der Aufgabe, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, haben wir von den Vergleichskurven vorausgesetzt, daß sie „gewöhnliche Kurven" sind, womit wir ausdrücklich Kurven mit „Ecken"[2]) zugelassen haben. Dagegen haben wir uns in allen bisherigen Entwicklungen auf den Fall beschränkt, wo die gesuchte Kurve selbst keine Ecken besitzt.

Wir wollen uns jetzt von dieser Beschränkung befreien, indem wir uns die Aufgabe stellen, nunmehr auch diejenigen Lösungen unseres Variationsproblems zu bestimmen, welche Ecken besitzen; solche Lösungen pflegt man „diskontinuierliche Lösungen" zu nennen[3]) im Gegensatz zu den bisher ausschließlich betrachteten „kontinuierlichen Lösungen". Dabei sollen die Endpunkte P_1, P_2 der zulässigen Kurven jetzt wieder fest und gegeben sein.

a) **Einleitende Bemerkungen über diskontinuierliche Lösungen:**

Wir setzen zunächst der Einfachheit halber voraus, die gesuchte Kurve:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

[1]) Vgl. § 25, d).

[2]) Vgl. § 25, a). Statt „Ecke" sagt Carathéodory „Knickpunkt".

[3]) obgleich die Funktionen x, y selbst stetig bleiben. Gleich bei dem ältesten Problem der Variationsrechnung (Newton's Rotationskörper kleinsten Widerstandes) ergab sich eine solche Diskontinuität (vgl. § 54) und dann wiederholt im Lauf der geschichtlichen Entwicklung bei vereinzelten Beispielen. Der erste, der sich in systematischer Weise mit diskontinuierlichen Lösungen beschäftigte, war Todhunter, der in seinem Buch *„Researches on the Calculus of Variations"* (1871) eine große Anzahl von Beispielen behandelt, ohne jedoch zu einem allgemeinen Satz zu gelangen. Die aus der ersten Variation sich ergebende „Eckenbedingung" verdankt man Weierstrass und Erdmann (vgl. § 48, b)).

welche das Integral J zu einem Minimum macht, und welche wieder ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegen möge, besitze eine Ecke und zwar im Punkt $P_0(t = t_0)$. Sie besteht also aus zwei Bogen der Klasse C', P_1P_0 und P_0P_2, die im Punkt P_0 unter einem Winkel zusammenstoßen. Der Tangentenwinkel des Bogens P_1P_0 im Punkt P_0 sei θ_0, derjenige des Bogens P_0P_2 im Punkt P_0 sei $\bar{\theta}_0$. Es wird ausdrücklich vorausgesetzt, daß

$$\bar{\theta}_0 - \theta_0 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

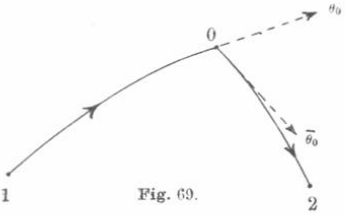


Fig. 69.

Wir betrachten nun zunächst solche spezielle Variationen $P_1P_3P_0$ der gesuchten Kurve $P_1P_0P_2$, welche das Stück P_0P_2 unverändert lassen und nur den Bogen P_1P_0 variieren. Dann folgt, wie früher, daß für den Bogen P_1P_0 die im fünften Kapitel entwickelten notwendigen Bedingungen (I), (II), (III), (IV) für „kontinuierliche" Lösungen erfüllt sein müssen. Ebenso folgt aus der Betrachtung von speziellen Variationen, welche das Stück P_1P_0 ungeändert lassen, daß dieselben vier Bedingungen auch für den Bogen P_0P_2 erfüllt sein müssen.

Dieselbe Schlußweise ist auf den Fall von beliebig vielen Ecken anwendbar und man erhält so das Resultat:

Jede diskontinuierliche Lösung[1]) *setzt sich aus Extremalenbogen der Klasse C' zusammen*, von denen jeder, für sich genommen, die Bedingungen von LEGENDRE, JACOBI und WEIERSTRASS erfüllt.

b) **Die Weierstraß'sche Eckenbedingung:**

Wir setzen für die weitere Diskussion voraus, daß unsere beiden Bogen P_1P_0 und P_0P_2 Extremalenbogen sind. Die Extremale, welcher der Bogen P_1P_0 angehört, bezeichnen[2]) wir mit $\mathfrak{E}_0$, diejenige, welcher der Bogen P_0P_2 angehört, mit $\bar{\mathfrak{E}}_0$. Ferner nehmen wir an, daß für die beiden Bogen P_1P_0 und P_0P_2 die Legendre'sche und die Jacobi'sche Bedingung in ihrer stärkeren Form erfüllt sind:

$$F_1 > 0, \tag{II'}$$

$$t_0' < t_1 < t_0, \qquad t_0 < t_2 < \bar{t}_0', \tag{III'}$$

wobei $P_0'(t = t_0')$ denjenigen Punkt von $\mathfrak{E}_0$ bezeichnet, dessen konjugierter Punkt P_0 ist, und $\bar{P}_0'(t = \bar{t}_0')$ den auf $\bar{\mathfrak{E}}_0$ zu P_0 konjugierten Punkt.

[1]) Um Mißverständnisse zu vermeiden, mag man hier noch hinzusetzen: „welche abgesehen von ihren Endpunkten frei variierbar ist", vgl. § 52.

[2]) $\mathfrak{E}_0$, $\bar{\mathfrak{E}}_0$ sind hier in demselben Sinn gebraucht, wie $\mathfrak{E}_0^*$ in § 27, c).

Wir ersetzen nunmehr die Kurve $P_1 P_0 P_2$ durch eine benachbarte Kurve von der Form

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x = x(t) + \varepsilon\xi(t), \qquad y = y(t) + \varepsilon\eta(t), \qquad t_1 \gtrless t \gtrless t_2,$$

wobei $\xi(t)$, $\eta(t)$ zwei willkürliche Funktionen von t von der Klasse C' sind, welche in t_1 und t_2 verschwinden. Das Integral $J_{\overline{\mathfrak{C}}}$ ist dann gleich der Summe[1])

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} = \int_{t_1}^{t_0-0} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\, dt + \int_{t_0+0}^{t_2} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\, dt.$$

Auf jedes dieser beiden Integrale können wir dann unmittelbar die Formel (18a) von § 26 anwenden und erhalten

$$\delta J = [F_{x'}\xi + F_{y'}\eta]_{t_0+0}^{t_0-0} = 0.$$

Wählen wir jetzt das eine Mal die Funktionen ξ, η so, daß

$$\xi(t_0) \neq 0, \qquad \eta(t_0) = 0,$$

das andere Mal so, daß

$$\xi(t_0) = 0, \qquad \eta(t_0) \neq 0,$$

so erhalten wir den folgenden von Weierstrass[2]) herrührenden Satz:

In jeder Ecke P_0 einer diskontinuierlichen Lösung müssen die beiden Gleichungen

$$F_{x'}|^{t_0-0} = F_{x'}|^{t_0+0}, \qquad F_{y'}|^{t_0-0} = F_{y'}|^{t_0+0} \tag{2}$$

erfüllt sein.

---

[1]) Vgl. wegen der Bezeichnung p. 197, Fußnote [2]).

[2]) Von Weierstrass schon in seiner Vorlesung im S. S. 1865 gegeben. Siehe Caratheodory, *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, Dissertation* (Göttingen, 1904), p. 3.

Unabhängig von Weierstraß hat Erdmann (Journal für Mathematik, Bd. LXXXII (1877), p. 21) die entsprechende Eckenbedingung für das x-Problem gefunden und zwar in der Form

$$\begin{aligned} f_{y'}|^{x_0-0} &= f_{y'}|^{x_0+0} \\ f - y' f_{y'}|^{x_0-0} &= f - y' f_{y'}|^{x_0+0}. \end{aligned} \tag{2b}$$

Diese Gleichungen folgen unmittelbar mittels der Gleichungen (16) von § 25 aus den Weierstraß'schen. Eine direkte Ableitung derselben ist umständlicher als für den Fall der Parameterdarstellung, vgl. z. B. Bolza, *Lectures*, § 9.

Die Eckenbedingung (2) läßt sich nach Whittemore auch aus dem Du-Bois-Reymond'schen Lemma von § 5, c) ableiten; diese Methode läßt sich auf Diskontinuitäten von kompliziterem Charakter anwenden, ja sogar auf den Fall von unendlich vielen Diskontinuitäten, vgl. p. 28, Fußnote [2]) und p. 29, Fußnote [3]).

Trotz der Diskontinuität in der Fortschreitungsrichtung müssen also die Funktionen $F_{x'}, F_{y'}$ in jeder Ecke stetig bleiben.

Wir nennen eine Kurve, welche aus zwei Extremalenbogen $P_1 P_0$ und $P_0 P_2$ zusammengesetzt ist und in P_0 eine Ecke besitzt, in welcher die Weierstraß'sche Eckenbedingung (2) erfüllt ist, eine *gebrochene Extremale.*

Da die Funktionen $F_{x'}, F_{y'}$ in x', y' positiv homogen von der Dimension 0 sind, so lassen sich die Gleichungen (2) auch schreiben:

$$\begin{aligned} F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0) &= F_{x'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0), \\ F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0) &= F_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0), \end{aligned} \tag{2a}$$

wobei

$$p_0 = \cos\theta_0, \qquad q_0 = \sin\theta_0,$$
$$\bar{p}_0 = \cos\bar{\theta}_0, \qquad \bar{q}_0 = \sin\bar{\theta}_0.$$

c) **Zusätze und Beispiele:**

Die Eckenbedingung läßt sich auch mittels der $\mathfrak{E}$-Funktion ausdrücken [1]). Es ist nämlich nach der Definition der $\mathfrak{E}$-Funktion

$$\mathfrak{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) = \cos\tilde{\theta}(\tilde{F}_{x'} - F_{x'}) + \sin\tilde{\theta}(\tilde{F}_{y'} - F_{y'}),$$

und hieraus berechnet man leicht

$$\frac{\partial\,\mathfrak{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta})}{\partial\tilde{\theta}} = -\sin\tilde{\theta}(\tilde{F}_{x'} - F_{x'}) + \cos\tilde{\theta}(\tilde{F}_{y'} - F_{y'}).$$

Daraus folgt, daß die Eckenbedingung (2 a) mit den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}(x_0, y_0; \cos\theta_0, \sin\theta_0; \cos\bar{\theta}_0, \sin\bar{\theta}_0) = 0, \\ &\frac{\partial\,\mathfrak{E}(x_0, y_0; \cos\theta_0, \sin\theta_0; \cos\bar{\theta}_0, \sin\bar{\theta}_0)}{\partial\bar{\theta}_0} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

äquivalent ist.

Andererseits ist aber auch

$$\mathfrak{E}(x_0, y_0; \cos\bar{\theta}_0, \sin\bar{\theta}_0; \cos\theta_0, \sin\theta_0) = 0, \tag{4}$$

und aus (3_1) und (4) folgt rückwärts (2 a), vorausgesetzt, daß

$$\bar{\theta}_0 - \theta_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{5}$$

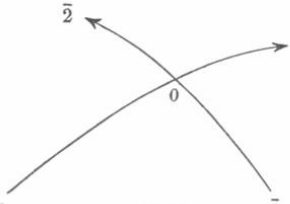


Fig. 70.

Aus der Symmetrie der Gleichungen (2 a) in bezug auf θ_0 und $\bar{\theta}_0$ folgt: Schneiden sich zwei kontinuierliche Extremalen $P_1 P_0 P_2$ und $\bar{P}_1 P_0 \bar{P}_2$ im Punkt P_0 derart, daß für ihre beiden Tangentenrichtungen θ_0 und $\bar{\theta}_0$ im Schnittpunkt die Eckenbedingung (2 a) erfüllt ist, so ist sowohl $P_1 P_0 \bar{P}_2$ als $\bar{P}_1 P_0 P_2$ eine mögliche [2]) diskontinuierliche Lösung.

[1]) Vgl. Carathéodory, *Dissertation*, p. 8.

[2]) Soweit es sich eben um die Eckenbedingung handelt.

Kombiniert man die Gleichung (3_1) mit der Relation zwischen der $\mathfrak{E}$-Funktion und der Funktion F_1 (Gleichung (125) von § 30), so erhält man den

Zusatz I: Die Funktion $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)$ verschwindet wenigstens für einen Wert von θ zwischen[1] θ_0 *und* $\bar{\theta}_0$.

Daraus folgt, daß ein Punkt P_0, in welchem F_1 für keinen Wert von θ verschwindet, nicht Ecke einer diskontinuierlichen Lösung sein kann; bei einem „regulären" Problem können also überhaupt keine diskontinuierlichen Lösungen auftreten.

Zusatz II: Wenn überdies

$$F_1(x_0, y_0, p_0, q_0) > 0, \qquad F_1(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) > 0,$$

so nimmt die Funktion $F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)$ zwischen[1] θ_0 *und* $\bar{\theta}_0$ *auch negative Werte an und verschwindet daher mindestens zweimal zwischen θ_0 und $\bar{\theta}_0$.*

Denn aus dem Ausdruck (124) von § 30 für die $\mathfrak{E}$-Funktion folgt dann, daß die Gleichung (3_1) nur dann erfüllt sein kann, wenn F_1 zwischen θ_0 und $\bar{\theta}_0$ negative Werte annimmt.

Zusatz III:[2] *Geometrisch sind für einen Punkt P_0 diejenigen Richtungspaare $\theta_0, \bar{\theta}_0$, welche der Weierstraß'schen Eckenbedingung genügen, dadurch charakterisiert, daß die Punkte $\theta_0, \bar{\theta}_0$ der zum Punkt P_0 gehörigen Indikatrix die Berührungspunkte einer Doppeltangente der Indikatrix sind.*

Denn die Tangente in einem beliebigen Punkt θ der Indikatrix für den Punkt P_0 ist nach Gleichung (128 b) von § 30 gegeben durch die Gleichung

$$F_{x'}(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)\, X + F_{y'}(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)\, Y = 1, \tag{6}$$

woraus unmittelbar folgt, daß die Tangenten in den Punkten θ_0 und $\bar{\theta}_0$ zusammenfallen, wenn die Gleichungen (2 a) erfüllt sind, und umgekehrt.

Erinnert man sich der Beziehungen der Funktionen $\mathfrak{E}$ und F_1 zur Indikatrix, so kann man hiernach die Gleichungen (3), (4), sowie die beiden Zusätze I und II unmittelbar an der Indikatrix ablesen.

Verbindet man dies Resultat mit der in § 36, a) gegebenen Konstruktion der zu einer gegebenen Richtung transversalen Richtung, so erhält man den

Zusatz IV: Die im Punkt P_0 zu den beiden Richtungen θ_0 und $\bar{\theta}_0$ transversalen Richtungen fallen zusammen, was übrigens auch unmittelbar aus der Vergleichung der Gleichungen (2) mit Gleichung (2) von § 36 folgt.

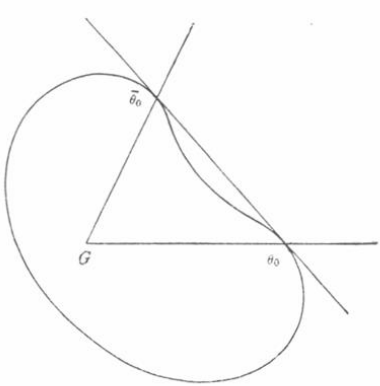


Fig. 71.

[1] Dabei sind nach § 30, b) die Winkel $\theta_0, \bar{\theta}_0$ so zu normieren, daß:

$$-\pi < \bar{\theta}_0 - \theta_0 \leqq \pi.$$

[2] Nach Carathéodory, *Dissertation*, p. 71 und Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 465.

Die *Konstantenbestimmung* für eine diskontinuierliche Lösung mit einer Ecke gestaltet sich folgendermaßen: Ist wieder

$$x = f(t, \alpha, \beta), \qquad y = g(t, \alpha, \beta)$$

das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung (I), und sind $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, resp. $\alpha = \bar{\alpha}_0$, $\beta = \bar{\beta}_0$ diejenigen Werte der Integrationskonstanten, welche den Bogen P_1P_0, resp. P_0P_2 liefern, und sind ferner t_0, resp. $\bar{t}_0$ diejenigen Werte von t, welche auf P_1P_0, resp. P_0P_2 den Punkt P_0 liefern, so hat man zur Bestimmung der acht unbekannten Größen

$$\alpha_0, \beta_0; \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0; t_1, t_2; t_0, \bar{t}_0$$

folgende acht Gleichungen: Zunächst die vier Gleichungen, welche ausdrücken, daß der Bogen P_1P_0 für $t = t_1$ durch P_1, der Bogen P_0P_2 für $t = t_2$ durch P_2 geht; ferner die beiden Gleichungen

$$f(t_0, \alpha_0, \beta_0) = f(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \quad g(t_0, \alpha_0, \beta_0) = g(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \tag{7}$$

welche ausdrücken, daß die Koordinaten x, y beim Durchgang durch die Ecke stetig bleiben; und endlich die beiden Gleichungen (2), bei denen die Argumente auf der linken Seite sind:

$$f(t_0, \alpha_0, \beta_0), \; g(t_0, \alpha_0, \beta_0), \; f_t(t_0, \alpha_0, \beta_0), \; g_t(t_0, \alpha_0, \beta_0),$$

auf der rechten Seite:

$$f(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \; g(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \; f_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0), \; g_t(\bar{t}_0, \bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0).$$

Beispiel XIII. (Siehe p. 268.)

$$F = G(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Da hier

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = G(x, y),$$

so folgt nach Zusatz I, daß die Punkte der Kurve $G(x, y) = 0$ die einzigen möglichen Ecken von diskontinuierlichen Lösungen sind.

Beispiel XIX: Das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(x'^2 + y'^2)\, dt}{a\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}$$

zu einem Extremum zu machen. Dabei ist unter a eine Funktion von x und y verstanden. Die zulässigen Kurven sind auf den Bereich: $a(x, y) > 1$ zu beschränken, damit das Integral sicher endlich bleibt.

Die Gleichung der *Indikatrix* lautet:

$$\varrho = a + \cos\theta.$$

Dieselbe stellt eine *Pascal'sche Schnecke*[1]) dar. Bei der Diskussion sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $a \gtreqless 2$. In den beiden ersten Fällen ($\geqq 2$) besitzt die Indikatrix keine reelle Doppeltangente. Ist dagegen $1 < a < 2$, so besitzt

[1]) Vgl. G. Loria, *Spezielle ebene Kurven*, p. 136.

sie eine reelle Doppeltangente, parallel der η-Achse; dieselbe berührt die Indikatrix in den Punkten $\theta = \pm\beta$, wo β durch die Gleichung gegeben ist:

$$\cos\beta = -\frac{a}{2}.$$

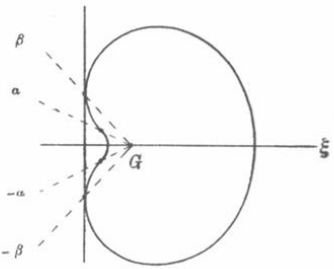


Fig. 72.

Hieraus folgt nach Zusatz III für diskontinuierliche Lösungen das Resultat:

In denjenigen Teilen der x, y-Ebene, in welchen: $a(x, y) \gtreqless 2$, können keine Ecken von diskontinuierlichen Lösungen liegen. Dagegen ist jeder Punkt des durch die Ungleichungen: $1 < a(x, y) < 2$ definierten Bereiches Ecke einer gebrochenen Extremalen. Die beiden zugehörigen Richtungen $\theta, \bar{\theta}$ haben die Amplituden $\pm\beta$.

Für die Funktion F_1 findet man nach einfacher Rechnung, bei welcher es bequem ist, von den Formeln von § 32, c) Gebrauch zu machen,

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = \frac{a^2 + 3a\cos\theta + 2}{(a + \cos\theta)^3}.$$

Die Funktion F_1 verschwindet mit Zeichenwechsel für $\theta = \pm\alpha$, wo α definiert ist durch die Gleichung

$$\cos\alpha = -\frac{a^2 + 2}{3a}.$$

In dem speziellen Fall, wo a eine Konstante ist, sind die Extremalen gerade Linien. Ist insbesondere $1 < a < 2$, so ist jeder Punkt der Ebene Ecke einer gebrochenen Extremalen.

