Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Viertes Kapitel. Hilfssätze über reelle Funktionen reeller Variabeln

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Viertes Kapitel.[1]

Hilfssätze über reelle Funktionen reeller Variabeln.

Teils als Nachtrag zu den bisherigen Kapiteln, hauptsächlich aber als Vorbereitung für die schwierigeren Untersuchungen der folgenden, stellen wir im gegenwärtigen Kapitel eine Reihe von Sätzen über reelle Funktionen reeller Variabeln zusammen, die für eine arithmethisch strenge Begründung der Variationsrechnung nicht zu entbehren sind. Es handelt sich dabei im wesentlichen um gewisse Existenztheoreme über implizite Funktionen und über Systeme von Differentialgleichungen, die gewöhnlich nur für die Umgebung eines Punktes bewiesen werden, während man sie in der Variationsrechnung für die Umgebung einer ganzen Kurve nötig hat.

§ 21. Über die Umgebung einer Punktmenge.

Wir werden sagen, ein Punkt $P(x_1', \ldots, x_n')$ liege in der Umgebung (ϱ) einer im $x_1, \ldots, x_n$-Raum definierten Punktmenge $\mathfrak{A}$, wenn er in der Umgebung (ϱ) wenigstens eines Punktes von $\mathfrak{A}$ liegt, d. h. also, wenn es mindestens einen Punkt $A(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathfrak{A}$ gibt, derart, daß

$$|x_1' - a_1| < \varrho, \ldots, |x_n' - a_n| < \varrho. \tag{1}$$

Die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche in der Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{A}$ liegen, bezeichnen wir mit $(\varrho)_{\mathfrak{A}}$ und nennen sie *„die Umgebung (ϱ) der Menge $\mathfrak{A}$“.*

---

[1]) Wir empfehlen dem Leser dieses Kapitel zunächst zu überschlagen und erst später nach Bedarf darauf zurückzugreifen.

Man zeigt leicht, daß jeder Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{A}}$ zugleich ein innerer[1]) Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{A}}$ ist; ferner, daß $(\sigma)_{\mathfrak{A}}$ stets in $(\varrho)_{\mathfrak{A}}$ enthalten ist[2]), wenn $\sigma \lesseqgtr \varrho$.

Dagegen werden wir sagen der Punkt $P(x_1', \ldots, x_n')$ liege in der *„geschlossenen Umgebung* $[\varrho]$ *der Menge* $\mathfrak{A}$“, in Zeichen: in $[\varrho]_{\mathfrak{A}}$, wenn es mindestens einen Punkt $A(a_1, \ldots, a_n)$ von $\mathfrak{A}$ gibt, für welchen

$$|x_1' - a_1| \leqq \varrho, \ldots, |x_n' - a_n| \leqq \varrho. \tag{1a}$$

Ist $\mathfrak{A}$ beschränkt und abgeschlossen[3]), so ist auch die Menge $[\varrho]_{\mathfrak{A}}$ beschränkt und abgeschlossen.

Unter Benutzung dieser Terminologie beweisen wir nun zunächst folgende Hilfssätze:

a) **Lemma I:**

Ist $\mathfrak{B}$ eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, welche ganz im Innern einer anderen Menge $\mathfrak{A}$ liegt, so läßt sich ϱ so klein wählen, daß die Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{B}}$ ganz in $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

Wir wenden zum Beweis eine in der Theorie der Punktmengen häufig benutzte Schlußweise[4]) an, von der wir noch wiederholt Gebrauch zu machen haben werden:

Angenommen, wie klein wir auch ϱ wählen mögen, so gäbe es immer noch mindestens einen Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{B}}$, welcher nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört. Dann wählen wir eine abnehmende Folge von positiven Größen mit der Grenze Null:

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \cdots > \varrho_\nu > \cdots > 0,$$
$$\underset{\nu=\infty}{L} \varrho_\nu = 0. \tag{2}$$

In $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{B}}$ gibt es nach Annahme mindestens einen Punkt $P_\nu(x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu)$, welcher nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört; nach der Definition von $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{B}}$ läßt sich dem Punkt P_ν mindestens ein Punkt $B_\nu(b_1^\nu, \ldots, b_n^\nu)$ von $\mathfrak{B}$ zuordnen, so daß

$$|x_\alpha^\nu - b_\alpha^\nu| < \varrho_\nu, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. A I 7.

[2]) Auch die Umkehrung dazu gilt, vorausgesetzt daß es Punkte des (x)-Raumes gibt, welche außerhalb $\mathfrak{A}$ liegen, und daß ϱ hinreichend klein gewählt ist.

[3]) Vgl. A I 2 und 6.

[4]) Vgl. z. B. Jordan, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 30.

Wir betrachten jetzt die Folge $\{B_\nu\}$. Hat dieselbe unendlich viele verschiedene Punkte, so besitzt sie mindestens einen Häufungspunkt[1]) $H(h_1, \ldots, h_n)$, da sie als Teilmenge von $\mathfrak{B}$ beschränkt ist. Wir können dann stets aus der Folge $\{B_\nu\}$ eine unendliche Folge $\{B_{\nu_i}\}$, wo $\nu_{i+1} > \nu_i$, herausgreifen derart daß[2])

$$\underset{i=\infty}{L} B_{\nu_i} = H. \tag{4}$$

Enthält dagegen die Menge $\{B_\nu\}$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Punkte, so kommt mindestens einer derselben unendlich oft vor; wir können also in diesem Fall eine unendliche Folge $\{B_{\nu_i}\}$ herausgreifen, so daß

$$B_{\nu_i} = H;$$

daher gilt auch hier (4).

In beiden Fällen folgt aus (2) und (3), daß auch

$$\underset{i=\infty}{L} P_{\nu_i} = H. \tag{4a}$$

Der Punkt H gehört stets zu $\mathfrak{B}$. Im zweiten Fall ist dies unmittelbar klar, im ersten Fall folgt zunächst, daß H als Häufungspunkt von $\{B_\nu\}$ a fortiori auch Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{B}$ ist, in welcher $\{B_\nu\}$ enthalten ist. Da aber die Menge $\mathfrak{B}$ abgeschlossen ist, so enthält sie den Punkt H.

Hiermit sind wir aber bei einem Widerspruch angelangt; denn als Punkt von $\mathfrak{B}$ ist H ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}$, es gehören also alle Punkte in einer gewissen Umgebung von H zu $\mathfrak{A}$; andererseits gibt es nach (4a) in jeder Umgebung von H Punkte, welche nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören, nämlich die Punkte P_{ν_i} für hinreichend große Werte von i.

Daraus folgt, daß unsere Annahme falsch war, und damit ist der Satz bewiesen.

Da jeder Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{B}}$ zugleich ein innerer Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{B}}$ ist, so folgt überdies, daß $(\varrho)_{\mathfrak{B}}$ *ganz im Innern von* $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

Ist ferner: $0 < \sigma < \varrho$, so ist a fortiori auch $[\sigma]_{\mathfrak{B}}$ ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ enthalten.

Ein stetiger Kurvenbogen

$$\mathfrak{C}: \qquad x_\alpha = \varphi_\alpha(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

[1]) Nach A I 5.

[2]) Vgl. A I 4. Die Gleichung (4) bedeutet natürlich

$$\underset{i=\infty}{L} b_\alpha^{\nu_i} = h_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

ist eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge[1]) im $x_1, \ldots, x_n$-Raum. Liegt daher ein solcher Bogen ganz im Innern eines Bereiches $\mathfrak{A}$, so gibt es stets eine Umgebung (ϱ) der Kurve $\mathfrak{C}$, welche ganz in $\mathfrak{A}$ liegt. In dieser Form haben wir schon häufig von dem Satz Gebrauch gemacht.

b) **Lemma II (Erweiterter Vorzeichensatz[2])):**

Ist die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ stetig in[3]) einem Bereich $\mathfrak{A}$ und positiv in einer beschränkten, abgeschlossenen, ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegenen Punktmenge $\mathfrak{C}$, so läßt sich ϱ so klein wählen, daß $f(x_1, \ldots, x_n)$ auch noch in der ganzen Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ positiv ist.

Beweis: Ist C irgend ein Punkt von $\mathfrak{C}$, so ist f positiv in C und da C ein innerer Punkt des Bereiches $\mathfrak{A}$ ist, in welchem f stetig ist, so läßt sich eine gewisse Umgebung von C angeben, in welcher f auch noch positiv[4]) ist. Bezeichnet also $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit derjenigen Punkte von $\mathfrak{A}$, in welchen f positiv ist, so ist die Menge $\mathfrak{C}$ nicht nur in $\mathfrak{B}$ enthalten, sondern sie liegt auch ganz im Innern von $\mathfrak{B}$. Daher können wir Lemma I auf die beiden Mengen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ anwenden und erhalten unmittelbar den obigen Satz.

