Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Fünftes Kapitel. Die Weierstraß´sche Theorie der einfachsten Klasse von Problemen in Parameterdarstellungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Fünftes Kapitel.

Die Weierstraß'sche Theorie der einfachsten Klasse von Problemen in Parameterdarstellung.

§ 25. Formulierung der Aufgabe.

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns durchweg auf Kurven beschränkt, bei welchen sich y als eindeutige Funktion von x darstellen läßt, bei welchen also jede zur y-Achse parallele Gerade die Kurve höchstens in einem Punkt schneidet; überdies haben wir vorausgesetzt, daß die Kurve keine zur y-Achse parallele Tangente besitzt. Wir werden uns jetzt von dieser Beschränkung befreien, indem wir in Zukunft sämtliche zu betrachtende Kurven in Parameterdarstellung[1]) annehmen.

a) Allgemeine Bemerkungen über Kurven in Parameterdarstellung:[2])

Eine *stetige Kurve* $\mathfrak{C}$ wird definiert durch ein System von zwei Gleichungen

$$\mathfrak{C}: \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2, \tag{1}$$

wobei $x(t)$ und $y(t)$ Funktionen der unabhängigen Variable t (des sogenannten „Parameters") sind, welche im Intervall $[t_1\, t_2]$ eindeutig und stetig sind. Jedem Wert von t im Intervall $[t_1\, t_2]$ wird durch die Gleichungen (1) ein Punkt P der Kurve zugeordnet, den wir

---

[1]) Die Behandlung der Probleme der Variationsrechnung in Parameterdarstellung rührt von Weierstrass her (*Vorlesungen*, schon 1865); sie bedeutet, besonders für geometrische Aufgaben, einen wichtigen Fortschritt, da die Beschränkung auf Kurven, die in der Form: $y = y(x)$ darstellbar sind, eine erschöpfende Behandlung geometrischer Aufgaben im allgemeinen unmöglich macht.

[2]) Vgl. hierzu Jordan, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 96—113, und Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. I, p. 122.

einfach den Punkt t nennen. Durch die Gleichungen (1) wird daher nicht nur eine gewisse Punktmenge in der x, y-Ebene definiert, sondern zugleich eine bestimmte *Ordnung* dieser Punkte festgelegt: ist $t' < t''$, so geht der Punkt $P'(t')$ dem Punkt $P''(t'')$ voran, in Zeichen $P' \prec P''$. Während t von t_1 bis t_2 wächst, beschreibt[1]) der Punkt (x, y) die Kurve in einem bestimmten *Sinn*, von ihrem Anfangspunkt zu ihrem Endpunkt; ersteren bezeichnen wir mit P_1, letzteren mit P_2, wofür wir häufig auch bloß 1 und 2 schreiben werden. Wenn wir von einer zwei Punkte A und B verbindenden Kurve reden, so soll damit stets eine von dem zuerst genannten Punkt (A) nach dem zuletzt genannten Punkt (B) gezogene Kurve gemeint sein.

Machen wir die „*Parametertransformation*"

$$t = \chi(\tau) \tag{2}$$

wo $\chi(\tau)$ eine stetige Funktion von τ ist, welche beständig wächst von t_1 bis t_2, während τ von τ_1 bis τ_2 zunimmt, so verwandeln sich die Gleichungen (1) in

$$x = x(\chi(\tau)) = X(\tau), \quad y = y(\chi(\tau)) = Y(\tau), \quad \tau_1 \overline{\overline{<}} \tau \overline{\overline{<}} \tau_2. \tag{1a}$$

Umgekehrt gehen die Gleichungen (1a) wieder in die Gleichungen (1) über durch die zu (2) inverse[2]) Transformation

$$\tau = \theta(t). \tag{2a}$$

Die Gleichungen (1a) stellen wieder eine Kurve, $\mathfrak{C}'$, dar. Die beiden Kurven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ bestehen nicht nur aus denselben Punkten, sondern diese Punkte sind auch in beiden in derselben Weise geordnet. Aus diesem Grunde kommen wir überein, die beiden durch (1) und (1a) definierten Kurven als identisch zu betrachten, und umgekehrt sollen zwei stetige Kurven auch *nur* dann als identisch betrachtet werden, wenn sie durch eine Parametertransformation von der angegebenen Eigenschaft in einander transformiert werden können.

In dem speziellen Fall, wenn die Funktion $x(t)$ beständig wächst, während t von t_1 bis t_2 zunimmt, läßt sich die Gleichung $x = x(t)$ eindeutig nach t auflösen[2]) und die inverse Funktion

$$t = \chi(x)$$

---

[1]) Wesentlich verschieden von dieser Auffassung der Kurve als Bahn eines sich bewegenden Punktes („*Bahnkurve*, path-curve" E. H. Moore) ist die Auffassung der Kurve als eines geometrischen Ortes („*Ortskurve*, locus-curve"), bei welcher die Kurve durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten x, y definiert wird, und wobei von der Ordnung der Punkte abgesehen wird.

[2]) Vgl. A III 5.

liefert eine zulässige Parametertransformation; wir erhalten daher die Kurve (1) dargestellt in der Form

$$y = g(x).$$

Ebenso ist $-x$ ein zulässiger Parameter, wenn die Funktion $x(t)$ beständig abnimmt.

Beispiel: Der im ersten Quadranten gelegene Bogen des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius a wird als Ortskurve definiert durch die Bedingungen

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0,$$

dagegen als Bahnkurve, wenn er im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers durchlaufen wird, z. B. durch

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2},$$

oder auch durch die Gleichungen

$$x = \frac{a(1-\tau^2)}{1+\tau^2}, \qquad y = \frac{2a\tau}{1+\tau^2}, \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

die aus der ersten Darstellung durch die Parametertransformation

$$t = 2 \operatorname{Arctg} \tau$$

hervorgehen, wo Arctg, wie stets in der Folge, den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegenen Hauptzweig der Funktion arcus tangens bezeichnet.

Ist eine stetige Kurve $\mathfrak{C}$ in einer anderen, $\mathfrak{K}$, als Bestandteil enthalten, so heißt $\mathfrak{C}$ ein *Bogen* der Kurve $\mathfrak{K}$.

Die Kurve $\mathfrak{C}$ soll *von der Klasse* $C^{(n)}$ heißen, wenn sich der Parameter t so wählen[1] läßt, daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ im Intervall $[t_1\, t_2]$ von der Klasse $C^{(n)}$ sind, und daß überdies die Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ nicht beide in demselben Punkt des Intervalls $[t_1\, t_2]$ verschwinden, so daß also

$$x'^2 + y'^2 \neq 0 \quad \text{in} \quad [t_1\, t_2]. \tag{3}$$

Eine Kurve der Klasse[2] $C^{(n)} (n \geqq 1)$ besitzt in jedem Punkt eine *Tangente;* die „Amplitude" θ der positiven Richtung derselben, d. h. der Winkel dieser Richtung mit der positiven x-Achse, den wir kurz

---

[1] Zur Darstellung einer Kurve der Klasse $C^{(n)}$ sollen nur solche Parameter zugelassen werden, welche diese beiden Eigenschaften besitzen, d. h. also nur solche Parametertransformationen (2), bei welchen $\chi(\tau)$ ebenfalls von der Klasse $C^{(n)}$ ist und überdies

$$\chi'(\tau) > 0.$$

[2] Man beachte, daß die Klasse $C^{(n+1)}$ in der Klasse $C^{(n)}$ enthalten ist.

„den Tangentenwinkel der Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt t" nennen werden, wird durch die beiden Gleichungen gegeben

$$\cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \tag{4}$$

Eine Kurve der Klasse C' ist stets *rektifizierbar*[1]), und die Länge s des Bogens $[t_1\,t]$ ist ausdrückbar durch das bestimmte Integral:

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{5}$$

Da dasselbe mit t beständig wächst, so kann man für eine Kurve der Klasse C' stets s als Parameter wählen.

Eine Kurve der Klasse C'' hat in jedem Punkt eine endliche *Krümmung*, welche durch die Formel[2]) gegeben wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{x'y''-x''y'}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3}. \tag{6}$$

Ist dieselbe positiv (negativ), so liegt der Vektor von dem betrachteten Kurvenpunkt nach dem Krümmungsmittelpunkt zur linken (rechten) der positiven Tangente der Kurve, wenn, wie wir stets voraussetzen, die positive y-Achse zur linken der positiven x-Achse liegt. Die Größen θ, s, r bleiben invariant gegenüber allen Parametertransformationen.

Wir werden es in der Folge fast ausschließlich mit stetigen Kurven zu tun haben, welche entweder in ihrer ganzen Ausdehnung von der Klasse C' sind, oder aber aus einer endlichen Anzahl von Bogen von der Klasse C' bestehen. Eine solche Kurve wollen wir der Kürze halber eine *gewöhnliche Kurve* nennen.

Ein Punkt, in dem zwei dieser Bogen zusammenstoßen, soll eine „*Ecke*"[3]) heißen, wenn dort die Richtung der positiven Tangente tatsächlich eine Unstetigkeit erleidet. Auch in einem solchen Punkt existiert die vordere und die hintere Derivierte von $x(t)$ und $y(t)$, und dementsprechend eine vordere und hintere Tangente.

Wir sagen eine Kurve sei *regulär* in einem Punkt $t = t'$, wenn sich $x(t)$ und $y(t)$ für hinreichend kleine Werte von $|t-t'|$ in konvergente nach ganzen Potenzen von $(t-t')$ fortschreitende Reihen entwickeln lassen:

---

[1]) Vgl. JORDAN, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 105—111.

[2]) Vgl. z. B. JORDAN, *loc. cit.*, I, Nr. 448, 450, und SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Kurven*, I, p. 35.

[3]) Auch „*Knickpunkt*" nach CARATHEODORY, vgl. § 48.

$$x(t) = a + a_1(t - t') + \cdots$$
$$y(t) = b + b_1(t - t') + \cdots,$$

in welchen a_1 und b_1 nicht beide null sind.

b) **Bedingung für die Invarianz eines Kurvenintegrals unter einer Parametertransformation:**

Es sei $F(x, y, x', y')$ eine Funktion von vier unabhängigen Variabeln, welche von der Klasse C''' ist in einem Bereich $\mathfrak{T}$, welcher aus allen Punkten (x, y, x', y') besteht, für welche (x, y) in einem gewissen Bereich $\mathfrak{R}$ der x, y-Ebene liegt, während (x', y') irgend ein endliches Wertsystem mit Ausnahme des Wertsystems $(0,0)$ sein darf.

Wir setzen voraus, daß die durch die Gleichungen (1) definierte Kurve $\mathfrak{C}$ in dem Bereich $\mathfrak{R}$ liegt und von der Klasse C' ist, und wählen[1]) zwei beliebige Punkte P_3 und $P_4 (t_3 < t_4)$ auf $\mathfrak{C}$. Dann verstehen wir unter dem *Integral der Funktion F genommen entlang dem Bogen $P_3 P_4$* der Kurve $\mathfrak{C}$ das Integral

$$\int_{t_3}^{t_4} F(x(t),\ y(t),\ x'(t),\ y'(t))\,dt. \tag{7}$$

Hier tritt uns nun aber eine eigentümliche Schwierigkeit entgegen: Gehen wir nämlich durch die Parametertransformation (2) zu einer anderen Darstellungsform (1a) derselben Kurve $\mathfrak{C}$ über so ergibt sich nach der eben gegebenen Definition für das Integral der Funktion F entlang demselben Bogen, der Darstellung (1a) entsprechend,

$$\int_{\tau_3}^{\tau_4} F(X(\tau),\ Y(\tau),\ X'(\tau),\ Y'(\tau))\,d\tau, \tag{7a}$$

wo:

$$t_3 = \chi(\tau_3), \qquad t_4 = \chi(\tau_4).$$

Der Begriff des Integrals der Funktion F entlang einer gegebenen Kurve hat also nur dann einen bestimmten, von der Wahl des Parameters unabhängigen Sinn, wenn die beiden Integrale (7) und (7a) einander gleich sind; und zwar verlangen wir, daß diese Gleichung gelten soll

α) für jede Parametertransformation $t = \chi(\tau)$ von den oben angegebenen Eigenschaften, bei welcher überdies $\chi(\tau)$ in $[\tau_3 \tau_4]$ von der Klasse C' ist;

---

[1]) Wenn wir sagen, wir wählen einen Punkt auf der Kurve $\mathfrak{C}$, so soll dies stets heißen: wir wählen einen Wert von t und bestimmen dann den zugehörigen Punkt der Kurve. Diese Verabredung ist nötig, weil dasselbe Wertsystem (x, y) verschiedenen Parameterwerten entsprechen kann (mehrfache Punkte).

β) für jede Lage der beiden Punkte P_3 und P_4 auf der Kurve $\mathfrak{C}$;

γ) für jede im Bereich $\mathfrak{R}$ gelegene Kurve $\mathfrak{C}$ von der Klasse C'.

Führen wir in dem Integral (7) statt der Variabeln t die Variable τ ein, mittels der Substitution: $t = \chi(\tau)$, und beachten, daß

$$X'(\tau) = x'(t)\,\chi'(\tau)\,, \qquad Y'(\tau) = y'(t)\,\chi'(\tau)\,,$$

so geht (7) über in

$$\int_{\tau_3}^{\tau_4} F\Big(X(\tau),\ Y(\tau),\ \frac{X'(\tau)}{\chi'(\tau)},\ \frac{Y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\Big)\,\chi'(\tau)\,d\tau. \tag{7b}$$

Wegen β) dürfen wir die Gleichung: (7b) = (7a) nach τ_4 differentiieren und erhalten, wenn wir der Kürze halber τ statt τ_4 schreiben:

$$F\Big(X(\tau),\ Y(\tau),\ \frac{X'(\tau)}{\chi'(\tau)},\ \frac{Y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\Big)\,\chi'(\tau) = F(X(\tau),\ Y(\tau),\ X'(\tau),\ Y'(\tau)). \tag{8}$$

Wegen α) muß dies auch für die spezielle Transformation

$$t = \frac{1}{k}\,\tau$$

gelten, wenn k irgend eine positive Konstante ist; also folgt

$$F(X(\tau),\ Y(\tau),\ kX'(\tau),\ kY'(\tau)) = kF(X(\tau),\ Y(\tau),\ X'(\tau),\ Y'(\tau)).$$

Aber indem wir, der Forderung γ) entsprechend, die Kurve $\mathfrak{C}$ und den Parameter τ passend wählen, können wir die vier Größen: $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $X'(\tau)$, $Y'(\tau)$ jedes vorgeschriebene dem Bereich $\mathfrak{T}$ angehörige Wertsystem annehmen lassen, und daher muß die Relation

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y') \tag{9}$$

identisch erfüllt sein, für jedes Wertsystem x, y, x', y', im Bereich $\mathfrak{T}$ und für jedes *positive* k, oder wie wir sagen wollen: *Die Funktion* $F(x, y, x', y')$ *muß in* x', y' *positiv-homogen*[1]) *und von der Dimension 1 sein.*

Umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, so gilt (8), da wir $\chi'(\tau) > 0$ voraussetzen und daraus folgt rückwärts die Gleichung:

---

[1]) Man muß sich hüten, diese beschränkte Homogeneität mit der gewöhnlichen Homogeneität rationaler Funktionen zu verwechseln, bei welcher die Homogeneitätsrelation für positive und negative Werte von k gilt. So sind z. B. die Funktionen

$$\sqrt{x'^2 + y'^2}\,, \qquad xy' - yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

positiv-homogen, aber nicht homogen im gewöhnlichen Sinn.

(7) = (7a). Wir haben also den folgenden von WEIERSTRASS herrührenden

Satz[1]): *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Wert des Integrals der Funktion $F(x, y, x', y')$ entlang einer Kurve von der Wahl des Parameters unabhängig ist, besteht darin, daß F in bezug auf x' und y' positiv-homogen von der Dimension 1 ist.*

Wir werden in der Folge stets voraussetzen, daß die Funktion $F(x, y, x', y')$ die Homogeneitätsbedingung (9) erfüllt, und wir werden das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x(t),\ y(t),\ x'(t),\ y'(t))\, dt$$

je nach Bedarf mit $J_{\mathfrak{C}}(P_1 P_2)$, oder auch kürzer mit $J_{\mathfrak{C}}$ oder J_{12} bezeichnen. Allgemeiner soll $J_{\mathfrak{C}}(P_3 P_4)$ das Integral J, genommen entlang einem Bogen $P_3 P_4$ der Kurve $\mathfrak{C}$, bezeichnen.

Will man die Richtung der Integration umkehren[2]), so muß man zuerst einen neuen Parameter einführen, welcher wächst, wenn die Kurve vom Punkt P_2 bis zum Punkt P_1 durchlaufen wird, z. B.[3]): $u = -t$. Die Gleichungen

$\mathfrak{C}^{-1}$: $$x = x(-u),\quad y = y(-u),\quad u_1 \gtreqless u \gtreqless u_2,$$

wo:

$$u_1 = -t_2,\quad u_2 = -t_1,$$

stellen dieselbe Gesamtheit von Punkten dar wie (1), aber der Sinn ist entgegengesetzt.

Das Integral von F entlang der Kurve $\mathfrak{C}^{-1}$ hat den Wert

$$\begin{aligned} J_{21} &= \int_{u_1}^{u_2} F\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}\right) du \\ &= \int_{u_1}^{u_2} F(x(-u),\ y(-u),\ -x'(-u),\ -y'(-u))\, du \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F(x(t),\ y(t),\ -x'(t),\ -y'(t))\, dt. \end{aligned}$$

[1]) WEIERSTRASS, *Vorlesungen*; vgl. auch KNESER, *Lehrbuch*, § 3. Die Verallgemeinerung des Satzes für den Fall, wo F höhere Ableitungen von x und y enthält, ist von ZERMELO gegeben worden. (*Dissertation*, p. 2—23); für den Fall von Doppelintegralen von KOBB, Acta Mathematica, Bd. XVI (1892), p. 67.

[2]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, p. 9.

[3]) Dies ist natürlich keine eigentliche „Parametertransformation“ und dementsprechend haben wir die Kurve $\mathfrak{C}^{-1}$ als von $\mathfrak{C}$ verschieden zu betrachten.

Wenn die Relation (9) auch für negative Werte von k gültig bleibt (was z. B. eintritt, wenn F eine rationale Funktion von x', y' ist) so ist

$$F(x, y, -x', -y') = -F(x, y, x', y'),$$

und daher: $J_{21} = -J_{12}$.

Ein hierher gehöriges Beispiel ist das Integral für den Inhalt der von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fläche:

$$J = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx')\,dt.$$

Die Relation (9) braucht aber für negative Werte von k nicht zu gelten; wenn insbesondere für negative Werte von k statt dessen die Relation

$$F(x, y, kx', ky') = -kF(x, y, x', y')$$

gilt, wie z. B. bei dem Integral für die Bogenlänge, so ist: $J_{21} = J_{12}$.

Beides sind jedoch nur spezielle Fälle, und im allgemeinen läßt sich keine einfache Beziehung zwischen J_{21} und J_{12} aufstellen.

c) **Relationen**[1]) **zwischen den partiellen Ableitungen der Funktion** $F(x, y, x', y')$:

Differentiiert man (9) nach k und setzt dann $k = 1$, so kommt, wie bei gewöhnlichen homogenen Funktionen,

$$x'F_{x'} + y'F_{y'} = F. \tag{10}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach x und y

$$F_x = x'F_{x'x} + y'F_{y'x}, \qquad F_y = x'F_{x'y} + y'F_{y'y}, \tag{11}$$

und durch Differentiation nach x' und y'

$$x'F_{x'x'} + y'F_{y'x'} = 0, \qquad x'F_{x'y'} + y'F_{y'y'} = 0; \tag{11a}$$

und hieraus, wenn x' und y' nicht gleichzeitig null sind,

$$F_{x'x'} : F_{x'y'} : F_{y'y'} = y'^2 : -x'y' : x'^2; \tag{12}$$

daher existiert eine Funktion F_1 von x, y, x', y' derart, daß

$$F_{x'x'} = y'^2F_1, \quad F_{x'y'} = -x'y'F_1, \quad F_{y'y'} = x'^2F_1. \tag{12a}$$

Die so definierte Funktion F_1 ist nach unseren Annahmen über F von der Klasse C' im Bereich $\mathfrak{T}$, selbt wenn eine der beiden Vari-

[1]) Nach Weierstrass, *Vorlesungen*.

abeln x', y' null ist; dagegen wird F_1 im allgemeinen unendlich oder unbestimmt, wenn gleichzeitig $x' = 0$, $y' = 0$ und zwar selbst dann, wenn F selbst für $(x', y') = (0, 0)$ endlich und stetig bleibt; so z. B. für

$$F = y\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \text{wo} \quad F_1 = \frac{y}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3}.$$

Wir bemerken noch, daß aus (9) durch Differentiation nach x und y, bzw. x' und y' die weiteren Homogeneitätsrelationen folgen:

$$\left.\begin{array}{c} F_x(x, y, kx', ky') = kF_x(x, y, x', y'), \quad F_y(x, y, kx', ky') = kF_y(x, y, x', y'), \\ F_{x'}(x, y, kx', ky') = F_{x'}(x, y, x', y'), \quad F_{y'}(x, y, kx', ky') = F_{y'}(x, y, x', y'), \\ F_1(x, y, kx', ky') = k^{-3} F_1(x, y, x', y'), \end{array}\right\} \quad (13)$$

für

$$k > 0.$$

d) **Definition des Minimums:**[1])

Die Definition des Minimums gestaltet sich nun ganz ähnlich wie im § 3, nur daß jetzt alle Kurven in Parameterdarstellung vorausgesetzt werden; außerdem wollen wir den Begriff der zulässigen Kurven noch dadurch erweitern, daß wir auch Kurven mit einer endlichen Anzahl von „Ecken“ zulassen.[2])

---

[1]) Im wesentlichen nach Weierstrass, *Vorlesungen*, 1879; vgl. auch Zermelo, *Dissertation*, p. 25—29, und Kneser, *Lehrbuch*, § 17.

[2]) Für eine Kurve mit einer endlichen Anzahl von Ecken von den unter a) charakterisierten Eigenschaften hat das Integral J zunächst überhaupt keine Bedeutung, da die Funktionen x', y' und daher auch $F(x, y, x', y')$ in den Ecken nicht definiert sind. Legt man aber der Funktion F in den Ecken, die den Parameterwerten $t = c_1, c_2, \ldots, c_n$ entsprechen mögen, beliebige endliche Werte bei, so erhält das Integral für die so modifizierte Funktion nach A V 2 einen bestimmten endlichen Wert, und dieser Wert ist nach A V 3 von der Wahl der Werte von F in den Punkten c_i unabhängig und daher die naturgemäße Definition für das Integral J entlang der betrachteten Kurve. Es folgt dann nach bekannten Sätzen über bestimmte Integrale, daß

$$J = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i+0}^{c_{i+1}-0} F(x, y, x', y')\,dt, \qquad (c_0 = t_1, \quad c_{n+1} = t_2),$$

wobei die Bezeichnung andeuten soll, daß man bei der Berechnung des Integrals für das Intervall $[c_i c_{i+1}]$ den Funktionen x', y' in c_i die Werte $x'(c_i + 0)$, $y'(c_i + 0)$, in c_{i+1} die Werte $x'(c_{i+1} - 0)$, $y'(c_{i+1} - 0)$ beilegt.

Es seien also zwei Punkte P_1 und P_2 im Bereich $\mathfrak{R}$ gegeben; wir betrachten als „zulässige Kurven" die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ aller „gewöhnlichen[1]) Kurven", welche in $\mathfrak{R}$ von P_1 nach P_2 gezogen werden können. Dann sagen wir eine zulässige Kurve $\mathfrak{C}$ liefert ein Minimum[2]) für das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt,$$

wenn eine „Umgebung" $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{C}$ existiert, derart, daß

$$J_{\mathfrak{C}} \overline{\overline{<}} J_{\overline{\mathfrak{C}}}$$

für jede zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche in $\mathfrak{U}$ von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.

Dabei soll unter einer Umgebung $\mathfrak{U}$ einer ebenen Kurve $\mathfrak{C}$ wieder jeder ebene Bereich[3]) verstanden werden, welcher die Kurve $\mathfrak{C}$ ganz in seinem Innern enthält, so daß also jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ ein „innerer[3]) Punkt" von $\mathfrak{U}$ ist.

e) **Vergleichung der Methode der Parameterdarstellung mit der früheren Methode:**

Man ist leicht geneigt, die ältere Methode, bei welcher x als unabhängige Variable gebraucht wird, im Vergleich zur Weierstraß'schen Methode der Parameterdarstellung für veraltet und unvollkommen zu halten. Jedoch mit Unrecht: Vielmehr haben es die beiden Methoden mit zwei verschiedenen Aufgaben zu tun, und welche von beiden den Vorzug verdient, hängt in jedem einzelnen Fall von der speziellen Natur des vorliegenden Problems ab.

Im allgemeinen kann man sagen, daß für *geometrische* Aufgaben die Methode der Parameterdarstellung nicht nur vorzuziehen ist, sondern überhaupt die einzige ist, welche eine vollständige Lösung der Aufgabe liefert.[4]) Handelt es sich dagegen darum, eine *Funktion* zu bestimmen, welche ein Integral zu einem Extremum macht, so hat man die ältere Methode anzuwenden.

---

[1]) Vgl. § 25, a). Eine Ausdehnung der Aufgabe auf eine allgemeinere Klasse von Kurven wird in § 35 betrachtet werden.

[2]) Genauer „starkes, relatives" Minimum; wir werden es fast ausschließlich mit diesem zu tun haben. Die Unterscheidung zwischen „eigentlichem" und „uneigentlichem" Minimum ist dann wieder ganz so wie p. 18 definiert.

[3]) Wegen der Definition von „Bereich" und „Inneres" vgl. A I 7 und 9. Man beachte, daß wir zwischen Umgebung und Nachbarschaft einer Kurve unterscheiden, vgl. § 3, b).

[4]) Es sei denn, daß man die auf p. 205, Fußnote auseinandergesetzte Methode anwenden will, bei welcher man jedoch die gegebene Aufgabe durch eine Aufgabe von weit komplizierterem Typus ersetzt. Vgl. auch die Übungsaufgaben Nr. 35—40 auf pp. 149—151.

Dieselbe Unterscheidung gilt auch für Aufgaben von allgemeinerem Typus. So sind z. B. das Hamilton'sche Prinzip und das Prinzip der kleinsten Aktion in der ersten (Lagrange'schen) Form Funktionenprobleme, weil hier die Koordinaten der Punkte des Systems als Funktionen einer ganz bestimmten unabhängigen Variabeln, nämlich der Zeit, gesucht werden. Dagegen ist das Prinzip der kleinsten Aktion in der zweiten (Jacobi'schen) Form, bei welcher die Zeit eliminiert ist und nur die Bahnen bestimmt werden, ein Kurvenproblem (vgl. Kap. XI).

Betrachtet man die Aufgabe das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, einmal in Beziehung auf eine gewisse Menge $\mathfrak{M}$ von zulässigen Kurven, das andere Mal in Beziehung auf eine andere Menge $\mathfrak{N}$, so sind dies zwei ganz verschiedene Aufgaben, und man muß im allgemeinen erwarten, daß auch ihre Lösungen verschieden sind.

Wir wählen nun für $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Kurven der Klasse C', welche im Bereich $\mathfrak{R}$ vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2 gezogen werden können, und für $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit derjenigen Kurven von $\mathfrak{M}$, für welche beständig

$$x'(t) > 0\,. \tag{14}$$

Für jede Kurve von $\mathfrak{N}$ können wir dann x als Parameter einführen, und erhalten die Kurve in der Form

$$y = y(x),$$

wo $y(x)$ eine Funktion der Klasse C' ist, während das Integral J übergeht in

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

wenn wir die Funktion $f(x, y, p)$ durch

$$f(x, y, p) = F(x, y, 1, p) \tag{15}$$

definieren. Die zweite Aufgabe ist aber identisch mit dem Problem, das wir in den drei ersten Kapiteln behandelt haben.

So gehört also zu jedem „t-Problem", wie wir sagen wollen, ein entsprechendes „x-Problem", das durch Hinzufügung der Bedingung (14) daraus hervorgeht. Ebenso kann man rückwärts von einem gegebenen „x-Problem" zu dem entsprechenden „t-Problem" übergehen, indem man

$$p = \frac{y'}{x'}$$

setzt und demnach

$$F(x, y, x', y') = f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x' \tag{15a}$$

definiert, wobei es freilich vorkommen kann, daß die Funktion F nicht allen von uns vorausgesetzten Bedingungen genügt.

Aus (15a) folgen die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} F_x = f_x x', & F_y = f_y x' \\ F_{x'} = f - p f_p, & F_{y'} = f_p \\ \multicolumn{2}{c}{F_1 = \dfrac{f_{pp}}{x'^3}.} \end{array}\right\} \tag{16}$$

Da die Menge $\mathfrak{N}$ in der Menge $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so folgt, daß jede Lösung des t-Problems, welche überdies der Bedingung (14) genügt, a fortiori auch eine Lösung des x-Problems liefert. Das t-Problem kann aber auch Lösungen besitzen, welche die Bedingung (14) nicht erfüllen, und welche daher keine Lösungen des x-Problems sind. Ein Beispiel dieser Art ist die bekannte „diskontinuierliche Lösung" beim Problem der Rotationsfläche kleinsten Inhalts (vgl. § 52).

Es kann aber auch umgekehrt das x-Problem Lösungen besitzen, welche nicht zugleich Lösungen für das t-Problem sind. Ein einfaches Beispiel[1]) dieser Art liefert die Aufgabe, das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 \, dx$$

zu einem Minimum zu machen, wobei die Endpunkte P_1 und P_2 die Koordinaten: $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$ haben sollen. Dann liefert die Gerade $P_1 P_2$: $y = x$ ein starkes Minimum für das Integral und zwar ist der Minimalwert $J = +1$. Denn ersetzt man y durch $y + \omega$, wo ω irgend eine Funktion der Klasse C' ist, welche in beiden Endpunkten verschwindet, so ist

$$\Delta J = \int_0^1 (2\omega' y' + \omega'^2) \, dx = \int_0^1 \omega'^2 \, dx,$$

also $\Delta J > 0$.

Dagegen liefert dieselbe Gerade $P_1 P_2$ für das entsprechende t-Problem, wo

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'^2}{x'} \, dt$$

kein Minimum. Denn man kann in jeder noch so kleinen Umgebung von $P_1 P_2$ die beiden Punkte P_1 und P_2 durch eine Zickzacklinie verbinden, welche abwechselnd aus geradlinigen Stücken vom Gefälle 0 und -1 besteht. Für eine solche Zickzacklinie wird aber offenbar das Integral J negativ, also sicher kleiner als 1.

Die betrachtete Zickzacklinie ist für das t-Problem eine zulässige Variation, nicht aber für das x-Problem.

---

[1]) Dasselbe rührt von Bromwich her, vgl. Mathematical Gazette, Bd. III (1905), p. 179. Ein anderes Beispiel dieser Art ist unser Beispiel X, p. 113, in dem Fall, wo $m > 0$, oder $m < -1$; man benutze dieselbe Zickzacklinie wie im Text.

Das eben behandelte Beispiel ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen, von Weierstrass herrührenden Satzes (vgl. § 30, b)), wonach das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

überhaupt kein Extremum besitzt, wenn $F(x, y, x', y')$ eine rationale Funktion von x', y' ist, während das entsprechende x-Problem sehr wohl eine Lösung besitzen kann.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man in allen Fällen, wo es sich nur um die Untersuchung einer Kurve der Klasse C' in der Umgebung eines einzelnen Punktes handelt, die Kurve ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets in der Form: $y = \mathfrak{y}(x)$ annehmen darf, da man stets durch Drehung des Koordinatensystems erreichen kann, daß in der Umgebung des betreffenden Punktes $x' > 0$.

§ 26. Die Differentialgleichung des Problems.

Das Verfahren zur Aufstellung notwendiger Bedingungen für ein Extremum ist zunächst ganz analog wie in § 4; wir werden daher nur diejenigen Punkte ausführlich erörtern, in welchen die Behandlung in Parameterdarstellung charakteristische Eigentümlichkeiten aufweist.

a) **Die Weierstraß'sche Form der Euler'schen Differentialgleichung:**

Wir nehmen an, wir hätten eine Kurve $\mathfrak{C}$ gefunden, welche das Integral J zu einem Minimum macht. Wir setzen fürs erste[1]) voraus, die Kurve $\mathfrak{C}$ sei von der Klasse C' und liege ganz *im Innern* des Bereiches $\mathfrak{R}$. Sie sei durch irgend einen zulässigen Parameter ausgedrückt in der Form

$$\mathfrak{C}: \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

wobei wir darauf aufmerksam machen, daß jetzt die Endwerte t_1, t_2 unbekannt sind. Wir ersetzen die Kurve $\mathfrak{C}$ durch eine benachbarte Kurve von der speziellen Form

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x = x(t) + \varepsilon\xi(t), \quad y = y(t) + \varepsilon\eta(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \quad (17)$$

wo ε eine kleine Konstante ist und $\xi(t)$, $\eta(t)$ Funktionen von t von der Klasse[2]) D' sind, welche in t_1 und t_2 verschwinden, sonst aber willkürlich sind. Wir schließen dann ganz wie in § 4, daß

$$\delta J = 0, \qquad \delta^2 J \geqq 0$$

sein muß, wo wieder

[1]) Wir werden uns von diesen Beschränkungen in Kap. VIII befreien.

[2]) Vgl. die Definition § 10, c). Die Zulassung von Vergleichskurven mit „Ecken" macht nur ganz unwesentliche Modifikationen der früheren Schlußweise nötig.

$$\delta J = \varepsilon \left(\frac{d\bar{J}}{d\varepsilon}\right)_0, \qquad \delta^2 J = \varepsilon^2 \left(\frac{d^2\bar{J}}{d\varepsilon^2}\right)_0.$$

Im gegenwärtigen Fall ist

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (F_x \xi + F_y \eta + F_{x'} \xi' + F_{y'} \eta')\, dt. \tag{18}$$

Indem wir einmal spezielle[1]) Variationen betrachten, für welche $\eta \equiv 0$, das andere Mal solche, für welche $\xi \equiv 0$, erhalten wir das Resultat, daß einzeln

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_x \xi + F_{x'} \xi')\, dt = 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} (F_y \eta + F_{y'} \eta')\, dt = 0 \tag{19}$$

sein muß.

Auf diese beiden Gleichungen können wir jetzt die Methode von § 5, c) anwenden, und erhalten so den Satz, daß *die beiden Funktionen x und y den beiden Differentialgleichungen*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \qquad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \tag{20}$$

genügen müssen, was zugleich die Existenz der Ableitungen $dF_{x'}/dt$, $dF_{y'}/dt$ involviert. Die beiden Differentialgleichungen (20) sind jedoch nicht voneinander unabhängig[2]), wie sich schon a priori erwarten läßt, da dieselbe Kurve unendlich viele Parameterdarstellungen zuläßt. In der Tat, führt man die in (20) angedeuteten Differentiationen[3]) aus,

---

Sind $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, die Unstetigkeitspunkte von ξ', η', so zerlegt man das Integral $\bar{J}$ in eine Summe von Integralen zwischen den Grenzen $t_1 c_1, c_1 c_2, \ldots$ und führt die Differentiation nach ε, welche δJ und $\delta^2 J$ liefert, sowie die weiteren Umformungen an den einzelnen Summanden aus. Die vom Integralzeichen freien Glieder, welche dabei auftreten, heben sich weg, weil die Funktionen x', y' und ξ, η als stetig vorausgesetzt werden.