Ist der Punkt P_1 beliebig gegeben, so füllen diejenigen Lagen des Punktes P_2, welche mit P_1 durch eine gebrochene Extremale mit einer Ecke verbunden werden können, das Innere des (spitzen) Winkels aus, welcher von zwei von P_1 ausgehenden Halbstrahlen von den Amplituden β und $-\beta$ gebildet wird. Und zwar gibt es nach jedem solchen Punkt P_2 allemal zwei gebrochene Extremalen $P_1 P_0 P_2$ und $P_1 P_3 P_2$ (siehe Fig. 73). Es sind dies gerade diejenigen Lagen des Punktes P_2, nach welchen sich keine kontinuierliche starke Lösung ziehen läßt. Dagegen lassen sich von P_1 nach jedem Punkt P_2 in dem angegebenen Winkelraum unendlich viele gebrochene Extremalen mit mehr als einer Ecke ziehen, nämlich gebrochene Linien, welche sich aus Stücken zusammensetzen, die abwechselnd die Amplituden β und $-\beta$ haben.[1])

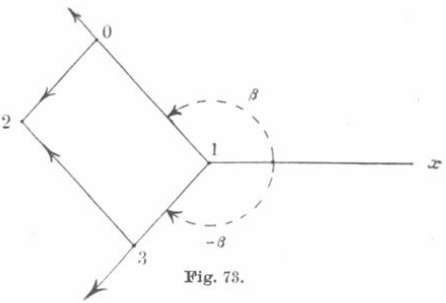


Fig. 73.

[1]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 24—29 am Ende von Kap. IX.

§ 49. Konjugierte Punkte auf gebrochenen Extremalen.[1])

Wir setzen für die weitere Diskussion voraus, daß unsere Kurve $P_1P_0P_2$ eine gebrochene Extremale ist, daß also im Punkt P_0 die Weierstraß'sche Eckenbedingung (2) erfüllt ist, und betrachten jetzt als Vorbereitung für die Aufstellung weiterer notwendiger, sowie hinreichender Bedingungen die Aufgabe, die Kurve $P_1P_0P_2$ in eine Schar von gebrochenen Extremalen einzubetten. Dabei halten wir an der schon in § 48, b) eingeführten Annahme fest, daß sowohl für P_1P_0 als auch für P_0P_2 die Bedingungen (II') und (III') von § 32, b) erfüllt sind.

a) **Konstruktion einer Schar von gebrochenen Extremalen:**

Es sei

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a) \tag{8}$$

irgendeine Schar von Extremalen, welche den Extremalenbogen P_1P_0 enthält, und zwar für $a = a_0$, und welche den in § 27, d) aufgezählten Bedingungen A) bis D) genügt. Wir stellen uns die Aufgabe, auf einer der Extremalen P_1P_0 benachbarten Extremalen $\mathfrak{E}_a$ der Schar (8) einen Punkt $P(t)$ und zugleich eine durch P gehende Richtung $\bar{\theta}$ zu bestimmen, derart, daß die Richtung θ der positiven Tangente der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ im Punkt P zusammen mit der gesuchten Richtung $\bar{\theta}$ der Weierstraß'schen Eckenbedingung (2a) genügt.

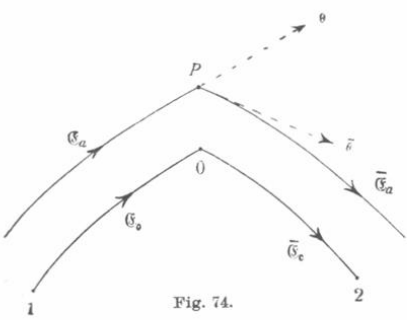


Fig. 74.

Wir haben dann zur Bestimmung der beiden Unbekannten t und $\bar{\theta}$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{x'}(\varphi(t,a), \psi(t,a), \varphi_t(t,a), \psi_t(t,a)) - F_{x'}(\varphi(t,a), \psi(t,a), \cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta}) &= 0, \\ F_{y'}(\varphi(t,a), \psi(t,a), \varphi_t(t,a), \psi_t(t,a)) - F_{y'}(\varphi(t,a), \psi(t,a), \cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta}) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Für den Wert der Funktionaldeterminante der linken Seiten dieser beiden Gleichungen nach t und $\bar{\theta}$ im Punkt P_0 ergibt eine einfache Rechnung[2]) den Ausdruck

$$\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}\, \overline{F}_1(t_0)\Omega_0, \tag{10}$$

[1]) In ihren allgemeinen Umrissen rührt die Theorie der konjugierten Punkte auf diskontinuierlichen Lösungen von Carathéodory her (*Dissertation*, §§ 6, 8, 9 und Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 474); im einzelnen durchgeführt und in wesentlichen Punkten vervollständigt worden ist sie von Bolza (American Journal of Mathematics, Bd. XXX (1908) p. 209) und Dresden (Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IX (1908), p. 480).

[2]) Für die Einzelheiten derselben vgl. Bolza, loc. cit. p. 211.

wobei die von CARATHEODORY eingeführte Größe Ω_0 definiert ist durch

$$\begin{aligned}\Omega_0 = {} & p_0 F_x(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) + q_0 F_y(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0) \\ & - \bar{p}_0 F_x(x_0, y_0, p_0, q_0) - \bar{q}_0 F_y(x_0, y_0, p_0, q_0).\end{aligned} \tag{11}$$

Daraus folgt nach dem Satz über implizite Funktionen das Resultat:

Wenn die Bedingung

$$\Omega_0 \neq 0 \tag{12}$$

erfüllt ist, so lassen sich die Gleichungen (9) *in der Umgebung der Stelle* $t_0, a_0, \bar{\theta}_0$ *eindeutig nach* $t, \bar{\theta}$ *auflösen, und die Lösung*

$$t = t(a), \qquad \bar{\theta} = \bar{\theta}(a) \tag{13}$$

ist in der Umgebung von $a = a_0$ *von der Klasse* C' *und erfüllt die Anfangsbedingung*

$$t(a_0) = t_0, \qquad \bar{\theta}(a_0) = \bar{\theta}_0. \tag{14}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt hatten, gelöst. Wir setzen in der Folge die Bedingung (12) als erfüllt voraus.

Nun war weiter nach Voraussetzung

$$F_1(x_0, y_0, \cos\bar{\theta}_0, \sin\bar{\theta}_0) > 0;$$

daraus folgt, daß auch

$$F_1(\varphi(t(a), a), \psi(t(a), a), \cos\bar{\theta}(a), \sin\bar{\theta}(a)) > 0,$$

wenn nur $|a - a_0|$ hinreichend klein gewählt wird. Alsdann können wir aber nach den Existenztheoremen von § 27, a) durch den Punkt P in der Richtung $\bar{\theta}$ eine Extremale $\bar{\mathfrak{E}}_a$ konstruieren, die wir mit

$$\bar{\mathfrak{E}}_a: \qquad x = \bar{\varphi}(t, a), \qquad y = \bar{\psi}(t, a) \tag{15}$$

bezeichnen. Den Parameter t können wir so wählen, daß auch auf $\bar{\mathfrak{E}}_a$ dem Wert $t = t(a)$ der Punkt P entspricht, so daß also

$$\bar{\varphi}(t(a), a) = \varphi(t(a), a), \qquad \bar{\psi}(t(a), a) = \psi(t(a), a). \tag{16}$$

Wir erhalten so eine gebrochene Extremale $\mathfrak{E}_a + \bar{\mathfrak{E}}_a$ mit der Ecke im Punkt P, auf welcher der Parameter t sich stetig ändert.

Lassen wir a variieren, so erhalten wir eine *Schar von gebrochenen Extremalen*, welche die spezielle Kurve $P_1 P_0 P_2$ für $a = a_0$ enthält.

Die Schar (15) wollen wir die zur Schar (8) *„komplementäre Extremalenschar"* nennen.

b) **Die Eckenkurve:**

Lassen wir a variieren, so beschreibt die Ecke P eine Kurve $\tilde{\mathfrak{E}}$, welche wir die *Eckenkurve*[1]) nennen wollen. Definiert man die Funktionen $\tilde{x}(a), \tilde{y}(a)$ durch die Gleichungen

$$\tilde{x}(a) = \varphi(t(a), a), \qquad \tilde{y}(a) = \psi(t(a), a), \tag{17}$$

wofür man wegen (16) auch schreiben kann

$$\tilde{x}(a) = \overline{\varphi}(t(a), a), \qquad \tilde{y}(a) = \overline{\psi}(t(a), a), \tag{18}$$

so ist die Eckenkurve in Parameterdarstellung gegeben durch die Gleichungen

$$\tilde{\mathfrak{E}}: \qquad x = \tilde{x}(a), \qquad y = \tilde{y}(a),$$

wobei ein gegebener Wert $a = a'$ die Ecke für die gebrochene Extremale $\mathfrak{E}_{a'} + \overline{\mathfrak{E}}_{a'}$ liefert.

Aus den Definitionsgleichungen (17) für die Funktionen $\tilde{x}(a), \tilde{y}(a)$ kann man dann nach den Regeln für die Differentiation impliziter Funktionen, angewandt auf die Funktion $t(a)$, die Ableitungen $\tilde{x}'(a)$, $\tilde{y}'(a)$ und daraus das Gefälle $\operatorname{tg}\tilde{\theta}$ der Tangente an die Eckenkurve im Punkt P berechnen. Insbesondere erhält man für das Gefälle $tg\,\tilde{\theta}_0$ der Kurve $\tilde{\mathfrak{E}}$ im Punkt P_0 das folgende Resultat[2]):

Es sei $Q(t = \tau)$ der dem Punkt P_0 zunächst vorangehende Brennpunkt der Schar (8) auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$; ein solcher existiert stets, wenn der in § 48, b) definierte Punkt P_0' existiert, wie wir für die folgende Diskussion voraussetzen wollen, und zwar liegt Q nach dem Sturm'schen Satz zwischen P_0' und P_0. Weiter bezeichne $\Theta(t, \tau)$ die in § 29, a) definierte Funktion von Weierstraß, d. h. dasjenige Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung für die Extremale $\mathfrak{E}_0$, welches für $t = \tau$ verschwindet. Alsdann ist

$$\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 = \frac{\alpha\,\Theta(t_0, \tau) + \beta\,\Theta_t(t_0, \tau)}{\gamma\,\Theta(t_0, \tau) + \delta\,\Theta_t(t_0, \tau)}, \tag{19}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= \quad A_0\overline{p}_0 + B_0\overline{q}_0, \quad \beta = (x_0'^2 + y_0'^2)q_0 F_1(t_0)\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0), \\ \gamma &= -(B_0\overline{p}_0 + C_0\overline{q}_0), \quad \delta = (x_0'^2 + y_0'^2)p_0 F_1(t_0)\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0), \end{aligned} \tag{20}$$

$$A_0 = \overline{L}_0 - L_0, \qquad B_0 = \overline{M}_0 - M_0, \qquad C_0 = \overline{N}_0 - N_0. \tag{21}$$

Die Größen L_0, M_0, N_0, resp. $\overline{L}_0$, $\overline{M}_0$, $\overline{N}_0$ sind durch die Gleichungen (85) von § 28 definiert, und zwar sind die ersteren für den

[1]) „Knickpunktskurve" nach Carathéodory, loc. cit.

[2]) Für die Einzelheiten der Rechnung vgl. Bolza, loc. cit. p. 215.

Punkt P_0 und die Extremale $\mathfrak{E}_0$ zu berechnen, die letzteren für den Punkt P_0 und die Extremale $\mathfrak{E}_0$.

Da die Größen α, β, γ, δ von der Wahl der Schar (8), und insbesondere von τ unabhängig sind, so folgt:

Das Gefälle der Eckenkurve $\tilde{\mathfrak{E}}$ im Punkt P_0 ist dasselbe für alle Extremalenscharen (8), welche denselben Brennpunkt Q besitzen, wobei die Extremalenschar durch den Punkt Q unter den letzteren mit inbegriffen ist[1]).

Wir untersuchen jetzt, wie sich das Gefälle $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$ verändert, wenn der Punkt Q die Extremale $\mathfrak{E}_0$ durchläuft.

Dazu hat man die Ableitung von $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$ nach τ zu berechnen. Die Rechnung, bei welcher man zu beachten hat, daß die durch (11) definierte Größe Ω_0 sich auf Grund von Gleichung (87) von § 28 auch schreiben läßt

$$\Omega_0 = A_0 p_0 \bar{p}_0 + B_0(p_0\bar{q}_0 + q_0\bar{p}_0) + C_0 q_0 \bar{q}_0, \tag{11a}$$

ergibt das Resultat

$$\frac{d}{d\tau}\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 = \frac{-k^2 \sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0)\Omega_0}{F_1(\tau)(\gamma\Theta(t_0,\tau) + \delta\Theta_t(t_0,\tau))^2}, \tag{22}$$

wobei k eine von Null verschiedene Größe ist.

Wir machen für die weitere Diskussion die Annahme, daß

$$\bar{\theta}_0 - \theta_0 \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\pi). \tag{23}$$

Nunmehr lassen wir den Punkt Q die Extremale $\mathfrak{E}_0$ vom Punkt[2]) P_0' bis zum Punkt P_0 durchlaufen, d. h. wir lassen τ von t_0' bis t_0 wachsen. Dabei behält nach (22) die Ableitung von $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$ ein konstantes Vorzeichen, da $F_1(\tau) > 0$ und die Größe Ω_0, welche von τ unabhängig ist, nach (12) von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Für $\tau = t_0'$ und $\tau = t_0$ verschwindet $\Theta(t_0,\tau)$, und es wird:

$$\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 = \frac{\beta}{\delta} = \frac{y_0'}{x_0'} = \operatorname{tg}\theta_0.$$

Hieraus ergibt sich das Resultat:

Während der Punkt Q die Extremale $\mathfrak{E}_0$ vom Punkt P_0' bis zum Punkt P_0 durchläuft, dreht sich die Gerade[3]) *$\tilde{\theta}_0$ um den Punkt P_0 von der Anfangslage θ_0 beständig in demselben Sinn um den Winkel π bis zur Endlage θ_0.*

[1]) Q erscheint dabei als entartete Enveloppe, vgl. § 47, a) p. 361.

[2]) Siehe § 48, b), Eingang.

[3]) D. h. die Gerade durch P_0 vom Gefälle $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$, so daß also die Gerade $\tilde{\theta}_0$ (nicht zu verwechseln mit der Richtung $\tilde{\theta}_0$) mit der Geraden $\tilde{\theta}_0 + \pi$ identisch ist.

Dabei passiert sie genau einmal durch die Lage $\bar{\theta}_0$. Den Wert von τ, für welchen dies eintritt, bezeichnen wir mit e_0, den entsprechenden Punkt von $\mathfrak{E}_0$ mit E_0. Dabei ist es für die weiteren Entwicklungen wichtig, zu unterscheiden, ob die Gerade $\tilde{\theta}_0$ in den Winkel[1]) zwischen den beiden Zweigen P_1P_0, P_0P_2 unserer diskontinuierlichen Lösung eintritt oder nicht. Man erhält vier Fälle, die durch die beifolgenden Figuren genügend charakterisiert sind, wobei zunächst nur der Bogen $P_0'P_0$ in Betracht kommt:

Fall I: $\Omega_0 > 0$,

a) $\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) > 0$ | b) $\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) < 0$

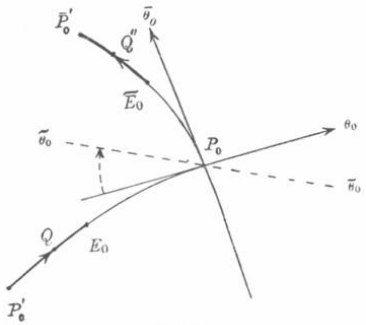


Fig. 75.

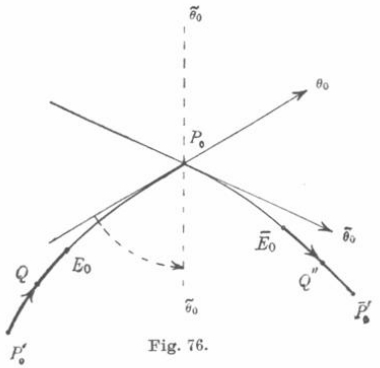


Fig. 76.

Fall II: $\Omega_0 < 0$,

a) $\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) > 0$ | b) $\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) < 0$

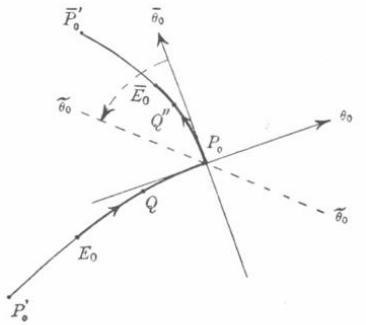


Fig. 77.

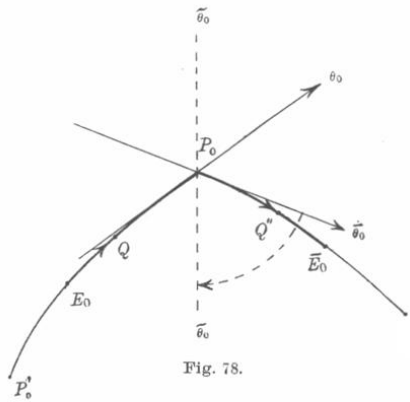


Fig. 78.

[1]) Darunter soll derjenige der beiden von den Halbstrahlen $\bar{\theta}_0$ und $\theta_0 + \pi$ gebildeten Winkel verstanden werden, welcher kleiner ist als π. Wir werden diesen Winkel in der Folge kurz den *„Eckenwinkel"* nennen.

Während sich der Punkt Q von P_0' nach E_0 bewegt, dreht sich die Gerade $\tilde{\theta}_0$ aus der Lage θ_0 in die Lage $\bar{\theta}_0$, und zwar durch den Eckenwinkel, wenn $\Omega_0 > 0$, außerhalb desselben, wenn $\Omega_0 < 0$. Bewegt sich dann Q weiter von E_0 nach P_0, so dreht sich die Gerade $\tilde{\theta}_0$ weiter aus der Lage $\bar{\theta}_0$ in die Lage θ_0 und zwar außerhalb des fraglichen Winkelraumes, wenn $\Omega_0 > 0$, innerhalb, wenn $\Omega_0 < 0$. Liegt Q auf dem stärker ausgezogenen der beiden Bogen $P_0'E_0, E_0P_0$, so tritt die zugehörige Gerade $\tilde{\theta}_0$ in den Eckenwinkel ein.

Aus der vorangegangenen Diskussion folgt zugleich die *Umkehrung*: Zu jeder durch den Punkt P_0 gehenden Geraden $\tilde{\theta}_0$, welche in P_0 weder den Bogen P_1P_0, noch den Bogen P_0P_2 berührt, gehört ein und nur ein Punkt Q zwischen P_0' und P_0 derart, daß die Eckenkurve für jede Extremalenschar (8), welche ihren Brennpunkt im Punkt Q hat, die Gerade $\tilde{\theta}_0$ im Punkt P_0 berührt.

Man erhält den zu einer gegebenen Geraden $\tilde{\theta}_0$ gehörigen Wert von τ, indem man die Gleichung (19) nach τ auflöst. Setzt man die Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ein, so erhält man die Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}&(A_0\bar{p}_0\tilde{p}_0 + B_0(\bar{p}_0\tilde{q}_0 + \bar{q}_0\tilde{p}_0) + C_0\bar{q}_0\tilde{q}_0)\Theta(t_0,\tau)\\ &-(x_0'^2+y_0'^2)F_1(t_0)\sin(\bar{\theta}_0-\theta_0)\sin(\tilde{\theta}_0-\theta_0)\Theta_i(t_0,\tau)=0;\end{aligned}\tag{24}$$

dabei ist

$$\tilde{p}_0 = \cos\tilde{\theta}_0, \qquad \tilde{q}_0 = \sin\tilde{\theta}_0.$$

Insbesondere erhält man die Gleichung für den Parameter e_0 des Punktes E_0, indem man in (24): $\tilde{\theta}_0 = \bar{\theta}_0$ setzt.

c) **Definition der konjugierten Punkte für gebrochene Extremalen:**

Falls der zu P_0 auf $\bar{\mathfrak{E}}_0$ konjugierte Punkt $\bar{P}_0'$ existiert, wie wir für die weitere Diskussion annehmen wollen, so besitzt auch die zur Extremalenschar (8) komplementäre Schar (15) einen Brennpunkt $Q''(t=\tau'')$, und zwar zwischen P_0 und $\bar{P}_0'$. Zwischen τ'' und dem Gefälle $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$ besteht dann eine Relation ($\bar{24}$), die aus (24) dadurch hervorgeht, daß man die überstrichenen und unüberstrichenen Buchstaben vertauscht, da man ganz analoge Betrachtungen wie unter b) auch für die Schar (15) anstellen kann. Daraus folgt aber, daß alle Scharen gebrochener Extremalen, welche den Brennpunkt Q gemeinsam haben, auch den zweiten Brennpunkt Q' gemeinsam haben.