Ist z. B. die Funktion $f(x; a_1, \ldots, a_n)$ stetig im Bereich

$$X_1 < x < X_2, \quad |a_i - a_i^0| < d, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

und ist

$$f(x; a_1^0, \ldots, a_n^0) > 0,$$

für

$$x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2,$$

wo $X_1 < x_1$, $x_2 < X_2$, so läßt sich k so klein wählen, daß

$$f(x; a_1, \ldots, a_n) > 0$$

in dem ganzen Bereich

$$x_1 - k < x < x_2 + k, \quad |a_i - a_i^0| < k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Denn dieser Bereich ist identisch mit der Umgebung (k) der beschränkten, abgeschlossenen Menge

$$x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2, \quad a_i = a_i^0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

in welcher f positiv ist.

---

[1]) Nach A VII 1.

[2]) Der Satz ist eine Erweiterung des Satzes von A III 2.

[3]) Vgl. A III 1 und 3.

[4]) Nach A III 2.

Zusatz: Das obige Lemma bleibt richtig, wenn darin das Wort „positiv" beidemale durch „*von Null verschieden*" ersetzt wird.

Denn wird nur vorausgesetzt, daß

$$f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{C}$$

so bezeichne $\mathfrak{C}'$ (resp. $\mathfrak{C}''$) die Gesamtheit derjenigen Punkte von $\mathfrak{C}$, in welchen f positiv (resp. negativ) ist. Alsdann ist jede der beiden Mengen $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ beschränkt und abgeschlossen. Ersteres ist unmittelbar klar; um letzteres zu zeigen, sei $H(h_1, \ldots, h_n)$ ein Häufungspunkt von $\mathfrak{C}'$; dann kann man aus $\mathfrak{C}'$ ein unendliche Folge[1]) von Punkten $P_\nu(x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu)$ herausgreifen, so daß

$$\underset{\nu=\infty}{L} P_\nu = H.$$

Aus der Stetigkeit von f folgt dann, daß

$$f(h_1, \ldots, h_n) = \underset{\nu=\infty}{L} f(x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu) \geqq 0.$$

Nun ist aber der Punkt H als Häufungspunkt von $\mathfrak{C}'$ a fortiori zugleich Häufungspunkt von $\mathfrak{C}$, und da $\mathfrak{C}$ abgeschlossen ist, so ist H in $\mathfrak{C}$ enthalten; es ist also nach Voraussetzung

$$f(h_1, \ldots, h_n) \neq 0;$$

daher bleibt nur die Möglichkeit, daß $f(h_1, \ldots, h_n)$ positiv. Der Punkt H gehört also zu $\mathfrak{C}'$, und daher ist $\mathfrak{C}'$ abgeschlossen; das gleiche gilt von $\mathfrak{C}''$.

Wir können also nach Lemma II zwei positive Größen ϱ', ϱ'' angeben, so daß

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{in} \quad (\varrho')_{\mathfrak{C}'}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) < 0 \quad \text{in} \quad (\varrho'')_{\mathfrak{C}''}.$$

Bezeichnet daher ϱ die kleinere der beiden Größen ϱ', ϱ'', so folgt leicht, daß

$$f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad (\varrho)_{\mathfrak{C}}.$$

§ 22. Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendungen.

Es handelt sich um die Auflösung der n Gleichungen

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

nach $x_1, \ldots, x_n$. Wir formulieren zunächst den Satz, wie er in den

---

[1]) Vgl. A I 4.

Lehrbüchern gegeben zu werden pflegt, und knüpfen daran die Erweiterung, die wir für die Zwecke der Variationsrechnung nötig haben.

a) **Der Satz über die Inversion eines Funktionensystems für die Umgebung eines Punktes:**

Dabei wird die Auflösung des Gleichungssystems (5) unter folgenden Annahmen betrachtet:

A) Die Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ sind von der Klasse C' in einer gewissen Umgebung (d) eines Punktes $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$.

B) Die Funktionaldeterminante

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) \equiv \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

ist an der Stelle (a) von Null verschieden.

Setzt man dann

$$f_i(a_1, \ldots, a_n) = b_i,$$

so läßt sich nach Annahme einer hinreichend kleinen positiven Größe $\delta < d$ eine zweite positive Größe ε derart bestimmen, daß die Gleichungen (5) für jedes Wertsystem $y_1, \ldots, y_n$, für welches

$$|y_i - b_i| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

eine und nur eine Lösung $x_1, \ldots, x_n$ besitzen, für welche

$$|x_i - a_i| < \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bezeichnen wir diese Lösung, die natürlich von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ abhängt, mit

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

so sind die Funktionen ψ_i eindeutig definiert und von der Klasse C' im Bereich: $|y_i - b_i| < \varepsilon$, und die partiellen Ableitungen von ψ_i werden nach den gewöhnlichen Differentiationsregeln für implizite Funktionen erhalten. Der Satz ist ein spezieller Fall des Dini'schen Satzes über implizite Funktionen[1]).

---

[1]) Für den Beweis des letzteren verweisen wir auf Dini, *Analisi infinitesimale* (litt.), Bd. I, p. 163; Peano, *Differentialrechnung*, Nr. 110—117; C. Jordan, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 91, 92; Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. I, p. 47—57.

b) **Der erweiterte Satz über die Inversion eines Funktionensystems**[1]:

Wir betrachten jetzt die Auflösung des Gleichungssystems

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

und zugleich die durch diese Gleichungen vermittelte Abbildung des (x)-Raumes auf den (y)-Raum unter den folgenden allgemeineren Voraussetzungen:

A) *Die Funktionen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ sind von der Klasse C' in einem Bereich $\mathfrak{A}$.*

B) *$\mathfrak{C}$ ist eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge im Innern von $\mathfrak{A}$.*

C) *Zwei verschiedenen Punkten (x'), (x'') von $\mathfrak{C}$ werden durch die Transformation (5) allemal zwei verschiedene Punkte (y'), (y'') zugeordnet.*

D) *Die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) \equiv \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

ist von Null verschieden in $\mathfrak{C}$.

Alsdann läßt sich eine positive Größe ϱ so klein wählen, daß die Transformation (5) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen der Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ und deren Bild $\mathfrak{S}_\varrho$ im (y)-Raum definiert, oder anders ausgedrückt, daß für jedes (y) in $\mathfrak{S}_\varrho$ die Gleichungen (5) eine und nur eine Lösung in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ besitzen.

Beweis: Zunächst können wir nach § 21, a) eine positive Größe d so klein wählen, daß die Umgebung $(d)_{\mathfrak{C}}$ ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt. Alsdann wählen wir eine abnehmende Folge positiver Größen mit der Grenze Null:

$$\left.\begin{array}{c} d > \varrho_1 > \varrho_2 > \cdots \varrho_\nu > \cdots > 0 \\ \underset{\nu=\infty}{L} \varrho_\nu = 0 \end{array}\right\}, \tag{6}$$

und nehmen an, es gäbe für jeden Wert des Index ν in der Umgebung $(\varrho_\nu)_{\mathfrak{C}}$ mindestens ein Paar verschiedener Punkte

$$P'_\nu(x'_{1\nu}, \ldots, x'_{n\nu}), \qquad P''_\nu(x''_{1\nu}, \ldots, x''_{n\nu}),$$

deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen. Wir wollen zeigen,

---

[1]) Siehe Bolza, Mathematische Annalen, Bd. 63 (1906), p. 247; vgl. auch Bolza, *Lectures,* § 34, wo ein spezieller Fall des Satzes bewiesen wird.

daß diese Annahme zu einem Widerspruch mit unseren Voraussetzungen führt.

Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, daß nach der Definition der Umgebung einer Punktmenge den Punkten P'_ν, P''_ν sich zwei Punkte von $\mathfrak{C}$ zuordnen lassen:

$$\Pi'_\nu(\xi'_{1\nu}, \ldots, \xi'_{n\nu}), \qquad \Pi''_\nu(\xi''_{1\nu}, \ldots, \xi''_{n\nu}),$$

derart daß[1])

$$|x'_{i\nu} - \xi'_{i\nu}| < \varrho_\nu, \qquad |x''_{i\nu} - \xi''_{i\nu}| < \varrho_\nu, \tag{7}$$

und betrachten nunmehr die Folge von Punkten

$$\{Z_\nu\} = \{(\xi'_{1\nu}, \ldots, \xi'_{n\nu};\ \xi''_{1\nu}, \ldots, \xi''_{n\nu})\},$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, \text{ in inf.}$$

im $2n$-dimensionalen Raum der Variabeln $\xi'_1, \ldots, \xi'_n;\ \xi''_1, \ldots, \xi_n$. Dieselbe ist enthalten in der durch die Bedingungen

$$(\xi'_1, \ldots, \xi'_n) \text{ in } \mathfrak{C}; \qquad (\xi''_1, \ldots, \xi''_n) \text{ in } \mathfrak{C}$$

definierten Menge $\mathfrak{D}$. Letztere Menge ist beschränkt; also ist es auch die Menge $\{Z_\nu\}$. Daraus folgt nach der in § 21, a) benutzten Methode, daß ein Punkt $(h'_1, \ldots, h'_n; h''_1, \ldots, h''_n)$ und eine zugehörige Teilfolge $\{Z_{\nu_\mu}\}$ von $\{Z_\nu\}$ existieren (wo wieder $\nu_{\mu+1} > \nu_\mu$), derart daß

$$\underset{\mu=\infty}{L} Z_{\nu_\mu} = (h'_1, \ldots, h'_n;\ h''_1, \ldots, h''_n),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\underset{\mu=\infty}{L} \Pi'_{\nu_\mu} = H', \qquad \underset{\mu=\infty}{L} \Pi''_{\nu_\mu} = H'',$$

wenn wir mit H' und H'' die Punkte

$$H' = (h'_1, \ldots, h'_n), \qquad H'' = (h''_1, \ldots, h''_n)$$

im (x)-Raum bezeichnen.

