universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Siebentes Kapitel. Die Kneser´sche Theorie

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Siebentes Kapitel.

Die Kneser'sche Theorie.

§ 43. Darboux's Methode für die Behandlung des Problems der kürzesten Linien auf einer gegebenen Fläche.[1])

Alle bisherigen Beweise für hinreichende Bedingungen waren auf den Weierstraß'schen Fundamentalsatz über die Darstellung der vollständigen Variation ΔJ durch die $\mathcal{E}$-Funktion gegründet.

Für den speziellen Fall der geodätischen Linien hat jedoch DARBOUX[2]), ausgehend von bekannten GAUSS'schen Sätzen über geodätische Parallelkoordinaten, eine wesentlich neue Methode für die Aufstellung hinreichender Bedingungen entwickelt. Diese Methode hat dann KNESER in seinem Lehrbuch systematisch auf das Problem, das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, ausgedehnt[3]) und so eine von der Weierstraß'schen unabhängige Theorie geschaffen, die gleichzeitig den Fall fester Endpunkte und denjenigen eines auf einer gegebenen Kurve beweglichen Endpunktes umfaßt und überdies die ganze Untersuchung der zweiten Variation überflüssig macht.

Im gegenwärtigen Paragraphen wollen wir als Einleitung zunächst die DARBOUX'sche Methode kurz skizzieren.

---

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 14—19 am Ende von Kap. IX.

[2]) DARBOUX, *Théorie des surfaces,* Bd. II (1889), Nr. 514—526, Bd. III (1894), Nr. 622—627.

[3]) Der fruchtbare Gedanke, Begriffsbildungen und Sätze aus der Theorie der geodätischen Linien auf das genannte allgemeine Variationsproblem auszudehnen, ist neuerdings nach verschiedenen Richtungen hin weitergeführt worden; vgl. BLISS, *A generalization of the notion angle*, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 184 und LANDSBERG, *Über die Totalkrümmung,* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. XVI (1907) p. 36 und *Über die Krümmung in der Variationsrechnung*, Mathematische Annalen, Bd. LXV (1908), p. 313.

a) **Die Gauß'schen Sätze über geodätische Parallelkoordinaten:**

Zieht man in einer Ebene von einem Punkte O Strahlen nach allen Richtungen und schneidet auf diesen Segmente von konstanter Länge ab, so bilden die Endpunkte eine Kurve (Kreis), welche auf allen Geraden der Schar senkrecht steht. Dieser triviale Satz der Elementargeometrie läßt sich als Spezialfall (oder Grenzfall) des Satzes über Parallelkurven[1]) auffassen: Schneidet man auf den Normalen einer ebenen Kurve von der Kurve aus nach derselben Seite hin Strecken konstanter Länge ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Kurve (Parallelkurve), welche die Normalen der ursprünglichen Kurve senkrecht schneidet, und umgekehrt.

Diese Sätze sind von Gauss[2]) auf beliebige geodätische Linien ausgedehnt worden:

Auf einer Fläche sei eine Kurve $\mathfrak{K}$ gegeben; konstruiert man dann in jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ die senkrecht auf $\mathfrak{K}$ stehende geodätische Linie und schneidet auf diesen geodätischen Linien, nach derselben Seite hin, Bogen von konstanter Länge ab, so bilden die Endpunkte dieser Bogen eine Kurve auf der Fläche, welche die sämtlichen geodätischen Linien orthogonal schneidet.

Umgekehrt: *Zwei orthogonale Trajektorien derselben Schar von geodätischen Linien schneiden auf den letzteren Bogen von konstanter Länge ab.* Die Sätze bleiben richtig, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ auf einen Punkt zusammenschrumpft.

Sind nun die Punkte der Kurve $\mathfrak{K}$ durch einen Parameter v bestimmt, und konstruiert man im Punkte $M(v)$ von $\mathfrak{K}$ die zu $\mathfrak{K}$ senkrechte geodätische Linie $\mathfrak{E}$ und schneidet auf ihr einen Bogen $MP = u$[3]) ab, so ist die Lage des Punktes P eindeutig bestimmt durch die beiden Größen u, v.

Wenn man sich nun auf ein solches Stück $\mathfrak{S}$ der Fläche beschränkt, daß auch umgekehrt der Punkt P eindeutig die Werte von u und v bestimmt, so kann man diese beiden Größen als krummlinige Koordinaten („Geodätische Parallelkoordinaten") auf dem Flächenstück $\mathfrak{S}$ einführen. Die Kurven: $v =$ konst. sind dann die geodätischen Linien der betrachteten Schar; die Kurven: $u =$ konst. ihre orthogonalen Trajektorien.

---

[1]) Siehe z. B. Scheffers, *Theorie der Kurven*, p. 64.

[2]) Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) art. 16; vgl. auch Knoblauch, *Krumme Flächen*, p. 151 und Scheffers, *Theorie der Flächen*, p. 434.

[3]) D. h. die Länge des Bogens ist $|u|$, während der Sinn durch das Zeichen von u bestimmt wird.

Für dieses spezielle Koordinatensystem nimmt dann der Ausdruck für das *Quadrat des Bogenelements* einer auf der Fläche gezogenen Kurve die Form an[1]):

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2. \tag{1}$$

b) **Hinreichende Bedingungen:**[2])

Wir betrachten jetzt einen ganz im Innern des Flächenstückes $\mathfrak{S}$ gelegenen Bogen $\mathfrak{E}_0$ einer geodätischen Linie: $v = v_0$ der oben eingeführten Schar $v =$ konst. Die Endpunkte von $\mathfrak{E}_0$ seien $P_1(u_1, v_0)$ und $P_2(u_2, v_0)$, wobei $u_1 < u_2$. Wir verbinden die beiden Punkte P_1, P_2 durch eine beliebige, ganz auf dem Flächenstück $\mathfrak{S}$ gelegene Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$, die durch die Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{C}}: \qquad u = \bar{u}(\tau), \qquad v = \bar{v}(\tau), \qquad \tau_1 \overset{=}{<} \tau \overset{=}{<} \tau_2,$$

dargestellt sein möge, so daß:

$$\bar{u}(\tau_1) = u_1, \quad \bar{u}(\tau_2) = u_2; \quad \bar{v}(\tau_1) = v_0, \quad \bar{v}(\tau_2) = v_0.$$

Die Länge des Bogens $\bar{\mathfrak{C}}$ ist dann gegeben durch das bestimmte Integral

$$\bar{J} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{d\tau}\right)^2 + m^2\left(\frac{d\bar{v}}{d\tau}\right)^2}\, d\tau.$$

Andererseits ist die Länge des geodätischen Bogens $\mathfrak{E}_0$ nach der Bedeutung der Größe u gegeben durch

$$J = u_2 - u_1.$$

Nun kann man aber schreiben (und dieser Kunstgriff ist der Kernpunkt des Beweises):

$$u_2 - u_1 = \bar{u}(\tau_2) - \bar{u}(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\bar{u}}{d\tau}\, d\tau.$$

Daher kommt

$$\Delta J = \bar{J} - J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sqrt{\left(\frac{d\bar{u}}{d\tau}\right)^2 + m^2\left(\frac{d\bar{v}}{d\tau}\right)^2} - \frac{d\bar{u}}{d\tau}\right] d\tau. \tag{2}$$

Der Integrand ist, wie unmittelbar ersichtlich, niemals negativ; er kann nur dann im ganzen Intervall $[\tau_1 \tau_2]$ verschwinden, wenn $\frac{d\bar{v}}{d\tau} \equiv 0$ in $[\tau_1 \tau_2]$, d. h. wenn die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{E}_0$ zusammenfällt. Daraus folgt aber, daß unter allen Kurven, welche auf dem Flächenstück

[1]) Gauss, loc. cit. art. 19; vgl. auch Knoblauch, *Krumme Flächen*, p. 152 und Scheffers, *Theorie der Flächen*, p. 441.

[2]) Nach Darboux, *Théorie des surfaces*, Bd. II, Nr. 521.

$\mathfrak{S}$ von P_1 nach P_2 gezogen werden können, *die geodätische Linie* $\mathfrak{E}_0$ *in der Tat die kürzeste ist.*

Es mag auf den ersten Blick auffallend erscheinen, daß beim Beweis von der Jacobi'schen Bedingung gar nicht die Rede war. Dieselbe ist jedoch implizite in der über das Flächenstück $\mathfrak{S}$ gemachten Annahme enthalten, daß jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ die Größen u, v eindeutig bestimmen soll. Das läuft darauf hinaus, daß die geodätischen Linien der betrachteten Schar ein Feld um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ bilden.

c) **Der Enveloppensatz:**

Die *Notwendigkeit* der Jacobi'schen Bedingung leitet Darboux[1]) ohne Benutzung der zweiten Variation aus einem bekannten Satz über die Enveloppe einer Schar von geodätischen Linien ab: Die Schar von geodätischen Linien durch den Punkt P_1 möge eine Enveloppe $\mathfrak{F}$ besitzen, welche den Bogen $\mathfrak{E}_0$ in einem Punkt P_1' berührt; und zwar soll der positive Sinn auf $\mathfrak{F}$ so gewählt sein, daß in P_1' die positiven Tangenten beider Kurven zusammenfallen. Ist dann $P_1 P_3$ eine zweite geodätische Linie der Schar durch P_1, welche die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in einem Punkt P_3 berührt, der auf $\mathfrak{F}$ vor P_1' liegt, alsdann besagt der erwähnte Enveloppensatz, daß

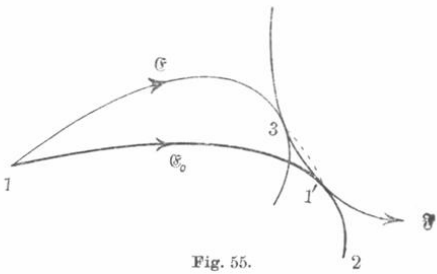

Fig. 55.

$$\text{arc } P_1 P_3 + \text{arc } P_3 P_1' = \text{arc } P_1 P_1'. \tag{3}$$

Wenn nun der Punkt P_1' zwischen P_1 und P_2 liegt, oder mit P_2 zusammenfällt, so stellt die aus der geodätischen Linie $P_1 P_3$, dem Bogen $P_3 P_1'$ der Enveloppe und dem Stück $P_1' P_2$ von $\mathfrak{E}_0$ zusammengesetzte Kurve eine zulässige Variation des Bogens $\mathfrak{E}_0$ dar, falls die geodätische Linie $P_1 P_3$ hinreichend nahe bei $\mathfrak{E}_0$ gewählt ist. Für diese Variation ist aber nach dem Enveloppensatz: $\Delta J = 0$.

Und da die Enveloppe selbst nie eine geodätische Linie ist[2]), so kann man den Bogen $P_3 P_1'$ von $\mathfrak{F}$ durch einen kürzeren Bogen ersetzen und somit ΔJ sogar negativ machen. Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ liefert also kein Minimum[3]) für das Integral J, womit die Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung bewiesen ist[4]).

[1]) Vgl. Darboux, *Théorie des surfaces,* Bd. II, Nr. 526 und Bd. III, Nr. 622.

[2]) Siehe Darboux. loc. cit., Bd. III, p. 88.

[3]) Abgesehen von gewissen Ausnahmefällen, siehe unten § 47.

[4]) Sogar noch etwas mehr, da auch $P_1' = P_2$ im allgemeinen als unzulässig nachgewiesen ist.

Die Methode, die wir soeben in ihren Umrissen skizziert haben, läßt sich mit geringen Modifikationen auch auf den Fall anwenden, wo nur ein Endpunkt fest, dagegen der andere auf einer orthogonalen Trajektorie der Schar von geodätischen Linien beweglich ist.

§ 44. Der Kneser'sche Transversalensatz und der verallgemeinerte Enveloppensatz.

Wir wenden uns nunmehr zur Verallgemeinerung der beiden im vorigen Paragraphen angeführten Fundamentalsätze über Scharen von geodätischen Linien. Dazu ist es nur nötig, die Entwicklungen von § 31, b) und c) heranzuziehen, jedoch unter etwas modifizierten Voraussetzungen.

a) **Die Funktion** $u(t, a)$:

Wir betrachten eine Schar von Extremalen

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{4}$$

welche die spezielle Extremale

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \overset{=}{<} t \overset{=}{<} t_2$$

für $a = a_0$ enthält, und welche in dem Bereich

$$T_1 \overset{=}{<} t \overset{=}{<} T_2, \qquad |a - a_0| \overset{=}{<} d' \tag{5}$$

die in § 27, d) unter A) bis D) aufgezählten Eigenschaften besitzt, wobei $T_1 < t_1$, $t_2 < T_2$.