[1]) Was gestattet ist, so lange es sich um die Ableitung von notwendigen Bedingungen handelt.

[2]) Schon Hamilton hat bemerkt, — und zwar für das entsprechende Problem im Raum —, daß aus der Homogeneität der Funktion F folgt, daß die Differentialgleichungen (20) nicht voneinander unabhängig sind. (Transactions of the Irish Academy, Bd. XVII, p. 6.)

[3]) Der Hilbert'sche Satz (§ 5, d)) über die Existenz der zweiten Ableitungen, welche dabei vorausgesetzt wird, ist dahin zu modifizieren: *der Parameter t läßt sich stets so wählen, daß die zweiten Ableitungen x'', y'' existieren und stetig sind in allen denjenigen Punkten der Kurve, in welchen*

$$F_1(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) \neq 0. \tag{21}$$

und macht dabei von den Relationen (11) und (12a) Gebrauch, so erhält man die Identitäten

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \equiv y' T, \qquad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} \equiv - x' T, \tag{23}$$

wo

$$T(x, y; x', y'; x'', y'') \equiv F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y'). \tag{23a}$$

Da x' und y' nicht gleichzeitig verschwinden, so sind *die beiden Differentialgleichungen* (20) *äquivalent mit der einen Differentialgleichung*

$$F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y') = 0. \tag{I}$$

Dies ist die *Weierstraß'sche*[1] *Form der Euler'schen Differentialgleichung.* Ihr muß jede Kurve, welche das Integral J zu einem Extremum macht, genügen. Jede den beiden Differentialgleichungen (20) genügende Kurve soll nach KNESER wieder ein *Extremale* heißen.

Führt man die Krümmung $\frac{1}{r}$ der Kurve ein, so kann man nach (6) die Differentialgleichnng (I) auch schreiben:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{x'y} - F_{y'x}}{F_1\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}. \tag{23b}$$

Die Krümmung bleibt invariant unter jeder Parametertransformation, ebenso die rechte Seite von (23b), wie man sich leicht mittels der Formeln (9) und (13) überzeugt.

Aus den Formeln (23) leitet WEIERSTRASS eine wichtige Umformung der ersten Variation ab. Formt man in dem Ausdruck (18)

Dies findet z. B. statt, wenn man für t die Bogenlänge wählt, was sich analytisch dadurch ausdrückt, daß man den Differentialgleichungen (20) die weitere hinzufügt:

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{22}$$

Ist in dem Punkt, für welchen man die Existenz von x'', y'' beweisen will, $y' \neq 0$ —, x' und y' sind nicht beide null, — so leitet man, indem man ganz analog wie im § 5, d) verfährt, aus den beiden aus (20) und (22) folgenden Gleichungen:

$$\underset{\Delta t = 0}{L} \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta t} = F_x, \qquad \underset{\Delta t = 0}{L} \frac{\Delta (x'^2 + y'^2)}{\Delta t} = 0$$

Ausdrücke für die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y'}{\Delta t}$$

her, an denen man dann den Grenzübergang mit dem oben angegebenen Resultat ausführen kann.

[1]) WEIERSTRASS, *Vorlesungen.*

für δJ die beiden letzten Glieder durch partielle Integration um und macht von den Gleichungen (23) Gebrauch, so erhält man

$$\delta J = \varepsilon \left\{ \Big[\xi F_{x'} + \eta F_{y'} \Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} T w \, dt \right\}, \tag{18a}$$

wobei

$$w = y' \xi - x' \eta$$

gesetzt ist.

Die Umformung setzt die Existenz und Stetigkeit von x'', y'' voraus.

Die Differentialgleichung (I), zusammen mit geeigneten Anfangsbedingungen, bestimmt im allgemeinen zwar die Kurve[1]), aber nicht die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, solange der Parameter t unbestimmt gelassen wird. Erst nachdem man eine Festsetzung über die Wahl des Parameters getroffen hat, werden auch die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ bestimmt. Eine solche Festsetzung bedeutet aber analytisch, daß man zur Differentialgleichung (I) noch eine endliche Gleichung oder eine Differentialgleichung zwischen x, y und t mit geeigneten Anfangsbedingungen hinzufügt; diese Zusatzgleichung ist nur der einen Bedingung unterworfen, daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sich schließlich als eindeutige Funktionen der Klasse C' ergeben müssen. Die beste Wahl des Parameters hängt von der speziellen Natur der vorgelegten Aufgabe ab. Für Untersuchungen allgemeiner Natur ist es meist am vorteilhaftesten, die Bogenlänge als Parameter zu wählen, was mit der Zusatzgleichung (22) identisch ist.[2])

---

[1]) Vgl. genaueres hierüber in § 27, a). Der hier scheinbar vorliegende Widerspruch löst sich dadurch, daß dieselbe Kurve durch Transformation des Parameters in unendlich vielen Formen dargestellt werden kann, vgl. § 25, a).

[2]) Bei dem Übergang zu einem speziellen Parameter hat man sich vor einem naheliegenden Fehler zu hüten: Trifft man über den Parameter t für die gesuchte Kurve $\mathfrak{C}$ eine bestimmte Wahl, die mit der Adjunktion der Relation

$$G(t, x, y, x', y') = 0 \tag{22a}$$

gleichbedeutend sein möge, so kann es kommen, daß die Funktion $F(x, y, x', y')$ sich auf Grund von (22a) auf eine Form $F^0(x, y, x', y')$ reduzieren läßt, welche der Homogeneitätsbedingung (9) nicht mehr genügt. Wir können dann das Integral $J_{\mathfrak{C}}$ in der doppelten Form schreiben

$$J_{\mathfrak{C}} = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') \, dt = \int_{t_1}^{t_2} F^0(x, y, x', y') \, dt.$$

Wenn wir nun zu einer benachbarten Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ übergehen, indem wir x, y durch $\bar{x} = x + \varepsilon\xi$, $\bar{y} = y + \varepsilon\eta$ ersetzen, wobei ξ, η beliebige Funktionen von t von

Nachdem man eine bestimmte Wahl über den Parameter t getroffen hat, erhält man die allgemeine Lösung in Form eines Paares

---

der Klasse D' sind, welche für $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden, so wird im allgemeinen der Parameter t für $\overline{\mathfrak{C}}$ nicht mehr dieselbe Bedeutung haben, wie für $\mathfrak{C}$, d. h. $\bar{x}$, $\bar{y}$ werden im allgemeinen nicht mehr der Relation (22a) genügen, also wird sich auch für die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ die Funktion F nicht mehr auf die Form F^0 reduzieren lassen. Daher müssen wir schreiben

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} = \int_{t_1}^{t_2} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\, dt$$

und dürfen nicht schreiben

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} = \int_{t_1}^{t_2} F^0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}')\, dt.$$

Daraus folgt, daß auch in δJ und daher schließlich in den Differentialgleichungen (20) und (I) die Funktion F und nicht F^0 gebraucht werden muß. *Erst jetzt, in den fertigen Differentialgleichungen, darf man die aus der Adjunktion von* (22a) *sich ergebenden Reduktionen vornehmen.*

So führt z. B. die Aufgabe das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, wenn man den Bogen s als unabhängige Variable einführt, auf das Integral

$$J_{\mathfrak{C}} = \int_{s_1}^{s_2} y\, ds.$$

Wollte man hier unter Vernachlässigung der obigen Warnung, mechanisch die früheren Regeln auf das reduzierte Integral anwenden, so würde man für die Differentialgleichung (I) das falsche Resultat $1 = 0$ erhalten.

Es gibt allerdings noch eine *zweite Methode,* die Aufgabe zu behandeln: sie besteht darin, daß man nicht nur für die gesuchte Kurve, *sondern gleichzeitig für sämtliche zulässigen Kurven* den Parameter t in derselben Weise spezialisiert, d. h. den sämtlichen zulässigen Kurven die Nebenbedingung (22a) auferlegt. Dann sind aber die Funktionen ξ, η nicht mehr willkürlich, und man hat es mit einem ganz anderen, und zwar viel komplizierteren Typus von Aufgaben zu tun (vgl. Kap. XI).

Das obige Beispiel würde in der neuen Formulierung lauten: Unter allen Funktionenpaaren x, y, welche der Nebenbedingung

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

genügen, dasjenige zu finden, welches das Integral

$$J = \int_{s_1}^{s_2} y\, ds$$

zu einem Minimum macht.

(Vgl. Lindelöf-Moigno, *Leçons*, Nr. 116—120.)

von Funktionen von t, welche zwei Integrationskonstanten[1]) enthalten:

$$x = f(t, \alpha, \beta), \qquad y = g(t, \alpha, \beta). \tag{24}$$

Die Konstanten α, β zusammen mit den beiden unbekannten Endwerten t_1, t_2 sind aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Kurve durch die beiden gegebenen Punkte gehen soll:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f(t_1, \alpha, \beta), & y_1 &= g(t_1, \alpha, \beta) \\ x_2 &= f(t_2, \alpha, \beta), & y_2 &= g(t_2, \alpha, \beta). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die vorangehenden Bemerkungen über die Integration der Differentialgleichung (I) werden durch die nachfolgenden Beispiele noch weiter erläutert werden. Wir bemerken dazu noch, daß es häufig vorteilhafter ist, statt der Differentialgleichung (I) eine der beiden Differentialgleichungen (20) zu benutzen, besonders wenn die Funktion F eine der beiden Variabeln x oder y nicht enthält. Nur muß man sich daran erinnern, daß jede dieser Differentialgleichungen nach (23) eine fremde Lösung enthält (die erste $y' = 0$, die zweite $x' = 0$), und daß erst die Kombination beider mit (I) äquivalent ist.

Beispiel XIV: Das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left[\tfrac{1}{2}(xy' - yx') - R\sqrt{x'^2 + y'^2}\right] dt$$

zu einem Maximum zu machen.

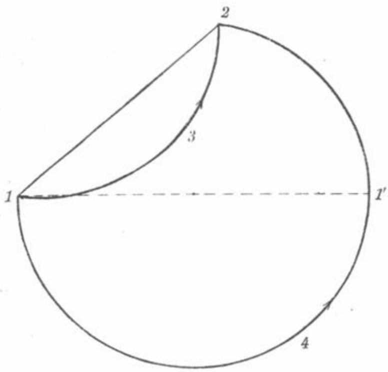

Fig. 31.

Dabei ist R eine positive Konstante. Für den Bereich $\mathfrak{R}$ können wir die ganze x, y-Ebene wählen.

Man findet

$$F_1 = -\frac{R}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} \tag{26}$$

und daraus für die Euler'sche Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{x'y'' - y'x''}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{1}{R}. \tag{I}$$

Die Krümmung ist also konstant und gleich $\frac{1}{R}$. Daraus folgt, daß die Extremalen Kreise mit dem Radius R sind, die in positivem Sinn beschrieben werden, d. h. so daß der Mittelpunkt zur Linken liegt. Wir haben also hier

[1]) Näheres hierüber folgt in § 27.

ein Beispiel, wo eine Extremale aufhört, Extremale zu sein, wenn sie in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird. [1])

Wir können das allgemeine Integral der Differentialgleichung (I) schreiben:

$$x = \alpha + R \cos t, \qquad y = \beta + R \sin t. \tag{27}$$

Durch die beiden gegebenen Punkte P_1, P_2 gibt es zwei, einen oder keinen Kreisbogen der verlangten Art, je nachdem [2])

$$R \gtreqless \frac{1}{2} \left| P_1 P_2 \right| .$$

Im ersten Fall ist von den beiden Kreisbogen der eine $P_1 P_3 P_2$ kleiner, der andere $P_1 P_4 P_2$ größer als ein Halbkreis.

b) Die Brachistochrone [3]):

Beispiel XV: Unter allen Kurven, welche in einer gegebenen vertikalen Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gezogen werden können, diejenige zu finden, entlang welcher ein nur der Schwere unterworfener materieller Punkt in der kürzesten Zeit von P_1 nach P_2 gelangt, wenn er den Punkt P_1 mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_1 verläßt.

Wir wählen die vertikale Ebene zur x, y-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems und nehmen die positive y-Achse vertikal nach unten. Bezeichnet dann g die Konstante der Schwerkraft und wird von Reibung und Widerstand des Mediums abgesehen, so hat man nach den Elementen der Mechanik das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt}{\sqrt{y - y_1 + k}}$$

zu einem Minimum zu machen, wo

$$k = \frac{v_1^2}{2g} \cdot$$

Die zulässigen Kurven sollen von der Klasse C' sein; sie müssen auf den Bereich

$$\mathfrak{R}: \qquad y - y_1 + k > 0$$

beschränkt werden, da sonst der Integrand unendlich oder imaginär werden würde.

Da $F_x \equiv 0$, so erhalten wir nach (20) sofort ein erstes Integral

$$F_{x'} \equiv \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}\sqrt{y - y_1 + k}} = a . \tag{28}$$

Ist $a = 0$, so erhalten wir: $x =$ konst. und dies ist in der Tat die Lösung der Aufgabe, wenn die beiden Punkte P_1 und P_2 in derselben Vertikalen liegen.

---

[1]) Vgl. § 25, b).

[2]) Den *Abstand* zweier Punkte A und B bezeichnen wir stets mit $|AB|$.

[3]) Vgl. Lindelöf-Moigno, loc. cit., Nr. 112; Pascal, loc. cit., § 31; Kneser, *Lehrbuch*, p. 37.

Ist $a \neq 0$, so wählen wir für den Parameter t den Tangentenwinkel der Kurve; das ist gleichbedeutend mit der „Zusatzgleichung“:

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \cos t, \tag{29}$$

welche (28) auf

$$y - y_1 + k = \alpha\,(1 + \cos 2t) \tag{30}$$

reduziert, wo zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{1}{2a^2}$$

gesetzt ist.

Aus (30) folgt durch Differentiation

$$y' = -2\alpha \sin 2t$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (29),

$$x' = \pm 4\alpha \cos^2 t.$$

Machen wir schließlich die Substitution

$$2t = \tau - \pi,$$

so erhalten wir das Resultat:

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 + \beta &= \pm\, \alpha\,(\tau - \sin\tau) \\ y - y_1 + k &= \alpha\,(1 - \cos\tau), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei β die zweite Integrationskonstante ist. *Die Extremalen sind also Zykloiden* [1]), die durch einen Kreis vom Radius α erzeugt werden, der auf der Geraden $y - y_1 + k = 0$ rollt.

Unter dieser doppelt unendlichen Schar von Zykloiden gibt es eine und nur eine [2]), welche durch die beiden gegebenen Punkte P_1 und P_2 geht und

---

[1]) Schon von Johann Bernoulli (1696) gefunden, siehe Ostwald's *Klassiker* etc., Nr. 46, p. 3. Vgl. auch Cantor, *Geschichte der Mathematik,* Bd. III, pp. 225 bis 228.

[2]) Für den speziellen Fall, wo $v_1 = 0$, hat schon Johann Bernoulli (1696) einen geometrischen Beweis gegeben (loc. cit.); derselbe ist von H. A. Schwarz auf den allgemeinen Fall ausgedehnt worden (siehe Hancock, *Lectures,* Nr. 105). Rein analytische Beweise geben Heffter, *„Zum Problem der Brachistochrone“*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXXIV (1889) und Bolza, *„The Determination of the Constants in the Problem of the Brachistochrone“*, Bulletin of the American Mathematical Society (2), Bd. X (1904), p. 185. E. H. Moore hat gezeigt, daß der betreffende Satz ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes über eine gewisse Klasse von Kurvenbogen ist (*„On Doubly Infinite Systems of directly Similar Arches with common Base Line“*, Bulletin of the American Mathematical Society (2), Bd. X (1904), p. 337.

keine Spitze[1]) zwischen P_1 und P_2 besitzt, vorausgesetzt, daß die Koordinaten der beiden gegebenen Punkte den Ungleichungen genügen

$$x_2 \neq x_1, \qquad y_2 - y_1 + k \gtreqless 0. \tag{32}$$

c) Die Geodätischen Linien[2]):

Beispiel XVI: Die kürzeste Linie zu bestimmen, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten Q_1 und Q_2 gezogen werden kann.

Sind die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben, und werden die Kurven auf der Fläche mittels eines Parameters dargestellt

$$u = u(t), \qquad v = v(t), \tag{33}$$

so ist unsere Aufgabe gleichbedeutend damit, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\, dt \tag{34}$$

zu einem Minimum zu machen, wobei

$$\mathsf{E} = \sum x_u^2, \qquad \mathsf{F} = \sum x_u x_v, \qquad \mathsf{G} = \sum x_v^2,$$

und die Summation sich auf eine zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z bezieht.

Die zulässigen Kurven (33) in der u, v-Ebene sollen „gewöhnliche" Kurven sein; sie müssen auf einen Bereich $\mathfrak{R}$ der u, v-Ebene beschränkt werden, welcher die Eigenschaft hat, mit seinem Bild $\mathfrak{M}$ auf der Fläche in ein-eindeutiger Beziehung zu stehen. Sind $P_1(u_1, v_1)$ und $P_2(u_2, v_2)$ die den beiden gegebenen Punkten Q_1 und Q_2 entsprechenden Punkte der u, v-Ebene, so müssen die zulässigen Kurven die beiden Punkte P_1 und P_2 verbinden. Wir setzen ferner voraus, daß die Funktionen $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{G}$ in $\mathfrak{R}$ von der Klasse C'' sind, und daß das Flächenstück $\mathfrak{M}$ frei von singulären Punkten ist, d. h. daß die drei Determinanten

$$A = y_u z_v - z_u y_v, \qquad B = z_u x_v - x_u z_v, \qquad C = x_u y_v - y_u x_v$$

nicht gleichzeitig verschwinden, was wegen der Identität

$$\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

mit der einen Bedingung

$$\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2 > 0 \tag{35}$$

äquivalent ist.

---

[1]) H. A. Schwarz hat in Vorlesungen bewiesen, daß ein Zykloidenbogen, welcher eine Spitze enthält, niemals ein Minimum für das Integral J liefern kann, vgl. Hancock, *Lectures*, Nr. 104.

[2]) Die Aufgabe geht ebenfalls auf Johann Bernoulli zurück (1697); vgl. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. III, pp. 232—235.

α) Wir benutzen zunächst die *Weierstraß'sche Form* (I) *der Euler'schen Differentialgleichung* und bezeichnen allgemein mit $\Phi(F)$ den Differentialausdruck

$$\Phi(F) \equiv F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - x''y').$$

Dann ergibt eine einfache Rechnung

$$\Phi\left(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\right) = \frac{\Gamma}{\left(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\right)^3}, \tag{36}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Gamma = {} & (\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2)(u'v'' - u''v') \\ & + (\mathsf{E}u' + \mathsf{F}v')\left[(\mathsf{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathsf{E}_v)u'^2 + \mathsf{G}_u u'v' + \tfrac{1}{2}\mathsf{G}_v v'^2\right] \\ & - (\mathsf{F}u' + \mathsf{G}v')\left[\tfrac{1}{2}\mathsf{E}_u u'^2 + \mathsf{E}_v u'v' + (\mathsf{F}_v - \tfrac{1}{2}\mathsf{G}_u)v'^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Extremalen genügen daher der Differentialgleichung[1])

$$\Gamma = 0. \tag{38}$$

Diese Differentialgleichung besitzt eine einfache geometrische Bedeutung; die geodätische Krümmung $\mathrm{K_g}$ der Kurve (33) im Punkt t wird durch den Ausdruck

$$\mathrm{K_g} = \frac{\Gamma}{\sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}\left(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\right)^3}. \tag{39}$$

gegeben.[2])

Daher hat die kürzeste Linie die charakteristische Eigenschaft, daß *ihre geodätische Krümmung beständig null*[3]) ist, d. h. sie ist eine *geodätische Linie* nach einer der verschiedenen Definitionen[4]) dieser Kurven.

Nebenbei bemerken wir die Relation

$$\Phi\left(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2}\right) = \mathrm{K_g}\sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}, \tag{40}$$

die uns später von Nutzen sein wird.

---

[1]) Daß (38) die Differentialgleichung der geodätischen Linien ist, könnte man direkt aus den Lehrbüchern über Differentialgeometrie entnehmen, z. B. KNOBLAUCH, *Flächentheorie*, p. 140; BIANCHI-LUKAT, *Differentialgeometrie*, p. 154; DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, Bd. II, p. 403; SCHEFFERS, *Theorie der Flächen*, p. 407.

[2]) Vgl. z. B. SCHEFFERS, *Theorie der Flächen*, p. 482. Eine elementare Ableitung dieser Formel findet man bei BOLZA, *„Concerning the Isoperimetric Problem on a Given Surface"*, Decennial Publications of the University of Chicago, Bd. IX, p. 13.

[3]) Eine elegante Ableitung dieses Resultates gibt BROMWICH (Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. XI (1905), p. 547) mittels einer Transformation der ersten Variation des Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

[4]) Vgl. DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, Bd. II, Nr. 514.

β) Benutzen wir statt der Differentialgleichung (I) *die beiden Differentialgleichungen* (20) und wählen überdies die Bogenlänge s der Kurve auf der Fläche als Parameter, was mit der „Zusatzgleichung“

$$\mathsf{E}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathsf{F}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathsf{G}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

gleichbedeutend ist, so erhalten wir für die Extremalen die folgenden beiden Differentialgleichungen[1])

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d}{ds}\left(\mathsf{E}\frac{du}{ds} + \mathsf{F}\frac{dv}{ds}\right) &= \mathsf{E}_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathsf{F}_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathsf{G}_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \\ 2\frac{d}{ds}\left(\mathsf{F}\frac{du}{ds} + \mathsf{G}\frac{dv}{ds}\right) &= \mathsf{E}_v\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathsf{F}_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathsf{G}_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Auch diese Differentialgleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung: Aus der Definition von E, F, G folgt, daß

$$\mathsf{E}\frac{du}{ds} + \mathsf{F}\frac{dv}{ds} = \sum x_u \frac{dx}{ds},$$

$$\mathsf{F}\frac{du}{ds} + \mathsf{G}\frac{dv}{ds} = \sum x_v \frac{dx}{ds}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach s:

$$\frac{d}{ds}\left(\mathsf{E}\frac{du}{ds} + \mathsf{F}\frac{dv}{ds}\right) = \sum x_u \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2}\mathsf{E}_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \mathsf{F}_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{1}{2}\mathsf{G}_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

und daher wegen (41)

$$\sum x_u \frac{d^2x}{ds^2} = 0;$$

ebenso findet man

$$\sum x_v \frac{d^2x}{ds^2} = 0;$$

also ist

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = A : B : C, \tag{42}$$

d. h. aber geometrisch: *In jedem Punkt der Kurve fällt die Hauptnormale der Kurve mit der Flächenormale zusammen,* was eine andere charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien ist.[2])

---

[1]) Vgl. Knoblauch, loc. cit. p. 142; Bianchi, loc. cit. p. 153; Darboux, loc. cit. p. 405.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben*, Nr. 1—6, 9, 10, 12, 14—18 am Ende von Kap. V.

§ 27. Anwendung der allgemeinen Existenztheoreme für Differentialgleichungen auf die Theorie der Extremalen.[1])

Bevor wir zur Betrachtung der zweiten Variation übergehen, stellen wir in diesem Paragraphen die Resultate zusammen, die sich aus den in §§ 23 und 24 mitgeteilten allgemeinen Existenztheoremen für die Differentialgleichung der Extremalen ergeben.

a) Konstruktion einer Extremalen durch einen gegebenen Punkt in gegebener Richtung:

Wir betrachten zunächst die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt $P_0(x_0, y_0)$, von dem wir voraussetzen, daß er im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt, in einer gegebenen Richtung von der Amplitude θ_0 — oder, wie wir kürzer sagen wollen, „durch das Linienelement $\mathfrak{L}_0(x_0, y_0, \theta_0)$" — eine Extremale zu ziehen.

Dazu ist es am bequemsten, die Bogenlänge s, gemessen vom Punkt P_0 aus, als Parameter einzuführen. Man kann dies nach WEIERSTRASS[2]) in der Weise tun, daß man zur Differentialgleichung (I) die Zusatzgleichung (22) hinzufügt, letztere differentiiert, und dann das so erhaltene System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach x'', y'' auflöst, wodurch sich die Aufgabe auf die Lösung eines Systems von vier Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert.

Einfacher ist es, nach dem Vorgang von BLISS[3]) den Tangentenwinkel θ einzuführen. Macht man dann von den Formeln (4) und (6) Gebrauch, so erhält man aus (23b) das System dritter Ordnung:

---

[1]) Der Leser wird gut tun, Absatz b) bis d) dieses Paragraphen zunächst zu überschlagen und sofort zu § 28 überzugehen, da die betreffenden Resultate erst später zur Anwendung kommen.

[2]) *Vorlesungen* 1879; vgl. KNESER, *Lehrbuch,* §§ 27, 29, und BOLZA, *Lectures,* § 25, a).

[3]) Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 188; vgl. auch unten § 32, c). Es ist übrigens nicht nötig, bei Ableitung des Systems (43) den Begriff der Krümmung zu benutzen. Denn durch Differentiation der beiden ersten Gleichungen (43) erhält man

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2},$$

woraus dann nach (I), wenn dort s statt t geschrieben wird, die dritte Gleichung (43) folgt.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos\theta \\ \frac{dy}{ds} &= \sin\theta \\ \frac{d\theta}{ds} &= H(x, y, \cos\theta, \sin\theta), \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

wo die Funktion H durch die Gleichung

$$H(x, y, x', y') = \frac{F_{yx'} - F_{xy'}}{F_1 (\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} \tag{44}$$

definiert ist. Auf dieses System können wir nun direkt die allgemeinen Existenztheoreme von § 23 anwenden: Wenn die Anfangswerte x_0, y_0, θ_0 der Bedingung

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0) \neq 0 \tag{45}$$

genügen, so sind nach unsern Annahmen über die Funktion F (vgl. § 25, b)) die rechten Seiten der Gleichungen (43) als Funktionen von x, y, θ in der Umgebung der Stelle x_0, y_0, θ_0 von der Klasse C'. Der „Stetigkeitsbereich" $\mathfrak{A}$ des Differentialgleichungssystems (43) besteht also aus dem durch die Bedingungen

$$\mathfrak{A}: \qquad -\infty < s < +\infty; \quad (x, y) \text{ in } \mathfrak{R}; \quad -\infty < \theta < +\infty;$$
$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) \neq 0$$

charakterisierten Bereich im Raum der Variabeln s, x, y, θ.

Es gibt daher ein und nur ein System von Funktionen

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad \theta = \theta(s), \tag{46}$$

welche den Differentialgleichungen (43) genügen, für $s = 0$ die vorgeschriebenen Werte x_0, y_0, θ_0 annehmen:

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \theta(0) = \theta_0, \tag{46a}$$

und in der Umgebung von $s = 0$ von der Klasse C' sind, d. h. aber geometrisch:

Wenn die Anfangswerte x_0, y_0, θ_0 die Bedingung (45) erfüllen, so läßt sich vom Punkt x_0, y_0 aus in der Richtung θ_0 eine und nur eine Extremale der Klasse C' ziehen.

Die Lösung (46) läßt sich nach § 23, d) nach beiden Seiten hin auf ein ganz bestimmtes Maximalintervall

$$\alpha_{\mathfrak{L}_0} < s < \beta_{\mathfrak{L}_0}$$

eindeutig fortsetzen. Für alle Werte von s zwischen $\alpha_{\mathfrak{L}_0}$ und $\beta_{\mathfrak{L}_0}$ sind die Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $\theta(s)$ (mindestens) von der Klasse C' und die Extremale

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad \alpha_{\mathfrak{L}_0} < s < \beta_{\mathfrak{L}_0} \tag{47}$$

liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und genügt der Ungleichung

$$F_1(x(s),\, y(s),\, x'(s),\, y'(s)) \neq 0. \tag{48}$$

Aus der speziellen Form der Differentialgleichungen (43) folgt weiter, daß diese einzige Extremale der Klasse C' dann allemal sogar *von der Klasse* C''' ist. Denn da die Funktion $H(x, y, \cos\theta, \sin\theta)$ in der Umgebung der Stelle x_0, y_0, θ_0 von der Klasse C' ist, so folgt aus der letzten der Gleichungen (43), daß $\theta(s)$ von der Klasse C'' ist und daher sind nach den beiden ersten Gleichungen $x(s)$, $y(s)$ von der Klasse C'''.

Wenn die Bedingung (45) *für jeden Wert von* θ_0 erfüllt ist, so kann man vom Punkt P_0 aus *nach jeder Richtung* eine und nur eine Extremale von der Klasse C' ziehen.

Diejenigen Wertsysteme, x_0, y_0, θ_0, für welche

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0) = 0$$

ist, nennen wir die *singulären Anfangswerte*. Wenn die Bedingung (45) für jeden Punkt x_0, y_0 eines Bereiches der x, y-Ebene und für jede Richtung θ_0 erfüllt ist, so sagen wir entsprechend[1]) der in § 19, b) für das x-Problem gegebenen Definition, das vorgelegte Problem sei in diesem Bereich *regulär;* dabei unterscheiden wir dann nach dem Vorzeichen von F_1 noch „positiv" und „negativ regulär".

Beispiele:

1. $$F = G(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}. \qquad \text{(vgl. § 32, b)).}$$

Hier ist:

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = G(x, y);$$

das Problem ist also regulär in jedem Bereich der x, y-Ebene, welcher keine Punkte mit der Kurve $G(x, y) = 0$ gemein hat.

2. $$F = \frac{yy'^3}{x'^2 + y'^2}; \qquad \text{(vgl. § 30, b));}$$

daraus

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = 2y \sin\theta\, (4\cos^2\theta - 1).$$

Das Problem ist in keinem Bereich regulär. Zunächst sind alle Wertsysteme singulär, in welchen $y = 0$; und außerdem für jeden beliebigen Punkt (x, y) die durch die Gleichungen

$$\sin\theta = 0, \qquad \cos\theta = \pm \tfrac{1}{2}$$

definierten Richtungen.

---

[1]) Vgl. Gleichung (16) von § 25.

b) **Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten:**

Wir betrachten jetzt die durch die Anfangsbedingungen (46a) charakterisierte Lösung (46) in ihrer Abhängigkeit von den Anfangswerten x_0, y_0, θ_0 und schreiben sie dann entsprechend

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}(s;\ x_0, y_0, \theta_0) \\ y &= \mathfrak{Y}(s;\ x_0, y_0, \theta_0) \\ \theta &= \Theta(s;\ x_0, y_0, \theta_0) \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Aus der allgemeinen Theorie ergibt sich dann nach § 24, a), daß die Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta$ folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta$ sind eindeutig definiert und *stetig* in dem durch die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &(x_0, y_0) \text{ im Innern von } \mathfrak{R};\ -\infty < \theta_0 < +\infty; \\ &F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0) \neq 0;\quad \alpha_{\mathfrak{L}_0} < s < \beta_{\mathfrak{L}_0} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

definierten Bereich. In demselben Bereich sind *die Funktionen*

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_{ss};\qquad \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}_s, \mathfrak{Y}_{ss};\qquad \Theta, \Theta_s$$

als Funktionen von s, x_0, y_0, θ_0 *von der Klasse* C', wie sich zum Teil aus der allgemeinen Theorie (§ 24, a)), zum Teil aus der speziellen Form[1]) des Systems (43) ergibt.

2. Die Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta$ genügen ferner den *Anfangsbedingungen*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= x_0 \\ \mathfrak{Y}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= y_0 \\ \Theta(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= \theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

identisch in x_0, y_0, θ_0, woraus wegen (43) folgt

$$\mathfrak{X}_s(0;\ x_0, y_0, \theta_0) = \cos\theta_0,\qquad \mathfrak{Y}_s(0;\ x_0, y_0, \theta_0) = \sin\theta_0 \tag{51a}$$

und weiter durch partielle Differentiation

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}_{x_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 1, &\quad \mathfrak{Y}_{x_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 0 \\ \mathfrak{X}_{y_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 0, &\quad \mathfrak{Y}_{y_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 1 \\ \mathfrak{X}_{\theta_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 0, &\quad \mathfrak{Y}_{\theta_0}(0;\ x_0, y_0, \theta_0) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{51b}$$

3. Überdies ist die *Funktionaldeterminante*

$$D(s;\ x_0, y_0, \theta_0) = \frac{\partial(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta)}{\partial(x_0, y_0, \theta_0)} \neq 0 \tag{52}$$

im ganzen Bereich (50).

---

[1]) Vgl. unter a) den Beweis, daß die Extremale (47) von der Klasse C''' ist.

4. Endlich haben die Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \Theta$ folgende *Periodizitätseigenschaften:*

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}(s;\, x_0, y_0, \theta_0 + 2\pi) &= \mathfrak{X}(s;\, x_0, y_0, \theta_0),\\ \mathfrak{Y}(s;\, x_0, y_0, \theta_0 + 2\pi) &= \mathfrak{Y}(s;\, x_0, y_0, \theta_0),\\ \Theta(s;\, x_0, y_0, \theta_0 + 2\pi) &= \Theta(s;\, x_0, y_0, \theta_0) + 2\pi\end{aligned}\right\}; \tag{52a}$$

denn aus der besonderen Form der Differentialgleichungen (43) folgt, daß die Funktionen auf der rechten Seite den Differentialgleichungen (43) genügen, und da diese Funktionen für $s = 0$ die Anfangswerte $x_0, y_0, \theta_0 + 2\pi$ annehmen, so müssen sie mit den Funktionen auf der linken Seite identisch sein.

Aus der Lösung (49), welche die vorgeschriebenen Werte x_0, y_0, θ_0 für den speziellen Wert $s = 0$ annimmt, erhält man diejenige Lösung, welche dieselben Anfangswerte für einen beliebigen Wert $s = s_0$ annimmt, indem man s durch $s - s_0$ ersetzt, also:[1])

$$\left.\begin{aligned}x &= \mathfrak{X}(s - s_0;\, x_0 . y_0, \theta_0)\\ y &= \mathfrak{Y}(s - s_0;\, x_0, y_0, \theta_0)\\ \theta &= \Theta(s - s_0;\, x_0, y_0, \theta_0)\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Dies ist eine unmittelbare Folge davon, daß die rechten Seiten der Differentialgleichungen (43) die Variable s nicht explizite enthalten.

Das „allgemeine Integral" des Systems (43) ergibt sich nach den am Ende von § 24, a) gemachten Bemerkungen aus (53), indem man einer der vier Größen s_0, x_0, y_0, θ_0 einen passenden festen numerischen Wert beilegt und die drei andern als die „Integrationskonstanten" betrachtet. Man erhält so ein dreifach unendliches Funktionensystem, aber nur ein *zweifach unendliches Kurvensystem im Raum der Variabeln x, y, θ.* Denn gibt man z. B. der Größe x_0 einen festen Wert und variiert die Größen s_0, y_0, θ_0, so liefern alle Lösungen, welche demselben Wertsystem y_0, θ_0 entsprechen, sich also nur durch den Wert von s_0 unterscheiden, ein und dieselbe Kurve, da sie ja alle aus der Lösung, für welche $s_0 = 0$ ist, durch eine zulässige Parametertransformation hervorgehen (§ 25, a)).

---

[1]) Die Funktionen auf der rechten Seite von (53) als Funktionen von $s;\, s_0, x_0, y_0, \theta_0$ entsprechen den Funktionen $\varphi_k(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ der allgemeinen Theorie (§ 24, a)).