Wir nennen diesen zweiten Brennpunkt Q'' *den zum Punkt Q auf der gebrochenen Extremalen $\mathfrak{E}_0 + \bar{\mathfrak{E}}_0$ konjugierten Punkt.* Derselbe kann nach dem eben Gesagten auch definiert werden als *der Brennpunkt*

auf $\overline{\mathfrak{E}}_0$ der zur Extremalenschar durch den Punkt Q komplementären Extremalenschar.

Durch Elimination von $\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0$ aus den beiden Gleichungen (24) und (24) erhält man die folgende Relation[1]) zwischen den Parametern τ, τ'' der konjugierten Punkte Q, Q'':

$$\left.\begin{aligned}
&(A_0C_0 - B_0^2)\Theta(t_0,\tau)\overline{\Theta}(t_0,\tau'')\\
&-(x_0'^2 + y_0'^2)F_1(t_0)(A_0\bar{p}_0^2 + 2B_0p_0q_0 + C_0q_0^2)\frac{\partial\Theta(t_0,\tau)}{\partial t_0}\overline{\Theta}(t_0,\tau'')\\
&+(\bar{x}_0'^2 + \bar{y}_0'^2)\overline{F}_1(t_0)(A_0\bar{p}_0^2 + 2B_0\bar{p}_0\bar{q}_0 + C_0\bar{q}_0^2)\Theta(t_0,\tau)\frac{\partial\overline{\Theta}(t_0,\tau'')}{\partial t_0}\\
&-(x_0'^2+y_0'^2)(\bar{x}_0'^2+\bar{y}_0'^2)F_1(t_0)\overline{F}_1(t_0)\sin^2(\bar{\theta}_0-\theta_0)\frac{\partial\Theta(t_0,\tau)}{\partial t_0}\frac{\partial\overline{\Theta}(t_0,\tau'')}{\partial t_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

In Fig. 75 bis 78 ist die Abhängigkeit zwischen den Punkten Q, Q'' angedeutet. So bewegt sich z. B. im Fall I, a) der Punkt Q'' von $\overline{E}_0$ nach $\overline{P}_0'$, während der Punkt Q von P_0' nach E_0 geht. Bewegt sich der Punkt Q weiter von E_0 nach P_0, so bewegt sich der Punkt Q'' von P_0 nach $\overline{E}_0$.

Dabei hat der Punkt $\overline{E}_0(t=\bar{e}_0)$ die analoge Bedeutung für die Extremale $\overline{\mathfrak{E}}_0$, wie der Punkt E_0 für die Extremale $\mathfrak{E}_0$, d. h. in der Relation (24) entspricht dem Wert $\tau''=\bar{e}_0$ der Wert $\tilde{\theta}_0=\theta_0$.

Die beiden Punkte E_0, $\overline{E}_0$, deren Bedeutung für die Frage des Minimums aus dem folgenden Absatz erhellen wird, sind von CARATHEODORY eingeführt worden.

d) **Das Analogon der Jacobi'schen Bedingung für diskontinuierliche Lösungen:**

Wir werden jetzt unter Festhaltung der Voraussetzungen (12) und (23) zeigen, daß *für ein Minimum des Integrals J außer den bereits aufgezählten Bedingungen weiterhin notwendig ist, daß*[2])

$$E_0 \prec P_1, \qquad P_2 \overline{\overline{\prec}} P_1'', \quad (26)$$

wenn P_1'' den zu P_1 auf der gebrochenen Extremalen $\mathfrak{E}_0 + \overline{\mathfrak{E}}_0$ konjugierten Punkt bezeichnet.

---

[1]) Vgl. BOLZA, loc. cit. p. 221 und DRESDEN, loc. cit. p. 483.

[2]) Der Satz in dieser einfachen Form rührt von DRESDEN her, der denselben mittels der Differentiationsmethode beweist (Transactions of the American Mathematical Society Bd. IX (1908). Über die Beziehung zu den ursprünglichen Resultaten von CARATHEODORY vgl. p. 372. Wegen der Bezeichnung vgl. § 25, a).

Zum Beweis werden wir uns des Enveloppensatzes, ausgedehnt auf gebrochene Extremalen, bedienen.

Es mögen die Gleichungen (8) die Extremalenschar durch den Punkt P_1 darstellen, (15) die dazu komplementäre Schar. Wir greifen irgend eine der gebrochenen Extremalen der Schar heraus: $\mathfrak{E}_a + \bar{\mathfrak{E}}_a$, und nehmen auf ihr einen Punkt $P_3(t)$ an. Den Wert des Integrals J, genommen entlang dieser gebrochenen Extremalen vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_3, bezeichnen wir mit $u(t, a)$. Liegt der Punkt P_3 vor der Ecke P_5, also auf der Extremalen $\mathfrak{E}_a$, so gelten für die Funktion $u(t, a)$ und ihre Ableitungen genau die früheren Formeln von § 31, c) und § 44, a). Liegt dagegen der Punkt P_3 jenseits der Ecke, also auf der Extremalen $\bar{\mathfrak{E}}_a$, so ist

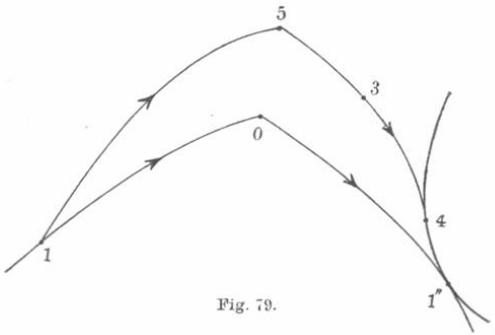


Fig. 79.

$$u(t, a) \equiv J_{15} + J_{53} = \int_{t^1}^{t_5} \mathfrak{F}(t, a)\,dt + \int_{t_5}^{t} \bar{\mathfrak{F}}(t, a)\,dt; \tag{27}$$

dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\mathfrak{F}(t, a) = F(\varphi(t, a),\ \psi(t, a),\ \varphi_t(t, a),\ \psi_t(t, a)),$$

$$\bar{\mathfrak{F}}(t, a) = F(\bar{\varphi}(t, a),\ \bar{\psi}(t, a),\ \bar{\varphi}_t(t, a),\ \bar{\psi}_t(t, a)),$$

und t^1 und t_5 sind die Werte von t, welche auf der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ die Punkte P_1, resp. P_5 liefern. Hieraus folgt zunächst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{\mathfrak{F}}(t, a), \tag{28}$$

und weiterhin, wenn man beachtet, daß die auf den Punkt P_1 bezüglichen Glieder ebenso wie in § 31, b) — wo dem Punkt P_1 der Punkt P_0 entspricht — wegfallen,

$$\frac{\partial J_{15}}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a + \mathfrak{F}\frac{dt}{da}\Big|^{t=t_5},$$

was sich wegen der Homogeneitätsrelation (10) von § 25 auch schreiben läßt

$$\frac{\partial J_{15}}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}\left(\varphi_a + \varphi_t\frac{dt}{da}\right) + \mathfrak{F}_{y'}\left(\psi_a + \psi_t\frac{dt}{da}\right)\Big|^{t=t_5}.$$

Nun ist aber $t_5 = t(a)$, wo $t(a)$ die in § 49, a) ebenso bezeichnete Funktion bedeutet, für welche die Gleichungen (16) und (17) gelten.

Daher kommt

$$\frac{\partial J_{15}}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t_5, a)\,\tilde{x}'(a) + \mathfrak{F}_{y'}(t_5, a)\,\tilde{y}'(a).$$

Ganz ebenso erhält man, wenn man (18) statt (17) benutzt

$$\frac{\partial J_{53}}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t, a)\,\bar{\varphi}_a(t, a) + \mathfrak{F}_{y'}(t, a)\,\bar{\psi}_a(t, a) - \bar{\mathfrak{F}}_{x'}(t_5, a)\,\tilde{x}'(a) - \bar{\mathfrak{F}}_{y'}(t_5, a)\,\tilde{y}'(a),$$

also schließlich

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t, a)\,\bar{\varphi}_a(t, a) + \bar{\mathfrak{F}}_{y'}(t, a)\,\bar{\psi}_a(t, a) + \tilde{x}'(a)[\mathfrak{F}_{x'}(t_5, a) - \bar{\mathfrak{F}}_{x'}(t_5, a)] + \tilde{y}'(a)[\mathfrak{F}_{y'}(t_5, a) - \bar{\mathfrak{F}}_{y'}(t_5, a)]. \tag{28a}$$

Die Ausdrücke (28) und (28a) für die partiellen Ableitungen von $u(t, a)$ unterscheiden sich also von den früher für den Fall eines Feldes von kontinuierlichen Extremalen gegebenen Gleichungen (144) und (146) von § 31 nur durch das in dem Ausdruck für u_a in der zweiten Zeile stehende Zusatzglied. *Dieses Zusatzglied ist nun aber auf Grund der Weierstraß'schen Eckenbedingung (2) gleich Null.*[1]) Denn darnach gelten im Punkt P_5 die Gleichungen

$$\mathfrak{F}_{x'}(t_5, a) = \bar{\mathfrak{F}}_{x'}(t_5, a), \quad \mathfrak{F}_{y'}(t_5, a) = \bar{\mathfrak{F}}_{y'}(t_5, a);$$

somit erhalten wir für die Ableitungen u_t, u_a genau dieselben Ausdrücke wie früher.

Es sei jetzt $\mathfrak{J}$ die Enveloppe der komplementären Schar (15) (Fig. 79); sie berührt, wie wir wissen, die Extremale $\bar{\mathfrak{E}}_0$ im Punkt P_1''; der Berührungspunkt von $\bar{\mathfrak{E}}_a$ mit $\mathfrak{J}$ sei P_4. Dann folgert man genau wie in § 44, c) den *Enveloppensatz*:

$$J_{\mathfrak{E}_a}(P_1 P_5) + J_{\bar{\mathfrak{E}}_a}(P_5 P_4) + J_{\mathfrak{J}}(P_4 P_1'') = J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_0) + J_{\bar{\mathfrak{E}}_0}(P_0 P_1'');$$

und hieraus folgt weiter wie in § 47, daß im Fall eines Minimums der Punkt P_2 nicht jenseits des konjugierten Punktes P_1'' liegen darf:

$$P_2 \overline{\overline{\prec}} P_1''. \tag{29}$$

Überdies muß aber

$$E_0 \overline{\overline{\prec}} P_1 \tag{30}$$

sein.[2]) Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es sei: $P_1 \prec E_0$. Dann können wir nach den Resultaten von § 49, c) stets auf dem Bogen

---

[1]) Vgl. Carathéodory, *Dissertation*, p. 21.

[2]) Es muß sogar: $E_0 \prec P_1$ sein, wie sich aus der Differentiationsmethode ergibt, vgl. Dresden, loc. cit.

$E_0 P_0$ einen Punkt Q so nahe bei E_0 wählen, daß dessen konjugierter Punkt Q'' vor P_2 liegt. Daher können wir nach dem eben bewiesenen Satz von Q nach P_2 eine zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ ziehen, welche einen kleineren Wert für das Integral J liefert als die gebrochene Extremale $Q P_0 P_2$, womit zugleich gezeigt ist, daß auch die gebrochene Extremale $P_1 P_0 P_2$ selbst kein Minimum liefern kann.

Aus (30) folgt nach § 49, c), daß: $P_1'' \prec \overline{E}^0$. Somit muß a fortiori

$$P_2 \overline{\overline{\prec}} \overline{E}_0 \tag{31}$$

sein.

Wir erhalten also zunächst für jeden der beiden Punkte P_1 und P_2 für sich genommen eine Bedingung, nämlich (30) und (31); außerdem muß dann zwischen beiden die der Jacobi'schen Bedingung entsprechende Bedingung (29) erfüllt sein.[1])

§ 50. Hinreichende Bedingungen für diskontinuierliche Lösungen.

Die Aufstellung von hinreichenden Bedingungen beruht auf der Konstruktion eines Feldes von gebrochenen Extremalen und auf der Ausdehnung des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes auf ein solches Feld.

Wir halten dabei an der bereits in § 49 gemachten Annahme fest, daß für unsere gebrochene Extremale $P_1 P_0 P_2$ die Bedingungen

$$\Omega_0 \neq 0 \tag{12}$$

und

$$\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) \neq 0 \tag{23}$$

erfüllt sind.

a) **Konstruktion eines Feldes von gebrochenen Extremalen:**[2])

Wir betrachten eine beliebige Schar von gebrochenen Extremalen, die sich zusammensetzt aus der Schar (8) und der dazu komplementären Schar (15), und bezeichnen wieder mit $Q(t = \tau)$ und $Q''(t = \tau'')$ ihre beiden Brennpunkte auf $\mathfrak{E}_0$, resp. $\overline{\mathfrak{E}}_0$. Wir nehmen an, es sei

$$P_0' \prec Q \prec P_0, \quad P_0 \prec Q'' \prec \overline{P}_0',$$

und[3]) der Punkt P_1 liege zwischen Q und P_0, der Punkt P_2 zwischen P_0 und Q''. Dann gelten nach der Definition der Punkte Q, Q'' für die Funktionaldeterminanten der beiden Scharen die Ungleichungen:

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 30, 31 am Ende von Kap. IX.

[2]) Nach Carathéodory, *Dissertation*, § 6 und Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906) p. 474.

[3]) Vgl. p. 383.

$$\Delta(t, a_0) \neq 0, \quad \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_0,$$
$$\bar{\Delta}(t, a_0) \neq 0, \quad \text{für} \quad t_0 \leqq t \leqq t_2. \tag{32}$$

Wir konstruieren jetzt in einer t, a-Ebene das Rechteck

$$t_1 - h_1 \leqq t \leqq t_2 + h_2, \quad |a - a_0| \leqq k, \tag{33}$$

wobei h_1, h_2, k positive Größen sind.

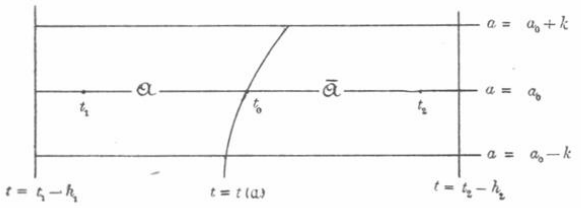


Fig. 80.

Dasselbe wird durch die Kurve

$$t = t(a) \tag{34}$$

— wobei $t(a)$ dieselbe Bedeutung hat wie in § 49, a) — in zwei Teile zerlegt, die wir mit $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ bezeichnen; im ersten ist $t \leqq t(a)$, im zweiten $t \geqq t(a)$.

Das Bild des Bereiches $\mathfrak{A}$ in der x, y-Ebene mittels der Transformation (8) bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$, dasjenige des Bereiches $\bar{\mathfrak{A}}$ mittels der Transformation (15) mit $\bar{\mathfrak{S}}$. Die Bereiche $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ haben das Bild der Kurve (34), d. h. die Eckenkurve $\mathfrak{E}$ gemeinsam. Wir machen noch die Annahme, daß die Kurve $P_1 P_0 P_2$ keine vielfachen Punkte besitzt. Dann folgt nach § 31, a) aus (32), daß sich die positiven Größen h_1, h_2, k so klein wählen lassen, daß die Transformation (8) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$, und gleichzeitig die Transformation (15) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ definieren, und daß überdies

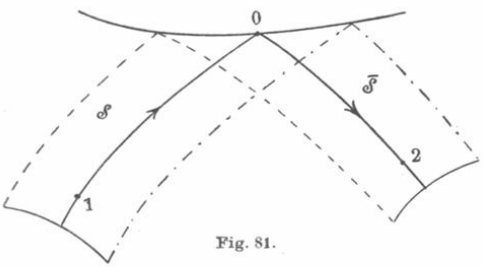


Fig. 81.

$$\Delta(t, a) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A},$$
$$\bar{\Delta}(t, a) \neq 0 \text{ in } \bar{\mathfrak{A}}.$$

Dabei ist es immer noch möglich, daß die beiden Bereiche $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ sich teilweise überdecken, und dies tritt in der Tat auch stets ein, wenn die Tangente an die Eckenkurve $\mathfrak{E}$ in P_0 außerhalb des Eckenwinkels[1]) liegt, (siehe Fig. 81). Wir setzen daher in der Folge voraus, daß *die Gerade $\tilde{\theta}_0$ durch den Eckenwinkel* geht. Unter dieser Voraussetzung läßt sich zeigen, daß die beiden Bereiche $\mathfrak{S}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ außer der Kurve $\mathfrak{E}$ keinen Punkt gemeinsam haben, wofern nur die Größen h_1, h_2, k hinreichend klein genommen werden.

[1]) Vgl. p. 376, Fußnote [1]).

Zum Beweise nehme man an, es gäbe, wie klein auch k gewählt werden möge, mindestens einen nicht auf $\mathfrak{E}$ liegenden Punkt, der gleichzeitig zu $\mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$ gehört. Alsdann läßt sich ganz ähnlich wie in § 22, b) und d) zeigen, daß es dann in jeder Nähe des Punktes P_0 Punkte geben müßte, die, ohne auf $\mathfrak{E}$ zu liegen, gleichzeitig zu $\mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$ gehören. Letzteres ist aber nicht möglich, da bei der vorausgesetzten Lage der Geraden $\tilde{\theta}_0$ alle Punkte von $\mathfrak{H}$ in der Nähe von P_0 auf derselben Seite[1]) von $\mathfrak{E}$, alle Punkte von $\overline{\mathfrak{H}}$ in der Nähe von P_0 auf der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{E}$ liegen müssen.

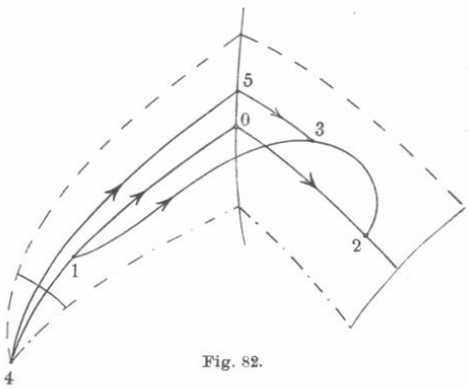


Fig. 82.

Man erhält also das Resultat, daß man die Größen h_1, h_2, k so klein wählen kann, daß die durch die Gleichungen (8) und (15) definierte *Beziehung zwischen dem Rechteck* (33) *und dessen Bild* $\mathfrak{H} + \overline{\mathfrak{H}}$ *eine ein-eindeutige* ist. Den Bereich $\mathfrak{H} + \overline{\mathfrak{H}}$ nennen wir dann ein *Feld von gebrochenen Extremalen* um die spezielle gebrochene Extremale $P_1 P_0 P_2$. Durch jeden Punkt des Feldes geht dann also eine und nur eine (kontinuierliche oder gebrochene) Extremale unserer Schar, für welche die Bedingungen (33) erfüllt sind. —

In dem vorangegangenen Beweis sind wir von einer gegebenen Schar von gebrochenen Extremalen ausgegangen und haben dann angenommen, daß die beiden Punkte P_1, P_2 zwischen den Punkten Q und Q'' liegen. Wir wollen jetzt *umgekehrt* von den beiden Punkten P_1 und P_2 als gegeben ausgehen und uns fragen, unter welchen Bedingungen wir die Kurve $P_1 P_0 P_2$ mit einem Feld von der angegebenen Art umgeben können.[2]) Es handelt sich also darum, ob wir den Punkt Q so wählen können, daß $P_0' < Q < P_1$, $P_2 < Q''$, und daß gleichzeitig die Gerade $\tilde{\theta}_0$ in den Eckenwinkel eintritt. Sobald dies der Fall ist, so brauchen wir nur eine Extremalenschar (8) mit dem Brennpunkt Q zu konstruieren (z. B. die Schar von Extremalen durch Q); diese Schar zusammen mit ihrer komplementären liefert dann nach dem vorigen ein Feld von gebrochenen Extremalen um die Kurve $P_1 P_0 P_2$.

[1]) Um einen arithmetisch strengen Beweis zu erhalten, wären hier noch mancherlei Einzelheiten zu beweisen, auf die wir jedoch nicht eingehen.

[2]) Immer unter Festhaltung der Voraussetzungen (II') und (III') von § 48, b).

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden, wobei P_1'' den dem Punkt P_1 auf $\mathfrak{E}_0$ konjugierten Punkt bezeichnet. (Man vergleiche Fig. 75 bis 78):

Fall I: $\Omega_0 > 0$,

A) $P_0' \prec P_1 \overline{\overline{\prec}} E_0$, also $\bar{E}_0 \prec P_1'' \overline{\overline{\prec}} \bar{P}_0'$.

Alsdann ist für die Möglichkeit der Konstruktion eines Feldes der gegebenen Art offenbar notwendig, daß

$$P_0 \prec P_2 \prec P_1'',$$

da ja aus $Q \prec P_1$ folgt: $Q'' \prec P_1''$. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend; denn wir können dann Q so nahe bei P_1 wählen, daß $P_2 \prec Q''$.