Überdies soll die Funktion F entlang dem Bogen $\mathfrak{E}_0$ von Null verschieden sein, also in der Bezeichnung (83) von § 27:

$$\mathfrak{F}(t, a_0) \neq 0 \text{ in } [t_1 t_2]. \tag{6}$$

Wir können dann stets nach § 21, b) die Größen T_1, T_2 so nahe bei t_1, t_2 und die positive Größe d' so klein wählen, daß die Ungleichung

$$\mathfrak{F}(t, a) \neq 0 \tag{7}$$

im ganzen Bereich (5) gilt.

Dagegen setzen wir in der gegenwärtigen Untersuchung nicht voraus, daß die Extremalenschar (4) ein Feld um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ bildet. Es entspricht also zwar auch jetzt noch jedem Punkt (t, a) des Rechtecks (5) auf Grund der Transformation (4) ein Punkt der x, y-Ebene, den wir „den Punkt $\{t, a\}$" nennen wollen, und jeder Kurve

$$\mathfrak{C}': \qquad t = t(\tau), \qquad a = a(\tau)$$

im Bereich (5) eine Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad x = \varphi(t(\tau), a(\tau)), \qquad y = \psi(t(\tau), a(\tau))$$

der x,y-Ebene, die wir entsprechend „die Kurve $\{t = t(\tau),\ a = a(\tau)\}$" nennen, und die übrigens, wie in § 31, b), auch in einen Punkt degenerieren kann.

Aber die Umkehrung ist jetzt nicht mehr richtig; daher werden wir jetzt nicht mehr unmittelbar von einem Punkt oder einer Kurve der x,y-Ebene ausgehen, sondern immer zuerst von einem Punkt oder einer Kurve in der t,a-Ebene und dann deren Bild in der x,y-Ebene konstruieren. Gerade dies soll durch die obige Bezeichnung ausgedrückt werden.

Abgesehen hiervon verfahren wir nun zunächst ganz wie in § 31, b). Wir konstruieren eine Transversale $\mathfrak{K}_0\{t = \chi_0(a)\}$ der Schar (4) durch einen Punkt $P_0\{t_0, a_0\}$ von[1]) $\mathfrak{E}_0^*$, wobei:

$$T_1 \overset{=}{<} t_0 \overset{=}{<} T_2,$$

indem wir die Funktion: $t = \chi_0(a)$ durch die Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}\,\frac{dt}{da} + \mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a = 0 \tag{8}$$

und die Anfangsbedingung: $\chi_0(a_0) = t_0$ bestimmen, was nach § 23, a) wegen der Voraussetzung (6) stets möglich ist. Sind dann T_1', T_2' zwei beliebige den Ungleichungen

$$T_1 < T_1' < t_1, \qquad t_2 < T_2' < T_2$$

genügende Größen, und wird t_0 auf das Intervall $T_1' \overset{=}{<} t_0 \overset{=}{<} T_2'$ beschränkt, so läßt sich nach § 23, a), Zusatz, eine von t_0 unabhängige positive Größe $d \overset{=}{<} d'$ bestimmen, derart, daß die Lösung $\chi_0(a)$ in dem Intervall $[a_0 - d,\ a_0 + d]$ existiert, von der Klasse C' ist und der Ungleichung: $T_1 < \chi_0(a) < T_2$ genügt.

Indem wir unter (t, a) irgend einen Punkt des Bereiches

$$T_1 \overset{=}{<} t \overset{=}{<} T_2, \qquad |a - a_0| \overset{=}{<} d \tag{9}$$

verstehen, definieren wir, wie in § 31, b), die Funktion $u(t, a)$ durch das bestimmte Integral

$$u(t, a) = \int_{t^0}^{t} \mathfrak{F}(t, a)\,dt, \tag{10}$$

wobei wieder zur Abkürzung: $\chi_0(a) = t^0$ gesetzt ist.

Die Kurve

$$t = \chi_0(a)$$

in der t,a-Ebene zerlegt das Rechteck (9) in zwei getrennte Teile; in dem einen ist: $t \overset{=}{>} \chi_0(a)$, im andern $t \overset{=}{<} \chi_0(a)$. Den ersten der beiden Teile bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}$.

[1]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 27, c).

Falls[1]) dann der Punkt (t, a) dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehört, so stellt die Funktion $u(t, a)$ den Wert des Integrals

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt$$

dar, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ der Schar (4) von deren Schnittpunkt $P_4\{t = \chi_0(a),\ a = a\}$ mit der Transversalen $\mathfrak{K}_0$ bis zum Punkt $P_3\{t, a\}$.

Die Formeln von § 31, c) für die partiellen Ableitungen der Funktion $u(t, a)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{F}, \quad \frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a \tag{11}$$

bleiben unverändert gelten. Bewegt sich daher der Punkt $P_3\{t, a\}$ entlang einer Kurve

$$\mathfrak{K}_1: \qquad x = \varphi(t(\tau),\ a(\tau)) \equiv \tilde{x}(\tau), \quad y = \psi(t(\tau),\ a(\tau)) \equiv \tilde{y}(\tau), \tag{12}$$

so geht die Funktion $u(t, a)$ in eine Funktion von τ über, für deren Ableitung man nach (11) erhält:

$$\frac{du}{d\tau} = \mathfrak{F}\frac{dt}{d\tau} + [\mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a]\frac{da}{d\tau},$$

was sich mit Hilfe von Gleichung (10) von § 25 auf

$$\frac{du}{d\tau} = \mathfrak{F}_{x'}\frac{d\tilde{x}}{d\tau} + \mathfrak{F}_{y'}\frac{d\tilde{y}}{d\tau} \tag{13}$$

reduziert, wobei die Argumente von $u, \mathfrak{F}_{x'}, \mathfrak{F}_{y'}$ sind:

$$t = t(\tau), \quad a = a(\tau).$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun die Verallgemeinerung der beiden Sätze über Scharen geodätischer Linien, indem man die Kurve $\mathfrak{C}$ spezialisiert.

b) **Der Transversalensatz:**[2])

Wir wenden die Formel (13) zunächst auf den Fall an, wo die Kurve $\mathfrak{K}_1$ ebenfalls eine Transversale der Schar (4) ist; und zwar möge sie das Bild der Kurve

$$t = \chi_1(a)$$

in der t, a-Ebene sein, wo dann $\chi_1(a)$ wieder der Differentialgleichung (8) genügt.

Alsdann ist entlang $\mathfrak{K}_1$

$$\mathfrak{F}_{x'}(t, a)\frac{d\tilde{x}}{d\tau} + \mathfrak{F}_{y'}(t, a)\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = 0, \tag{14}$$

---

[1]) Und im allgemeinen auch nur dann, weil wir stets voraussetzen, daß die untere Grenze des Integrals J kleiner ist als die obere; vgl. § 25, a) und b).

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 3, 13, 20, 21 am Ende von Kap. IX.

und daher nach (13), wobei im gegenwärtigen Fall $a = \tau$,

$$\frac{du}{d\tau} = 0, \quad \text{also} \quad u(\chi_1(a), a) = \text{konst.} \tag{15}$$

Die Funktion $u(t, a)$ ist also entlang jeder Transversalen der Schar konstant.

Wir wollen nun annehmen, es sei: $\chi_1(a_0) > \chi_0(a_0)$, und auch der Anfangswert $\chi_1(a_0)$ sei in dem Intervall $[T_1' T_2']$ enthalten. Alsdann existiert nach der Definition der Größe d (§ 44, a)) auch die Lösung $\chi_1(a)$ im ganzen Intervall $[a_0 - d, a_0 + d]$, ist in diesem Intervall von der Klasse C' und genügt in demselben der Ungleichung: $\chi_1(a) > \chi_0(a)$. Letzteres folgt aus (7) auf Grund des Satzes von § 23, c).

Hieraus folgt aber nach a), daß die Funktion $u(\chi_1(a), a)$ gleich ist dem Integral J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ der Schar (4), von deren Schnittpunkt $\{\chi_0(a), a\}$ mit der Transversalen $\mathfrak{K}_0$ bis zum Schnittpunkt $\{\chi_1(a), a\}$ mit der Transversalen $\mathfrak{K}_1$. Somit haben wir folgenden, von Kneser herrührenden Fundamentalsatz[1]) bewiesen:

Zwei Transversalen derselben Extremalenschar schneiden auf den verschiedenen Extremalen der Schar Bogen aus, für welche das Integral J denselben konstanten Wert besitzt.

Oder ausführlicher: Sind $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ zwei Extremalen der Schar (4) und P', P'', resp. Q', Q'' ihre wie oben bestimmten Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_0$, resp. $\mathfrak{K}_1$, so ist

$$J_{\mathfrak{E}'}(P'Q') = J_{\mathfrak{E}''}(P''Q''). \tag{16}$$

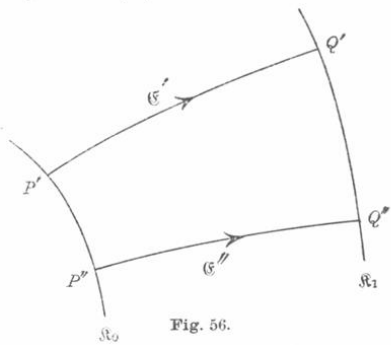

Fig. 56.

Umgekehrt: *Schneidet man auf den verschiedenen Extremalen der Schar von ihren Schnittpunkten mit einer Transversalen $\mathfrak{K}_0$ aus, nach derjenigen Seite zu, auf welcher t wächst, Bogen ab, welche für das Integral J denselben konstanten Wert liefern, so liegen die Endpunkte dieser Bogen wieder auf einer Transversalen der Schar.*

Denn ist: $u(t, a) = \text{konst.}$ entlang der Kurve $\mathfrak{K}_1$, so folgt $\frac{du}{d\tau} = 0$, also ist entlang $\mathfrak{K}_1$ die Gleichung (14) erfüllt, welche ausdrückt, daß $\mathfrak{K}_1$ eine Transversale der Schar ist.

Da für den speziellen Fall der geodätischen Linien die Transversalen

[1]) Kneser, *Lehrbuch*, § 15. Der Satz ist bereits in § 20, a) und § 31, c), Ende, bewiesen worden unter der Voraussetzung, daß die Extremalenschar (4) ein Feld bildet. Diese Voraussetzung mußte hier fallen gelassen werden, um auch den Fall einzubegreifen, wo die Transversalen sich auf Punkte zusammenziehen.

in die orthogonalen Trajektorien übergehen, so ist der Transversalensatz in der Tat die Verallgemeinerung des angeführten Gauß'schen Satzes.

Der Satz und seine Umkehrung bleiben richtig, wenn eine der beiden Kurven $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$ oder beide in der in § 31, b) erläuterten Weise in einen Punkt ausarten. Man erhält so folgende Zusätze:

Zusatz I[1]*:* Ist $\mathfrak{K}_1$ eine Transversale der Extremalenschar durch einen festen Punkt P_0, so hat das Integral J vom Punkte P_0 bis zur Transversalen $\mathfrak{K}_1$ auf den verschiedenen Extremalen der Schar denselben konstanten Wert, und umgekehrt.

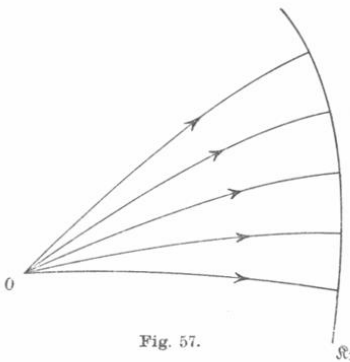

Fig. 57.

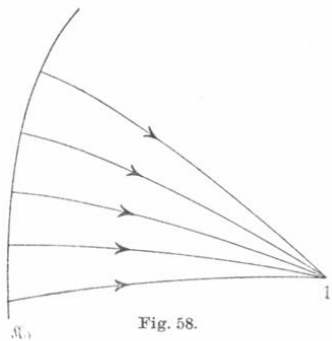

Fig. 58.

Zusatz II: Ist $\mathfrak{K}_0$ eine Transversale der durch den festen Punkt P_1 gehenden Extremalenschar, so hat das Integral J von der Kurve $\mathfrak{K}_0$ aus bis zum Punkte P_1 auf den verschiedenen Extremalen der Schar denselben konstanten Wert, und umgekehrt.

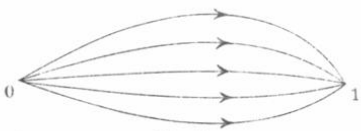

Fig. 59.