Die Menge $\mathfrak{D}$ ist überdies abgeschlossen, wie leicht zu zeigen ist; daraus schließt man wie in § 21, a), daß der Punkt $(h'_1, \ldots, h'_n; h''_1, \ldots, h''_n)$ zu $\mathfrak{D}$ gehört, d. h. daß die beiden Punkte H', H'' zur Menge $\mathfrak{C}$ gehören. Endlich folgt aus (6) und (7), daß auch

$$\underset{\mu=\infty}{L} P'_{\nu_\mu} = H', \quad \underset{\mu=\infty}{L} P''_{\nu_\mu} = H''. \tag{8}$$

[1]) Dem Index i sind stets die Werte $1, 2, \ldots, n$ zu geben.

Nun läßt sich aber zeigen, daß die beiden Punkte H', H'' zusammenfallen müssen. Denn nach der Definition der Punkte P'_ν, P''_ν ist

$$f_i(x'_{1\nu}, \ldots, x'_{n\nu}) = f_i(x''_{1\nu}, \ldots, x''_{n\nu}),$$

also wenn wir

$$F(x'_1, \ldots, x'_n;\, x''_1, \ldots, x''_n) = \sum_i \left[f_i(x'_1, \ldots, x'_n) - f_i(x''_1, \ldots, x''_n)\right]^2$$

definieren,

$$F(x'_{1\nu}, \ldots, x'_{n\nu};\, x''_{1\nu}, \ldots, x''_{n\nu}) = 0.$$

Aus (8) folgt daher unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Funktion F, daß

$$\underset{\mu=\infty}{L} F\left(x'_{1\nu_\mu}, \ldots, x'_{n\nu_\mu};\, x''_{1\nu_\mu}, \ldots, x''_{n\nu_\mu}\right) = F(h'_1, \ldots, h'_n;\, h''_1, \ldots, h''_n) = 0,$$

also, da wir es nur mit reellen Größen zu tun haben,

$$f_i(h'_1, \ldots, h'_n) = f_i(h''_1, \ldots, h''_n).$$

Das heißt aber: Die Bilder der beiden Punkte H', H'' fallen zusammen, und daher müssen die beiden Punkte selbst nach Voraussetzung C) zusammenfallen, da sie beide zur Menge $\mathfrak{C}$ gehören. Wir schreiben

$$H' = H'' = H;$$

also ist

$$\underset{\mu=\infty}{L} P'_{\nu_\mu} = H, \qquad \underset{\mu=\infty}{L} P''_{\nu_\mu} = H. \tag{9}$$

Somit folgt aus der eingangs gemachten Annahme, *daß es einen Punkt H der Menge $\mathfrak{C}$ gibt, derart daß in jeder Nähe von H Paare verschiedener Punkte existieren, deren Bilder im (y)-Raum zusammenfallen.*

Dies führt nun aber unmittelbar zu einem Widerspruch mit unseren Voraussetzungen. Denn einerseits sind für den Punkt H die Voraussetzungen des Satzes von § 22, a) erfüllt; bezeichnet also K das Bild des Punktes H im (y)-Raum, so lassen sich nach a) zwei positive Größen δ und ε angeben, derart daß die Gleichungen (5) für jedes Wertsystem (y) in der Umgebung (ε) des Punktes K eine und nur eine Lösung in der Umgebung (δ) des Punktes H besitzen.

Andererseits folgt aber aus den Gleichungen (9) und aus der Stetigkeit der Funktionen f_i, daß

$$\underset{\mu=\infty}{L} Q_{\nu_\mu} = K,$$

wenn Q_{ν_μ} den gemeinsamen Bildpunkt von P'_{ν_μ} und P''_{ν_μ} bezeichnet. Wir können daher nach (9) den Index μ so groß wählen, daß P'_{ν_μ} und P''_{ν_μ} in die Umgebung (δ) des Punktes H, und gleichzeitig Q_{ν_μ} in die Umgebung (ε) des Punktes K fällt, was einen Widerspruch mit dem Vorangegangenen involviert, da für $(y) = Q_{\nu_\mu}$ die Gleichungen (5) die beiden verschiedenen Lösungen $(x) = P'_{\nu_\mu}$ und P''_{ν_μ} besitzen.

Daher muß die Annahme, von der wir ausgegangen sind, falsch sein; es muß also mindestens einen Wert $\nu = m$ geben, derart daß zwei verschiedenen Punkten der Umgebung $(\varrho_m)_{\mathfrak{C}}$ durch die Transformation (5) allemal zwei verschiedene Punkte des (y)-Raumes zugeordnet werden. Sobald wir also $\varrho \overline{\gtrless} \varrho_m$ wählen, ist die durch (5) definierte Beziehung zwischen $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ und $\mathfrak{S}_\varrho$ eine ein-eindeutige, Q. E. D.

c) **Eigenschaften des Bereiches $\mathfrak{S}_\varrho$ und der inversen Funktionen:**

Wird ϱ der zuletzt angegebenen Bedingung gemäß gewählt, so haben die Gleichungen (5) für jedes der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ angehörige Wertsystem $y_1, \ldots, y_n$ eine und nur eine Lösung $x_1, \ldots, x_n$ in der Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$. Diese Werte der x sind daher in $\mathfrak{S}_\varrho$ eindeutig definierte Funktionen von $y_1, \ldots, y_n$, die wir mit

$$x_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n) \tag{10}$$

bezeichnen. Es soll gezeigt werden

Zusatz I: Unter den Voraussetzungen A) bis D) läßt sich ϱ so klein wählen, daß jeder Punkt der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{S}_\varrho$ ist, und daß überdies die inversen Funktionen $\psi_i(y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathfrak{S}_\varrho$ von der Klasse C' sind.

Zum Beweis wählen wir $\varrho (\overline{\gtrless} \varrho_m)$ so klein, daß

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \quad \text{in} \quad (\varrho)_{\mathfrak{C}}, \tag{11}$$

was nach § 21, b) auf Grund unserer Voraussetzungen A), B), D) möglich ist. Alsdann sei (x') irgend ein Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$, und (y') sein Bild im (y)-Raum. Nach einer früheren Bemerkung ist der Punkt (x') zugleich ein innerer Punkt von $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$; wir können also eine positive Größe d so klein wählen, daß die ganze Umgebung (d) von (x') auch noch in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ liegt. In dieser Umgebung (d) sind dann die Funktionen f_i von der Klasse C'; ferner ist

$$\Delta(x'_1, \ldots, x'_n) \neq 0 .$$

Wir können also nach dem gewöhnlichen Inversionssatz (§ 22, a)) zwei positive Größen $\delta < d$ und ε angeben, derart daß für jeden

Punkt (y) in der Umgebung (ε) des Punktes (y') die Gleichungen (5) eine und nur eine Lösung (x) in der Umgebung (δ) des Punktes (x') besitzen, und daß gleichzeitig die inversen Funktionen $\psi_i(y_1, \ldots, y_n)$ in der Umgebung (ε) von (y') von der Klasse C' sind.

Jeder Punkt (y) in der Umgebung (ε) des Punktes (y') ist daher das Bild eines Punktes (x) des Bereiches $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ und gehört daher zur Menge $\mathcal{S}_\varrho$. Das heißt aber, jeder Punkt der Menge $\mathcal{S}_\varrho$ ist ein innerer Punkt von $\mathcal{S}_\varrho$, und zugleich folgt, daß $\psi_i(y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathcal{S}_\varrho$ von der Klasse C' ist.

In dem speziellen Fall, wo der Bereich $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ zusammenhängend ist, ist auch $\mathcal{S}_\varrho$ zusammenhängend[1]); in diesem Fall ist daher der Bereich $\mathcal{S}_\varrho$ ein Kontinuum[2]).