Die Determinante $D(s;\, x_0, y_0, \theta_0)$ läßt eine für spätere Anwendungen wichtige Transformation zu:

Wendet man auf die Lösung (53) die Gleichung (35) von § 24, a) an und beachtet, daß in unserm Fall:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s_0} = -\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial s_0} = -\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial s}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial s_0} = -\frac{\partial \Theta}{\partial s},$$

so erhält man, wenn man schließlich noch $s_0 = 0$ setzt, die folgende Umformung der Funktionaldeterminante D:

$$D(s;\, x_0, y_0, \theta_0) \cos\theta_0 = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_s & \mathfrak{Y}_s & \Theta_s \\ \mathfrak{X}_{y_0} & \mathfrak{Y}_{y_0} & \Theta_{y_0} \\ \mathfrak{X}_{\theta_0} & \mathfrak{Y}_{\theta_0} & \Theta_{\theta_0} \end{vmatrix} \tag{54}$$

und eine analoge zweite Gleichung, in welcher links der Faktor $\cos\theta_0$ durch $-\sin\theta_0$ und rechts der Index y_0 durch x_0 ersetzt ist.

Der Ausdruck (54) läßt sich noch weiter umformen, indem man die partiellen Ableitungen der Funktion Θ durch partielle Ableitungen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ausdrückt. Bezeichnet nämlich vorübergehend z irgend eine der Variabeln s, x_0, y_0, θ_0, so folgt aus den beiden ersten der Gleichungen (43) durch Differentiation nach z:

$$\mathfrak{X}_{sz} = -\sin\Theta \cdot \Theta_z, \qquad \mathfrak{Y}_{sz} = \cos\Theta \cdot \Theta_z$$

und daraus

$$\Theta_z = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_{sz} - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_{sz}. \tag{55}$$

Wendet man diese Formeln bei der Umformung der Determinante (54) an und setzt zur Abkürzung

$$u = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_{x_0} - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_{x_0}, \quad v = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_{y_0} - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_{y_0}, \quad w = \mathfrak{X}_s \mathfrak{Y}_{\theta_0} - \mathfrak{Y}_s \mathfrak{X}_{\theta_0}, \tag{56}$$

so erhält man nach einfacher Rechnung:

$$D(s;\, x_0, y_0, \theta_0) \cos\theta_0 = \begin{vmatrix} v & w \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial w}{\partial s} \end{vmatrix}, \quad -D(s;\, x_0, y_0, \theta_0) \sin\theta_0 = \begin{vmatrix} u & w \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial w}{\partial s} \end{vmatrix}. \tag{57}$$

c) **Anwendung des Einbettungssatzes:**

Es sei irgend ein spezieller Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ der Klasse C' gegeben

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless}\, t \,\overline{\gtrless}\, t_2,$$

welcher ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt und für welchen die Bedingung

$$F_1(\mathring{x}(t),\ \mathring{y}(t),\ \mathring{x}'(t),\ \mathring{y}'(t)) \neq 0 \tag{58}$$

in $[t_1 t_2]$ erfüllt ist.

Wir setzen dabei zunächst voraus, daß der Parameter t die Bogenlänge bedeutet, also mit der in den vorangegangenen Absätzen mit s bezeichneten Variabeln identisch ist. Dann liegt die zur Extremalen $\mathfrak{E}_0$ gehörige Lösung

$$x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad \theta = \mathring{\theta}(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 \tag{59}$$

des Systems (43) ganz im Innern des Stetigkeitsbereiches $\mathfrak{A}$ dieses Systems. Hieraus schließen wir wie unter a), daß wir die Lösung (59) auf ein ganz bestimmtes *Maximalintervall*

$$t_1^* < t < t_2^* \tag{60}$$

fortsetzen können, wobei stets

$$t_1^* < t_1, \qquad t_2 < t_2^*.$$

Die auf diese Weise durch Fortsetzung des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$ auf das offene Intervall (60) erhaltene Extremale bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_0^*$, so daß also $\mathfrak{E}_0^*$ definiert ist durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_0^*: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1^* < t < t_2^*.$$

Nach § 23, d) und § 27, a) liegt dann die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ in ihrer ganzen Ausdehnung im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und genügt der Bedingung (58); und nach a) ist sie in ihrer ganzen Ausdehnung von der Klasse C'''.

Es sei jetzt $P_0(t = t_0)$ irgend ein Punkt der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ und $x_0,\ y_0,\ \theta_0$ die zugehörigen Werte von x, y, θ, so daß

$$\mathring{x}(t_0) = x_0, \quad \mathring{y}(t_0) = y_0, \quad \mathring{\theta}(t_0) = \theta_0.$$

Dann läßt sich die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ nach § 23, c) und § 27, b) auch schreiben

$$x = \mathfrak{X}(t - t_0;\ \ x_0, y_0, \theta_0), \quad y = \mathfrak{Y}(t - t_0;\ \ x_0, y_0, \theta_0). \tag{61}$$

Von den Größen $\cos\theta_0$, $\sin\theta_0$ ist mindestens eine von Null verschieden; wir nehmen an[1]), es sei

$$\cos\theta_0 \neq 0. \tag{62}$$

[1]) Wäre $\cos\theta_0 = 0$, so würden wir in (61) die Argumente x_0, θ_0 durch β, α ersetzen.

Dann definieren wir

$$\left.\begin{aligned} f(t, \alpha, \beta) &= \mathfrak{X}(t - t_0;\ x_0, \beta, \alpha) \\ g(t, \alpha, \beta) &= \mathfrak{Y}(t - t_0;\ x_0, \beta, \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

und betrachten die doppeltunendliche Schar von Extremalen

$$x = f(t, \alpha, \beta), \qquad y = g(t, \alpha, \beta), \tag{64}$$

indem wir t_0, x_0 als fest, α, β als variable Parameter ansehen.

Sind dann T_1, T_2 irgend zwei den Ungleichungen

$$t_1^* < T_1 < t_1, \qquad t_2 < T_2 < t_2^* \tag{65}$$

genügende Größen, so können wir eine zugehörige positive Größe d bestimmen, derart, daß sich über die Funktionen f, g folgende Aussagen machen lassen, wobei wir der Gleichförmigkeit halber α_0, β_0 statt θ_0, x_0 schreiben:

A) Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ist in der Schar (64) enthalten für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, so daß also

$$f(t, \alpha_0, \beta_0) = \mathring{x}(t), \quad g(t, \alpha_0, \beta_0) = \mathring{y}(t). \tag{66}$$

B) Die Funktionen

$$f, f_t, f_{tt}; \quad g, g_t, g_{tt}$$

sind als Funktionen der drei Variablen t, α, β von der Klasse C' in dem Bereich

$$T_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} T_2, \quad |\alpha - \alpha_0| \overline{\gtrless} d, \quad |\beta - \beta_0| \overline{\gtrless} d. \tag{67}$$

C) Für jedes α, β im Bereich

$$|\alpha - \alpha_0| \overline{\gtrless} d, \qquad |\beta - \beta_0| \overline{\gtrless} d$$

liegt der Bogen $[T_1 T_2]$ der Extremalen (64) ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und es ist

$$\left.\begin{aligned} F_1(f(t, \alpha, \beta), \quad g(t, \alpha, \beta), \quad f_t(t, \alpha, \beta), \quad g_t(t, \alpha, \beta)) \neq 0 \\ f_t^2(t, \alpha, \beta) + g_t^2(t, \alpha, \beta) > 0 \end{aligned}\right. \tag{68}$$

im Bereich (67).

D) Bezeichnen wir ferner

$$u_1 = f_t g_\alpha - g_t f_\alpha, \quad u_2 = f_t g_\beta - g_t f_\beta, \tag{69}$$

so ist die Determinante

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \neq 0 \tag{70}$$

im Bereich (67).

Was den Beweis dieser Behauptungen betrifft, so folgt A) aus der Darstellung (61) der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$. Der Beweis von B) und C) ergibt sich aus der Anwendung des Satzes von § 24, b) auf die Lösung (53) des Systems (43) zusammen mit den in § 27, b) bewiesenen Stetigkeitseigenschaften der Funktionen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$. Endlich folgt D) aus (52) und (57), wenn man d so klein wählt, daß $\cos\alpha \neq 0$ für $|\alpha - \alpha_0| \overline{\gtrless} d$, was wegen (62) stets möglich ist.

Die Gleichungen (64) stellen das „allgemeine Integral" der Euler'schen Differentialgleichung (I) in einer Normalform dar, insofern sowohl der Kurvenparameter t als die „Integrationskonstanten" α, β in ganz bestimmter Weise gewählt worden sind. Um daraus das allgemeine Integral in seiner allgemeinsten Form zu erhalten, müßte man schließlich noch statt der Größen t, α, β drei neue Größen $\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ einführen, mittels einer Transformation von der Form:

$$\bar{t} = \mathfrak{T}(t, \alpha, \beta), \quad \bar{\alpha} = \mathfrak{A}(\alpha, \beta), \quad \bar{\beta} = \mathfrak{B}(\alpha, \beta), \tag{71}$$

wobei die Funktionen $\mathfrak{T}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda(t) &\equiv \mathfrak{T}_t(t, \alpha_0, \beta_0) > 0 \qquad \text{in } [T_1 T_2], \\ \nabla &\equiv \frac{\partial(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{\partial(\alpha, \beta)}\Bigg|_{\beta=\beta_0}^{\alpha=\alpha_0} \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

genügen müssen. Sind überdies die Funktionen $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}_t, \mathfrak{T}_{tt}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ im Bereich (67) von der Klasse C', so haben die Funktionen $\bar{f}, \bar{g}$ von $\bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, in welche die Funktionen f, g durch die Transformation (71) übergehen, die entsprechenden Eigenschaften wie die Funktionen f und g. Aus dem allgemeinen Integral in seiner neuen Form geht die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ hervor, indem man

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \equiv \mathfrak{A}(\alpha_0, \beta_0), \qquad \bar{\beta} = \bar{\beta}_0 \equiv \mathfrak{B}(\alpha_0, \beta_0)$$

setzt, und man kann die Transformation (71) stets so einrichten, daß dabei die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ in einer vorgegebenen Parameterdarstellung erscheint.

Indem wir schließlich f, g, t, α, β statt $\bar{f}, \bar{g}, \bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ schreiben, können wir das folgende Resultat aussprechen:

Wenn der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt und der Bedingung (58) genügt, so läßt er sich in eine doppelt unendliche Extremalenschar (64) einbetten, welche die unter A) bis D) aufgezählten Eigenschaften besitzt.

d) **Die Extremalenschar durch einen gegebenen Punkt:**

Da die Ungleichung (58) entlang der ganzen Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ erfüllt ist, so gilt insbesondere im Punkt P_0 die Ungleichung

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta_0, \sin\theta_0) \neq 0$$

und daher auch

$$F_1(x_0, y_0, \cos a, \sin a) \neq 0$$

für alle hinreichend kleinen Werte von $|a - \theta_0|$.

Daher läßt sich nach a) durch den Punkt P_0 nach jeder von der Richtung θ_0 hinreichend wenig abweichenden Richtung eine und nur eine Extremale ziehen. Diese Extremalen durch den Punkt P_0 bilden dann eine einparametrige Schar, deren analytischen Ausdruck wir sofort mit Hilfe der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ von § 27, b) hinschreiben können, wenn wir zunächst wieder annehmen, der Parameter t bedeute die Bogenlänge. Aus der Bedeutung der Funktionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ folgt dann, daß die Extremalenschar durch den Punkt P_0 gegeben ist durch die Gleichungen[1])

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}(t - t_0;\, x_0, y_0, a) \equiv f(t, a, y_0) \\ y &= \mathfrak{Y}(t - t_0;\, x_0, y_0, a) \equiv g(t, a, y_0) \end{aligned}\right\}, \tag{73}$$

wobei der Parameter der Schar, a, den Tangentenwinkel der betreffenden Extremalen im Punkt P_0 bedeutet. Dem Punkt P_0 entspricht dabei auf allen Extremalen derselbe Wert $t = t_0$.

Die Gleichungen (73) stellen die Extremalenschar durch den Punkt P_0 in einer bestimmten Normalform dar. Um daraus die allgemeinste Darstellung der Schar zu erhalten, hat man statt der Größen t, a neue Größen $\bar{t}$, $\bar{a}$ einzuführen, mittels einer Transformation von der Form:

$$\bar{t} = \mathfrak{t}(t, a), \qquad \bar{a} = \mathfrak{a}(a), \tag{71a}$$

wobei die Funktionen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_t$, $\mathfrak{t}_{tt}$, $\mathfrak{a}$ von der Klasse C' sind und den Ungleichungen

$$\mathfrak{t}_t(t, a_0) > 0, \qquad \mathfrak{a}_a(a_0) \neq 0 \tag{72a}$$

genügen, wobei $a_0 = \theta_0$.

---

[1]) Die Funktionen f, g sind dabei in der speziellen Bedeutung gebraucht, in welcher sie ursprünglich durch die Gleichungen (64) eingeführt worden sind.

Indem wir schließlich wieder t, a, a_0 statt $\bar{t}$, $\bar{a}$, $\bar{a}_0 = \mathfrak{a}(a_0)$ schreiben, können wir den folgenden Satz aussprechen:

Durch jeden Punkt P_0 der Extremalen $\mathfrak{E}_0{}^*$ geht eine Extremalenschar

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{74}$$

welche folgende Eigenschaften hat:

A) Die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ ist in der Schar (74) enthalten für $a = a_0$, so daß also

$$\varphi(t, a_0) \equiv \overset{0}{x}(t), \qquad \psi(t, a_0) \equiv \overset{0}{y}(t). \tag{75}$$

B) Die Funktionen

$$\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt}; \qquad \psi, \psi_t, \psi_{tt}$$

sind als Funktionen von t und a von der Klasse C' in dem Bereich

$$T_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} T_2, \qquad |a - a_0| \overline{\overline{<}} d; \tag{76}$$

dabei sind T_1, T_2 zwei beliebige Größen, welche den Ungleichungen (65) genügen, und d ist eine positive, von der Wahl von T_1 und T_2 abhängige Größe.

C) Für jedes a im Intervall: $|a - a_0| < d$ liegt der Bogen $[T_1 T_2]$ der Extremalen[1] $\mathfrak{E}_a$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und es ist

$$\left.\begin{aligned} &F_1(\varphi(t, a), \psi(t, a), \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a)) \neq 0 \\ &\varphi_t^2(t, a) + \psi_t^2(t, a) > 0 \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

im Bereich (76).

D) Bezeichnen wir nach KNESER mit $\Delta)t, a)$ die Funktionaldeterminante

$$\Delta(t, a) = \varphi_t \psi_a - \psi_t \varphi_a,$$

und wird dem a irgend ein fester Wert im Intervalle $|a - a_0| \overline{\overline{<}} d$ beigelegt, so ist die Funktion $\Delta(t, a)$ als Funktion von t nicht identisch null in $[T_1 T_2]$.

Der Beweis dieser Behauptungen folgt für den Fall, daß die Schar in der Normalform (73) angenommen wird, unmittelbar aus den entsprechenden unter c) bewiesenen Eigenschaften der Funktionen f, g, aus denen in diesem Fall die Funktionen φ, ψ einfach dadurch hervorgehen, daß man $\beta = y_0$, $\alpha = a$ setzt. Insbesondere folgt D) aus der Ungleichung (70), wenn man beachtet, daß $\Delta(t, a)$ aus der dort mit u_1 bezeichneten Funktion erhalten wird, wenn man $\beta = y_0$,

---

[1]) So bezeichnen wir die einem bestimmten Wert von a entsprechende einzelne Extremale der Schar (74).

$\alpha = a$ setzt. Und diese Eigenschaften bleiben bestehen, wenn man von der Normalform (73) durch eine Transformation der angegebenen Art zur allgemeinen Form übergeht.

In Beziehung auf den Punkt P_0 gilt dann noch folgendes:

E) Der Wert von t, welcher auf der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ den Punkt P_0 liefert, und den wir t^0 nennen wollen, ist eine Funktion[1]) von a, die wir mit

$$t^0 = \chi_0(a) \tag{78}$$

bezeichnen. Diese Funktion ist im Intervall: $|a - a_0| \overline{\gtrless} d$ von der Klasse C' und genügt der Anfangsbedingung

$$\chi_0(a_0) = t_0. \tag{79}$$

Wählen wir daher die beiden Größen T_1, T_2 so, daß: $T_1 < t_0 < T_2$, so folgt aus der Stetigkeit von $\chi_0(a)$, daß wir d so klein annehmen können, daß

$$T_1 \overline{\gtrless} \chi_0(a) \overline{\gtrless} T_2 \quad \text{für} \quad |a - a_0| \overline{\gtrless} d.$$

Aus der Definition der Größe t^0 folgt, daß identisch in a

$$\varphi(t^0, a) = x_0, \qquad \psi(t^0, a) = y_0; \tag{80}$$

daraus ergibt sich durch Differentiation nach a

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da} + \varphi_a(t^0, a) = 0 \\ \psi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da} + \psi_a(t^0, a) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{81}$$

und hieraus, identisch in a,

$$\Delta(t^0, a) = 0. \tag{82}$$

Wir verabreden noch folgende permanente abkürzende Bezeichnung:

$$F(\varphi(t, a), \psi(t, a), \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a)) = \mathfrak{F}(t, a). \tag{83}$$

Die entsprechende Abkürzung soll für die partiellen Ableitungen von F, sowie für die Funktionen F_1, F_2 gebraucht werden, so daß wir also z. B. schreiben

$$\begin{aligned} F_{x'}(\varphi(t, a), \psi(t, a), \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a)) &= \mathfrak{F}_{x'}(t, a) \\ F_1(\varphi(t, a), \psi(t, a), \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a)) &= \mathfrak{F}_1(t, a). \end{aligned} \tag{83a}$$

---

[1]) Für die Normalform (73) ist t^0 konstant gleich t_0; daraus ergibt sich t^0 mittels der Transformation (71a).

§ 28. Die Weierstraß'sche Transformation der zweiten Variation und die zweite notwendige Bedingung.

Wir nehmen jetzt an, wir hätten eine Extremale

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2$$

gefunden, welche die beiden gegebenen Punkte P_1 und P_2 verbindet. Wir setzen voraus, sie liege ganz im Inneren des Bereiches $\mathfrak{R}$ und sei von der Klasse[1]) C'''.

Dann schließen wir, wie in § 4, daß im Fall eines Minimums die zweite Variation $\delta^2 J$ nicht negativ sein darf. Für Variationen der Form (17) hat man

$$\delta^2 J = \int_{t_1}^{t_2} \delta^2 F\, dt,$$

wo

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 F = \varepsilon^2 \{ & F_{xx}\xi^2 + 2F_{xy}\xi\eta + F_{yy}\eta^2 + 2F_{xx'}\xi\xi' + 2F_{yy'}\eta\eta' \\ & + 2F_{xy'}\xi\eta' + 2F_{yx'}\eta\xi' + F_{x'x'}\xi'^2 + 2F_{x'y'}\xi'\eta' + F_{y'y'}\eta'^2\}\end{aligned}\right\}. \tag{84}$$

Die Argumente der partiellen Ableitungen von F sind dabei:

$$x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad x' = \mathring{x}'(t), \qquad y = \mathring{y}'(t).$$

a) Weierstraß' Transformation der zweiten Variation:

Der Ausdruck für $\delta^2 F$ läßt sich nun nach Weierstrass[2]) auf dieselbe einfache Form bringen, wie im Fall der nicht-parametrischen Darstellung:

Wir drücken zunächst $F_{x'x'}, F_{x'y'}, F_{y'y'}$ nach (12a) durch F_1 aus und setzen, wie schon früher,

$$w = y'\xi - x'\eta;$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}L = F_{xx'} - y'y''F_1, \qquad & N = F_{yy'} - x'x''F_1, \\ M = F_{xy'} + x'y''F_1 = & F_{yx'} + y'x''F_1\end{aligned}\right\}; \tag{85}$$

die beiden Ausdrücke für M sind einander gleich, weil x und y der Differentialgleichung (I) genügen. Auf diese Weise erhalten wir:

---

[1]) Diese Annahme ist nötig, da in der unter a) folgenden Transformation die dritten Ableitungen von x und y vorkommen. Vgl. dazu p. 214.

[2]) Weierstrass, *Vorlesungen* 1872.

$$\delta^2 F = \varepsilon^2 \left\{ F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + 2L\xi\xi' + 2M(\xi\eta' + \eta\xi') + 2N\eta\eta' \right.$$

$$\left. + (F_{xx} - y''^2 F_1)\xi^2 + 2(F_{xy} + x''y''F_1)\xi\eta + (F_{yy} - x''^2 F_1)\eta^2 \right\}.$$

Man beachte jetzt, daß

$$2L\xi\xi' + 2M(\xi\eta' + \eta\xi') + 2N\eta\eta'$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2\Big] - \left[\xi^2\frac{dL}{dt} + 2\xi\eta\frac{dM}{dt} + \eta^2\frac{dN}{dt}\right];$$

führt man daher die Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= F_{xx} - y''^2 F_1 - \frac{dL}{dt}, \\ M_1 &= F_{xy} + x''y''F_1 - \frac{dM}{dt}, \\ N_1 &= F_{yy} - x''^2 F_1 - \frac{dN}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

so geht der obige Ausdruck für $\delta^2 F$ über in:

$$\delta^2 F = \varepsilon^2 \left\{ F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + L_1\xi^2 + 2M_1\xi\eta + N_1\eta^2 \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\Big[L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2\Big] \right\}.$$

Die drei Funktionen L_1, M_1, N_1 haben nun die wichtige Eigenschaft, mit y'^2, $-x'y'$, x'^2 proportional zu sein.

Beweis: Aus der Definition von L, M, N und den Relationen (11) folgt:

$$Lx' + My' = F_x, \qquad Mx' + Ny' = F_y. \tag{87}$$

Differentiiert man die erste dieser Relationen nach t, so kommt:

$$\frac{dL}{dt}x' + \frac{dM}{dt}y' + Lx'' + My''$$

$$= F_{xx}x' + F_{xy}y' + F_{xx'}x'' + F_{xy'}y''.$$

Es ist aber

$$Lx'' + My'' = F_{xx'}x'' + F_{yx'}y'',$$

und aus (I) folgt, daß

$$F_{yx'} - F_{xy'} = F_1(x'y'' - x''y').$$

Führt man diese Werte ein, so erhält man

$$L_1 x' + M_1 y' = 0,$$

und ebenso

$$M_1 x' + N_1 y' = 0,$$

woraus folgt, daß in der Tat

$$L_1 : M_1 : N_1 = y'^2 : -x'y' : x'^2.$$

Bezeichnen wir nach Weierstraß den Proportionalitätsfaktor mit F_2, so können wir schreiben:

$$L_1 = y'^2 F_2, \quad M_1 = -x'y'F_2, \quad N_1 = x'^2 F_2. \tag{88}$$

F_2 ist eine Funktion von t, welche nach den über die Funktion $F(x, y, x', y')$ und über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ gemachten Annahmen[1]) stetig ist in $[t_1 t_2]$, während aus denselben Annahmen folgt, daß F_1 in $[t_1 t_2]$ von der Klasse C' ist.

Hiernach nimmt der Ausdruck für $\delta^2 F$ die Form an:

$$\delta^2 F = \varepsilon^2 \left\{ F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 + \frac{d}{dt}\left[L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2\right]\right\}. \tag{89}$$

Wenn daher, wie wir gegenwärtig voraussetzen, die Endpunkte fest sind, also ξ und η in t_1 und t_2 verschwinden, so reduziert sich schließ-

[1]) Vgl. § 25, b) und den Anfang dieses Paragraphen. Es ist dabei besonders zu beachten, daß nach den in § 25, a) gegebenen Definitionen unsere Annahmen über $\mathfrak{E}_0$ die Bedingung enthalten, daß $x'^2 + y'^2 \neq 0$ entlang $\mathfrak{E}_0$.

F_2 läßt sich noch auf eine andere Form bringen: Führt man die Differentiation von L, M, N aus und macht dabei von den Homogeneitätseigenschaften von F Gebrauch, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= y'\left(T_x + \frac{d}{dt} y'' F_1\right), \qquad N_1 = -x'\left(T_y - \frac{d}{dt} x'' F_1\right), \\ M_1 &= -x'\left(T_x + \frac{d}{dt} y'' F_1\right) = y'\left(T_y - \frac{d}{dt} x'' F_1\right), \end{aligned}\right\} \tag{86a}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} T_x + \frac{d}{dt} y'' F_1 &= \quad y' F_2 \\ T_y - \frac{d}{dt} x'' F_1 &= -x' F_2 \end{aligned}\right\}. \tag{90}$$

Dabei ist T die durch (23) definierte Funktion der Größen x, y, x', y', x'', y''. Vgl. Underhill, *Invariants of the Function $F(x, y, x', y')$ under point and parameter transformation, connected with the Calculus of Variations,* Dissertation, Chicago, 1907. Vgl. auch den Nachtrag in § 32, c).

lich der Ausdruck für $\delta^2 J$ auf die Form[1])

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right] dt. \tag{91}$$

Dieses Integral darf also im Fall eines Minimums nicht negativ sein, und zwar gilt dies für alle Funktionen w der Klasse D', welche in beiden Endpunkten verschwinden; denn durch passende Wahl der Funktionen $\xi(t)$, $\eta(t)$ kann man die Funktion

$$w = y'\xi - x'\eta$$

jeder beliebigen Funktion der Klasse D', welche in t_1 und t_2 verschwindet, gleich machen. Für die folgende Diskussion wird vorausgesetzt, daß F_1 und F_2 nicht beide im Intervall $[t_1 t_2]$ identisch verschwinden.

Die zweite Variation hat jetzt genau dieselbe Form wie in § 9, a), wobei den dort mit P, Q, R, η bezeichneten Größen der Reihe nach die Größen F_2, 0, F_1, w entsprechen. Wir können also unmittelbar die im zweiten Kapitel erhaltenen Resultate anwenden und erhalten daher zunächst entsprechend der Legendre'schen Bedingung wie in § 9, b) den Satz:

Die zweite notwendige Bedingung für ein Minimum besteht darin, daß

$$F_1 \geqq 0$$

sein muß entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$, d. h.

$$F_1(\mathring{x}(t),\ \mathring{y}(t),\ \mathring{x}'(t),\ \mathring{y}'(t)) \geqq 0 \quad in \quad [t_1 t_2]. \tag{II}$$

b) **Invariante Normalform für die zweite Variation:**

Wir erwähnen hier noch eine weitere, prinzipiell wichtige Reduktion der zweiten Variation. Wir addieren zu dem Integral (91) das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(F_1' w^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_1' w w' + \frac{1}{2} F_1'' w^2\right) dt,$$

dessen Wert Null ist, da w in beiden Endpunkten verschwindet, und machen dann die Substitution

---

[1]) Dies gilt auch noch, wenn ξ', η' Unstetigkeiten der hier erlaubten Art haben, vgl. p. 201, Fußnote [2]), da ξ, η und, nach unseren Annahmen über die Extremale $\mathfrak{E}_0$, auch L, M, N stetig sind in $[t_1 t_2]$.

$$w = \omega F_1^{-\frac{1}{2}}, \tag{92}$$

die gestattet ist, wenn F_1 entlang dem ganzen Bogen $\mathfrak{E}_0$ von Null verschieden ist. Alsdann erhalten wir für $\delta^2 J$ den Ausdruck:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - K\omega^2\right] dt, \tag{93}$$

wobei

$$K = \frac{1}{4}\frac{F_1'^2}{F_1^2} - \frac{1}{2}\frac{F_1''}{F_1} - \frac{F_2}{F_1}. \tag{94}$$

Die Funktion K ist eine „absolute Invariante der Funktion F in bezug auf Punkttransformationen"[1]), sie ändert sich jedoch bei Transformation des Parameters t.

Wenn die Funktion F positiv ist entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$, so kann man statt t als Parameter das Integral

$$\tau = \int_{t_0}^{t} F(x, y, x', y')\, dt$$

einführen; setzt man dann noch

$$\omega = v\, F^{-\frac{1}{2}},$$

so daß also

$$v = w F^{\frac{1}{2}} F_1^{\frac{1}{2}}, \tag{92a}$$

so erhält man folgende *invariante Normalform für die zweite Variation:*

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - K_0 v^2\right] d\tau, \tag{93a}$$

wobei

$$K_0 = \frac{1}{F^2}\left[\frac{1}{4}\frac{F_1'^2}{F_1^2} - \frac{1}{2}\frac{F_1''}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} + \frac{3}{4}\frac{F'^2}{F^2} - \frac{1}{2}\frac{F''}{F}\right]. \tag{94a}$$

Die Funktion K_0 bleibt nunmehr invariant[2]) sowohl bei jeder Punkttransformation der Variabeln x, y, als auch bei jeder Parametertransformation.

c) Anwendung auf die Geodätischen Linien:

Beispiel XVI: (Siehe p. 209).

Es sei

$$\mathfrak{E}_0: \qquad u = \mathring{u}(t) \qquad v = \mathring{v}(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2,$$

[1]) Vgl. § 45 und Underhill, loc. cit. [2]) Vgl. Underhill, loc. cit.

eine die beiden Punkte $P_1(u_1, v_1)$ und $P_2(u_2, v_2)$ verbindende Extremale in der u, v-Ebene, d. h. also eine der Differentialgleichung (38) genügende Kurve. Ihr entspricht dann auf der Fläche eine die beiden gegebenen Punkte Q_1 und Q_2 verbindende geodätische Linie, die wir mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnen.

Eine leichte Rechnung ergibt

$$F_1 = \frac{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2}{(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2})^3}. \tag{95}$$

Nach den über das Flächenstück $\mathfrak{M}$ gemachten Annahmen (vgl. (35)) ist also F_1 stets positiv und somit die Bedingung (II) stets erfüllt.

Für die weitere Diskussion der zweiten Variation legen wir zur Vereinfachung der Rechnung ein spezielles krummliniges Koordinatensystem auf der Fläche zugrunde, das wir nach Bonnet[1]) folgendermaßen wählen:

Durch einen beliebigen Punkt M der geodätischen Linie $\mathfrak{G}_0$ ziehen wir die zu $\mathfrak{G}_0$ orthogonale geodätische Linie, was nach § 27, a) stets möglich ist, da hier die Bedingung (45) für jedes θ_0 erfüllt ist. Die positive Richtung auf dieser geodätischen Linie wählen wir so, daß sie zur Linken der positiven Richtung von $\mathfrak{G}_0$ liegt.

N sei ein beliebiger Punkt dieser orthogonalen geodätischen Linie. Wir wählen dann als Koordinaten des Punktes N auf der Fläche die mit entsprechenden Vorzeichen versehenen Bogenlängen

$$\text{arc } Q_1 M = u, \qquad \text{arc } MN = v.$$

Bei dieser speziellen Wahl der krummlinigen Koordinaten nimmt der Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes die folgende Form an:

$$ds^2 = \mathsf{E}\,du^2 + dv^2,$$

wobei noch überdies die Funktion $\mathsf{E}(u, v)$ den Bedingungen

$$\mathsf{E}(u, 0) = 1, \qquad \mathsf{E}_v(u, 0) = 0 \tag{96}$$

genügt.

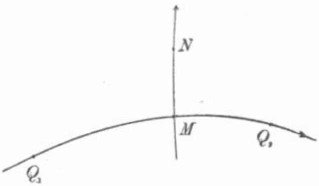

Fig. 32.

Denn da nach den getroffenen Festsetzungen die Kurve

$$u = \text{konst.}, \qquad v = t$$

eine Extremale ist, so folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung (38)

$$\tfrac{1}{2}\mathsf{F}\mathsf{G}_v - \mathsf{G}(\mathsf{F}_v - \tfrac{1}{2}\mathsf{G}_u) = 0. \tag{97}$$

Da ferner: arc $MN = v$ sein soll, so folgt

[1]) Comptes Rendus, Bd. XL (1850), p. 1311; vgl. auch Darboux, *Théorie des surfaces,* Bd. III, pp. 92—98.

$$v = \int_0^v \sqrt{\mathsf{G}(u, t)}\, dt,$$

also, indem man nach v differentiiert,

$$\mathsf{G}(u, v) = 1. \tag{98}$$

Unter Benutzuug dieser Gleichung reduziert sich (97) auf

$$\mathsf{F}_v(u, v) = 0.$$

Es ist also $\mathsf{F}(u, v)$ von v unabhängig, also gleich $\mathsf{F}(u, 0)$; dies ist aber gleich Null, da MN in M zu $\mathfrak{G}_0$ orthogonal sein sollte. Somit[1]) folgt

$$\mathsf{F}(u, v) = 0. \tag{99}$$

Da weiter auch die Kurve $\mathfrak{E}_0$, d. h.

$$\mathfrak{E}_0: \qquad u = t, \qquad v = 0,$$

eine Extremale ist, so erhält man durch Einsetzen in (38) unter Benutzung der bereits gewonnenen Resultate

$$\mathsf{E}_v(u, 0) = 0,$$

und endlich folgt aus der Bedingung, daß: arc $Q_1 M = u$ sein soll,

$$\mathsf{E}(u, 0) = 1,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir haben jetzt die Größe K für die Funktion

$$F = \sqrt{\mathsf{E}u'^2 + v'^2}$$

zu berechnen, und zwar entlang der Extremalen

$$\mathfrak{E}_0: \qquad u = t, \qquad v = 0.$$

Das Einsetzen dieser speziellen Funktionen für u und v deuten wir durch Einklammern an. Man findet dann leicht aus (96) und den daraus folgenden Gleichungen

$$\mathsf{E}_u(u, 0) = 0, \qquad \mathsf{E}_{uu}(u, 0) = 0, \qquad \mathsf{E}_{uv}(u, 0) = 0,$$

die folgenden Resultate:

$$(F) = 1, \quad (F_u) = 0, \quad (F_v) = 0, \quad (F_1) = 1,$$

$$(F_{uu'}) = 0, \quad (F_{vu'}) = 0, \quad (F_{uv'}) = 0, \quad (F_{vv'}) = 0,$$

und daraus

$$(L) = 0, \qquad (M) = 0, \qquad (N) = 0$$

und weiter

$$(F_{uu}) = 0, \qquad (F_{uv}) = 0, \qquad (F_{vv}) = \tfrac{1}{2}\,\mathsf{E}_{vv}(u, 0),$$

also

---

[1]) Hierin ist zugleich der Gauß'sche Satz über geodätische Parallelkoordinaten enthalten, vgl. § 43, a).

$$(F_2) = \tfrac{1}{2}\mathsf{E}_{vv}(u, 0), \tag{100}$$

und daraus schließlich

$$K = -\tfrac{1}{2}\mathsf{E}_{vv}(u, 0). \tag{101}$$

Der Ausdruck für K ist aber nichts anderes als *das Krümmungsmaß*[1]) *der Fläche im Punkt* $(u, 0)$ der geodätischen Linie $\mathfrak{G}_0$. Aus dem Ausdruck (93) für die zweite Variation folgt jetzt der Satz[2]):

Wenn das Krümmungsmaß der Fläche entlang dem Bogen $Q_1 Q_2$ der geodätischen Linie beständig negativ ist, so ist die zweite Variation der Bogenlänge positiv.

Auf Flächen mit durchweg negativem Krümmungsmaß ist also a fortiori die zweite Variation stets positiv.[3])

§ 29. Die Jacobi'sche Bedingung für den Fall der Parameterdarstellung.

Wir haben nunmehr die Modifikationen zu betrachten, welche die in §§ 10 bis 14 entwickelte Jacobi'sche Theorie beim Übergang zur Parameterdarstellung erfährt.

Wir setzen dabei, sowie für die ganze weitere Diskussion, voraus, daß die Legendre'sche Bedingung (II) für unsern Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ erfüllt ist. Darüber hinaus machen wir aber noch die *Annahme*[4]), daß die Funktion F_1 in keinem Punkt von $\mathfrak{E}_0$ verschwindet, so daß also

$$F_1(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t), \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t)) > 0 \quad \text{für} \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2. \tag{II'}$$

Aus dieser scheinbar geringfügigen Verschärfung unserer Annahme ergibt sich die wichtige Folgerung, daß wir auf den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Resultate von § 27, c) und d) anwenden dürfen.