Zusatz III[2]*:* Wenn die Extremalen durch einen Punkt P_0 alle durch einen zweiten Punkt P_1 gehen, so hat das Integral J vom Punkte P_0 nach dem Punkte P_1 auf den verschiedenen Extremalen der Schar denselben konstanten Wert.

c) **Der verallgemeinerte Enveloppensatz:**[3])

Wir wenden jetzt zweitens die Formel (13) auf den Fall an, wo die durch (12) definierte Kurve $\mathfrak{K}_1$ die Enveloppe der Extremalenschar (4) ist und daher sämtliche Extremalen der Schar berührt.

---

[1]) Auf geodätische Linien angewandt ist dies der Gauß'sche Satz über geodätische Polarkoordinaten, Gauss, loc. cit. Art. 15.

[2]) Ein Beispiel für diesen Fall bieten die geodätischen Linien auf der Kugel: die größten Kreise durch einen Punkt P_0 gehen alle durch den gegenüberliegenden Punkt P_1 der Kugel. Vgl. auch § 47.

[3]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 13, 21 am Ende von Kap. IX.

Dies bedarf jedoch einer genaueren Formulierung:

Der Punkt τ der Kurve $\mathfrak{K}_1$ fällt mit dem Punkte $t = t(\tau)$ der Extremalen $a = a(\tau)$ der Schar (4) zusammen. Insbesondere sei: $a(\tau_0) = a_0$; $t(\tau_0) = t_0''$. Wir nehmen an, daß $t_0'' > t_0$ und

$$\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)^2 \Big|^{\tau=\tau_0} \neq 0.$$

Dann läßt sich ein den Wert τ_0 enthaltendes Intervall $[\tau'\tau'']$ angeben, in welchem gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$t(\tau) - \chi_0(a(\tau)) > 0,^{1)} \tag{17}$$

$$\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)^2 \neq 0 \tag{18}$$

gelten.

Wir setzen voraus, daß wenigstens für jedes τ in $[\tau'\tau'']$ die Kurve $\mathfrak{K}_1$ die Extremale $a = a(\tau)$ in dem oben näher charakterisierten gemeinsamen Punkt berührt, so daß also

$$m\varphi_t = \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \qquad m\psi_t = \frac{d\tilde{y}}{d\tau}, \tag{19}$$

wo m ein von τ abhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Aus (18) und aus der für den ganzen Bereich (5) vorausgesetzten Ungleichung: $\varphi_t^2 + \psi_t^2 \neq 0$ folgt, daß die Funktion $m(\tau)$ in $[\tau'\tau'']$ stetig und von Null verschieden ist. Sie kann also ihr Zeichen nicht wechseln. Wir dürfen[2]) stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$m(\tau) > 0 \text{ in } [\tau'\tau''],$$

d. h. *daß die positiven Tangentenrichtungen der beiden Kurven in ihrem Berührungspunkte zusammenfallen.*

Nunmehr folgt aber aus (19) auf Grund der Homogeneitätsrelationen (13) von § 25

$$\mathfrak{F}_{x'}(t(\tau), a(\tau)) = F_{x'}\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right),$$

$$\mathfrak{F}_{y'}(t(\tau), a(\tau)) = F_{y'}\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right).$$

Daher nimmt die Gleichung (13) unter Benutzung der Homogeneitätsrelation (10) von § 25 die Form an

$$\frac{du(t(\tau), a(\tau))}{d\tau} = F\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right). \tag{20}$$

---

[1]) D. h. der Bogen $[\tau'\tau'']$ der Kurve $\mathfrak{K}_1$ ist das Bild einer Kurve in der t, a-Ebene, welche ganz in dem unter a) definierten Bereich $\mathfrak{B}$ liegt.

[2]) Sollte $m < 0$ sein, so können wir durch Umkehrung des positiven Sinnes auf der Kurve $\mathfrak{K}_1$ vermittels der Transformation $\tau = -\sigma$ bewirken, daß für die so transformierte Kurve m positiv ist.

Integrieren wir diese Gleichung nach τ von τ' bis τ'' $(\tau' < \tau'')$, so erhalten wir

$$u(t(\tau''), a(\tau'')) - u(t(\tau'), a(\tau')) = \int_{\tau'}^{\tau''} F\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{d\tau}, \frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right) dt. \tag{21}$$

Erinnern wir uns jetzt der Bedeutung der Funktion $u(t, a)$, so erhalten wir, da die Ungleichung (17) erfüllt ist, den *verallgemeinerten Enveloppensatz*[1]:

Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine Transversale der Extremalenschar (4) *und $\mathfrak{F}$ die Enveloppe der Schar. Ferner seien $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}''$ zwei Extremalen der Schar, welche von den Punkten P', P'' von $\mathfrak{K}_0$ ausgehen und $\mathfrak{F}$ in den Punkten Q', Q'' berühren, alsdann ist*

$$J_{\mathfrak{E}''}(P''Q'') = J_{\mathfrak{E}'}(P'Q') + J_{\mathfrak{F}}(Q'Q''). \tag{22}$$

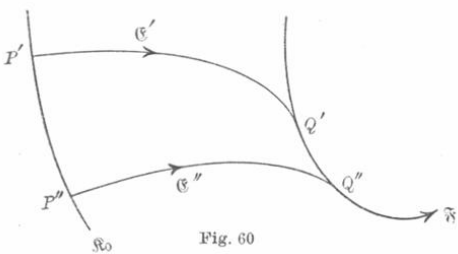

Fig. 60

Dabei ist vorausgesetzt, daß der positive Sinn auf $\mathfrak{F}$ in der oben angegebenen Weise festgelegt worden ist, und daß der Punkt Q' auf $\mathfrak{F}$ dem Punkt Q'' vorangeht.

Der Satz bleibt richtig, wenn die Kurve $\mathfrak{K}_0$ in einen Punkt degeneriert, in welchem Falle wir den *Zusatz* erhalten:

$$J_{\mathfrak{E}''}(PQ'') = J_{\mathfrak{E}'}(PQ') + J_{\mathfrak{F}}(Q'Q''), \tag{23}$$

wo PQ', PQ'' zwei Extremalen der Schar durch den Punkt P sind und $\mathfrak{F}$ die Enveloppe der Schar.

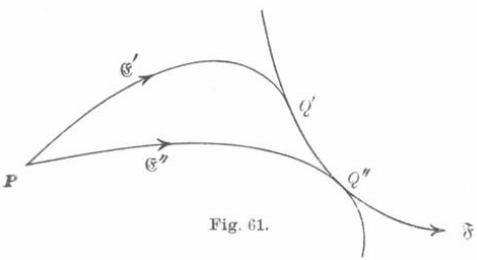

Fig. 61.

Beide Sätze behalten ihre Gültigkeit, wenn $\frac{d\tilde{x}}{d\tau}$ und $\frac{d\tilde{y}}{d\tau}$ beide für $\tau = \tau''$ verschwinden, d. h. wenn die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in Q'' eine *Spitze* besitzt, wenn nur die Ungleichung (18) für $\tau' \overline{\overline{<}} \tau < \tau''$ erfüllt bleibt.

---

[1]) Für den speziellen Fall, wo $\mathfrak{K}_0$ in einen Punkt degeneriert, gibt den Satz schon Zermelo in seiner Dissertation, p. 27, wo er denselben mittels des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes herleitet. Der Satz in seiner allgemeinen Form rührt von Kneser her, siehe Mathematische Annalen Bd. L (1898) p. 27. Der einfachste Fall des Satzes ist der bekannte Satz über die *Evolute einer ebenen Kurve.*

Der Satz findet seine Ergänzung in den Entwicklungen des § 47, a), wo die Existenz der Enveloppe nachgewiesen wird.

Um dies zu zeigen, integriert man die Gleichung (20) zunächst von τ' bis $\tau'' - \varepsilon$ und geht dann zur Grenze $L\varepsilon = +0$ über.[1])

§ 45. Transformation des Integrals J durch eine Punkttransformation.

Indem wir uns jetzt der Verallgemeinerung der in § 43, a) angeführten Resultate über die Einführung geodätischer Parallelkoordinaten zuwenden, betrachten wir zunächst im allgemeinen die Frage der Einführung von krummlinigen Koordinaten in das Integral J, oder, was damit gleichbedeutend ist, die Wirkung einer Punkttransformation auf das Integral J.

a) **Allgemeine Vorbemerkungen:**

Wir führen an Stelle der bisher gebrauchten rechtwinkligen Koordinaten x, y irgendein System krummliniger Koordinaten ein:

$$u = U(x, y), \qquad v = V(x, y). \tag{24}$$

Dabei mögen die Funktionen $U(x, y)$, $V(x, y)$ von der Klasse C'' sein in einem Bereich $\mathfrak{S}$ der x, y-Ebene, der in dem in § 25, b) eingeführten Bereich $\mathfrak{R}$ enthalten ist; überdies soll in $\mathfrak{S}$ die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen von Null verschieden sein:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} \neq 0 \text{ in } \mathfrak{S}. \tag{25}$$

Die Transformation (24) läßt sich auch als „Punkttransformation“[2]) auffassen, indem man die neuen Variabeln u, v ihrerseits als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer u, v-Ebene deutet. Dabei bezeichnen wir das Bild des Bereiches $\mathfrak{S}$ in der u, v-Ebene mit $\mathfrak{A}$ und setzen des weiteren voraus, daß die durch die Transformation (24) definierte Beziehung zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ ein-eindeutig sein soll. Aus den Sätzen über implizite Funktionen folgt dann, daß die alsdann für den Bereich $\mathfrak{A}$ eindeutig definierten inversen Funktionen

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v) \tag{26}$$

ebenfalls von der Klasse C'' sind, und daß ihre Funktionaldeterminante D in $\mathfrak{A}$ ebenfalls von Null verschieden ist:

$$D = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A}. \tag{27}$$

---

[1]) Die beiden in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze lassen sich in etwas anderer Fassung auch mittels der Sätze von § 37 über das Extremalenintegral beweisen, was auf eine Verallgemeinerung der von Darboux, *loc. cit.*, für den Fall der geodätischen Linien benutzten Methode hinausläuft.

[2]) Vgl. über Punkttransformationen z. B. Lie-Scheffers, *Berührungstransformationen,* Kap. 1.

Wir betrachten jetzt unser Integral

$$J_{\mathfrak{C}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau, \tag{28}$$

genommen entlang irgendeiner gewöhnlichen, ganz im Bereich $\mathcal{S}$ liegenden Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad \tau_1 \overset{=}{<} \tau \overset{=}{<} \tau_2,$$

von einem Punkt $Q_1(\tau_1)$ nach einem Punkte $Q_2(\tau_2)$.

Führen wir dann in das Integral $J_{\mathfrak{C}}$ statt der Variabeln x, y die neuen Variabeln u, v ein und bezeichnen mit $G(u, v, u', v')$ die durch die Gleichung

$$G(u, v, u', v') = F(X, Y, X_u u' + X_v v', Y_u u' + Y_v v') \tag{29}$$

definierte Funktion der vier unabhängigen Variabeln u, v, u', v', so geht das Integral $J_{\mathfrak{C}}$ über in das Integral

$$J'_{\mathfrak{C}'} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G\left(u, v, \frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}\right) d\tau, \tag{30}$$

genommen entlang dem Bild $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ in der u, v-Ebene:

$$\mathfrak{C}': \qquad u = U(x(\tau), y(\tau)) \equiv u(\tau), \qquad v = V(x(\tau), y(\tau)) \equiv v(\tau),$$

vom Punkt Q'_1 (dem Bild des Punktes Q_1) zum Punkt Q'_2 (dem Bild des Punktes Q_2). Die Kurve $\mathfrak{C}'$ ist ebenfalls eine gewöhnliche Kurve.

Aus der Definition der Funktion G und den Homogeneitätseigenschaften der Funktion F folgt, daß auch die Funktion G die Homogeneitätsrelation

$$G(u, v, ku', kv') = k\, G(u, v, u', v'), \qquad k > 0 \tag{31}$$

erfüllt. Daher ist auch der Wert des Integrals $J'_{\mathfrak{C}'}$ von der Wahl des Parameters unabhängig.

