universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Übungsaufgaben zum fünften Kapitel

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Übungsaufgaben zum fünften Kapitel.

Für die folgenden Flächen *die geodätischen Linien* zu bestimmen und die Frage der *konjugierten Punkte* zu untersuchen, wenn möglich sowohl geometrisch als analytisch:

1. Für die *Kugel.*

2. Für die allgemeinste *Zylinderfläche.*

3. Für *abwickelbare Flächen* im allgemeinen. (Jacobi)

4. Für das *Rotationsparaboloid:*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = u^2/2p.$$

Lösung: Bei passender Wahl des Parameters lautet die Gleichung zur Bestimmung des zu t_1 konjugierten Punktes

$$\operatorname{Coth} t - t = \operatorname{Coth} t_1 - t_1 .$$

5*. Für das *Rotationsellipsoid.* (Braunmühl, v. Mangoldt)

6*. Für den *Kreisring.* (Bliss)

7. Die Funktionen F_2 und K für geodätische Linien zu berechnen, wenn das Linienelement in der Form

$$ds^2 = \mathsf{E}(du^2 + dv^2)$$

gegeben ist und die Bogenlänge als Parameter gewählt wird (§ 28, c)).

Lösung:

$$F_2 = \frac{\mathsf{E}_{uu} + \mathsf{E}_{vv}}{2} - \frac{\mathsf{E}_u^2 + \mathsf{E}_v^2}{2\mathsf{E}} - \mathsf{E}\mathsf{E}''$$

$$K = \frac{\mathsf{E}_u^2 + \mathsf{E}_v^2 - \mathsf{E}(\mathsf{E}_{uu} + \mathsf{E}_{vv})}{2\mathsf{E}^3}. \qquad \text{(Underhill)}$$

8. Für folgende Funktionen die *Indikatrix* zu konstruieren und mit deren Hilfe die Frage des starken und schwachen Extremums zu diskutieren:

$$F = yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{x\sqrt{x'^2 + y'^2} + yx'}.$$

9. *Das Prinzip der kleinsten Aktion für die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene*[1]: Ein materieller Punkt von der Masse 1 sei gezwungen, sich in der x, y-Ebene zu bewegen. Unter der Einwirkung einer in der x, y-Ebene gelegenen Kraft, welche eine von der Zeit unabhängige Kräftefunktion $U(x, y)$ besitzt, möge der Punkt aus einer gegebenen Anfangslage $P_0(x_0, y_0)$ bei gegebener Anfangsrichtung und Geschwindigkeit nach Ablauf einer gewissen Zeit in eine Endlage $P_1(x_1, y_1)$ übergehen. Wir bezeichnen den absoluten Wert der Anfangsgeschwindigkeit mit v_0. Bestimmt man dann die Konstante h aus der Gleichung

$$v_0^2 = 2(U(x_0, y_0) + h),$$

so erfüllt die von dem materiellen Punkt beschriebene Bahn die erste notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals

$$\mathfrak{A} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U(x, y) + h)} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$

in Beziehung auf die Gesamtheit aller die beiden Punkte P_0 und P_1 verbindenden Kurven der x, y-Ebene.

Das Integral $\mathfrak{A}$ wird die „*Aktion*" entlang der betrachteten Kurve genannt. Konjugierte Punkte werden dabei „*konjugierte kinetische Brennpunkte*" genannt.

Andeutung: Man benutze die beiden Differentialgleichungen (20) und treffe eine passende Wahl der den Parameter charakterisierenden Zusatzgleichung (§ 26, a)). Welcher Satz der Mechanik wird durch die Form (23b) der Euler'schen Differentialgleichung ausgedrückt? (Jacobi, Darboux, Appell)

10. Das Prinzip der kleinsten Aktion auf die *Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einer vertikalen Ebene* anzuwenden (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes).

Der materielle Punkt werde vom Koordinatenanfangspunkt P_0 eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen positive y-Achse vertikal nach oben gerichtet ist, unter einem Winkel α gegen die Horizontale mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 fortgeschleudert. Der Quotient $v_0/2g$ werde mit k bezeichnet. Die Bahn ist dann eine Parabel mit der Geraden: $y = k$ als Direktrix. Den zu P_0 konjugierten Punkt P_0' zu bestimmen; für welche Werte von α existiert ein solcher, für welche nicht? Geometrische Konstruktion desselben: Die Gerade von der Amplitude: $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ durch den Punkt P_0 schneidet die Parabel zum

[1]) Vgl. Kap. XI

zweiten Mal im Punkt P_0'. Die Tangenten an die Parabel in P_0 und P_0' schneiden sich in einem Punkt T der Geraden: $y = k$ (Lindelöf's Konstruktion, verallgemeinert, vgl. § 13, c)), und zwar unter einem rechten Winkel. Die Enveloppe der Extremalenschar durch den Punkt P_0 zu bestimmen; welche Bedeutung hat dieselbe für die Aufgabe: bei gegebenem v_0 den Winkel α so zu bestimmen, daß die Bahn durch einen gegebenen zweiten Punkt P_1 hindurchgeht?
(Tait and Steel, Appell)

11. Für das vorangehende Beispiel und für die Extremalenschar durch den Punkt P_0 *das Feldintegral* $W(x, y)$, gerechnet vom Punkt P_0, zu berechnen, a) mittels der Hamilton'schen Formeln (148), b) nach der Methode von § 20.

