Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Sechstes Kapitel. Der Fall variabler Endpunkte

Sechstes Kapitel.

Der Fall variabler Endpunkte.

§ 36. Die Variationsmethode.

Wir wenden uns jetzt zu einer eingehenden[1]) Diskussion des Problems, das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen in dem Fall, wo die Endpunkte der zulässigen Kurven nicht beide vorgegeben sind. Wir betrachten zunächst den Fall, *wo der erste der beiden Endpunkte auf einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ beweglich ist, während der zweite, P_2, fest und gegeben ist.*

Die Kurve $\mathfrak{K}$ denken wir uns durch einen Parameter a dargestellt:

$$\mathfrak{K}: \qquad x = \tilde{x}(a), \qquad y = \tilde{y}(a), \qquad a_1 \gtreqless a \gtreqless a_2.$$

Wir setzen voraus, daß sie von der Klasse C'' ist und ganz im Bereich $\mathcal{R}$[2]) liegt.

Unsere zulässigen Kurven sind also die Gesamtheit $\mathcal{M}$ aller „gewöhnlichen"[3]) Kurven, welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ nach dem Punkt P_2 gezogen werden können, und welche überdies ganz im Bereich $\mathcal{R}$ liegen.

Wir nehmen an, wir hätten eine Kurve

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2 \tag{1}$$

gefunden, welche unser Integral J in bezug auf diese Gesamtheit $\mathcal{M}$ zu einem (relativen) Minimum macht. Dieselbe möge von der Klasse C' sein und ganz im Innern des Bereiches $\mathcal{R}$ liegen. Der Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$, von dem sie ausgeht, sei P_1 und möge dem Wert $a = a_0$ entsprechen, so daß also

$$\mathring{x}(t_1) = \tilde{x}(a_0), \qquad \mathring{y}(t_1) = \tilde{y}(a_0), \tag{2}$$

---

[1]) Vorübergehend gestreift haben wir das Problem bereits in § 7, beim x-Problem.

[2]) Vgl. § 25, b); die Annahmen über die Funktion F sind dieselben wie dort.

[3]) Vgl. § 25, a).

wobei wir annehmen, daß $a_1 < a_0 < a_2$. Wir schließen dann zunächst ganz wie in § 7, a), daß die gesuchte Kurve $\mathfrak{C}_0$ in erster Linie alle notwendigen Bedingungen für ein Minimum bei festen Endpunkten erfüllen muß. Sie muß also eine *Extremale* sein und überdies müssen die Bedingungen (II), (III), (IV) erfüllt sein. Wir nehmen für die weitere Diskussion an, daß alle diese Bedingungen erfüllt sind.

Für die weitere Behandlung der Aufgabe sind drei wesentlich verschiedene Methoden entwickelt worden, die wir als *Variationsmethode*, *Differentiationsmethode*[1]) und *Kneser'sche Methode*[2]) unterscheiden wollen. Im gegenwärtigen Paragraphen soll die erste derselben, soweit sie sich auf die erste Variation bezieht, besprochen werden.

a) **Die Transversalitätsbedingung:**

Die Variationsmethode besteht darin, daß man für das vorliegende Problem „Normal-Variationen"[3]) von hinreichender Allgemeinheit herstellt, für dieselben δJ und $\delta^2 J$ berechnet, und dann die Bedingungen $\delta J = 0$, $\delta^2 J \gtreqless 0$ diskutiert. Diese Methode, die bis auf Lagrange[4]) zurückgeht (1760), führt am einfachsten zu der aus dem Verschwinden der ersten Variation folgenden Transversalitätsbedingung, steht jedoch für die weitere Behandlung des Problems hinter der Differentiationsmethode an Einfachheit und Tragweite zurück.

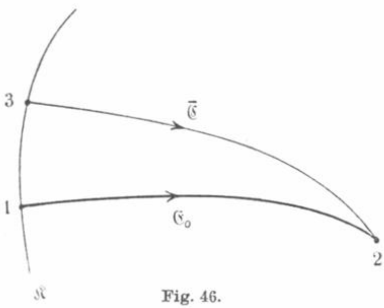

Fig. 46.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Funktion F von den Koordinaten der Endpunkte nicht abhängt.

Es sei P_3 derjenige Punkt von $\mathfrak{K}$, welcher dem Parameter $a = a_0 + \varepsilon$ entspricht, wobei ε eine unendlich kleine Größe bedeutet. Dann ziehen wir eine den Bedingungen einer Normalvariation genügende Kurve

$$\bar{\mathfrak{C}}: \quad x = \mathring{x}(t) + \xi(t, \varepsilon), \qquad y = \mathring{y}(t) + \eta(t, \varepsilon), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$$

vom Punkte P_3 nach dem Punkt P_2. Die Funktionen $\xi(t, \varepsilon)$, $\eta(t, \varepsilon)$ müssen also so gewählt werden, daß für jedes ε:

$$\begin{aligned} \xi(t_1, \varepsilon) &= \tilde{x}(a_0 + \varepsilon) - \tilde{x}(a_0), & \xi(t_2, \varepsilon) &= 0, \\ \eta(t_1, \varepsilon) &= \tilde{y}(a_0 + \varepsilon) - \tilde{y}(a_0), & \eta(t_2, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

---

1) Vgl. §§ 38—40.

2) Dieselbe setzt erst nach Ableitung der Transversalitätsbedingung ein. Vgl. § 41 und Kap. VII.

3) Vgl. § 8, a).

4) Vgl. Lagrange, *Œuvres*, Bd. I, pp. 338, 345.

was stets möglich ist, z. B. indem man (wie in § 30, a))

$$\xi(t,\varepsilon) = [\tilde{x}(a_0+\varepsilon) - \tilde{x}(a_0)]\,u(t),$$
$$\eta(t,\varepsilon) = [\tilde{y}(a_0+\varepsilon) - \tilde{y}(a_0)]\,v(t)$$

setzt, wobei $u(t)$, $v(t)$ Funktionen von t allein sind, die für $t = t_2$ verschwinden und für $t = t_1$ gleich 1 werden.

Für eine solche Variation erhält man dann nach Gleichung (78) von § 8, da die Kurve $\mathfrak{E}_0$ eine Extremale ist, ganz wie in § 30, a),

$$\delta J = [F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y]_{t_1}^{t_2}, \tag{4}$$

wobei nach (3) im gegenwärtigen Fall

$$\delta x\,|^1 = \varepsilon\tilde{x}'(a_0), \qquad \delta y\,|^1 = \varepsilon\tilde{y}'(a_0),$$
$$\delta x\,|^2 = 0, \qquad \delta y\,|^2 = 0.$$

Die Bedingung $\delta J = 0$ führt also auf das Resultat[1]):

Im Punkt P_1 muß die Relation

$$F_{x'}(x,y,x',y')\tilde{x}' + F_{y'}(x,y,x'y')\tilde{y}'\,|^1 = 0 \tag{5}$$

erfüllt sein, wobei sich die Ableitungen x', y' auf die Extremale $\mathfrak{E}_0$, die Ableitungen $\tilde{x}'$, $\tilde{y}'$ auf die gegebene Kurve $\mathfrak{K}$ beziehen.

Dies ist die „*Transversalitätsbedingung*“ für den Fall der Parameterdarstellung.[2])

---

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1882; vgl. Kneser, *Lehrbuch*, p. 32.

[2]) Die zweite Variation bei variabeln Endpunkten, auf die wir hier nicht eingehen, ist zuerst von Erdmann für das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx$$

untersucht worden (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII (1878) p. 364); für das Integral in Parameterdarstellung

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x,y,x',y')\,dt$$

von Bliss (Transactions of the American Mathematical Society, Bd. III (1902) p. 132, siehe unten § 39; für das allgemeinere Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\,dx,$$

in dem die unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ durch eine Anzahl von Differentialgleichungen verbunden sind, von A. Mayer (Leipziger Berichte (1896) p. 436).

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten α, β des allgemeinen Integrals der Euler'schen Differentialgleichung, sowie der unbekannten Größen t_1, t_2, a_0 hat man fünf Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} f(t_2, \alpha, \beta) &= x_2, & g(t_2, \alpha, \beta) &= y_2, \\ f(t_1, \alpha, \beta) &= \tilde{x}(a_0), & g(t_1, \alpha, \beta) &= \tilde{y}(a_0) \end{aligned} \tag{6}$$

und außerdem die Transversalitätsbedingung (5).

Beispiel XVI: *Die Geodätischen Linien.* (Siehe p. 209.)

Für die Transversalitätsbedingung findet man hier leicht die Gleichung

$$\tilde{u}'(\mathsf{E}u' + \mathsf{F}v') + \tilde{v}'(\mathsf{F}u' + \mathsf{G}v')\,|^1 = 0,$$

welche ausdrückt, daß die geodätische Linie die auf der Fläche gegebene Kurve *orthogonal* schneiden muß. [1]

Die im Punkt x_1, y_1 zur Richtung x_1', y_1' transversale Richtung $\tilde{x}_1', \tilde{y}_1'$, die durch die Gleichung (5) definiert ist, läßt sich nach Carathéodory sehr einfach mit Hilfe der *Indikatrix* (§ 30, c)) geometrisch konstruieren. Bezeichnen wir mit θ_1 und $\tilde{\theta}_1$ die Amplituden der beiden Richtungen, so folgt aus (5):

$$\operatorname{tg} \tilde{\theta}_1 = -\frac{F_{x'}(x_1, y_1, \cos\theta_1, \sin\theta_1)}{F_{y'}(x_1, y_1, \cos\theta_1, \sin\theta_1)}.$$

Durch Vergleichung mit Gleichung (128 b) von § 30 ergibt sich daraus die Regel:

Um die zur Richtung θ_1 transversale Richtung $\tilde{\theta}_1$ zu erhalten, konstruiere man im Punkt $Q_1(\theta_1)$ der Indikatrix die Tangente $Q_1 T_1$ an die Indikatrix; die Richtung derselben gibt dann die gesuchte transversale Richtung $\tilde{\theta}_1$, (vgl. Fig. 35).

Übrigens ist mit $\tilde{\theta}_1$ stets zugleich auch $\tilde{\theta}_1 + \pi$ transversal zu θ_1. [2]

b) Der Fall, wo die Funktion F die Koordinaten der Endpunkte enthält: [3]

Die Untersuchung gestaltet sich wesentlich anders, wenn die Funktion F die Koordinaten der Endpunkte enthält. In diesem Fall hat man nach p. 50 dem Ausdruck (3) für δJ noch das Zusatzglied

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_{x_1}\delta x_1 + F_{y_1}\delta y_1 + F_{x_2}\delta x_2 + F_{y_2}\delta y_2)\,dt$$

hinzuzufügen, wobei

$$\delta x_i = \delta x\,|^{t_i}, \quad \delta y_i = \delta y\,|^{t_i}, \qquad (i = 1, 2).$$

da t_1 und t_2 von ε unabhängig sind.

[1]) Vgl. z. B. Bianchi-Lukat, *Differentialgeometrie*, p. 65.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 1—3 am Ende von Kap. IX.

[3]) Zuerst behandelt von Lagrange (1769), vgl. *Œuvres*, Bd. II, pp. 47 und 59. Vgl. auch Kneser, *Lehrbuch*, § 12.

Unter Benutzung von (4) erhalten wir daher im gegenwärtigen Falle statt der Transversalitätsbedingung (5) die folgende Bedingung:

$$-(\tilde{x}'F_{x'}+\tilde{y}'F_{y'})\Big|^{1}+\int_{t_1}^{t_2}(F_{x_1}\tilde{x}_1'+F_{y_1}\tilde{y}_1')\,dt=0, \tag{7}$$

wobei die Argumente von $F_{x'}$, $F_{y'}$ sind: x_1, y_1, x_1', y_1'; x_1, y_1, x_2, y_2; diejenigen von F_{x_1}, F_{y_1}:

$$\mathring{x}(t),\ \mathring{y}(t),\ \mathring{x}'(t),\ \mathring{y}'(t);\ x_1, y_1, x_2, y_2.$$

Diese Gleichung ist von wesentlich anderem Charakter als die Transversalitätsbedingung (5), insofern ihre linke Seite nicht nur vom Punkte P_1, sondern gleichzeitig vom Punkte P_2 abhängt.