Aus der Gleichung

$$J'_{\mathfrak{C}'} = J_{\mathfrak{C}} \tag{32}$$

folgt: Wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ das Integral J zu einem Minimum macht, so macht auch ihr Bild $\mathfrak{C}'$ das Integral J' zu einem Minimum und umgekehrt. Wir sagen daher, das Problem, das Integral J in der x, y-Ebene zu einem Minimum zu machen, und das Problem, das Integral J' in der u, v-Ebene zu einem Minimum zu machen, seien *„äquivalente Probleme“*.

b) **Invarianten der Funktion $F(x, y, x', y')$:**

Die Gesamtheit aller Punkttransformationen (26) bildet eine Gruppe. Adjungiert man den Transformationsgleichungen (26) noch die Gleichungen

$$x' = X_u u' + X_v v', \qquad y' = Y_u u' + Y_v v', \tag{33}$$

die man aus (26) ableitet, indem man für u, v Funktionen von τ einsetzt und dann nach τ differentiiert, so erhält man eine Gruppe von Transformationen zwischen den Variabeln x, y, x', y' einerseits und den Variabeln u, v, u', v' andererseits, die sogenannte Gruppe der *„erweiterten Punkttransformationen“*[1]). Diesen Prozeß der Erweiterung kann man weiter fortsetzen, indem man den Gleichungen (26) und (33) die durch nochmalige Differentiation nach τ abgeleiteten Gleichungen

$$\begin{aligned} x'' &= X_u u'' + X_v v'' + X_{uu} u'^2 + 2 X_{uv} u' v' + X_{vv} v'^2, \\ y'' &= Y_u u'' + Y_v v'' + Y_{uu} u'^2 + 2 Y_{uv} u' v' + Y_{vv} v'^2 \end{aligned} \tag{34}$$

adjungiert, usw.

Es sei jetzt

$$\Phi_F(x, y; x', y'; x'', y''; \ldots)$$

eine Funktion der angegebenen Argumente und außerdem der Funktion F und einiger partieller Ableitungen von F; ferner sei

$$\Phi_G(u, v; u', v'; u'', v'' \ldots)$$

die genau in derselben Weise aus den Variabeln $u, v; u', v'; u'', v'' \ldots$ und der Funktion G und ihren partiellen Ableitungen gebildete Funktion. Wir sagen alsdann, die Funktion Φ_F sei eine *absolute Invariante der Funktion F* in Beziehung auf die Gruppe der Punkttransformationen (26) und ihrer Erweiterungen, wenn

$$\Phi_G(u, v; u', v'; u'', v''; \ldots) = \Phi_F(x, y; x', y'; x'', y''; \ldots) \tag{35}$$

in dem Sinn, daß diese Gleichung bestehen soll für alle Wertsysteme $x, y; x', y'; x'', y''; \ldots$ einerseits und: $u, v; u', v'; u'', v'' \ldots$ andererseits, welche durch die Transformationsgleichungen (26), (33), (34) usw. verbunden sind, und zwar soll dies gelten für die Gesamtheit aller Punkttransformationen. Dagegen nennen wir Φ_F eine *Invariante vom Index r*, wenn in demselben Sinn

$$\Phi_G(u, v; u', v'; u'', v''; \ldots) = D^r \Phi_F(x, y; x', y'; x'', y''; \ldots), \tag{36}$$

wo D, wie oben, die Funktionaldeterminante von X und Y bedeutet.

Die einfachste, allerdings triviale, absolute Invariante ist die Funktion F selbst.

[1]) Vgl. Lie-Scheffers, *Berührungstransformationen*, p. 12.

Ferner ist F_1 eine Invariante vom Index 2,

$$G_1 = D^2 F_1. \tag{37}$$

Denn durch Differentiation der Identität (29) nach u' und v' folgt

$$G_{u'} = F_{x'} X_u + F_{y'} Y_u, \quad G_{v'} = F_{x'} X_v + F_{y'} Y_v, \tag{38}$$

wobei die Argumente von $F_{x'}, F_{y'}$ dieselben sind wie in (29). Aus (38) erhält man durch nochmalige Differentiation nach u'

$$\begin{aligned} G_{u'u'} &= F_{x'x'} X_u^2 + 2 F_{x'y'} X_u Y_u + F_{y'y'} Y_u^2 \\ &= F_1 (X_u y' - Y_u x')^2 = v'^2 D^2 F_1 = v'^2 G_1. \end{aligned}$$

Ebenso verifiziert[1]) man leicht, daß die linke Seite der Euler'schen Differentialgleichung eine Invariante vom Index 1 ist:

$$\begin{aligned} T_G &\equiv G_{uv'} - G_{vu'} + G_1 (u'v'' - v'u'') \\ &= D[F_{xy'} - F_{yx'} + F_1 (x'y'' - y'x'')] \equiv D T_F. \end{aligned} \tag{39}$$

Hieraus folgt, daß das Bild einer Extremalen des ursprünglichen Problems wieder eine Extremale für das neue Problem ist, während die Gleichung (37) die Invarianz der Legendre'schen Bedingung ausdrückt, Resultate, wie sie aus der Äquivalenz der beiden Probleme a priori zu erwarten sind.

Aus (37) und (39) folgt, daß der Quotient

$$\frac{T_F}{F_1^{\frac{1}{2}}}$$

eine absolute Invariante ist. Dazu bemerken wir noch folgendes: Denken wir uns diesen Quotienten für irgend eine Kurve $\mathfrak{C}$ mit dem Parameter τ berechnet und wenden dann eine Parametertransformation[2])

$$\tau = \chi(\tau'), \qquad \chi'(\tau') > 0$$

an, so folgt aus den Homogeneitätseigenschaften von F, daß der obige Quotient bei dieser Operation nicht invariant bleibt, daß aber *der Quotient*

$$S = \frac{T_F}{F_1^{\frac{1}{2}} F^{\frac{3}{2}}} \tag{40}$$

nicht nur bei jeder Punkttransformation (26), *sondern auch bei gleichzeitiger Ausführung einer beliebigen Parametertransformation invariant bleibt*[3]), da nach § 25 Gleichung (9) und (13)

[1]) Vgl. auch unten § 45, c). [2]) Vgl. § 25, a).

[3]) Siehe die auf p. 226, Fußnote [1]) zitierte Dissertation von Underhill, die inzwischen in den Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IX (1908) p. 316 publiziert worden ist, und Landsberg, Mathematische Annalen, Bd. LXV (1908) p. 329, der die Größe S die *extremale Krümmung* der betrachteten Kurve im Punkt x, y nennt.

$$F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau'}, \frac{dy}{d\tau'}\right) = \left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right) F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dx}{d\tau'}, \frac{dy}{d\tau'}\right) = \left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)^{-3} F_1\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

und nach einer einfachen Rechnung

$$T_F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau'}, \frac{dy}{d\tau'}, \frac{d^2x}{d\tau'^2}, \frac{d^2y}{d\tau'^2}\right) = T_F\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}\right).$$

Für den Fall der geodätischen Linien ist die Invariante S mit der *geodätischen Krümmung* identisch, wie aus den Gleichungen (39) und (95) des fünften Kapitels ersichtlich ist.

Neben den Variabeln $x', y'; x'' y''; \ldots$ kann man auch, ähnlich wie in der gewöhnlichen Invariantentheorie der Formen, eine zweite Reihe *„kogredienter Variabeln"* $\dot{x}, \dot{y}; \ldots$, resp. $\dot{u}, \dot{v} \ldots$ einführen, die sich mittels der Formeln

$$\dot{x} = X_u \dot{u} + X_v \dot{v}, \quad \dot{y} = Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v} \tag{41}$$

usw. transformieren, was zu einer entsprechenden Erweiterung der Gruppe und des Invariantenbegriffes führt.

Die einfachste derartige Invariante ist die „identische Invariante": $x'\dot{y} - y'\dot{x}$, für welche

$$u'\dot{v} - v'\dot{u} = D^{-1}(x'\dot{y} - y'\dot{x}). \tag{42}$$

Hierauf beruht die Invarianz der Jacobi'schen Bedingung.[1]) Ist nämlich

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a)$$

die Extremalenschar durch den Punkt P_1 der Extremalen $\mathfrak{E}_0$, und identifiziert man die Größen x', y' mit φ_t, ψ_t, dagegen $\dot{x}, \dot{y}$ mit φ_a, ψ_a, was gestattet ist, da die hierdurch einander gleichgesetzten Größen sich in derselben Weise transformieren, so geht $x'\dot{y} - y'\dot{x}$ in die Funktionaldeterminante $\Delta(t, a)$ über, woraus nach (42) und nach § 29, b) folgt, daß zwei konjugierte Punkte des ursprünglichen Problems durch die Transformation (24) in zwei konjugierte Punkte des neuen Problems transformiert werden.

Eine andere Invariante dieser Art ist die Größe

$$\dot{x} F_{x'}(x, y, x', y') + \dot{y} F_{y'}(x, y, x', y').$$

Denn aus (38) und (41) folgt, daß

$$u G_{u'}(u, v, u', v') + \dot{v} G_{v'}(u, v, u', v') = \dot{x} F_{x'}(x, y, x', y') + \dot{y} F_{y'}(x, y, x', y'). \tag{43}$$

Dies zeigt, daß, wenn eine Kurve $\mathfrak{K}$ eine zweite Kurve $\mathfrak{E}$ im Punkt

[1]) Nach Underhill, loc. cit.

Q transversal schneidet, dann auch das Bild $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ das Bild $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$ im Bildpunkt Q' von Q transversal schneidet.

Aus (43) folgt unmittelbar, daß in demselben Sinn auch die $\mathcal{E}$-Funktion eine absolute Invariante ist.

$$\mathcal{E}_G(u, v; u', v'; \dot{u}, \dot{v}) = \mathcal{E}_F(x, y; x', y'; \dot{x}, \dot{y}), \tag{44}$$

womit auch die Invarianz der Weierstraß'schen Bedingung gezeigt ist.

c) Der δ-Algorithmus als invariantenbildender Prozeß:

Wenn man in der eine Funktion Φ als absolute Invariante charakterisierenden Gleichung (35) für x, y willkürliche Funktionen $x(\tau), y(\tau)$ einer Variabeln τ einsetzt, für $x', y'; x'', y''; \ldots$, deren erste, zweite, ... Ableitungen nach τ, und gleichzeitig für u, v die durch die Transformation (24) aus $x(\tau), y(\tau)$ abgeleiteten Funktionen $u(\tau), v(\tau)$, für $u', v'; u'', v''; \ldots$ deren erste, zweite ... Ableitungen nach τ, so geht die Gleichung (35) in eine Identität in τ über, da die Ableitungen von x, y mit denen von u, v ja gerade durch die Transformationsgleichungen (33), (34) usw. verbunden sind. Differentiiert[1]) man die so entstandene Gleichung nach τ, so erhält man

$$\begin{aligned} & u' \frac{\partial \Phi_G}{\partial u} + v' \frac{\partial \Phi_G}{\partial v} + u'' \frac{\partial \Phi_G}{\partial u'} + v'' \frac{\partial \Phi_G}{\partial v'} + \cdots \\ & = x' \frac{\partial \Phi_F}{\partial x} + y' \frac{\partial \Phi_F}{\partial y} + x'' \frac{\partial \Phi_F}{\partial x'} + y'' \frac{\partial \Phi_F}{\partial y'} + \cdots. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichung stellt zunächst wieder nur eine Identität in τ dar, wobei $x', y'; \ldots, u', v'; \ldots$ Ableitungen nach τ bedeuten. Da jedoch die bei dem Prozeß verwandten Funktionen $x(\tau), y(\tau)$ ganz willkürlich[2]) waren, so schließt man, daß die Gleichung (45) auch gültig bleibt, wenn man unter $x, y; x', y'; x'', y'' \ldots$ einerseits und $u, v; u', v'; u'', v'' \ldots$ andererseits schließlich wieder beliebige durch die Transformationsgleichungen (24), (33), (34) usw. verbundene Variable versteht. *Durch den angegebenen Differentiationsprozeß wird also aus der absoluten Invariante Φ eine neue absolute Invariante abgeleitet.*

Wenn die in (35) für x, y eingesetzten Funktionen außer von τ auch noch von einer zweiten Variabeln ε abhängen, so geht die Gleichung (35) in eine Identität in τ und ε über, die man daher auch nach ε differentiieren darf. Indem wir die Differentiation nach ε durch das Symbol δ andeuten, erhalten wir so:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_G}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \Phi_G}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \Phi_G}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \Phi_G}{\partial v'} \delta v' + \cdots \\ & = \frac{\partial \Phi_F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi_F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi_F}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \Phi_F}{\partial y'} \delta y' + \cdots. \end{aligned} \tag{46}$$

---

[1]) Dabei ist zu beachten, daß x, y, x', y' auch in der in Φ enthaltenen Funktion F und deren partiellen Ableitungen vorkommen.

[2]) Natürlich abgesehen von Bedingungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit, die wir bei dem lediglich formalen Charakter der gegenwärtigen Untersuchung nicht explizite angeben.