Lösung:

$$W(x, y) = \sqrt{2g}\left((2k - y)\,u - \frac{u^3}{3}\right),$$

wo

$$u = \sqrt{2k - y - \sqrt{4k(k-y) - x^2}}.$$

Dies läßt sich auch in die Form bringen:

$$W(x, y) = \frac{\sqrt{g}}{3}\left\{\left[(2k - y) + \sqrt{x^2 + y^2}\right]^{\frac{3}{2}} - \left[(2k - y) - \sqrt{x^2 + y^2}\right]^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Für den Wert der Aktion vom Punkt P_0 bis zum konjugierten Punkt P_0' ergibt sich hieraus der Wert

$$\frac{1}{3}\,\frac{{v_0}^3}{g \sin^3 \alpha}. \qquad \text{(Darboux)}$$

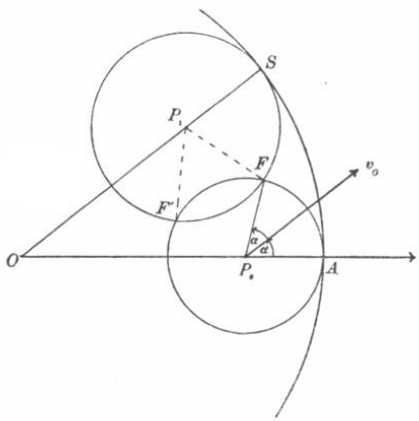

Fig. 45.

12. Das Prinzip der kleinsten Aktion auf die *Planetenbewegung* anzuwenden.

Die Sonne befinde sich im Pol O eines Systems von Polarkoordinaten r, θ; die Anfangslage P_0 sei gegeben durch $r = r_0$, $\theta = 0$, die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0, die Anfangsrichtung bilde mit der Achse den Winkel α; die Anziehungskraft sei μ/r^2. Die Bahn ist eine Ellipse: Parabel oder Hyperbel, jenachdem $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, $= \frac{2\mu}{r_0}$ oder $> \frac{2\mu}{r_0}$. Diese Bedingung ist von α unabhängig. Für den Fall der Ellipse ist die große Halbachse a gegeben durch

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{{v_0}^2}{\mu},$$

also ebenfalls von α unabhängig.

Aus den Brennpunktseigenschaften der Ellipse folgen nunmehr folgende Sätze: Der zweite Brennpunkt F liegt auf dem Kreis mit dem Radius $|P_0A| = 2a - r_0$ um den Punkt P_0; der Vektor P_0F bildet mit der Achse den Winkel 2α. Verlängert man die Gerade P_0F bis zu ihrem zweiten Schnittpunkt mit der Ellipse, so ist dieser der zu P_0 konjugierte Punkt P_0'. Die Enveloppe der Extremalenschar durch den Punkt P_0 ist eine Ellipse $\mathfrak{F}$, welche die Punkte O und P_0 zu Brennpunkten hat und durch den Punkt A geht. Bei der Ableitung dieser Resultate gehe man von der Aufgabe aus, bei gegebenem v_0 diejenige Extremale zu bestimmen, welche durch den Punkt P_0 und durch einen zweiten gegebenen Punkt P_1 hindurchgeht: Durch jeden Punkt P_1 im Innern der Ellipse $\mathfrak{F}$ gehen zwei Extremalen von P_0 aus; man verlängere die Gerade OP_1 bis zu ihrem Schnittpunkt S mit dem Kreis um O mit dem Radius $|OA| = 2a$, beschreibe sodann um P_1 einen Kreis mit dem Radius $|P_1S|$; derselbe schneidet den Kreis mit dem Radius $|P_0A|$ um P_0 in zwei Punkten F, F', welche die zweiten Brennpunkte der beiden gesuchten Ellipsen sind. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ geht eine Extremale von P_0 aus. Liegt P_1 außerhalb $\mathfrak{F}$, so geht keine Extremale von P_0 nach P_1. (Jacobi, Tait and Steel)

13. Für die vorangehende Aufgabe die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung aufzustellen und ein vollständiges Integral derselben nach der Methode von § 20, c) aus dem ersten Integral: $F_{\theta'} = \beta$ der Euler'schen Differentialgleichung abzuleiten.