Beispiel XV. (Siehe p. 207).

Die Brachistochrone für den Fall, daß der Ausgangspunkt P_1 auf einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ beweglich ist, während der Endpunkt P_2 gegeben ist.

Dabei setzen wir voraus, daß die gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_1 (und daher auch die Konstante k) von den Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 unabhängig ist.

Die Funktion

$$F=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{y-y_1+k}}$$

enthält hier in der Tat die Ordinate y_1 des Punktes P_1. Im Punkte P_1 muß also nicht die Transversalitätsbedingung (5), sondern die Bedingung (7) erfüllt sein. Im gegenwärtigen Falle ist

$$F_{x'}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{y-y_1+k}},\qquad F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{y-y_1+k}},$$

$$F_{x_1}=0\qquad\qquad,\qquad F_{y_1}=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{2(\sqrt{y-y_1+k})^3}.$$

Diese Ausdrücke sind nun für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ zu berechnen, d. h. für die Zykloide:

$$x-x_1+\beta=\alpha(t-\sin t),$$
$$y-y_1+k=\alpha(1-\cos t),$$

wobei wir nach einer schon früher gemachten Bemerkung[1]) voraussetzen, daß

$$0 \overline{\gtrless} t_1 < t_2 \overline{\gtrless} 2\pi.$$

Man findet

$$F_{x'}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}},\qquad F_{y'}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{t}{2}}{\sqrt{2\alpha}},\qquad F_{y_1}=\frac{1}{2\sqrt{2\alpha}\,\sin^2\frac{t}{2}}.$$

---

[1]) Vgl. p. 209 Fußnote [1]). Die Einschränkung ist zur Zeichenbestimmung der Quadratwurzeln erforderlich.

Daher nimmt die Bedingung (7) die Form an

$$\tilde{x}_1' + \tilde{y}_1' \operatorname{cotg} \frac{t_2}{2} = 0. \tag{8}$$

Bezeichnet jetzt θ_2 den Tangentenwinkel der Zykloide im Punkt P_2, $\tilde{\theta}_1$ denjenigen der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte P_1, so folgt hieraus, da

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \operatorname{cotg} \frac{t_2}{2},$$

das Resultat[1]):

$$\cos(\theta_2 - \tilde{\theta}_1) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \theta_2 = \tilde{\theta}_1 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Die Tangente der Zykloide im Punkte P_2 muß also auf der Tangente an die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte P_1 senkrecht stehen.[2]).

§ 37. Das Extremalenintegral.

Ehe wir zur Darstellung der „Differentiationsmethode“ übergehen können, müssen wir den wichtigen Begriff des Extremalenintegrals einführen. Dazu haben wir ein an die Sätze von § 27 anknüpfendes Existenztheorem nötig.

a) **Ein Existenztheorem über die Konstruktion einer Extremalen durch zwei gegebene Punkte:**

Es sei ein ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ gelegener Extremalenbogen A_1A_2 gegeben, dem entlang die Bedingung $F_1 \neq 0$ erfüllt ist. Wir nehmen in der Nähe von A_1 einen Punkt P_1, in der Nähe von A_2 einen Punkt P_2, und stellen uns die Aufgabe, von P_1 nach P_2 eine Extremale $\mathfrak{E}$ zu ziehen.

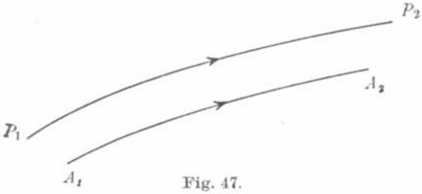

Fig. 47.

Die Koordinaten der Punkte $A_1, A_2; P_1, P_2$ seien a_1, b_1, a_2, b_2; x_1, y_1, x_2, y_2. Der Tangentenwinkel des gegebenen Bogens A_1A_2 im Punkte A_1 sei α_1, derjenige des gesuchten Bogens P_1P_2 im Punkte P_1 sei θ_1; die Länge des Bogens A_1A_2 sei l. Dann können wir nach § 27, c) den gegebenen Extremalenbogen in der Normalform

$$x = \mathfrak{X}(s - s_1;\, a_1, b_1, \alpha_1), \quad y = \mathfrak{Y}(s - s_1;\, a_1, b_1, \alpha_1), \, s_1 \overline{\gtrless} s \overline{\gtrless} l + s_1 \tag{9}$$

---

[1]) Lagrange hatte in seiner ersten Behandlung der Brachistochrone mit variablen Endpunkten (1760) die Abhängigkeit der Funktion F von y_1 übersehen, und infolgedessen die gewöhnliche Transversalität (hier Orthogonalität) als Bedingung angegeben (*Œuvres*, Bd. I, p. 343). Das Versehen wurde dann von Borda (1767) bemerkt und das obige Resultat angegeben, das dann auch später von Lagrange (1769) nach seiner Methode bewiesen wurde (*Œuvres*, Bd. II, p. 63).

[2]) Hierzu die *Übungsaufgabe* Nr. 4 am Ende von Kap. IX.

schreiben und ebenso den gesuchten in der Form

$$\mathfrak{E}:\quad x=\mathfrak{X}(s-s_1;\, x_1,y_1,\theta_1)\equiv x(s),\ y=\mathfrak{Y}(s-s_1;\, x_1,y_1,\theta_1)\equiv y(s),\qquad s_1 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} s_2. \tag{10}$$

Dabei ist s_1 eine beliebige Konstante, für die man z. B. Null wählen kann.

Da die Kurve (10) für $s = s_2$ durch den Punkt P_2 gehen soll, so haben wir zur Bestimmung der beiden unbekannten Größen s_2, θ_1 die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{X}(s_2 - s_1;\, x_1, y_1, \theta_1) = x_2, \quad \mathfrak{Y}(s_2 - s_1;\, x_1, y_1, \theta_1) = y_2. \tag{11}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Satzes über implizite Funktionen erfüllt sind, wofern die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_s(l;\, a_1, b_1, \alpha_1), & \mathfrak{Y}_s(l;\, a_1, b_1, \alpha_1) \\ \mathfrak{X}_\theta(l;\, a_1, b_1, \alpha_1), & \mathfrak{Y}_\theta(l;\, a_1, b_1, \alpha_1) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Diese Determinante ist aber nach § 27, d) nichts anderes als die dort mit Δ bezeichnete Funktionaldeterminante der Extremalenschar durch den Punkt A_1, berechnet für den Punkt A_2. Die Ungleichung (12) drückt also aus, daß der Punkt A_2 nicht zu A_1 (im weiteren Sinne) konjugiert ist. Unter dieser Voraussetzung können wir also die Gleichungen (11) im Sinne von § 22, e) in der Umgebung der Stelle $s_2 = l + s_1$, $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ eindeutig nach s_2, θ_1 auflösen und erhalten so den Satz:[1])

Es sei $A_1 A_2$ ein ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ gelegener Extremalenbogen, dem entlang $F_1 \neq 0$, und es sei A_2 nicht zu A_1 (im weiteren Sinne) konjugiert. Werden dann die beiden Punkte P_1, P_2 hinreichend nahe bei A_1, resp. A_2 genommen, so kann man von P_1 nach P_2 stets eine eindeutig definierte Extremale ziehen.

Die durch Auflösung der Gleichungen (11) erhaltenen Werte s_2, θ_1 ergeben sich als Funktionen von x_1, y_1, x_2, y_2, welche in der Umgebung der Stelle a_1, b_1, a_2, b_2 von der Klasse C' sind, und an dieser Stelle selbst sich auf $l + s_1$, resp. α_1 reduzieren. Setzt man den gefundenen Wert von θ_1 in (10) ein, so erhält man den Extremalenbogen $P_1 P_2$ dargestellt in der Form

$$\mathfrak{E}:\quad x = X(s; x_1, y_1, x_2, y_2), \qquad y = Y(s; x_1, y_1, x_2, y_2),\qquad s_1 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} s_2. \tag{13}$$

[1]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; Weierstraß benutzt zum Beweis irgendein allgemeines Integral der Euler'schen Differentialgleichung; vgl. Bolza, *Lectures*, p. 175, Fußnote.

Für $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ reduziert sich derselbe auf den Extremalenbogen $A_1 A_2$.

Ist der letztere nicht in der Normalform (9) gegeben, sondern durch einen beliebigen Parameter t dargestellt:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2, \tag{9a}$$

der mit dem Bogen s durch die Parametertransformation

$$s = g(t), \qquad t = h(s) \tag{14}$$

verbunden sein möge, sodaß also: $h(s_1) = t_1$, $h(l + s_1) = t_2$, so wende man auf die Gleichungen (13) die Parametertransformation

$$t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{h(s_2) - t_1}\,(h(s) - t_1)$$

an; dann erhält man den Extremalenbogen $\mathfrak{E}$ dargestellt in der Form

$$\mathfrak{E}: \qquad x = \mathfrak{x}(t; x_1, y_1, x_2, y_2), \qquad y = \mathfrak{y}(t; x_1, y_1, x_2, y_2), \tag{13a}$$

welche, wie man leicht zeigt, die beiden folgenden Eigentümlichkeiten hat:

1. *Die Endpunkte P_1, P_2 entsprechen den von x_1, y_1, x_2, y_2 unabhängigen Werten $t = t_1$, $t = t_2$.*

2. *Für $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (a_1, b_1, a_2, b_2)$ gehen die Gleichungen* (13a) *in die gegebenen Gleichungen* (10a) *des Extremalenbogens $A_1 A_2$ über.*

Überdies folgen aus den Identitäten

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{x}(t_1; x_1, y_1, x_2, y_2), & y_1 &= \mathfrak{y}(t_1; x_1, y_1, x_2, y_2), \\ x_2 &= \mathfrak{x}(t_2; x_1, y_1, x_2, y_2), & y_2 &= \mathfrak{y}(t_2; x_1, y_1, x_2, y_2) \end{aligned} \tag{15}$$

durch Differentiation nach x_k, y_k die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{x}(t_i)}{\partial x_k} &= \delta_{ik}, & \frac{\partial \mathfrak{x}(t_i)}{\partial y_k} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{y}(t_i)}{\partial x_k} &= 0, & \frac{\partial \mathfrak{y}(t_i)}{\partial y_k} &= \delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \; i, k = 1, 2, \tag{16}$$

wobei $\delta_{ik} = 1$ oder 0, je nachdem $k = i$ oder $k \neq i$.

b) **Die ersten partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals:**

Wir betrachten jetzt unter Festhaltung der Voraussetzung, daß A_2 nicht zu A_1 konjugiert ist, unser Integral J, genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}$ von P_1 nach P_2:

$$J_{\mathfrak{E}}(P_1 P_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}_t, \mathfrak{y}_t)\, dt.$$

Dasselbe ist eine Funktion der Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 der beiden Punkte P_1, P_2, eindeutig definiert und von der Klasse C' in der Umgebung der Stelle a_1, b_1, a_2, b_2. Wir bezeichnen diese Funktion mit

$$\mathfrak{J}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

und nennen sie das „*Extremalenintegral*" (oder auch den „*extremalen Abstand*") von P_1 nach P_2; dasselbe ist identisch mit der von HAMILTON[1]) „*Principal Function*" genannten Funktion, im speziellen Fall der geodätischen Linien mit der „*Geodätischen Distanz*"[2]) *der beiden Punkte* $P_1 P_2$.