B) $E_0 \prec P_1 \prec P_0$.

Dann lautet die Bedingung für P_2

$$P_0 \prec P_2 \prec \bar{P}_0'.$$

Denn wir können dann den Punkt Q zwischen P_0' und E_0 so nahe an E_0 wählen, daß $P_2 \prec Q'' \prec \bar{P}_0'$.

Fall II: $\Omega_0 < 0$.

A) $P_{0\mathfrak{N}}' \prec P_1 \prec E_0$.

Hier ist es *nicht möglich*, ein Feld der gewünschten Art zu konstruieren; denn für jede Lage von Q zwischen P_0' und P_1 liegt die Gerade $\tilde{\theta}_0$ außerhalb des Eckenwinkels.

B) $E_0 \prec P_1 \prec P_0$, also $P_0 \prec P_1'' \prec \bar{E}_0$.

Hier lautet die Bedingung für P_2:

$$P_0 \prec P_2 \prec P_1''.$$

b) **Der Weierstraß'sche Fundamentalsatz für ein Feld von gebrochenen Extremalen:**[1])

Wir nehmen jetzt an, unsere Kurve $P_1 P_0 P_2$ lasse sich mit einem Feld von gebrochenen Extremalen $\mathfrak{H} + \bar{\mathfrak{H}}$ umgeben, wobei wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, daß die Schar (8) aus den durch den Punkt Q gehenden Extremalen gebildet ist. Wir definieren dann das zugehörige *Feld-Integral* genau wie in § 31, b): Ist $P_3(x, y)$ irgend ein Punkt des Feldes, so geht durch ihn eine und nur eine Feldextremale, gebrochen oder nicht, je nachdem P_3 in $\bar{\mathfrak{H}}$ oder in $\mathfrak{H}$ liegt.

[1]) Im wesentlichen nach Caratheodory, loc. cit.

Das Integral J, genommen entlang dieser Extremalen vom Punkt Q — den wir in der folgenden Untersuchung mit P_4 bezeichnen — bis zum Punkt P_3, ist dann das Feldintegral, das wir wieder mit $W(x,y)$ oder $u(t,a)$ bezeichnen, je nachdem wir x,y oder t,a als die unabhängigen Variabeln betrachten, wobei t,a das Bild des Punktes P_3 in der t,a-Ebene bedeutet.

Dann folgt aus den in § 49, c) über die Funktion $u(t,a)$ erhaltenen Resultaten unmittelbar, daß *die Hamilton'schen Formeln* (148) *von § 31 auch im Fall eines Feldes von gebrochenen Extremalen bestehen bleiben.*

Daraus folgt aber weiter: *Auch der Weierstraß'sche Fundamentalsatz behält seine Gültigkeit für ein Feld von gebrochenen Extremalen,* da derselbe eine unmittelbare Folge der Hamilton'schen Formeln ist (§ 32, a)).

Bei der Anwendung des Satzes tritt aber eine Schwierigkeit auf, die bei einem Feld von kontinuierlichen Extremalen kein Analogon hat: Wie wir in § 48, c) gesehen haben, verschwindet die $\mathcal{E}$-Funktion im Punkt P_0 außerordentlich, wenn nämlich für p,q und $\bar{p},\bar{q}$ die Richtungskosinus der beiden zur Ecke P_0 gehörigen Fortschreitungsrichtungen $\theta_0, \bar{\theta}_0$ eingesetzt werden. Die Weierstraß'sche Bedingung kann also gar nicht für den ganzen Bogen $P_1P_0P_2$ in der stärkeren Form (IV') von § 32, b) erfüllt sein, da dies sicher im Punkt P_0 nicht der Fall ist. Ebenso verschwindet die $\mathcal{E}$-Funktion in jedem Punkt der Eckenkurve außerordentlich. Aus diesem Grunde läßt sich auch das Endresultat, soweit es sich auf die Weierstraß'sche Bedingung bezieht, nicht so einfach aussprechen, wie im Fall einer kontinuierlichen Lösung.

Wir fassen zusammen:

Es sei $P_1P_0P_2$ eine gebrochene Extremale, so daß also im Punkt P_0 die Weierstraß'sche Eckenbedingung (2) erfüllt ist. Ferner sei entlang $P_1P_0P_2$ die Legendre'sche Bedingung in der stärkeren Form

$$F_1 > 0, \quad resp. \quad \bar{F}_1 > 0 \tag{II'}$$

erfüllt, und es sei im Punkt P_0:

$$\Omega_0 \neq 0, \tag{12}$$

$$\sin(\bar{\theta}_0 - \theta_0) \neq 0. \tag{23}$$

Endlich werde über die Lage der beiden Endpunkte P_1, P_2 auf den Extremalen $\mathfrak{E}_0$ und $\bar{\mathfrak{E}}_0$ vorausgesetzt, daß

$$E_0 \prec P_1 \prec P_0, \qquad P_0 \prec P_2 \prec P_1'' \tag{35}$$

sei. Daraus folgt dann, daß die Kurve $P_1 P_0 P_2$ sich mit einem Feld von gebrochenen Extremalen umgeben läßt.

Wenn alsdann die Weierstraß'sche Bedingung entlang allen Extremalen des Feldes in der stärkeren Form (IV') erfüllt ist (mit Ausnahme der Punkte der Eckenkurve), so liefert die gebrochene Extremale $P_1 P_0 P_2$ für das Integral J ein starkes, eigentliches[1]) *Minimum.*

c) **Beziehungen zwischen der Größe Ω_0 und der $\mathcal{E}$-Funktion**[2]):

Nach den Resultaten von § 50, a) scheint es, als ob im Fall $\Omega_0 > 0$ auch dann noch ein Minimum eintreten müßte, wenn die Punkte P_1 und P_2 statt den Ungleichungen (35) den weniger starken Einschränkungen

$$P_0' \prec P_1 \prec E_0, \qquad P_0 \prec P_2 \prec P_1'',$$

oder

$$E_0 \prec P_1 \prec P_0, \qquad P_0 \prec P_2 \prec \bar{P}_0'$$

unterworfen werden.

Dies steht aber in direktem Widerspruch mit den früher als notwendig nachgewiesenen Bedingungen (29) und (30). Der Widerspruch löst sich dadurch, daß die Voraussetzung $\Omega_0 > 0$ mit der Weierstraßschen Bedingung (IV) unvereinbar ist, wie sich aus der folgenden Beziehung zwischen der Größe Ω_0 und der $\mathcal{E}$-Funktion ergibt:

Der Einfachheit halber sei die Extremale $\mathfrak{E}_0$ durch die Bogenlänge s als Parameter dargestellt

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = x(s), \qquad y = y(s).$$

Führt man jetzt in die $\mathcal{E}$-Funktion für die beiden ersten Argumentenpaare: $x(s)$, $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$ ein und setzt zur Abkürzung

$$\mathcal{E}(x(s), y(s); x'(s), y'(s); \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) = \mathcal{E}(s, \tilde{\theta}),$$

so folgt durch Differentiation nach s, bei Benutzung der Definitionsgleichung (120) von § 30 für die $\mathcal{E}$-Funktion und der Differentialgleichungen der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ in der Form (20) von § 26:

$$\mathcal{E}_s(s, \tilde{\theta}) = x'(s)\tilde{F}_x + y'(s)\tilde{F}_y - \cos\tilde{\theta}F_x - \sin\tilde{\theta}F_y,$$

wobei die Argumente von F_x, F_y sind: $x(s), y(s), x'(s), y'(s)$, diejenigen von $\tilde{F}_x, \tilde{F}_y$: $x(s), y(s), \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}$.

Für den Punkt P_0 folgt hieraus die wichtige von Dresden herrührende *Relation zwischen der Größe Ω_0 und der $\mathcal{E}$-Funktion:*

$$\Omega_0 = \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}(x(s), y(s); x'(s), y'(s); \cos\bar{\theta}_0, \sin\bar{\theta}_0)\Big|^{s=s_0}. \tag{36}$$

[1]) Vgl. Carathéodory, Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 480.
[2]) Nach Dresden, loc. cit. p. 485.

Nun ist nach (3): $\mathcal{E}(s_0, \bar{\theta}_0) = 0$; ist daher h eine kleine positive Größe, so ist

$$\mathcal{E}(s_0 - h, \bar{\theta}_0) = -\Omega_0 h + h(h);$$

also schließen wir: *Wenn auf dem Bogen $P_1 P_0$ die Weierstraß'sche Bedingung (IV) für ein Minimum erfüllt ist, so muß*

$$\Omega_0 \gtrless 0$$

sein.

Zugleich ergibt sich aus der Gleichung (36) ein einfacher Beweis[1]) des folgenden Satzes von CARATHEODORY:

Hört eine kontinuierliche Extremale $\mathfrak{E}_0$ in einem Punkt P_0 auf stark zu sein, so gibt es eine durch den Punkt P_0 gehende Richtung $\bar{\theta}_0$, welche zusammen mit der Tangentenrichtung θ_0 der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ der Weierstraß'schen Eckenbedingung genügt.

Denn unsere Voraussetzung sagt aus, daß

$$\mathcal{E}_1(s_0 - h, \tilde{\theta}) > 0$$

für alle hinreichend kleinen positiven Werte von h und für beliebige Werte von $\tilde{\theta}$, daß diese Ungleichung aber nicht mehr für alle Werte von $\tilde{\theta}$ stattfindet für $h = 0$. Dabei ist die Funktion $\mathcal{E}_1(s, \tilde{\theta})$ aus der Funktion $\mathcal{E}_1$ von § 32, b) in derselben Weise abgeleitet wie $\mathcal{E}(s, \tilde{\theta})$ aus der $\mathcal{E}$-Funktion. Überdies wird angenommen, daß auch noch im Punkt P_0 die Legendre'sche Bedingung in der stärkeren Form $F_1 > 0$ erfüllt ist.

Nach dem Vorzeichensatz für stetige Funktionen schließt man dann aus dem ersten Teil unserer Voraussetzung, daß $\mathcal{E}_1(s_0, \tilde{\theta}) \gtrless 0$ sein muß für alle $\tilde{\theta}$; aus dem zweiten Teil derselben folgt daher, daß es mindestens eine wegen $F_1(s_0) > 0$ von θ_0 verschiedene Richtung $\bar{\theta}_0$ geben muß, für welche $\mathcal{E}_1(s_0, \bar{\theta}_0) = 0$; also ist auch: $\mathcal{E}(s_0, \bar{\theta}_0) = 0$.

Daher ist

$$\mathcal{E}(s_0 - h, \bar{\theta}_0 + k) = -\Omega_0 h + \mathcal{E}_{\tilde{\theta}}(s_0, \bar{\theta}_0) k + \alpha h + \beta k,$$

wo α und β mit h und k unendlich klein werden. Wäre nun: $\mathcal{E}_{\tilde{\theta}}(s_0, \bar{\theta}_0) \neq 0$, so könnte man $h > 0$ und k so wählen, daß: $\mathcal{E}(s_0 - h, \bar{\theta}_0 + k) < 0$ ausfallen würde, was gegen unsere Voraussetzung verstößt. Somit muß: $\mathcal{E}_{\tilde{\theta}}(s_0, \bar{\theta}_0) = 0$ sein, und damit ist nach (3) bewiesen, daß die beiden Richtungen θ_0, $\bar{\theta}_0$ in der Tat der Weierstraß'schen Eckenbedingung genügen.

[1]) Nach DRESDEN, loc. cit. p. 486.

Weiter folgt noch, daß, wenn $\Omega_0 \neq 0$, die $\mathcal{E}$-Funktion beim Durchgang durch den Punkt P_0 auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ stets ihr Zeichen wechselt.

d) Der Ausnahmefall $\Omega_0 = 0$:

Wenn $\Omega_0 = 0$, so können wir nicht mehr zu einer gegebenen Extremalenschar (8) in eindeutiger Weise eine komplementäre Schar konstruieren, und damit wird die Theorie der konjugierten Punkte hinfällig. Trotzdem lassen sich auch in diesem Fall hinreichende Bedingungen aufstellen.

Dazu betrachten wir allgemein (d. h. unabhängig von einer bestimmten Voraussetzung über Ω_0) die folgende Aufgabe, welche bei Carathéodory (loc. cit. § 6) den Ausgang der ganzen Untersuchung über Scharen gebrochener Extremalen bildet:

Für einen in der Nähe von P_0 gegebenen Punkt $P(x, y)$ zwei Richtungen θ, $\bar{\theta}$ zu bestimmen, welche der Weierstraß'schen Eckenbedingung (2a) genügen.

Man zeigt leicht mittels des Satzes über implizite Funktionen, daß die Aufgabe unter unsern Voraussetzungen stets eine eindeutige Lösung besitzt, vorausgesetzt, daß die Ungleichung (23) erfüllt ist. Die beiden Richtungen seien

$$\theta = \theta(x, y), \qquad \bar{\theta} = \bar{\theta}(x, y).$$

Man kann dann nach § 27, a) eine gebrochene Extremale konstruieren, welche im Punkt P ihre Ecke hat. Läßt man jetzt den Punkt P eine gegebene, durch den Punkt P_0 gehende Kurve $\mathfrak{C}$ beschreiben, so erhält man *eine einparametrige Schar von gebrochenen Extremalen, welche die Kurve $P_1 P_0 P_2$ enthält, und welche die gegebene Kurve $\mathfrak{C}$ zur Eckenkurve hat.* Man zeigt dann weiter, daß für diese Schar

$$\Delta(t_0, a_0) \neq 0, \qquad \bar{\Delta}(t_0, a_0) \neq 0,$$

vorausgesetzt daß die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt P_0 keinen der beiden Bogen $P_1 P_0, P_0 P_2$ berührt. Daraus folgt, daß die Schar von gebrochenen Extremalen mit der gegebenen Eckenkurve $\mathfrak{C}$ wenigstens für die Umgebung des Punktes P_0 ein Feld bildet. Für dieses gilt dann wieder der Weierstraß'sche Satz und die sich daran knüpfenden Folgerungen. Man beachte, daß es bei dieser Ableitung nicht nötig war, vorauszusetzen, daß $\Omega_0 \neq 0$.

Man kann sich nun weiter nach Carathéodory (loc. cit. § 8) die Aufgabe stellen, eine Kurve zu konstruieren, welche die Eigenschaft hat, daß in jedem ihrer Punkte die positive Tangentenrichtung mit der zu demselben Punkt gehörigen Richtung $\theta(x, y)$ übereinstimmt. Führt man die Bogenlänge als Parameter ein, so ist eine solche Kurve einfach durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\theta(x, y)), \qquad \frac{dy}{ds} = \sin(\theta(x, y)) \tag{37}$$

charakterisiert. Aus den Existenztheoremen über Differentialgleichungen folgt, daß man durch jeden Punkt in der Umgebung von P_0 eine und nur eine solche „*θ-Kurve*" konstruieren kann. Es gibt also eine einfach unendliche Schar solcher θ-Kurven.

Ebenso gibt es eine Schar von „$\bar\theta$-*Kurven*", deren positive Tangentenrichtung in jedem ihrer Punkte mit der zu demselben Punkt gehörigen Richtung $\bar\theta$ übereinstimmt.

Hieran knüpft sich die Frage[1]): *Unter welchen Bedingungen ist eine θ-Kurve zugleich eine Extremale?* Man findet als notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Funktion

$$\begin{aligned}\Omega(x,y) = {} & \cos\theta\, F_x(x,y,\cos\bar\theta,\sin\bar\theta) + \sin\theta\, F_y(x,y,\cos\bar\theta,\sin\bar\theta)\\ & - \cos\bar\theta\, F_x(x,y,\cos\theta,\sin\theta) - \sin\bar\theta\, F_y(x,y,\cos\theta,\sin\theta),\end{aligned} \tag{38}$$

in welcher θ, $\bar\theta$ durch die Funktionen $\theta(x,y)$, $\bar\theta(x,y)$ zu ersetzen sind, entlang der betreffenden θ-Kurve verschwindet.

Wenn eine Extremale mit einer θ-Kurve zusammenfällt, so ist jeder ihrer Punkte Ecke einer möglichen diskontinuierlichen Lösung, in direktem Gegensatz zu dem für den Fall $\Omega_0 \neq 0$ gefundenen Resultat (§ 49, a)). Von besonderem Interesse ist der Fall, wo $\Omega(x,y)$ identisch in x, y verschwindet. Alsdann ist jede θ-Kurve einerseits, und jede $\bar\theta$-Kurve andererseits zugleich Extremale. Man erhält also zwei bestimmte Extremalenscharen: die eine, mit der Schar der θ-Kurven identisch, enthält den Bogen P_1P_0, die andere, mit der Schar der $\bar\theta$-Kurven identisch, enthält den Bogen P_0P_2. Aus beiden kann man auf unendlich viele Arten Scharen gebrochener Extremalen zusammensetzen, indem man eine beliebige durch P_0 gehende Kurve $\mathfrak{C}$ als Eckenkurve wählt und durch jeden ihrer Punkte einerseits die θ-Kurve, andererseits die $\bar\theta$-Kurve zieht.

Beispiel XIX (Siehe p. 370).

In dem speziellen Fall, wo a eine Konstante, ist die Funktion

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{a\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'}$$

von x und y unabhängig, also ist hier $\Omega(x,y) \equiv 0$. Für die Lösung $P_1P_0P_2$ von Fig. 73 sind die beiden ausgezeichneten Extremalenscharen die beiden Scharen paralleler Geraden von der Amplitude β und $-\beta$. Brennpunkte sind hier nicht vorhanden. An der Indikatrix (Fig. 72) liest man ab, daß die Bedingungen (II') und (IV) entlang allen Extremalenscharen des Feldes erfüllt sind. Man erhält daher ein starkes, aber uneigentliches Minimum.[2])

§ 51. Diskontinuierliche Variationsprobleme.

Wir haben in den vorangegangenen Paragraphen diskontinuierliche Lösungen von kontinuierlichen Variationsproblemen betrachtet. Die mathematische Physik liefert jedoch auch Beispiele, bei welchen diskontinuierliche Lösungen dadurch entstehen, daß *das vorgelegte Variationsproblem selbst diskontinuierlich ist*, bei welchen also die Funktion

[1]) Vgl. Carathéodory, loc. cit. § 8.

[2]) Hierzu weiter die *Übungsaufgabe* Nr. 29 am Ende von Kap. IX.

$F(x, y, x', y')$ als Funktion ihrer vier Argumente in dem in Betracht kommenden Bereich Unstetigkeiten erleidet.

Dies tritt z. B. ein bei dem Problem der Brechung des Lichtes. Die Fortpflanzung des Lichtes in einem durchsichtigen Medium (oder einem System von solchen) von einem Punkt P_1 nach einem Punkt P_2 erfolgt in der kürzesten möglichen Zeit, d. h. also entlang derjenigen Kurve, welche das Integral[1])

$$J = \int_{t_1}^{t_2} n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

zu einem Minimum macht, wobei $n(x, y, z)$ den absoluten Brechungsexponenten des Mediums im Punkt x, y, z bedeutet.

Hat dabei der Lichtstrahl durch brechende Flächen zu passieren, so erleidet die Funktion $n(x, y, z)$ an diesen Flächen Unstetigkeiten, man hat es also in der Tat mit einem „diskontinuierlichen Variationsproblem" zu tun. Man hat dann das Integral J in eine Summe von Integralen zu zerlegen, entsprechend den verschiedenen Medien, durch welche der Lichtstrahl zu gehen hat. Ist die Funktion n von z unabhängig, und liegen die beiden Punkte P_1 und P_2 in der x, y-Ebene, so liegt auch die Bahn des Lichtes in der x, y-Ebene, und das Problem reduziert sich auf den einfachsten Typus.

Die Theorie solcher diskontinuierlichen Probleme ist von Bliss und Mason[2]) entwickelt worden, worüber hier noch kurz berichtet werden soll.

Das Problem wird folgendermaßen formuliert:

Unter allen Kurven, welche zwei auf entgegengesetzten Seiten einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ liegende Punkte P_1 und P_2 verbinden und die Kurve $\mathfrak{K}$ nur ein einziges Mal kreuzen, diejenige zu bestimmen, welche die Summe der beiden Integrale

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt,$$

$$\bar{J} = \int \bar{F}(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum macht, wobei das erste Integral vom Punkt P_1 bis zur Kurve $\mathfrak{K}$, das zweite von $\mathfrak{K}$ bis zum Punkt P_2 zu nehmen ist.

[1]) Vgl. die Übungsaufgabe Nr. 18 auf. p. 299 und die dort gegebenen Literaturnachweise.

[2]) Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 325. Kurze Andeutungen über diskontinuierliche Probleme hatte übrigens schon vorher Hilbert in seinen Vorlesungen (1904/5) gegeben; insbesondere rührt die Eckenbedingung (39) von Hilbert her.