---

[1]) Vgl. z. B. Knoblauch, *Krumme Flächen*, § 24, (2) und § 27, (6). Der Satz, daß K gleich dem Krümmungsmaß ist, ist von der Wahl des Koordinatensystems auf der Fläche unabhängig, vgl. p. 228.

[2]) Der Beweis mittels der Bonnet'schen Koordinaten ist nicht einwandfrei. Es müßte noch gezeigt werden, daß durch jeden Punkt N in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{G}_0$ nur eine zu $\mathfrak{G}_0$ orthogonale geodätische Linie gezogen werden kann. Vgl. die *Übungsaufgabe* Nr. 7 am Ende dieses Kapitels.

[3]) In dieser Form wurde der Satz zuerst von Jacobi (ohne Beweis) gegeben, Journal für Mathematik, Bd. XVII (1837), p. 82, und *Vorlesungen über Dynamik*, p. 47. Bewiesen wurde der Satz zuerst von Bonnet, loc. cit.

[4]) Der Ausnahmefall, wo F_1 in Punkten des Bogens $\mathfrak{E}_0$ verschwindet, bietet große Schwierigkeiten und ist, abgesehen von einigen Andeutungen in den Vorlesungen von Hilbert vom Winter 1904/05, noch so gut wie gar nicht behandelt worden.

Ähnlich wie beim x-Problem erscheint die Jacobi'sche Bedingung auch hier in zwei verschiedenen Formen, von denen die eine von WEIERSTRASS, die andere von KNESER herrührt.

a) Die Weierstraß'sche Form der Jacobi'schen Bedingung:

Die Jacobi'sche Differentialgleichung (9) von § 10 nimmt für das Integral (91) die Form an

$$F_2 u - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) = 0, \tag{102}$$

wobei die Funktionen F_1, F_2 sich auf die Extremale $\mathfrak{E}_0^*$ beziehen. Die Differentialgleichung (102) hat in dem offenen Intervall: $t_1^* < t < t_2^*$ keine singulären Punkte; denn nach § 27, c) sind die Funktionen F_2, F_1, F_1' stetig und es ist $F_1 \neq 0$.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (102) erhält man nach WEIERSTRASS folgendermaßen: Substituiert man in der Differentialgleichung

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \tag{20_1}$$

für x, y das allgemeine Integral

$$x = f(t, \alpha, \beta), \quad y = g(t, \alpha, \beta), \tag{64}$$

so wird die Differentialgleichung identisch befriedigt für alle Werte von t, α, β im Bereich (67). Differentiieren wir diese Identität nach α, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{xx} f_\alpha + F_{xy} g_\alpha + F_{xx'} f_{t\alpha} + F_{xy'} g_{t\alpha} \\ - \frac{d}{dt}(F_{x'x} f_\alpha + F_{x'y} g_\alpha + F_{x'x'} f_{t\alpha} + F_{x'y'} g_{t\alpha}) = 0\,. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung drücken wir die zweiten partiellen Ableitungen von F mit Hilfe der Formeln (12a), (85), (86) und (88) durch $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ aus, wobei wir vorübergehend durch Überstreichen andeuten, daß die betreffenden Funktionen für die allgemeine Extremale (64) zu berechnen sind. Nach einigen einfachen Reduktionen erhält man

$$g_t\left[\overline{F}_2 \omega - \frac{d}{dt}\left(\overline{F}_1 \frac{d\omega}{dt}\right)\right] = 0,$$

wobei

$$\omega = g_t f_\alpha - f_t g_\alpha.$$

Wenden wir dasselbe Verfahren auf die Differentialgleichung

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \tag{20_2}$$

an, so erhalten wir

$$-f_t\left[\overline{F}_2 \omega - \frac{d}{dt}\left(\overline{F}_1 \frac{d\omega}{dt}\right)\right] = 0.$$

Da f_t und g_t nach (68) nicht gleichzeitig verschwinden können, so folgt

$$\overline{F}_2 \omega - \frac{d}{dt}\left(\overline{F}_1 \frac{d\omega}{dt}\right) = 0.$$

Ein ganz analoges Resultat ergibt sich, wenn man nach β statt nach α differentiiert. Gibt man schließlich den Größen α, β die speziellen Werte α_0, β_0 und macht von (66) Gebrauch, so erhält man die Weierstraß'sche Modifikation des Jacobi'schen Theorems (§ 12, b)):

Die Jacobi'sche Differentialgleichung

$$F_2 u - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) = 0 \tag{102}$$

hat die beiden partikulären Integrale

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= g_t(t, \alpha_0, \beta_0) f_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0) - f_t(t, \alpha_0, \beta_0) g_\alpha(t, \alpha_0, \beta_0), \\ \vartheta_2(t) &= g_t(t, \alpha_0, \beta_0) f_\beta(t, \alpha_0, \beta_0) - f_t(t, \alpha_0, \beta_0) g_\beta(t, \alpha_0, \beta_0). \end{aligned} \tag{103}$$

Dieselben sind nach (70) linear unabhängig, woraus nach § 11, b) die später mehrfach zu benutzende Ungleichung folgt:

$$D(t) \equiv \vartheta_1(t)\vartheta_2'(t) - \vartheta_2(t)\vartheta_1'(t) \neq 0 \tag{104}$$

$$\text{für } t_1^* < t < t_2^*.$$

Schließt man jetzt wie in §§ 12 und 14 weiter und bezeichnet nach Weierstrass

$$\Theta(t, t_1) = \vartheta_1(t)\vartheta_2(t_1) - \vartheta_2(t)\vartheta_1(t_1), \tag{105}$$

so erhält man das Resultat:

Die dritte notwendige Bedingung für ein Extremum lautet:

$$\Theta(t, t_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad t_1 < t < t_2. \tag{III}$$

Dies ist die *Weierstraß'sche Form der Jacobi'schen Bedingung.*

Bezeichnet man mit t_1' die zunächst auf t_1 folgende Wurzel der Gleichung

$$\Theta(t, t_1) = 0 \tag{106}$$

falls eine solche im Intervall (60) existiert, so läßt sich die Bedingung (III) auch schreiben:

$$t_2 \overline{\gtrless} t_1'.$$

t_1' ist der Parameter des zum Punkt P_1 *konjugierten Punktes* P_1'.

Allgemeiner nennen wir einen Punkt von $\mathfrak{E}_0^*$ „im weiteren Sinn zu P_1 konjugiert", wenn sein Parameter der Gleichung (106) genügt.

Der konjugierte Punkt ist von der Wahl des Parameters t und der Integrationskonstanten α, β unabhängig. Denn wendet man auf die Größen t, α, β eine Transformation von der Form (71) an, so findet man nach einer leichten Rechnung zwischen der Funktion $\Theta(t, t_1)$ und ihrer transformierten $\bar{\Theta}(\bar{t}, \bar{t}_1)$ die Relation

$$\Theta(t, t_1) = \lambda(t)\,\lambda(t_1)\nabla\,\bar{\Theta}(\bar{t}, \bar{t}_1), \tag{107}$$

und der Faktor $\lambda(t)\,\lambda(t_1)\nabla$ ist nach (72) von Null verschieden. Dasselbe Resultat kann man auch mit WEIERSTRASS aus der geometrischen Bedeutung des konjugierten Punktes schließen.

Beispiel XIV: (Siehe p. 206).

Wir haben hier nach (26)

$$F_1 = -\frac{R}{(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3},$$

also entlang irgend einer Extremalen (27)

$$F_1 = -\frac{1}{R^2}.$$

Die Bedingung (II') für ein Maximum ist also stets erfüllt.

Ferner berechnet man aus dem allgemeinen Integral (27):

$$\Theta(t, t_1) = -R^2 \sin(t - t_1).$$

Also ist

$$t_1' = t_1 + \pi.$$

Der zum Punkt P_1 konjugierte Punkt P_1' ist also der ihm auf dem betreffenden Kreis diametral gegenüberliegende Punkt. Daraus folgt (vgl. Fig. 31):

Wenn $R > \frac{1}{2}|P_1P_2|$, so erfüllt von den beiden Kreisbogen $P_1P_3P_2$ und $P_1P_4P_2$ nur derjenige, welcher kleiner ist als ein Halbkreis, also $P_1P_3P_2$ die Bedingung (III).

Wenn $R = \frac{1}{2}|P_1P_2|$, so ist die Bedingung (III) zwar auch noch erfüllt, aber es fällt jetzt der Punkt P_2 mit dem konjugierten Punkt P_1' zusammen.

Beispiel XV: Brachistochrone[1] (siehe p. 207).

Wir nehmen an, daß die beiden Endpunkte P_1 und P_2 zwischen den beiden Spitzen $\tau = 0$ und $\tau = 2\pi$ der Zykloide

[1] Vgl. LINDELÖF-MOIGNO, *loc. cit.*, p. 231, und WEIERSTRASS, *Vorlesungen*.

$$\begin{aligned} x - x_1 + \beta_0 &= \alpha_0 (\tau - \sin \tau) \\ y - y_1 + k &= \alpha_0 (1 - \cos \tau) \end{aligned} \tag{108}$$

liegen, so daß also die den beiden Punkten P_1 und P_2 entsprechenden Werte $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ der Ungleichung genügen

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < 2\pi.$$

Für die Funktion F_1 erhält man

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{y - y_1 + k}\,(\sqrt{x'^2 + y'^2})^3} = \frac{1}{8\sqrt{2}\,\alpha_0{}^3\sqrt{\alpha_0}\,\sin^4 \frac{\tau}{2}}.$$

F_1 ist also positiv entlang dem Zykloidenbogen $P_1 P_2$ und die Bedingung (II') ist erfüllt.

Für die Weierstraß'sche Funktion $\Theta(\tau, \tau_1)$ findet man nach einfacher Rechnung

$$\Theta(\tau, \tau_1) = 4\alpha_0{}^2 \sin\frac{\tau}{2} \cos\frac{\tau}{2} \sin\frac{\tau_1}{2} \cos\frac{\tau_1}{2} \left[\tau - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2} - \tau_1 + 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau_1}{2}\right].$$

Daraus folgt, daß der Parameter τ_1' des zu P_1 konjugierten Punktes P_1' entweder ein Vielfaches von 2π sein muß, in welchem Fall P_1' sicher nicht dem Bogen $P_1 P_2$ angehört, oder aber τ_1' muß der transzendenten Gleichung genügen

$$\tau - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2} = \tau_1 - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau_1}{2}. \tag{109}$$

Wächst τ von 0 bis π, so nimmt die Funktion $\tau - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2}$ beständig ab von 0 bis $-\infty$; wächst τ weiter von π bis 2π, so nimmt sie beständig ab von $+\infty$ bis 2π. Daraus folgt, daß $\tau = \tau_1$ die einzige Wurzel der Gleichung (109) ist, welche zwischen 0 und 2π liegt. Daher *gibt es auf dem Bogen $P_1 P_2$ keinen zu P_1 konjugierten Punkt,* also ist auch die Bedingung (III) erfüllt.[1]

b) Die Kneser'sche Form der Jacobi'schen Bedingung:

Man kann nach Kneser[2]) die Jacobi'sche Bedingung noch in eine andere Form bringen, bei welcher statt des allgemeinen Integrals (64) der Euler'schen Differentialgleichung die Extremalenschar durch den Punkt P_1 zugrunde gelegt wird. Aus dieser zweiten Form ergibt sich dann auch am naturgemäßesten die geometrische Bedeutung der konjugierten Punkte.

---

[1]) Hierzu noch die *Übungsaufgaben* Nr. 1—6, 10, 12, 16—18 am Ende dieses Kapitels.

[2]) Vgl. Kneser, *Lehrbuch,* § 31; vgl. auch oben die analogen Entwicklungen von § 13.

Wir betrachten, für spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner als für unsere unmittelbaren Zwecke erforderlich wäre, eine beliebige Extremalenschar

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{110}$$

welche die in § 27, d) unter A) bis D) aufgezählten Eigenschaften besitzt.

Substituiert man dann in den beiden Differentialgleichungen (20) für x, y die Funktionen φ, ψ und differentiiert die so entstandene Identität nach a, so erhält man genau wie unter a) das Resultat, daß die Funktionaldeterminante: $u = \Delta(t, a)$ der Schar (110) als Funktion von t der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{F}_2 u - \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{F}_1 \frac{du}{dt}\right) = 0 \tag{111}$$

genügt, welche wegen (75) für $a = a_0$ in die Jacobi'sche Differentialgleichung (102) übergeht.

In dem speziellen Fall, wo die Gleichungen (110) die Extremalenschar durch den Funkt P_1 darstellen, folgt überdies aus (79) und (82), da in diesem Fall $t_0 = t_1$,

$$\Delta(t_1, a_0) = 0,$$

und wir erhalten daher das Resultat:

Die Funktionaldeterminante

$$u = \Delta(t, a_0)$$

der Extremalenschar durch den Punkt P_1 genügt der Jacobi'schen Differentialgleichung

$$F_2 u - \frac{d}{dt}\left(F_1 \frac{du}{dt}\right) = 0 \tag{102}$$

und verschwindet für $t = t_1$.

Daraus folgt aber, daß die Funktion $\Delta(t, a_0)$ von der Weierstraß'schen Funktion $\Theta(t, t_1)$, welche dieselben beiden Eigenschaften besitzt, nur um einen konstanten Faktor verschieden sein kann:

$$\Delta(t, a_0) = c\,\Theta(t, t_1), \tag{112}$$

wo c eine wegen D) von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Der zu t_1 konjugierte Wert t_1' kann daher auch durch die Gleichung

$$\Delta(t, a_0) = 0$$

definiert werden.

Wir bemerken noch, daß aus den beiden Gleichungen

$$\Delta(t_1, a_0) = 0, \qquad \Delta(t_1', a_0) = 0 \tag{113}$$

nach § 11, a) folgt, daß

$$\Delta_t(t_1, a_0) \neq 0, \qquad \Delta_t(t_1', a_0) \neq 0, \tag{114}$$

da t_1 und t_1' keine singulären Punkte der Differentialgleichung (102) sind.

c) Geometrische Bedeutung der konjugierten Punkte[1]):

Wir betrachten wieder eine beliebige Extremalenschar

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a), \tag{110}$$

welche die in § 27, d) unter A) bis D) aufgezählten Eigenschaften besitzt.

Auf der speziellen Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$

$$x = \varphi(t, a_0), \qquad y = \psi(t, a_0),$$

nehmen wir einen Punkt $P'(t')$ an, wobei: $T_1 < t' < T_2$ sein soll. In der Nähe von P' nehmen wir einen zweiten Punkt $P(t)$ auf $\mathfrak{E}_0^*$ an und konstruieren in ihm die Normale. Die Gleichung derselben ist

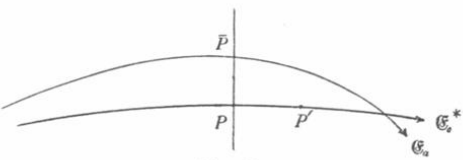

Fig. 33.

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' = 0,$$

wenn X, Y die laufenden Koordinaten, x, y die Koordinaten des Punktes P und x', y' die Ableitungen von x, y nach t bedeuten.

Wir untersuchen jetzt den Schnitt dieser Normalen mit einer benachbarten Extremalen $\mathfrak{E}_a$ der Schar (110).

Angenommen, die Normale schneide diese Extremale in einem Punkt $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$, der auf $\mathfrak{E}_a$ dem Parameterwert $t = \bar{t}$ entspricht; dann haben wir zur Bestimmung von $\bar{t}$ die Gleichung

$$[\varphi(\bar{t}, a) - \varphi(t, a_0)]\, \varphi_t(t, a_0) + [\psi(\bar{t}, a) - \psi(t, a_0)]\, \psi_t(t, a_0) = 0. \tag{115}$$

Dieselbe wird erfüllt für $\bar{t} = t'$, $t = t'$, $a = a_0$ und da nach (77)

$$\varphi_t^2(t', a_0) + \psi_t^2(t', a_0) \neq 0,$$

---

[1]) In der Hauptsache nach Weierstrass, *Vorlesungen* 1879; vgl. auch Kneser, Lehrbuch, p. 90.

so sind die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Satzes über implizite Funktionen (§ 22, e)) erfüllt; wir können daher die Gleichung (**115**) nach $\bar{t}$ auflösen und erhalten eine und nur eine Lösung:

$$\bar{t} = \chi(t, a),$$

welche in der Umgebung der Stelle $t = t'$, $a = a_0$ von der Klasse C' ist und der Anfangsbedingung

$$\chi(t', a_0) = t'$$

genügt.

Aus der speziellen Form der Gleichung (**115**) und der Eindeutigkeit der Lösung folgt, daß allgemein

$$\chi(t, a_0) = t$$

für jedes t in hinreichender Nähe von t'.

Wenden wir jetzt auf die Differenz

$$\chi(t, a) - \chi(t, a_0)$$

den Taylor'schen Satz mit Restglied an und brechen mit den Gliedern zweiter Ordnung[1]) ab, so erhalten wir nach einfacher Rechnung:

$$\bar{t} = t + \left(-\frac{\varphi_t\varphi_a + \psi_t\psi_a}{\varphi_t^2 + \psi_t^2} + (a - a_0)r\right)(a - a_0).$$

Dabei sind die Argumente von φ_t usw.: t, a_0, und r ist eine Funktion von t und a, deren absoluter Wert in einer gewissen Umgebung der Stelle (t', a_0) unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Wir berechnen jetzt weiter den Abstand $|P\bar{P}|$ der beiden Punkten P und $\bar{P}$. Entwickelt man die Differenzen

$$\bar{x} - x = \varphi(\bar{t}, a) - \varphi(t, a_0), \quad \bar{y} - y = \psi(\bar{t}, a) - \psi(t, a_0)$$

mittels des Taylor'schen Satzes mit Restglied nach Potenzen von $\bar{t} - t$, $a - a_0$ und bricht wieder mit den Gliedern zweiter Ordnung ab, so kommt, wenn man für die Differenz $\bar{t} - t$ den gefundenen Wert einsetzt:

$$\begin{aligned} \bar{x} - x &= -\frac{(\Delta + (a - a_0)V)\psi_t(a - a_0)}{\varphi_t^2 + \psi_t^2} \\ \bar{y} - y &= \frac{(\Delta + (a - a_0)V)\varphi_t(a - a_0)}{\varphi_t^2 + \psi_t^2}. \end{aligned} \tag{116}$$

Dabei sind die Argumente in φ_t, ψ_t und der Funktionaldeterminante Δ wieder t und a_0, und V ist eine Funktion von t und a, welche in einer gewissen Um-

[1]) Hierzu ist allerdings nötig, daß χ_{aa} in der Umgebung von (t', a_0) existiert und stetig ist; dies findet statt, wenn wir die Annahme machen, daß außer den unter B) erwähnten Ableitungen auch φ_{aa} und ψ_{aa} im Bereich (76) existieren und stetig sind. Dies ist sicher der Fall, wenn wir die Funktion F von der Klasse C^{IV} statt von der Klasse C''' voraussetzen, vgl. § **24**, a) Zusatz I.

gebung (δ) der Stelle $t = t'$, $a = a_0$ dem absoluten Betrage nach unter einer festen Grenze G bleibt.

Aus (116) ergibt sich *für den Abstand* $|P\overline{P}|$ *der Ausdruck*:

$$|P\overline{P}| = \left| \frac{(\Delta(t, a_0) + (a - a_0)V(t, a))(a - a_0)}{\sqrt{\varphi_t^2(t, a_0) + \psi_t^2(t, a_0)}} \right|.$$

Ferner folgt aus (116)

$$x'(\overline{y} - y) - y'(\overline{x} - x) = (\Delta(t, a_0) + (a - a_0)V(t, a))(a - a_0),$$

woraus sich schließen läßt, daß der Ausdruck

$$\tilde{\Delta}(t, a) \equiv \Delta(t, a_0) + (a - a_0)V(t, a)$$

als Funktion von t und a in der Umgebung (δ) der Stelle (t', a_0) *stetig ist.*

Soll nun die Extremale $\mathfrak{E}_a$ die Extremale $\mathfrak{E}_0{}^*$ im Punkt $P(t)$ schneiden, so muß $|P\overline{P}| = 0$ sein, also muß, da $a \neq a_0$ vorausgesetzt ist,

$$\tilde{\Delta}(t, a) = 0$$

sein. Daraus schließen wir

1. Wenn

$$\Delta(t', a_0) \neq 0,$$

so können wir wegen der Stetigkeit von $\tilde{\Delta}(t, a)$ nach A III 2 eine positive Größe $\gamma \overline{\overline{<}} \delta$ angeben, derart, daß

$$\tilde{\Delta}(t, a) \neq 0$$

für

$$|t - t'| \overline{\overline{<}} \gamma, \qquad |a - a_0| \overline{\overline{<}} \gamma,$$

d. h. aber: *Wenn*

$$\Delta(t', a_0) \neq 0,$$

so schneidet keine Extremale der Schar (110), für welche: $|a - a_0| \overline{\overline{<}} \gamma$ *die Extremale* $\mathfrak{E}_0{}^*$ *in dem Intervall* $[t' - \gamma, t' + \gamma]$.

2. Wenn dagegen

$$\Delta(t', a_0) = 0,$$

so ist, wie oben unter b) gezeigt worden ist,

$$\Delta_t(t', a_0) \neq 0;$$

also wechselt $\Delta(t, a_0)$ sein Zeichen, wenn t durch den Wert t' hindurchgeht. Wir können daher eine positive Größe $\tau \overline{\overline{<}} \delta$ so klein wählen, daß

$$\Delta(t' - \tau, a_0) \quad \text{und} \quad \Delta(t' + \tau, a_0)$$

entgegengesetztes Zeichen haben. Und nunmehr können wir eine zweite positive Größe $\varkappa$ angeben, derart, daß auch

$$\tilde{\Delta}(t' - \tau, a) \quad \text{und} \quad \tilde{\Delta}(t' + \tau, a)$$

entgegengesetztes Zeichen haben, wofern

$$|a - a_0| \overline{\overline{<}} \varkappa.$$

Da die Funktion $\tilde{\Delta}(t, a)$ als Funktion von t im Intervall $[t'-\tau, t'+\tau]$ stetig ist, so muß sie daher mindestens in einem Punkt zwischen $t'-\tau$ und $t'+\tau$ verschwinden, d. h. also:

Wenn

$$\Delta(t', a_0) = 0,$$

so schneidet jede Extremale $\mathfrak{E}_a$ *der Schar (110), für welche* $|a - a_0| \overline{\gtrless} \varkappa$ *die Extremale* $\mathfrak{E}_0{}^*$ *wenigstens einmal zwischen* $t'-\tau$ *und* $t'+\tau$.

Da wir τ beliebig klein annehmen können, so folgt weiter:

Der[1]) *Schnittpunkt der beiden Extremalen nähert sich dem Punkt* $P'(t')$ *als Grenzlage, wenn* a *gegen* a_0 *konvergiert.*

Aus der Theorie der Enveloppen[2]) folgt dann, daß der Punkt P' zugleich auf der Enveloppe der Extremalenschar (110) liegt, und zwar berührt im allgemeinen die Enveloppe in P' die Extremale $\mathfrak{E}_0{}^*$.

Indem man diese Resultate insbesondere auf die Extremalenschar durch den Punkt P_1 anwendet, erhält man auch für den Fall der Parameterdarstellung das Resultat, daß der zu P_1 konjugierte Punkt P_1' derjenige Punkt ist, in welchem die Extremale $\mathfrak{E}_0{}^*$ zum erstenmal (von P_1 an gerechnet) die Enveloppe der Extremalenschar durch den Punkt P_1 berührt.

Beispiel XIV (Siehe pp. 206, 234):

Die Extremalenschar durch den Punkt P_1 besteht hier aus der Gesamtheit der im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers durchlaufenen Kreise vom Radius R durch den Punkt P_1. Die Enveloppe dieser Kreisschar ist ein Kreis um den Punkt P_1 mit dem Radius $2R$. Jeder Kreis der Schar berührt die Enveloppe in dem dem Punkt P_1 diametral gegenüberliegenden Punkt, womit wir zu demselben Resultat gelangt sind, wie auf p. 234.

Beispiel XVI: Geodätische Linien. (Siehe pp. 209, 228).

Aus der vorausgesetzten ein-eindeutigen Beziehung zwischen dem Bereich $\mathfrak{R}$ in der u, v-Ebene und dessen Bild $\mathfrak{M}$ auf der Fläche folgt: Wenn zwei Kurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ in der u, v-Ebene sich in einem Punkt P schneiden, so schneiden sich auch ihre Bilder $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ auf der Fläche in einem Punkt Q, dem Bildpunkt von P, und umgekehrt. Ferner folgt aus den Formeln[3]) für den Winkel, unter welchem sich zwei Kurven auf der Fläche schneiden: Wenn sich die beiden Kurven $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ im Punkt P berühren und zwar so, daß ihre positiven Tangentenrichtungen zusammenfallen, so berühren sich auch die Bildkurven $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ im Punkt Q, und zwar ebenfalls mit zusammenfallenden positiven Tangenten und umgekehrt. Hieraus folgt, daß sich die Sätze über die geometrische Bedeutung der konjugierten Punkte unmittelbar von den Extremalen in der u, v-Ebene auf die geodätischen Linien selbst übertragen.

---

[1]) Es läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Schnittpunkte zwischen $t'-\tau$ und $t'+\tau$ endlich sein muß; man wähle den zunächst bei P_1 gelegenen.

[2]) Vgl. *Encyclopädie*, III D, p. 47, Fußnote 117.

[3]) Vgl. z. B. Knoblauch, *Krumme Flächen*, § 4, Gleichung (6) und (8).

Da die Jacobi'sche Bedingung (III) eine notwendige Bedingung für ein permanentes Zeichen der zweiten Variation ist (vgl. § 14), so folgt aus dem in § 28, c) gegebenen Satz:

Wenn das Krümmungsmaß der Fläche entlang der betrachteten geodätischen Linie $Q_1 Q_2$ beständig negativ ist, so kann der zu Q_1 konjugierte Punkt nicht zwischen Q_1 und Q_2 liegen.[1])

§ 30. Die Weierstraß'sche Bedingung und die $\mathcal{E}$-Funktion.

Zur Herleitung der *Weierstraß'schen Bedingung*[2]) wenden wir hier die ursprünglich von WEIERSTRASS selbst benutzte Methode an, die wesentlich elementarer ist als diejenige, welche wir beim x-Problem benutzt haben, da sie weder den Begriff des Feldes noch den Weierstraß'schen Fundamentalsatz voraussetzt.

a) **Der Weierstraß'sche Beweis der vierten notwendigen Bedingung:**

Auf unserm Extremalenbogen

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \gtreqless t \gtreqless t_2$$

wählen wir einen beliebigen Punkt $P_3(t_3)$ und ziehen durch denselben eine willkürliche Kurve der Klasse C':

$$\tilde{\mathfrak{C}}: \qquad x = \tilde{x}(\tau), \qquad y = \tilde{y}(\tau);$$

auf der Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ möge der Wert $\tau = \tau_3$ den Punkt P_3 liefern. Es sei P_4 derjenige Punkt von $\tilde{\mathfrak{C}}$, welcher dem Wert $\tau = \tau_3 - \varepsilon$ entspricht, wobei ε eine kleine positive Größe bedeutet; seine Koordinaten seien

$$x_4 = x_3 + \Delta x_3, \qquad y_4 = y_3 + \Delta y_3.$$

Nun ziehen wir eine den Bedingungen einer „Normalvariation“[3]) genügende Kurve

$$\bar{\mathfrak{C}}: \qquad x = \bar{x}(t) \equiv \mathring{x}(t) + \xi(t, \varepsilon), \qquad y = \bar{y}(t) \equiv \mathring{y}(t) + \eta(t, \varepsilon)$$

vom Punkt P_1 nach P_4, wobei der Parameter t so gewählt sein möge,

---

[1]) Weitere interessante Sätze über konjugierte Punkte auf geodätischen Linien findet man bei BRAUNMÜHL, Mathematische Annalen, Bd. XIV (1879) p. 557, v. MANGOLDT, Journal für Mathematik, Bd. XCI (1881) p. 23; DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Bd. III, Livre VI, Chap. V.

Vgl. ferner die *Übungsaufgaben* Nr. 1—6 am Ende dieses Kapitels.

[2]) Vgl. § 18. [3]) Vgl. § 8, a).

daß den Punkten P_1, P_4 die Werte $t=t_1$, $t=t_3$ entsprechen, so daß also

$$\left.\begin{array}{ll}\xi(t_1,\varepsilon)=0, & \eta(t_1,\varepsilon)=0,\\ \xi(t_3,\varepsilon)=\Delta x_3, & \eta(t_3,\varepsilon)=\Delta y_3\end{array}\right\}. \tag{118}$$

Eine solche Kurve können wir z. B. auf folgende Weise herstellen: Es seien u und v zwei Funktionen von t von der Klasse C' in $[t_1 t_3]$, welche für $t=t_1$ verschwinden und für $t=t_3$ gleich 1 werden. Dann genügen die Funktionen

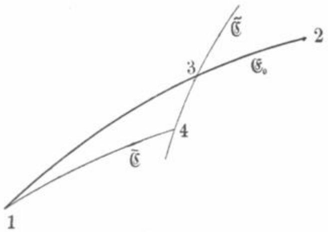

Fig. 34.

$$\xi(t,\varepsilon)=u\Delta x_3=u(t)[\tilde{x}(\tau_3-\varepsilon)-\tilde{x}(\tau_3)],$$
$$\eta(t,\varepsilon)=v\,\Delta y_3=v(t)\,[\tilde{y}(\tau_3-\varepsilon)-\tilde{y}(\tau_3)]$$

allen Bedingungen.

Jetzt variieren wir den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$, indem wir das Stück P_1P_3 von $\mathfrak{E}_0$ durch die gebrochene Kurve $P_1P_4P_3$ ersetzen, während wir das Stück P_3P_2 ungeändert lassen. Dann ist

$$\Delta J=\bar{J}_{14}+\tilde{J}_{43}-J_{13},$$

wobei die Integrale J, $\bar{J}$, $\tilde{J}$ respektive entlang den Kurven $\mathfrak{E}_0$, $\bar{\mathfrak{E}}$, $\tilde{\mathfrak{E}}$ zu nehmen sind.

Für die Berechnung der Differenz $\bar{J}_{14}-J_{13}$ können wir von der Formel (79) von § 8 für die Variation eines Extremalenbogens Gebrauch machen. Dieselbe ergibt in unserm Fall:

$$\bar{J}_{14}-J_{13}=\Big[F_{x'}\,\delta x+F_{y'}\,\delta y\Big]_{t_1}^{t_3}+\varepsilon(\varepsilon),$$

wobei (ε) eine mit ε unendlich klein werdende Funktion von ε bedeutet und

$$\delta x=\varepsilon\xi_\varepsilon(t,0),\qquad \delta y=\varepsilon\eta_\varepsilon(t,0).$$

Nun folgt aber aus (118)

$$\delta x\,|^1=0,\qquad \delta y\,|^1=0,$$
$$\delta x\,|^3=-\,\varepsilon\tilde{x}'(\tau_3),\qquad \delta y\,|^3=-\,\varepsilon\tilde{y}'(\tau_3);$$

wir erhalten also

$$\bar{J}_{14}-J_{13}=-\,\varepsilon\,\{F_{x'}(x_3,y_3,x_3',y_3')\tilde{x}_3'+F_{y'}(x_3,y_3,x_3',y_3')\tilde{y}_3'+(\varepsilon)\},$$

wobei zur Abkürzung

$$\mathring{x}'(t_3) = x_3', \qquad \mathring{y}'(t_3) = y_3',$$
$$\tilde{x}'(\tau_3) = \tilde{x}_3', \qquad \tilde{y}'(\tau_3) = \tilde{y}_3'$$

gesetzt ist.

Andererseits ist

$$\tilde{J}_{43} = \int_{\tau_3-\varepsilon}^{\tau_3} F(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau), \tilde{y}'(\tau))\, d\tau,$$

was wir unter Benutzung des Mittelwertsatzes wegen der Stetigkeit der Funktion $F(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{x}'(\tau), \tilde{y}'(\tau))$ schreiben können

$$\tilde{J}_{43} = \varepsilon\,[F(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3, \tilde{x}_3', \tilde{y}_3') + (\varepsilon)]\,.$$

Beachten wir noch, daß

$$\tilde{x}_3 = x_3, \qquad \tilde{y}_3 = y_3,$$

so kommt

$$\Delta J = \varepsilon\{F(x_3, y_3, \tilde{x}_3', \tilde{y}_3') - F_{x'}(x_3, y_3, x_3', y_3')\,\tilde{x}_3' - F_{y'}(x_3, y_3, x_3', y_3')\,\tilde{y}_3' + (\varepsilon)\}.$$

Da ε eine positive Größe sein sollte, so folgt hieraus durch Verkleinerung von ε, daß im Fall eines Minimums

$$F(x_3, y_3, \tilde{x}_3', \tilde{y}_3') - F_{x'}(x_3, y_3, x_3', y_3')\,\tilde{x}_3' - F_{y'}(x_3, y_3, x_3', y_3')\,\tilde{y}_3' \geqq 0 \qquad (119)$$

sein muß, und zwar für jede durch den Punkt P_3 gehende Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ und weiterhin für jede Wahl des Punktes P_3 auf dem Bogen $\mathfrak{C}_0$.

Wir führen jetzt die Weierstraß'sche $\mathcal{E}$-Funktion[1]) ein durch folgende Definition:

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{E}(x, y;\, x', y';\, \tilde{x}', \tilde{y}') = \\ &F(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}') - [\tilde{x}' F_{x'}(x, y, x', y') + \tilde{y}' F_{y'}(x, y, x', y')]\end{aligned}\right\}, \qquad (120)$$

oder, da nach (10)

$$F(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}') = \tilde{x}' F_{x'}(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}') + \tilde{y}' F_{y'}(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}'),$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{E}(x, y;\, x', y';\, \tilde{x}', \tilde{y}') = \\ &\qquad \tilde{x}'[F_{x'}(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}') - F_{x'}(x, y, x', y')] \\ &\qquad + \tilde{y}'[F_{y'}(x, y, \tilde{x}', \tilde{y}') - F_{y'}(x, y, x', y')]\end{aligned}\right\}. \qquad (120\text{a})$$

Aus den Relationen (9) und (13) ergibt sich die folgende Homogeneitätseigenschaft der $\mathcal{E}$-Funktion:

$$\mathcal{E}(x, y;\, kx', ky';\, \tilde{k}\tilde{x}', \tilde{k}\tilde{y}') = \tilde{k}\,\mathcal{E}(x, y;\, x', y';\, \tilde{x}', \tilde{y}'), \qquad (121)$$

wenn die beiden Größen k und $\tilde{k}$ positiv sind.

---

[1]) Für die Vergleichung mit Kneser beachte man, daß Kneser $-\,\mathcal{E}$ statt des Weierstraß'schen $+\,\mathcal{E}$ schreibt, vgl. *Lehrbuch*, p. 75.

Setzen wir daher

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \cos\theta, & q &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \sin\theta, \\ \tilde{p} &= \frac{\tilde{x}'}{\sqrt{\tilde{x}'^2+\tilde{y}'^2}} = \cos\tilde{\theta}, & \tilde{q} &= \frac{\tilde{y}'}{\sqrt{\tilde{x}'^2+\tilde{y}'^2}} = \sin\tilde{\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

so ist

$$\mathcal{E}(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}') = \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2}\, \mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}), \tag{123}$$

wodurch das zweite und dritte Argumentenpaar auf Richtungskosinus reduziert werden.