Es sollen jetzt die partiellen Ableitungen der Funktion $\mathfrak{J}$ nach ihren vier Argumenten berechnet werden.[3]) Aus der Definition folgt zunächst, wenn z irgend eine der vier Größen x_1, y_1, x_2, y_2 bedeutet,

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \mathfrak{x}_z + F_y \mathfrak{y}_z + F_{x'} \mathfrak{x}_{tz} + F_{y'} \mathfrak{y}_{tz}) dt,$$

da t_1 und t_2 von x_1, y_1, x_2, y_2 unabhängig sind. Wendet man jetzt auf die beiden letzten Glieder rechts die Lagrange'sche partielle Integration an, und beachtet, daß die Funktionen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ den Differentialgleichungen

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \qquad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0$$

genügen, so erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = [F_{x'} \mathfrak{x}_z + F_{y'} \mathfrak{y}_z]_{t_1}^{t_2}. \tag{17}$$

Spezialisiert man daher die Größe z in (17), macht von den Gleichungen (16) Gebrauch und erinnert sich der Homogeneitätseigenschaften der Funktionen $F_{x'}$, $F_{y'}$, so erhält man den folgenden Satz[4]):

Die partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals haben folgende Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} &= -F_{x'}(x_1, y_1, p_1, q_1), & \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_1} &= -F_{y'}(x_1, y_1, p_1, q_1), \\ \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_2} &= F_{x'}(x_2, y_2, p_2, q_2), & \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_2} &= F_{y'}(x_2, y_2, p_2, q_2). \end{aligned} \tag{18}$$

---

[1]) Philosophical Transactions, 1835, Part. I, p. 99.

[2]) Vgl. DARBOUX, *Théorie des surfaces,* Bd. II, Nr. 536.

[3]) Für die ganze weitere Diskussion wird vorausgesetzt, daß F die Koordinaten der Endpunkte nicht enthält.

[4]) In den allgemeineren Resultaten von HAMILTON enthalten, vgl. HAMILTON, loc. cit.; für den Fall der geodätischen Linien gibt DARBOUX die entsprechenden Formeln. Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 13—17 am Ende von Kap. IX.

Darin bedeuten p_1, q_1, resp. p_2, q_2 die Richtungskosinus der positiven Tangente der Extremalen $\mathfrak{E}$ im Punkt P_1, resp. P_2.

Wir werden die Formeln (18) die *„allgemeinen Hamilton'schen Formeln"* nennen, im Gegensatz zu den spezielleren Formeln (148) des fünften Kapitels.

c) **Die zweiten partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals:**[1])

Um die zweiten partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals zu erhalten, haben wir die ersten partiellen Ableitungen der Tangentenwinkel θ_1, resp. θ_2 der Extremalen $\mathfrak{E}$ in den Punkten P_1, resp. P_2 nötig. Die Ableitungen von θ_1 ergeben sich aus (11) nach den Regeln über die Differentiation von impliziten Funktionen, und zwar findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} &= -\frac{u_1(s_2)}{w_1(s_2)}, & \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} &= -\frac{v_1(s_2)}{w_1(s_2)}, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} &= -\frac{y'(s_2)}{w_1(s_2)}, & \frac{\partial \theta_1}{\partial y_2} &= \frac{x'(s_2)}{w_1(s_2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Darin bedeuten in Übereinstimmung mit § 27, Gleichung (56):

$$u_1(s) = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_x - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_x, \qquad v_1(s) = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_y - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_y, \qquad w_1(s) = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_\theta - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_\theta,$$

und die Argumente der partiellen Ableitungen der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sind

$$s - s_1, \quad x_1, \quad y_1, \quad \theta_1.$$

Um die partiellen Ableitungen von θ_2 zu erhalten, bemerken wir, daß die Extremale $\mathfrak{E}$ sich auch schreiben läßt

$$x = \mathfrak{X}(s - s_2; x_2, y_2, \theta_2) \equiv x(s), \; y = \mathfrak{Y}(s - s_2; x_2, y_2, \theta_2) \equiv y(s);$$

daher genügen die beiden Funktionen s_2, θ_2 von x_1, y_1, x_2, y_2 auch den beiden Gleichungen

$$x_1 = \mathfrak{X}(s_1 - s_2; x_2, y_2, \theta_2), \qquad y_1 = \mathfrak{Y}(s_1 - s_2; x_2, y_2, \theta_2).$$

Aus diesen erhält man dann analog:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} &= -\frac{y'(s_1)}{w_2(s_1)}, & \frac{\partial \theta_2}{\partial y_1} &= \frac{x'(s_1)}{w_2(s_1)} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} &= -\frac{u_2(s_1)}{w_2(s_1)}, & \frac{\partial \theta_2}{\partial y_2} &= -\frac{v_2(s_1)}{w_2(s_1)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Darin bedeuten u_2, v_2, w_2 dieselben Determinanten wie oben, jedoch mit den Argumenten

$$s - s_2, \quad x_2, \quad y_2, \quad \theta_2.$$

[1]) Die folgenden Entwicklungen, die übrigens erst in § 39 zur Anwendung kommen, sind der Dissertation von A. Dresden entnommen, *„The second partial derivatives of Hamilton's principal function and their applications in the calculus of variations,* Transactions of the American Mathematical Society, Bd. IX (1908), p. 476.

Nunmehr erhält man durch Differentiation der Gleichungen (18) Ausdrücke für die zweiten Ableitungen der Funktion $\mathfrak{J}$. Dieselben lassen sich jedoch wesentlich vereinfachen. Zunächst drücke man die dabei auftretenden zweiten Ableitungen von F nach Gleichung (12a) und (85) des fünften Kapitels durch die Weierstraß'schen Größen F_1, L, M, N aus. Sodann beachte man, daß die Funktionen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 nach § 29, a) der zur Extremalen $\mathfrak{E}$ gehörigen Jacobi'schen Differentialgleichung genügen, und zwar sind sie hierdurch zusammen mit den folgenden Anfangsbedingungen, die sich aus den Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ergeben, vollständig bestimmt:[1])

$$\begin{aligned}
u_1(s_1) &= -y'(s_1), & u_1'(s_1) &= -y''(s_1),\\
v_1(s_1) &= x'(s_1), & v_1'(s_1) &= x''(s_1),\\
w_1(s_1) &= 0, & w_1'(s_1) &= 1,\\
u_2(s_2) &= -y'(s_2), & u_2'(s_2) &= -y''(s_2),\\
v_2(s_2) &= x'(s_2), & v_2'(s_2) &= x''(s_2),\\
w_2(s_2) &= 0, & w_2'(s_2) &= 1.
\end{aligned} \tag{21}$$

Bezeichnen nun ω_1, resp. ω_2 diejenigen Integrale der zur Extremalen $\mathfrak{E}$ gehörigen Jacobi'schen Differentialgleichung, welche durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
&\omega_1(s_1) = 1, \qquad \omega_1'(s_1) = 0,\\
\text{resp.}\qquad &\omega_2(s_2) = 1, \qquad \omega_2'(s_2) = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

definiert sind, so folgt

$$\begin{aligned}
u_1 &= -y''(s_1)\,w_1 - y'(s_1)\,\omega_1,\\
v_1 &= x''(s_1)\,w_1 + x'(s_1)\,\omega_1,
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
u_2 &= -y''(s_2)\,w_2 - y'(s_2)\,\omega_2,\\
v_2 &= x''(s_2)\,w_2 + x'(s_2)\,\omega_2.
\end{aligned}$$

Macht man hiervon Gebrauch und setzt schließlich noch

$$z_1 = \frac{\omega_1}{w_1}, \qquad z_2 = \frac{\omega_2}{w_2}, \tag{23}$$

so erhält man das folgende von Dresden herrührende *Resultat:*

---

[1]) Vgl. § 27, Gleichungen (51a), (51b) und die aus (51a) durch Differentiation nach x_0, y_0, θ_0 sich ergebenden Gleichungen.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1^2}=-L(s_1)+F_1(s_1)y'^2(s_1)z_1(s_2),\ \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_1^2}=-N(s_1)+F_1(s_1)x'^2(s_1)z_1(s_2),\\
&\qquad\qquad\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1\,\partial y_1}=-M(s_1)-F_1(s_1)x'(s_1)y'(s_1)z_1(s_2),\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_2^2}=L(s_2)-F_1(s_2)y'^2(s_2)z_2(s_1),\ \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_2^2}=N(s_2)-F_1(s_2)x'^2(s_2)z_2(s_1),\\
&\qquad\qquad\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_2\,\partial y_2}=M(s_2)+F_1(s_2)x'(s_2)y'(s_2)z_2(s_1),\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1\,\partial x_2}=-\frac{F_1(s_1)y'(s_1)y'(s_2)}{w_1(s_2)},\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_2\,\partial x_1}=\frac{F_1(s_2)y'(s_1)y'(s_2)}{w_2(s_1)},\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_1\,\partial y_2}=\frac{F_1(s_1)y'(s_1)x'(s_2)}{w_1(s_2)},\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_2\,\partial x_1}=-\frac{F_1(s_2)y'(s_1)x'(s_2)}{w_2(s_1)},\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_1\,\partial x_2}=\frac{F_1(s_1)x'(s_1)y'(s_2)}{w_1(s_2)},\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial x_2\,\partial y_1}=-\frac{F_1(s_2)x'(s_1)y'(s_2)}{w_2(s_1)},\\
&\frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_1\,\partial y_2}=-\frac{F_1(s_1)x'(s_1)x'(s_2)}{w_1(s_2)},\qquad \frac{\partial^2\mathfrak{J}}{\partial y_2\,\partial y_1}=\frac{F_1(s_2)x'(s_1)x'(s_2)}{w_2(s_1)}.
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Die hieraus folgende Relation

$$F_1(s_2)w_1(s_2)+F_1(s_1)w_2(s_1)=0 \tag{25}$$

verifiziert man direkt, indem man den Abel'schen Satz von § 11, b) auf die beiden Integrale w_1, w_2 der Jacobi'schen Differentialgleichung anwendet:

$$w_1(s)w_2'(s)-w_2(s)w_1'(s)=\frac{C}{F_1(s)},$$

und dann einmal $s=s_1$, einmal $s=s_2$ setzt.

Daß $w_1(s_2)$ und $w_2(s_1)$ von Null verschieden sind, wenn die beiden Punkte P_1, P_2 hinreichend nahe bei A_1, A_2 liegen, folgt aus der Voraussetzung (12).

Ebenfalls aus dem Abel'schen Satz folgen die später zu benutzenden Formeln

$$\begin{aligned}
w_1(s)\omega_1'(s)-\omega_1(s)w_1'(s)&=-\frac{F_1(s_1)}{F_1(s)}\\
w_2(s)\omega_2'(s)-\omega_2(s)w_2'(s)&=-\frac{F_1(s_2)}{F_1(s)}.
\end{aligned}\tag{26}$$

Die Funktionen $w_1(s)$, $\omega_1(s)$ lassen sich leicht mittels der Weierstraß'schen Funktion $\Theta(s,s_1)$ von § 29, a) und deren partieller Ableitung nach s_1

$$\mathrm{Z}(s,s_1)=\frac{\partial\Theta(s,s_1)}{\partial s_1} \tag{27}$$

ausdrücken:

$$w_1(s)=-\frac{\Theta(s,s_1)}{\mathrm{Z}(s_1,s_1)},\qquad \omega_1(s)=\frac{\mathrm{Z}(s,s_1)}{\mathrm{Z}(s_1,s_1)} \tag{28}$$

und analog für die Funktionen $w_2(s)$, $\omega_2(s)$.