Aus dem eben bewiesenen Zusatz ergibt sich unmittelbar der folgende

Zusatz II: Bezeichnet $\mathfrak{E}$ das durch die Transformation (5) *definierte Bild der Menge $\mathfrak{C}$ im (y)-Raum, so läßt sich unter den Voraussetzungen A) bis D) neben der Größe ϱ eine zweite positive Größe σ bestimmen, derart, daß die Gleichungen* (5) *für jedes (y) in der Umgebung $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ eine und nur eine Lösung (x) in der Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ besitzen.*

Denn da $\mathfrak{C}$ beschränkt und abgeschlossen ist, so ist auch $\mathfrak{E}$ beschränkt und abgeschlossen[3]), und nach dem eben Bewiesenen liegt $\mathfrak{E}$ ganz im Innern von $\mathcal{S}_\varrho$. Also können wir nach § 21, a) σ so klein wählen, daß die Umgebung $(\sigma)_{\mathfrak{E}}$ ganz in $\mathcal{S}_\varrho$ enthalten ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

d) **Der allgemeine Satz von der Existenz eines Feldes:**

Es sei jetzt eine n-parametrige Schar von Kurven im $(n+1)$-dimensionalen Raum der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ gegeben

$$x_j = \varphi_j(t, a_1, \ldots, a_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{12}$$

welche folgende Bedingungen erfüllt:

A) Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ sind als Funktionen ihrer $n+1$ Argumente *von der Klasse C'* in einem Bereich

$$T_1 < t < T_2, \qquad |a_i - a_i^0| < d, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12a}$$

B) *Die spezielle Kurve*

$$\mathfrak{E}_0: \quad x_j = \varphi_j(t, a_1^0, \ldots, a_n^0), \quad t_1 \overline{<} t \overline{<} t_2, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

[1]) Nach Jordan, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 64.

[2]) Vgl. A I 9.

[3]) Nach A VII 1.

(wobei $T_1 < t_1$, $t_2 < T_2$), hat *keine mehrfachen Punkte*, d. h. zwei verschiedenen Werten von t im Intervall $[t_1 t_2]$ entsprechen stets zwei verschiedene Punkte der Kurve $\mathfrak{C}_0$.

C) *Die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(t, a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1})}{\partial(t, a_1, \ldots, a_n)}$$

ist von Null verschieden entlang $\mathfrak{C}_0$, *d. h.*

$$\Delta(t, a_1^0, \ldots, a_n^0) \neq 0 \quad in \quad [t_1 t_2]. \tag{13}$$

Alsdann lassen sich die positiven Größen $h, k_1, \ldots, k_n$ *so klein wählen, daß die Gleichungen (12) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich*

$$\mathfrak{A}: \quad t_1 - h \leqq t \leqq t_2 + h, \quad |a_i - a_i^0| \leqq k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

und dessen Bild $\mathfrak{J}$ *im* (x)-*Raum definieren, und daß gleichzeitig*

$$\Delta(t, a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \tag{14}$$

im ganzen Bereich $\mathfrak{A}$.

Das Bild $\mathfrak{J}'$ *des Bereiches*

$$\mathfrak{A}': \quad t_1 - h < t < t_2 + h, \quad |a_i - a_i^0| < k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

bildet dann ein Kontinuum, und die durch Auflösung der Gleichungen (12) erhaltenen inversen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} t &= \mathfrak{t}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ a_1 &= \mathfrak{a}_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n &= \mathfrak{a}_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

sind im Bereich $\mathfrak{J}$ *von der Klasse* C'.

Der Satz ist ein spezieller Fall unseres erweiterten Inversionssatzes. Der dort mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten Punktmenge entspricht hier die Menge

$$\mathfrak{C}: \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \qquad a_i = a_i^0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

welche in der Tat beschränkt und abgeschlossen ist und ganz im Innern von (12a) liegt. Der Satz ergibt sich dann unmittelbar, wenn man noch beachtet, daß die Umgebung $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ hier nichts anderes ist als der Bereich

$$t_1 - \varrho < t < t_2 + \varrho, \qquad |a_i - a_i^0| < \varrho, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Man hat dann nur $h, k_1, \ldots, k_n < \varrho$ zu wählen.

Zusatz: In dem speziellen Fall, wo die Koordinaten der Kurvenpunkte sich als eindeutige Funktionen einer dieser Koordinaten ausdrücken lassen, ist die Bedingung B) stets erfüllt und kann daher weggelassen werden.

Denn lautet z. B. die letzte der Gleichungen (12)

$$x_{n+1} = t,$$

so entsprechen zwei verschiedenen Werten von t stets verschiedene Werte von x_{n+1}, also sicher auch zwei verschiedene Kurvenpunkte.

Man beachte noch, daß in diesem Fall

$$\Delta(t, a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(a_1, \ldots, a_n)}.$$

e) **Der erweiterte Satz über implizite Funktionen:**

Bei dem Satz[1]) über implizite Funktionen in seiner gewöhnlichen Form handelt es sich um die Auflösung eines Gleichungssystems

$$f_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Dabei wird vorausgesetzt, es sei eine spezielle Lösung von (16):

$$x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m; \qquad y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n \tag{17}$$

bekannt, in deren Umgebung die Funktionen f_i von der Klasse C' sind. Ferner wird angenommen, daß an der Stelle (17) die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

von Null verschieden ist.

Alsdann lassen sich die Gleichungen (16) in der Umgebung der Stelle (17) eindeutig nach $y_1, \ldots, y_n$ auflösen, das heißt: Zu jedem hinreichend kleinen positiven ε gibt es eine zweite positive Größe δ derart, daß für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_m$, welches den Ungleichungen

$$|x_1 - a_1| < \delta, \qquad |x_2 - a_2| < \delta, \ldots, \qquad |x_m - a_m| < \delta$$

genügt, die Gleichungen (16) ein und nur ein Lösungssystem $y_1, \ldots, y_n$ besitzen, welches den Ungleichungen

$$|y_1 - b_1| < \varepsilon, \qquad |y_2 - b_2| < \varepsilon, \ldots, \qquad |y_n - b_n| < \varepsilon$$

genügt.

---

[1]) Vgl. die Zitate auf p. 159, Fußnote [1]).

Überdies sind die hierdurch eindeutig definierten impliziten Funktionen: $y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_m)$ in der Umgebung der Stelle $x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m$ von der Klasse C'.

Auch dieser Satz läßt sich von der Umgebung einer einzelnen Stelle auf die Umgebung einer Punktmenge ausdehnen. Dabei sollen folgende Voraussetzungen gemacht werden:

A) Die Funktionen f_i sind *von der Klasse* C' in einem Bereich $\mathfrak{A}$ des (x, y)-Raumes.

B) Die Gleichungen (16) werden befriedigt durch die Koordinaten x, y der Punkte einer *beschränkten, abgeschlossenen* Menge $\mathfrak{C}$, welche *ganz im Innern von* $\mathfrak{A}$ liegt.

C) Sind (x', y') und (x'', y'') zwei *verschiedene* Punkte von $\mathfrak{C}$, *so ist allemal auch* $(x') \neq (x'')$[1]).

D) *Die Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$$

ist von Null verschieden in $\mathfrak{C}$.

Bezeichnet alsdann $\mathfrak{X}$ die „Projektion“ von $\mathfrak{C}$ in den (x)-Raum so lassen sich zwei positive Größen ϱ und σ angeben, derart daß es *zu jedem* (x) *in der Umgebung* $(\sigma)_{\mathfrak{X}}$ *eine und nur eine Lösung* (y) *des Gleichungssystems* (16) *gibt, für welche* (x, y) *in der Umgebung* $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ *liegt, und daß die durch Auflösung der Gleichungen* (16) *erhaltenen impliziten Funktionen*

$$y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

im Bereich $(\sigma)_{\mathfrak{X}}$ *von der Klasse* C' *sind.*

Dabei ist unter der Projektion eines Punktes $x_1', \ldots, x_m', y_1', \ldots, y_n'$ in den (x)-Raum der Punkt: $x_1 = x_1', \ldots, x_m = x_m'$ verstanden.

Zum Beweis betrachten wir zunächst die Auflösung des Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} u_h = x_h, \qquad u_{m+i} = f_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

nach $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$.

Auf dieses Gleichungssystem können wir den Zusatz II zu dem erweiterten Inversionssatz (§ 22, c)) anwenden. Man erhält dann unter Berücksichtigung der speziellen Form des Systems (19) das

---

1) Wir können diese Bedingung auch so ausdrücken: *Innerhalb der Menge* $\mathfrak{C}$ sind die Gleichungen (16) eindeutig nach $y_1, \ldots, y_n$ auflösbar.

Resultat: Es gibt zwei positive Größen ϱ und σ derart, daß die Gleichungen (19) für jedes $(x_1, \ldots, x_m)$ in $(\sigma)_{\mathfrak{X}}$ und für jedes $u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}$, für welches $|u_{m+i}| < \sigma$, ein und nur ein Lösungssystem

$$y_i = \Psi_i(x_1, \ldots, x_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+n}),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzen, für welches der Punkt (x, y) in $(\varrho)_{\mathfrak{C}}$ liegt.