Man zeigt zunächst in bekannter Weise, daß die gesuchte Kurve $P_1 P_0 P_2$, wobei P_0 den Schnittpunkt mit der Kurve $\mathfrak{K}$ bedeutet, aus einem Extremalenbogen $P_1 P_0$ für das Integral J und aus einem Extremalenbogen $P_0 P_2$ für das Integral $\bar{J}$ bestehen muß, und daß für jeden der beiden Bogen die Bedingungen von LEGENDRE, JACOBI und WEIERSTRASS erfüllt sein müssen. Wir setzen dieselben in der stärkeren Form (II'), (III'), (IV') voraus.

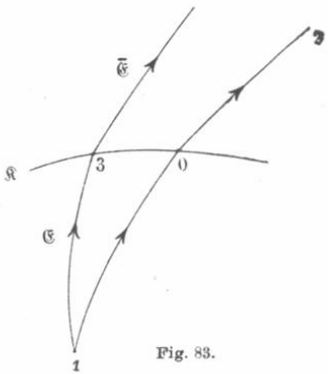


Fig. 83.

Weiter ergibt sich dann zur Bestimmung der Lage des Punktes P_0 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ eine Bedingung, die man am einfachsten daraus ableitet, daß die Funktion[1])

$$\mathfrak{F}(x_1, y_1, \tilde{x}(a), \tilde{y}(a)) + \bar{\mathfrak{F}}(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a), x_2, y_2)$$

als Funktion von a für $a = a_0$ ein Minimum besitzen muß, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ dargestellt ist durch die Gleichungen

$$\mathfrak{K}: \qquad x = \tilde{x}(a), \qquad y = \tilde{y}(a)$$

und dem Punkt P_0 der Wert $a = a_0$ entspricht. Nach den Formeln (18) von § 37 erhält man hieraus die *„Eckenbedingung"*

$$\begin{aligned} &F_{x'}(x_0, y_0, p_0, q_0)\tilde{p}_0 + F_{y'}(x_0, y_0, p_0, q_0)\tilde{q}_0 = \\ &\bar{F}_{x'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)\tilde{p}_0 + \bar{F}_{y'}(x_0, y_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)\tilde{q}_0; \end{aligned} \tag{39}$$

dabei bedeuten p_0, q_0; $\bar{p}_0, \bar{q}_0$; $\tilde{p}_0, \tilde{q}_0$ der Reihe nach die Richtungskosinus der positiven Tangente an die Kurven $P_1 P_0$; $P_0 P_2$; $\mathfrak{K}$ im Punkt P_0.

Es wird dann weiter die Extremalenschar (für das Integral J) durch den Punkt P_1 betrachtet. Ist $\mathfrak{E}$ eine dem Bogen $P_1 P_0$ benachbarte Extremale dieser Schar und P_3 ihr Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}$, so kann man stets von P_3 aus eine Extremale $\bar{\mathfrak{E}}$ (für das Integral $\bar{J}$) konstruieren, welche in P_3 mit $\mathfrak{E}$ die Eckenbedingung (39) erfüllt, vorausgesetzt, daß der Extremalenbogen $P_0 P_2$ die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_0 nicht berührt.

Man erhält so ganz ähnlich wie in § 49 eine zur Extremalenschar durch P_1 „komplementäre Extremalenschar", welche mit jener zusammen eine Schar von „gebrochenen Extremalen" bildet. Für diese letztere Schar gelten dann wieder die Formeln (144) und (146) von § 31 für die partiellen Ableitungen der Funktion $u(t, a)$, da die wegen der Unstetigkeit an der Kurve $\mathfrak{K}$ neu auftretenden Glieder sich infolge der Eckenbedingung (39) wegheben. Daraus folgt dann, daß einerseits

[1]) Vgl. § 37, b).

der Enveloppensatz von § 44, c) mit seinen Folgerungen auch hier bestehen bleibt und andererseits der Weierstraß'sche Fundamentalsatz mit seiner Anwendung auf die Herleitung hinreichender Bedingungen.[1])

§ 52. Randbedingungen bei Problemen mit Gebietseinschränkungen.

Bei unseren bisherigen Untersuchungen haben wir stets vorausgesetzt, daß die gesuchte Kurve ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ der x,y-Ebene liegen sollte, auf welchen die Vergleichskurven beschränkt waren.[2]) Es kann aber auch Lösungen unseres Variationsproblems geben, welche Punkte mit der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{R}$ gemein haben. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, diese Lösungen zu bestimmen; dabei wird sich zugleich eine neue Art von diskontinuierlichen Lösungen ergeben.

a) **Die Weierstraß'sche Randbedingung:**

Die hierzu nötigen Überlegungen gestalten sich besonders einfach für die Aufgabe, das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \tag{40}$$

unter den in § 3 aufgeführten Voraussetzungen zu einem Minimum zu machen.

Dabei ist es bequem, von der Vorstellung einer punktweisen Variation einer Kurve Gebrauch zu machen, welche in der älteren Variationsrechnung eine wichtige Rolle gespielt hat:

Zwischen zwei Kurven

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = y(x)$$

und

$$\mathfrak{E}: \qquad y = y(x) + \omega(x)$$

können wir eine ein-eindeutige Beziehung herstellen, indem wir je zwei Punkte mit derselben Abszisse x sich entsprechen lassen; und wir können uns vorstellen, daß die zweite Kurve aus der ersten durch eine stetige Deformation entstanden ist, bei welcher jeder einzelne Punkt sich nach einem bestimmten Gesetz entlang seiner Ordinate bewegt, z. B. indem wir in

$$y(x) + \alpha\omega(x)$$

den Parameter α von 0 bis 1 wachsen lassen.

[1]) Hierzu die *Übungsaufgabe* Nr. 32 am Ende von Kap. IX.

[2]) Vgl. § 3, a) und § 25, b), insbesondere die Bemerkungen auf pp. 16, 17.

Ein Punkt von $\mathfrak{E}_0$, dessen Abszisse x' ist, heißt *frei variierbar* in Beziehung auf ein vorgelegtes Variationsproblem, wenn $\omega(x')$ beliebige hinreichend kleine Werte annehmen darf; andernfalls heißt er *unfrei*.

Bei einer Kurve, welche ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt, sind beim Problem mit festen Endpunkten alle Punkte mit Ausnahme der Endpunkte frei variierbar; und diese freie Variierbarkeit war bei den Schlüssen von § 5 wesentlich. Anders verhält es sich bei einer Kurve, welche Punkte mit der Begrenzung von $\mathfrak{R}$ gemein hat. Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Begrenzung von $\mathfrak{R}$, auch „*Schranke*“ genannt, einen Bogen $\bar{\mathfrak{E}}$ enthält, welcher in der Form

$$\bar{\mathfrak{E}}: \qquad y = \bar{y}(x)$$

darstellbar und von der Klasse C'' ist. Dieser Bogen $\bar{\mathfrak{E}}$ soll selbst mit zu $\mathfrak{R}$ gehören, und ebenso mögen alle Punkte, welche über[1]) der Kurve $\bar{\mathfrak{E}}$ und in einer gewissen Umgebung von $\bar{\mathfrak{E}}$ liegen, zu $\mathfrak{R}$ gehören. Wenn dann die Kurve $\mathfrak{E}_0$ einen Punkt mit $\bar{\mathfrak{E}}$ gemein hat, so ist die Variation dieses Punktes nicht mehr frei, sondern der Bedingung

$$\omega(x) \gtreqless 0$$

unterworfen.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir jetzt annehmen, die Kurve $\mathfrak{E}_0$, welche das Integral J zu einem Minimum macht, setze sich aus drei Stücken zusammen: aus zwei Bogen P_1P_3, P_4P_2, welche, abgesehen von den Punkten P_3 und P_4, ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegen, und aus dem Segment P_3P_4 der Begrenzung $\bar{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{R}$.

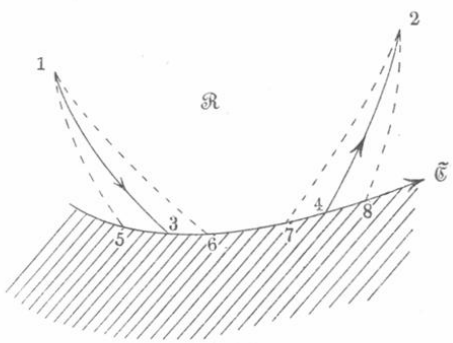


Fig. 84.

Dann zeigt zunächst die schon in § 48, a) benutzte Methode der partiellen Variation, daß die beiden „freien“ Bogen P_1P_3 und P_4P_2 Extremalen sein müssen.

Sodann betrachten wir eine zulässige Variation von der speziellen Form

$$y = y(x) + \varepsilon\eta(x),$$

bei welcher die beiden Bogen P_1P_3 und P_4P_2 ungeändert bleiben und nur das Stück P_3P_4 variiert wird. Die Funktion $\eta(x)$ ist daher

[1]) Ein Punkt x, y liegt „über“ dem Bogen $\bar{\mathfrak{E}}$, wenn $y > \bar{y}(x)$.

identisch Null in $[x_1 x_3]$ und $[x_4 x_2]$, während in $[x_3 x_4]$ nach der oben gemachten Bemerkung: $\varepsilon\eta(x) \gtrless 0$ sein muß. Die Funktion $\eta(x)$ darf also in $[x_3 x_4]$ ihr Zeichen nicht wechseln; wählen wir: $\eta(x) \lessgtr 0$, so darf somit die Konstante ε nur positive Werte annehmen. Daher können wir jetzt aus der Ungleichung[1])

$$\Delta J \equiv \varepsilon[J'(0) + (\varepsilon)] \lessgtr 0$$

nicht mehr schließen: $J'(0) = 0$, sondern nur: $J'(0) \lessgtr 0$.

Nach Ausführung der partiellen Integration von § 5, a) erhalten wir daher

$$\int_{x_3}^{x_4} \eta\left(\tilde{f}_y - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'}\right) dx \gtrless 0, \tag{41}$$

wobei die Argumente von $\tilde{f}_y, \tilde{f}_{y'}$ sind $x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)$. Diese Ungleichung muß erfüllt sein für alle Funktionen η der Klasse C', welche in x_3 und x_4 verschwinden und überdies der Bedingung

$$\eta \lessgtr 0$$

genügen.

Die in § 5, b) zum Beweis des Fundamentallemmas der Variationsrechnung angewandte Schlußweise führt jetzt zu dem Satz:

Wenn die Kurve, welche das Integral (40) *zu einem Minimum macht, ein Segment $P_3 P_4$ mit der Begrenzung $\mathfrak{C}$ des Bereiches $\mathfrak{R}$ gemein hat, dann muß entlang diesem Segment die Bedingung erfüllt sein*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_y - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'} \gtrless 0, \text{ wenn } \mathfrak{R} \text{ über } P_3 P_4 \text{ liegt,} \\ &\tilde{f}_y - \frac{d}{dx}\tilde{f}_{y'} \lessgtr 0, \text{ wenn } \mathfrak{R} \text{ unter } P_3 P_4 \text{ liegt.} \end{aligned} \tag{42}$$

Das erhaltene Resultat läßt sich nun unmittelbar auf den Fall übertragen[2]), wo das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt \tag{43}$$

zu einem Minimum zu machen ist, und wo sowohl die zulässigen Kurven als die Kurve $\mathfrak{C}$ in Parameterdarstellung gegeben sind.

Denn ist P irgendein Punkt des Bogens $P_3 P_4$, so kann man stets durch eine Drehung des Koordinatensystems erreichen, daß im Punkt P: $x' > 0$. Dann läßt sich die Kurve $\mathfrak{C}$ in der Umgebung von P in der Form $y = \tilde{y}(x)$ darstellen, und man kommt auf das

[1]) In der Bezeichnung von p. 20; vgl. Gleichung (21) auf p. 21.
[2]) Vgl. die Bemerkungen am Ende von § 25, e).

frühere Problem zurück. Es muß daher im Punkt P die Ungleichung (42) erfüllt sein, aus welcher mit Hilfe der Gleichungen (16) und (23) des fünften Kapitels *die Weierstraß'sche Randbedingung*[1]) *für ein Minimum für den Fall der Parameterdarstellung* folgt:

$$\tilde{T} \gtreqless 0 \,(\leqq 0), \tag{44}$$

wenn der Bereich $\mathfrak{R}$ zur Linken (Rechten) des Bogens P_3P_4 liegt; dabei bedeutet $\tilde{T}$ den Ausdruck (23a) von § 26, berechnet für die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$.

Wenn entlang dem Bogen P_3P_4 der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ die Funktion F_1 positiv ist, so gestattet das vorangegangene Resultat eine einfache *geometrische Deutung:* Alsdann können wir nämlich nach § 27, a) durch jeden Punkt P von P_3P_4 eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}$ konstruieren, welche die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ in P gleichsinnig[2]) berührt. Führen wir dann in den Ausdruck für $\tilde{T}$ die Krümmung $1/\tilde{r}$ von $\tilde{\mathfrak{C}}$ im Punkt P ein und bezeichnen mit $1/r$ die Krümmung der Extremalen $\mathfrak{E}$ im Punkt P, so können wir unter Benutzung von Gleichung (23b) von § 26 die Bedingung (44) auch schreiben:

$$\frac{1}{r} \gtreqless \frac{1}{\tilde{r}} \left(\lesseqgtr \frac{1}{\tilde{r}}\right). \tag{45}$$

Für den Fall, wo $\mathfrak{R}$ zur Linken des Bogens P_3P_4 liegt, folgt hieraus:

Wenn: $\tilde{r} > 0$, d. h. wenn der Vektor vom Punkt P nach dem Krümmungsmittelpunkt $\tilde{M}$ von $\tilde{\mathfrak{C}}$ zur Linken[3]) der positiven Tangente an $\tilde{\mathfrak{C}}$ in P liegt, so muß auch r positiv sein, und der Krümmungsmittelpunkt M der Extremalen $\mathfrak{E}$ muß zwischen P und $\tilde{M}$ liegen (oder mit $\tilde{M}$ zusammenfallen). (Fig. 85).

Wenn dagegen: $\tilde{r} < 0$, d. h. wenn der Vektor $P\tilde{M}$ rechts von der positiven Tangente liegt, so muß M entweder (Fig. 86) auf der

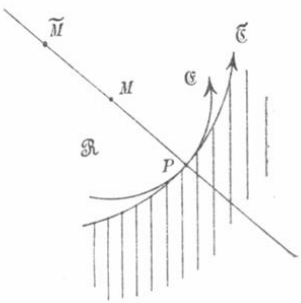


Fig. 85.

[1]) Von Weierstrass direkt für den Fall der Parameterdarstellung abgeleitet, *Vorlesungen* 1879; vgl. Kneser, *Lehrbuch* p. 177 und Bolza, *Lectures*, § 29, a). Zum obigen Beweis beachte man noch, daß nach Gleichung (39) von § 45 die Größe T bei einer Drehung des Koordinatensystems invariant bleibt.

[2]) D. h. so, daß die positiven Tangenten beider Kurven zusammenfallen.

[3]) Vgl. p. 192.

entgegengesetzten Seite der Tangente liegen wie M (wenn nämlich $r > 0$), oder aber (Fig. 87) auf derselben Seite, aber jenseits $\tilde{M}$ (oder mit $\tilde{M}$ zusammenfallen).

In allen Fällen muß also die Extremale $\mathfrak{E}$ in der Umgebung des Punktes P ganz im Bereich $\mathfrak{R}$ liegen, ein Resultat, das sich nach den Existenztheoremen von § 33 a priori erwarten läßt.

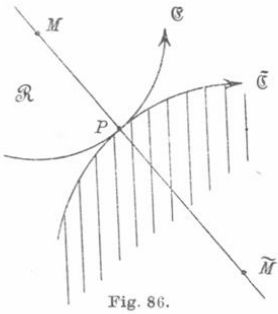


Fig. 86.

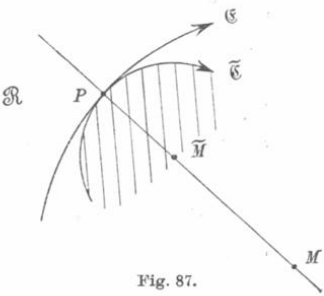


Fig. 87.

Im Fall des Maximums (statt Minimums) sind die Zeichen $\gtrless$ in $\lessgtr$ umzukehren.

b) **Die Weierstraß'sche Bedingung in den Übergangspunkten:**

Neben der Bedingung (44), die entlang dem Bogen $P_3 P_4$ erfüllt sein muß, ergibt sich aus der Betrachtung der ersten Variation noch je eine Bedingung für die Punkte P_3 und P_4, in welchen die gesuchte Kurve die Begrenzung $\bar{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{R}$ trifft, resp. verläßt.

Die Grenzkurve $\bar{\mathfrak{E}}$ sei durch die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{E}}: \qquad x = \tilde{x}(a), \quad y = \tilde{y}(a), \quad A_3 \leqq a \leqq A_4$$

dargestellt und in ihrer ganzen Ausdehnung von der Klasse C''. Die Punkte P_3 und P_4 mögen den Werten $a = a_3$ und $a = a_4$ entsprechen, und es sei

$$A_3 < a_3 < a_4 < A_4.$$

Um die Bedingungen in P_3 zu erhalten, beachten wir, daß die Funktion

$$\Im(x_1, y_1, \tilde{x}(a), \tilde{y}(a)) + \int_a^{a_4} F(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \tilde{x}'(a), \tilde{y}'(a))\, da$$

für $a = a_3$ ein Minimum besitzen muß, was auf Grund der Formeln (18) von § 37 sofort zu der *Weierstraß'schen Bedingung*[1]) führt:

Im Übergangspunkt P_3 muß die Bedingung

$$\mathfrak{E}(x_3, y_3;\ p_3, q_3;\ \tilde{p}_3, \tilde{q}_3) = 0 \tag{46}$$

erfüllt sein, wobei p_3, q_3 und $\tilde{p}_3, \tilde{q}_3$ die Richtungskosinus der positiven Tangenten im Punkt P_3 an die Extremale $P_1 P_3$, beziehungsweise an die Kurve $\bar{\mathfrak{E}}$ bedeuten.

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen*, 1879. Vgl. die *Übungsaufgabe* Nr. 33 am Ende von Kap. IX.

Wendet man dasselbe Verfahren auf den Punkt P_4 an, so erhält man das Resultat, daß *im Punkt P_4 die analoge Bedingung*

$$\mathfrak{G}(x_4, y_4;\ p_4, q_4;\ \tilde{p}_4, \tilde{q}_4) = 0 \tag{47}$$

erfüllt sein muß, wobei p_4, q_4 und $\tilde{p}_4, \tilde{q}_4$ die Richtungskosinus der positiven Tangenten im Punkt P_4 an die Extremale $P_4 P_2$, beziehungsweise an die Kurve $\mathfrak{C}$ bedeuten.

In dem besonderen Fall, wo das Problem entlang der Grenzkurve $\mathfrak{C}$ „regulär“[1]) ist, folgt aus Gleichung (125) von § 30, daß die beiden Gleichungen (46) und (47) nur erfüllt sein können, wenn

$$\tilde{p}_3 = p_3,\ \tilde{q}_3 = q_3;\quad \tilde{p}_4 = p_4,\ \tilde{q}_4 = q_4;$$

das heißt aber: *Bei einem entlang der Grenzkurve $\mathfrak{C}$ regulären Problem müssen die beiden Extremalenbogen $P_1 P_3$ und $P_4 P_2$ die Grenzkurve $\mathfrak{C}$ im Punkte P_3, beziehungsweise P_4 gleichsinnig berühren.*[2])

Beispiel[3]) *XX:*

In der x, y-Ebene sei eine einfache, geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ von der Klasse C'' gegeben, und zwei Punkte P_1 und P_2, deren Verbindungsgerade die Kurve $\mathfrak{C}$ schneidet. Unter allen Kurven, welche die beiden Punkte P_1 und P_2 verbinden

---

[1]) Vgl. § 27, a).

[2]) Weierstrass behandelt auch den Fall, wo die gesuchte Kurve der Bedingung unterworfen wird, mit der Begrenzung $\mathfrak{C}$ nur einen einzigen, nicht vorgegebenen Punkt P_0 gemein zu haben. Durch ein dem obigen ganz analoges Verfahren (siehe Fig. 88) findet man leicht, daß im Punkt P_0 die Bedingung

$$\mathfrak{G}(x_0, y_0;\ p_0, q_0;\ \tilde{p}_0, \tilde{q}_0) = \mathfrak{G}(x_0, y_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ \tilde{p}_0, \tilde{q}_0) \tag{48}$$

erfüllt sein muß, wenn $p_0, q_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ \tilde{p}_0, \tilde{q}_0$ der Reihe nach die Richtungskosinus der positiven Tangenten der Kurven $P_1 P_0$, $P_0 P_2$, $\mathfrak{C}$ im Punkt P_0 bedeuten.