Dabei ist, wie durch Differentiation von (26) und (33) nach ε folgt,

$$\delta x = X_u \delta u + X_v \delta v, \qquad \delta y = Y_u \delta u + Y_v \delta v, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \delta x' &= X_u \delta u' + X_v \delta v' + X_{uu} u' \delta u + X_{uv}(u' \delta v + v' \delta u) + X_{vv} v' \delta v, \\ \delta y' &= Y_u \delta u' + Y_v \delta v' + Y_{uu} u' \delta u + Y_{uv}(u' \delta v + v' \delta u) + Y_{vv} v' \delta v. \end{aligned} \tag{48}$$

Die Gleichung (46) ist zunächst wieder bloß eine Identität in τ und ε; aus der Willkürlichkeit der bei dem Prozeß benutzten Funktionen $x(\tau, \varepsilon)$, $y(\tau, \varepsilon)$ folgt aber wieder, daß die Gleichung (46) gültig bleibt, wenn man unter: x, y; x', y'; ... $\delta x, \delta y$; $\delta x', \delta y'$; ... einerseits und: u, v; u', v'; ... $\delta u, \delta v$; $\delta u', \delta v'$; ... andererseits irgendwelche durch die Gleichungen (26), (33), ..., (47), (48), ... verbundene Größen versteht. Also stellt $\delta \Phi$ eine neue absolute Invariante dar und zwar für die durch Adjunktion von δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$; ... erweiterte Gruppe. Wir haben also das Resultat, daß auch *der δ-Prozeß aus einer absoluten Invariante wieder eine absolute Invariante erzeugt.*

Beispiel: Aus der Gleichung

$$G(u, v, u', v') = F(x, y, x', y')$$

folgt, daß auch die Funktion

$$\delta F = F_x \delta x + F_y \delta y + F_{x'} \delta x' + F_{y'} \delta y'$$

eine absolute Invariante ist. Nun können wir aber in bekannter Weise δF auf die Form bringen [1])

$$\delta F = Tw + \frac{d}{d\tau}(\delta x F_{x'} + \delta y F_{y'}),$$

wo

$$w = y' \delta x - x' \delta y.$$

Da nach (47) die Größen $\delta x, \delta y$ mit x', y' kogredient sind, so folgt nach (43), daß

$$\delta x F_{x'} + \delta y F_{y'}$$

eine absolute Invariante ist, also nach dem oben Gesagten auch die Ableitung dieses Ausdrucks nach τ. Hieraus folgt aber weiter, daß auch Tw eine absolute Invariante ist. Nun ist aber nach (42) w eine Invariante vom Index -1, also muß der andere Faktor T des Produkts eine Invariante vom Index $+1$ sein, womit wir fast ohne Rechnung das oben ausgesprochene Resultat (39) bewiesen haben.[2])

---

[1]) Vgl. § 26, Gleichung (18a).

[2]) Eine weitere Ausführung der hier nur kurz angedeuteten Theorie findet man in der oben zitierten Arbeit von Underhill, wo insbesondere die mit der zweiten Variation zusammenhängenden Invarianten untersucht werden. Man kann sich die Aufgabe vorlegen, für eine bestimmte Gruppe erweiterter Punkttransformationen *alle Invarianten zu bestimmen.* Für den Fall des x-Problems hat schon Lie in seiner Arbeit über Differentialinvarianten (Mathematische Annalen, Bd. XXIV (1884), p. 569) die Aufgabe gestellt und in seine allgemeine Theorie der *unendlichen kontinuierlichen Gruppen* eingeordnet. Für den speziellen Fall der geodätischen Linien ist die Lie'sche Methode von Zorawski im einzelnen durchgeführt worden („*Über Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie*", Acta Mathematica, Bd. XVI (1892), pp. 1—64).

§ 46. Die Kneser'schen krummlinigen Koordinaten und ihre Anwendungen.[1])

Wir haben jetzt die im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Transformationsprinzipien auf den speziellen Fall der „KNESER'schen krummlinigen Koordinaten", welche die Verallgemeinerung der GAUSS'schen geodätischen Parallelkoordinaten sind, anzuwenden.

a) **Definition der Kneser'schen krummlinigen Koordinaten:**

Wir fügen jetzt den in § 44, a) über die Extremalenschar

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a) \tag{4}$$

gemachten Annahmen die weitere hinzu, daß die Funktionaldeterminante $\Delta(t, a)$ der Schar der Ungleichung

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \text{ in } [t_1 t_2] \tag{49}$$

genügen soll, und daß auch die Ableitungen φ_{aa}, ψ_{aa} im Bereich (5) existieren und stetig sind.

Dann lassen sich nach § 31, a) zwei positive Größen h, k so klein wählen, daß das Bild $\mathfrak{S}$ des Rechtecks

$$\mathfrak{A}: \qquad t_1 - h \leqq t \leqq t_2 + h, \qquad |a - a_0| \leqq k$$

mittels der Transformation (4) ein Feld um den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ bildet, worin die Ungleichung

$$\Delta(t, a) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A} \tag{50}$$

mit inbegriffen ist.

Wir nehmen h, k so klein an, daß überdies[2])

$$T_1' < t_1 - h, \qquad t_2 + h < T_2', \qquad k \leqq d,$$

und wählen den Punkt P_0 der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$, durch welchen die bei der Definition der Funktion $u(t, a)$ benutzte Transversale $\mathfrak{K}_0\{t = \chi_0(a)\}$ hindurchgeht, so, daß: $T_1' \leqq t_0 < t_1 - h$. Durch Verkleinerung von k können wir dann schließlich noch erreichen, daß

$$\chi_0(a) < t_1 - h \quad \text{für} \quad a_0 - k \leqq a \leqq a_0 + k,$$

so daß das Rechteck $\mathfrak{A}$ ganz dem in § 44, a) definierten Bereich $\mathfrak{B}$ angehört.

Die inversen Funktionen

$$t = \mathfrak{t}(x, y), \qquad a = \mathfrak{a}(x, y) \tag{51}$$

des Feldes sind eindeutig definiert und von der Klasse C'' im Bereich $\mathfrak{S}$, wie aus den Gleichungen (136) von § 31 folgt.

---

[1]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, § 16.

[2]) Wegen der Bedeutung der Größen T_1', T_2', d vgl. § 44, a).

Wir kombinieren jetzt mit der Transformation (51) die Transformation

$$u = u(t, a), \qquad v = a \tag{52}$$

zwischen der t, a-Ebene und der u, v-Ebene, wobei die Funktion $u(t, a)$ durch (10) definiert ist. Da nach (11) und (7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{F}(t, a) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A}, \tag{53}$$

so folgt, daß die durch (52) definierte Beziehung zwischen dem Bereich $\mathfrak{A}$ und dessen Bild $\mathfrak{U}$ in der u, v-Ebene ein-eindeutig ist. Denn sind (t', a') und (t'', a'') irgend zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$, so sind ihre Bilder in der u, v-Ebene sicher verschieden, wenn $a'' \neq a'$, weil dann $v'' \neq v'$; ist aber $a'' = a'$ und $t'' \neq t'$, so ist wegen (53) sicher $u(t'', a') \neq u(t', a')$, weil die Funktion $u(t, a')$ entweder beständig wächst oder beständig abnimmt. Überdies ist offenbar

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(t, a)} \neq 0 \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Wenn wir daher die beiden Transformationen (51) und (52) kombinieren, so erhalten wir eine Transformation von der Form (24), nämlich, in der Bezeichnung von § 31, Gleichung (142):

$$u = W(x, y), \qquad v = \mathfrak{a}(x, y), \tag{54}$$

wo $W(x, y)$ wieder das Feldintegral, gerechnet von der Transversalen $\mathfrak{K}_0$ aus, bedeutet. Die Transformation (54) definiert dann nach dem über die beiden Transformationen (51) und (52) gesagten eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich $\mathfrak{S}$ in der x, y-Ebene und dessen Bild $\mathfrak{U}$ in der u, v-Ebene, welche alle Bedingungen erfüllt, die wir in § 45, a) der Transformation (24) auferlegt haben.

Die durch die Gleichungen (54) definierten speziellen krummlinigen Koordinaten u, v nennen wir die *Kneser'schen Koordinaten.* Sie sind hiernach durch folgende Eigentümlichkeiten charakterisiert:

1. *Den Geraden: $v =$ konst. der u, v-Ebene entsprechen in der x, y-Ebene die Extremalen der Schar* (4) *und umgekehrt;* und zwar entspricht insbesondere der Geraden: $v = a'$ die Extremale $a = a'$.

2. *Den Geraden: $u =$ konst. der u, v-Ebene entsprechen in der x, y-Ebene die Transversalen der Schar* (4) *und umgekehrt,* und zwar entspricht insbesondere der Geraden $u = c$ diejenige Transversale, entlang welcher das Feldintegral $W(x, y)$ den konstanten Wert c hat (vgl. § 31, c)).

b) **Eigenschaften der Funktion $G(u, v, u', v')$ für den speziellen Fall der Kneser'schen Koordinaten:**

Aus den eben angeführten Eigentümlichkeiten der Kneser'schen Koordinaten ergibt sich, daß *für dieses spezielle Koordinatensystem die*

Funktion $G(u, v, u', v')$ folgende charakteristische Eigenschaften besitzt[1]*:*

$$G(u, v, u', 0) \equiv u', \tag{55}$$

$$G_{u'}(u, v, u', 0) \equiv 1, \qquad G_{v'}(u, v, u', 0) \equiv 0$$

für jedes Wertsystem u, v im Bereich $\mathfrak{A}$ und für jeden Wert von u', dessen Vorzeichen mit dem in $\mathfrak{A}$ konstanten Vorzeichen der Funktion $\mathfrak{F}(t, a)$ übereinstimmt.

Beweis: Wegen der Ein-eindeutigkeit der Beziehung zwischen den Bereichen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{A}$ können wir jede im Bereich $\mathfrak{S}$ der x, y-Ebene gelegene Kurve $\mathfrak{C}$ in der Form

$$x = \varphi(t(\tau),\ a(\tau)), \qquad y = \psi(t(\tau),\ a(\tau))$$

darstellen, wo dann

$$t = t(\tau), \qquad a = a(\tau)$$

das Bild der Kurve $\mathfrak{C}$ in der t, a-Ebene ist. Das Bild von $\mathfrak{C}$ in der u, v-Ebene ist alsdann gegeben durch

$$u = u(t(\tau),\ a(\tau)), \qquad v = a(\tau),$$

und wegen (29) gilt die Gleichung

$$F\Big(\varphi(t, a), \psi(t, a), \frac{d}{d\tau}\varphi(t, a), \frac{d}{d\tau}\psi(t, a)\Big) = G\Big(u(t, a),\ a,\ \frac{d}{d\tau}u(t, a), \frac{da}{d\tau}\Big), \tag{56}$$

wobei man sich für t, a die Funktionen $t(\tau)$, $a(\tau)$ gesetzt zu denken hat.

Wenn nun insbesondere die Kurve $\mathfrak{C}$ eine Extremale $a = a'$ der Schar (4) ist, so ist ihr Bild in der t, a-Ebene gegeben durch

$$t = \tau, \qquad a = a', \tag{57}$$

und die Gleichung (56) nimmt die Form an

$$\mathfrak{F}(\tau, a') = G(u(\tau, a'), a', u_t(\tau, a'), 0). \tag{58}$$

Daher ist wegen (11)

$$u_t(\tau, a') = G(u(\tau, a'), a', u_t(\tau, a'), 0).$$

Jetzt sei u, v irgend ein Punkt von $\mathfrak{A}$ und u' irgend ein Wert, welcher dasselbe Vorzeichen hat wie $\mathfrak{F}(t, a)$. Das Bild von u, v in der t, a-Ebene sei τ, a', so daß: $u = u(\tau, a')$, $v = a'$. Dann hat $u_t(\tau, a')$ dasselbe Zeichen wie u'; wir können also eine positive Größe m bestimmen, so daß: $u' = m\, u_t(\tau, a')$. Daher folgt aus (58) unter Benutzung von (31) die erste der Gleichungen (55) und aus derselben durch Differentiation nach u' unmittelbar die zweite.

---

[1]) Die erste dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden übrigen, wegen der Homogeneitätsrelation:

$$G = u' G_{u'} + v' G_{v'}.$$

Um die dritte zu beweisen, lassen wir jetzt die Kurve $\mathfrak{C}$ mit einer Transversalen $\{t = \chi(a)\}$ des Feldes zusammenfallen. Das Bild derselben in der u, v-Ebene ist dann die Gerade

$$u = u(\chi(a), a) = c \equiv \tilde{u}(a), \qquad v = a \equiv \tilde{v}(a). \tag{59}$$

Dieselbe ist wegen der in § 45, a) bewiesenen Invarianz der Transversalitätsbedingung ebenfalls eine Transversale der Extremalenschar: $v =$ konst. für das Integral J'. Im Schnittpunkt der Transversalen (59) mit der Extremalen (57) muß also die Transversalitätsbedingung

$$\tilde{u}' G_{u'} + \tilde{v}' G_{v'} = 0$$

erfüllt sein, die sich hier auf

$$G_{v'}(u(\tau, a'), a', u_t(\tau, a'), 0) = 0$$

reduziert, woraus, wie oben, die dritte der Gleichungen (55) folgt.