Setzt man schließlich $u_{m+i} = 0$, so erhält man den obigen Satz. Wir werden den Inhalt dieses Satzes kurz dahin zusammenfassen, daß unter den Voraussetzungen A) bis D) *die Gleichungen (16) sich in der Umgebung der Punktmenge $\mathfrak{C}$ eindeutig nach $y_1, \ldots, y_n$ auflösen lassen*[1]).

23. Existenztheoreme für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.[2])

Wir betrachten in diesem Paragraphen ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

unter folgenden Voraussetzungen:

A) Die reellen Funktionen $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sind eindeutig definiert und *stetig* in einem Bereich $\mathfrak{A}$ im Raum der reellen Variabeln $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

B) Die *partiellen Ableitungen* der f_k nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f_k^i = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

existieren und sind *stetig* im Innern desselben Bereiches $\mathfrak{A}$.

---

[1]) Zugleich folgt noch, daß $(\sigma)_{\mathfrak{X}}$ in $(\varrho)_{\mathfrak{X}}$ enthalten ist, und daraus folgt, daß stets $\sigma \overline{\overline{<}} \varrho$, da es Punkte des (x)-Raumes gibt, die außerhalb $\mathfrak{X}$ liegen (vgl. p. 155, Fußnote [2]). Daraus ergibt sich weiter, daß jede in $(\sigma)_{\mathfrak{C}}$ gelegene Lösung des Systems (16) zugleich dem System (18) genügt und umgekehrt.

[2]) Vgl. für das folgende das Referat von Painlevé, *Encyclopädie,* II A, p. 190—200, und die zusammenfassende Darstellung von Bliss, (Annals of Mathematics, (2) Bd. VI (1905), p. 49—68), dem ich mich in der Bezeichnung und der Formulierung der Sätze angeschlossen habe.

C) Der Punkt $A(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ liegt im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$.

Den Bereich $\mathfrak{A}$ nennen wir den *„Stetigkeitsbereich des Systems (20)“*. Es soll eine Lösung des Systems (20) bestimmt werden, welche den Anfangsbedingungen

$$x_k(\tau) = \xi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

genügt.

a) **Bestimmung eines Elementes der Lösung:**

Da der Punkt A im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt, so läßt sich eine positive Größe ϱ so bestimmen, daß auch die geschlossene Umgebung $[\varrho]$ des Punktes A, d. h. der durch die Ungleichungen

$$|t - \tau| \overline{\gtrless} \varrho, \qquad |x_1 - \xi_1| \overline{\gtrless} \varrho, \ldots, |x_n - \xi_n| \overline{\gtrless} \varrho$$

definierte Bereich, ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt. In dem abgeschlossenen Bereich $[\varrho]$ erreicht jede der stetigen Funktionen $|f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ einen endlichen Maximalwert; sei M der größte derselben, und sei l die kleinere der beiden Größen: $\varrho, \frac{\varrho}{M}$.

Alsdann gibt[1]) *es ein Funktionensystem (eine „Kurve“)*

$$x_k = x_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

welches für das Intervall: $|t - \tau| \overline{\gtrless} l$ *eindeutig definiert ist und in demselben folgende Eigenschaften besitzt:*

1. Die Funktionen $x_k(t)$ sind stetig und differentiierbar.

2. Sie genügen den Ungleichungen:

$$|x_k(t) - \xi_k| \overline{\gtrless} \varrho. \tag{23}$$

3. Sie genügen dem System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{20}$$

4. Sie genügen den Anfangsbedingungen

$$x_k(\tau) = \xi_k. \tag{21}$$

Eine Folge dieser Eigenschaften ist, daß auch die Ableitungen $x_k'(t)$ in demselben Intervall stetig sind.

Da die gefundene Lösung vorläufig nur für eine gewisse Umgebung von $t = \tau$ definiert ist, so nennen wir sie ein *„Element“* der

[1]) Zuerst von Cauchy bewiesen, vgl. Picard, *Traité*, Bd. II (1905), p. 322—330, 340—345; Goursat, *Cours d'Analyse*, Bd. II, p. 369—371, 376—382.

durch die Differentialgleichungen (20) und die Anfangsbedingungen (21) definierten Kurve.

Zusatz[1]: Ist $\mathfrak{A}_0$ eine beschränkte, abgeschlossene Menge im Innern von $\mathfrak{A}$, so läßt sich eine positive Größe l_0 angeben, so daß die Lösung durch irgend einen Punkt $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ von $\mathfrak{A}_0$ mindestens im Intervall $|t-\tau| \overline{\gtrless} l_0$ existiert und im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt. Denn wir können dann nach § 21, a) eine geschlossene Umgebung $[\varrho_0]_{\mathfrak{A}_0}$ angeben, welche ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt. Ist M_0 der größte der Maximalwerte der Funktionen $|f_k|$ in $[\varrho_0]_{\mathfrak{A}_0}$, so ist l_0 die kleinere der beiden Größen ϱ_0, $\frac{\varrho_0}{M_0}$.

b) **Die Peano'sche Ungleichung:**

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bereich im Gebiet der Variabeln $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, in welchem die Funktionen $f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ *stetig* sind und der *Lipschitz'schen Bedingung* genügen, d. h. es soll eine positive Größe K geben, derart daß für irgend zwei Punkte von $\mathfrak{B}$ mit derselben t-Koordinate:

$$t, x_1', \ldots, x_n' \quad \text{und} \quad t, x_1'', \ldots, x_n'',$$

die Ungleichungen gelten

$$\left.\begin{array}{c} |f_k(t, x_1', \ldots, x_n') - f_k(t, x_1'', \ldots, x_n'')| < K \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i' - x_i''| \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Ferner seien

$$x_k = x_k(t), \qquad x_k = \bar{x}_k(t),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

zwei für dasselbe Intervall: $\alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta$ definierte Lösungen[2] des Systems (20), welche ganz im Bereich $\mathfrak{B}$ liegen.

Setzt man dann

$$u_k(t) = \bar{x}_k(t) - x_k(t),$$

so ist

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - f_k(t, x_1, \ldots, x_n),$$

---

[1] Vgl. Bliss, loc. cit., p. 53.

[2] Dies involviert die Differentiierbarkeit (und daher a fortiori die Stetigkeit) von $x_k(t)$ und $\bar{x}_k(t)$ in $[\alpha\beta]$, was in der Folge stets in dem Wort „Lösung" inbegriffen sein soll.

also wegen (24)

$$\left|\frac{du_k}{dt}\right| < K\sum_i |u_i|. \tag{25}$$

Beachtet man, daß für die vordere Derivierte[1]) von $|u_k|$ die Ungleichung gilt

$$-\left|\frac{du_k}{dt}\right| \overline{\gtrless} \frac{\overset{+}{d}\,|u_k|}{dt} \overline{\gtrless} \left|\frac{du_k}{dt}\right|,$$

so folgt hieraus

$$-Kn\sum_i |u_i| < \frac{\overset{+}{d}\sum_i |u_i|}{dt} < Kn\sum_i |u_i|,$$

woraus man durch Integration zwischen den Grenzen t_0 und t die folgende von Peano[2]) herrührende Ungleichung erhält:

$$\sum_{i=1}^{n} |\bar{x}_i(t) - x_i(t)| < e^{nK|t-t_0|}\sum_{i=1}^{n} |\bar{x}_i(t_0) - x_i(t_0)|, \tag{26}$$

für

$$\alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta,$$

wenn t_0 irgend einen Wert von t im Intervall $[\alpha\beta]$ bedeutet.

c) **Einzigkeit der Lösung:**

Wir kehren jetzt wieder zu den Annahmen und Bezeichnungen von § 23, a) zurück. Es sei

$$\mathfrak{C}: \qquad x_k = x_k(t), \qquad \alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

irgend eine für ein gewisses Intervall $[\alpha\beta]$ definierte Lösung des Systems (20), welche ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt[3]).

Dann können wir nach § 21, a) eine positive Größe σ so klein wählen, daß auch die geschlossene Nachbarschaft $[\sigma]$ der Kurve $\mathfrak{C}$, d. h. der durch die Ungleichungen

$$\alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta, \qquad |x_k - x_k(t)| \overline{\gtrless} \sigma, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

definierte Bereich ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt.

---

[1]) Vgl. Bliss, loc. cit., p. 54, Fußnote; vgl. auch A IV 1.

[2]) Vgl. Nouvelles Annales (3), Bd. XI (1892), p. 79 und Atti di Torino, Bd. XXXIII (1897), p. 9.

[3]) Das soll heißen: für jedes t im Intervall $[\alpha\beta]$ liegt der Punkt $t, x_1(t), \ldots, x_n(t)$ im Innern von $\mathfrak{A}$.