Wir können daher das oben gewonnene Resultat (119) so formulieren:

Die vierte notwendige Bedingung für ein (starkes) Minimum des Integrals J besteht darin, daß

$$\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) \geqq 0 \tag{IV}$$

für jeden Punkt (x, y) des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_0$, wenn p, q die Richtungskosinus der positiven Tangente an $\mathfrak{E}_0$ im Punkt (x, y) und $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ die Richtungskosinus irgend einer Richtung bezeichnen.

Wir werden diese Bedingung die *Weierstraß'sche Bedingung* nennen.

b) **Zusammenhang zwischen der $\mathcal{E}$-Funktion und der Funktion F_1:**

Werden die Winkel $\tilde{\theta}$ und θ durch (122) definiert, so haben wir nach (120a):

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) \\ &= \cos\tilde{\theta}\,[F_{x'}(x, y, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) - F_{x'}(x, y, \cos\theta, \sin\theta)] \\ &+ \sin\tilde{\theta}\,[F_{y'}(x, y, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) - F_{y'}(x, y, \cos\theta, \sin\theta)]. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} &F_{x'}(x, y, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) - F_{x'}(x, y, \cos\theta, \sin\theta) \\ &= \int_0^{\omega} \frac{d}{d\tau} F_{x'}(x, y, \cos(\theta+\tau), \sin(\theta+\tau))\, d\tau, \end{aligned}$$

wobei: $\omega = \tilde{\theta} - \theta$; und eine analoge Formel gilt für $F_{y'}$.

Führen wir die Differentiation nach τ aus und machen alsdann von den Formeln (12a) Gebrauch, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) \\ &= \int_0^{\omega} F_1(x, y, \cos(\theta+\tau), \sin(\theta+\tau)) \sin(\omega - \tau)\, d\tau \end{aligned}\right\}. \tag{124}$$

Die beiden Winkel θ und $\tilde\theta$ sind nur bis auf additive Vielfache von 2π bestimmt; man kann die letzteren stets so wählen, daß

$$-\pi < \omega \overline{\gtrless} \pi .$$

Da alsdann $\sin(\omega - \tau)$ zwischen den Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht wechselt, so können wir den ersten Mittelwertsatz anwenden und erhalten die folgende *Relation*[1]) *zwischen der $\mathcal{E}$-Funktion und der Funktion F_1:*

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(x, y;\, \cos\theta,\, \sin\theta;\, \cos\tilde\theta,\, \sin\tilde\theta)\\ &\qquad = (1 - \cos(\tilde\theta - \theta))\, F_1(x, y,\, \cos\theta^*,\, \sin\theta^*),\end{aligned} \tag{125}$$

wo θ^* einen Mittelwert zwischen θ und $\tilde\theta$ bedeutet.

Aus diesem Satz ergeben sich eine Anzahl wichtiger Folgerungen:

1. Lassen wir $\tilde\theta$ gegen θ konvergieren, so kommt

$$\underset{\tilde\theta = \theta}{L} \frac{\mathcal{E}(x, y;\, p, q;\, \tilde p, \tilde q)}{1 - \cos(\tilde\theta - \theta)} = F_1(x, y, p, q). \tag{126}$$

Daraus folgt, daß *die Bedingung (II) eine Folge der Bedingung (IV) ist.*

2. Die Bedingung (IV) ist ihrerseits in der stärkeren Bedingung:

$$F_1(x, y,\, \cos\gamma,\, \sin\gamma) \geqq 0 \tag{IIa}$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathfrak{E}_0$ und für jeden Wert des Winkels γ, enthalten.

3. Die $\mathcal{E}$-Funktion verschwindet stets, wenn $\tilde\theta = \theta$ („ordentliches Verschwinden" nach KNESER), und es ist dann stets auch

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tilde\theta}\bigg|^{\tilde\theta = \theta} = 0 .$$

Für einen Wert $\tilde\theta \neq \theta$ kann die $\mathcal{E}$-Funktion nur dann verschwinden („außerordentliches Verschwinden"), wenn $F_1(x, y,\, \cos\gamma,\, \sin\gamma)$ für einen Wert $\gamma = \theta^*$ zwischen θ und $\tilde\theta$ verschwindet.

4. Wenn in einem Punkt (x, y) die beiden Funktionen $F(x, y,$ $\cos\gamma,\, \sin\gamma)$ und $F_1(x, y,\, \cos\gamma,\, \sin\gamma)$ für alle Werte von γ von Null verschieden sind, so müssen beide in diesem Punkt für alle Werte von γ dasselbe Zeichen haben..[2])

Dies folgt aus (125), wenn man für die $\mathcal{E}$-Funktion ihren Ausdruck (120) einsetzt und dem $\tilde\theta$ einen der beiden speziellen Werte gibt, für welche

$$F_{x'}(x, y,\, \cos\theta,\, \sin\theta)\cos\tilde\theta + F_{y'}(x, y,\, \cos\theta,\, \sin\theta)\sin\tilde\theta = 0 .$$

[1]) Satz und Beweis nach WEIERSTRASS, *Vorlesungen* (1882). Vgl. auch die analoge Formel beim x-Problem, § 18, Gleichung (28).

[2]) Von KNESER auf anderem Weg bewiesen, vgl. *Lehrbuch,* p. 53.

Beispiel[1]) *XVII:* Das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y y'^3 dt}{x'^2 + y'^2}$$

zu einem Extremum zu machen.

Man findet für die $\mathcal{E}$-Funktion den Wert

$$\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{y(p\tilde{q} - q\tilde{p})^2 [(p^2 - q^2)\tilde{q} + 2pq\tilde{p}]}{(p^2 + q^2)^2 (\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)}$$
$$= y \sin^2(\tilde{\theta} - \theta) \sin(2\theta + \tilde{\theta}).$$

Abgesehen von dem Ausnahmefall, wo die beiden Endpunkte auf der x-Achse liegen, kann man die $\mathcal{E}$-Funktion durch passende Wahl von $\tilde{\theta}$ sowohl negativ als positiv machen; es kann also kein (starkes) Extremum stattfinden. In dem erwähnten Ausnahmefall ist $\mathfrak{E}_0$ das Stück der x-Achse zwischen den beiden gegebenen Punkten, und $\mathcal{E} \equiv 0$ entlang $\mathfrak{E}_0$ für jede Richtung $\tilde{\theta}$.

Allgemeiner gilt der Satz[2]), daß *ein (starkes) Extremum* — im allgemeinen — *nicht eintreten kann, wenn die Homogeneitätsbedingung (9) nicht nur für positive, sondern auch für negative Werte von k erfüllt ist,* was z. B. allemal eintritt, wenn F eine *rationale* Funktion von x', y' ist.

Denn in diesem Falle gilt (121) auch für negative Werte von $\tilde{k}$, so daß

$$\mathcal{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos(\tilde{\theta} + \pi), \sin(\tilde{\theta} + \pi)) = -\mathcal{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}).$$

Die Bedingung (IV) kann also nur in der Weise erfüllt sein, daß

$$\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) \equiv 0$$

entlang $\mathfrak{E}_0$ für jede Richtung $\tilde{\theta}$. Es muß also auch

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tilde{\theta}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tilde{\theta}^2} \equiv 0$$

sein. Nun findet man aber durch direkte Ausführung der Differentiation an dem Ausdruck (124) die Relation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \mathcal{E} = F_1(x, y, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}). \tag{127}$$

Es müßte also auch

$$F_1(x, y, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) \equiv 0$$

sein entlang $\mathfrak{E}_0$ für jedes $\tilde{\theta}$. Dies ist aber nur für ganz spezielle Funktionen F und auch dann nur für singuläre Lösungen der Differentialgleichung (I) möglich.

---

[1]) Auf dieses Integral führt Newton's Problem des Rotationskörpers von geringstem Widerstand, vgl. unten § 54, sowie Pascal, *Variationsrechnung,* p. **111**; Kneser, *Lehrbuch,* §§ 11, 18, 26; der obige Ausdruck für $\mathcal{E}$ rührt von Weierstrass her, *Vorlesungen* (1882).

[2]) Weierstrass, *Vorlesungen* (1879). Für das x-Problem gilt der Satz nicht; denn von den beiden Richtungen $\tilde{\theta}$ und $\tilde{\theta} + \pi$ liefert dann immer nur e i n e eine zulässige Variation $P_1 P_4 P_3$, da ja jetzt $\tilde{x}' > 0$ sein muß; vgl. § 25, e).

c) Die Indikatrix:

Die Diskussion des Vorzeichens der Funktionen F_1 und $\mathcal{E}$ läßt sich nach Caratheodory[1]) mit Hilfe der „Indikatrix" sehr anschaulich machen. Die *Indikatrix für einen Punkt* $x = x_0$, $y = y_0$ des Bereiches $\mathfrak{R}$ ist diejenige Kurve, welche in Polarkoordinaten ϱ, θ durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)} \tag{128}$$

definiert wird. Dabei wird (wie auch sonst in der analytischen Geometrie), festgesetzt, daß für negative Werte von ϱ der Radius Vektor $|\varrho|$ vom Pol des Koordinatensystems aus in der der Richtung θ entgegengesetzten Richtung zu konstruieren ist. Der Pol des Koordinatensystems heißt der *„Grundpunkt"* der Indikatrix; wir bezeichnen ihn mit G.

In rechtwinkligen Koordinaten ξ, η wird die Indikatrix mit θ als Parameter dargestellt durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\cos\theta}{F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)}, \qquad \eta = \frac{\sin\theta}{F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta)}, \tag{128a}$$

aus welchen durch Differentiation nach θ folgt

$$\xi' = -\frac{F_{y'}}{F^2}, \qquad \eta' = \frac{F_{x'}}{F^2}. \tag{128b}$$

Mit Hilfe von bekannten Sätzen der analytischen Geometrie beweist man dann leicht die folgenden Resultate:

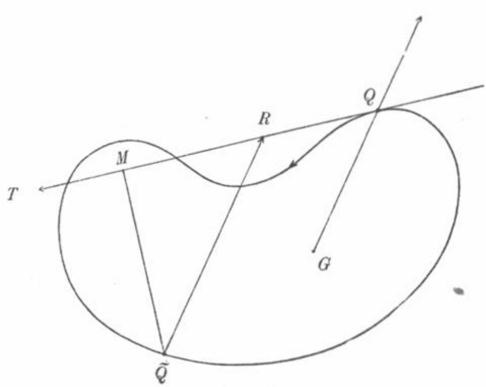

Fig. 35.

1. Es seien Q und $\tilde{Q}$ die den beiden Parameterwerten θ und $\tilde{\theta}$ entsprechenden Punkte der Indicatrix. Man ziehe den Radius Vektor GQ und konstruiere im Punkt Q die Tangente QT an die Indikatrix (siehe Fig. 35). Zieht man dann durch den Punkt $\tilde{Q}$ eine Parallele zu GQ und ist R der Schnittpunkt derselben mit der Tangente QT so ist[2])

$$\frac{\tilde{Q}R}{GQ} = \frac{\mathcal{E}(x_0, y_0;\ \cos\theta, \sin\theta;\ \cos\tilde{\theta},\ \sin\tilde{\theta})}{F(x_0, y_0, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta})} \tag{129}$$

---

[1]) C. Caratheodory, *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, Dissertation (Göttingen 1904), p. 69 und Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 456. Caratheodory beschränkt sich auf den „positiv definiten" Fall. Die Kurve ist zuerst von G. Hamel in seiner Dissertation: *Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind* (Göttingen 1901), p. 52, betrachtet worden.

[2]) Nach brieflicher Mitteilung von Herrn Caratheodory.

mit der Verabredung über das Vorzeichen, daß der Quotient $\tilde{Q}R/GQ$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die beiden Vektoren $\tilde{Q}R$ und GQ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Daher gilt die Regel: *Wenn*

$$F(x_0, y_0, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) > 0,$$

so ist

$$\mathcal{E}(x_0, y_0; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) > 0 \textit{ oder } < 0,$$

je nachdem der Punkt $\tilde{Q}(\tilde{\theta})$ *der Indikatrix auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Tangente an die Indikatrix im Punkt* $Q(\theta)$ *liegt, wie der Grundpunkt* G.

Ist dagegen $F(x_0, y_0, \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) < 0$, so sind in der Ungleichung für die $\mathcal{E}$-Funktion die Zeichen $>$ und $<$ zu vertauschen.

2. Aus der leicht zu beweisenden Formel

$$\xi'\eta'' - \xi''\eta' = \frac{F_1}{F^3},$$

in welcher die Akzente Differentiation nach θ andeuten, schließt man weiter:

Wenn

$$F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) > 0,$$

so ist

$$F_1(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) > 0 \textit{ oder } < 0,$$

jenachdem die Indikatrix im Punkt $Q(\theta)$ *ihre konkave oder konvexe Seite dem Grundpunkt* G *zukehrt.*

Ist dagegen

$$F(x_0, y_0, \cos\theta, \sin\theta) < 0,$$

so sind in der Ungleichung für F_1 die Zeichen $>$ und $<$ zu vertauschen.

Hiernach lassen sich die unter b) aus der Relation (**125**) gezogenen Folgerungen unmittelbar an der Indikatrix ablesen; ebenso der ebendort bewiesene Satz von Weierstraß. Weitere Anwendungen der Indikatrix folgen in §§ 36, a) und 48, c).

Beispiel XVI: Geodätische Linien. (Siehe pp. 209, 228, 240.) Hier lautet die Gleichung der Indikatrix in rechtwinkligen Koordinaten

$$\mathsf{E}\xi^2 + 2\mathsf{F}\xi\eta + \mathsf{G}\eta^2 = 1.$$

Wegen (35) ist die Indikatrix also eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Grundpunkt G zusammenfällt. Hieraus schließt man sofort, daß $F_1 > 0$ für jedes θ.

Beispiel XVII. (Siehe p. 246.)

$$F = \frac{yy'^3}{x'^2 + y'^2}, \qquad y > 0.$$

Die Gleichung der Indikatrix in Polarkoordinaten lautet

$$\varrho = \frac{1}{y\sin^3\theta}.$$

Hier ist:

$$\varrho(\theta + \pi) = -\varrho(\theta).$$

Daraus folgt, daß die Indikatrix aus zwei zusammenfallenden Zweigen besteht, von denen der eine den Werten von θ von 0 bis $\pi\,(\varrho > 0)$, der andere denen von π bis $2\pi\,(\varrho < 0)$ entspricht.

Den Werten

$$\theta = \pm\frac{\pi}{3}, \qquad \pm\frac{2\pi}{3}$$

entsprechen Wendepunkte der Indikatrix. In diesen Punkten wechselt die Funktion

$$F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = 2\,y \sin\theta\,(3 - 4\sin^2\theta)$$

ihr Vorzeichen. Das Vorzeichen von F_1 ist in den verschiedenen Sektoren von Fig. 36 eingetragen.

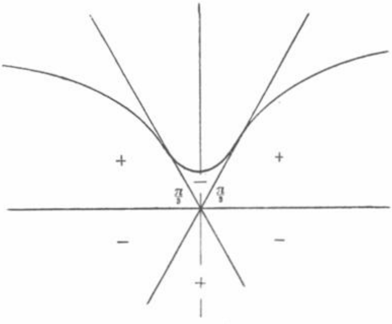

Fig. 36.

Aus dem Zusammenfallen der beiden Zweige folgt sofort geometrisch, daß die beiden Funktionen

$$\mathcal{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) \text{ und } \mathcal{E}(x, y; \cos\theta, \sin\theta; \cos(\tilde{\theta}+\pi), \sin(\tilde{\theta}+\pi)),$$

stets entgegengesetztes Vorzeichen haben.[1])

§ 31. Das Feld und das Feldintegral.

Indem wir uns jetzt zur Aufstellung hinreichender Bedingungen wenden, haben wir zunächst wieder den Begriff eines Feldes[2]) von Extremalen einzuführen.

a) Der Satz von der Existenz eines Feldes.

Die Gleichungen

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a) \tag{130}$$

mögen eine beliebige Schar von Extremalen darstellen, welche unsern speziellen Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ enthält (für $a = a_0$), und welche die in § 27, d) unter A), B) und C) aufgezählten Eigenschaften besitzt.

---

[1]) Hiezu die *Übungsaufgabe* Nr. 8 am Ende dieses Kapitels.

[2]) Vgl. die analogen Entwicklungen für das x-Problem in § 16. Die dort gegebene Definition des Feldes ist nur darin zu modifizieren, daß jetzt die das Feld bildenden Extremalenbogen in Parameterdarstellung gegeben sind, und ausdrücklich vorausgesetzt wird, daß dieselben keine mehrfachen Punkte besitzen.

Wir setzen überdies voraus, daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ *keine mehrfachen Punkte*[1]) besitzt und daß *die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(t, a) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, a)}$$

entlang dem Bogen $\mathfrak{E}_0$ von Null verschieden ist, d. h. also

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2. \tag{131}$$

Alsdann lassen sich nach § 22, d) und § 21, b) zwei positive Größen h, k

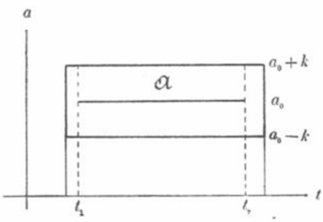

Fig. 37.

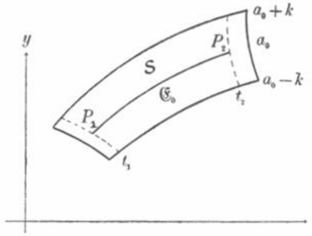

Fig. 38.

$$h < t_1 - T_1, \quad h < T_2 - t_2, \quad k < d, \tag{132}$$

so klein wählen,[2]) daß die Gleichungen (130) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Rechteck[3])

---

[1]) Man kann diese Bedingung fallen lassen, wenn man mehrblättrige Felder nach Art einer Riemann'schen Fläche einführt. Der Beweis ergibt sich leicht aus dem folgenden Hilfssatz: *Jede Kurve der Klasse C'*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$$

läßt sich in eine endliche Anzahl von Bogen ohne mehrfache Punkte zerlegen.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes und der Stetigkeitssätze zeigt man nämlich, daß man stets eine positive Größe l bestimmen kann, so daß

$$(x(t') - x(t''))^2 + (y(t') - y(t''))^2 \neq 0$$

für je zwei Werte t', t'' des Intervalls $[t_1 t_2]$, für welche $|t' - t''| < l$.

[2]) Wegen der Definition der Größen T_1, T_2, siehe § 27, d) unter B).

[3]) Für manche Anwendungen ist es nötig, das Rechteck etwas allgemeiner in der Form

$$t_1 - h_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 + h_2, \quad a_0 - k_1 \overline{\gtrless} a \overline{\gtrless} a_0 + k_2$$

anzunehmen.

$$\mathfrak{A}: \qquad t_1 - h \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2 + h, \qquad |a - a_0| \overline{\overline{<}} k$$

in der t, a-Ebene und dessen Bild $\mathcal{S}$ in der x, y-Ebene definieren, und daß gleichzeitig

$$\Delta(t, a) \neq 0 \tag{133}$$

im ganzen Bereich $\mathfrak{A}$.

Wir nennen dann wieder den Bereich $\mathcal{S}$ *ein den Bogen* $\mathfrak{E}_0$ *umgebendes Feld*, gebildet von den Extremalen der Schar (130). Nach § 22, c) und d) liegt der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ganz im Innern von $\mathcal{S}$, so daß also der Bereich $\mathcal{S}$ im Sinn von § 25, d) eine „Umgebung" des Bogens $\mathfrak{E}_0$ bildet.[1])

Ferner sind im Bereich $\mathfrak{A}$ die Ungleichungen (77) erfüllt und das Feld $\mathcal{S}$ liegt ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$, da wegen (132) das Rechteck $\mathfrak{A}$ ganz im Bereich (76) enthalten ist.

Wo es nötig wird, die die Ausdehnung des Feldes bestimmenden Größen h, k in die Bezeichnung aufzunehmen, schreiben wir $\mathfrak{A}_{h,k}$ und $\mathcal{S}_{h,k}$ für $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{S}$.

Durch die ein-eindeutige Beziehung (130) zwischen den beiden Bereichen $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{S}$ werden t und a für den ganzen Bereich $\mathcal{S}$ als eindeutige Funktionen von x und y definiert. Wir bezeichnen dieselben mit

$$t = \mathfrak{t}(x, y), \qquad a = \mathfrak{a}(x, y),$$

so daß also, identisch in $\mathcal{S}$,

$$\varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{a}) \equiv x, \qquad \psi(\mathfrak{t}, \mathfrak{a}) \equiv y, \tag{134}$$

und umgekehrt

$$\mathfrak{t}(\varphi, \psi) \equiv t, \qquad \mathfrak{a}(\varphi, \psi) \equiv a, \tag{134a}$$

identisch in $\mathfrak{A}$.

Es gelten dann in $\mathcal{S}$ die Ungleichungen:

$$t_1 - h \overline{\overline{<}} \mathfrak{t}(x, y) \overline{\overline{<}} t_2 + h, \qquad |\mathfrak{a}(x, y) - a_0| \overline{\overline{<}} k. \tag{135}$$

Die inversen Funktionen $\mathfrak{t}(x, y)$, $\mathfrak{a}(x, y)$ sind nach § 22, d) im Bereich $\mathcal{S}$ (mindestens) von der Klasse C'. Ihre partiellen Ableitungen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= (\varphi_t)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x} + (\varphi_a)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}, & 0 &= (\varphi_t)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial y} + (\varphi_a)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}, \\ 0 &= (\psi_t)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x} + (\psi_a)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}, & 1 &= (\psi_t)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial y} + (\psi_a)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{136}$$

---

[1]) Man kann auch hier, ebenso wie in § 16, a), den Satz von SCHÖNFLIESS (A VII 2) anwenden, mit demselben Resultat wie dort.

wobei die Klammern andeuten, daß die Argumente von φ_t, φ_a usw. die Funktionen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}$ sind.

Durch jeden Punkt $P(x, y)$ des Feldes geht eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_a$ der Schar (130), für welche der Parameter a der Bedingung $|a - a_0| \leqq k$ genügt, während gleichzeitig der den Punkt P liefernde Wert von t der Ungleichung $t_1 - h \leqq t \leqq t_2 + h$ genügt. Diese Extremale $\mathfrak{E}_a$ hat im Punkt P eine ganz bestimmte positive Tangente; die Richtungskosinus p, q derselben sind daher im Bereich $\mathcal{S}$ eindeutig definierte Funktionen von x und y, die wir mit $p(x, y)$, $q(x, y)$ bezeichnen. Ihre expliziten Ausdrücke sind nach (4)

$$p(x, y) = \frac{(\varphi_t)}{\sqrt{(\varphi_t)^2 + (\psi_t)^2}}, \qquad q(x, y) = \frac{(\psi_t)}{\sqrt{(\varphi_t)^2 + (\psi_t)^2}}. \tag{137}$$

Nach den über φ und ψ gemachten Voraussetzungen sind die Funktionen $p(x, y)$, $q(x, y)$ im Bereich $\mathcal{S}$ von der Klasse C'.

b) **Definition des Feldintegrals:**

Wir nehmen jetzt auf der Fortsetzung des Bogens $\mathfrak{E}_0$ über P_1 hinaus einen Punkt $P_0(t = t_0)$ an, derart daß

$$T_1 < t_0 < t_1 - h$$

und ziehen durch P_0 eine Kurve $\mathfrak{K}_0$, die wir uns folgendermaßen herstellen:

Es sei $\chi_0(a)$ eine im Intervall $[a_0 - k, a_0 + k]$ eindeutig definierte Funktion von a von der Klasse C', welche der Anfangsbedingung

$$\chi_0(a_0) = t_0 \tag{138}$$

genügt. Durch Verkleinerung von k können wir dann stets erreichen, daß

$$T_1 < \chi_0(a) < t_1 - h \tag{139}$$

im ganzen Intervall $[a_0 - k, a_0 + k]$.

Setzen wir dann

$$\varphi(\chi_0(a), a) = \tilde{x}_0(a), \qquad \psi(\chi_0(a), a) = \tilde{y}_0(a), \tag{140}$$

so sind die Funktionen $\tilde{x}_0(a)$, $\tilde{y}_0(a)$ von der Klasse C' in $[a_0 - k, a_0 + k]$, und die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_0: \qquad x = \tilde{x}_0(a), \qquad y = \tilde{y}_0(a)$$

definieren eine Kurve, welche durch den Punkt P_0 geht.

Die Kurve $\mathfrak{K}_0$ kann auch in einen Punkt ausarten, wenn es sich nämlich trifft, daß die durch die Gleichungen (140) definierten Funktionen $\tilde{x}_0(a), \tilde{y}_0(a)$ sich auf Konstante reduzieren, die dann mit den Koordinaten des Punktes P_0,

$$x_0 = \tilde{x}_0(a_0), \qquad y_0 = \tilde{y}_0(a_0)$$

identisch sein müssen. Natürlich kann dies nur dann eintreten, wenn alle Extremalen der Schar (130) durch den Punkt P_0 gehen; in diesem Fall ist die Funktion $\chi_0(a)$ mit der in § 27, d) unter E) ebenso bezeichneten Funktion identisch.

Jetzt sei $P_3(x_3, y_3)$ irgend ein Punkt des Feldes $\mathcal{S}$; durch ihn geht eine und nur eine Extremale des Feldes

$$\mathfrak{E}_3\colon \quad x = \varphi(t, a_3), \quad y = \psi(t, a_3),$$

wo

$$a_3 = \mathfrak{a}(x_3, y_3).$$

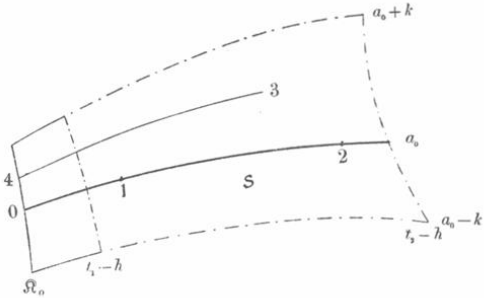

Fig. 39.

Dem Punkt P_3 möge auf $\mathfrak{E}_3$ der Wert $t = t_3$ entsprechen. Aus (140) folgt, daß die Extremale $\mathfrak{E}_3$ die Kurve $\mathfrak{K}_0$ in demjenigen Punkt P_4 schneidet, der auf der Kurve $\mathfrak{E}_3$ durch den Wert $t = \chi_0(a_3)$, auf der Kurve $\mathfrak{K}_0$ durch den Wert $a = a_3$ geliefert wird. Da $t_3 \geqq t_1 - h$, so ist nach (139)

$$t_3 > \chi_0(a_3).$$

Wir betrachten jetzt unser Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

genommen entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_3$ vom Punkt P_4 bis zum Punkt P_3. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\chi_0(a_3) = t^0,$$

und machen von der Abkürzung (83) Gebrauch, so ist der Wert des Integrals[1])

[1]) Dies ist nur richtig, weil $t_3 > t^0$. Wäre $t^0 > t_3$, so müßte man zuerst auf dem Bogen $P_4 P_3$ eine den Sinn umkehrende Transformation $t = -\tau$ ausführen, vgl. § 25, b).

$$J_{\mathfrak{E}_3}(P_4 P_3) = \int_{t^0}^{t_3} \mathfrak{F}(t, a_3)\, dt \equiv u(t_3, a_3). \tag{141}$$

Derselbe ist zunächst als Funktion von t_3, a_3 gegeben; da er jedoch durch die Lage des Punktes P_3 eindeutig bestimmt ist, so ist er zugleich eine im Felde $\mathcal{S}$ eindeutig definierte Funktion von x_3, y_3, die wir mit $W(x_3, y_3)$ bezeichnen und *das zum Feld $\mathcal{S}$ gehörige Feldintegral, gerechnet von der Kurve $\mathfrak{K}_0$ aus,* nennen.

Das Feldintegral ist also explizite gegeben durch die Gleichung

$$W(x_3, y_3) = u(\mathfrak{t}(x_3, y_3), \mathfrak{a}(x_3, y_3)). \tag{142}$$

c) **Die partiellen Ableitungen des Feldintegrals:**[1])

Es sollen nunmehr die partiellen Ableitungen der Funktion $W(x_3, y_3)$ nach x_3, y_3 berechnet werden; dabei lassen wir jedoch der einfacheren Schreibweise wegen den Index 3 bei den Größen x_3, y_3, t_3, a_3 weg.

Aus (142) folgt zunächst

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}, \tag{143}$$

wobei wir wieder durch Einklammern andeuten, daß nach der Differentiation t, a durch $\mathfrak{t}(x, y)$, $\mathfrak{a}(x, y)$ zu ersetzen sind.

Weiter ergibt sich aus (141) nach den Regeln für die Differentiation eines bestimmten Integrals nach den Grenzen und nach einem Parameter

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{F}(t, a), \tag{144}$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \int_{t^0}^{t} [\mathfrak{F}_x \varphi_a + \mathfrak{F}_y \psi_a + \mathfrak{F}_{x'} \varphi_{ta} + \mathfrak{F}_{y'} \psi_{ta}]\, dt - \mathfrak{F}(t^0, a)\frac{dt^0}{da},$$

wobei durchweg von der Abkürzung (83) und (83a) Gebrauch gemacht ist.

Beachtet man jetzt, daß

$$\varphi_{ta} = \varphi_{at}, \qquad \psi_{ta} = \psi_{at},$$

und wendet auf das dritte und vierte Glied unter dem Integral die Lagrange'sche partielle Integration an, so kommt

[1]) Nach Kneser, *Lehrbuch*, §§ 14, 15, 20.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a)\Big|^{t} - \left(\mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a + \mathfrak{F}\frac{dt}{da}\right)\Big|^{t=t^0}$$
$$+\int_{t^0}^{t}\left[\left(\mathfrak{F}_x - \frac{d}{dt}\mathfrak{F}_{x'}\right)\varphi_a + \left(\mathfrak{F}_y - \frac{d}{dt}\mathfrak{F}_{y'}\right)\psi_a\right]dt.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{F}_x - \frac{d}{dt}\mathfrak{F}_{x'} = 0, \qquad \mathfrak{F}_y - \frac{d}{dt}\mathfrak{F}_{y'} = 0,$$

da die Kurve $\mathfrak{E}_3$ eine Extremale ist. Wenn man noch beachtet, daß wegen (10)

$$\mathfrak{F}(t, a) = \varphi_t(t, a)\mathfrak{F}_{x'}(t, a) + \psi_t(t, a)\mathfrak{F}_{y'}(t, a),$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t, a)\varphi_a(t, a) + \mathfrak{F}_{y'}(t, a)\psi_a(t, a)$$
$$-\left[\mathfrak{F}_{x'}(t^0, a)\left(\varphi_a(t^0, a) + \varphi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da}\right) + \mathfrak{F}_{y'}(t^0, a)\left(\psi_a(t^0, a) + \psi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da}\right)\right]. \tag{145}$$

Wir führen die Rechnung zunächst für den schon oben erwähnten speziellen Fall weiter, wo die Extremalen der Schar (130) alle durch den Punkt P_0 gehen und die Kurve $\mathfrak{K}_0$ auf den Punkt P_0 zusammenschrumpft. Das Feldintegral ist dann einfach das Integral J vom Punkt P_0 nach dem Punkt P_3 entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_3$. In diesem Fall gelten für die Schar (130) die Gleichungen (81), und daher reduziert sich der Ausdruck für $\partial u/\partial a$ auf:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \mathfrak{F}_{x'}(t, a)\varphi_a(t, a) + \mathfrak{F}_{y'}(t, a)\psi_a(t, a). \tag{146}$$

Allgemeiner tritt dieselbe Vereinfachung allemal dann (und nur dann) ein, wenn die Funktion $t^0 = \chi_0(a)$ der Differentialgleichung

$$\mathfrak{F}_{x'}(t^0, a)\left(\varphi_a(t^0, a) + \varphi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da}\right)$$
$$+ \mathfrak{F}_{y'}(t^0, a)\left(\psi_a(t^0, a) + \psi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da}\right) = 0 \tag{147}$$

genügt. Da nach (140)

$$\varphi_a(t^0, a) + \varphi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da} = \tilde{x}_0'(a), \qquad \psi_a(t^0, a) + \psi_t(t^0, a)\frac{dt^0}{da} = \tilde{y}'_0(a),$$

so läßt sich die Bedingung (147) auch schreiben

$$\mathfrak{F}_{x'}(t^0, a)\tilde{x}_0'(a) + \mathfrak{F}_{y'}(t^0, a)\tilde{y}_0'(a) = 0, \tag{147a}$$

oder auch in etwas anderer Bezeichnungsweise

$$F_{x'}(x, y, x', y')\tilde{x}_0' + F_{y'}(x, y, x', y')\tilde{y}_0'\ {}^4 = 0 \tag{147b}$$

Die Bedingung (147b) drückt aber, wie wir bei der Behandlung des Problems mit variabeln Endpunkten sehen werden, für den Fall der Parameterdarstellung aus, daß die Extremale $\mathfrak{E}_3$ im Punkt P_4 von der Kurve $\mathfrak{K}_0$ *transversal*[1]) geschnitten wird; ist diese Bedingung also für jeden Punkt der Kurve $\mathfrak{K}_0$ erfüllt, was eben durch das Bestehen der Differentialgleichung (147) ausgedrückt wird, so ist die Kurve $\mathfrak{K}_0$, in der schon früher benutzten Terminologie,[2]) eine *Transversale der Extremalenschar* (130).

In dem speziellen Fall einer Extremalenschar durch einen festen Punkt P_0 kann der Punkt P_0 als eine degenerierte Transversale betrachtet werden, da alsdann die Bedingung (147a) stets erfüllt ist.

In den Ausdrücken (144) und (146) für $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial a$ hat man nun schließlich $\mathfrak{t}, \mathfrak{a}$ statt t, a einzusetzen und die erhaltenen Werte in (143) einzuführen. Macht man dabei von den Gleichungen (136) Gebrauch, so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \mathfrak{F}_{x'}(\mathfrak{t}, \mathfrak{a}), \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = \mathfrak{F}_{y'}(\mathfrak{t}, \mathfrak{a}).$$

Erinnert man sich jetzt der Identitäten (134), führt die durch (137) definierten Richtungskosinus p, q ein und benutzt die Homogeneitätseigenschaft (13) der Funktionen $F_{x'}$, $F_{y'}$, so erhält man den Fundamentalsatz:[3])

Wird das Feldintegral $W(x, y)$ von einer Transversalen der das Feld bildenden Extremalenschar aus gerechnet, so haben die partiellen Ableitungen desselben folgende einfache Werte:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = F_{x'}(x, y, p, q), \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = F_{y'}(x, y, p, q), \tag{148}$$

wobei $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ die Richtungskosinus der positiven Tangente der durch den Punkt (x, y) gehenden Feldextremalen im Punkt (x, y) bezeichnen.

Wir werden die Formeln (148) die „*Hamilton'schen Formeln*" nennen, da sie in allgemeineren[4]) zuerst von HAMILTON entdeckten Formeln enthalten sind.

Es wirft sich hier die Frage auf, ob man durch den Punkt P_0 stets eine Transversale der Schar (130) ziehen kann, d. h. ob die

---

[1]) Vgl. § 7, b) und § 36, a). [2]) Vgl. § 20, a).

[3]) In dieser Form zuerst von KNESER gegeben, *Lehrbuch*, pp. 47, 69. Die Formeln entsprechen beim x-Problem den zuerst von BELTRAMI gegebenen Formeln (41) des dritten Kapitels.

[4]) Vgl. § 37, b).