Beispiel XVI: Für den Fall der geodätischen Linien, wo

$$G(u, v, u', v') = \sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2},$$

nehmen die erste und dritte der Gleichungen (55) die Form an

$$\sqrt{\mathsf{E}u'^2} = u', \quad \frac{\mathsf{F}u'}{\sqrt{\mathsf{E}u'^2}} = 0,$$

und daraus

$$\mathsf{E} = 1, \qquad \mathsf{F} = 0,$$

was in der Tat mit der Gauß'schen Normalform (1) übereinstimmt.

Aus den Gleichungen (55) ergibt sich die folgende wichtige Relation für die Funktion $\mathcal{E}_G$, für die wir der Einfachheit halber $\mathcal{E}'$ schreiben:

$$\mathcal{E}'(u, v; u', 0; \dot{u}, \dot{v}) \equiv G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) - \dot{u}. \tag{60}$$

Dabei sind die Größen u, v, u' denselben Beschränkungen unterworfen, wie in den Relationen (55), während $\dot{u}, \dot{v}$ irgend ein von $0, 0$ verschiedenes Wertsystem bedeutet.

Wir wollen dieses Resultat noch auf eine andere, für spätere Anwendung bequemere Form bringen. Das Bild der Extremalen $a = a'$ in der u, v-Ebene ist gegeben durch die Gleichungen

$$u = u(\tau, a'), \qquad v = a'. \tag{61}$$

Bezeichnet θ' den Tangentenwinkel der Kurve (61) im Punkt τ, so folgt aus (53), daß $\theta' = 0$ oder π, je nachdem das konstante Zeichen von $\mathfrak{F}(t, a)$ positiv oder negativ ist.

Nun war die Größe u' irgend eine Größe, welche dasselbe Zeichen hat wie $\mathfrak{F}(t, a)$. Wir dürfen also in (60): $u' = \cos\theta'$ setzen und erhalten, da $\sin\theta' = 0$, die Gleichung (60) in der Form

$$G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) - \dot{u} = \mathcal{E}'(u, v; \cos\theta', \sin\theta'; \dot{u}, \dot{v}). \tag{62}$$

c) **Hinreichende Bedingungen für ein Minimum bei einem festen und einem variabeln Endpunkt:**

Die vorangegangenen Entwicklungen lassen sich nun nach KNESER[1]) folgendermaßen zur Aufstellung hinreichender Bedingungen für ein Minimum des Integrals J bei einem festen und einem auf einer Kurve $\mathfrak{K}$ beweglichen Endpunkt verwenden:

Wir ziehen durch den Punkt P_1 der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ die Transversale des Feldes, $\mathfrak{K}\{t = \chi(a)\}$, wobei wir k so klein voraussetzen dürfen, daß der Bogen $[a_0 - k,\ a_0 + k]$ von $\mathfrak{K}$ ganz im Felde $\mathfrak{S}$ liegt. Dann ziehen wir von einem beliebigen Punkt P_5 von $\mathfrak{K}$ eine ganz im Bereich $\mathfrak{S}$ gelegene gewöhnliche Kurve

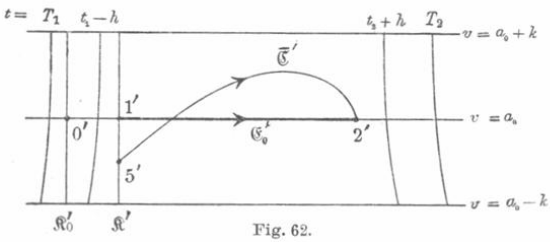

Fig. 62.

$$\bar{\mathfrak{C}}: \qquad x = \bar{x}(\tau), \qquad y = \bar{y}(\tau), \qquad \tau_1 \overline{\gtrless} \tau \overline{\gtrless} \tau_2$$

nach dem Punkt P_2 (vgl. Fig. 51 auf p. 325), und konstruieren das Bild der so entstandenen Figur in der u, v-Ebene.

Das Bild von $\mathfrak{E}_0$ ist das Segment $P_1' P_2'$ der Geraden $v = a_0$, wobei die Abszissen der Bildpunkte P_1', P_2' der beiden Punkte P_1, P_2 nach (54) sind

$$u_1 = W(x_1, y_1), \qquad u_2 = W(x_2, y_2).$$

Die Bilder der beiden Transversalen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ sind die beiden Geraden: $u = 0$, beziehungsweise: $u = u_1$. Das Bild der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ ist eine gewöhnliche Kurve:

$$\bar{\mathfrak{C}}': \qquad u = \bar{u}(\tau), \qquad v = \bar{v}(\tau), \qquad \tau_1 \overline{\gtrless} \tau \overline{\gtrless} \tau_2,$$

welche ganz in $\mathfrak{A}$ gelegen ist und den Punkt P_5' der Geraden: $u = u_1$ mit dem Punkt P_2' verbindet, so daß also

$$\bar{u}(\tau_1) = u_1, \qquad \bar{u}(\tau_2) = u_2, \qquad \bar{v}(\tau_2) = a_0. \tag{63}$$

Nunmehr ist nach (32)

$$J_{\bar{\mathfrak{C}}}(P_5 P_2) = J'_{\bar{\mathfrak{C}}'}(P_5' P_2') = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G\left(\bar{u}, \bar{v}, \frac{d\bar{u}}{d\tau}, \frac{d\bar{v}}{d\tau}\right) d\tau.$$

---

[1]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, § 17. Um die Resultate der folgenden Entwicklung auf den Fall anzuwenden, wo nicht die Extremalenschar (4), sondern die Kurve $\mathfrak{K}$ vorgegeben ist, hat man zunächst den Satz des § 40 über die Konstruktion einer Extremalenschar, welche von einer gegebenen Kurve transversal geschnitten wird, anzuwenden.

Andererseits ist nach der Definition des Feldintegrals

$$J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_2) = J'_{\mathfrak{E}'_0}(P'_1 P'_2) = W(x_2, y_2) - W(x_1, y_1) = u_2 - u_1.$$

Wegen (63) können wir aber schreiben[1])

$$u_2 - u_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\bar{u}}{d\tau}\, d\tau.$$

Daher können wir die totale Variation

$$\Delta J = J_{\bar{\mathfrak{E}}}(P_5 P_2) - J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_2)$$

durch das entlang der Kurve $\bar{\mathfrak{E}}'$ genommene Integral ausdrücken:

$$\Delta J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[G\left(\bar{u}, \bar{v}, \frac{d\bar{u}}{d\tau}, \frac{d\bar{v}}{d\tau}\right) - \frac{d\bar{u}}{d\tau} \right] d\tau. \tag{64}$$

Statt dessen können wir aber nach (62) schreiben

$$\Delta J = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{E}'\left(\bar{u}, \bar{v}; \cos\theta', \sin\theta'; \frac{d\bar{u}}{d\tau}, \frac{d\bar{v}}{d\tau}\right) d\tau. \tag{65}$$

Wegen der Bedeutung des Winkels θ' ist dies aber nichts anderes als der WEIERSTRASS'sche Satz für die u, v-Ebene. Erinnern wir uns jetzt der in § 45, b) bewiesenen Invarianz der $\mathcal{E}$-Funktion, so haben wir hiermit einen neuen Beweis dafür gewonnen, daß die in § 41 aufgezählten Bedingungen für ein Minimum des Integrals J hinreichend sind, wenn der erste Endpunkt auf der Transversalen $\mathfrak{K}$ beweglich ist, während der zweite fest ist, allerdings unter Hinzufügung einer weiteren Annahme[2]), nämlich der Voraussetzung (6).

---

[1]) Dieser wichtige Kunstgriff ist in letzter Instanz gleichbedeutend mit der Einführung des Hilbert'schen invarianten Integrals. Denn nach Gleichung (150) von § 31 lautet dasselbe im gegenwärtigen Fall

$$J'^* = \int G_{u'}(u, v, \cos\theta', \sin\theta')\, du + G_{v'}(u, v, \cos\theta', \sin\theta')\, dv,$$

was sich wegen (55) auf

$$J'^* = \int du$$

reduziert.

[2]) Es läßt sich zeigen, daß dieselbe keine wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Denn das vorgelegte Variationsproblem ist mit dem Problem, das Integral der Funktion

$$F(x, y, x', y') + \Phi_x(x, y)x' + \Phi_y(x, y)y'$$

unter denselben Anfangsbedingungen zu einem Minimum zu machen, äquivalent, vorausgesetzt, daß die Funktion $\Phi(x, y)$ entlang der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ konstant

d) Der Osgood'sche Satz[1]) für den Fall eines variablen Endpunktes:

Aus den Resultaten des letzten Absatzes ergibt sich ein einfacher Beweis des Osgood'schen Satzes für den Fall eines variabeln Endpunktes. Wir gehen dazu von der Gleichung (65) aus. Führen wir statt des beliebigen Parameters τ den Bogen s der Bildkurve $\bar{\mathfrak{C}}'$ ein und bezeichnen mit $\bar{\theta}'$ den Tangentenwinkel der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}'$ im Punkt $\bar{u}, \bar{v}$, so können wir unter Benutzung der Gleichung (123) von § 30 die Gleichung (65) auch schreiben:

$$\Delta J = \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{E}'(\bar{u}, \bar{v}; \cos\theta', \sin\theta'; \cos\bar{\theta}', \sin\bar{\theta}')\, ds. \tag{66}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß für den Bogen $\mathfrak{E}_0$ die Weierstraß'sche Bedingung (IV') erfüllt ist, was wegen (44) die analoge Ungleichung für den Bogen $\mathfrak{E}_0'$ in der u, v-Ebene zur Folge hat. Führen wir nun genau wie in § 32, Gleichung (158), die Funktion $\mathfrak{E}_1'$ ein, so können wir wie dort schließen, daß die die Ausdehnung des Feldes $\mathcal{S}$, oder ausführlicher[2]) $\mathcal{S}_{h,k}$, bestimmenden Größen h, k sich so klein wählen lassen, daß die Funktion

$$\mathfrak{E}_1'(u, v; \cos\theta', \sin\theta'; \cos\bar{\theta}', \sin\bar{\theta}')$$

in dem ganzen Bereich

$$(u, v) \text{ in } \mathfrak{A}, \qquad 0 \leqq \bar{\theta}' \leqq 2\pi$$

positiv ist und daher einen positiven Minimalwert m erreicht. Da nun nach der Definition von $\mathfrak{E}_1'$ für alle Werte von $\bar{\theta}'$

$$\mathfrak{E}'(\bar{u}, \bar{v}; \cos\theta', \sin\theta'; \cos\bar{\theta}', \sin\bar{\theta}') = (1 - \cos(\theta' - \bar{\theta}'))\, \mathfrak{E}_1'(\bar{u}, \bar{v}; \cos\theta', \sin\theta'; \cos\bar{\theta}', \sin\bar{\theta}'),$$

und da überdies $\theta' = 0$ oder π, so folgt aus (66) nach dem Mittelwertsatz

$$\Delta J \geqq m \int_{s_1}^{s_2} (1 \mp \cos\bar{\theta}')\, ds,$$

oder, da $\cos\bar{\theta}' = \dfrac{d\bar{u}}{ds}$,

$$\Delta J \geqq m[L \mp (u_2 - u_1)],$$

wenn L die Länge des Bogens $\bar{\mathfrak{C}}'$ von P_5' bis P_2' bedeutet.

Es sei jetzt l eine beliebige positive Größe kleiner als k, und es werde vorausgesetzt, daß die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ in der x, y-Ebene durch einen Punkt P_3 einer der beiden Extremalen: $a = a_0 \pm l$ der Schar (4) hindurchgeht. Die Bildkurve

---

ist (in dem Sinn, daß jede Lösung des einen Problems zugleich eine Lösung des andern ist). Man kann dann stets die Funktion $\Phi(x, y)$ so wählen, daß die Voraussetzung (6) für das neue Problem erfüllt ist, selbst wenn dies für das ursprüngliche nicht der Fall sein sollte; man braucht nur

$$\Phi(x, y) = M[\mathfrak{t}(x, y) - \chi(\mathfrak{a}(x, y))]$$

zu setzen, wo M eine hinreichend große Konstante ist; vgl. Bolza, *Lectures*, § 37, c).

[1]) Vgl. § 34 und für den hier gegebenen Beweis Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901) p. 422.

[2]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 31, a).