Ferner sei

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x_k = \bar{x}_k(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

eine zweite ebenfalls für das Intervall $[\alpha\beta]$ definierte Lösung von (20), welche ganz in $[\sigma]$ liegt. Dann folgt aus der Stetigkeit der Funktionen f_k^i, daß im Bereich $[\sigma]$ die Lipschitz'sche Bedingung erfüllt ist.[1]) Wir dürfen also auf die beiden Lösungen $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ die Peano'sche Ungleichung (26) anwenden.

Hieraus folgt sofort: Wenn die beiden Lösungen $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ sich in einem Punkt schneiden, d. h. wenn es einen dem Intervall $[\alpha\beta]$ angehörigen Wert t_0 gibt, für welchen

$$\bar{x}_k(t_0) = x_k(t_0), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

so ist

$$\bar{x}_k(t) \equiv x_k(t) \quad \text{im ganzen Intervall} \quad [\alpha\beta].$$

Wir können aber die Voraussetzungen dieses Satzes noch abschwächen: Wir wollen von der zweiten Lösung $\overline{\mathfrak{C}}$ nicht mehr voraussetzen, daß sie in der Nachbarschaft $[\sigma]$ liegt, sondern nur, daß sie im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt und daß sie mit der ersten Lösung $\mathfrak{C}$ einen Punkt t_0 gemein hat. Daraus folgt wegen der Stetigkeit der Funktionen $x_k(t)$ und $\bar{x}_k(t)$, daß wir ein den Punkt t_0 enthaltendes Teilintervall $[t' t'']$ von $[\alpha\beta]$ angeben können, so daß

$$|\bar{x}_k(t) - x_k(t)| \leqq \sigma \tag{27}$$

für

$$t' \leqq t \leqq t''.$$

Sei $\alpha' \geqq \alpha$ die untere Grenze für die Werte von t' und $\beta' \leqq \beta$ die obere Grenze für die Werte von t'', für welche dies stattfindet. Dann gilt (27) zunächst für

$$\alpha' < t < \beta',$$

und wegen der Stetigkeit von $x_k(t)$ und $\bar{x}_k(t)$, auch noch für $t = \alpha'$ und $t = \beta'$.

Für das Intervall $[\alpha'\beta']$ können wir also den obigen Satz anwenden, und es ist daher

$$\bar{x}_k(t) \equiv x_k(t), \quad \text{in} \quad [\alpha'\beta'],$$

also insbesondere auch für $t = \alpha'$ und $t = \beta'$.

---

[1]) Vgl. z. B. Bliss, loc. cit., p. 50, Fußnote. Man kann für K jede Größe wählen, die größer ist als der größte der Maximalwerte der Funktionen $|f_k^i|$ im Bereich $[\sigma]$.

Wäre nun $\alpha' > \alpha$, so würde, wegen $\bar{x}_k(\alpha') - x_k(\alpha') = 0$, die Ungleichung (27) auch noch in einem Intervall $[\alpha' - \delta, \alpha']$ gelten und α' wäre nicht die untere Grenze der t'; es muß also $\alpha' = \alpha$ sein, und ebenso $\beta' = \beta$. Wir haben also den Satz gewonnen:

Es seien:

$$\mathfrak{C}: \qquad x_k = x_k(t), \qquad \alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta$$

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad x_k = \bar{x}_k(t), \qquad \alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta$$

zwei für dasselbe Intervall $[\alpha\beta]$ definierte Lösungen des Systems (20), welche

1. ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegen

2. einen Punkt gemeinsam haben:

$$\bar{x}_k(t_0) = x_k(t_0), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\alpha \overline{\gtrless} t_0 \overline{\gtrless} \beta;$$

alsdann sind beide Lösungen im ganzen Intervall $[\alpha\beta]$ identisch:

$$\bar{x}_k(t) = x_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{für} \quad \alpha \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \beta.$$

d) **Fortsetzung des durch den Punkt A gehenden Elementes**[1]:

Wir kehren jetzt wieder zu der in a) betrachteten, durch den Punkt A $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ gehenden Lösung (22) zurück, welche zunächst nur für das Intervall: $|t - \tau| \overline{\gtrless} l$ definiert war. Wir können dieselbe auf folgende Weise über ihren ursprünglichen Definitionsbereich hinaus fortsetzen: Wir setzen $\tau + l = \beta_1$; da der Punkt $Q_1(\beta_1, x_1(\beta_1), \ldots, x_n(\beta_1))$ wegen der Ungleichung (23) im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt, so können wir nach a) eine in einem gewissen Intervall: $|t - \beta_1| \overline{\gtrless} l_1$ definierte Lösung von (20) konstruieren, welche durch den Punkt Q_1 hindurchgeht und ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt. In dem den beiden Intervallen: $|t - \tau| \overline{\gtrless} l$ und $|t - \beta_1| \overline{\gtrless} l_1$ gemeinsamen Bereich müssen daher nach c) beide Lösungen identisch sein, da sie beide durch den Punkt Q_1 gehen. Der Definitionsbereich der zweiten Lösung reicht aber um das Stück $[\beta_1, \beta_1 + l_1]$ über den der ersten hinaus. Wir nennen daher die zweite Lösung eine „*Fortsetzung*" der ersten, und bezeichnen sie durch dieselben Buchstaben: $x_k = x_k(t)$. Diesen Prozeß können wir nun beliebig oft wiederholen, indem wir weitere Elemente mit den Mittelpunkten

---

[1] Vgl. v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, Abt. IIa (1898), p. 12, und Bliss, l. c p. 52.

$$\beta_2 = \beta_1 + l_1, \qquad \beta_3 = \beta_2 + l_2, \ldots$$

hinzufügen. Andererseits können wir eine analoge Reihe von Fortsetzungen nach der negativen Seite hin bilden mit den Mittelpunkten

$$\alpha_1 = \tau - l, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 - l_1', \qquad \alpha_3 = \alpha_2 - l_2', \ldots.$$

Da die Größen β_ν mit ν wachsen, so nähern sie sich für $\nu \doteq \infty$ einer bestimmten Grenze β_A, die endlich oder $+\infty$ sein kann; ebenso nähern sich die α_ν einer Grenze α_A, welche endlich oder $-\infty$ sein kann.

Wir erhalten daher durch den angegebenen Prozeß eine durch den Punkt A gehende Lösung $\mathfrak{C}_A$, welche für das offene Intervall

$$\alpha_A < t < \beta_A$$

definiert ist, und im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt.

Nach Bliss gilt der Satz:

Wenn bei Annäherung der Variabeln t an den Wert α_A (resp. β_A) der entsprechende Punkt der Kurve $\mathfrak{C}_A$ sich einer bestimmten endlichen Grenzlage P_A (resp. Q_A) nähert[1]), so muß der Punkt P_A (resp. Q_A) auf der Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegen.

Hieraus folgt: Ist

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad \tau_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau_2$$

irgend eine ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegene Lösung des Systems (20), und ist $A(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{C}_0$, so ist

$$\alpha_A < \tau_1, \qquad \beta_A > \tau_2$$

und $\mathfrak{C}_0$ ist ein Stück der Kurve $\mathfrak{C}_A$.

Hieran knüpfen wir noch folgende prinzipiell wichtige Bemerkung:

Die bei dem Fortsetzungsprozeß gebrauchten Größen $l, l_1, l_2 \ldots$ sind innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. Mit Hilfe des eben angegebenen Satzes läßt sich jedoch leicht zeigen, daß die Grenzwerte α_A und β_A, sowie die Kurve $\mathfrak{C}_A$ von der Wahl dieser Größen unabhängig und somit durch den Punkt A eindeutig bestimmt sind.

---

[1]) Dies tritt nach Bliss (loc. cit. p. 52) stets ein, wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt und abgeschlossen ist.

§ 24. Abhängigkeit der Lösung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen von den Anfangswerten und verwandte Fragen.

Wir geben in diesem Paragraphen zunächst ein Referat über die wichtigsten Sätze über die Abhängigkeit der Lösung eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen von den Anfangswerten und entwickeln dann einige sich daran anschließende Sätze, die für die Variationsrechnung von besonderer Wichtigkeit sind.

a) Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten:[1])

Die durch einen Punkt $A(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ im Innern von $\mathfrak{A}$ gehende Lösung

$$\mathfrak{C}_A: \qquad x_k = x_k(t), \qquad \alpha_A < t < \beta_A$$

hängt von der Lage des Punktes A ab, d. h. $x_k(t)$ ist eine Funktion nicht nur von t, sondern auch von $\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; wir bezeichnen dieselbe mit $\varphi_k(t; \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und schreiben unsere Lösung:

$$\mathfrak{C}_A: \qquad x_k = \varphi_k(t; \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad \alpha_A < t < \beta_A. \tag{28}$$

Die Funktionen φ_k besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktionen φ_k sind *eindeutige und stetige* Funktionen ihrer $n+2$ Argumente in dem Bereich

$$\mathfrak{B}: \qquad A(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) \text{ im Innern von } \mathfrak{A}, \qquad \alpha_A < t < \beta_A,$$

und der Punkt: $(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ liegt im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$, wenn der Punkt $(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ in $\mathfrak{B}$ liegt.