Die Ausdrücke für die zweiten Ableitungen des Extremalenintegrals sind unter der speziellen Voraussetzung abgeleitet worden, daß als Parameter auf der Extremalen $\mathfrak{E}$ die Bogenlänge s gewählt worden ist. Sie bleiben jedoch unverändert bestehen, wenn die Extremale $\mathfrak{E}$ durch einen beliebigen anderen Parameter dargestellt ist. Denn geht man von einem Parameter t zu einem neuen Parameter $\bar{t}$ über mittels der Transformation $t = \varrho(\bar{t})$, so erhält man unter Benutzung der Homogeneitätseigenschaften der Funktion F und ihrer partiellen Ableitungen (§ 25) folgende Transformationsformeln:

$$\begin{gathered} \overline{L} = L - \frac{\varrho''}{\varrho'^2} y'^2 F_1, \qquad \overline{N} = N - \frac{\varrho''}{\varrho'^2} x'^2 F_1, \\ \overline{M} = M + \frac{\varrho''}{\varrho'^2} x'y' F_1, \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}(\bar{t}, \bar{t}_1) &= \varrho'(\bar{t})\varrho'(\bar{t}_1)\,\Theta(t, t_1), \\ \overline{\mathrm{Z}}(\bar{t}, \bar{t}_1) &= \varrho'(\bar{t})\varrho'^2(\bar{t}_1)\,\mathrm{Z}(t, t_1) + \varrho'(\bar{t})\varrho''(\bar{t}_1)\,\Theta(t, t_1), \end{aligned} \tag{30}$$

aus denen sich die Invarianz der rechten Seiten der Gleichungen (24) unter einer beliebigen Parametertransformation sofort ergibt.

§ 38. Die Differentiationsmethode.[1])

Wir kehren jetzt zu der im Eingang von § 36 formulierten Aufgabe zurück, um dieselbe nach der zweiten der dort genannten Methoden, der Differentiationsmethode, in Angriff zu nehmen. Wir wollen den äußerst einfachen Grundgedanken dieser Methode zunächst an dem Beispiel der kürzesten Kurve von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ nach einem gegebenen Punkte P_2 erläutern. Nachdem man durch Betrachtung von Variationen mit festen Endpunkten gezeigt hat, daß die Extremalen gerade Linien sind, hat man des weiteren nur noch die Aufgabe zu lösen: Unter allen Geraden, welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ nach dem Punkte P_2 gezogen werden können, die kürzeste zu suchen; und das ist ein Problem der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima. Die Entfernung der beiden Punkte P_3 und P_2, (die nichts anderes ist als das Extremalenintegral für das vorliegende Beispiel), ist

$$\mathfrak{J}(x_3, y_3, x_2, y_2) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

[1]) Der Grundgedanke der Methode scheint auf Poisson und Jacobi zurückzugehen; vgl. auch Dienger, *Grundriß der Variationsrechnung* (1867) p. 27. Im einzelnen durchgeführt worden, und zwar auch für die Glieder zweiter Ordnung, ist die Methode zuerst von A. Mayer für das allgemeine Lagrange'sche Problem, Leipziger Berichte (1884) p. 99 und später nochmals in der oben (p. 303 Fußnote [2])) zitierten Arbeit von 1896.

Man hat also einfach die Funktion

$$\sqrt{(\tilde{x}(a) - x_2)^2 + (\tilde{y}(a) - y_2)^2}$$

der Variabeln a zu einem Minimum zu machen.

Da die gerade Verbindungslinie zweier Punkte ausnahmslos die absolut kürzeste Verbindungskurve der beiden Punkte ist, so liefert in der Tat die Methode hier offenbar nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen.

Ganz analog ist die Schlußweise im allgemeinen Falle: Man zerlegt das Problem in zwei scharf getrennte Teile. Zunächst löst man das Problem bei festen, aber unbestimmten Endpunkten, bestimmt dann die Integrationskonstanten als Funktionen der Koordinaten der beiden Endpunkte und berechnet das zugehörige Extremalenintegral $\mathfrak{J}(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Der zweite Teil der Aufgabe besteht dann darin, daß man die Funktion $\mathfrak{J}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ unter den durch die Aufgabe vorgeschriebenen Nebenbedingungen zu einem Minimum macht, was eine Aufgabe der Theorie der *gewöhnlichen Maxima und Minima* ist. Das läuft darauf hinaus, daß man nur solche Variationen der gesuchten Kurve $\mathfrak{E}_0$ betrachtet, welche selbst Extremalen sind.

Es ist klar, daß man auf diese Weise notwendige Bedingungen erhält; ob auch hinreichende, das ist im allgemeinen Falle nicht so selbstverständlich, wie es nach Analogie des obigen Beispiels scheinen könnte. Daher sind auch die Einwände, die ERDMANN[1]) gegen die Methode erhoben hat, an sich berechtigt. Trotzdem führt die Methode, wenigstens in einem etwas beschränkteren Sinne, auch zu hinreichenden Bedingungen, wenn man die bekannten hinreichenden Bedingungen für gewöhnliche Maxima und Minima mit den hinreichenden Bedingungen für das Variationsproblem mit festen Endpunkten verbindet.[2])

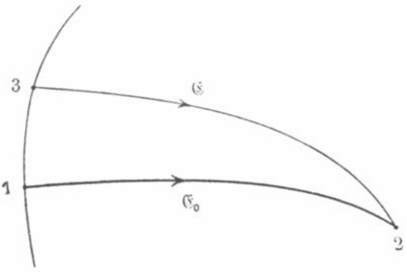

Fig. 48.

Wir fügen für die weitere Diskussion den im Eingang von § 36 aufgezählten Voraussetzungen über den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die weitere hinzu, daß die Legendre'sche und Jacobi'sche Bedingung in der stärkeren Form (II') und (III') von § 32, b) erfüllt sind. Dann sind die Voraussetzungen der beiden Sätze von § 37 für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ erfüllt, wobei anstelle der dort mit

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII, (1878) p. 364.
[2]) Vgl. BOLZA, *Lectures*, § 23, e).

A_1, A_2, resp. P_1, P_2 bezeichneten Punkte die Punkte P_1, P_2, resp. P_3, P_2 treten.

Wird daher der Punkt P_3 hinreichend nahe bei P_1 angenommen, so geht von P_3 nach P_2 eine eindeutig definierte Extremale $\mathfrak{E}$, dargestellt durch die Gleichungen (13a), wenn man darin x_1, y_1 durch x_3, y_3 ersetzt. Der Wert des Integrals J, genommen von P_3 entlang $\mathfrak{E}$ nach P_2, ist dann gegeben durch das Extremalenintegral

$$\mathfrak{J}(x_3, y_3, x_2, y_2).$$

Da der Punkt P_3 auf der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ liegt, so ist hierin

$$x_3 = \tilde{x}(a), \qquad y_3 = \tilde{y}(a) \tag{31}$$

zu setzen, wenn a der Parameter von P_3 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ ist, (so daß also in der Bezeichnung von § 36, a) $a = a_0 + \varepsilon$). Durch Einsetzen dieser Werte geht das Extremalenintegral in eine Funktion der einzigen Variabeln a über, die wir mit $J(a)$ bezeichnen, so daß

$$J(a) = \mathfrak{J}(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a), x_2, y_2). \tag{32}$$

Die Funktion $J(a)$ muß nun nach dem im Eingang dieses Abschnitts Gesagten für $a = a_0$ ein Minimum besitzen, es muß also sein:

$$J'(a_0) = 0, \qquad J''(a_0) \overline{\overline{>}} 0. \tag{33}$$

Nun ist aber nach (32)

$$J'(a) = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1} \tilde{x}' + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_1} \tilde{y}';$$

setzt man hierin für die Ableitungen von $\mathfrak{J}$ ihre Werte aus (18) ein und beachtet die Homogeneität von $F_{x'}, F_{y'}$, so erhält man:

$$J'(a) = -\,\{\tilde{x}' F_{x'}(x, y, x', y') + \tilde{y}' F_{y'}(x, y, x', y')\}\,|^3. \tag{34}$$

Für $a = a_0$ ergibt sich hieraus unmittelbar die *Transversalitätsbedingung* in derselben Form (5) wie in § 36, a).

Ist die Kurve $\mathfrak{K}$ nicht in Parameterdarstellung, sondern durch eine Gleichung $\chi(x, y) = 0$ gegeben, so hat man die Funktion

$$\mathfrak{J}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

der beiden Variabeln x_1, y_1 mit der Nebenbedingung

$$\chi(x_1, y_1) = 0$$

zu einem Minimum zu machen, was nach den bekannten Regeln für bedingte Minima auf die Transversalitätsbedingung in der Form

$$F_{x'}(x_1, y_1, x_1', y_1')\chi_y(x_1, y_1) - F_{y'}(x_1, y_1, x_1', y_1')\chi_x(x_1, y_1) = 0 \tag{35}$$

führt, in Übereinstimmung mit (5).

Ebenso leicht läßt sich die Differentiationsmethode auf das allgemeinere Problem[1]) anwenden:

Das Integral
$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$
zu einem Minimum zu machen, während zwischen den Koordinaten der Endpunkte eine Anzahl von Relationen gegeben ist
$$\chi_\nu(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0.$$
Die Anzahl der voneinander unabhängigen Relationen kann nicht größer als vier sein. Ist sie genau gleich vier, so haben wir den Fall fester Endpunkte.

Sind beide Endpunkte vollständig frei beweglich, so erhält man die vier Bedingungen
$$F_{x'}|^1 = 0, \quad F_{y'}|^1 = 0, \quad F_{x'}|^2 = 0, \quad F_{y'}|^2 = 0.$$

§ 39. Die Brennpunktsbedingung.

Wir fügen jetzt den im Eingang von §§ 36 und 38 über den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ gemachten Annahmen die weitere Annahme hinzu, daß im Punkt P_1 die Transversalitätsbedingung (5) erfüllt ist, und wenden uns nun, im weiteren Verfolg der Differentiationsmethode, zur Diskussion der Bedingung
$$J''(a_0) \overline{\gtrless} 0. \tag{33$_2$}$$

a) **Berechnung**[2]) **von $J''(a_0)$; Einführung des Brennpunktes:**

Aus der Definition (32) der Funktion $J(a)$ folgt unmittelbar
$$J''(a_0) = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_1}\tilde{x}'' + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y_1}\tilde{y}'' + \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1^2}\tilde{x}'^2 + 2\,\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial x_1 \partial y_1}\tilde{x}'\tilde{y}' + \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial y_1^2}\tilde{y}'^2 \Big|^1.$$

Trägt man hierin die Werte für die Ableitungen von $\mathfrak{J}$ aus (18) und (24) ein und setzt
$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{x}'' F_{x'} + \tilde{y}'' F_{y'} + L\tilde{x}'^2 + 2M\tilde{x}'\tilde{y} + N\tilde{y}'^2 \,|^1, \\ B_1 &= (x'\tilde{y}' - y'\tilde{x}')^2 F_1 \,|^1, \end{aligned} \tag{36}$$
wobei die Argumente von $F_{x'}$, $F_{y'}$, F_1, L, M, N sich auf die Extremale $\mathfrak{E}_0$ und den Punkt P_1 beziehen, so erhält man
$$J''(a_0) = -A_1 + B_1 z_1(t_2), \tag{37}$$
wobei die Funktion $z_1(t)$ durch (23) definiert ist und t statt s geschrieben ist, da der Parameter auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ beliebig ist.[3])

---

[1]) Vgl. Kneser, *Lehrbuch*, § 10. [2]) Nach Dresden, loc. cit. p. 474.

[3]) Vgl. die Bemerkung am Ende von § 37, c).

In dem Ausnahmefall, wo: $x_1'\tilde{y}_1' - y_1'\tilde{x}_1' = 0$, wo also die Extremale $\mathfrak{E}_0$ die Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1 berührt, reduziert sich die Bedingung (33_2) auf: $A_1 \gtreqless 0$, also eine Bedingung, die von der Lage des Punktes P_2 auf der Extremalen[1]) $\mathfrak{E}_0^*$ unabhängig ist.