Differentialgleichung (147) stets ein Integral: $t^0 = \chi_0(a)$ der Klasse C' besitzt, welches der Anfangsbedingung (138) genügt. Schreibt man die Differentialgleichung (147) in der nach (10) damit äquivalenten Form

$$\mathfrak{F}(t^0, a)\frac{dt^0}{da} + \mathfrak{F}_{x'}(t^0, a)\varphi_a(t^0, a) + \mathfrak{F}_{y'}(t^0, a)\psi_a(t^0, a) = 0,$$

so erkennt man auf Grund des Cauchy'schen Existenztheorems, daß ein solches Integral stets existiert, wofern

$$\mathfrak{F}(t_0, a_0) \neq 0. \tag{149}$$

Wenn die Kurve $\mathfrak{K}_0$ keine Transversale ist, so fallen die Formeln für die partiellen Ableitungen von $W(x, y)$ etwas komplizierter aus, da jetzt in Gleichung (145) das auf $t = t^0$ bezügliche Glied nicht verschwindet. Dasselbe ist eine eindeutige Funktion von a; das unbestimmte Integral[1]) derselben bezeichnen wir mit $\zeta(a)$, so daß also

$$\zeta'(a) = \mathfrak{F}\frac{dt}{da} + \mathfrak{F}_{x'}\varphi_a + \mathfrak{F}_{y'}\psi_a \Big|^{t=t^0}.$$

Dann hat man in den beiden Formeln (148) rechts noch das Zusatzglied

$$-\zeta'(\mathfrak{a})\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}, \quad \text{resp.} \quad -\zeta'(\mathfrak{a})\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}$$

hinzuzufügen. Setzt man daher

$$\zeta(\mathfrak{a}) = \omega(x, y),$$

so lauten die Formeln für *die partiellen Ableitungen des Feldintegrals, gerechnet von einer beliebigen Kurve* $\mathfrak{K}_0$ *aus,*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W(x, y)}{\partial x} &= F_{x'}(x, y, p, q) - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} &= F_{y'}(x, y, p, q) - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{148a}$$

die Funktion $\omega(x, y)$ ist im Feld eindeutig definiert und von der Klasse C'.

Aus den Formeln (148), resp. (148a), ergibt sich unmittelbar das *Hilbert'sche invariante Integral*[2]) *für den Fall der Parameterdarstellung:* Zieht man nämlich zwischen zwei beliebigen Punkten P_3, P_4 des

[1]) Vgl. dazu Kneser, *Lehrbuch,* § 20.

[2]) Vgl. § 17, a). Einen direkten Beweis des Unabhängigkeitssatzes für den Fall der Parameterdarstellung, der sich mehr an den Gedankengang von Hilbert's ursprünglichem Beweis anschließt, gibt Bliss, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. V (1904), p. 121.

Feldes irgend eine ganz in $\mathcal{S}$ verlaufende Kurve $\mathfrak{C}$, so ist der Wert des Linienintegrals

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} [F_{x'}(x, y, p, q)\, dx + F_{y'}(x, y, p, q)\, dy], \tag{150}$$

genommen entlang der Kurve $\mathfrak{C}$, vom Integrationsweg unabhängig und nur von der Lage der beiden Endpunkte abhängig, wofern die Größen p, q dieselbe Bedeutung haben wie in den Formeln (148) und (148a). Denn aus letzteren folgt, daß

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} d\, W(x, y) = W(x_4, y_4) - W(x_3, y_3), \tag{151}$$

falls das Feldintegral von einer Transversalen aus gerechnet wird, und

$$J^*_{\mathfrak{C}} = W(x_4, y_4) + \omega(x_4, y_4) - W(x_3, y_3) - \omega(x_3, y_3)$$

für den Fall einer beliebigen Kurve $\mathfrak{K}_0$.

Aus (148a) folgt weiter, daß *die Funktionen* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial y} F_{x'}(x, y, p, q) = \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}(x, y, p, q) \tag{152}$$

genügen, entsprechend der partiellen Differentialgleichung (19) von § 17.

Endlich schließt man[1]) aus (148) und (147a):

Wird das Feldintegral $W(x, y)$ *von einer Transversalen aus gerechnet, so ist*

$$W(x, y) = \text{konst.}$$

entlang jeder Transversalen der Extremalenschar (130).

Ist nämlich[2])

$$x = \varphi(\chi(a), a) \equiv \tilde{x}(a), \qquad y = \psi(\chi(a), a) \equiv \tilde{y}(a)$$

eine beliebige Transversale des Feldes, so daß also, identisch in a,

$$\tilde{x}'(a)\mathfrak{F}_{x'}(t, a) + \tilde{y}'(a)\mathfrak{F}_{y'}(t, a)\Big|^{t=\chi(a)} = 0,$$

so folgt aus (148), daß

$$\frac{d}{da} W(\tilde{x}(a), \tilde{y}(a)) = 0.$$

---

[1]) Vgl. § 20, a) und § 44, b).

[2]) Vgl. das oben über die Kurve $\mathfrak{K}_0$ gesagte, insbesondere die Gleichung (147a).

Unter derselben Voraussetzung erhält man die partielle Differentialgleichung[1]) für die Funktion $W(x, y)$ durch Elimination von p, q aus den beiden Gleichungen (148) und der Gleichung:

$$p^2 + q^2 = 1 .$$

§ 32. Der Weierstraß'sche Fundamentalsatz und die hinreichenden Bedingungen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Weierstraß'schen Fundamentalsatz[2]) über die Darstellung der totalen Variation ΔJ durch die $\mathcal{E}$-Funktion auch für den Fall der Parameterdarstellung zu beweisen und daraus hinreichende Bedingungen für ein Extremum abzuleiten.

a) Die Weierstraß'sche Konstruktion:

Wir wollen uns hier zum Beweis des Weierstraß'schen Satzes der sogenannten „Weierstraß'schen Konstruktion"[3]) bedienen. Zu diesem Zweck ziehen wir — unter Festhaltung der Voraussetzungen und Bezeichnungen des vorigen Paragraphen — vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2 irgend eine Kurve der Klasse C':

$$\overline{\mathfrak{C}}: \quad x = \bar{x}(s), \quad y = \bar{y}(s), \qquad s_1 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} s_2$$

welche ganz im Feld $\mathcal{S}$ gelegen ist. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber die Bogenlänge s, gemessen von einem festen Punkt der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ als Parameter.

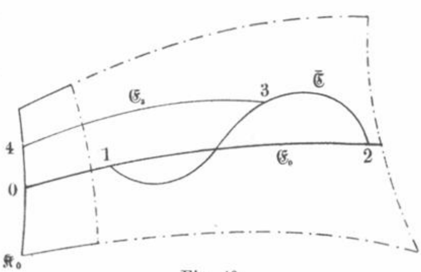

Fig. 40.

Durch einen beliebigen Punkt $P_3(x_3, y_3)$ von $\overline{\mathfrak{C}}$ geht dann eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_3$ des Feldes; dieselbe schneide die Kurve $\mathfrak{K}_0$ im Punkt P_4 (vgl. § 31, b)).

[1]) Vgl. § 20, b). [2]) Vgl. § 17, c).

[3]) Weierstrass selbst hat die nach ihm benannte Konstruktion zuerst 1879 gegeben, und zwar für die Extremalenschar durch den Punkt P_1. Dabei ergeben sich jedoch gewisse Schwierigkeiten, da man es mit einem „uneigentlichen" Feld zu tun hat (vgl. p. 104, Fußnote [1]) und § 33, a). Um dieselben zu vermeiden, hat Zermelo (*Dissertation*, pp. 87, 88) statt dessen die Extremalenschar durch einen jenseits von P_1 gelegenen Punkt P_0 eingeführt. Die im Text gegebene Verallgemeinerung auf ein beliebiges Feld rührt von Kneser her (*Lehrbuch*, §§ 14, 17).

Wir betrachten nunmehr das Integral J, genommen vom Punkt P_4 entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_3$ bis zum Punkt P_3 und vom Punkt P_3 entlang der Kurve $\mathfrak{C}$ bis zum Punkt P_2. Der Wert dieses Integrals ist eine eindeutige Funktion des Parameters[1]) s des Punktes P_3 auf der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, die wir mit $S(s)$ bezeichnen, so daß also in der schon mehrfach benutzten Bezeichnungsweise

$$S(s) = J_{43} + \bar{J}_{32}, \tag{153}$$

wobei durch Überstreichen wieder Integration entlang der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ angedeutet wird.

Wir lassen jetzt den Punkt P_3 die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von P_1 bis P_2 durchlaufen. Fällt P_3 mit P_1 zusammen, so fällt $\mathfrak{E}_3$ mit dem Bogen $P_0 P_1$ der Extremalen $\mathfrak{E}_0^*$ zusammen und es kommt

$$S(s_1) = J_{01} + \bar{J}_{12}.$$

Fällt dagegen der Punkt P_3 mit dem Punkt P_2 zusammen, so erhalten wir[2])

$$S(s_2) = J_{02} = J_{01} + J_{12}.$$

Also ergibt sich für die totale Variation

$$\Delta J = \bar{J}_{12} - J_{12} \equiv J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0}$$

der Ausdruck

$$\Delta J = -[S(s_2) - S(s_1)]. \tag{154}$$

Da die Funktion $S(s)$, wie wir sofort sehen werden, im Intervall $[s_1 s_2]$ eine stetige Ableitung $S'(s)$ besitzt, so können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\Delta J = -\int_{s_1}^{s_2} S'(s)\, ds. \tag{154a}$$

Die Berechnung der Ableitung $S'(s)$ bietet nach den Resultaten von § 31, b) keinerlei Schwierigkeiten. Denn einerseits ist nach der Definition des Feldintegrals

$$J_{43} = W(x_3, y_3) = W(\bar{x}(s), \bar{y}(s)),$$

also

$$\frac{d J_{43}}{ds} = \frac{\partial W}{\partial x} \bar{x}' + \frac{\partial W}{\partial y} \bar{y}',$$

---

[1]) Der einfacheren Schreibweise halber schreiben wir s statt s_3.

[2]) Streng genommen ist $S(s_2)$ nicht definiert, und die obige Gleichung ist durch einen (leicht ausführbaren) Grenzübergang zu erschließen, wobei $S(s_2)$ durch den Grenzwert $S(s_2 - 0)$ definiert wird.

also nach (148), wenn wir der Einfachheit halber zunächst annehmen, daß die Kurve $\mathfrak{K}_0$ eine Transversale[1]) ist,

$$\frac{dJ_{43}}{ds} = F_{x'}(x_3, y_3, p_3, q_3)\,\overline{p}_3 + F_{y'}(x_3, y_3, p_3, q_3)\,\overline{q}_3,$$

indem wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} p_3 &= p(x_3, y_3), & q_3 &= q(x_3, y_3) \\ \overline{p}_3 &= \overline{x}'(s), & \overline{q}_3 &= \overline{y}'(s) \end{aligned}$$

schreiben.

Andererseits ist

$$\bar{J}_{32} = \int_s^{s_2} F(\overline{x}(s), \overline{y}(s), \overline{x}'(s), \overline{y}'(s))\,ds,$$

also

$$\frac{d\bar{J}_{32}}{ds} = -F(x_3, y_3, \overline{p}_3, \overline{q}_3).$$

Indem wir die beiden Resultate kombinieren, und uns der Definition (120) der $\mathcal{E}$-Funktion erinnern, erhalten wir daher[2])

$$\frac{dS(s)}{ds} = -\mathcal{E}(x_3, y_3;\ p_3, q_3;\ \overline{p}_3, \overline{q}_3), \tag{155}$$

und somit nach (154a)

$$\Delta J = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{E}(x_3, y_3; p_3, q_3; \overline{p}_3, \overline{q}_3)\,ds. \tag{156}$$

Ist die Kurve $\mathfrak{K}_0$ keine Transversale, so ist nach (148a) dem obigen Ausdruck für dJ_{43}/ds noch das Glied

$$-\frac{\partial\omega}{\partial x}\overline{x}' - \frac{\partial\omega}{\partial y}\overline{y}' = -\frac{d}{ds}\,\omega(\overline{x}(s), \overline{y}(s)) \tag{157}$$

hinzuzufügen. Das Integral dieses Zusatzgliedes nach s zwischen den Grenzen s_1 und s_2, nämlich

$$\omega(x_1, y_1) - \omega(x_2, y_2),$$

ist aber gleich Null. Denn nach der Definition der Funktion $\omega(x, y)$ ist

---

[1]) Dabei soll stets der Fall mit inbegriffen sein, wo die Kurve $\mathfrak{K}_0$ in den Punkt P_0 degeneriert.

[2]) Weierstrass beweist dieses Resultat, indem er die Differenzenquotienten $\frac{S(s \pm h) - S(s)}{\pm h}$ berechnet und dann zur Grenze übergeht; vgl. Bolza, *Lectures,* § 20, b) und Hancock, *Lectures,* Art. 161.

$$\omega(x_1, y_1) = \zeta(\mathfrak{a}(x_1, y_1)), \qquad \omega(x_2, y_2) = \zeta(\mathfrak{a}(x_2, y_2)),$$

und da die beiden Punkte P_1 und P_2 auf derselben Extremalen $(a = a_0)$ des Feldes liegen, so ist

$$\mathfrak{a}(x_1, y_1) = a_0, \qquad \mathfrak{a}(x_2, y_2) = a_0.$$

Somit gilt die Gleichung (156) auch, wenn $\mathfrak{K}_0$ keine Transversale ist.

Dasselbe Resultat bleibt auch noch bestehen, wenn die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ eine endliche Anzahl von „*Ecken*" besitzt, also nach unserer Terminologie[1]) irgend eine „gewöhnliche Kurve" ist. Denn zunächst folgt aus den expliziten Ausdrücken[2]) für J_{43} und $\bar{J}_{32}$ nach A III 4 und A V 4, daß die Funktion $S(s)$ auch in diesem Fall im Intervall $[s_1 s_2]$ stetig ist. Ferner behält auch die Gleichung (155) — eventuell mit dem Zusatzglied (157) — ihre Gültigkeit, wofern man auf beiden Seiten die Differentialquotienten nach s, (zu denen auch $\bar{p}_3, \bar{q}_3$ gehören), durch die vorderen, resp. hinteren Derivierten ersetzt, da die bei der Ableitung von (155) benutzten Differentiationsregeln auch für rechtsseitige und linksseitige Differentiation gelten. Hieraus folgt nach A V 4 durch Integration die Gleichung (156).

Wir haben somit den *Weierstraß'schen Fundamentalsatz* für den Fall der Parameterdarstellung bewiesen:

Wenn der Extremalenbogen $\mathfrak{C}_0$ sich mit einem Feld umgeben läßt, so läßt sich für jede ganz im Feld gelegene, die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindende gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ die totale Variation

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0}$$

durch die $\mathcal{E}$-Funktion ausdrücken in der Form

$$\Delta J = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}; p, q; \bar{p}, \bar{q})\, ds. \tag{156}$$

Dabei ist $(\bar{x}, \bar{y})$ ein Punkt der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$; $\bar{p}, \bar{q}$ sind die Richtungskosinus der positiven Tangente der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ im Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, und p, q sind die Richtungskosinus der positiven Tangente der durch den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ gehenden Extremalen des Feldes im Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$.

Noch einfacher gestaltet sich der Beweis des Weierstraß'schen Satzes nach HILBERT mittels des invarianten Integrals (150). Denn

---

[1]) Vgl. § 25, a).

[2]) Wegen der Bedeutung des Integrals $\bar{J}_{32}$ entlang einer Kurve mit Ecken vgl. p. 197, Fußnote [2]).

da nach der Definition der Funktionen $p(x, y)$, $q(x, y)$ entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$

$$p(x, y) = \frac{\mathring{x}'}{\sqrt{\mathring{x}'^2 + \mathring{y}'^2}}, \qquad q(x, y) = \frac{\mathring{y}'}{\sqrt{\mathring{x}'^2 + \mathring{y}'^2}},$$

so folgt unter Berücksichtigung von (10) und (13), daß entlang $\mathfrak{E}_0$

$$F_{x'}(x, y, p, q)\, dx + F_{y'}(x, y, p, q)\, dy$$

$$= \left(F_{x'}(\mathring{x}, \mathring{y}, \mathring{x}', \mathring{y}')\, \mathring{x}' + F_{y'}(\mathring{x}, \mathring{y}, \mathring{x}', \mathring{y}')\, \mathring{y}'\right) dt = F(\mathring{x}, \mathring{y}, \mathring{x}', \mathring{y}')\, dt.$$

Daher ist

$$J^*_{\mathfrak{E}_0} = J_{\mathfrak{E}_0},$$

woraus sich ganz wie in § 17, c) ein zweiter Beweis des Weierstraßschen Satzes ergibt.

b) **Hinreichende Bedingungen:**

Mit Hilfe des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes ist es nun leicht zu beweisen, daß die vier bisher für ein starkes Minimum des Integrals J als notwendig erkannten Bedingungen — von gewissen Ausnahmefällen[1]) abgesehen — zugleich auch hinreichend sind.

Der bessern Übersicht halber stellen wir noch einmal unsere sämtlichen Voraussetzungen zusammen:

Von der Funktion $F(x, y, x', y')$ wird vorausgesetzt,[2]) daß sie in dem Bereich

$$\mathfrak{T}: \qquad (x, y) \text{ in } \mathfrak{R}, \qquad x'^2 + y'^2 \neq 0,$$

von der Klasse C''' ist und der Homogeneitätsrelation (9) genügt.

---

[1]) Diese Ausnahmefälle, die wir zum Teil später noch betrachten werden, sind:

1. $\mathfrak{E}_0$ hat mehrfache Punkte (vgl. hierzu jedoch die Fußnote auf p. 250) oder Ecken (vgl. §§ 48—50), oder hat Punkte mit der Begrenzung von $\mathfrak{R}$ gemein (vgl. §§ 52, 53).
2. $F_1 = 0$ in gewissen Punkten von $\mathfrak{E}_0$.
3. $t_2 = t_1'$ (vgl. § 47).
4. $\mathcal{E} = 0$ in Punkten von $\mathfrak{E}_0$ für gewisse Richtungen $\tilde{p}, \tilde{q}$, die nicht mit p, q zusammenfallen.

Streng genommen könnte man erst dann von „notwendigen und hinreichenden" Bedingungen sprechen, wenn auch alle diese Ausnahmefälle erledigt wären.

[2]) Vgl. § 25, b).

Von dem Bogen

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x = \mathring{x}(t), \qquad y = \mathring{y}(t), \qquad t_1 \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}}\, t_2,$$

wird vorausgesetzt:

1. Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ist ein Extremalenbogen der Klasse[1]) C', ohne mehrfache Punkte, welcher vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2 geht und ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt. (I')

2. Es ist

$$F_1(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t), \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t)) > 0 \tag{II'}$$

für: $t_1 \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}}\, t_2$.

3. Der Bogen $\mathfrak{E}_0$ enthält den zu P_1 konjugierten Punkt P_1' nicht:

$$t_2 < t_1'. \tag{III'}$$

4. Es ist

$$\mathcal{E}(\mathring{x}(t), \mathring{y}(t); \mathring{x}'(t), \mathring{y}'(t); \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) > 0 \tag{IV'}$$

für: $t_1 \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}}\, t_2$ und für jede Richtung $\tilde{\theta}$, welche von der Richtung der positiven Tangente an $\mathfrak{E}_0$ im Punkt t verschieden ist.

Es soll gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen der Bogen $\mathfrak{E}_0$ wirklich ein starkes Minimum für das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

in dem in § 25, d) definierten Sinn liefert.

Aus den Voraussetzungen (I'), (II'), (III') folgt zunächst, daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ mit einem Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ umgeben werden kann. Denn wählt man einen Punkt $P_0(t_0)$ auf der Fortsetzung von $\mathfrak{E}_0$ über den Punkt P_1 hinaus hinreichend nahe bei P_1, so besitzt die Extremalenschar durch den Punkt P_0:

$$x = \varphi(t, a), \qquad y = \psi(t, a)$$

die in § 27, d) angegebenen Eigenschaften, die zugehörige Funktionaldeterminante $\Delta(t, a_0) = c\,\Theta(t, t_0)$ genügt nach § 29, b) der Jacobischen Differentialgleichung (102) und verschwindet für $t = t_0$. Aus der Bedingung (III') folgt dann mittels des Sturm'schen Satzes genau wie in § 12, a), daß

$$\Delta(t, a_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad t_1 \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}}\, t_2,$$

falls der Punkt P_0 hinreichend nahe bei P_1 angenommen wird. Hieraus folgt aber nach § 31, a), daß die Extremalenschar durch den Punkt P_0 in der Tat ein Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ liefert.

---

[1]) Hieraus zusammen mit (II') folgt, daß $\mathfrak{E}_0$ allemal von der Klasse C''' ist, vgl. § 27, a).

Ziehen wir jetzt im Innern dieses Feldes irgend eine, von $\mathfrak{C}_0$ verschiedene, „gewöhnliche" Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von P_1 nach P_2, so gilt für die vollständige Variation: $\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0}$ der Weierstraß'sche Satz (156).

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß aus den gemachten Voraussetzungen weiter folgt, daß der Integrand von (156) nie negativ sein kann, vorausgesetzt, daß die die Ausdehnung des Feldes $\mathcal{S}_{h,k}$ bestimmenden Größen h, k hinreichend klein gewählt worden sind.

Zu diesem Zweck führen wir mit ZERMELO[1]) neben der $\mathcal{E}$-Funktion eine Funktion $\mathcal{E}_1$ ein durch folgende Definition:

$$\mathcal{E}_1(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathcal{E}(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q})}{1-(p\tilde{p}+q\tilde{q})}, & \text{wenn } 1-(p\tilde{p}+q\tilde{q}) \neq 0, \\ F_1(x, y, p, q), & \text{wenn } 1-(p\tilde{p}+q\tilde{q}) = 0, \quad \text{d. h. } \tilde{p}=p, \ \tilde{q}=q; \end{cases} \tag{158}$$

wobei $p, q; \tilde{p}, \tilde{q}$ durch (122) definiert sind.

Die Funktion $\mathcal{E}_1$ ist dann nach (125) und (126) eine stetige Funktion ihrer sechs Argumente in dem durch die Bedingungen

$$(x, y) \text{ in } \mathfrak{R}, \qquad p^2+q^2=1, \qquad \tilde{p}^2+\tilde{q}^2=1$$

charakterisierten Bereich.

Jetzt sei (x, y) irgend ein Punkt des Feldes $\mathcal{S}_{h,k}$, und (t, a) der entsprechende Punkt der t, a-Ebene; ferner seien $p(x, y)$ und $q(x, y)$ wieder die Richtungskosinus der positiven Tangente der durch den Punkt (x, y) gehenden Extremalen des Feldes, und $\tilde{\theta}$ sei die Amplitude einer beliebigen Richtung. Dann ist nach (137) und (121)

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_1(x, y; p(x, y), q(x, y); \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) \\ &\qquad = \mathcal{E}_1(\varphi(t, a), \psi(t, a); \varphi_t(t, a), \psi_t(t, a); \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\theta}) \end{aligned}$$

und die auf der rechten Seite stehende Funktion der unabhängigen Variabeln $t, a, \tilde{\theta}$ ist nach dem Satz über zusammengesetzte Funktionen stetig in dem Bereich

$$t_1 - h \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 + h, \qquad |a - a_0| \overline{\gtrless} k, \qquad -\infty < \tilde{\theta} < +\infty. \tag{159}$$

Sie ist ferner nach unseren Voraussetzungen (IV') und (II') positiv in

---

[1]) *Dissertation,* p. 60. Es ist für den folgenden Schluß nötig die Funktion $\mathcal{E}_1$ einzuführen, weil die $\mathcal{E}$-Funktion für $\tilde{\theta} = \theta$ verschwindet.

der ganz im Innern dieses Bereiches gelegenen, beschränkten, abgeschlossenen[1]) Punktmenge

$$t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2, \qquad a = a_0, \qquad 0 \overline{\gtrless} \theta \overline{\gtrless} 2\pi;$$

also lassen sich nach dem erweiterten Vorzeichensatz (§ 21, b)) die beiden positiven Größen h und k so klein annehmen, daß die betrachtete Funktion von t, a, $\tilde{\theta}$ auch noch positiv ist in dem ganzen Bereich (159), wobei man noch von der Periodizität in Beziehung auf $\tilde{\theta}$ Gebrauch zu machen hat. Daraus folgt aber nach (158): Wenn die beiden Größen h und k hinreichend klein gewählt worden sind, und die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ ganz im Bereich $\mathcal{S}_{h,k}$ liegt, so ist der Integrand von (156) positiv in allen Punkten der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, in welchen die Richtung $\bar{p}, \bar{q}$ nicht mit der Richtung p, q zusammenfällt, dagegen gleich Null, wo diese beiden Richtungen zusammenfallen. Es ist also $\Delta J > 0$, außer wenn $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$ entlang der ganzen Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, in welchem Fall $\Delta J = 0$ ist.

Der letztere Fall kann aber nicht eintreten, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{E}_0$ verschieden ist.

Denn[2]) nach (134) ist in jedem Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ von $\overline{\mathfrak{C}}$:

$$\varphi(\mathfrak{t}(\bar{x}, \bar{y}), \mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y})) = \bar{x}, \qquad \psi(\mathfrak{t}(\bar{x}, \bar{y}), \mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y})) = \bar{y}. \tag{160}$$

Differentiieren wir diese Identität nach s so kommt:

$$\begin{aligned} \varphi_t \frac{d\mathfrak{t}}{ds} + \varphi_a \frac{d\mathfrak{a}}{ds} &= \bar{x}' \\ \psi_t \frac{d\mathfrak{t}}{ds} + \psi_a \frac{d\mathfrak{a}}{ds} &= \bar{y}'. \end{aligned} \tag{161}$$

Wäre nun $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$ entlang der ganzen Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, so würde folgen

$$\bar{x}' = m\varphi_t, \qquad \bar{y}' = m\psi_t,$$

wo m eine Funktion von s ist, welche in $[s_1 s_2]$ beständig positiv ist, während die Argumente von φ_t, ψ_t wieder $\mathfrak{t}(\bar{x}, \bar{y})$, $\mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y})$ sind.

---

[1]) Bei der entsprechenden Untersuchung beim x-Problem hat man es, bei der von uns gewählten Formulierung der Aufgabe, mit einem Bereich zu tun, der nicht abgeschlossen ist (da dort die Richtungen $\tilde{\theta} = \pm \frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen sind). Dies ist der Grund, weshalb beim x-Problem die den Bedingungen (I') bis (IV') entsprechenden Bedingungen nicht hinreichend sind. (Vgl. § 18, c) u. § 19).

[2]) Beweis nach Kneser, *Lehrbuch*, p. 80.

Die Gleichungen (161) lassen sich also schreiben:

$$\varphi_t\left(\frac{d\mathfrak{t}}{ds} - m\right) + \varphi_a \frac{d\mathfrak{a}}{ds} = 0$$

$$\psi_t\left(\frac{d\mathfrak{t}}{ds} - m\right) + \psi_a \frac{d\mathfrak{a}}{ds} = 0\,.$$

Nun gehören aber nach (135) die Argumente $\mathfrak{t}(\bar{x}, \bar{y})$, $\mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y})$ von $\varphi_t, \varphi_a, \psi_t, \psi_a$ dem Rechteck $\mathfrak{A}_{h,k}$ an (vgl. § 31, a)), also ist nach (133) die Determinante dieses linearen Systems von Null verschieden, also:

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = m\,, \qquad \frac{d\mathfrak{a}}{ds} = 0\,.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß die Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ entlang der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ konstant ist, und da im Punkt P_1: $\mathfrak{a}(x_1, y_1) = a_0$, so ist $\mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y}) = a_0$ entlang $\overline{\mathfrak{C}}$. Dagegen sagt die erste Gleichung aus, daß die Funktion $\mathfrak{t}(\bar{x}, \bar{y})$ gleichzeitig mit s wächst. Daraus folgt aber nach (160), daß die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{E}_0$ identisch[1]) sein müßte, da ihre Gleichungen aus denen von $\mathfrak{E}_0$ durch eine zulässige Parametertransformation hervorgehen.

Somit ist $\Delta J > 0$, und wir haben das folgende zuerst von Weierstrass (1879) bewiesene Endresultat gewonnen:

Wenn der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (I'), (II'), (III'), (IV') *erfüllt, so liefert er stets ein starkes eigentliches Minimum für das Integral*

$$J = \int F(x, y, x', y')\,dt\,.$$

Zusatz I: Die Bedingung (III') kann auch hier durch die Bedingung ersetzt werden, daß sich der Bogen $\mathfrak{E}_0$ mit einem Feld umgeben läßt.

Zusatz II: Wenn die Bedingung

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \tag{II'$_a$}$$

in jedem Punkt (x, y) von $\mathfrak{E}_0$ und für *jeden Wert von* γ erfüllt ist, so sind (II') und (IV') a fortiori erfüllt, letztere wegen (125).

---

[1]) Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ keine Ecken besitzt; andernfalls hat man in den Ecken die Differentialquotienten durch die vorderen (resp. hinteren) Derivierten zu ersetzen. Das Resultat bleibt aber dasselbe; denn auch dann hat die Funktion $\mathfrak{a}(\bar{x}, \bar{y})$ entlang der ganzen Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ denselben konstanten Wert, da sie stetig ist.

Für ein im Bereich $\mathfrak{R}$ *reguläres*[1]) Problem ist daher die Bedingung (II_a') stets a fortiori erfüllt.

Beispiel[2]) *XIII:*

$$F = G(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Hier ist

$$\mathcal{E}_1(x, y; p, q; \tilde{p}, \tilde{q}) = G(x, y);$$

daher ist die Bedingung (IV') erfüllt, wenn

$$G(x, y) > 0$$

entlang $\mathfrak{E}_0$.

Dies zeigt, daß beim Problem der *Brachistochrone* ein Bogen $P_1 P_2$ der Zykloide (108) wirklich ein Minimum liefert, wenn er keine Spitze enthält (vgl. p. 209, Fußnote [1]) und p. 235).

Beispiel XVI: Die geodätischen Linien. (Siehe pp. 209, 228, 240, 248).

Hier war

$$F_1 = \frac{\mathsf{E}\mathsf{G} - \mathsf{F}^2}{(\sqrt{\mathsf{E}u'^2 + 2\mathsf{F}u'v' + \mathsf{G}v'^2})^3}.$$

Unter den Annahmen, die wir auf p. 209 über die Natur des Flächenstückes $\mathfrak{M}$ gemacht haben, auf welches die geodätischen Linien zu beschränken sind, ist das Problem ein reguläres Problem. Ein Bogen $Q_1 Q_2$ einer geodätischen Linie, welcher keine mehrfachen Punkte und keine Ecken besitzt, und ganz im Innern des Flächenstückes $\mathfrak{M}$ liegt, liefert also allemal wirklich ein Minimum, wenn er den zu Q_1 konjugierten Punkt Q_1' nicht enthält.

c) Nachtrag: Die Bliss'sche Modifikation des Weierstraß'schen Problems.

In einer während der Drucklegung des gegenwärtigen Kapitels erschienenen Arbeit „*A new form of the simplest problem of the calculus of variations*", Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VIII (1907), p. 405, hat Bliss das in diesem Kapitel behandelte Weierstraß'sche Problem in einer modifizierten Form diskutiert, über die hier noch kurz referiert werden soll.

Haben die Buchstaben θ und s dieselbe Bedeutung wie in § 25, a) und setzt man

$$F(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = \mathfrak{F}(x, y, \theta), \tag{162}$$

so läßt sich wegen (9) das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\,dt$$

auch schreiben

$$J = \int_{s_1}^{s_2} \mathfrak{F}(x, y, \theta)\,ds. \tag{163}$$

---

[1]) Vgl. p. 214.

[2]) Wegen mechanischer und optischer Interpretationen dieser Aufgabe siehe die *Übungsaufgaben* Nr. 9 und 18 am Ende dieses Kapitels.

Bliss stellt sich nun die Aufgabe, das Integral J in dieser Form zu einem Extremum zu machen, wobei er noch die Verallgemeinerung eintreten läßt, daß die Funktion $\mathfrak{F}$ in θ nicht periodisch mit der Periode 2π zu sein braucht.

Ersetzt man, wie in § 26, die Funktionen x, y durch $\bar{x} = x + \varepsilon\xi$, $\bar{y} = y + \varepsilon\eta$, wobei θ in $\bar{\theta}$ übergehen möge, so findet man durch Differentiation der Gleichungen

$$\cos\bar{\theta} = \frac{\bar{x}'}{\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}}, \qquad \sin\bar{\theta} = \frac{\bar{y}'}{\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}}$$

nach ε, daß

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varepsilon} = \frac{\bar{x}'\dfrac{\partial\bar{y}'}{\partial\varepsilon} - \bar{y}'\dfrac{\partial\bar{x}'}{\partial\varepsilon}}{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}.$$

Hiernach läßt sich dann die erste und zweite Variation des Integrals (163) berechnen. Setzt man

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{w} &= \xi\sin\theta - \eta\cos\theta = \frac{w}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\\
\mathfrak{F}_1 &= \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_{\theta\theta},\\
\mathfrak{T} &= \mathfrak{F}_x\sin\theta - \mathfrak{F}_y\cos\theta + \mathfrak{F}_{x\theta}\cos\theta + \mathfrak{F}_{y\theta}\sin\theta + \mathfrak{F}_1\frac{d\theta}{ds}\\
\mathfrak{F}_2 &= \mathfrak{T}_x\sin\theta - \mathfrak{T}_y\cos\theta - \mathfrak{F}_1\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

so erhält man im Fall fester Endpunkte

$$\left.\begin{aligned}
\delta J &= \varepsilon\int_{s_1}^{s_2}\mathfrak{w}\,\mathfrak{T}\,ds,\\
\delta^2 J &= \varepsilon^2\int_{s_1}^{s_2}\left[\mathfrak{F}_2\mathfrak{w}^2 + \mathfrak{F}_1\left(\frac{d\mathfrak{w}}{ds}\right)^2\right]ds.
\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Euler'sche Differentialgleichung, die Legendre'sche und die Jacobi'sche Bedingung für das Integral (163). Man kann diese Resultate auch aus den Weierstraß'schen Formeln ableiten, indem man von den Relationen zwischen den partiellen Ableitungen der Funktionen F und $\mathfrak{F}$ Gebrauch macht, die man durch Differentiation der Identität (162) nach x, y, θ erhält. Es ergeben sich dabei folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
F_1(x, y, x', y')\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3 &= \mathfrak{F}_1(x, y, \theta),\\
T(x, y, x', y', x'', y'') &= \mathfrak{T}\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right),\\
\frac{\mathcal{E}(x, y; x', y'; \tilde{x}', \tilde{y}')}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2}} &= \mathfrak{F}(x, y, \tilde{\theta}) - \mathfrak{F}(x, y, \theta)\cos(\tilde{\theta} - \theta)\\
&\quad - \mathfrak{F}_\theta(x, y, \theta)\sin(\tilde{\theta} - \theta),\\
F_2\sqrt{x'^2 + y'^2} &= \mathfrak{F}_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{F}_1 s''}{s'^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{166}$$

Der Vorteil der Bliss'schen Formeln besteht darin, daß in ihnen nur Größen vorkommen, welche bei einer Parametertransformation invariant bleiben. Auch ist die Funktion $\mathfrak{F}_2$ einfacher als die Weierstraß'sche Funktion F_2.

§ 33. Existenz eines Minimums „im Kleinen".