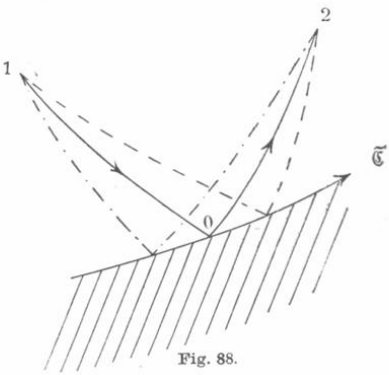


Fig. 88.

Weierstrass selbst gibt die Bedingung in der folgenden Form, die sich leicht aus (48) ableiten läßt:

$$\sin \delta_0 : \sin \bar{\delta}_0 = \mathfrak{E}(x_0, y_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0;\ p_0, q_0) : \mathfrak{E}(x_0, y_0;\ p_0, q_0;\ \bar{p}_0, \bar{q}_0), \tag{49}$$

wenn $\delta_0, \bar{\delta}_0$ die numerischen Werte der Winkel bedeuten, welche die beiden Richtungen p_0, q_0, resp. $\bar{p}_0, \bar{q}_0$ mit der Richtung $\tilde{p}_0, \tilde{q}_0$ bilden, so gemessen, daß beide Winkel $\lessgtr \pi$. Vgl. Kneser, *Lehrbuch*, p. 173; Bolza, *Lectures*, pp. 151, 267; Hancock, *Lectures*, pp. 241—243.

[3]) Vgl. Kneser, *Lehrbuch*, p. 178.

und nicht in das Innere $\mathfrak{S}$ der geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$ eindringen, die kürzeste zu finden.

Hier ist $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Der Bereich $\mathfrak{R}$ besteht hier aus der ganzen Ebene mit Ausschluß des Bereiches $\mathfrak{S}$. Die gesuchte Kurve muß aus geradlinigen Segmenten und aus Segmenten der Kurve $\mathfrak{C}$ bestehen. Die letzteren dürfen *nicht konkav nach außen* sein, da im gegenwärtigen Fall $\frac{1}{r} = 0$ und somit die Bedingung (45) lautet: $\frac{1}{\bar{r}} \lessgtr 0$ oder $\frac{1}{\bar{r}} \gtrless 0$, je nachdem der Bereich $\mathfrak{R}$ zur Linken oder Rechten des betreffenden Segmentes liegt.

Da das Problem regulär ist, so müssen die geradlinigen Segmente die Kurve $\mathfrak{C}$ in den Übergangspunkten berühren.

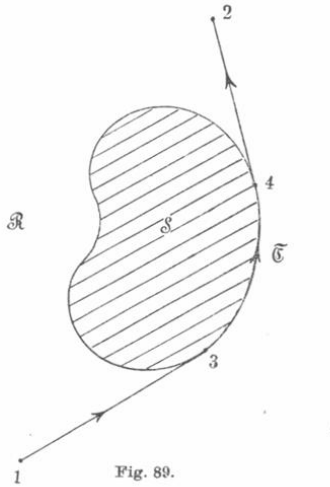


Fig. 89.

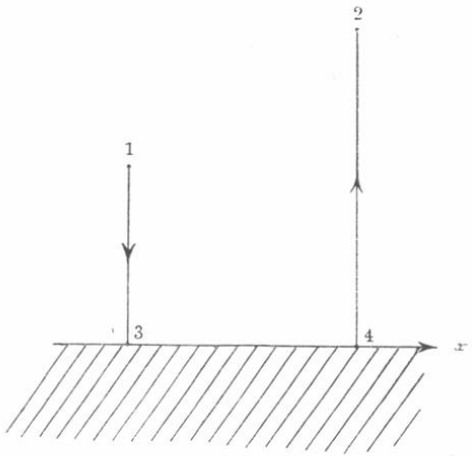


Fig. 90.

Beispiel I: (Siehe pp. 1, 33, 79) $F = y\sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Der Bereich $\mathfrak{R}$ ist die obere Halb-Ebene: $y \gtrless 0$; die Grenzkurve also die x-Achse. Die zulässigen Kurven sind die Gesamtheit aller gewöhnlichen Kurven, die in diesem Bereich von P_1 nach P_2 gezogen werden können. Bei der Behandlung des Problems in Parameterdarstellung treten außer den schon früher gefundenen Kettenlinien

$$y = \alpha \operatorname{Ch} \frac{x - \beta}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

als weitere Extremalen noch die Geraden

$$x = \text{konst}$$

auf.

Da die Kettenlinien die x-Achse nie treffen, so ist die einzige mögliche Lösung, welche ein Segment der x-Achse enthält, die aus den Ordinaten P_1P_3, P_4P_2 der beiden Punkte P_1, P_2 und dem sie verbindenden Segment P_3P_4 der x-Achse zusammengesetzte Kurve. Da entlang der x-Achse

$$\tilde{T} = -1,$$

so ist die Bedingung (44) für das Segment $P_3 P_4$ erfüllt; und da

$$\mathfrak{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) = (1 - \cos(\tilde{\theta} - \theta))\, y,$$

so sind auch die Bedingungen (46) und (47) in den Übergangspunkten P_3 und P_4 erfüllt.

Diese diskontinuierliche Lösung ist zuerst von Goldschmidt[1]) bemerkt worden (1831). Todhunter[2]) hat bewiesen, daß *die gebrochene Linie* $P_1 P_3 P_4 P_2$ *stets ein starkes relatives Minimum* liefert. Nimmt man nämlich auf der Geraden $P_1 P_3$ einen Punkt P an und schneidet dann auf einer beliebigen von P_1 ausgehenden rektifizierbaren Kurve einen Bogen $P_1 Q$ gleich $|P_1 P|$ ab, so ist, wie man leicht zeigt, die Ordinate MQ des Punktes Q größer als $P_3 P$, es sei denn, daß der Bogen $P_1 Q$ mit dem geraden Segment $P_1 P$ identisch ist.

Daraus folgt: *Ist* $\overline{\mathfrak{C}}$ *irgend eine von der Goldschmidt'schen Lösung verschiedene zulässige Kurve von* P_1 *nach* P_2, *deren Länge* $\overline{\geqq} |P_3 P_1| + |P_4 P_2|$, *so liefert die Goldschmidt'sche Lösung einen kleineren Wert für das Integral* J, *als die Kurve* $\overline{\mathfrak{C}}$.

Zum Beweis schneide man auf der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von P_1 aus einen Bogen $P_1 Q_1$ gleich $|P_1 P_3|$ und von P_2 aus einen Bogen $P_2 Q_2$ gleich $|P_2 P_4|$ ab und wende das obige Lemma an.

Schließlich kann man leicht eine Umgebung der diskontinuierlichen Lösung $P_1 P_3 P_4 P_2$ angeben, derart, daß für alle in derselben verlaufenden zulässigen Kurven die obige Ungleichung für die Länge erfüllt ist, womit bewiesen ist, daß die Goldschmidt'sche Lösung in der Tat stets ein relatives Minimum für das Integral J liefert.

Die diskontinuierliche Lösung liefert eine wichtige Ergänzung unserer früheren Resultate über kontinuierliche Lösungen (p. 81). Bezeichnen wir nämlich mit I und II dieselben beiden Bereiche wie auf p. 81 (siehe Fig. 12), so haben wir früher gesehen, daß nach einem Punkt P_2 im Innern des Bereiches II keine Kettenlinie mit der x-Achse als Direktrix gezogen werden kann. Hier ist also die diskontinuierliche Lösung die einzige mögliche Lösung. Dasselbe gilt, wenn der Punkt P_2 auf der Enveloppe $\mathfrak{H}$ liegt, da die Kettenlinie $P_1 P_2$ nach § 47, d) kein Minimum liefert.

Liegt dagegen der Punkt P_2 im Innern von I, so haben wir zwei Lösungen, welche jede ein relatives Minimum liefert: eine Kettenlinie und die diskontinuierliche Lösung.

Mit diesen beiden Lösungen sind zugleich alle möglichen Lösungen des Problems, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

zu einem relativen Minimum zu machen, erschöpft, wenn wir die trivialen Fälle:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

[1]) Siehe das Zitat auf p. 81, Fußnote [2]).

[2]) *Researches in the Calculus of Variations*, p. 60, vgl. auch Mary E. Sinclair, Annals of Mathematics (2) Bd. IX, p. 151.

beiseite lassen. Denn jede Lösung muß sich zusammensetzen aus einer endlichen Anzahl von Kettenlinienbogen, von geraden Segmenten parallel der y-Achse und von Segmenten der x-Achse. Ecken können nach § 48, c), Zusatz I, im Innern der oberen Halbebene nicht auftreten. Eine einfache Überlegung zeigt dann, daß die beiden gefundenen Lösungen die einzig möglichen Kombinationen darstellen.

Wir werden später[1]) zeigen, daß eine der beiden Lösungen stets zugleich auch das absolute Minimum für das Integral J liefert.[2])

§ 53. Hinreichende Bedingungen bei Lösungen, welche Segmente der Grenzkurve enthalten.

Wir nehmen an, wir hätten eine Kurve $P_1P_3P_4P_2$ gefunden, welche den bisher als notwendig erkannten Bedingungen genügt, d. h. also:

1. Die Bogen P_1P_3 und P_4P_2 sind Extremalen, welche für sich betrachtet den für ein Minimum bei festen Endpunkten notwendigen Bedingungen (II), (III), (IV) genügen;

2. entlang dem Bogen P_3P_4 der Grenzkurve ist die Bedingung (44) erfüllt;

3. in den Übergangspunkten P_3 und P_4 sind die Bedingungen (46) und (47) erfüllt.

Überdies möge der Kurvenzug $P_1P_3P_4P_2$ keine mehrfachen Punkte besitzen. Der Bereich $\mathfrak{R}$ möge, um die Ideen zu fixieren, zur Linken des Bogens P_3P_4 liegen.

Bliss[3]) hat gezeigt, daß *für reguläre Probleme diese Bedingungen auch hinreichend sind für ein Minimum des Integrals J, wofern sie dahin verschärft werden, daß (III) durch (III') und die Bedingung (44) durch*

$$\tilde{T} < 0 \tag{50}$$

ersetzt werden.

Da das Problem als regulär vorausgesetzt wird, also $F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0$ für jedes γ im ganzen Bereich $\mathfrak{R}$, so müssen nach § 52, b) die Extremalenbogen P_1P_3 und P_4P_2 in den Punkten P_3 und P_4 die Grenzkurve $\mathfrak{C}$ gleichsinnig berühren.

Da überdies insbesondere

$$F_1 > 0 \text{ entlang } \mathfrak{C}, \tag{51}$$

[1]) Vgl. § 57, e).

[2]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 33—40 am Ende von Kap. IX.

[3]) Transactions of the American Mathematical Society, Bd. V (1904) p. 477.

so können wir nach § 52, a) die Bedingung (50) auch schreiben

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} > 0. \tag{52}$$

Der Beweis von Bliss, bei dessen Darstellung[1]) wir übrigens hier nicht auf alle Einzelheiten eingehen können, gründet sich einerseits auf die Konstruktion eines zusammengesetzten Feldes, das aus der Schar von Extremalen durch einen Punkt P_0 auf der Fortsetzung des Bogens P_1P_3 über P_1 hinaus und aus der Schar von Extremalen, welche den Bogen P_3P_4 berühren, gebildet wird, andererseits auf die Ausdehnung des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes auf ein solches Feld.

a) **Die Schar von Extremalen, welche die Grenzkurve berühren:** Aus der Ungleichung (51) folgt nach § 27, a), daß wir durch jeden Punkt $P(a)$ der Grenzkurve

$$\tilde{\mathfrak{C}}: \qquad x = \tilde{x}(a), \qquad y = \tilde{y}(a), \qquad A_3 \leqq a \leqq A_4$$

eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_a$ konstruieren können, welche die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ im Punkt P gleichsinnig berührt. Wir können den analytischen Ausdruck derselben sofort mit Hilfe der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ von § 27, b) hinschreiben, nämlich

$$x = \mathfrak{X}(t; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \tilde{\theta}(a)) \equiv \varphi(t, a), \quad y = \mathfrak{Y}(t; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \tilde{\theta}(a)) \equiv \psi(t, a). \tag{53}$$

Dabei bedeutet t die Bogenlänge der Extremalen $\mathfrak{E}_a$, gemessen vom Punkt P an, und $\tilde{\theta}(a)$ den Tangentenwinkel der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ im Punkt P, so normiert[2]), daß $\tilde{\theta}(a)$ eindeutig und stetig ist entlang $\tilde{\mathfrak{C}}$. Aus den Existenztheoremen über Differentialgleichungen folgt, daß sich eine positive, von a unabhängige[3]) Größe l angeben läßt derart, daß die Extremale $\mathfrak{E}_a$ mindestens im Intervall: $|t| \leqq l$ existiert.

Lassen wir a variieren, so erhalten wir so eine Schar von Extremalen, welche die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ berühren, und welche durch die Gleichungen (53) dargestellt sind.

Die Funktionen φ, ψ genügen folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(0, a) &= \tilde{x}(a), & \psi(0, a) &= \tilde{y}(a), \\ \varphi_t(0, a) &= \tilde{x}'(a), & \psi_t(0, a) &= \tilde{y}'(a), \end{aligned} \tag{54}$$

[1]) Wir weichen dabei darin von Bliss ab, daß wir den Beweis direkt für das Problem in Parameterdarstellung geben, während Bliss die Aufgabe zuerst für den speziellen Fall des x-Problems löst und dann den allgemeinen Fall der Parameterdarstellung mittels einer Punkttransformation der Ebene auf jenen Fall zurückführt.

[2]) Vgl. § 34, Gleichung (173_2). [3]) Vgl. § 23, a), Zusatz.

wenn wir der Einfachheit halber für a die Bogenlänge auf der Kurve $\mathfrak{C}$ wählen. Hieraus folgt durch Differentiation nach a

$$\begin{aligned} \varphi_a(0,a) &= \tilde{x}'(a), & \psi_a(0,a) &= \tilde{y}'(a), \\ \varphi_{ta}(0,a) &= \tilde{x}''(a), & \psi_{ta}(0,a) &= \tilde{y}''(a), \end{aligned} \tag{55}$$

woraus sich für die Funktionaldeterminante

$$\Delta(t,a) = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(t,a)}$$

die Gleichungen ergeben:

$$\Delta(0,a) = 0, \qquad \Delta_t(0,a) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}}. \tag{56}$$

Es seien jetzt a_3', a_4' irgend zwei den Ungleichungen

$$A_3 < a_3' < a_3, \qquad a_4 < a_4' < A_4$$

genügende Größen; alsdann kann man beweisen[1]), daß unter den gemachten Annahmen die Gleichungen (53) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Rechteck

$$\mathfrak{A}: \qquad 0 \leqq t \leqq k, \qquad a_3' \leqq a \leqq a_4'$$

in der t,a-Ebene und dessen Bild $\mathfrak{S}$ in der x,y-Ebene definieren, wofern die positive Größe k hinreichend klein genommen wird. Der

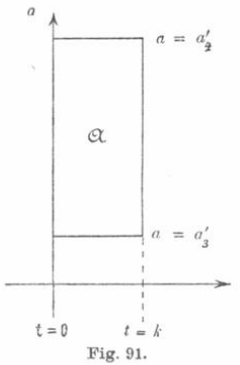


Fig. 91.

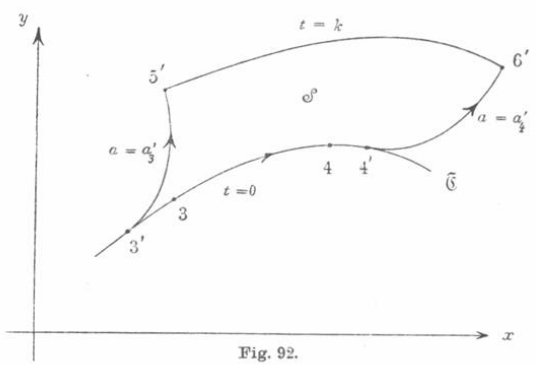


Fig. 92.

Beweis ist jedoch hier wesentlich komplizierter als in dem in § 31, a) betrachteten Fall, weil die Funktionaldeterminante $\Delta(t,a)$ im Rechteck $\mathfrak{A}$ verschwindet, wie klein auch k genommen werden möge, nämlich entlang der Seite $t = 0$.

Das Bild der Begrenzung des Recktecks $\mathfrak{A}$ ist eine stetige geschlossene Kurve ohne mehrfache Punkte $P_3'P_4'P_6'P_5'P_3'$. Die Punkt-

[1]) Wir verweisen auf Bliss, loc. cit. pp. 482, 488 und Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VIII (1907) p. 399.

menge $\mathfrak{S}$ ist identisch mit dem Innern dieser geschlossenen Kurve zusammen mit der Kurve selbst. Dieser Bereich wird also von den Extremalen der Schar (53) einfach und lückenlos überdeckt, wenn t und a auf das Rechteck $\mathfrak{A}$ beschränkt werden. *In diesem Sinn bilden die Extremalen, welche den Bogen $P_3'P_4'$ berühren, ein Feld.* Es handelt sich aber nur um ein „uneigentliches Feld", da die früher für ein Feld aufgestellten Bedingungen wegen des Verschwindens der Funktionaldeterminante hier nicht ausnahmslos erfüllt sind.

Die „inversen Funktionen des Feldes", die wir wieder mit

$$t = \mathfrak{t}(x, y), \qquad a = \mathfrak{a}(x, y)$$

bezeichnen, sind stetig im ganzen Bereich $\mathfrak{S}$ und überdies von der Klasse C' in allen Punkten von $\mathfrak{S}$ mit Ausnahme der Punkte des Bogens $P_3'P_4'$, in denen die partiellen Ableitungen im allgemeinen zu existieren aufhören.

b) **Konstruktion des zusammengesetzten Feldes:**

Wir kombinieren jetzt nach Bliss das im vorigen Absatz betrachtete Feld mit dem Feld von Extremalen durch einen Punkt P_0 auf der Fortsetzung der Extremalen P_1P_3 über den Punkt P_1 hinaus.

Letztere Schar schreiben wir in der Normalform von § 27, d)

$$x = \mathfrak{X}(\tau; x_0, y_0, \alpha) \equiv \overset{\circ}{\varphi}(\tau, \alpha), \quad y = \mathfrak{Y}(\tau; x_0, y_0, \alpha) \equiv \overset{\circ}{\psi}(\tau, \alpha), \qquad (57)$$

wobei τ die Bogenlänge bedeutet, gemessen vom Punkt P_0 aus, und α den Tangentenwinkel der Extremalen $\mathfrak{E}_\alpha$ im Punkt P_0.

Die Schar (57) enthält unsern Extremalenbogen P_1P_3; dies möge für $\alpha = \alpha_0$ stattfinden, und dem Punkt P_3 möge dabei der Parameterwert $\tau = \tau_3$ entsprechen. Aus unserer Voraussetzung (III') folgt wie in § 32, b), daß wir den Punkt P_0 so nahe bei P_1 annehmen können, daß die Schar (57) ein Feld um den Bogen P_1P_3 liefert, wenn τ und α auf den Bereich

$$0 \leqq \tau \leqq \tau_3 + d_1, \qquad \alpha - \alpha_0 \mid \leqq k_1$$

beschränkt werden, wofern die beiden positiven Größen d_1 und k_1 hinreichend klein gewählt werden.

Von diesem Feld behalten wir denjenigen Teil bei, welcher dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehört; wir bezeichnen diesen Teil mit I (Siehe Fig. 93).

Wie wir gesehen haben, berührt der Extremalenbogen P_1P_3 die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt P_3 gleichsinnig; dasselbe tut aber auch die Extremale $\mathfrak{E}_{a_3}$ der Schar (53), und da überdies $F_1 \neq 0$ entlang $\mathfrak{C}$, so muß die Extremale $\mathfrak{E}_{a_3}$ im Sinn von § 23, d) die Fortsetzung des Bogens

$P_1 P_3$ sein, also gleichzeitig der Extremalen $\alpha = \alpha_0$ der Schar (51) angehören.[1])

Andererseits berührt der Extremalenbogen $P_4 P_2$ die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt P_4 gleichsinnig; er muß also der Extremalen $\mathfrak{E}_{a_4}$ der Schar (53) angehören. Diese Extremale existiert also nicht bloß im Intervall: $0 \leqq t \leqq k$, sondern in dem ganzen Intervall: $0 \leqq t \leqq t_2$, worin t_2 die Länge des Bogens $P_4 P_2$ bedeutet; sie läßt sich sogar nach § 23, d) auf ein etwas weiteres

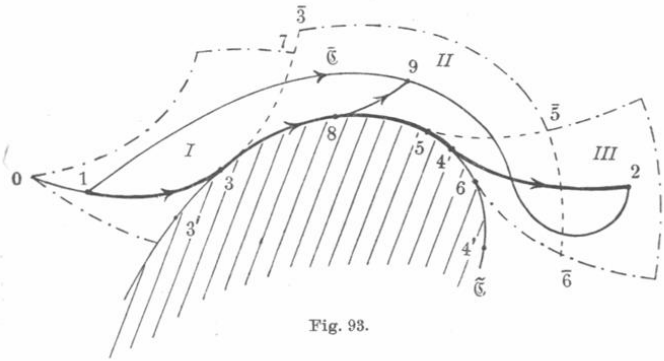


Fig. 93.