Wir lassen diesen Ausnahmefall in der Folge beiseite und setzen voraus, daß

$$x_1'\tilde{y}_1' - y_1'\tilde{x}_1' \neq 0, \tag{38}$$

d. h. daß die Kurven $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{K}$ sich im Punkt P_1 nicht berühren. In diesem Fall hängt $J''(a_0)$ von der Lage des Punktes P_2 ab. Wir lassen daher den Punkt P_2 die Extremale vom Punkt P_1 bis zu dem zu P_1 konjugierten Punkt P_1' durchlaufen und untersuchen, wie sich dabei das Zeichen von $J''(a_0)$ ändert.

Wegen der Voraussetzungen (II') und (38) ist $B_1 > 0$. Ferner folgt aus (23) und (26), daß

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = -\frac{F_1(t_1)}{F_1(t)\,w_1^2(t)}, \tag{39}$$

also stets positiv. Überdies ist nach (21) und (22)

$$z_1(t_1 + 0) = +\infty; \quad \text{dagegen} \quad z_1(t_1' - 0) = -\infty, \tag{40}$$

da nach dem Sturm'schen Satz von § 11, c) die Funktion $\omega_1(t)$ in t_1 und t_1' entgegengesetztes Zeichen hat.

Während also der Punkt P_2 die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_1' durchläuft, nimmt $J''(a_0)$ beständig ab von $+\infty$ bis $-\infty$, passiert also genau einmal durch den Wert 0. Denjenigen Wert von t, für welchen dies eintritt, bezeichnen wir mit t_1''. Dann ist also

$$J''(a_0) \begin{cases} > 0, & \text{wenn } t_2 < t_1'', \\ = 0, & \text{wenn } t_2 = t_1'', \\ < 0, & \text{wenn } t_2 > t_1''. \end{cases} \tag{41}$$

Für ein Minimum[2]) ist also nötig, daß

$$t_2 \overline{\gtrless}\, t_1''. \tag{42}$$

Derjenige Punkt P_1'' der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$, welcher dem Parameter $t = t_1''$ entspricht, heißt nach Kneser[3]) aus später ersichtlichen Gründen *der Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$*.

[1]) Vgl. wegen der Bezeichnung § 27, c).

[2]) Für spätere Anwendung (§ 42) beachte man, daß die Funktion $J(a)$ im Fall $t_2 > t_1''$ für $a = a_0$ ein Maximum besitzt.

[3]) Vgl. Kneser, *Lehrbuch* § 24; Bliss gebraucht statt dessen „critical point", und diese Bezeichnung ist von Zermelo und Hahn adoptiert worden (*Encyclopädie*, II A, p. 630). Wenn kein konjugierter Punkt P_1' auf der Extremalen $\mathfrak{E}^*$ existiert, so braucht auch nicht notwendig ein Brennpunkt P_1'' zu existieren. Im letzteren Fall ist $J''(a_0) > 0$ auf der ganzen Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$. Wir schreiben auch in diesem Fall : $t_2 < t_1''$.

Somit können wir den Satz aussprechen:

Für ein Minimum des Integrals J unter den angegebenen Endpunktsbedingungen ist weiterhin nötig, daß der Brennpunkt P_1'' der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ nicht zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2 liegt.

Die Gleichung $J''(a_0) = 0$, welcher der Wert t_1'' genügt, können wir nach (27) und (28) auch schreiben[1])

$$H(t, t_1) \equiv A_1 \Theta(t, t_1) + B_1 \frac{\partial \Theta(t, t_1)}{\partial t_1} = 0, \tag{43}$$

und zwar ist t_1'' definiert als die zunächst auf t_1 folgende Wurzel dieser Gleichung.

Mit Hilfe der Gleichungen (21), (22), (27) und (28) verifiziert man leicht, daß

$$A_1 H(t_1, t_1) + B_1 H_t(t_1, t_1) = 0. \tag{44}$$

Die Funktion $H(t, t_1)$ kann daher, abgesehen von einem konstanten Faktor, auch als dasjenige Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung definiert werden, welches der Anfangsbedingung (44) genügt.[2]) Denn ist $u(t)$ ein zweites Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung, welches derselben Anfangsbedingung genügt,

$$A_1 u(t_1) + B_1 u'(t_1) = 0,$$

so folgt, da $B_1 \neq 0$,

$$Hu' - uH' \,|^{t_1} = 0,$$

und dies ist nach § 11, b) Zusatz I, nur möglich, wenn $u = konst.\ H$.

b) Abhängigkeit des Brennpunktes von der Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1:

In den Ausdruck für die Funktion $H(t, t_1)$ kann man statt der beiden Ableitungen $\tilde{x}_1''$, $\tilde{y}_1''$ die Krümmmung der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1 einführen, also die Größe

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{\tilde{x}'\tilde{y}'' - \tilde{y}'\tilde{x}''}{(\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|^1,$$

wenn man — unter Festhaltung der Voraussetzung (38) — aus den beiden Gleichungen

$$\tilde{x}' F_{x'} + \tilde{y}' F_{y'} \,|^1 = 0, \quad x' F_{x'} + y' F_{y'} \,|^1 = F \,|^1 \tag{45}$$

die Größen $F_{x'} \,|^1$ und $F_{y'} \,|^1$ berechnet und in A_1 einsetzt.

[1]) In dieser Form zuerst von Bliss gegeben (Transactions of the American Mathematical Society, Bd. III (1902), p. 136) und aus der zweiten Variation abgeleitet. Unsere Bezeichnung weicht von der Bliss'schen um einen unwesentlichen konstanten Faktor ab. Die entsprechende Gleichung für das x-Problem findet man bei Bolza, *Lectures*, § 23, e).

[2]) Vgl. Bliss, loc. cit.

Bezeichnen θ_1 und $\tilde{\theta}_1$ die Tangentenwinkel von $\mathfrak{E}_0$, resp. $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1, und setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{F}{\sqrt{x'^2+y'^2}\sin(\theta-\tilde{\theta})}\Bigg|^1, \\ D_1 &= L\cos^2\tilde{\theta} + 2M\cos\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta} + N\sin^2\tilde{\theta}\,\Big|^1, \\ E_1 &= (x'^2+y'^2)\sin^2(\theta-\tilde{\theta})F_1\,\Big|^1, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

so nimmt die Gleichung zur Bestimmung des Brennpunktes nach (37) die Form an

$$-\left(\frac{C_1}{\tilde{r}} + D_1\right) + E_1 z_1(t_1'') = 0. \tag{47}$$

Denken wir uns die Extremale $\mathfrak{E}_0$ und den Punkt P_1 festgehalten und die Kurve $\mathfrak{K}$ variiert, aber so, daß die Richtung ihrer Tangente im Punkt P_1 unverändert, somit die Transversalitätsbedingung erfüllt bleibt, so zeigt die vorangehende Gleichung, daß der Brennpunkt P_1'' ungeändert bleibt, solange die Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte P_1 dieselbe bleibt, sich dagegen im allgemeinen[1]) ändert, wenn die Krümmung sich ändert. Um die Abhängigkeit zwischen beiden näher zu untersuchen, lösen wir die Gleichung (47) nach $\frac{1}{\tilde{r}}$ auf:

$$\frac{C_1}{\tilde{r}} = E_1 z_1(t_1'') - D_1,$$

und betrachten $\frac{1}{\tilde{r}}$ als Funktion von t_1''.

Aus (39) und (40) folgt daher für den Fall, daß der konjugierte Punkt P_1' existiert, das Resultat:

Während t_1'' von t_1 bis t_1' wächst, nimmt die Krümmung $\frac{1}{\tilde{r}}$ ab (zu), und zwar von $+\infty$ $(-\infty)$ bis $-\infty$ $(+\infty)$, wenn C_1 positiv (negativ) ist.

Hieraus ergibt sich zugleich das Verhalten der inversen Funktion t_1'' als Funktion von $\frac{1}{\tilde{r}}$.

Berücksichtigt man noch die geometrische Bedeutung des Vorzeichens von $\frac{1}{\tilde{r}}$ (vgl. § 25a)), so läßt sich das Resultat[2]) auch folgendermaßen aussprechen:

Läßt man den Krümmungsradius $\tilde{r}$ der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkt stetig sich ändern, und zwar von 0 bis ∞ auf derselben Seite von $\mathfrak{K}$, auf welcher $\mathfrak{E}_0$ liegt, und dann von ∞ bis 0 auf der entgegengesetzten Seite, so bewegt sich der Brennpunkt P_1'' stetig vom Punkt P_1 nach dem konjugierten Punkt P_1', wenn $F(x_1, y_1, x_1', y_1') > 0$, dagegen vom Punkt P_1' nach dem Punkt P_1, wenn $F(x_1, y_1, x_1', y_1') < 0$.

[1]) Ist $F(x_1, y_1, x_1', y_1') = 0$, (was wegen (38) und (45) nur eintreten kann, wenn gleichzeitig $F_{x'}\big|^1 = 0$, $F_{y'}\big|^1 = 0$), so ist $C_1 = 0$ und t_1'' von der Krümmung unabhängig; wir setzen in der weiteren Diskussion voraus, daß

$$F(x_1, y_1, x_1', y_1') \neq 0. \tag{48}$$

Aus dieser Annahme zusammen mit der vorausgesetzten Transversalitätsbedingung (5) folgt übrigens rückwärts die Ungleichung (38).

[2]) Satz und Beweis nach Bliss, loc. cit. p. 138.

c) Beispiel I bei variablem Anfangspunkt:[1])

Hier ist
$$F = y\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Die Extremalen sind Kettenlinien mit der x-Achse als Direktrix. Wir schreiben insbesondere die Extremale $\mathfrak{E}_0$ in der Form
$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \beta_0 + \alpha_0 t, \quad y = \alpha_0 \operatorname{Ch} t.$$

Die Transversalitätsbedingung lautet:
$$y(\tilde{x}' x' + \tilde{y}' y') = 0.$$

Die Kettenlinie $\mathfrak{E}_0$ muß also im Punkt P_1 zu der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ *orthogonal* sein.

Ferner ergibt eine einfache Rechnung
$$L = -\operatorname{Th} t, \quad M = \frac{1}{\operatorname{Ch} t}, \quad N = \operatorname{Th} t,$$

und daraus, wenn wir die positive Richtung der Kurve $\mathfrak{K}$ so wählen, daß
$$\tilde{\theta}_1 - \theta_1 = +\frac{\pi}{2},$$
$$C_1 = -\alpha_0 \operatorname{Ch} t_1, \quad D_1 = -\operatorname{Th} t_1, \quad E_1 = 1.$$

Endlich findet man
$$\Theta(t, t_1) = \alpha_0^2 \{\operatorname{Sh} t \operatorname{Sh} t_1 (t - t_1) + \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} t_1 - \operatorname{Sh} t_1 \operatorname{Ch} t\}.$$

Hieraus ergibt sich *zur Bestimmung des Brennpunktes die Gleichung*[2])
$$a(\operatorname{Ch} t - t \operatorname{Sh} t) + b \operatorname{Sh} t = 0, \quad \text{worin}$$
$$a = 1 - \frac{\alpha_0}{\tilde{r}} \operatorname{Ch}^2 t_1 \operatorname{Sh} t_1,$$
$$b = \operatorname{Sh} t_1 \operatorname{Ch} t_1 + t_1 + \frac{\alpha_0 \operatorname{Ch}^2 t_1}{\tilde{r}} (\operatorname{Ch} t_1 - t_1 \operatorname{Sh} t_1).$$

Die Diskussion dieser Gleichung ergibt das folgende Resultat[3]):

Liegt der Punkt P_1 auf dem absteigenden Ast der Kettenlinie (in welchem Fall ein zu P_1 konjugierter Punkt P_1' existiert[4]), *so existiert stets ein Brennpunkt*, und zwar in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie zwischen P_1 und P_1'.