Lösung:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right).$$

$$W = \beta\theta + \sqrt{\mu a}\left\{u + e\sin u - 2\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)\right\} + \gamma,$$

wobei

$$\beta^2 = \mu a(1-e^2), \qquad r = a(1 - e\cos u).$$

Für welche Extremalenschar ist die Schar: $W =$ konst. die Transversalenschar? (Jacobi)

14. *Das Prinzip der kleinsten Aktion auf die Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Fläche auszudehnen.* Hieraus den Satz abzuleiten, daß der Punkt eine geodätische Linie beschreibt, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. (Appell)

15. *Das allgemeine Problem der Brachistochrone auf einer Fläche:* Auf einen materiellen Punkt, welcher gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, wirke eine Kraft, welche eine von der Zeit unabhängige Kräftefunktion $U(x, y, z)$ besitzt. Unter allen Kurven, welche auf der Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten P_0 und P_1 gezogen werden können, diejenige zu bestimmen, entlang welcher der materielle Punkt in der kürzesten Zeit von P_0 nach P_1 gelangt, wenn ihm im Punkt P_0 eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird. (Appell)

16*. *Die Brachistochrone auf einer Kugel unter der Einwirkung der Schwere* zu bestimmen; die Gestalt der Kurve zu diskutieren; die Frage der konjugierten Punkte zu untersuchen.

17*. Unter allen Kurven, welche zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 verbinden, diejenige zu bestimmen, welche das *kleinste Trägheitsmoment* in Beziehung auf einen dritten Punkt P_0 besitzt.

In Polarkoordinaten hat man also das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} r^2 \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen.

Lösung: Liegen die drei Punkte P_0, P_1, P_2 in gerader Linie, so liefert das gerade Segment P_1P_2 das absolute Minimum.

Ist $0 < |\theta_2 - \theta_1| < \frac{\pi}{3}$, so können die beiden Punkte P_1, P_2 durch eine einzige Extremale: $r^3 \cos(3\theta + \alpha) = \beta$ verbunden werden, und diese liefert stets das absolute Minimum.

Ist $|\theta_2 - \theta_1| \geqq \frac{\pi}{3}$, so besitzt die Aufgabe keine kontinuierliche Lösung.

(Bonnet, Mason.)

18*. *Die krummlinige Bahn eines Lichtstrahls in einem nicht homogenen, durchsichtigen, einfach brechenden Medium zu bestimmen, dessen absoluter Brechungsexponent n eine stetige Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Ortes ist.*

Andeutungen: Die Fortpflanzung des Lichtes von einem Punkt P_0 nach einem andern P_1 erfolgt in der kürzesten möglichen Zeit. Da der absolute Brechungsexponent nach der Undulationstheorie umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des Lichtes in dem betreffenden Punkt ist, so haben wir daher das Integral[1])

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} n\, ds$$

zu einem Minimum zu machen, wo n eine gegebene Funktion von x, y, z bedeutet. Wenn insbesondere n eine Funktion der Entfernung von einem festen Zentrum O ist (eine Bedingung, welche annähernd für die Atmosphären der Himmelskörper erfüllt ist), so liegt die Bahn in einer Ebene durch den Punkt O. Macht man diese Ebene zur x, y-Ebene und den Punkt O zum Koordinatenanfangspunkt, so ist n eine Funktion von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, und das Integral, welches zu einem Minimum zu machen ist, nimmt folgende Gestalt an, wenn wir Polarkoordinaten r, θ mit dem Pol O einführen:

[1]) Vgl. auch Appell, *Traité de Mécanique*, Bd. I, p. 215.

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(r) \sqrt{r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}\, d\tau .$$

Der Lichtstrahl möge von einem gegebenen Punkt $r = r_0$, $\theta = 0$ ausgehen und seine Anfangsrichtung möge mit der Achse des Koordinatensystems den Winkel $\frac{\pi}{2} - i$ bilden. Den allgemeinen Charakter der Bahn zu untersuchen, insbesondere in seiner Abhängigkeit von dem Anfangswinkel i, unter der Annahme, daß $f(r)$ für $r = \infty$ sich einer bestimmten endlichen Grenze $\geqq 1$ nähert.

Handelt es sich um die Brechung des Lichts in der Atmosphäre eines Himmelskörpers vom Radius R, so ist eine angenähert richtige Wahl für die Funktion $f(r)$:

$$f(r) = \left(1 + k e^{\frac{-R(r-R)}{\lambda r}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei k und λ zwei physikalische Konstante sind. Dabei ist dann noch die Gebietsbeschränkung: $r \geqq R$ hinzuzufügen.

Die Frage der konjugierten Punkte zu untersuchen.[1]) (Kummer)

[1]) Die letztere Aufgabe hat Weierstrass in seinen Vorlesungen gestellt.