Intervall: $0 \leqq t \leqq t_2 + d_2$ fortsetzen. Daraus folgt aber nach § 27, c), daß sich eine positive Größe $k_2 < a_4' - a_4$ angeben läßt, derart, daß sämtliche Extremalen der Schar (53), für welche $a_4 - k_2 \leqq a \leqq a_4 + k_2$, im ganzen Intervall: $0 \leqq t \leqq t_2 + d_2$ existieren.

Wir behalten nun von dem von den Extremalen der Schar (53) gebildeten Feld $\mathfrak{o}'$ denjenigen Teil bei, welcher das Bild des Bereiches

$$0 \leqq t \leqq k, \qquad a_3 \leqq a \leqq a_4 + k_2$$

mittels der Transformation (53) ist. Diesen Teil von $\mathfrak{o}'$ bezeichnen wir mit II; derselbe bildet a fortiori ebenfalls ein Feld.

Endlich bezeichnen wir mit III das Bild des Bereiches

$$k \leqq t \leqq t_2 + d_2, \qquad a_4 - k_2 \leqq a \leqq a_4 + k_2$$

mittels der Transformation (53). Auch dieser Bereich bildet ein Feld, vorausgesetzt, daß d_2 und k_2 hinreichend klein gewählt werden. Denn die Funktion $\Delta(t, a_4)$ verschwindet nach (56) für $t = 0$; daher kann sie nach dem Sturm'schen Satz (§ 11, c)) zwischen 0 und t_2 nicht

[1]) Bei der von uns gewählten Darstellung der beiden Scharen (53) und (57) erleidet allerdings der Parameter beim Übergang von $P_1 P_3$ auf den Bogen $\mathfrak{E}_{a_3}$ einen Sprung. Dem kann man aber, wo es nötig sein sollte, dadurch abhelfen, daß man zunächst den Anfangspunkt für den Bogen a der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ so wählt, daß $a_3 = \tau_3$, und sodann in der Schar (53) den Parameter t durch $t - a$ ersetzt. Dabei wird dann auf der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ der Berührungspunkt mit $\bar{\mathfrak{C}}$ durch den Wert $t = a$ gegeben.

noch einmal verschwinden, da nach Voraussetzung (III') der Bogen P_4P_2 den zu P_4 konjugierten Punkt nicht enthält.

Diese drei Felder I, II, III setzen sich nun zu einem einzigen Feld $\mathfrak{A}$ zusammen. Die beiden Felder I und II stoßen entlang dem Bogen P_3P_7 der Extremalen $\mathfrak{E}_{a_3}$ zusammen, die beiden Felder II und III entlang dem Bogen $\overline{P}_5\overline{P}_6$ der Kurve

$$x = \varphi(k, a), \qquad y = \psi(k, a), \qquad a_4 - k_2 \leqq a \leqq a_4 + k_2.$$

Sonst haben die drei Felder keine Punkte gemein, wofern die Größen k, k_1, k_2, d_1, d_2 hinreichend klein gewählt werden.

c) **Das Feldintegral und der Weierstraß'sche Fundamentalsatz:**

Es sei jetzt P_9 irgendein Punkt des im vorigen Absatz konstruierten Feldes $\mathfrak{A}$; x, y seine Koordinaten.

Liegt der Punkt P_9 im Bereich I, so geht durch ihn eine dem Feld angehörige Extremale P_0P_9 der Schar (57). Unter dem *Feldintegral* $W(x, y)$ verstehen wir dann genau wie in § 31, b) den Wert unseres Integrals J genommen entlang dieser Extremalen P_0P_9, betrachtet als Funktion von x, y. Dann gelten für die partiellen Ableitungen von W ohne weiteres die Hamilton'schen Formeln (148) von § 31.

Liegt dagegen P_9 im Bereich II + III, aber nicht auf der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$, so geht durch ihn eine dem Feld angehörige Extremale der Schar (53); ihr Berührungspunkt mit der Grenzkurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ sei der Punkt P_8. In diesem Fall verstehen wir unter dem Feldintegral $W(x, y)$ das Integral J genommen vom Punkt P_0 entlang der Extremalen $P_0P_1P_3$ bis zum Punkt P_3, von da entlang der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ bis zum Punkt P_8 und endlich vom Punkt P_8 entlang der Extremalen P_8P_9 der Schar (53) zum Punkt P_9, das Integral wieder betrachtet als Funktion von x, y:

$$W(x, y) = J_{013} + \tilde{J}_{38} + J_{89}. \tag{58}$$

Wir wollen zeigen, daß *auch in diesem Fall die Hamilton'schen Formeln noch gelten.*

Der Parameter des Punktes P_8 auf der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ sei a, derjenige des Punktes P_9 auf der Extremalen P_8P_9 sei t. Wir betrachten das Feldintegral W zunächst als Funktion von t und a und bezeichnen dasselbe, so aufgefaßt, mit $u(t, a)$. Es ist also

$$u(t, a) = J_{013} + \int_{a_3}^{a} \tilde{F}(\tilde{x}(a'), \tilde{y}(a'), \tilde{x}'(a'), \tilde{y}'(a'))\, da' + \int_{0}^{t} \tilde{\mathfrak{F}}(t', a)\, dt',$$

wobei die Funktion $\mathfrak{F}(t,a)$ für die Schar (53) durch die Gleichung (83) von § 27 definiert ist.

Da das Integral J_{013} von t und a unabhängig ist, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{F}(t,a) \tag{59}$$

und weiter unter Benutzung der Lagrange'schen partiellen Integration

$$\frac{\partial u}{\partial a} = F(\tilde{x}(a),\tilde{y}(a),\tilde{x}'(a),\tilde{y}'(a)) + [\mathfrak{F}_{x'}(t,a)\varphi_a(t,a) + \mathfrak{F}_{y'}(t,a)\psi_a(t,a)]_0^t.$$

Nun folgt aber aus den Relationen (54) und (55) unter Benutzung der Homogeneitätsrelation für F:

$$\mathfrak{F}_{x'}(0,a)\varphi_a(0,a) + \mathfrak{F}_{y'}(0,a)\psi_a(0,a) = F(\tilde{x}(a),\tilde{y}(a),\tilde{x}'(a),\tilde{y}'(a));$$

also kommt

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t,a)\varphi_a(t,a) + \mathfrak{F}_{y'}(t,a)\psi_a(t,a). \tag{60}$$

Wir erhalten also für die partiellen Ableitungen von u dieselben Ausdrücke wie bei einem gewöhnlichen Feld[1]), und daraus folgt dann weiter, wenn wir von den Variabeln t,a zu den Variabeln x,y übergehen, daß auch für die partiellen Ableitungen von W nach x und y dieselben Formeln gelten wie früher, d. h. eben die Hamilton'schen Formeln.

Die Definition (58) des Feldintegrals dehnen wir auch auf den Fall aus, wo der Punkt P_9 auf der Kurve $\mathfrak{C}$ liegt, indem dann einfach der Punkt P_9 mit P_8 zusammenfällt, weshalb in (58) das letzte Glied $J_{89} = 0$ zu setzen ist.

Die nunmehr für das ganze Feld $\mathfrak{A}$ eindeutig definierte Funktion W ist stetig im ganzen Feld, und es gelten für ihre partiellen Ableitungen die Hamilton'schen Formeln in allen Punkten von $\mathfrak{A}$ mit einzig möglicher Ausnahme der Punkte der Kurve $\mathfrak{C}$, in denen die Existenz der partiellen Ableitungen fraglich wird.

Wir ziehen jetzt vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2 irgendeine gewöhnliche Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$, welche ganz im Feld $\mathfrak{A}$ gelegen ist; sie möge durch die Bogenlänge s als Parameter dargestellt sein.

Dann können wir die *Weierstraß'sche Konstruktion* in folgender Weise anwenden: Ist P_9 irgendein Punkt von $\bar{\mathfrak{C}}$, so definieren wir die Funktion

$$S(s_9) = W(x_9,y_9) + \bar{J}_{92}. \tag{61}$$

Die Funktion $S(s_9)$ ist stetig entlang $\bar{\mathfrak{C}}$, und es ist

$$\Delta J = \bar{J}_{12} - J_{1342} = -[S(s_2) - S(s_1)].$$

[1]) Vgl. die Gleichungen (144) und (146) von § 31.

Da die Hamilton'schen Formeln bestehen bleiben, so findet man für die Ableitung von S, genau wie früher, in der Bezeichnung von § 32, a),

$$S'(s_9) = -\mathcal{E}(x_9, y_9; p_9, q_9; \bar{p}_9, \bar{q}_9). \tag{62}$$

Dies gilt zunächst nur, wenn der Punkt P_9 nicht auf der Grenzkurve $\bar{\mathfrak{C}}$ liegt. Hat die Kurve $\mathfrak{C}$ ein Segment mit der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ gemein, so folgt aus der Definition der Funktion S, daß $S(s_9)$ entlang diesem Segment konstant ist, also $S'(s_9) = 0$. Da aber für ein solches Segment

$$p_9 = \tilde{p}_9 = \bar{p}_9, \quad q_9 = \tilde{q}_9 = \bar{q}_9, \quad \text{also } \mathcal{E} = 0,$$

so bleibt die Formel (62) auch für ein solches Segment bestehen. Wir wollen annehmen, daß die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ nur eine endliche Anzahl derartiger Segmente enthält.

Es folgt dann, daß für die totale Variation ΔJ der *Weierstraßsche Fundamentalsatz* (156) von § 32, a) gilt, und da das Problem als regulär vorausgesetzt ist, so folgt nach § 30, b), daß $\Delta J > 0$, es sei denn, daß die $\mathcal{E}$-Funktion entlang der ganzen Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ verschwinde, was nicht eintreten kann, wenn die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ nicht mit dem Kurvenzug $P_1P_3P_4P_2$ zusammenfällt.

Somit ist bewiesen, daß unter den im Eingang dieses Paragraphen aufgezählten Bedingungen der Kurvenzug $P_1P_3P_4P_2$ in der Tat ein starkes Minimum für das Integral J liefert.

Beispiel XX (siehe p. 397):

Wenn der Bogen P_3P_4 der Schranke $\bar{\mathfrak{C}}$ *nach außen konvex* ist, so sind die sämtlichen hinreichenden Bedingungen erfüllt, und der Kurvenzug $P_1P_3P_4P_2$ liefert in der Tat ein starkes Minimum.[1])

§ 54. Das Newton'sche Problem des Rotationskörpers kleinsten Widerstandes.[2])

An die Probleme mit Gebietsbeschränkung würde sich naturgemäß eine Besprechung von *Aufgaben mit Gefällbeschränkung* anschließen; auch diese führen im allgemeinen auf diskontinuierliche Lösungen. Da jedoch Aufgaben dieser Art noch wenig untersucht worden sind[3]),

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 34, 35, 38—40 am Ende von Kap. IX.

[2]) Wegen der Literatur vgl. Pascal, *Variationsrechnung*, § 30; vgl. auch oben p. 95, Fußnote [1]), die sich übrigens auf eine andere Formulierung des Problems bezieht (ohne Gefällbeschränkung).

[3]) Eine Aufgabe dieser Art behandelt Zermelo, Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. XI (1902), p. 186 (siehe *Übungsaufgabe* Nr. 41 am Ende von Kap. IX). Vgl. auch Beispiel VIII, p. 34 und *Übungsaufgabe* Nr. 35 auf p. 149.

so begnügen wir uns damit, ein hierher gehöriges, nach verschiedenen Richtungen interessantes, klassisches Beispiel im einzelnen durchzuführen, das Newton'sche Problem des Rotationskörpers von kleinstem Widerstand.

a) **Analytische Formulierung der Aufgabe:**

Wir betrachten den Rotationskörper, der durch Rotation der Kurve ABD um die x-Achse erzeugt wird. Dabei soll der Punkt A auf der x-Achse liegen; wir wählen ihn der Einfachheit halber zum Koordinatenanfang. Der Punkt B liege in der oberen Halbebene, sodaß seine Ordinate DB positiv ist. Dieser Rotationskörper bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit V in der Richtung der negativen x-Achse in einem widerstehenden Medium, das aus gleichen, gleichmäßig verteilten, in Ruhe befindlichen materiellen Teilchen besteht.

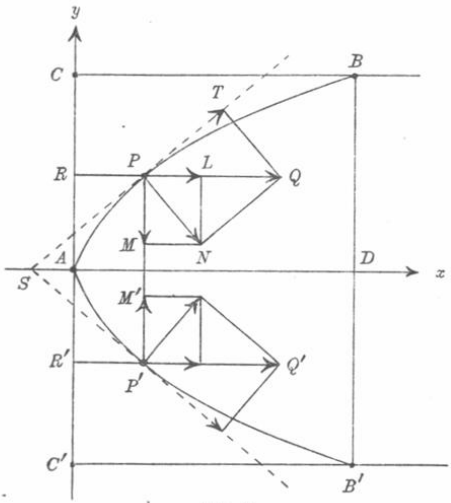


Fig. 94.

Ist dann die Meridiankurve AB durch einen Parameter t dargestellt, der von t_0 bis t_2 wächst, so erhält man nach NEWTON[1]) für den Widerstand, welchen der Rotationskörper

[1]) *Principia philosophiae naturalis*, Buch II, Sect. VII, Prop. XXXIV, Scholium (1686). Newton geht von der Bemerkung aus, daß die Wirkung des Zusammenpralls des Körpers und der Teilchen des Mediums dieselbe ist, als wenn der Körper ruhte und die materiellen Teilchen mit derselben Geschwindigkeit V in der Richtung der positiven x-Achse gegen den Körper geschleudert würden. Der Stoß eines einzelnen Teilchens, das im Punkt P den Rotationskörper trifft, möge nach Größe und Richtung durch den Vektor $PQ = f$ dargestellt werden (siehe Figur 94), man zerlege denselben in eine normale Komponente PN und eine tangentiale Komponente PT; letztere ist ohne Wirkung auf den Körper, wenn die Reibung vernachlässigt wird. Die normale Komponente PN zerlege man weiter in eine Komponente PL in der Richtung der x-Achse und in eine Komponente PM senkrecht dazu. Gleichzeitig trifft ein zweites Teilchen mit derselben Geschwindigkeit den Rotationskörper in dem zum Punkt P in Beziehung auf die x-Achse symmetrischen Punkt P'. Die analoge Zerlegung führt zu einer Komponente $P'M'$ in der Richtung der y-Achse, welche mit der Komponente PM in derselben Geraden liegt, ihr absolut gleich, aber entgegengerichtet ist. Von dem Stoß PQ bleibt daher nur die Komponente $PL = f \sin^2\theta$ als wirksam übrig, wenn θ den Tangentenwinkel der Kurve AB im Punkt P bedeutet.

Sei jetzt n die Anzahl derjenigen Teilchen, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der durch Rotation der Ordinate $AC = DB$ um die x-Achse

erfährt, (abgesehen von einem von der Gestalt der Kurve AB unabhängigen numerischen Faktor) das bestimmte Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_2} \frac{y y'^3 dt}{x'^2 + y'^2}. \tag{63}$$

Aus physikalischen Gründen kann man schließen[1]), daß man sich dabei auf Kurven AB zu beschränken hat, für welche $x' \gtreqless 0$ und $y' \gtrless 0$. Daher formulieren wir nunmehr unsere Aufgabe analytisch folgendermaßen:

Das Integral (63) *soll zu einem Minimum gemacht werden in Beziehung auf die Gesamtheit aller gewöhnlichen Kurven, welche vom Koordinatenanfangspunkt A nach einem gegebenen Punkt B im Inneren des ersten Quadranten gezogen werden können, und welche überdies der Gebietsbeschränkung*

$$y > 0 \quad \text{für} \quad t_0 < t \gtreqless t_2 \tag{64}$$

---

entstehenden Kreisfläche hindurchgehen. Dann hat die Resultante der Stöße, welche der Rotationskörper in der Zeiteinheit erfährt, d. h. eben der Widerstand, den Wert

$$nf\int \sin^2\theta\, d\omega,$$

wenn $d\omega$ ein Element dieser Kreisfläche ist. Indem man in letzterer Polarkoordinaten mit dem Pol A einführt, kann man schreiben

$$d\omega = y\, dy\, d\varphi$$

und erhält so, da der Winkel θ von φ unabhängig ist, den Widerstand durch das bestimmte Integral

$$2\pi nf\int_0^{y_2} \sin^2\theta\, y\, dy$$

ausgedrückt, woraus sich durch Übergang zur Parameterdarstellung die obige Formel (63) ergibt.

Die Newton'schen Hypothesen und die daraus gezogenen Folgerungen werden übrigens durch das Experiment nicht bestätigt, vgl. darüber *Encyclopädie*, IV C, (*Finsterwalder*), p. 164.

Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 42, 43 am Ende von Kap. IX.

[1]) Diese wichtige Bemerkung hat zuerst August gemacht, Journal für Mathematik, Bd. 103 (1888), p. 1. Wäre $x' < 0$ für Teile der Kurve AB, so würden in der Oberfläche des Rotationskörpers „trichterförmige oder ringförmige Vertiefungen entstehen, bei denen ein wiederholtes Anprallen der Luftteilchen unvermeidlich wäre, was eine bedeutende Vermehrung des Widerstandes zur Folge hätte." Wäre $y' < 0$, so würden luftverdünnte Räume entstehen, welche ebenfalls den Widerstand vermehren würden. Die mathematischen Folgerungen, welche August aus diesen physikalischen Bemerkungen zieht, sind übrigens in wesentlichen Punkten falsch.

und der Gefällbeschränkung

$$x' \gtrless 0, \quad y' \gtrless 0 \quad \text{für} \quad t_0 \lessgtr t \lessgtr t_2 \tag{65}$$

genügen.

b) **Die Newton'sche Kurve:**

Wir betrachten zunächst einen Bogen der Minimumskurve von der Klasse C', für welchen

$$x' > 0, \qquad y' > 0. \tag{66}$$

Bei Anwendung der Schlüsse von § 26, a) auf einen solchen Bogen folgt aus der Gefällbeschränkung (65) keine weitere Einschränkung der dort mit ξ, η bezeichneten Funktionen; der Bogen muß daher der Euler'schen Differentialgleichung genügen[1]), woraus sich sofort das erste Integral[2]) ergibt

$$\frac{yy'^3x'}{(x'^2+y'^2)^2} = a, \tag{67}$$

wobei a eine Konstante bedeutet, welche wegen (64) und (66) positiv sein muß.

Zur weiteren Integration[3]) der Differentialgleichung (67) setzen wir

$$\frac{x'}{y'} = q = \operatorname{cotg}\theta, \tag{68}$$

unter θ den Tangentenwinkel der Kurve im Punkt t verstanden. Dann folgt aus (67)

$$y = \frac{a(1+q^2)^2}{q}, \tag{69}$$

und hieraus nach (68)

$$x' = a\left(-\frac{1}{q} + 2q + 3q^3\right)q',$$

und somit

$$x = a(q^2 + \tfrac{3}{4}q^4 - \log q) + b. \tag{70}$$

Die Gleichungen (69) und (70) stellen *das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung* dar, wenn man darin noch q durch eine solche Funktion von t ersetzt, für welche die Bedingung (66) erfüllt ist.

Die allgemeinste Extremale geht also aus der speziellen Kurve

$$\begin{aligned} X &= q^2 + \tfrac{3}{4}q^4 - \log q \equiv X(q), \\ Y &= \frac{(1+q^2)^2}{q} \equiv Y(q) \end{aligned} \tag{71}$$

[1]) Vgl. die analoge Bemerkung auf p. 34.

[2]) Schon von Newton angegeben, loc. cit.

[3]) Dieselbe ist zuerst von L'Hospital ausgeführt worden (1699), etwas später und unabhängig davon von Johann Bernoulli, vgl. des letzteren *Opera Omnia*, Bd. I, pp. 307, 311, 315.

durch die Ähnlichkeitstransformation

$$x = aX + b, \qquad y = aY$$

hervor.