Liegt der Punkt P_1 auf dem aufsteigenden Ast (in welchem Fall kein zu P_1 konjugierter Punkt existiert), *so existiert ebenfalls ein Brennpunkt, außer wenn $\tilde{r}$ zwischen 0 und $-\alpha_0 Ch^2 t_1 Sh t_1$ liegt; liegt dagegen $\tilde{r}$ in dem angegebenen Intervall, so existiert kein Brennpunkt.*

---

[1]) Siehe pp. 1, 33, 79.

[2]) Zuerst gegeben von Kneser, Lehrbuch S. 85.

[3]) Nach Mary E. Sinclair, Annals of Mathematics (2), Bd. VIII (1907), p. 177, wo für den Fall $\tilde{r} = \infty$ auch die experimentelle Bestimmung des Brennpunktes mittels des Plateau'schen Versuches gegeben wird.

[4]) Vgl. p. 80.

Der Brennpunkt läßt sich durch eine der Lindelöf'schen ähnliche, aber im allgemeinen etwas kompliziertere *Konstruktion*[1]) bestimmmen. In dem speziellen Fall, wo $\tilde{r} = \pm\infty$, ist dieselbe besonders einfach: Die Normale an die Kettenlinie im Punkt P_1 und die Tangente im Brennpunkt P_1'' schneiden sich auf der x-Achse.[2])

§ 40. Geometrische Bedeutung des Brennpunktes.

Ähnlich wie der konjugierte Punkt hat nun auch der Brennpunkt eine einfache geometrische Bedeutung. Um dieselbe abzuleiten, betrachten wir zunächst die Aufgabe, durch einen Punkt P_3 der Kurve $\mathfrak{K}$ in der Nähe von P_1 eine Extremale zu konstruieren, welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird.

Der Parameter des Punktes P_3 auf der Kurve $\mathfrak{K}$ sei wieder a, seine Koordinaten also $\tilde{x}(a)$, $\tilde{y}(a)$. Ist dann θ der Tangentenwinkel der gesuchten Extremalen $\mathfrak{E}_a$ im Punkte P_3, so können wir letztere in der Normalform von § 27, b) ansetzen:

$$x = \mathfrak{X}(s; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \theta), \qquad y = \mathfrak{Y}(s; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \theta),$$

wobei der Punkt P_3 dem Wert $s = 0$ entspricht.

Soll diese Extremale im Punkt P_3 von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten werden, so muß sein

$$\tilde{x}'(a) F_{x'}(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \cos\theta, \sin\theta) + \tilde{y}' F_{y'}(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \cos\theta, \sin\theta) = 0. \tag{49}$$

Diese Gleichung haben wir nach θ aufzulösen. Die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen (§ 22, e)) sind erfüllt: Denn da nach unserer Annahme die Extremale $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird, so wird die Gleichung befriedigt für $a = a_0$, $\theta = \theta_1$, wenn θ_1 den Tangentenwinkel von $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 bezeichnet. Ferner ist die linke Seite von (49) in der Umgebung der Stelle $a = a_0$, $\theta = \theta_1$ von der Klasse C', und endlich ist ihre partielle Ableitung nach θ an dieser Stelle von Null verschieden; denn eine leichte Rechnung ergibt für diese Ableitung den Wert: $F_1(\tilde{y}'\cos\theta - \tilde{x}'\sin\theta)$, und dies ist wegen unserer Voraussetzungen (II') und (38) im Punkt P_1 von Null verschieden. Somit können wir in der Tat die Gleichung (49) in der Umgebung der Stelle a_0, θ_1 eindeutig nach θ auflösen und erhalten als Lösung eine Funktion: $\theta = \theta(a)$, welche in der Umgebung von $a = a_0$ von der Klasse C' ist und der Anfangsbedingung: $\theta(a_0) = \theta_1$ genügt. Die gesuchte Extremale $\mathfrak{E}_a$ wird also dargestellt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_a\colon \quad x = \mathfrak{X}(s; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \theta(a)), \qquad y = \mathfrak{Y}(s; \tilde{x}(a), \tilde{y}(a), \theta(a)). \tag{50}$$

---

[1]) Vgl. Mary E. Sinclair, loc. cit., p. 182.

[2]) Hierzu weiter die *Übungsaufgaben* Nr. 3, 5, 6—8 am Ende von Kap. IX.

Dabei liefert der Wert $s = 0$ den Schnittpunkt P_3 mit der Kurve $\mathfrak{K}$, und für $a = a_0$ reduzieren sich die Gleichungen (50) auf die Gleichungen der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ in der Normalform

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathfrak{X}(s; x_1, y_1, \theta_1), \qquad y = \mathfrak{Y}(s; x_1, y_1, \theta_1). \tag{51}$$

Endlich folgt aus den Gleichungen (51b) von § 27, daß die Funktionaldeterminante der beiden Funktionen auf der rechten Seite von (50) nach s und a für $s = 0$ den Wert: $\tilde{y}' \cos\theta(a) - \tilde{x}' \sin\theta(a)$ hat, welcher für kleine Werte von a wegen unserer Voraussetzung (38) von Null verschieden ist.

Wir formulieren das Resultat als selbständigen Satz:[1])

Wenn die Extremale $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten, aber nicht berührt wird, so läßt sich durch jeden Punkt P_3 von $\mathfrak{K}$ in der Nähe von P_1 eine und nur eine Extremale konstruieren, welche im Punkt P_3 von $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird, und deren Tangentenwinkel im Punkt P_3 nur unendlich wenig von demjenigen von $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_1 verschieden ist.

Geht die Extremale $\mathfrak{E}_0$ aus der ursprünglich gegebenen Darstellung (1) in die Normalform (51) über durch die Parametertransformation (14), so führt dieselbe Parametertransformation die Gleichungen (50) über in eine neue Darstellung der Extremalen $\mathfrak{E}_a$,

$$\mathfrak{E}_a: \qquad x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{52}$$

welche für $a = a_0$ in die gegebene Darstellung (1) der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ übergeht:

$$\varphi(t, a_0) = \mathring{x}(t), \qquad \psi(t, a_0) = \mathring{y}(t), \tag{53}$$

und bei welcher der Punkt P_3 der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ dem von a unabhängigen Wert $t = t_1$ entspricht:

$$\varphi(t_1, a) = \tilde{x}(a), \qquad \psi(t_1, a) = \tilde{y}(a). \tag{54}$$

Überdies haben die Funktionen φ, ψ die in § 27, d) unter A) bis D) aufgezählten Eigenschaften.

Variiert man a, so stellen die Gleichungen (50) oder (52) *eine die Extremale $\mathfrak{E}_0$ enthaltende Schar von Extremalen dar, welche sämtlich von der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten werden.*

Die Transversalität der beiden Kurven $\mathfrak{E}_a$ und $\mathfrak{K}$ im Punkt P_3 drückt sich aus durch die Gleichung

$$\tilde{x}'(a) F_{x'} + \tilde{y}'(a) F_{y'} = 0, \tag{55}$$

wobei die Argumente von $F_{x'}$ und $F_{y'}$ sind

$$x = \tilde{x}(a), \quad y = \tilde{y}(a), \quad x' = \varphi_t(t_1, a), \quad y' = \psi_t(t_1, a).$$

[1]) Derselbe rührt von Kneser her, vgl. Lehrbuch § 30.

Diese Gleichung, welche eine Identität in a ist, differentiieren wir jetzt nach a. In dem zunächst sich ergebenden Resultat drücke man die zweiten Ableitungen von F mittels der Gleichungen (12a) und (85) des fünften Kapitels durch die Funktionen F_1, L, M, N aus und beachte, daß nach (54)

$$\tilde{x}'(a) = \varphi_a(t_1, a), \qquad \tilde{y}'(a) = \psi_a(t_1, a)$$

und daher

$$\varphi_t(t_1, a)\tilde{y}'(a) - \psi_t(t_1, a)\tilde{x}'(a) = \Delta(t_1, a),$$

wenn $\Delta(t, a)$ wieder die Funktionaldeterminante der Schar (52) bedeutet.

Setzt man schließlich $a = a_0$, so erhält man die Relation:

$$A_1 \Delta(t_1, a_0) + B_1 \Delta_t(t_1, a_0) = 0, \tag{56}$$

wenn $\Delta(t, a)$ die Funktionaldeterminante der Schar (52) bedeutet.

Nun ist aber nach § 29, b) die Funktion $\Delta(t, a_0)$ ein Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung für die Extremale $\mathfrak{E}_0$; und da $\Delta(t, a_0)$ der Anfangsbedingung (56) genügt, so folgt nach der am Ende von § 39, a) gemachten Bemerkung, daß

$$\Delta(t, a_0) = C H(t, t_1), \tag{57}$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante ist, da nach (53), (54) und (38)

$$\Delta(t_1, a_0) = x_1' \tilde{y}_1' - y_1' \tilde{x}_1' \neq 0. \tag{57a}$$

Die Funktion $H(t, t_1)$ unterscheidet sich also nur um einen konstanten Faktor von der Funktionaldeterminante $\Delta(t, a_0)$ derjenigen Extremalenschar, welche von der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird.

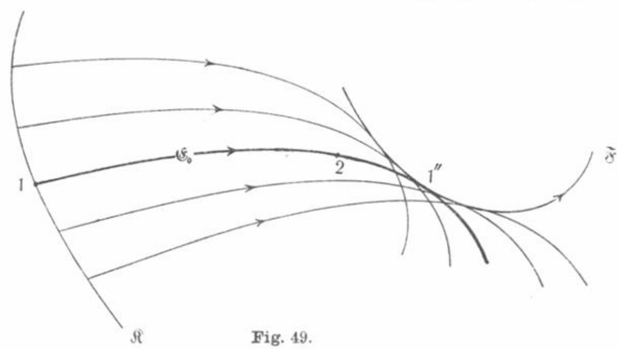

Fig. 49.

Daraus folgt aber nach § 29, c) der Satz:[1])

Der Brennpunkt P_1'' der Kurve $\mathfrak{K}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ ist derjenige Punkt, in welchem die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ zum ersten Mal — von P_1 nach P_2 zu gerechnet — die Enveloppe $\mathfrak{F}$ der von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnittenen Extremalenschar berührt.[2])

---

[1]) Vgl. Bliss, loc. cit. p. 140.

[2]) Diese Eigenschaft dient bei Kneser (*Lehrbuch* § 24) als Definition des Brennpunktes. Hierdurch findet zugleich der Name seine Erklärung; man denke

Beispiel XVIII: Von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ nach einem gegebenen Punkt P_2 die kürzeste Kurve zu ziehen. [1])

Hier ist
$$F = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Die *Extremalen sind Gerade*, da die Differentialgleichung (23b) von § 26 hier die Form annimmt
$$\frac{1}{r} = 0.$$

Die Bedingungen (II') und (III') sind stets erfüllt.

Die Transversalitätsbedingung lautet
$$\tilde{x}'x' + \tilde{y}'y' \,\Big|^1 = 0,$$

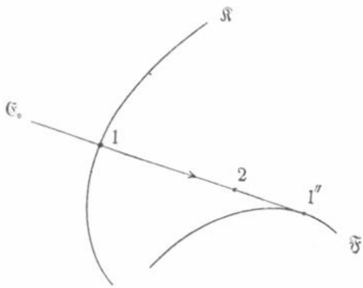

Fig. 50.

d. h. *die Gerade $\mathfrak{E}_0$ muß im Punkt P_1 auf der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen.* Die Extremalenschar, welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird, ist hier also das Normalensystem der Kurve $\mathfrak{K}$; ihre Enveloppe ist die Evolute $\mathfrak{F}$ der Kurve $\mathfrak{K}$. *Der Brennpunkt P_1'' ist daher der Krümmungsmittelpunkt der Kurve* $\mathfrak{K}$ im Punkt P_1, und wir haben daher das Resultat: [2])

Für ein Minimum ist notwendig, daß der Punkt P_2 entweder auf der entgegengesetzten Seite der Kurve $\mathfrak{K}$ liegt, wie der Krümmungsmittelpunkt P_1'' oder aber, falls beide Punkte auf derselben Seite von $\mathfrak{K}$ liegen, daß P_1'' nicht zwischen P_1 und P_2 liegt.