Sind zwei Punkte P_1, P_2 gegeben, so ist es im allgemeinen nicht möglich, a priori zu entscheiden, ob dieselben durch eine Extremale verbunden werden können; es bedarf dazu in jedem einzelnen Fall einer besonderen Untersuchung. Wenn jedoch die beiden Punkte hinreichend nahe beieinander liegen, so kann man sie unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion F stets durch eine Extremale verbinden, und zwar eine solche, welche tatsächlich ein Extremum für das Integral J liefert.

Dieser Satz[1]), der nicht nur an sich, sondern auch wegen seiner zahlreichen Anwendungen von Wichtigkeit ist, soll den Gegenstand des gegenwärtigen Paragraphen bilden.

a) Konstruktion eines Feldes um einen Punkt:

Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz I: Es sei $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$, für welchen die Bedingung

$$F_1(x_1, y_1, \cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0 \tag{167}$$

für jedes γ erfüllt ist. Alsdann lassen sich zwei positive Größen l und R angeben, derart daß sich vom Punkt P_1 nach jedem von P_1 verschiedenen Punkt P_2 im Innern des Kreises mit dem Radius R um den Punkt P_1 eine und nur eine Extremale[2]) ziehen läßt, deren Länge kleiner als l ist.

Dieselbe besitzt keine Doppelpunkte und ist ganz in dem Kreis mit dem Radius $|P_1P_2|$ um den Punkt P_1 enthalten.

Beweis: Aus den gemachten Annahmen folgt zunächst nach § 27, a), daß vom Punkt P_1 nach jeder Richtung eine und nur eine Extremale gezogen werden kann. Die Extremale $\mathfrak{E}_a$, deren positive Tangente im Punkt P_1 mit der positiven x-Achse den Winkel a bildet, schreiben wir in der Normalform (73) von § 27:

---

[1]) Der Satz rührt von Weierstrass her, der jedoch nur einige Andeutungen eines Beweises gegeben hat. Einen detaillierten Beweis hat zuerst Bliss gegeben, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. V (1904), p. 113. Carathéodory hat kürzlich den Satz auf gebrochene Extremalen ausgedehnt, indem er die Voraussetzung (167) durch eine schwächere Voraussetzung ersetzt, vgl. Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 481.

[2]) Es ist hier ausschließlich von Extremalen der Klasse C' die Rede.

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}(t; x_1, y_1, a) \equiv \varphi(t, a) \\ y &= \mathfrak{Y}(t; x_1, y_1, a) \equiv \psi(t, a) \end{aligned}\right\}, \tag{168}$$

wobei t wieder die Bogenlänge, gemessen vom Punkt P_1 an, bedeutet, so daß also

$$\varphi_t^2 + \psi_t^2 = 1. \tag{169}$$

Nach § 23, a) Zusatz[1]) läßt sich dann eine positive, von a unabhängige Größe h angeben, derart daß das Regularitätsintervall der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ mindestens das Intervall $|t| \overline{\gtrless} h$ umfaßt, und aus den Eigenschaften der Funktionen[2]) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ folgt zugleich, daß die Funktionen

$$\varphi, \quad \varphi_t, \quad \varphi_{tt}; \quad \psi, \quad \psi_t, \quad \psi_{tt}$$

im Bereich

$$0 \overline{\gtrless} |t| \overline{\gtrless} h, \qquad 0 \overline{\gtrless} a \overline{\gtrless} 2\pi \tag{170}$$

von der Klasse C' sind, und daß sie den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0, a) &= x_1, & \psi(0, a) &= y_1, \\ \varphi_t(0, a) &= \cos a, & \psi_t(0, a) &= \sin a \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

genügen, aus denen durch Differentiation nach a folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a(0, a) &= 0, & \psi_a(0, a) &= 0, \\ \varphi_{ta}(0, a) &= -\sin a, & \psi_{ta}(0, a) &= \cos a. \end{aligned}\right\}. \tag{172}$$

Endlich sind die Funktionen φ, ψ in Beziehung auf die Variable a periodisch mit der Periode 2π.

Es handelt sich um die Auflösung der Gleichungen (168) nach t und a. Statt die Aufgabe direkt in Angriff zu nehmen, wobei sich wegen des Verschwindens der Funktionaldeterminante $\Delta(t, a)$ für $t = 0$ Schwierigkeiten ergeben, führen wir an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y Polarkoordinaten r, ω ein mit dem Pol P_1 und der positiven x-Richtung als Achse. Alsdann ist bei geeigneter Normierung[3]) des Winkels ω

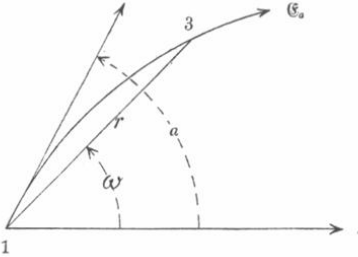

Fig. 41.

---

[1]) Die dort mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnete Punktmenge ist hier die durch die Bedingungen

$$t = 0, \quad x = x_1, \quad y = y_1, \quad 0 \overline{\gtrless} \theta \overline{\gtrless} 2\pi$$

charakterisierte Menge im Raum der Variabeln t, x, y, θ. Dieselbe liegt nach den gemachten Voraussetzungen im Innern des Stetigkeitsbereiches der Differentialgleichungen (43), vgl. § 27, a).

[2]) Vgl. § 27, b).

[3]) Die hier gewählte Darstellung (173_2) für den Winkel ω, die man leicht durch Differentiation nach t verifiziert, hat im Gegensatz zu den Darstellungen durch inverse trigonometrische Funktionen den Vorteil, eindeutig und stetig zu sein.

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(\varphi - x_1)^2 + (\psi - y_1)^2} \equiv r(t, a) \\ \omega &= a + \int_0^t \frac{(\varphi - x_1)\psi_t - (\psi - y_1)\varphi_t}{r^2}\, dt \equiv \omega(t, a). \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

Es läßt sich nun stets eine positive, von a unabhängige Größe $k \overline{\overline{<}} h$ angeben [1], so daß $r > 0$ für $0 < t \overline{\overline{<}} k$. Alsdann sind die Funktionen $r(t, a)$ und $\omega(t, a)$ von der Klasse [2] C' in dem Bereich

$$0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} k, \quad 0 \overline{\overline{<}} a \overline{\overline{<}} 2\pi. \tag{174}$$

Ferner ist

$$r_t(0, a) = 1, \quad r_a(0, a) = 0, \quad r(t, a + 2\pi) = r(t, a), \tag{175}$$

$$\omega(0, a) = a, \quad \omega_a(0, a) = 1, \quad \omega(t, a + 2\pi) = \omega(t, a) + 2\pi. \tag{176}$$

Hieraus ergibt sich für die Funktionaldeterminante

$$\nabla(t, a) = \frac{\partial(r, \omega)}{\partial(t, a)}$$

der Anfangswert

$$\nabla(0, a) = 1. \tag{177}$$

Nunmehr kann man auf die Gleichungen (173) den Satz von § 31, a) anwenden, wobei den dort mit t, a, a_0 bezeichneten Größen der Reihe nach die Größen a, t, 0 entsprechen und erhält das Resultat, daß man k so klein wählen kann, daß die Gleichungen (173) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich (174) und dessen Bild in der r, ω Ebene definieren, woraus sich der oben ausgesprochene Satz durch Übertragung auf die x, y-Ebene ergibt.

Statt dessen kann man auch folgendermaßen schließen [3]: Nach § 21, b) folgt aus (175) und (177), daß sich eine positive Größe $l \overline{\overline{<}} k$ so klein wählen läßt, daß

$$r_t > 0, \quad \nabla > 0 \tag{179}$$

für

$$0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} l, \quad -\infty < a < +\infty.$$

---

[1]) Durch Anwendung des Taylor'schen Satzes erhält man

$$r = t\sqrt{\varphi_t^2(\theta' t, a) + \psi_t^2(\theta'' t, a)}, \quad 0 < \theta' < 1, \quad 0 < \theta'' < 1. \tag{178}$$

Man wende nunmehr den Satz von § 21, b) auf die Funktion

$$\varphi_t^2(t', a) + \psi_t^2(t'', a)$$

an.

[2]) Der Wert $t = 0$ verursacht einige Schwierigkeiten; man wende den Taylor'schen Satz an und benutze die Gleichungen (169), (171) und (172). Wesentlich einfacher gestaltet sich der Beweis, wenn $\varphi(t, a)$, $\psi(t, a)$ regulär sind.

[3]) Nach Bliss, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. XIII (1907), p. 321; der geometrische Grundgedanke des Beweises kommt übrigens schon bei Weierstrass vor.

Es sei jetzt R das Minimum der stetigen, stets positiven Funktion $r(l, a)$ im Intervall $0 \overline{\overline{<}} a \overline{\overline{<}} 2\pi$ und P_2 ein von P_1 verschiedener Punkt im Innern des Kreises[1]) (P_1, R). Wir konstruieren den durch P_2 gehenden Kreis mit dem Mittelpunkt P_1 und bezeichnen mit r_2 seinen Radius, so daß

$$0 < r_2 < R.$$

Alsdann schneidet jede Extremale $\mathfrak{E}_a$ der Schar (168), deren Länge kleiner ist als l, den Kreis (P_1, r_2) in einem und nur einem Punkt P_3. Denn lassen wir t von 0 bis l wachsen, so wächst die Funktion $r(t, a)$ wegen (179) beständig von 0 bis $r(l, a)$, sie muß also für einen Wert von t zwischen 0 und l, den wir mit $t(r_2, a)$ bezeichnen, den Wert r_2 annehmen. Aus der Periodizität von $r(t, a)$ folgt, daß auch die inverse Funktion $t(r, a)$ in a periodisch ist mit der Periode 2π.

Lassen wir jetzt a von 0 bis 2π wachsen, so beschreibt der Punkt P_3 den Kreis (P_1, r_2) genau einmal; er muß also durch jeden Punkt des Kreises, also auch durch P_2, gerade einmal hindurchgehen.

Denn die Amplitude des Vektors $P_1 P_3$ ist bei passender Normierung gegeben durch

$$\omega(t(r_2, a), a) \equiv \Omega(r_2, a).$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \omega_t t_a + \omega_a = \frac{\nabla}{r_t}\Bigg|^{t = t(r_2, a)},$$

und dies ist nach (179) positiv, da $t(r_2, a) < l$.

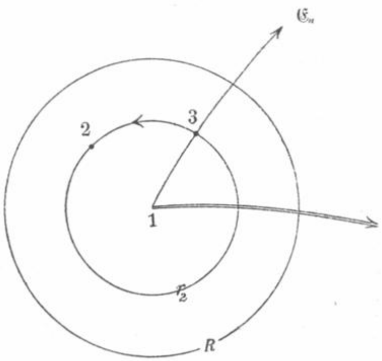

Fig. 42.

Lassen wir also a von 0 bis 2π wachsen, so wächst $\Omega(r_2, a)$ beständig von $\Omega(r_2, 0)$ bis $\Omega(r_2, 2\pi)$. Aus Gleichung (176) und aus der Periodizität von $t(r, a)$ folgt aber

$$\Omega(r_2, 2\pi) = \Omega(r_2, 0) + 2\pi,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Somit geht in der Tat durch jeden Punkt P_2 im Innern des Kreises (P_1, R) eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_{12}$, deren Länge kleiner ist als l. Aus der Ungleichung $r_t > 0$ folgt noch weiter, daß diese „kürzeste Extremale" $\mathfrak{E}_{12}$ ganz in dem Kreis um P_1 mit dem Radius $|P_1 P_2|$ gelegen ist, und daß sie keine Doppelpunkte besitzt.

Die durch Auflösung der Gleichungen (173), resp. (168) sich ergebenden inversen Funktionen t, a sind nach dem Satz über implizite Funktionen von der

[1]) Allgemein soll nach dem Vorgang von Harkness und Morley unter der Bezeichnung (A, r) der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r verstanden werden.

Klasse C', zunächst als Funktionen von r, ω im Bereich

$$0 < r < R\,, \qquad \Omega(r, 0) \overline{\overline{<}} \omega < \Omega(r, 0) + 2\pi\,,$$

und weiterhin auch als Funktionen von x, y in allen Punkten der entlang der Extremalen $a = 0$ aufgeschnittenen Kreisfläche: $0 < (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < R^2$.

In gegenüberliegenden Punkten des Schnittes hat die inverse Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ die Werte 0 und 2π; daher sind die Funktionen $\mathfrak{t}(x, y)$, $p(x, y) = \varphi_t(\mathfrak{t}, \mathfrak{a})$, $q(x, y) = \psi_t(\mathfrak{t}, \mathfrak{a})$ von der Klasse C' in der unaufgeschnittenen Kreisfläche mit Ausschluß des Mittelpunktes P_1. Im Punkt P_1 bleibt $\mathfrak{t}(x, y)$ stetig und hat dort den Wert Null, während $p(x, y)$ und $q(x, y)$ unbestimmt werden. Nähert sich aber der Punkt (x, y) längs einer Kurve $\mathfrak{C}$ der Klasse C' dem Punkt P_1, so nähern sich $p(x, y)$, $q(x, y)$ den Richtungskosinus der positiven Tangente an die Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt P_1. Letzteres folgt daraus, daß nach (173_2) die Funktion $\omega(t, a)$ für $t = 0$ gegen a konvergiert und zwar gleichmäßig in Beziehung auf a.

Wir werden im Anschluß an unsere frühere Terminologie sagen, die Kreisfläche (P_1, R) bilde *ein (uneigentliches) Feld von Extremalen um den Punkt P_1*.

Man beweist[1]) dann weiter mittels der Weierstraß'schen Konstruktion den

Satz II: Ist $\varrho \overline{\overline{<}} R$, liegt der Kreis (P_1, ϱ) ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und ist

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \qquad (< 0) \tag{180}$$

für jedes x, y in (P_1, ϱ) und für jedes γ, so liefert die kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ von P_1 nach einem im Innern von (P_1, ϱ) gelegenen Punkt P_2 für das Integral J einen kleineren[2]) (größeren) Wert als jede andere gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche im Innern des Kreises (P_1, ϱ) von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.

Aus § 21, b) folgt übrigens, daß sich ϱ stets diesen Bedingungen gemäß wählen läßt, sobald die Voraussetzungen von Satz I erfüllt sind

Läßt man in den Gleichungen (168) die Variable t von $t = -h$ bis zum Wert 0 wachsen, so stellen die Gleichungen einen im Punkt P_1 endigenden Bogen der Extremalen $\mathfrak{E}_a$ dar. Definiert man nun die Funktion $r(t, a)$ für negative Werte von t durch

---

[1]) Vgl. § 32. Der Punkt P_1 verursacht dabei einige Schwierigkeiten, da die Funktionen p, q in P_1 unbestimmt werden; dieselben erledigen sich jedoch unter Benutzung von A IV 4, wenn man beachtet, daß die Funktionen p, q sich bestimmten endlichen Grenzen nähern, wenn der Punkt (x, y) sich dem Punkt P_1 längs der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ nähert, und daß die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, da sie eine gewöhnliche Kurve ist, nur eine endliche Anzahl von Malen durch P_1 gehen kann.

[2]) Für den Nachweis, daß der Fall $\Delta J = 0$ nicht eintreten kann, (vgl. § 32, b)), beachte man, daß: $\Delta(t, a) = r\ \nabla(t, a)$, sowie die Ungleichung (179).

$$r(t, a) = -\sqrt{(\varphi - x_1)^2 + (\psi - y_1)^2},$$

dagegen $\omega(t, a)$ ebenso wie früher, so ist

$$r(t, a) = -|P_1 P_3|, \qquad \omega(t, a) = \text{am}\, P_1 P_3 + \pi.$$

Indem man dann die früheren Schlüsse für das Intervall: $-h \leqq t \leqq 0$ wiederholt, erhält man den

Zusatz: Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz I lassen sich zwei Größen l' und R' angeben, derart daß von jedem von P_1 verschiedenen Punkt P_2 im Innern des Kreises (P_1, R') eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_{21}$ nach P_1 gezogen werden kann, deren Länge kleiner als l' ist.

Die Extremale $\mathfrak{E}_{21}$ wird im allgemeinen von $\mathfrak{E}_{12}$ verschieden sein, vgl. § 25, b).

b) Abhängigkeit der Größen l und R von der Lage des Punktes P_1:

Die Größen l und R hängen natürlich von der Lage des Punktes P_1 ab. Hierüber gilt der folgende Satz:

Satz III: Ist $\mathfrak{R}_0$ ein ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ gelegener, beschränkter, abgeschlossener Bereich, und ist das vorgelegte Variationsproblem regulär[1] *in $\mathfrak{R}_0$, so gelten die vorangehenden Resultate gleichmäßig in bezug auf den Bereich $\mathfrak{R}_0$,* d. h. es lassen sich zwei von x_1, y_1 unabhängige positive Größen l_0 und ϱ_0 bestimmen, derart daß irgend zwei Punkte P_1, P_2 von $\mathfrak{R}_0$, deren Entfernung kleiner ist als ϱ_0, durch eine und nur eine Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ verbunden werden können, deren Länge kleiner ist als l_0, und diese Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ liefert für das Integral J einen kleineren Wert, als jede andere gewöhnliche[2] Kurve, welche im Innern des Kreises (P_1, ϱ_0) von P_1 nach P_2 gezogen werden kann.

Um dies zu zeigen, hat man in dem vorangehenden Beweis die Funktionen $\varphi, \psi;\ r, \omega;\ r_t, \nabla$ als Funktionen nicht nur von t, a sondern auch von x_1, y_1 zu betrachten und sich dabei der Eigenschaften der Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ zu erinnern. Es folgt dann zunächst nach § 23, a) Zusatz, angewandt auf die Menge

$$t = 0, \qquad (x_1, y_1) \text{ in } \mathfrak{R}_0, \qquad 0 \leqq a \leqq 2\pi,$$

daß sich eine positive, von a, x_1, y_1 unabhängige Größe h_0 angeben läßt, der-

---

[1]) D. h. es ist

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) \neq 0$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathfrak{R}_0$ und für jedes γ, vgl. § 27, a).

[2]) Wegen der Ausdehnung des Satzes auf Kurven der Klasse K siehe § 35, d), Ende.

art daß das Regularitätsintervall für jede, von einem beliebigen Punkt P_1 von $\mathfrak{R}_0$ ausgehende Extremale $\mathfrak{E}_a$ das Intervall $|t| \overline{\gtrless} h_0$ enthält.

Sodann zeigt man mittels des Satzes von § 21, b), daß sich zwei weitere, von a, x_1, y_1 unabhängige Größen $k_0 \overline{\gtrless} h_0$ und $l_0 \overline{\gtrless} k_0$ angeben lassen, derart daß

$$r(t, a; x_1, y_1) > 0$$

für

$$0 < t \overline{\gtrless} k_0;\ (x_1, y_1) \text{ in } \mathfrak{R}_0;\ -\infty < a < +\infty,$$

und

$$r_t(t, a; x_1, y_1) > 0, \qquad \nabla(t, a; x_1, y_1) > 0 \tag{181}$$

für

$$0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} l_0;\ (x_1, y_1) \text{ in } \mathfrak{R}_0;\ -\infty < a < +\infty.$$

Ferner sei R_0 das stets positive Minimum der Funktion $r(l_0, a; x_1, y_1)$ in dem Bereich

$$(x_1, y_1) \text{ in } \mathfrak{R}_0;\ 0 \overline{\gtrless} a \overline{\gtrless} 2\pi. \tag{182}$$

Schließlich bestimmen wir nach § 21, a) und b) eine Umgebung $[\delta]_{\mathfrak{R}_0}$, welche im Innern von $\mathfrak{R}$ enthalten ist, und in welcher das Problem auch noch regulär ist. Dann ist ϱ_0 die kleinere der beiden Größen R_0, δ.

Die kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ braucht selbst nicht ganz im Bereich $\mathfrak{R}_0$ zu liegen. In dem speziellen Fall, wo sich eine positive Größe $\sigma_0 \overline{\gtrless} \varrho_0$ angeben läßt, derart daß für je zwei Punkte P_1, P_2 von $\mathfrak{R}_0$, deren Entfernung kleiner als σ_0 ist, die sie verbindende kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ stets in $\mathfrak{R}_0$ enthalten ist, sagen wir, der Bereich $\mathfrak{R}_0$ sei *„extremal-konvex."*

Für spätere Anwendungen schließen wir hier noch einige weitere, die gleichmäßige Konvergenz betreffende Folgerungen an:

Indem man die Stetigkeitssätze und den erweiterten Vorzeichensatz von § 21, b) auf die Funktion

$$\varphi_t^2(t', a) + \psi_t^2(t'', a)$$

der fünf Variabeln t', t'', a, x_1, y_1 anwendet und von Gleichung (178) Gebrauch macht, erhält man das Resultat, daß

$$\underset{t=0}{L} \frac{r(t, a)}{t} = 1, \tag{183}$$

gleichmäßig[1]) in Beziehung auf den Bereich (182), und daß sich zwei positive, von a, x_1, y_1 unabhängige Konstante g_0 und G_0 angeben lassen, derart daß

$$g_0 t \overline{\gtrless} r(t, a) \overline{\gtrless} G_0 t \tag{184}$$

in dem Bereich

$$0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} k_0, \quad 0 \overline{\gtrless} a \overline{\gtrless} 2\pi, \quad (x_1, y_1) \text{ in } \mathfrak{R}_0,$$

was sich auch so aussprechen läßt: Sind P_1, P_2 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{R}_0$,

---

[1]) Vgl. A II 6.

deren Entfernung kleiner ist als R_0, und ist l_{12} die Länge der von P_1 nach P_2 gezogenen „kürzesten" Extremalen $\mathfrak{E}_{12}$, so ist

$$g_0 l_{12} \overline{\overline{<}} |P_1 P_2| \overline{\overline{<}} G_0 l_{12}. \tag{184a}$$

Ist ferner N_0 das Maximum der Funktion $|F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)|$ im Bereich (182), so erhält man für den Wert J_{12} des Integrals J entlang $\mathfrak{E}_{12}$ von P_1 nach P_2 die Ungleichung

$$|J_{12}| \overline{\overline{<}} N_0 l_{12} \overline{\overline{<}} \frac{N_0}{g_0} |P_1 P_2|. \tag{184b}$$

Weiter folgt aus (173_2), daß

$$\underset{t=0}{L}[\omega(t, a) - a] = 0 \tag{185}$$

gleichmäßig in Beziehung auf den Bereich (182).

Endlich ist

$$\underset{t=0}{L}[F(\varphi(t, a),\ \ \psi(t, a),\ \ \varphi_t(t, a),\ \ \psi_t(t, a)) - F(x_1, y_1, \cos a, \sin a)] = 0$$

und (186)

$$\underset{t=0}{L}[F(x_1, y_1, \cos\omega(t, a), \sin\omega(t, a)) - F(x_1, y_1, \cos a, \sin a)] = 0$$

ebenfalls gleichmäßig in Beziehung auf den Bereich (182).

c) Der definite Fall:

Ein Variationsproblem heißt positiv (negativ) *definit*[1]) in einer in der x, y-Ebene gelegenen Punktmenge, wenn für jeden Punkt (x, y) dieser Menge und für jeden Wert von γ die Ungleichung gilt

$$F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0\ (< 0).$$

Wir fügen nun den unter b) gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzu, daß unser Problem in Beziehung auf den Bereich $\mathfrak{R}_0$ definit sein soll. Alsdann lassen sich die vorangegangenen Resultate zu folgendem Satz[2]) erweitern:

Satz IV: Ist $\mathfrak{R}_0$ ein beschränkter, abgeschlossener, ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegener Bereich, und ist gleichzeitig[3])

$$F_1(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0, \tag{180}$$

$$F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \tag{187}$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathfrak{R}_0$ und für jedes γ, so läßt sich eine positive Größe d_0 bestimmen, derart daß irgend zwei Punkte P_1 und P_2

[1]) Nach CARATHEODORY (Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 456)

[2]) Nach BLISS, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. V (1904), p. 123.

[3]) Nach § 30, b), vierte Folgerung aus der Relation (125), müssen bei einem gleichzeitig definiten und regulären Problem F_1 und F dasselbe Zeichen haben.

von $\mathfrak{R}_0$, *deren Abstand kleiner ist als* d_0, *durch eine Extremale* $\mathfrak{E}_{12}$ *ohne mehrfache Punkte verbunden werden können, welche einen kleineren Wert für das Integral* J *liefert, als jede andere gewöhnliche*[1]) *Kurve, welche im Bereich* $\mathfrak{R}_0$ *von* P_1 *nach* P_2 *gezogen werden kann.*

Liegt die Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ selbst ganz im Bereich $\mathfrak{R}_0$, so liefert sie daher ein *absolutes Minimum* für das Integral J in Beziehung auf die Gesamtheit aller gewöhnlichen Kurven, welche in $\mathfrak{R}_0$ von P_1 nach P_2 gezogen werden können. Dies wird stets stattfinden, wenn der Bereich $\mathfrak{R}_0$ „extremal-konvex“[2]) ist und d_0 hinreichend klein gewählt wird.

Beweis: Aus der Voraussetzung (187) folgt zunächst, daß wir auf den Extremalen der Schar (168) statt des Bogens t den Wert des Integrals J, genommen vom Punkt P_1 bis zum Punkt t der betreffenden Extremalen, also die Größe

$$u(t, a) = \int_0^t \mathcal{F}(t, a)\, dt,$$

als Parameter einführen können, wobei $\mathcal{F}(t, a)$ wieder durch (83) definiert ist. Denn da nach (187) die Ableitung $u_t = \mathcal{F}(t, a)$ beständig positiv ist, so können wir die Gleichung: $u = u(t, a)$ eindeutig nach t auflösen, und die Einsetzung des gefundenen Wertes in die Gleichungen (168) ergibt für die Extremalenschar durch den Punkt P_1 eine Darstellung von der Form

$$x = \varphi[u, a], \qquad y = \psi[u, a]. \tag{188}$$

Im Bereich

$$0 \leqq u \leqq u(l_0, a), \qquad 0 \leqq a \leqq 2\pi \tag{189}$$

haben die Funktionen $\varphi[u, a]$, $\psi[u, a]$ dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die Funktionen $\varphi(t, a)$, $\psi(t, a)$ im Bereich (170). Überdies sind sie periodisch in a mit der Periode 2π.

Gleichzeitig geht die Funktion $r(t, a)$ in eine Funktion von u und a über, die wir entsprechend mit $r[u, a]$ bezeichnen. Wegen (181) ist dann

$$r_u[u, a] > 0 \tag{190}$$

im Bereich (189). Ist weiter m_0 das stets positive Minimum der Funktion $F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$ im Bereich

$$(x, y) \text{ in } \mathfrak{R}_0, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 2\pi, \tag{191}$$

so ist

$$m_0 t \leqq u(t, a). \tag{192}$$

---

[1]) Der Satz bleibt auch noch richtig für Vergleichskurven der Klasse K, vgl. § 35, d) und p. 279, Fußnote [3]). Für Vergleichskurven, deren sämtliche Punkte auf $\mathfrak{E}_{12}$ liegen, ist dabei das Zeichen $<$ durch $\leqq$ zu ersetzen.

[2]) Vgl. die Definition von extremal-konvex auf p. 276.

Aus (178) und (192) leitet man dann das weitere Resultat ab, daß es eine von t, a, x_1, y_1, unabhängige Größe K_0 gibt, derart daß in dem Bereich (189)

$$r[u, a] < K_0 u. \tag{193}$$

Nach diesen Vorbereitungen wählen wir eine positive Größe c kleiner als ϱ_0 / K_0 und gleichzeitig kleiner als das stets positive Minimum der Funktion $u(l_0, a; x_1, y_1)$ im Bereich (182) und betrachten die Kurve [1]):

$$\mathfrak{K}: \quad x = \varphi[c, a], \quad y = \psi[c, a],$$
$$0 \overline{\overline{<}} a \overline{\overline{<}} 2\pi.$$

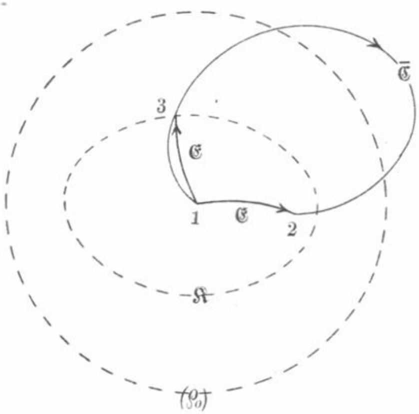

Fig. 43.

Dieselbe ist eine *stetige, geschlossene Kurve ohne mehrfache Punkte* (eine Jordan'sche Kurve), da sie wegen (193) ganz im Innern des Kreises (P_1, ϱ_0) liegt. Das Innere [2]) der Kurve $\mathfrak{K}$ ist das eineindeutige Abbild des Bereiches

$$0 \overline{\overline{<}} u < c, \qquad 0 \overline{\overline{<}} a < 2\pi.$$

mittels der Transformation (188).

Ist daher P_2 ein von P_1 verschiedener Punkt im Innern der Kurve $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}_{12}$ die kürzeste Extremale von P_1 nach P_2, so ist der Wert J_{12} des Integrals J entlang $\mathfrak{E}_{12}$ kleiner als c. Ziehen wir jetzt irgend eine andere gewöhnliche [3]) Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ von P_1 nach P_2, welche ganz im Bereich $\mathfrak{R}_0$ liegt, so ist der Wert $\bar{J}_{12}$ des Integrals J, genommen entlang $\bar{\mathfrak{C}}$, größer als J_{12}.

Wenn die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ ganz in dem von der Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzten Bereich verläuft, so liegt sie a fortiori im Innern des Kreises (P_1, ϱ_0) und die Behauptung folgt nach b). Es ist also nur nötig, den Fall zu betrachten, wo die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ aus dem von der Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzten Bereich heraustritt. Sei P_3 der Punkt, wo die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ zum ersten Mal [4]) die Kurve $\mathfrak{K}$ schneidet; ziehe die kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{13}$ von P_1 nach P_3. Dann ist nach b)

$$\bar{J}_{13} \overline{\overline{>}} J_{13} = c > J_{12}.$$

Also ist a fortiori

$$\bar{J}_{12} > J_{12}, \tag{194}$$

da wegen der Voraussetzung (187): $\bar{J}_{12} > \bar{J}_{13}$.

---

[1]) Die Kurve ist nach § 44, b) eine *Transversale* der Extremalenschar durch den Punkt P_1.

[2]) Vgl. A VI 2.

[3]) Der folgende Schluß bleibt auch noch bestehen, wenn die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ von der Klasse K ist, vgl. § 35, d).

[4]) Vgl. Jordan, *Cours d'Analyse*, Nr. 103.

Ist endlich d_0 das stets positive Minimum der Funktion $r[c, a; x_1, y_1]$ im Bereich (182), so liegt der Kreis (P_1, d_0) ganz in dem von der Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzten Bereich, und die Ungleichung (194) gilt daher a fortiori, wenn der Punkt P_2 im Innern des Kreises (P_1, d_0) liegt, womit der Satz bewiesen ist.

§ 34. Der Osgood'sche Satz.

Wenn eine Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$ ein eigentliches, relatives Minimum besitzt, so kann man eine positive Größe k angeben, so daß

$$f(x) - f(a) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < |x - a| \overline{\overline{<}} k.$$

Dies gilt, gleichgültig ob die Funktion $f(x)$ stetig oder unstetig ist. Wenn aber $f(x)$ im Intervall $[a - k, a + k]$ stetig ist, so besitzt sie überdies noch folgende Eigenschaft: Zu jeder positiven Größe l, die kleiner ist als k, gehört eine positive Größe ε_l, derart daß

$$f(x) - f(a) \overline{\overline{>}} \varepsilon_l \quad \text{für} \quad l \overline{\overline{<}} |x - a| \overline{\overline{<}} k. \tag{195}$$

Denn alsdann erreicht $f(x)$ für das Intervall $[a - k, a - l]$ ein absolutes Minimum in einem Punkt x_1 des Intervalls; ebenso für $[a + l, a + k]$ in x_2, und es ist dann $f(x_1) > f(a)$, $f(x_2) > f(a)$. Bezeichnet daher ε_l die kleinere der beiden positiven Differenzen $f(x_1) - f(a)$, $f(x_2) - f(a)$, so gilt in der Tat die Ungleichung (195).

Daß unstetige Funktionen diese Eigenschaft im allgemeinen nicht besitzen, zeigt Osgood durch das Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \text{ irrational;} \\ 1/q, \text{ wenn } x = \pm p/q, \text{ wo } p, q \text{ zwei positive ganze Zahlen} \\ \quad \text{ohne gemeinsamen Teiler sind;} \\ 0, \text{ wenn } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion hat für $x = 0$ ein eigentliches Minimum, ohne die oben angegebene Eigenschaft zu besitzen.

Wie Osgood[1]) gefunden hat, gilt nun ein ganz analoger Satz für das eigentliche, starke Extremum eines bestimmten Integrals.

a) **Der Fall eines Extremums „im Großen"**:

Die Analogie ist am vollständigsten bei der folgenden von Hahn[2]) herrührenden Fassung des Satzes:

---

[1]) Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 273.

[2]) Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVII (1906), p. 63; auch der im Text gegebene Beweis rührt von Hahn her. In der genannten Arbeit verallgemeinert Hahn den Satz auch auf isoperimetrische Probleme und auf das Lagrange'sche Problem.

Es sei $\mathfrak{E}_0$ ein die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindender Extremalenbogen ohne mehrfache Punkte, für welchen die Bedingungen (II'), (III'), (IV') *und außerdem in den beiden Endpunkten die Bedingungen*

$$F_1(x_1, y_1, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0, \quad F_1(x_2, y_2, \cos\gamma, \sin\gamma) > 0 \qquad (196)$$

für jedes γ erfüllt sind. Alsdann existiert eine Umgebung $\mathcal{S}$ des Bogens $\mathfrak{E}_0$ von folgender Beschaffenheit: Zu jeder ganz im Innern von $\mathcal{S}$ gelegenen (aber nicht mit $\mathcal{S}$ identischen) Umgebung $\mathfrak{A}$ des Bogens $\mathfrak{E}_0$ gehört eine positive Größe $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$, derart daß für jede gewöhnliche von P_1 nach P_2 gezogene Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche ganz im Bereich $\mathcal{S}$, aber nicht ganz im Bereich $\mathfrak{A}$ verläuft,

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0} \overline{\gtrless} \varepsilon_{\mathfrak{A}}\,. \qquad (197)$$

Beweis: Aus der Voraussetzung (196_1) folgt zunächst nach Satz II von § 33, daß wir um den Punkt P_1 einen ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Kreis (P_1, ϱ_1) beschreiben können, in welchem das Problem positiv regulär ist, und dessen Inneres ein Feld um den Punkt P_1 bildet, geliefert von der Extremalenschar durch den Punkt P_1.

Sei $P_0 \neq P_1$ ein Punkt des Bogens $\mathfrak{E}_0$ im Innern dieses Kreises. Dann folgt weiter nach § 31, a) und § 32, b) aus den Voraussetzungen (II') und (III'), daß sich zwei Größen h, k so klein wählen lassen, daß die Extremalenschar durch den Punkt P_1 zugleich auch ein Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ um den Bogen P_0P_2 von $\mathfrak{E}_0$ liefert, und daß überdies die Bedingung

$$\mathcal{E}_1(x, y;\, p(x, y),\, q(x, y);\, \cos\tilde{\theta},\, \sin\tilde{\theta}) > 0 \qquad (198)$$

für jedes $\tilde{\theta}$ in allen Punkten (x, y) von $\mathcal{S}_{h,k}$ erfüllt ist.