2. Sie genügen den *Anfangsbedingungen*

$$\varphi_k(\tau; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \xi_k \tag{29}$$

identisch für jedes $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ im Innern von $\mathfrak{A}$.

---

[1]) Vgl. Nicoletti, Acc. R. dei Lincei, 1895, p. 316; Picard, in *Darboux's Théorie des surfaces*, Bd. IV (1896), p. 363; Bendixson, Bull. Soc. Math. de France, Bd. XXIV (1896), p. 220; Peano, Atti di Torino, Bd. XXXIII (1897), p. 9; v. Escherich, Wiener Berichte, Bd. CVII, Abt. IIa (1898), p. 1198, und Bd. CVIII (1899), p. 622; Painlevé, Bull. Soc. Math. de France, Bd. 27 (1899), p. 152; Bliss, loc. cit. p. 55.

3. *Die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t \partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \tau \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t \partial \xi_i} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi_i \partial t},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

existieren und sind *stetig* im Bereich $\mathfrak{B}$.

4. Jedes der $n + 1$ Funktionensysteme

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau},$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ist eine *Lösung des Systems linearer homogener Differentialgleichungen:*

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_k^i(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) z_i, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

mit den Anfangswerten

$$\left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}\right|^{t=\tau} = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad i = k \\ 0, & \text{wenn} \quad i \neq k \end{cases} \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau}\right|^{t=\tau} = -f_k(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \tag{32}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} = -\sum_i f_i(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}. \tag{33}$$

5. *Die Funktionaldeterminante*

$$\Delta(t; \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \equiv \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} \equiv \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i} \right|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

ist im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ *von Null verschieden.*[1])

---

[1]) Ist das System von linearen Differentialgleichungen gegeben:

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} q_{ki} z_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

wo die q_{ki} Funktionen von t sind, die in einem Intervall $[t_0 t_1]$ stetig sind, und sind:

$$x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

Wir knüpfen hieran noch die folgende Bemerkung: Die Gleichungen (28) stellen, wenn man den Größen $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ alle möglichen Wertsysteme im Innern von $\mathfrak{A}$ gibt, alle im Innern von $\mathfrak{A}$ gelegenen Lösungen des Systems (20) dar, *aber jede Lösung unendlich oft*. Denn ist $\bar{A}$ irgend ein Punkt der Kurve $\mathfrak{C}_A$, so ist die Kurve $\mathfrak{C}_{\bar{A}}$ nach § 23, c) und d) mit $\mathfrak{C}_A$ identisch. Um alle verschiedenen Lösungen zu erhalten, ist es daher nicht nötig, den Größen $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ alle angegebenen Wertsysteme beizulegen; es genügt vielmehr, wenn man *dem τ einen festen numerischen Wert*[1]) *beilegt, und bloß die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ variieren läßt.* Ist nämlich $A_0(\tau^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ ein Punkt im Innern von $\mathfrak{A}$ und $A_1(\tau^1, \xi_1^1, \ldots, \xi_n^1)$ irgend ein Punkt in hinreichender Nähe von A_0, so kann man stets die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ so bestimmen, daß die Lösung

$$x_k = \varphi_k(t; \tau^0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

in welcher τ den Wert τ^0 hat, durch den Punkt A_1 geht.

Man hat dazu das System von n Gleichungen

$$\varphi_k(\tau^1; \tau^0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_k^1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

nach $\xi_1, \ldots, \xi_n$ zu lösen. Das ist aber nach dem Satz über implizite Funktionen (§ 22, e)) stets möglich; denn für

---

irgend n Lösungen, so hat die Determinante

$$\Delta = |x_k^j|, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n$$

nach Jacobi (*Werke*, Bd. IV, p. 403) den Wert

$$\Delta = C e^{\int_{t_0}^{t} (q_{11} + q_{22} + \cdots q_{nn})\, dt}, \tag{34}$$

wo C eine Konstante ist. Da die Funktionen q_{ki} stetig sind in $[t_0 t_1]$, so folgt hieraus: Es ist entweder $\Delta \equiv 0$ im ganzen Intervall $[t_0 t_1]$, wenn nämlich $C = 0$, oder aber $\Delta \neq 0$ im ganzen Intervall $[t_0 t_1]$, wenn nämlich $C \neq 0$. Im ersten Fall sind die Lösungen linear abhängig, im zweiten Fall unabhängig.

Wendet man diesen Satz auf das System (30) an, und beachtet, daß wegen (31)

$$\Delta(\tau; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$$

für jedes $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ im Innern von $\mathfrak{A}$, so folgt der Satz Nr. 5 unmittelbar.

[1]) Ob ein fester Wert von τ genügt, um alle partikulären Lösungen zu erhalten, hängt freilich von der Gestalt des Bereiches $\mathfrak{A}$ ab. Im allgemeinen wird es nötig sein, den Bereich $\mathfrak{A}$ in verschiedene Teilbereiche zu zerlegen, und für jeden derselben dem τ einen bestimmten konstanten Wert zu geben.

$$\tau^1 = \tau^0,\ \xi_1^{\ 1} = \xi_1^{\ 0},\ \xi_2^{\ 1} = \xi_2^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 1} = \xi_n^{\ 0}$$

werden die Gleichungen befriedigt durch das Wertsystem:

$$\xi_1 = \xi_1^{\ 0},\ \xi_2 = \xi_2^{\ 0}, \ldots, \xi_n = \xi_n^{\ 0}.$$

Und die Funktionaldeterminante $\Delta(\tau^0; \tau^0, \xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 0})$ ist $\neq 0$.

In diesem Sinn stellen die Gleichungen (28), wenn man dem τ einen festen Wert erteilt und die Größen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ als variable Integrationskonstanten betrachtet, das *allgemeine Integral* des Differentialgleichungssystems (20) dar.

Statt dessen kann man aber auch ebensogut einer der Größen ξ einen festen Wert erteilen, z. B. $\xi_j = \xi_j^{\ 0}$ setzen, und als unabhängige Parameter der allgemeinen Lösung die Größen $\tau; \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$ betrachten, wenn nur die Bedingung

$$f_j(\tau^0, \xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 0}) \neq 0$$

erfüllt ist.

Denn mit Hilfe der Gleichung (33) kann man die Funktionaldeterminante Δ nach elementaren Determinantensätzen auf die Form bringen

$$-\Delta(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) f_j(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \quad \ldots \quad, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \tau, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n)}. \tag{35}$$

Wenn daher die obige Ungleichung erfüllt ist, so kann man die vorige Schlußweise ohne weiteres auf den Fall anwenden, wo man $\xi_j = \xi_j^{\ 0}$ setzt und die Größen $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$ variiert.

Zusatz I[1]): Macht man die stärkere Voraussetzung, daß die sämtlichen partiellen Ableitungen der Funktionen f_i bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung (inkl.) im Bereich $\mathfrak{A}$ existieren und stetig sind, und ebenso sämtliche partielle Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung mit Ausnahme der n^{ten} Ableitungen nach t allein, so sind die Funktionen φ_k von der Klasse $C^{(n)}$ im Bereich $\mathfrak{B}$.

Zusatz II[2]): Sind die Funktionen f_i *analytische* Funktionen der Variabeln $t, x_1, \ldots, x_n$ und regulär an der Stelle $\tau_0, \xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n^{\ 0}$, so sind auch die Funktionen $\varphi_k(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ analytische Funktionen ihrer $n+2$ Argumente und regulär an der Stelle

$$t = \tau_0,\ \tau = \tau_0,\ \xi_1 = \xi_1^{\ 0}, \ldots, \xi_n = \xi_n^{\ 0}.$$

---

[1]) Vgl. Bliss, loc. cit., p. 67. [2]) Vgl. *Encyklopädie*, II A, p. 202.

b) **Einbettung einer partikulären Lösung in eine n-fach unendliche Schar von Lösungen:**

Wir beweisen jetzt noch den folgenden für unsere Zwecke besonders wichtigen Satz:[1])

Es sei

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x_k = \mathring{x}_k(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

eine Lösung des Systems (20), welche ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt.

Ferner sei τ_0 irgend ein spezieller Wert von t im Intervall $[t_1 t_2]$ und es werde: $\mathring{x}_k(\tau_0) = \xi_k^0$ gesetzt.

Alsdann läßt sich eine positive Größe d angeben, derart daß für jedes den Ungleichungen

$$|\tau - \tau_0| \leqq d, \quad |\xi_k - \xi_k^0| \leqq d, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{36}$$

genügende Wertsystem $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ die Lösung

$$x_k = \varphi_k(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{28}$$

des Systems (20) im ganzen Intervall $[t_1 t_2]$ existiert, von der Klasse C' ist und überdies ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegt.