§ 41. Hinreichende Bedingungen für das Problem mit einem variabeln Endpunkt.

Wir setzen jetzt voraus, daß der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ keine Doppelpunkte besitzt und die Bedingungen [3]) (II') und (IV') für feste Endpunkte erfüllt; ferner daß er im Punkt P_1 von der gegebenen Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird und die Ungleichung (48) erfüllt; endlich daß er den Brennpunkt P_1'' nicht enthält, d. h. also daß
$$t_2 < t_1''. \tag{58}$$

---

an den Fall, wo die Extremalen gerade Linien sind, die man als Lichtstrahlen interpretiert. Die Brennpunktsbedingung mit dieser Definition des Brennpunktes rührt von Kneser her (loc. cit.); wir werden seinen Beweis in § 47 geben.

[1]) Da für das Längenintegral: $J_{21} = J_{12}$ (vgl. § 25, b)), so ist die Aufgabe äquivalent mit der Aufgabe: Von einem gegebenen Punkt nach einer gegebenen Kurve die kürzeste Kurve zu ziehen.

[2]) Schon von Erdmann aus der zweiten Variation abgeleitet. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII (1878) p. 374.

[3]) Vgl. § 32, b).

Wir wollen zeigen, daß alsdann der Bogen $\mathfrak{E}_0$ in dem im Eingang von § 36 definierten Sinn ein Minimum für das Integral J liefert[1]).

Die in § 40 bestimmte Extremalenschar (52), welche von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal geschnitten wird, liefert unter den gemachten Voraussetzungen ein Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ um den Bogen $\mathfrak{E}_0$. Denn die Bedingung (58) läßt sich nach (57), (41) und (43) auch schreiben

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2;$$

und da überdies die Funktionen φ, ψ die in § 31, a) vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften besitzen, so sind alle Bedingungen des Satzes über die Existenz eines Feldes erfüllt.

Der dem Intervall: $[a_0 - k, a_0 + k]$ des Parameters a entsprechende Bogen der Kurve $\mathfrak{K}$ liegt ganz in diesem Feld, da man wegen (54) die Kurve $\mathfrak{K}$ auch schreiben kann

$$\mathfrak{K}: \qquad x = \varphi(t_1, a), \qquad y = \psi(t_1, a).$$

Wir verfahren jetzt ganz wie in § 31, b): Wir nehmen auf der Fortsetzung des Bogens $\mathfrak{E}_0$ über den Punkt P_1 hinaus einen Punkt P_0 so nahe bei P_1, daß

$$F(x_0, y_0, x_0', y_0') \neq 0,$$

was wegen der Voraussetzung (48) stets möglich ist, konstruieren durch den Punkt P_0 die Transversale $\mathfrak{K}_0$ zur Extremalenschar (52) und führen das Feldintegral $W(x, y)$ ein, gerechnet von der Kurve $\mathfrak{K}_0$ aus.

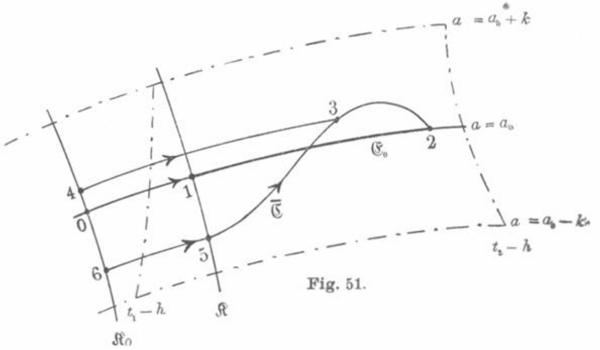

Fig. 51.

Jetzt sei

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x = \bar{x}(s), \qquad y = \bar{y}(s), \qquad s_5 \overline{\gtrless} s \overline{\gtrless} s_2$$

irgend eine gewöhnliche, ganz im Feld gelegene Kurve, welche von irgend einem Punkt P_5 der Kurve $\mathfrak{K}$ nach dem Punkt P_2 führt; dabei wählen wir der Einfachheit halber den Bogen s als Parameter auf $\overline{\mathfrak{C}}$. Dann gilt für die totale Variation

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0}$$

[1]) Zuerst von KNESER bewiesen, *Lehrbuch*, §§ 20—22; wegen eines zweiten sich unmittelbar an die Differentiationsmethode anschließenden Beweises, vgl. p. 314, Fußnote [2].)

der *Weierstraß'sche Fundamentalsatz*

$$\Delta J = \int_{s_5}^{s_2} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}; p, q; \bar{p}, \bar{q}) ds, \tag{59}$$

wobei die Argumente der $\mathcal{E}$-Funktion dieselbe Bedeutung haben, wie in § 32, a).

Dies läßt sich auf Grund der Resultate von § 31, c) mittels einer von KNESER[1]) herrührenden *Modifikation der Weierstraß'schen Konstruktion* beweisen.

Sei in der Tat $P_3(s = s_3)$ irgend ein Punkt der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$, so schneidet die durch P_3 gehende Extremale des Feldes, $\mathfrak{E}_3(a = a_3)$, die Transversale $\mathfrak{R}_0$ in dem auf $\mathfrak{R}_0$ dem Wert $a = a_3$ entsprechenden Punkt P_4. Dann bilden wir das Integral J, genommen von P_4 entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_3$ bis P_3 und von P_3 entlang der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ bis P_2, und bezeichnen dessen Wert mit $S(s_3)$, sodaß

$$S(s_3) = J_{43} + \bar{J}_{32}.$$

Läßt man den Punkt P_3 mit P_5 zusammenfallen, wobei P_4 nach P_6 rücken möge, so kommt

$$S(s_5) = J_{65} + \bar{J}_{52}.$$

Läßt man dagegen P_3 mit P_2 zusammenfallen, so kommt

$$S(s_2) = J_{02} = J_{01} + J_{12}.$$

Nun ist aber

$$J_{65} = W(x_5, y_5), \quad J_{01} = W(x_1, y_1)$$

und

$$W(x_5, y_5) = W(x_1, y_1), \tag{60}$$

da nach § 31, c) $W(x, y)$ auf der Transversalen $\mathfrak{R}$ konstant ist. Es folgt also

$$\Delta J = \bar{J}_{52} - J_{12} = -[S(s_2) - S(s_5)].$$

Die Berechnung der Ableitung $S'(s_3)$ und damit der Beweis von (59) gestaltet sich nunmehr genau wie in § 32, a).

Statt der Weierstraß'schen Konstruktion kann man auch hier wieder das Hilbert'sche invariante Integral $J^*_{\bar{\mathfrak{C}}}$ benutzen. Nach Gleichung (151) von § 31 ist nämlich einerseits

$$J^*_{\bar{\mathfrak{C}}} = W(x_2, y_2) - W(x_5, y_5),$$

andererseits, da $\mathfrak{E}_0$ eine Extremale des Feldes ist,

$$J_{\mathfrak{E}_0} = W(x_2, y_2) - W(x_1, y_1);$$

[1]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, § 20.

also ist wegen (60)
$$J_{\mathfrak{E}_0} = J^*_{\overline{\mathfrak{C}}},$$
woraus nunmehr wie in § 17, c) und § 32, a) der Weierstraß'sche Satz (59) folgt.

Nachdem aber einmal der Weierstraß'sche Satz bewiesen ist, kann man genau wie in § 32, b) weiter schließen und erhält das Resultat, daß $\Delta J > 0$, falls die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ nicht mit $\mathfrak{E}_0$ identisch ist und falls die Größe k hinreichend klein gewählt worden ist.

Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ liefert also in der Tat unter den im Eingang dieses Paragraphen aufgezählten Bedingungen ein starkes, eigentliches Minimum für das Integral J.

§ 42. Der Fall zweier variabler Endpunkte.

Wir betrachten schließlich noch den Fall, wo beide Endpunkte beweglich sind, der erste auf einer Kurve $\mathfrak{K}_1$, der zweite auf einer Kurve $\mathfrak{K}_2$. Beide Kurven sollen, soweit sie für die Untersuchung in Betracht kommen, von der Klasse C'' sein und im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegen. An der Voraussetzung, daß die Funktion F von den Koordinaten der Endpunkte unabhängig ist, soll auch hier festgehalten werden.

a) **Vorbemerkungen:**

Wir nehmen wieder an, wir hätten eine Kurve $\mathfrak{E}_0$ gefunden, welche unter diesen Anfangsbedingungen ein Minimum für das Integral J liefert. Indem wir dann zunächst wieder Variationen betrachten, welche die beiden Endpunkte P_1, P_2 von $\mathfrak{E}_0$ festlassen, finden wir wie in § 36, daß die Kurve $\mathfrak{E}_0$ eine Extremale sein muß und die sämtlichen übrigen notwendigen Bedingungen für den Fall fester Endpunkte erfüllen muß. Wir nehmen für die weitere Untersuchung an, daß die Bedingungen (II'), (III'), (IV') erfüllt sind. Sodann folgt aus der Betrachtung von Variationen, welche den Punkt P_2 fest lassen, während P_1 auf der Kurve $\mathfrak{K}_1$ frei beweglich ist, daß die Kurve $\mathfrak{K}_1$ die Extremale $\mathfrak{E}_0$ in P_1 transversal schneiden muß
$$\tilde{x}' F_{x'}(x, y, x', y') + \tilde{y}' F_{y'}(x, y, x', y') \Big|^1 = 0, \tag{61}$$
und daß der in § 39, a) definierte Brennpunkt von $\mathfrak{K}_1$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ nicht zwischen P_1 und P_2 liegen darf. Wir wollen diesen Brennpunkt den „rechtsseitigen Brennpunkt" von $\mathfrak{K}_1$ auf $\mathfrak{E}_0^*$ nennen und seinen Parameter wie bisher mit t_1'' bezeichnen. Wir nehmen an, die Brennpunktsbedingung sei in der etwas stärkeren Form
$$t_2 < t_1'' \tag{62}$$
erfüllt.

Weiterhin betrachten wir Variationen, welche den Punkt P_1 fest lassen, während P_2 auf $\mathfrak{K}_2$ beweglich ist. Für solche Variationen lassen sich die Schlüsse von §§ 36—41 fast unverändert wiederholen, und wir erhalten das Resultat, daß die Kurve $\mathfrak{K}_2$ die Extremale $\mathfrak{E}_0$ in P_2 transversal schneiden muß:

$$\tilde{x}' F_{x'}(x, y, x', y') + \tilde{y}' F_{y'}(x, y, x', y') \Big|^2 = 0, \tag{63}$$

und daß der „linksseitige Brennpunkt" von $\mathfrak{K}_2$ auf $\mathfrak{E}_0^*$ nicht zwischen P_1 und P_2 liegen darf. Der Parameter t_2''' desselben ist definiert als die dem Wert t_2 *zunächst vorangehende* Wurzel der Gleichung

$$H_2(t, t_2) = 0, \tag{64}$$

wobei

$$H_2(t, t_2) = A_2 \Theta(t, t_2) + B_2 \frac{\partial \Theta(t, t_2)}{\partial t_2}, \tag{65}$$

während die Konstanten A_2, B_2 genau in derselben Weise für den Punkt P_2 und die Kurve $\mathfrak{K}_2$ zu berechnen sind, wie die Konstanten A_1, B_1 mittels der Gleichungen (36) für den Punkt P_1 und die Kurve $\mathfrak{K}_1$. Wir nehmen an, die zweite Brennpunktsbedingung sei in der etwas stärkeren Form

$$t_2''' < t_1 \tag{66}$$

erfüllt.