Es sei $\mathcal{S}_1$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche entweder zur Kreisfläche (P_1, ϱ_1) oder zu $\mathcal{S}_{h,k}$ oder gleichzeitig zu beiden gehören; $\mathcal{S}_1$ ist dann eine Umgebung des Bogens $\mathfrak{E}_0$ und bildet ein Feld um denselben. Ist P_3 irgend ein Punkt im Innern von $\mathcal{S}_1$, so können wir von P_1 nach P_3 eine Feldextremale $\mathfrak{E}_{13}$ ziehen. Ist andererseits $\overline{\mathfrak{C}}_1$ irgend eine gewöhnliche, die beiden Punkte P_1 und P_3 verbindende Kurve, welche ganz in $\mathcal{S}_1$ verläuft, so folgt aus dem Weierstraß'schen Satz, daß in bekannter Bezeichnungsweise

$$\bar{J}_{13} \overline{\gtrless} J_{13}\,. \qquad (199)$$

Ganz ebenso können wir nun ein zweites Feld $\mathfrak{S}_2$ um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ konstruieren, welches die analogen Eigenschaften in Beziehung auf die Extremalenschar nach[1]) dem Punkt P_2 besitzt, d. h. von jedem Punkt P_3 von $\mathfrak{S}_2$ läßt sich eine Feldextremale $\mathfrak{E}_{32}$ nach dem Punkt P_2 ziehen und wenn $\mathfrak{C}_2$ eine gewöhnliche ganz in $\mathfrak{S}_2$ verlaufende Kurve ist, die von P_3 nach P_2 gezogen ist, so ist

$$\bar{J}_{32} \geqq J_{32}. \tag{199a}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\mathfrak{S}$ irgend eine Umgebung des Bogens $\mathfrak{E}_0$, welche gleichzeitig in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ enthalten ist. Ist dann P_3 ein Punkt im Innern von $\mathfrak{S}$, so können wir beide Extremalen $\mathfrak{E}_{13}$ und $\mathfrak{E}_{32}$ ziehen. Wir betrachten nun die Differenz

$$\varepsilon(x_3, y_3) = J_{13} + J_{32} - J_{12}.$$

Dieselbe ist eine im Innern von $\mathfrak{S}$ eindeutig definierte und stetige Funktion der Koordinaten x_3, y_3 des Punktes P_3. Sie verschwindet, wenn der Punkt P_3 auf dem Bogen $\mathfrak{E}_0$ liegt; in allen anderen Punkten ist sie positiv, da der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ein eigentliches starkes Minimum für das Integral J liefert.

Nunmehr sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Umgebung von $\mathfrak{E}_0$, welche ganz im Innern von $\mathfrak{S}$ liegt (ohne mit $\mathfrak{S}$ identisch zu sein), und es sei $\mathfrak{V}$ diejenige Menge von Punkten von $\mathfrak{S}$, welche nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören, unter Hinzurechnung ihrer Häufungspunkte. Die Menge $\mathfrak{V}$ ist dann abgeschlossen und enthält keinen Punkt von $\mathfrak{E}_0$. Daher besitzt die Funktion $\varepsilon(x_3, y_3)$ in $\mathfrak{V}$ einen positiven Minimalwert, den wir mit $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ bezeichnen, so daß also in $\mathfrak{V}$:

$$J_{13} + J_{32} - J_{12} \geqq \varepsilon_{\mathfrak{A}}. \tag{200}$$

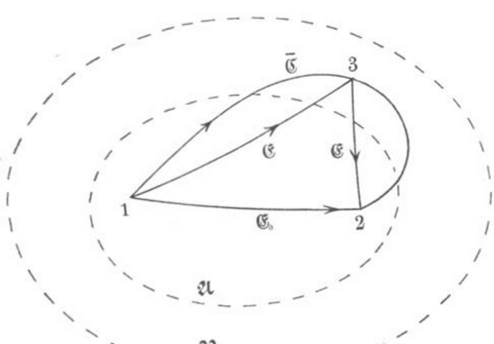

Fig. 44.

Endlich sei $\bar{\mathfrak{C}}$ irgend eine gewöhnliche, von P_1 nach P_2 gezogene Kurve, welche ganz im Innern von $\mathfrak{S}$, aber nicht ganz

[1]) Vgl. § 33 a), Zusatz.

in $\mathfrak{A}$ verläuft, und es sei P_3 ein Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$, welcher nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Alsdann gelten gleichzeitig die Ungleichungen (199), (199a) und (200) und daraus folgt

$$\bar{J}_{12} - J_{12} \mathrel{\overline{\overline{>}}} \varepsilon_{\mathfrak{A}},$$

was zu beweisen war.

Zusatz: Der Satz gilt auch noch in etwas modifizierter Form, wenn die beiden Bedingungen (196) in den beiden Endpunkten nicht erfüllt sind. Der Bereich $\mathfrak{A}$ muß dann so beschaffen sein, daß der komplementäre Bereich $\mathfrak{V}$ keinen Punkt mit der Fortsetzung des Bogens $\mathfrak{E}_0$ über die beiden Punkte P_1 und P_2 hinaus gemeinsam hat.[1])

b) Der Fall des Extremums „im Kleinen":

Für spätere Anwendungen möge auch noch die Modifikation des Osgood'schen Satzes[2]) für den Fall eines Extremums „im Kleinen" hier Platz finden:

Ist $\mathfrak{K}_0$ ein beschränkter, abgeschlossener Bereich im Innern von $\mathfrak{K}$, und ist das vorgelegte Variationsproblem regulär in Beziehung auf den Bereich $\mathfrak{K}_0$, so läßt sich eine positive Größe r_0 bestimmen, derart daß nicht nur je zwei Punkte P_1, P_2 von $\mathfrak{K}_0$, deren Entfernung kleiner als r_0 ist, sich durch eine kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ verbinden lassen, sondern daß gleichzeitig für diese Extremale auch noch der folgende Satz gilt:

Jeder Umgebung $\mathfrak{A}$ des Extremalenbogens $\mathfrak{E}_{12}$, welche ganz im Innern des Kreises (P_1, r_0) liegt, läßt sich eine positive Größe $\varepsilon_{\mathfrak{A}}$ zuordnen, derart daß für jede die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindende gewöhnliche Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, welche ganz im Innern des Kreises (P_1, r_0), aber nicht ganz in $\mathfrak{A}$ liegt, die Ungleichung gilt

$$\bar{J}_{12} - J_{12} \mathrel{\overline{\overline{>}}} \varepsilon_{\mathfrak{A}}. \tag{197a}$$

Beweis: Nach § 21, a) und b) können wir zunächst eine geschlossene Umgebung

$$\mathfrak{K}_1 = [\delta]_{\mathfrak{K}_0}$$

von $\mathfrak{K}_0$ bestimmen, welche ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, und in Beziehung auf welche das Problem ebenfalls noch regulär ist. Für diesen Bereich $\mathfrak{K}_1$ be-

---

[1]) Hahn beweist dies, indem er auf der Fortsetzung von $\mathfrak{E}_0$ über P_1, resp. P_2, hinaus zwei Punkte P_1', resp. P_2', annimmt und dann statt der Extremalenscharen durch P_1 und P_2 diejenigen durch P_1' und P_2' betrachtet.

Ebenfalls ohne Benutzung der Voraussetzungen (196) und wieder in etwas anderer Fassung werden wir den Satz in § 46 mit Hilfe der Kneser'schen krummlinigen Koordinaten beweisen.

[2]) In der Hauptsache nach Carathéodory (Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), p. 490), der den Satz für den allgemeineren Fall von gebrochenen Extremalen beweist.

stimmen wir die in § 33, b) definierten[1]) Größen l_1, R_1 und bezeichnen mit r_0 eine positive Größe, welche den Ungleichungen genügt:

$$r_0 \overline{\overline{<}} \begin{cases} \frac{R_1}{4} \\ \frac{\delta}{4} \end{cases}. \tag{201}$$

Sind dann P_1, P_2 irgend zwei Punkte des Bereiches $\mathfrak{R}_0$, deren Abstand kleiner ist als r_0, so können wir von P_1 nach P_2 eine wie in § 33, a) definierte kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$ ziehen.

Sei jetzt $\overline{\mathfrak{C}}$ irgend eine andere gewöhnliche Kurve, welche ebenfalls die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet und ganz im Innern des Kreises (P_1, r_0) verläuft, und sei P_3 irgend ein Punkt von $\overline{\mathfrak{C}}$, der nicht zugleich auf $\mathfrak{E}_{12}$ liegt. Dann können wir zunächst von P_1 auch nach P_3 eine kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{13}$ ziehen, und es gilt die Ungleichung

$$\bar{J}_{13} \overline{\overline{>}} J_{13}.$$

Weiterhin können wir aber auch vom Punkt P_3 nach dem Punkt P_2 eine kürzeste Extremale ziehen. Denn aus der Ungleichung (201) folgt, daß der Punkt P_3 im Bereich $\mathfrak{R}_1$ liegt und überdies ist

$$|P_3 P_2| < 2 r_0 < R_1.$$

Die Extremale $\mathfrak{E}_{32}$ liegt ganz im Innern des Kreises $(P_3, 2r_0)$; in demselben Kreise liegt aber auch der Bogen $P_3 P_2$ der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, da ja der Kreis (P_1, r_0) ganz im Innern des Kreises $(P_3, 2r_0)$ enthalten ist. Der Kreis $(P_3, 2r_0)$ seinerseits liegt ganz im Innern des Kreises $(P_1, 4r_0)$, und da letzterer wegen der Ungleichung (201) ganz in $\mathfrak{R}_1$ enthalten ist, so liegt der Kreis $(P_3, 2r_0)$ ganz im Innern von $\mathfrak{R}$, und das Problem ist regulär in Beziehung auf den Kreis $(P_3, 2r_0)$. Daraus folgt aber, daß

$$\bar{J}_{32} \overline{\overline{>}} J_{32}.$$

Andererseits ist aber

$$J_{13} + J_{32} > J_{12},$$

wie daraus folgt, daß die aus den beiden Extremalenbogen $\mathfrak{E}_{13}$, $\mathfrak{E}_{32}$ zusammengesetzte Kurve ganz im Innern des Kreises $(P_1, 4r_0)$ liegt.

Indem man nunmehr wie unter a) weiter schließt, erhält man die zu beweisende Ungleichung (197a).

§ 35. Verallgemeinerung der Bedeutung des Kurvenintegrals.

Wir haben uns in allen bisherigen Untersuchungen auf „gewöhnliche" Kurven beschränkt. Diese Beschränkung war in der Tat notwendig für die meisten unserer Beweise, sie liegt aber nicht in der

[1]) Entsprechend den dort mit l_0, R_0 bezeichneten Größen.

Natur des behandelten Problems; vielmehr wäre das natürlichste, alle diejenigen Kurven zuzulassen, für welche das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

einen bestimmten, endlichen Wert hat.

Für viele geometrische Probleme ist es jedoch wünschenswert, die Klasse der zulässigen Kurven noch weiter auszudehnen.

a) **Beispiel der Länge einer Kurve:**

So ist z. B. die Aufgabe, die kürzeste Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten P_1, P_2 zu bestimmen, nicht genau äquivalent mit dem Problem, das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen, weil der Begriff der Länge auch noch für Kurven eine Bedeutung hat, für welche das Integral seine Bedeutung verliert, insbesondere auch für Kurven, welche keine Tangenten besitzen.

Die Länge einer stetigen Kurve

$$\mathfrak{L}: \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_1 \overline{\overline{<}}\, t\, \overline{\overline{<}}\, t_2 \tag{202}$$

wird folgendermaßen definiert[1]):

Man betrachte irgend eine Teilung Π des Intervalls $[t_1 t_2]$ in $n+1$ Teilintervalle mittels der Zwischenpunkte $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, wobei

$$t_1 < \tau_1 < \tau_2 \cdots < \tau_n < t_2 .$$

Die zugehörigen Punkte der Kurve $\mathfrak{L}$ seien: $P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_2$, ihre Koordinaten: x_1, y_1; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; $\ldots$; ξ_n, η_n; x_2, y_2; dann ist die Länge des der Kurve $\mathfrak{L}$ eingeschriebenen geradlinigen Polygons $\mathfrak{P}_\Pi$, dessen Ecken eben diese Punkte in der angegebenen Reihenfolge sind:

$$W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} \sqrt{(\Delta \xi_\nu)^2 + (\Delta \eta_\nu)^2}, \tag{203}$$

---

[1]) Vgl. Jordan, *Cours d'Analyse*, Bd. I (1893), Nr. 105—111. Diese Definition ist für unseren gegenwärtigen Zweck am bequemsten. Die Peano'sche Definition wird unter c) zur Sprache kommen.

wobei

$$\Delta \xi_\nu = \xi_{\nu+1} - \xi_\nu, \quad \Delta \eta_\nu = \eta_{\nu+1} - \eta_\nu,$$

mit der Verabredung, daß

$$\tau_0 = t_1,\ \xi_0 = x_1,\ \eta_0 = y_1 \quad \text{und} \quad \tau_{n+1} = t_2,\ \xi_{n+1} = x_2,\ \eta_{n+1} = y_2.$$

Wenn dann die Summe W_Π gegen eine bestimmte, endliche Grenze J konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst, aber so, daß gleichzeitig alle Differenzen $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu$ gegen Null konvergieren[1],

$$J = \underset{\Delta\tau = 0}{L} W_\Pi,$$

so sagt man, die Kurve $\mathfrak{L}$ habe eine endliche Länge, deren Wert gleich J ist. Und man nennt eine Kurve „*rektifizierbar*"[2], wenn sie stetig ist und eine endliche Länge hat.

Wenn die ersten Ableitungen $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ existieren und stetig sind im Intervall $[t_1 t_2]$, so kann die Länge durch das bestimmte Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

ausgedrückt werden.[3]

b) **Verallgemeinerung der Bedeutung des Kurvenintegrals J:**

In ganz analoger Weise hat WEIERSTRASS[4] die Bedeutung des allgemeinen Integrals

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

auf Kurven ausgedehnt, welche nicht zur Klasse der „gewöhnlichen" Kurven gehören.

---

[1] D. h. zu jedem positiven ε gehört eine zweite positive Größe δ_ε derart, daß

$$|J - W_\Pi| < \varepsilon$$

für alle Teilungen Π, bei welchen sämtliche Differenzen $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu$ kleiner sind als δ_ε.

[2] Vgl. JORDAN, loc. cit. Nr. 110.

[3] Vgl. JORDAN, loc. cit. Nr. 111 und STOLZ, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. III (1902), pp. 28 und 303.

[4] *Vorlesungen* 1879; vgl. auch OSGOOD, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), pp. 275 und 293.

Wir setzen von der Kurve $\mathfrak{L}$ voraus, daß sie ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt und stetig ist, und betrachten nunmehr, wie oben, eine Teilung Π des Intervalls $[t_1 t_2]$, und bilden die Summe[1])

$$W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} F(\xi_\nu, \eta_\nu, \Delta\xi_\nu, \Delta\eta_\nu), \tag{204}$$

die als die naturgemäße Verallgemeinerung der Summe (203) erscheint, und die wir wegen der Homogeneität der Funktion F auch schreiben können

$$W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} F(\xi_\nu, \eta_\nu, \cos\omega_\nu, \sin\omega_\nu) r_\nu \tag{204a}$$

wenn r_ν und ω_ν die Länge, resp. die Amplitude des Vektors $Q_\nu Q_{\nu+1}$ bedeuten.

Ist die Kurve $\mathfrak{L}$ von der Klasse C', so konvergiert die Summe W_Π bei dem angegebenen Grenzübergang gegen das Integral $J_\mathfrak{L}(P_1 P_2)$:

$$\underset{\Delta\tau=0}{L} W_\Pi = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt.$$

Denn das Integral $J_\mathfrak{L}$ läßt sich alsdann nach dem Mittelwertsatz schreiben

$$J_\mathfrak{L} = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu+1}} F(x, y, x', y')\, dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} F(\varphi(\tau_\nu'), \psi(\tau_\nu'), \varphi'(\tau_\nu'), \psi'(\tau_\nu'))(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu),$$

wo τ_ν' einen Mittelwert zwischen τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ bedeutet.

Andererseits ist

$$\Delta\xi_\nu = \varphi'(\tau_\nu'')(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu), \qquad \Delta\eta_\nu = \psi'(\tau_\nu''')(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu),$$

wo τ_ν'', τ_ν''' wieder Mittelwerte zwischen τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ sind. Daraus folgt wegen der Homogeneität von F:

$$W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} F(\varphi(\tau_\nu), \psi(\tau_\nu), \varphi'(\tau_\nu''), \psi'(\tau_\nu'''))(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu).$$

---

[1]) Sollte $Q_{\nu+1} = Q_\nu$ sein, so ist dabei $F(\xi_\nu, \eta_\nu, 0, 0)$ durch 0 zu ersetzen.

Aus der in der Definition einer Kurve der Klasse C' enthaltenen Annahme: $\varphi_t^2(t) + \psi_t^2(t) > 0$ in $[t_1 t_2]$, folgt dann nach § 21, b), daß man eine abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{A}$ der Menge

$$t_1 \overline{\gtrless} t' \overline{\gtrless} t_2, \quad t_1 \overline{\gtrless} t'' \overline{\gtrless} t_2, \quad t' = t''$$

im Gebiet der Variabeln t', t'' angeben kann, derart daß

$$\varphi_t^2(t') + \psi_t^2(t'') > 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}.$$

Die Funktion $F(\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t'), \psi'(t''))$ der Variabeln t, t', t'' ist dann gleichmäßig stetig in dem Bereich

$$t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2, \qquad (t', t'') \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}.$$

Hieraus und aus der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ folgt dann, daß man zu jeder positiven Größe ε eine zweite positive Größe δ_ε bestimmen kann, derart daß

$$|F(\varphi(\tau_\nu'), \psi(\tau_\nu'), \varphi'(\tau_\nu'), \psi'(\tau_\nu')) - F(\varphi(\tau_\nu), \psi(\tau_\nu), \varphi'(\tau_\nu''), \psi'(\tau_\nu'''))| < \varepsilon$$

für jede Teilung Π, deren sämtliche Intervalle kleiner als δ_ε sind. Es ist dann also

$$|W_\Pi - J_\mathfrak{L}| < \varepsilon(t_2 - t_1),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Dasselbe Resultat gilt auch noch für gewöhnliche Kurven mit einer endlichen Anzahl von Ecken, wie man sich durch Betrachtung solcher spezieller Teilungen überzeugt, welche die Ecken als Teilungspunkte enthalten.

Wir kommen nunmehr nach Weierstrass überein, allgemein für irgend welche stetige Kurve $\mathfrak{L}$ das Integral

$$J_\mathfrak{L}(P_1 P_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

durch den Grenzwert der Summe W_Π zu definieren, in allen Fällen, in welchen W_Π bei dem angegebenen Grenzübergang gegen eine bestimmte, endliche Grenze konvergiert. Dies ist eine naturgemäße Verallgemeinerung der Definition des Kurvenintegrals, da sie, wie wir eben gezeigt haben, für gewöhnliche Kurven mit der gewöhnlichen Definition übereinstimmt.

Die folgende Modifikation[1]) der Weierstraß'schen Definition des verallgemeinerten Kurvenintegrals wird sich später als nützlich erweisen:

---

[1]) Vgl. Osgood, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 293.

Da die Kurve $\mathfrak{L}$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegen sollte, so wird das geradlinige Polygon $\mathfrak{P}_\Pi$ mit den Ecken $P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_2$ ebenfalls ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegen, vorausgesetzt, daß die sämtlichen Differenzen $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu$ hinreichend klein gewählt worden sind. Unter dieser Voraussetzung bezeichne V_Π das Integral J, genommen entlang dem Polygon $\mathfrak{P}_\Pi$ von P_1 bis P_2.

Wenn alsdann die Kurve $\mathfrak{L}$ rektifizierbar ist, und wenn eine der Summen W_Π und V_Π für $L\Delta\tau = 0$ gegen eine bestimmte, endliche Grenze konvergiert, so konvergiert die andere Summe gegen denselben Grenzwert, so daß man auch definieren kann

$$J_{\mathfrak{L}}(P_1 P_2) = \underset{\Delta\tau=0}{L} V_\Pi . \tag{205}$$

Denn bezeichnen wir wieder mit r_ν und ω_ν die Länge, bzw. die Amplitude des Vektors $Q_\nu Q_{\nu+1}$ und setzen

$$\bar{\xi}_\nu = \xi_\nu + s \cos \omega_\nu , \qquad \bar{\eta}_\nu = \eta_\nu + s \sin \omega_\nu ,$$

so können wir unter Benutzung der Homogeneität der Funktion F die Differenz $V_\Pi - W_\Pi$ schreiben:

$$V_\Pi - W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^{r_\nu} [F(\bar{\xi}_\nu, \bar{\eta}_\nu, \cos\omega_\nu, \sin\omega_\nu) - F(\xi_\nu, \eta_\nu, \cos\omega_\nu, \sin\omega_\nu)]\, ds .$$

Hieraus folgt dann die Behauptung, wenn man den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit auf die Funktion

$$F(x, y, \cos\gamma, \sin\gamma)$$

anwendet.

Indem wir uns in der Folge auf rektifizierbare Kurven beschränken, werden wir die Gesamtheit aller rektifizierbaren Kurven, für welche die Summe W_Π gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert konvergiert, „*die Klasse K*“ nennen.

c) **Zweite Definition des verallgemeinerten Kurvenintegrals:**

Für spätere Anwendungen erwähnen wir hier noch eine zweite Definition des verallgemeinerten Kurvenintegrals, welche als naturgemäße Verallgemeinerung der Peano'schen Definition[1]) der Länge einer Kurve erscheint. Peano definiert nämlich als Länge der Kurve $\mathfrak{L}$ die *obere Grenze* der Werte der durch die Gleichung (203) definierten Summe W_Π für alle möglichen Teilungen Π des

---

[1]) Vgl. Peano, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale,* (Turin (1887), p. 161.

Intervalls $[t_1 t_2]$. Diese Definition hat den Vorzug, daß sie in allen Fällen für die Länge einen bestimmten, wenn auch möglicherweise unendlichen, Wert liefert. Wenn die obere Grenze endlich und die Kurve $\mathfrak{L}$ stetig ist, so läßt sich zeigen, daß die obere Grenze der Werte W_Π zugleich in dem unter a) erklärten Sinn die Grenze von W_Π für $\Delta\tau = 0$ ist, so daß also in diesem Fall beide Definitionen zu demselben Resultat führen[1]).

Um diese Definitionen und Resultate auf den allgemeinen Fall unseres Integrals J ausdehnen zu können, machen wir über die Kurve $\mathfrak{L}$, die wir nach wie vor als stetig voraussetzen, die weitere Annahme, daß unser Variationsproblem *entlang der Kurve $\mathfrak{L}$ regulär* ist, und zwar, um die Ideen zu fixieren, positiv regulär.

Wir können dann zunächst nach § 21, a) und b) eine geschlossene ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegene Umgebung

$$\mathfrak{R}_0 = [\eta]_{\mathfrak{L}}$$

der Kurve $\mathfrak{L}$ angeben, in welcher das Problem ebenfalls noch regulär ist. Ferner gehört nach dem Satz über gleichmäßige Stetigkeit, angewandt auf die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, zu jedem ε eine zweite positive Größe $\Delta(\varepsilon)$, so daß für je zwei Punkte $P'(t')$, $P''(t'')$ der Kurve $\mathfrak{L}$, für welche $|t' - t''| < \Delta(\varepsilon)$, stets $|P'P''| < \varepsilon$. Sei jetzt die positive Größe R_0 für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ ebenso definiert wie in § 33, b), und sei d die kleinere der beiden Größen R_0, η. Wenn wir uns dann auf solche Teilungen Π beschränken, bei welchen sämtliche Teilintervalle kleiner sind als $\Delta(d)$, so können wir von P_1 nach Q_1, von Q_1 nach $Q_2 \ldots$, von Q_n nach P_2 je eine „kürzeste" Extremale ziehen, welche überdies ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}_0$ liegt. Wir bezeichnen nun mit U_Π den Wert des Integrals J entlang dem Extremalenzug $P_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_n P_2$:

$$U_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} J_{\mathfrak{E}_\nu}(Q_\nu Q_{\nu+1}) \tag{206}$$

und definieren[2]) als Wert des Integrals J entlang der Kurve $\mathfrak{L}$ die obere Grenze der Werte U_Π für alle möglichen, der angegebenen Bedingung genügenden Teilungen Π. Wir bezeichnen den so definierten Integralwert mit $J_{\mathfrak{L}}'$, so daß also

$$J_{\mathfrak{L}}'(P_1 P_2) = \overline{\underset{(\Pi)}{L}}\, U_\Pi. \tag{207}$$

Die Summe U_Π hat nun die wichtige Eigenschaft, daß

$$U_{\Pi'} \overline{\gtrless} U_\Pi, \tag{208}$$

wenn die Teilung Π' aus der Teilung Π durch Weiterteilung der Intervalle von Π entstanden ist, vorausgesetzt, daß die Teilung Π hinreichend fein gewählt

---

[1]) Vgl. Jordan, *Cours d'Analyse,* Bd. I, Nr. 107.

[2]) Diese Definition ist nicht wesentlich verschieden von der von Osgood (Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 294, Fußnote) herrührenden Modifikation einer von Hilbert in Vorlesungen gegebenen Definition des verallgemeinerten Integrals (vgl. Noble, *„Eine neue Methode in der Variationsrechnung"*, Dissertation, Göttingen 1901, p. 18).

worden ist. Es genügt dazu, in der Bezeichnung von p. 290 sämtliche Teilintervalle von Π kleiner als $\Delta\left(\frac{\varrho_0}{2}\right)$ zu nehmen, wenn ϱ_0 für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ wie in § 33, b) definiert ist. Sind nämlich bei der Teilung Π' zwischen den Punkten Q_ν und $Q_{\nu+1}$ von Π die Zwischenpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_m$ eingeschaltet, so liegt alsdann der Extremalenzug $Q_\nu M_1 M_2 \ldots M_m Q_{\nu+1}$ ganz im Innern des Kreises (Q_ν, ϱ_0), und daher ist der Wert des Integrals J entlang demselben nach Satz III von § 33 $\overline{\overline{>}} J_{\mathfrak{E}_\nu}(Q_\nu Q_{\nu+1})$, woraus unmittelbar unsere Behauptung folgt.

Auf Grund dieser Eigenschaft der Summe U_Π kann man nun aber mittels der Methode der Superposition zweier Teilungen unter Benutzung der Ungleichung (184b) den Satz beweisen[1]):

Wenn die obere Grenze $J_\mathfrak{L}'$ endlich ist, so ist sie zugleich die Grenze der Summe U_Π bei unendlicher Verkleinerung der Teilintervalle:

$$\underset{\Delta\tau=0}{L}\, U_\Pi = J_\mathfrak{L}', \tag{209}$$

und ist P ein Punkt von $\mathfrak{L}$ zwischen P_1 und P_2, so sind auch die Integrale $J_\mathfrak{L}'(P_1 P)$ und $J_\mathfrak{L}'(P P_2)$ endlich, und es ist

$$J_\mathfrak{L}'(P_1 P_2) = J_\mathfrak{L}'(P_1 P) + J_\mathfrak{L}'(P P_2)\,. \tag{210}$$

Weiter gilt der Satz: *Das Integral $J_\mathfrak{L}'$ ist stets endlich, wenn die Kurve $\mathfrak{L}$ rektifizierbar ist.* Denn nach (184b) ist

$$|U_\Pi| \overline{\overline{<}} \frac{N_0}{g_0} \sum_{\nu=0}^{n} |Q_\nu Q_{\nu+1}|\,,$$

wo die beiden Größen N_0, g_0 für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 33, b).

Es fragt sich schließlich noch, welche Beziehung zwischen der Weierstraß'schen Definition des verallgemeinerten Integrals und der hier gegebenen besteht. Hierüber gilt der Satz:

Ist die Kurve $\mathfrak{L}$ rektifizierbar und ist das Variationsproblem regulär entlang $\mathfrak{L}$, so hat das verallgemeinerte Integral nach beiden Definitionen einen bestimmten endlichen Wert und zwar denselben für beide:

$$J_\mathfrak{L}' = J_\mathfrak{L}\,. \tag{211}$$

Denn stellt man die kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_\nu$ von Q_ν nach $Q_{\nu+1}$ in der Normalform (168) dar durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_\nu: \qquad x = \varphi_\nu(t, a_\nu)\,, \qquad y = \psi_\nu(t, a_\nu)\,, \qquad 0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_\nu\,,$$

und schreibt zur Abkürzung

$$F(\varphi_\nu(t, a_\nu),\ \psi_\nu(t, a_\nu),\ \varphi_\nu'(t, a_\nu),\ \psi_\nu'(t, a_\nu)) = \mathcal{F}_\nu(t, a_\nu)\,,$$

---

[1]) Man schließt ganz analog wie Jordan, loc. cit., Nr. 107, 108.

so ist nach dem Mittelwertsatz

$$U_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{F}_\nu(\tilde{t}_\nu, a_\nu) t_\nu$$

wo $\tilde{t}_\nu$ einen Mittelwert zwischen 0 und t_ν bedeutet. Daher ist

$$U_\Pi - W_\Pi = \sum_{\nu=0}^{n} r_\nu \Big\{ [\mathfrak{F}_\nu(\tilde{t}_\nu, a_\nu) - F(\xi_\nu, \eta_\nu, \cos a_\nu, \sin a_\nu)]$$
$$- [F(\xi_\nu, \eta_\nu, \cos \omega_\nu, \sin \omega_\nu) - F(\xi_\nu, \eta_\nu, \cos a_\nu, \sin a_\nu)] + \left(\frac{t_\nu}{r_\nu} - 1\right) \mathfrak{F}_\nu(\tilde{t}_\nu, a_\nu) \Big\},$$

wenn r_ν und ω_ν wieder die Länge, resp. die Amplitude des Vektors $Q_\nu Q_{\nu+1}$ bedeuten.

Aus der Gleichmäßigkeit der Grenzübergänge (183), (186) und aus der Ungleichung

$$|\mathfrak{F}_\nu(\tilde{t}_\nu, a_\nu)| \overline{\gtrless} N_0$$

folgt nunmehr, daß man zu jedem positiven ε ein δ_ε angeben kann, so daß

$$|U_\Pi - W_\Pi| < \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} |Q_\nu Q_{\nu+1}|,$$

sobald alle Teilintervalle von Π kleiner sind als δ_ε. Wenn nun die Kurve $\mathfrak{L}$ rektifizierbar und L ihre Länge ist, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} |Q_\nu Q_{\nu+1}| \overline{\gtrless} L$$

und zugleich wissen wir, daß dann U_Π für $\Delta\tau = 0$ gegen eine bestimmte endliche Grenze $J_{\mathfrak{L}}'$ konvergiert. Derselben Grenze muß sich daher auch W_Π nähern, was zu beweisen war.

d) **Ausdehnung des Hinlänglichkeitsbeweises auf Kurven der Klasse K:**

Es sei jetzt $\mathfrak{E}_0$ ein die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindender Extremalenbogen ohne mehrfache Punkte, welcher ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt. Wir setzen voraus, daß für den Bogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (II'), (III'), (IV') erfüllt sind. Dann können wir nach § 32, b) den Bogen $\mathfrak{E}_0$ mit einem Feld $\mathcal{S}_{h,k}$ umgeben, in welchem die Ungleichung (198) erfüllt ist.

Weiter sei $\mathfrak{L}$ irgend eine Kurve der Klasse K, welche ebenfalls die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet, ganz im Innern des Feldes $\mathcal{S}_{h,k}$ verläuft und mindestens einen Punkt enthält, welcher nicht auf dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ oder seiner Fortsetzung liegt. Wir wollen beweisen, daß dann

$$J_{\mathfrak{L}} > J_{\mathfrak{E}_0}, \tag{212}$$

unter $J_{\mathfrak{L}}$ das in b) definierte verallgemeinerte Kurvenintegral verstanden.

Beweis: Die Kurve $\mathfrak{L}$ sei wieder durch die Gleichungen (202) dargestellt. Wir wählen eine beliebige Teilung Π des Intervalls $[t_1 t_2]$ und konstruieren das zugehörige, der Kurve $\mathfrak{L}$ eingeschriebene Polygon $\mathfrak{P}_\Pi$. Da die Kurve $\mathfrak{L}$ ganz im Innern des Feldes $\mathcal{S}_{h,k}$ liegen sollte, so wird auch das Polygon $\mathfrak{P}_\Pi$ ganz im Innern von $\mathcal{S}_{h,k}$ liegen, vorausgesetzt, daß die sämtlichen Teilintervalle hinreichend klein gewählt worden sind. Da das Polygon überdies eine gewöhnliche Kurve ist, so folgt aus unseren Voraussetzungen nach § 32, b), daß

$$V_\Pi \geqq J_{\mathfrak{E}_0}.$$

Gehen wir daher zur Grenze über und benutzen die Definition (205) für das Integral $J_{\mathfrak{L}}$, so folgt:

$$J_{\mathfrak{L}} \geqq J_{\mathfrak{E}_0}.$$

Es läßt sich nun aber, wie schon WEIERSTRASS[1]) bemerkt hat, noch weiter zeigen, daß unter den gemachten Annahmen stets $J_{\mathfrak{L}} > J_{\mathfrak{E}_0}$. Dies folgt sofort aus dem Osgood'schen Satz, am einfachsten in der in § 46, d) gegebenen Formulierung. Denn ist Q ein Punkt von $\mathfrak{L}$, welcher nicht auf dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ oder dessen Fortsetzung liegt, und ist $a = a_0 + l$ der Wert des Parameters der durch den Punkt Q gehenden Feldextremalen, dann ist: $0 < |l| < k$. Daraus folgt aber nach dem erwähnten Satz, daß sich eine positive Größe ε_l angeben läßt, derart daß für jede gewöhnliche, P_1 und P_2 verbindende Kurve $\mathfrak{C}$, welche durch den Punkt Q geht und ganz im Innern des Feldes verläuft,

$$J_{\mathfrak{C}} - J_{\mathfrak{E}_0} \geqq \varepsilon_l.$$

Beschränken wir uns daher bei dem obigen Grenzprozeß auf solche Teilungen Π, welche den Punkt Q als Teilungspunkt enthalten, was, wie man leicht zeigt, auf denselben Grenzwert für das Integral V_Π führt, so ist

$$V_\Pi - J_{\mathfrak{E}_0} \geqq \varepsilon_l$$

---

[1]) *Vorlesungen* 1879; den Weierstraß'schen Beweis findet man in § 31, e), meiner *Lectures* durchgeführt. Der im Text gegebene Beweis rührt von OSGOOD her, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901) p. 292.

und daher, wenn wir zur Grenze übergehen,

$$J_{\mathfrak{L}} - J_{\mathfrak{E}_0} \geqq \varepsilon_l,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Auch der Satz über die Existenz eines Minimums im Kleinen läßt sich auf Vergleichskurven der Klasse K ausdehnen:

Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein Bereich, für welchen die Voraussetzungen von § 33, b) erfüllt sind, und es sei r_0 für den Bereich $\mathfrak{R}_0$ definiert wie in § 34, b). Sind dann P_1 und P_2 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{R}_0$, deren Entfernung kleiner ist als r_0, und ziehen wir von P_1 nach P_2 einerseits die kürzeste Extremale $\mathfrak{E}_{12}$, andererseits eine beliebige Kurve $\mathfrak{L}$ der Klasse K, welche ganz im Innern des Kreises (P_1, r_0) liegt und mindestens einen Punkt enthält, welcher nicht auf dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_{12}$ liegt, so ist: $J_{\mathfrak{L}} > J_{\mathfrak{E}_{12}}$.

Der Beweis ist ganz analog wie oben mittels des Osgood'schen Satzes, diesmal in der Form von § 34, b), zu führen; an Stelle des Feldes $\mathcal{S}_{h,k}$ tritt jetzt die Kreisfläche (P_1, r_0).