$\overline{\mathfrak{C}}'$ geht alsdann durch einen Punkt P_3', dessen Ordinate $v = a_0 \pm l$ ist; und wenn P_6' der Fußpunkt der vom Punkt P_3' auf die Gerade $u = u_1$ gefällten Senkrechten ist, so ist

$$L \overline{\overline{>}} |P_6' P_3'| + |P_3' P_2'| \overline{\overline{>}} |P_6' P_2'|,$$

d. h.

$$L \overline{\overline{>}} \sqrt{l^2 + (u_2 - u_1)^2}.$$

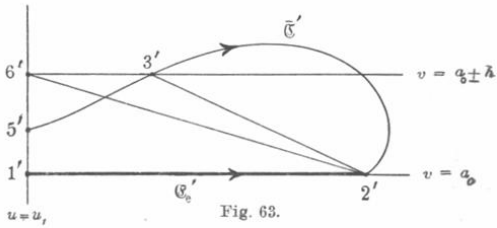

Fig. 63.

Bezeichnen wir daher mit ε_l die stets positive Größe

$$\varepsilon_l = m\left[\sqrt{l^2 + (u_2 - u_1)^2} \mp (u_2 - u_1)\right], \tag{67}$$

so ist

$$\Delta J \overline{\overline{>}} \varepsilon_l. \tag{68}$$

Somit erhalten wir den Satz:

Für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ mögen die Bedingungen (II) und (IV) erfüllt sein; derselbe möge sich mit einem Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ umgeben lassen, und es sei im Punkt P_1:

$$F(x_1, y_1, x_1', y_1') \neq 0 \text{ [1]},$$

so daß durch den Punkt P_1 eine Transversale $\mathfrak{K}$ des Feldes gezogen werden kann. Sind dann h und k hinreichend klein gewählt, so gehört zu jedem positiven $l < k$ eine positive Größe ε_l derart, daß

$$\Delta J \overline{\overline{>}} \varepsilon_l$$

für jede Variation des Bogens $\mathfrak{E}_0$, welche die Kurve $\mathfrak{K}$ mit dem Punkt P_2 verbindet und welche ganz im Innern von $\mathcal{S}_{h,k}$, aber nicht ganz im Innern von $\mathcal{S}_{h,l}$ gelegen ist.

§ 47. Folgerungen aus dem Enveloppensatz.

Die in § 46, a) eingeführte Annahme

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \text{ in } [t_1 t_2], \tag{49}$$

welche nach § 40 aussagt, daß der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ den Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ nicht enthalten soll, war in dem vorangegangenen Hinlänglichkeitsbeweis für die Konstruktion eines Feldes erforderlich. Aber aus unsern Entwicklungen geht nicht hervor, ob diese Bedingung zugleich auch eine notwendige Bedingung für ein Extremum ist.

Wir wollen nun, in Verallgemeinerung der in § 43, c) für den Fall der geodätischen Linien mitgeteilten Darboux'schen Methode, nach Kneser[2]) beweisen, daß die obige Bedingung wenigstens in der etwas milderen Form

[1]) Will man sich auf Variationen beschränken, welche auch den Punkt P_1 fest lassen, so ist die letzte Voraussetzung nicht nötig. Die Voraussetzung (6) braucht nach p. 355 Fußnote [2]) nicht gemacht zu werden.

[2]) Vgl. Kneser, Mathematische Annalen, Bd. L, p. 27 und *Lehrbuch*, §§ 24, 25.

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 < t < t_2 \tag{69}$$

in der Tat für ein Extremum notwendig ist.

Der Beweis macht von der Betrachtung der zweiten Variation (resp. den damit äquivalenten Untersuchungen von § 39) keinen Gebrauch; er gründet sich auf den in § 44, c) bewiesenen Enveloppensatz und gibt zugleich die Entscheidung über den bei unseren früheren Entwicklungen von der Betrachtung ausgeschlossenen Fall, wo der Endpunkt P_2 mit dem Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ zusammenfällt.[1])

a) **Gestalt der Enveloppe in der Nähe des Brennpunktes:**

Wir behalten die Annahmen von § 44, a) über die Extremalenschar (4) bei, lassen aber die Voraussetzung (49) fallen und setzen im Gegenteil voraus, daß der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ den Brennpunkt P_1'' der Kurve $\mathfrak{K}$ enthält, daß also

$$t_1 < t_1'' \overset{=}{<} t_2$$

und gleichzeitig

$$\Delta(t_1'', a_0) = 0, \tag{70}$$

dagegen

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 < t < t_1''.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, alle Lösungen (t, a) der Gleichung

$$\Delta(t, a) = 0 \tag{71}$$

in der Umgebung der Stelle (t_1'', a_0) zu finden. Da nach unsern Annahmen die Funktionen F_1, F_1', F_2 stetig sind in der Umgebung von $t = t_1''$ und überdies $F_1 \neq 0$ in t_1'', so schließen wir wie in § 29, b), daß

$$\Delta_t(t_1'', a_0) \neq 0. \tag{72}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen läßt sich daher die Gleichung (71) in der Umgebung der Stelle (t_1'', a_0) eindeutig nach t auflösen, und die Lösung, die wir mit

$$t = \tilde{t}(a)$$

bezeichnen, ist in der Umgebung von $a = a_0$ von der Klasse C' und reduziert sich für $a = a_0$ auf t_1''.

Die Kurve

$$\mathfrak{J}: \quad x = \varphi(\tilde{t}(a), a) \equiv \tilde{x}(a), \quad y = \psi(\tilde{t}(a), a) \equiv \tilde{y}(a),$$

[1]) Da der folgende Beweis auch für den Fall gültig bleibt, wo die Transversale $\mathfrak{K}$ in einen Punkt zusammenschrumpft, so erhält man damit zugleich einen von der zweiten Variation unabhängigen Beweis der Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung für den Fall fester Endpunkte, sowie die Entscheidung für den Fall, wo der Punkt P_2 mit dem konjugierten Punkt P_1' zusammenfällt.

die wegen $\tilde{t}(a_0) = t_1''$ durch den Punkt P_1'' geht, ist dann die *Enveloppe*[1]) *der Extremalenschar* (4).

Denn da

$$\frac{d\tilde{x}}{da} = \varphi_t \frac{dt}{da} + \varphi_a \Big|^{t=\tilde{t}(a)}, \qquad \frac{d\tilde{y}}{da} = \psi_t \frac{dt}{da} + \psi_a \Big|^{t=\tilde{t}(a)},$$

so folgt

$$\varphi_t \frac{d\tilde{x}}{da} - \psi_t \frac{d\tilde{y}}{da} \Big|^{t=\tilde{t}(a)} = \Delta(\tilde{t}(a), a) \equiv 0. \tag{73}$$

Dies zeigt, — zunächst abgesehen von den Punkten, in denen $\tilde{x}'$ und $\tilde{y}'$ gleichzeitig verschwinden —, daß die Kurve $\mathfrak{F}$ im Punkt $a = a'$ die Extremale $\mathfrak{E}_{a'}$ der Schar (4) berührt, und daher ist $\mathfrak{F}$ in der Tat die Enveloppe der Schar (4).

Für die weitere Diskussion unterscheiden wir jetzt zunächst zwei Hauptfälle:

Fall I: Die Enveloppe degeneriert nicht in einen Punkt, d. h. die Funktionen $\tilde{x}(a)$, $\tilde{y}(a)$ reduzieren sich nicht beide auf Konstante. Wir wollen dann voraussetzen[2]), daß die Funktionen $\tilde{x}(a)$, $\tilde{y}(a)$ in der Umgebung von $a = a_0$ von der Klasse $C^{(r)}$ sind, und daß für $a = a_0$ ihre Ableitungen bis zur $r - 1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, daß aber $\tilde{x}^{(r)}(a_0)$ und $\tilde{y}^{(r)}(a_0)$ nicht beide Null sind. Dann erhalten wir nach dem Taylor'schen Satz:

$$\frac{d\tilde{x}}{da} = (a - a_0)^{r-1}(A + \alpha), \qquad \frac{d\tilde{y}}{da} = (a - a_0)^{r-1}(B + \beta); \tag{74}$$

dabei ist

$$A = \frac{\tilde{x}^{(r)}(a_0)}{(r-1)!}, \qquad B = \frac{\tilde{y}^{(r)}(a_0)}{(r-1)!},$$

während α und β Funktionen von a sind, welche mit $a - a_0$ unendlich klein werden. Durch Einsetzen in (73) folgt hieraus

$$A = C\varphi_t(t_1'', a_0), \qquad B = C\psi_t(t_1'', a_0), \tag{75}$$

wobei C ein Proportionalitätsfaktor ist, der endlich und von Null verschieden ist, da weder A und B noch $\varphi_t(t_1'', a_0)$ und $\psi_t(t_1'', a_0)$ gleichzeitig verschwinden können.

Ist $r > 1$, so hat die Enveloppe im Punkt P_1'' einen singulären Punkt r^{ter} Ordnung; aber auch in diesem Fall besitzt sie eine be-

[1]) Über die Theorie der Enveloppen vgl. *Encyclopädie*, III D, p. 44, insbesondere die in Fußnote 117 gegebenen Literaturangaben; ferner Scheffers, *Theorie der Kurven*, p. 55; vgl. auch oben § 29, c).

[2]) Dies wird stets der Fall sein, wenn die Funktionen $\varphi(t, a)$, $\psi(t, a)$ von der Klasse $C^{(r+1)}$ sind, und dies darf nach § 24, a) Zusatz I angenommen werden, wenn die Funktion $F(x, y, x', y')$ von der Klasse $C^{(r+3)}$ ist.

stimmte[1]), als Grenzlage der Sekante definierte Tangente, deren Gefälle gleich $B:A$ ist. Die Gleichungen (75) zeigen, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ die Enveloppe $\mathfrak{F}$ im Punkt P_1'' auch dann berührt, wenn P_1'' ein singulärer Punkt von $\mathfrak{F}$ ist.

Der Einfachheit halber denken wir uns das Koordinatensystem so gedreht, daß die positive x-Achse die Richtung der positiven Tangente an die Extremale $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1'' hat; dann ist

$$\varphi_t(t_1'', a_0) > 0 \qquad \psi_t(t_1'', a_0) = 0.$$

Die y-Achse fällt mit der Normalen $\mathfrak{N}$ der Kurve $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1'' zusammen.

Wir unterscheiden dann noch weiter folgende Fälle:

A) *r ungerade:*

Dann wechselt $\frac{d\bar{x}}{da}$ sein Zeichen nicht, wenn a durch den Wert a_0 hindurchgeht. Daher hat die Enveloppe in P_1'' *keinen Rückkehrpunkt;* sie tritt von der negativen[2]) Seite der Normalen $\mathfrak{N}$ auf die positive oder umgekehrt (Fig. 64).

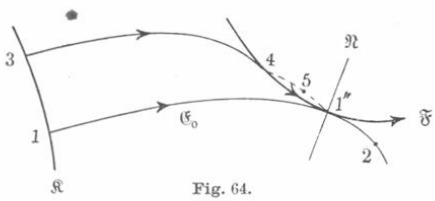

Fig. 64.

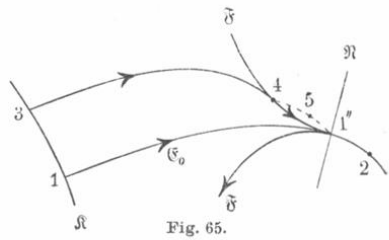

Fig. 65.

Hierher gehört der nicht-singuläre Fall $r = 1$.

B) *r gerade:*

In diesem Fall hat die Enveloppe in P_1'' einen *Rückkehrpunkt,* und zwar

1. *wenn* $C < 0$,

so liegt die Enveloppe in der Nähe des Punktes P_1'' ganz *auf der negativen Seite der Normalen* $\mathfrak{N}$ (Fig. 65);

2. *wenn* $C > 0$,

so liegt die Enveloppe in der Nähe des Punktes P_1'' ganz *auf der positiven Seite der Normalen* $\mathfrak{N}$ (Fig. 66).

---

[1]) Wenn man darauf verzichtet der Tangente einen positiven Sinn beizulegen.

[2]) Die positive x-Richtung führt von der „negativen Seite" der Normalen auf die „positive".

Fall II: Die Enveloppe degeneriert in einen Punkt, d. h. die Funktionen $\tilde{x}(a)$, $\tilde{y}(a)$ reduzieren sich beide auf Konstante, nämlich die Koordinaten des Punktes P_1''. In diesem Fall gehen alle Extremalen der Schar (4) durch den Punkt P_1''.

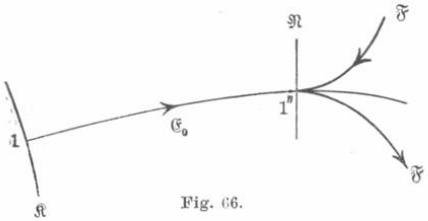

Fig. 66.