Für die Diskussion der Kurve (71) hat man

$$X'(q) = \frac{(3q^2-1)(q^2+1)}{q}, \qquad Y'(q) = \frac{(3q^2-1)(q^2+1)}{q^2},$$

$$X'(q)\,Y''(q) - Y'(q)\,X''(q) = -\frac{(3q^2-1)^2(q^2+1)^2}{q^4},$$

woraus sich die schon von L'Hospital angegebene Gestalt der Kurve ergibt: Wächst q von 0 bis $1/\sqrt{3}$, so nehmen X und Y von $+\infty$ anfangend beständig ab, und die Kurve ist konvex gegen die x-Achse. Für $q = 1/\sqrt{3}$ hat die Kurve eine Spitze, deren Tangente mit der positiven X-Achse einen Winkel von 60^0 bildet. Wächst q weiter von $1/\sqrt{3}$ bis $+\infty$, so wachsen X und Y beständig bis zum Wert $+\infty$, und die Kurve ist konkav gegen die X-Achse (siehe Fig. 95). Zugleich folgt, daß für den konvexen Zweig: $t = 1/q$, für den konkaven: $t = q$ ein zulässiger Parameter ist.

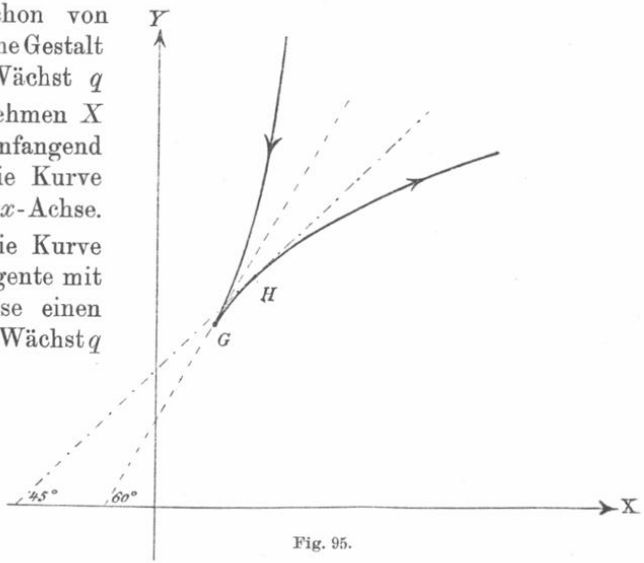


Fig. 95.

Die *Legendre'sche Bedingung* nimmt für unsern Bogen die Form an:

$$F_1 \equiv \frac{2y(3q^2-1)}{y'^3(1+q^2)^3} \gtreqless 0,$$

d. h.[1])

$$q \gtreqless \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{72}$$

Somit kann nur ein Bogen des konkaven Zweiges der Kurve Bestandteil unserer Minimumskurve sein.

Schließlich lautet die *Weierstraß'sche Bedingung*[2])

$$y \sin^2(\tilde{\theta} - \theta) \sin(2\theta + \tilde{\theta}) \gtreqless 0$$

[1]) Wohl zuerst von Silvabelle angegeben. [2]) Vgl. p. 246.

für alle Werte von $\tilde{\theta}$ im Intervall

$$0 \leqq \tilde{\theta} \leqq \frac{\pi}{2},$$

und zwar nur für diese, da auch die Vergleichskurve, mit deren Hilfe die Weierstraß'sche Bedingung abgeleitet wird (vgl. p. 241), der Bedingung (65) genügen muß. Daraus folgt aber, daß

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4} \tag{73}$$

sein muß, d. h.[1])

$$q \geqq 1. \tag{73a}$$

Einen Bogen einer Kurve (69), (70), für welchen $q \geqq 1$, werden wir in der Folge kurz einen Newton'schen Bogen nennen.

c) **Bestimmung des Winkels an der Stirnfläche:**

Wir zeigen jetzt weiter, daß ein Bogen der Minimumskurve von der Klasse C', welcher nicht in seiner ganzen Ausdehnung der Bedingung (66) genügt, entweder ein Segment einer Geraden $x =$ konst., oder aber einer Geraden $y =$ konst. sein muß.

Denn angenommen der Bogen, der dem Intervall $\alpha \leqq t \leqq \beta$ entsprechen möge, enthielte einen Punkt t', in welchem $x'y' > 0$, so folgt nach § 2, a) und A III 2, daß es ein in $[\alpha\beta]$ enthaltenes Intervall $[\alpha'\beta']$ geben muß, derart daß $x'y' > 0$ für $\alpha' < t < \beta'$, dagegen $x'y' = 0$ für $t = \alpha'$, außer wenn $\alpha' = \alpha$, und $x'y' = 0$ für $t = \beta'$, außer wenn $\beta' = \beta$. Nach dem unter b) bewiesenen muß also der betrachtete Bogen für $\alpha' < t < \beta'$ der Differentialgleichung (67) mit einem positiven Wert der Konstanten a genügen. Indem man dann t gegen α', resp. β' konvergieren läßt, zeigt man, daß $x'y'$ weder in α' noch β' verschwinden kann, daß also $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ sein muß, und $x'y' > 0$ im ganzen Intervall $[\alpha\beta]$, was mit unserer Annahme im Widerspruch steht.

Somit muß $x'y' \equiv 0$ sein in $[\alpha\beta]$. Nunmehr zeigt man durch Anwendung derselben Schlußweise auf den Faktor x', daß entweder $x' \equiv 0$ in $[\alpha\beta]$ oder $y' \equiv 0$ in $[\alpha\beta]$, wobei man noch davon Gebrauch zu machen hat, daß bei einer gewöhnlichen Kurve x' und y' nie gleichzeitig verschwinden.

Die Minimumskurve, falls eine solche überhaupt existiert, muß sich also aus einer endlichen Anzahl von Stücken zusammensetzen, von denen jedes einzelne ein Newton'scher Kurvenbogen, oder ein Segment einer Geraden $x =$ konst. oder ein Segment einer Geraden $y =$ konst. ist.

[1]) Diese Bedingung findet sich wohl zuerst explicite bei Walton, Quarterly Journal, Bd. X (1870), p. 344, implicite jedoch schon bei Newton, loc. cit., vgl. *Übungsaufgabe* Nr. 43 am Ende von Kap. IX.

Wir haben nun zu untersuchen, welche Kombinationen dieser drei Bogenarten, die wir der Reihe nach mit N, X, Y bezeichnen, möglich sind, und welche Bedingungen in den Übergangspunkten erfüllt sein müssen. In einem solchen Übergangspunkt sind folgende sieben Fälle möglich: $N'N''$; NX, XN; NY, YN; XY, YX.

1. $N'N''$: Ein Punkt P_1, in dem zwei verschiedene Newton'sche Kurven aneinanderstoßen, ist frei variierbar, da für beide Bogen die Ungleichungen (66) erfüllt sind. Man kann also direkt die Schlüsse, die zur Weierstraß'schen Eckenbedingung (2) führen, anwenden. Da

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) \equiv 2y \sin\gamma(3\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)$$

für keinen Wert von γ zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ verschwindet, so folgt aus § 48, c), Zusatz I, unter Berücksichtigung der Bedingung (73), daß dieser Fall unmöglich ist.

2. NX und XN: Ein Punkt P_1, in welchem ein Newton'scher Bogen und ein Segment $x =$ konst. aneinander stoßen, ist zwar in der Richtung der y-Achse frei variierbar, nicht aber in der Richtung der x-Achse wegen der Bedingung $x' \gtreqless 0$. Da, wie man leicht verifiziert, auch die Gerade $x =$ konst. der Euler'schen Differentialgleichung genügt, so muß die Weierstraß'sche Eckenbedingung, soweit sie sich auf eine Variation in der Richtung der y-Achse bezieht, erfüllt sein; es muß also im Punkt P_1

$$\bar{F}_{y'} = \overset{+}{F}_{y'}$$

sein; das führt auf die Bedingung

$$\frac{y(3q^2+1)}{(1+q^2)^2} = y,$$

aus welcher folgt

$$q = 1.$$

Für die Kombination NX kann diese Bedingung nie erfüllt sein, da hier im Punkt P_1 notwendig $q > 1$ sein muß. Wohl aber ist die Kombination XN möglich, d. h. ein gerades Segment parallel der y-Achse, an welches sich ein Newton'scher Bogen unter einem Winkel von 45^0 gegen die positive y-Achse anschließt.

3. NY und YN: Die analoge Schlußweise zeigt, daß hier die Bedingung

$$\bar{F}_{x'} = \overset{+}{F}_{x'}$$

erfüllt sein muß, was auf einen Widerspruch führt.

4. XY und YX: Daß auch diese Kombinationen unmöglich sind, zeigt man durch Abschrägen der Ecken (siehe Fig. 96). Denn bildet

die Gerade P_3P_4 mit der positiven x-Achse den Winkel α, so ist

$$J_{314} = \tfrac{1}{2}(y_1^2 - y_3^2),$$

dagegen

$$J_{34} = \tfrac{1}{2}(y_1^2 - y_3^2)\sin^2\alpha.$$

Da ein Newton'scher Bogen nie die x-Achse erreicht, so ergibt sich aus den bisherigen Entwicklungen das folgende Resultat, bei

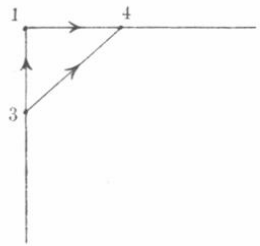


Fig. 96.

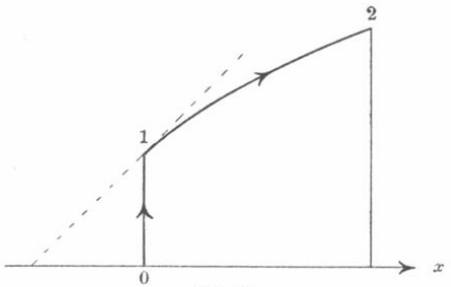


Fig. 97.

dessen Formulierung, wie überhaupt in der weiteren Diskussion, wir P_0 und P_2 statt A und B schreiben:

Wenn unsere Aufgabe überhaupt eine Lösung besitzt, so muß sich dieselbe aus einem Segment P_0P_1 der y-Achse und aus einem Newton'schen Bogen P_1P_2, welcher im Punkt P_1 einen Winkel von 45° mit der positiven y-Achse bildet, zusammensetzen.[1])

d) **Konstantenbestimmung:**[2])

Es sind jetzt die Integrationskonstanten a und b so zu bestimmen, daß die Kurve (69), (70) durch den gegebenen Punkt P_2 geht und die positive y-Achse unter einem Winkel von 45° schneidet.

[1]) Daß bereits Newton dieses Resultat bekannt war, ergibt sich aus seiner Bestimmung der Integrationskonstanten a in der Gleichung (67), welche er, aus seiner geometrischen Einkleidung ins Analytische übersetzt, folgendermaßen schreibt:

$$\frac{yq}{(1+q^2)^2} = \frac{y_1}{4},$$

unter y_1 die Ordinate des Punktes P_1 verstanden. Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Wedderburn.

Unabhängig von Newton ist der Satz, daß der Tangentenwinkel an der Stirnfläche 45° betragen muß, von Armanini bewiesen worden (Annali di Matematica (3) Bd. IV (1900) p. 131), und zwar unter folgender Formulierung der Aufgabe: Von einem unbekannten Punkt P_1 der y-Achse nach einem gegebenen Punkt P_2 eine Kurve zu ziehen, für welche die aus der Rotation der gebrochenen Linie $P_0P_1P_2$ entstehende Oberfläche ein Minimum des Widerstandes liefert.

[2]) Nach Kneser, Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. II (1902), p. 273.

Die letzte Bedingung, analytisch ausgedrückt, lautet

$$aX(1) + b = 0,$$

woraus folgt

$$b = -aX(1) = -\tfrac{7}{4}a.$$

Tragen wir diesen Wert in (70) ein und schreiben der Übereinstimmung mit unserer sonstigen Bezeichnung halber t statt q, so erhalten wir für die Schar von Newton'schen Kurven, welche die y-Achse unter einem Winkel von 45^0 schneiden, den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} x &= a[t^2 + \tfrac{3}{4}t^4 - \log t - \tfrac{7}{4}] \equiv \varphi(t, a), \\ y &= \frac{a(1+t^2)^2}{t} \qquad\qquad \equiv \psi(t, a) \end{aligned}\right\}. \tag{74}$$

In diesen beiden Gleichungen haben wir x, y durch x_2, y_2 zu ersetzen und dann nach t und a aufzulösen. Durch Division der beiden Gleichungen erhalten wir zunächst zur Bestimmung von t die Gleichung

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{t^3 + \frac{3}{4}t^5 - t\log t - \frac{7}{4}t}{(1+t^2)^2} \equiv \chi(t); \tag{75}$$

nun ist

$$\chi'(t) \equiv \frac{Y'(t)}{Y^2(t)}\left[\frac{11}{4} + t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \log t\right]$$

stets positiv für $t \gtrless 1$, und

$$\chi(1) = 0, \qquad \chi(+\infty) = +\infty.$$

Daraus folgt, daß die Gleichung (75) eine und nur eine Wurzel $t \gtrless 1$ besitzt. Ist dieselbe gefunden, so erhält man a aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{a(1+t^2)^2}{t}.$$

Somit geht durch jeden Punkt P_2 im Innern des ersten Quadranten eine und nur eine Newton'sche Kurve, welche mit der positiven y-Achse einen Winkel von 45^0 bildet, und daher können wir vom Koordinatenanfangspunkt P_0 nach jedem Punkt P_2 im Innern des ersten Quadranten einen und nur einen Kurvenzug $P_0P_1P_2$ der verlangten Art ziehen.

e) **Hinlänglichkeitsbeweis:**[1])

Das vorangehende Resultat zeigt zugleich, daß die Extremalen der Schar (74) bei Beschränkung der Variabeln t und a auf den Bereich

$$t \gtrless 1, \qquad a > 0 \tag{76}$$

ein *Feld* bilden, welches den ersten Quadranten

$$x \gtrless 0, \qquad y > 0 \tag{77}$$

[1]) Zuerst von Kneser gegeben, loc. cit. p. 274.

einfach und lückenlos überdeckt, da überdies die durch Auflösung der Gleichungen (74) nach t und a erhaltenen inversen Funktionen im Bereich (77) von der Klasse C' sind. Letzteres ergibt sich nach dem Satz über implizite Funktionen daraus, daß die Funktionaldeterminante $\Delta(t, a)$ der Schar (74) gleich ist dem Zähler des Ausdrucks für $\chi'(t)$, multipliziert mit a, weshalb $\Delta(t, a) > 0$ im Bereich (76).

Sei jetzt P_4 irgend ein Punkt im Innern des ersten Quadranten, P_3 der Punkt, in welchem die durch P_4 gehende Feldextremale die y-Achse schneidet; so definieren wir nach KNESER das zum obigen Feld gehörige *Feldintegral* als das Integral J genommen vom Punkt P_0 entlang der y-Achse bis zum Punkt P_3 und von da entlang der Feldextremalen P_3P_4 bis zum Punkt P_4. Als Funktion von t und a (wie wir zur Abkürzung statt t_4, a_4 schreiben) bezeichnen wir dasselbe mit $u(t, a)$, als Funktion von x und y mit $W(x, y)$. Da

$$J_{03} = \tfrac{1}{2}y_3^2, \quad \text{und} \quad y_3 = aY(1) = 4a,$$

so ist

$$u(t, a) = 8a^2 + \int_1^t \mathfrak{F}(t, a)\,dt,$$

wo $\mathfrak{F}(t, a)$ wieder durch die Gleichung (83) von § 27 definiert ist. Bildet man jetzt die partiellen Ableitungen von $u(t, a)$ in der üblichen Weise und beachtet, daß

$$\varphi_a(1, a) = 0, \quad \psi_a(1, a) = 4, \quad F_{y'}|^1 = y_3 = 4a,$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{F}(t, a),$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t, a)\varphi_a(t, a) + \mathfrak{F}_{y'}(t, a)\psi_a(t, a),$$

also genau dieselben Ausdrücke wie in der allgemeinen Theorie für die partiellen Ableitungen des Feldintegrals, gerechnet von einer Transversalen aus (§ 31, Gleichungen (144) und (146)). Daraus folgt aber weiter, daß auch die Hamilton'schen Formeln (148) von § 31 für die partiellen Ableitungen der Funktion $W(x, y)$ nach x und y hier unverändert bestehen bleiben.

Nachdem die Gültigkeit der Hamilton'schen Formeln nachgewiesen ist, läßt sich nun leicht mit Hilfe einer passenden Modifikation der Weierstraß'schen Konstruktion beweisen, daß der unter c) bestimmte Kurvenzug $P_0P_1P_2$ einen kleineren Wert für das Integral J liefert als jede andere zulässige Kurve $\mathfrak{C}$, welche vom Punkt P_0 nach dem Punkt P_2 gezogen werden kann.

Wir setzen der Allgemeinheit halber voraus, daß die Kurve $\mathfrak{C}$ vom Punkt P_0 aus zunächst ein Stück weit der positiven y-Achse entlang läuft und diese erst im Punkt P_5 verläßt. Darin soll der Fall mit inbegriffen sein, wo der Punkt P_5 mit dem Punkt P_0 zusammenfällt, wo die Kurve also nur den Punkt P_0 mit der y-Achse gemein hat. Wegen der Bedingungen (64) und (65) liegt dann der Bogen P_5P_2 der Kurve $\mathfrak{C}$ abgesehen von seinem Anfangspunkt P_5 ganz im Innern des ersten Quadranten. Durch einen beliebigen Punkt P_4 des Bogens P_5P_2 geht also eine und nur eine Feldextremale; dieselbe möge die y-Achse im Punkt P_3 treffen. Wir betrachten alsdann das Integral J, genommen vom Punkte P_0 entlang der y-Achse bis zum Punkt P_3, von da entlang der Feldextremalen P_3P_4 bis zum Punkt P_4, und endlich vom Punkt P_4 entlang der Kurve $\mathfrak{C}$ bis zum Punkt P_2, und bezeichnen seinen Wert mit $S(s)$, unter s den Parameter des Punktes P_4 auf der Kurve $\mathfrak{C}$ verstanden, also

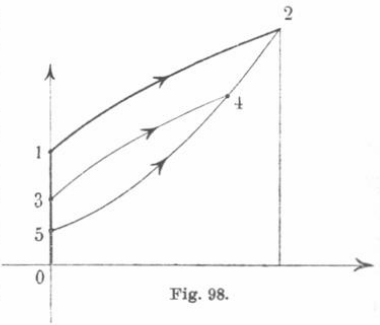


Fig. 98.

$$S(s) = J_{03} + J_{34} + \bar{J}_{42} = W(x_4, y_4) + \int_s^{s_2} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\, ds.$$

Es ist dann

$$S(s_2) = J_{01} + J_{12}, \qquad S(s_5) = J_{05} + \bar{J}_{52},$$

also

$$\Delta J = (J_{05} + \bar{J}_{52}) - (J_{01} + J_{12}) = -[S(s_2) - S(s_5)],$$

woraus sich nunmehr in der üblichen Weise der Weierstraß'sche Satz ergibt:

$$\Delta J = \int_{s_5}^{s_2} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y};\ p, q;\ \bar{x}', \bar{y}')\, ds,$$

wenn p,q die Richtungskosinus der durch den Punkt P_4 gehenden Feldextremalen in diesem Punkt bedeuten. Nun ist aber

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y};\ p, q;\ \bar{x}', \bar{y}') = \frac{\bar{y}(t\bar{y}' - \bar{x}')^2[(t^2-1)\bar{y}' + 2t\bar{x}']}{(1+t^2)(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2)}.$$

Da $t > 1$, außer im Punkt P_5, und ferner $\bar{x}' \gtreqless 0$, $\bar{y}' \gtreqless 0$, ohne daß beide gleichzeitig verschwinden, so ist

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y};\ p, q;\ \bar{x}', \bar{y}') \gtreqless 0$$

entlang dem Bogen P_5P_2, und zwar gleich Null nur in denjenigen

Punkten, in welchen die Feldextremale die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ berührt, und möglicherweise im Punkt P_5.

Daraus schließt man aber ganz wie in § 32, b) das Endresultat: *Unter allen gewöhnlichen Kurven, welche vom Punkt P_0 nach dem Punkt P_2 gezogen werden können, und welche den Bedingungen* (64) *und* (65) *genügen, liefert der Kurvenzug $P_0P_1P_2$, welcher sich aus dem Stück P_0P_1 der y-Achse und dem Newton'schen Bogen P_1P_2 vom Gefälle $+1$ im Punkt P_1 zusammensetzt, den kleinsten Wert für das Integral J.*[1])

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 44, 45 am Ende von Kap. IX.