Endlich soll noch für die weitere Diskussion angenommen werden, daß

$$F(x_1, y_1, x_1', y_1') \neq 0, \qquad F(x_2, y_2, x_2', y_2') \neq 0, \tag{67}$$

woraus nach p. 319 Fußnote [1]) folgt, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ weder in P_1 die Kurve $\mathfrak{K}_1$, noch in P_2 die Kurve $\mathfrak{K}_2$ berührt.

b) **Die Bliss'sche Bedingung:**[1])

Zu den auf diese Weise aus der Betrachtung spezieller Variationen abgeleiteten Bedingungen muß nun noch eine weitere, von Bliss herrührende Bedingung hinzugefügt werden. Die Kurve $\mathfrak{K}_2$ hat nämlich auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ auch noch einen „rechtsseitigen Brennpunkt" P_2'', dessen Parameter t_2'' durch die zunächst auf t_2 folgende Wurzel der Gleichung (64) bestimmt wird. Die Bliss'sche Bedingung läßt sich dann einfach so aussprechen:

---

[1]) Für das Beispiel der kürzesten Entfernung zwischen zwei Kurven ist diese Bedingung zuerst von Erdmann (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII (1878) p. 369) aus seiner allgemeinen Formel für die zweite Variation bei variablen Endpunkten abgeleitet worden; für den allgemeinen Fall ist der Satz zuerst von Bliss gegeben worden, von dem auch der im Text gegebene Beweis herrührt (Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904) p. 70). Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 9—12 am Ende von Kap. IX.

Der rechtsseitige Brennpunkt P_1'' von $\mathfrak{K}_1$ darf nicht zwischen dem Endpunkt P_2 und dem rechtsseitigen Brennpunkt P_2'' von $\mathfrak{K}_2$ liegen, es muß also sein

$$t_2'' \leqq t_1''. \tag{68}$$

Angenommen es wäre

$$t_1'' < t_2'';$$

so wähle man zwischen P_1'' und P_2'' einen Punkt P_0 auf $\mathfrak{E}_0^*$ und betrachte zunächst die Aufgabe, das Integral J zu einem Minimum zu machen, wenn der erste Endpunkt auf $\mathfrak{K}_1$ beweglich ist, während der zweite fest ist und mit P_0 zusammenfällt. Für diese Aufgabe liefert nach § 39, a) der Bogen $P_1 P_0$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ kein Minimum, da

$$t_1'' < t_0.$$

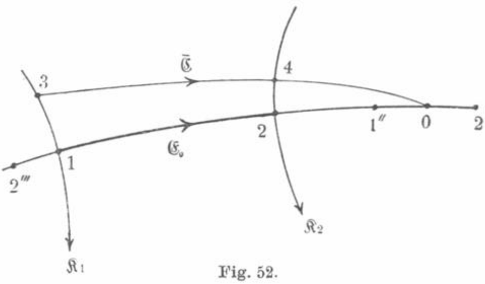

Fig. 52.

Wir können also in jeder Umgebung des Bogens $P_1 P_0$ eine Vergleichskurve $P_3 P_0$ finden, für welche

$$\bar{J}_{30} < J_{10}.$$

Die Kurve $P_3 P_0$ schneide $\mathfrak{K}_2$ in einem Punkte P_4.

Jetzt betrachte man andererseits das Problem, das Integral J zu einem Minimum zu machen, wenn der erste Endpunkt auf $\mathfrak{K}_2$ beweglich ist, während der zweite fest ist und mit P_0 zusammenfällt. Da

$$t_0 < t_2'',$$

so sind für dieses Problem nach § 41 die hinreichenden Bedingungen erfüllt, vorausgesetzt, daß die Bedingungen (II') und (IV') auch noch über P_2 hinaus bis zum Punkte P_0 gelten. Daraus folgt, daß

$$\bar{J}_{40} > J_{20},$$

falls die Kurve $P_4 P_0$ in hinreichender Nähe von $\mathfrak{E}_0^*$ gewählt worden ist.

Durch Subtraktion der beiden Ungleichungen folgt aber

$$\bar{J}_{34} < J_{12},$$

womit die Notwendigkeit der Bedingung (68) bewiesen ist.

Die Bedingung (68) läßt sich noch in eine andere Form bringen. Dazu konstruieren wir nach § 40 diejenige Extremalenschar

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{69}$$

welche von der Kurve $\mathfrak{K}_1$ transversal geschnitten wird. Alsdann können wir nach § 31, c) auf Grund der Voraussetzung (67_2) durch den Punkt P_2 eine eindeutig definierte Transversale $\mathfrak{T}$ der Extremalenschar (69) konstruieren. Zugleich ist dann die Extremalenschar (69) im Sinne von § 40 die einzige Extremalenschar, welche im Punkte P_2 von der Kurve $\mathfrak{T}$ transversal geschnitten wird. Aus der geometrischen Bedeutung des Brennpunktes folgt daher, daß der Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{T}$ auf der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ mit dem Punkte P_1'' identisch ist.

Wendet man jetzt auf die beiden Kurven $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}_2$ die Resultate von § 39, b) an, nachdem man vorher den positiven Sinn auf beiden Kurven so gewählt hat, daß die positive Tangente an $\mathfrak{E}_0$ im Punkte P_2 links von der (gemeinsamen) positiven Tangente an $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}_2$ liegt, so erkennt man, daß die Ungleichung (68) mit der folgenden Bedingung äquivalent ist:

Wenn $F(x_2, y_2, x_2', y_2') > 0 (< 0)$, so muß im Punkte P_2 die Krümmung von $\mathfrak{K}_2$ nicht kleiner (größer) als diejenige von $\mathfrak{T}$ sein:

$$\frac{1}{r_{\mathfrak{K}_2}} \geqq (\leqq) \frac{1}{r_{\mathfrak{T}}}. \tag{70}$$

Dies läßt sich auch so aussprechen:[1])

Wenn $F(x_2, y_2, x_2', y_2') > 0\ (< 0)$, so muß die Kurve $\mathfrak{T}$ in der Nähe des Punktes P_2 ganz auf derselben (entgegengesetzten) Seite der Kurve $\mathfrak{K}_2$ liegen wie der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$.

In dieser zweiten Form bleibt der Satz auch dann noch richtig, wenn die Brennpunkte P_1'' und P_2'' gar nicht existieren, in welchem Falle (68) illusorisch wird.

c) **Hinreichende Bedingungen:**

Wir fügen jetzt den unter a) aufgezählten Voraussetzungen über den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ noch die weitere hinzu, daß die Bedingung (68), resp. (70) in der stärkeren Form

$$t_2'' < t_1'', \tag{68a}$$

resp.

$$\frac{1}{r_{\mathfrak{K}_2}} > (<) \frac{1}{r_{\mathfrak{T}}} \tag{70a}$$

erfüllt ist.

Alsdann liefert der Bogen $\mathfrak{E}_0$ in der Tat einen kleineren Wert für das Integral J als jede andere gewöhnliche Kurve, welche in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{E}_0$ von der Kurve $\mathfrak{K}_1$ nach der Kurve $\mathfrak{K}_2$ gezogen werden kann.

Man kann dies nach Zermelo und Hahn[2]) folgendermaßen beweisen: Man nehme zwischen P_2'' und P_1'' einen Punkt P_0 an; da $t_0 < t_1''$, so liefert nach § 41 der Bogen $P_1 P_0$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ einen kleineren Wert für das Integral J als jede andere gewöhnliche Kurve,

[1]) Vgl. Bliss, loc. cit., p. 80. In dieser Form läßt sich der Satz übrigens auch direkt mit Hilfe des Kneser'schen Transversalensatzes beweisen.

[2]) *Encyclopädie*, II A, p. 631.

welche in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{A}$ des Bogens $P_1 P_0$ von $\mathfrak{K}_1$ nach P_0 gezogen werden kann, allerdings unter der weiteren Voraussetzung, daß die Bedingungen (II') und (IV') über den Punkt P_2 hinaus bis zum Punkte P_0 gelten.

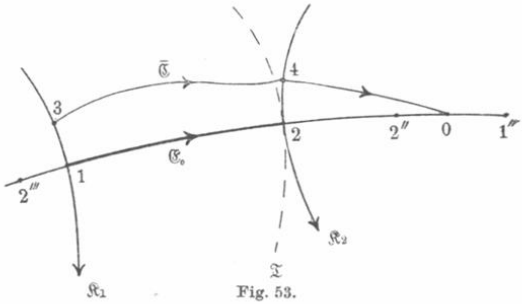

Fig. 53.

Andererseits folgt nach (41) aus der Ungleichung $t_2'' < t_0$, daß der Extremalenbogen $P_2 P_0$ ein relatives **Maximum** für das Integral J liefert in Beziehung auf die Schar von Extremalen, welche von der Kurve $\mathfrak{K}_2$ nach dem Punkte P_0 gezogen werden können.

Ist daher die Umgebung $\mathfrak{A}$ passend gewählt, so folgt: Ist $P_3 P_4$ irgendeine Vergleichskurve, welche von einem Punkte P_3 von $\mathfrak{K}_1$ nach einem Punkte P_4 von $\mathfrak{K}_2$ führt und ganz im Bereiche $\mathfrak{A}$ liegt, so können wir vom Punkte P_4 nach dem Punkte P_0 eine Extremale $P_4 P_0$ ziehen, und es ist dann nach dem eben Gesagten einerseits

$$\bar{J}_{34} + J_{40} > J_{10},$$

andererseits

$$J_{40} < J_{20}.$$

Durch Subtraktion folgt hieraus: $\bar{J}_{34} < J_{12}$, was zu beweisen war.[1]

---

[1]) Der hier gegebene Beweis sowohl für die Notwendigkeit der Bedingung (68) als für die Hinlänglichkeit von (68a) zeichnet sich durch seine Anschaulichkeit aus, leidet aber an dem Mangel, daß er unnötige Bedingungen einführt, indem er das Bestehen der Bedingungen (II') und (IV') über den Punkt P_2 hinaus voraussetzt. Einen rein analytischen Beweis für beide Behauptungen, der von diesem Mangel frei ist und auch sonst vom Standpunkte der Strenge befriedigender, dafür aber weniger einfach ist, erhält man nach Bliss (loc. cit. p. 75), wenn man das Integral J betrachtet, genommen entlang einer Extremalen $\mathfrak{C}_a$ der Schar (69) von ihrem Schnittpunkte mit der Kurve $\mathfrak{K}_1$ bis zu ihrem Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_2$. Dieser Integralwert, der eine Funktion von a ist, muß für $a = a_0$ ein Minimum besitzen. Daraus folgt dann zunächst, ähnlich wie in § 39, die Notwendigkeit der Bedingung (70) und sodann durch Kombination der hinreichenden Bedingungen für ein gewöhnliches Minimum mit den hinreichenden Bedingungen von § 41 für ein Minimum bei einem variabeln Endpunkt die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingungen (siehe Fig. 54). Einen dritten Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung (68) gibt Dresden mit Hilfe der Formeln (24) für die zweiten Ableitungen des Extremalenintegral, loc. cit. p. 477.

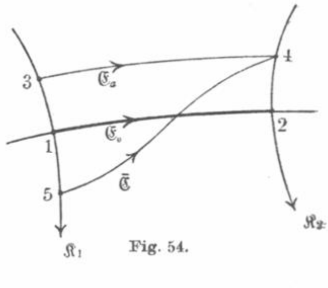

Fig. 54.