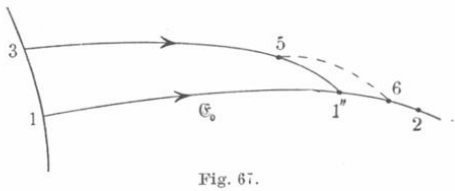

Fig. 67.

b) **Die Brennpunktsbedingung, abgeleitet aus dem Enveloppensatz:**

Es möge jetzt zunächst der Fall I vorliegen, und es sei $\mathfrak{E}_a$ eine dem Bogen $\mathfrak{E}_0$ benachbarte Extremale der Schar (4); sie schneidet die Transversale $\mathfrak{K}$ im Punkt[1]) $P_3\{\chi(a), a\}$ und berührt die Enveloppe $\mathfrak{F}$ im Punkt $P_4\{\tilde{t}(a), a\}$. Wenn dann, eventuell nach Umkehrung des positiven Sinnes auf der Enveloppe, die positiven Tangentenrichtungen von $\mathfrak{E}_a$ und $\mathfrak{F}$ im Punkt P_4 zusammenfallen und zugleich P_4 auf $\mathfrak{F}$ dem Punkt P_1'' vorangeht, so können wir den Enveloppensatz[2]) von § 44, c) anwenden und erhalten

$$\Delta J = J_{\mathfrak{E}_a}(P_3 P_4) + J_{\mathfrak{F}}(P_4 P_1'') - J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_1'') = 0. \tag{76}$$

Wir führen daher auf $\mathfrak{F}$ statt a einen neuen Parameter τ ein durch die Substitution

$$a - a_0 = \varepsilon\tau;$$

dabei ist $\varepsilon = \pm 1$, und wir behalten uns die Wahl des Vorzeichens vor. Es folgt dann aus (73), daß wir schreiben können:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = m\varphi_t, \qquad \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = m\psi_t, \tag{77}$$

wo m eine in der Umgebung von $\tau = 0$ stetige Funktion von τ ist, deren Verhalten für unendlich kleine Werte von τ durch die aus (74) und (75) sich ergebende Gleichung

$$m = \varepsilon^r \tau^{r-1}(C + \gamma)$$

bestimmt wird, wobei γ mit τ unendlich klein wird.

Der Enveloppensatz ist dann nach dem Obigen dann und nur dann anwendbar, wenn sich das Zeichen von ε so wählen läßt, daß $m > 0$ für unendlich kleine negative Werte von τ.

[1]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 44, a).

[2]) Die Kurven $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$ entsprechen den dort mit $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$ bezeichneten Kurven.

Im Fall A) kann man dies stets erreichen, indem man das Zeichen von ε gleich dem Zeichen von C wählt.

Im Fall B_1) ist die Bedingung sowohl für positives als für negatives ε erfüllt.

Dagegen ist es im Fall B_2) nicht möglich, das Zeichen von ε in der angegebenen Weise zu bestimmen.

In den Fällen A) und B_1) können wir daher in jeder Umgebung des Bogens $\mathfrak{E}_0$ zulässige Variationen angeben, für welche $\Delta J = 0$. Es findet in diesen Fällen also sicher kein eigentliches[1]) Minimum statt. Es findet aber auch kein uneigentliches Minimum statt. Denn die Enveloppe $\mathfrak{F}$ kann selbst nie eine Extremale sein[2]), da sich sonst durch den Punkt a von $\mathfrak{F}$ in der Richtung der positiven Tangente zwei Extremalen ziehen ließen, nämlich die Extremale $\mathfrak{E}_a$ und außerdem die Enveloppe $\mathfrak{F}$ selbst. Dies ist aber nach den Cauchy'schen Existenzsätzen (§ 27, a)) nicht möglich, da nach unsern Voraussetzungen (vgl. § 44, a)) entlang der Enveloppe $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}_1(t, a) \neq 0.$$

Daher können wir die beiden Punkte P_4, P_1'' durch eine zulässige Kurve $P_4 P_5 P_1''$ verbinden, welche für das Integral J einen kleineren Wert liefert, als der Bogen $P_4 P_1''$ von $\mathfrak{F}$. Es ist also möglich, durch eine zulässige Variation ΔJ negativ zu machen, und daher liefert der Bogen $P_1 P_1''$ von $\mathfrak{E}_0$, und daher a fortiori auch der Bogen $\mathfrak{E}_0$ selbst, kein Minimum.

Wenn der Fall II vorliegt, so kann man unmittelbar den Zusatz II (resp. III) zum Transversalensatz (§ 44, b)) anwenden. Darnach hat man für jede benachbarte Extremale $\mathfrak{E}_a$ der Schar (4) (siehe Fig. 67)

$$\Delta J = J_{\mathfrak{E}_a}(P_3 P_1'') - J_{\mathfrak{E}_0}(P_1 P_1'') = 0, \tag{78}$$

woraus hervorgeht, daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ sicher kein eigentliches Minimum für das Integral J liefern kann. Er kann aber auch kein uneigentliches Minimum liefern, wenn $t_1'' < t_2$. Denn da $\mathfrak{F}_1(t_1'', a_0) \neq 0$, so folgt aus dem Cauchy'schen Existenztheorem, daß die beiden Extremalen $\mathfrak{E}_a$ und $\mathfrak{E}_0$ sich im Punkt P_1'' nicht berühren können. Die aus dem

---

[1]) Vgl. § 3, b).

[2]) Vgl. Darboux, *Théorie des surfaces,* Bd. III, Nr. 622, und Zermelo, *Dissertation,* p. 96. Man kann die fragliche Behauptung auch direkt beweisen, indem man in die linke Seite der Euler'schen Differentialgleichung (I) die Funktionen $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ einsetzt. Man findet in der Bezeichnung von § 26, a)

$$m\,T(\tilde{x}, \tilde{y};\ \tilde{x}', \tilde{y}';\ \tilde{x}'', \tilde{y}'') = \varepsilon \mathfrak{F}_1(\tilde{t}, a)\, \Delta_t(\tilde{t}, a),$$

und dieser Ausdruck ist für unendlich kleine Werte von τ von Null verschieden.

Bogen $P_3 P_1''$ der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ und dem Bogen $P_1'' P_2$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ zusammengesetzte Kurve hat also im Punkt P_1'' eine Ecke. Bezeichnen θ_0, resp. θ die Tangentenwinkel von $\mathfrak{E}_0$, resp. $\mathfrak{E}_a$ im Punkt P_1'', so ist die Funktion $F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ im Punkt P_1'' für alle Werte von γ zwischen θ_0 und θ von Null verschieden, wenn a hinreichend nahe bei a_0 gewählt ist. Daraus folgt aber nach § 48, c) Zusatz I, daß im Punkt P_1'' die für ein Extremum notwendige Erdmann-Weierstraß'sche „Eckenbedingung" nicht erfüllt sein kann. Daher kann man eine Variation $P_3 P_5 P_6 P_2$ der gebrochenen Kurve $P_3 P_1'' P_2$ angeben, welche für das Integral J einen kleineren Wert liefert, als die Kurve $P_3 P_5 P_1'' P_2$, und welche daher ΔJ negativ macht. (Siehe Fig. 67).

Hiermit ist für alle Fälle mit Ausnahme des Falles IB_2) die Notwendigkeit der Bedingung (69) bewiesen.

Auch für den Fall IB_2), in welchem unsere bisherige Schlußweise versagt, hat kürzlich LINDEBERG[1]) — wenigstens für das x-Problem und unter der Voraussetzung, daß F analytisch ist, — die Notwendigkeit der Bedingung (69) durch eine eingehende Untersuchung des Verhaltens der Extremalenschar (4) in der Umgebung des Punktes P_1'' nachgewiesen.

c) **Der Fall, wo der Endpunkt P_2 mit dem Brennpunkt (resp. dem zu P_1 konjugierten Punkt) zusammenfällt:**[2])

Durch die vorangegangenen Entwicklungen ist zugleich — abgesehen von dem Ausnahmefall IB_2) — der Fall erledigt, wo der Endpunkt P_2 des Bogens $\mathfrak{E}_0$ mit P_1'' zusammenfällt.

Denn aus § 47, b) folgt unmittelbar, daß alsdann in den Fällen IA) und IB_1) der Bogen $\mathfrak{E}_0$ kein Minimum liefert (auch kein uneigentliches und auch kein schwaches).

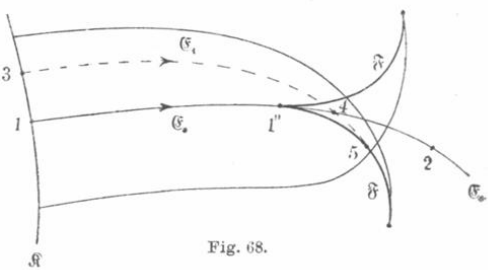

Fig. 68.

[1]) Siehe Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), p 321 Lindeberg zerlegt die Extremalenschar (4) in zwei Teilscharen entsprechend den beiden Intervallen $a_0 \overline{\lessgtr} a \overline{\lessgtr} a_0 + k$ und $a_0 - k \overline{\lessgtr} a \overline{\lessgtr} a_0$ und zeigt, daß jede derselben für sich genommen ein Feld bildet. Diese beiden Felder greifen jenseits des Punktes P_1'' in der in Figur 68 angedeuteten Weise übereinander, und es wird gezeigt, daß bei passender Wahl des Punktes P_4 der Extremalenbogen $P_3 P_4$ einen kleineren Wert liefert als der Bogen $P_1 P_4$.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 22, 23 am Ende von Kap. IX.

Ferner folgt, daß im Fall II sicher kein eigentliches Minimum stattfinden kann. Dagegen findet in diesem Fall ein uneigentliches, starkes Minimum statt, wenn außer der Bedingung (II') noch die Bedingung (IV') entlang $\mathfrak{E}_0$ erfüllt ist. Denn die Bogen der Schar (4), gerechnet von der Transversalen $\mathfrak{K}$ bis zum Punkt P_1'' bilden ein „uneigentliches Feld" $\mathfrak{S}$ um den Bogen $\mathfrak{E}_0$, und man zeigt dann mittels der Kneser'schen Modifikation der Weierstraß'schen Konstruktion, daß $\Delta J > 0$ für jede Vergleichskurve, welche ganz in $\mathfrak{S}$ liegt, und welche nicht mit einer der Extremalen der Schar identisch ist.

Wir fassen das Resultat in den folgenden Satz[1]) zusammen:

Bei der Aufgabe, das Integral J zu einem Minimum zu machen, wenn der Endpunkt P_2 fest ist, während der erste Endpunkt auf einer Kurve $\mathfrak{K}$ beweglich ist (resp. ebenfalls fest ist), liefert der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ im allgemeinen kein Minimum, wenn der Punkt P_2 mit dem Brennpunkt P_1'' von $\mathfrak{K}$ (resp. dem zu P_1 konjugierten Punkt) zusammenfällt.

Eine Ausnahme hiervon findet nur in folgenden zwei Fällen statt:

1. Wenn die Enveloppe $\mathfrak{F}$ in den Punkt P_1'' ausartet, so liefert der Bogen $\mathfrak{E}_0$ zwar kein eigentliches, aber doch ein uneigentliches, starkes Minimum, falls außer der Bedingung (II') auch noch die Bedingung (IV') entlang $\mathfrak{E}_0$ erfüllt ist.

2. Wenn die Enveloppe $\mathfrak{F}$ im Punkt P_1'' einen Rückkehrpunkt von der unter IB_2) charakterisierten Art besitzt. Für diesen Fall ist die Frage noch unentschieden.

---

[1]) Für den Fall, daß die Enveloppe im Punkt P_1'' keinen singulären Punkt besitzt (Fall I, A), $r = 1$), hat schon Erdmann mittels der dritten Variation bewiesen, daß kein Minimum stattfinden kann (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXII (1877) p. 327), vgl. oben p. 69 Fußnote [3]). Die Behandlung der Aufgabe mittels des Enveloppensatzes rührt von Kneser her (Mathematische Annalen, Bd. L (1898) p. 27 und *Lehrbuch*, §§ 24, 25), wo die Fälle IA), IB_1) und II erledigt werden. Osgood (Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 166) und später Lindeberg, loc. cit. p. 329, haben dann gezeigt, daß im Fall IB_2) beim *x-Problem* ein starkes Minimum stattfindet. Osgood zeigt ferner, daß auch beim t-Problem ein starkes Minimum stattfindet, wenn im Punkt $P_2 = P_1''$ überdies

$$F(x_2, y_2, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0$$

für alle Werte von γ.