Für $\tau = \tau_0, \xi_1 = \xi_1^0, \ldots, \xi_n = \xi_n^0$ fällt die Lösung (28) mit $\mathfrak{C}_0$ zusammen:

$$\varphi_k(t; \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) = \mathring{x}_k(t) \quad \textit{in} \quad [t_1 t_2].$$

Zum Beweis wählen wir zunächst eine positive Größe σ so klein, daß die geschlossene Nachbarschaft $[\sigma]$ des Bogens $\mathfrak{C}_0$, d. h. der Bereich

$$[\sigma]: \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2, \quad |x_k - \mathring{x}_k(t)| \leqq \sigma, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ebenfalls noch ganz im Innern von $\mathfrak{A}$ liegt, was nach § 21, a) stets möglich ist. In diesem Bereich $[\sigma]$ sind die Funktionen f_k stetig und genügen der Lipschitz'schen Bedingung (24) mit einem gewissen Wert der Konstanten K; letzteres beweist man mit Hilfe des Mittelwertsatzes angewandt auf die Differenzen

$$f_k(t, x_1', \ldots, x_n') - f_k(t, x_1'', \ldots, x_n'').$$

---

[1]) Einen analogen Satz für analytische Differentialgleichungen gibt Kneser, *Lehrbuch*, § 27. Für nicht-analytische Differentialgleichungen ist der Satz auf anderem Wege zuerst bewiesen worden von Lunn, *Dissertation* (Chicago, 1904). Für den hier gegebenen Beweis vgl. Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 464.

Wir ordnen nunmehr jedem Punkt $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Bereiches

$$t_1 \leqq t \leqq t_2, \quad -\infty < x_k < +\infty, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \quad (37)$$

einen Punkt $t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ von $[\sigma]$ zu mittels der Definition

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{wenn: } \overset{\circ}{x}_i(t) - \sigma \leqq x_i \leqq \overset{\circ}{x}_i(t) + \sigma, \\ \overset{\circ}{x}_i(t) + \sigma, & \text{wenn: } x_i > \overset{\circ}{x}_i(t) + \sigma, \\ \overset{\circ}{x}_i(t) - \sigma, & \text{wenn: } x_i < \overset{\circ}{x}_i(t) - \sigma, \end{cases}$$

und definieren dann die Funktionen $\tilde{f}_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ für den Bereich (37) durch die Gleichungen[1])

$$\tilde{f}_k(t, x_1, \ldots, x_n) = f_k(t, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n).$$

Die Funktionen $\tilde{f}_k$ haben folgende Eigenschaften:

$\tilde{\text{A}}$) Sie sind stetig im Bereich (37); denn man findet

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_k(t + h, x_1 + k_1, \ldots, x_n + k_n) - \tilde{f}_k(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ &= f_k(t + h, \tilde{x}_1 + \tilde{k}_1, \ldots, \tilde{x}_n + \tilde{k}_n) - f_k(t, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \end{aligned}$$

wobei für hinreichend kleine Werte von $|h|$ und $|k_1|, \ldots, |k_n|$ entweder $\tilde{k}_i = k_i$ oder $\tilde{k}_i = \overset{\circ}{x}_i(t + h) - \overset{\circ}{x}_i(t)$.

---

[1]) Der Leser mag den Beweis zunächst für den Fall $n = 1$ durchführen, wobei man sich der folgenden geometrischen Deutung bedienen kann: Sind t, x rechtwinklige Koordinaten in einer t, x-Ebene und y eine dritte Ordinate senkrecht zur t, x-Ebene, so können wir die Fläche:

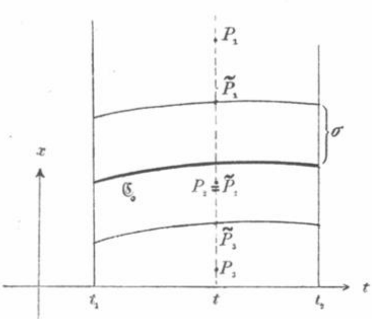

Fig. 30.

$$y = \tilde{f}(t, x) \qquad (38)$$

folgendermaßen aus der Fläche

$$y = f(t, x) \qquad (39)$$

ableiten: Wir schneiden aus der Fläche (39) dasjenige Stück Σ heraus, dessen Projektion auf die t, x-Ebene der Bereich $[\sigma]$ ist. Von jedem Punkt desjenigen Randes von Σ, dessen Projektion die Kurve

$$x = \overset{\circ}{x}(t) + \sigma, \qquad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

ist, ziehen wir eine Gerade parallel zur x-Achse in positiver Richtung ins Unendliche. Ebenso ziehen wir von jedem Punkt des gegenüberliegenden Randes von Σ eine Gerade parallel der x-Achse in negativer Richtung ins Unendliche. Die beiden so konstruierten Zylinderflächen zusammen mit dem Stück Σ bilden dann die Fläche (38).

$\tilde{B}$) Sie genügen in demselben Bereich der Lipschitz'schen Bedingung; denn

$$|\tilde{f}_k(t, x_1', \ldots, x_n') - \tilde{f}_k(t, x_1'', \ldots, x_n'')| =$$
$$= |f_k(t, \tilde{x}_1', \ldots, \tilde{x}_n') - f_k(t, \tilde{x}_1'', \ldots, \tilde{x}_n'')| < K \sum_i |\tilde{x}_i' - \tilde{x}_i''|$$

und

$$|\tilde{x}_i' - \tilde{x}_i''| \overline{\gtrless} |x_i' - x_i''|.$$

$\tilde{C}$) Sie sind endlich im Bereich (37); denn ist G der größte der Maximalwerte der Funktionen $|f_k|$ in $[\sigma]$, so ist

$$|\tilde{f}_k(t, x_1, \ldots, x_n)| \overline{\gtrless} G \tag{40}$$

in (37).

Hieraus folgt aber: Ist $t_1 \overline{\gtrless} \tau \overline{\gtrless} t_2$ und ist $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ein ganz beliebiges Wertsystem, so besitzt das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_k}{dt} = \tilde{f}_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{41}$$

eine und nur eine Lösung

$$x_k = \tilde{\varphi}_k(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{42}$$

welche durch den Punkt $A(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ hindurchgeht, und *diese Lösung existiert im ganzen Intervall* $[t_1\, t_2]$.

Denn ist b eine beliebige positive Größe, so sind die Funktionen $\tilde{f}_k$ stetig und genügen der Lipschitz'schen Bedingung in dem Bereich

$$\tau \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2, \qquad |x_k - \xi_k| \overline{\gtrless} b, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Bezeichnet daher M den größten der Maximalwerte der Funktionen $|\tilde{f}_k|$ in diesem Bereich, und l die kleinere der beiden Größen $t_2 - \tau$, b/M, so existiert die durch den Punkt A gehende Lösung (42) nach Cauchy[1]) mindestens im Intervall: $\tau \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \tau + l$. Nun ist aber $M \overline{\gtrless} G$; wählt man daher: $b > (t_2 - \tau) G$, so ist $b/M > t_2 - \tau$ und daher $l = t_2 - \tau$. Die Lösung (42) existiert also mindestens im Intervall $[\tau\, t_2]$. Ganz in derselben Weise zeigt man, daß sie auch im Intervall $[t_1\, \tau]$ existiert und somit auch im ganzen Intervall $[t_1\, t_2]$.

Ist ferner $\tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ irgend ein zweiter Punkt des Bereiches (37), so gilt nach § 23, b) die Peano'sche Ungleichung (26) und

---

[1]) Vgl. z. B. Goursat, *Cours d'Analyse*, Bd. II, pp. 369, 377.

daher ist a fortiori für jedes t in $[t_1\, t_2]$:

$$|\tilde{\varphi}_k(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_k(t;\, \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)|$$
$$< e^{nK|t-\tau_0|} \sum_i |\tilde{\varphi}_i(\tau_0;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_i(\tau_0;\, \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)|.$$

Nun[1]) ist aber einerseits nach (29)

$$\tilde{\varphi}_i(\tau;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_i(\tau_0;\, \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) = \xi_i - \xi_i^0,$$

und andererseits

$$\tilde{\varphi}_i(\tau;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_i(\tau_0;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) =$$
$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d}{dt}\, \tilde{\varphi}_i(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{f}_i(t;\, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)\, dt,$$

also nach (40)

$$|\tilde{\varphi}_i(\tau;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_i(\tau_0;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)| \overline{\gtrless} G\, |\tau - \tau_0|.$$

Da überdies: $|t-\tau_0| \overline{\gtrless} t_2 - t_1$, so erhält man schließlich die Ungleichung

$$|\tilde{\varphi}_k(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \tilde{\varphi}_k(t;\, \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)|$$
$$< e^{nK(t_2-t_1)} \left\{ nG\, |\tau - \tau_0| + \sum_i |\xi_i - \xi_i^0| \right\}. \tag{43}$$

Hieraus folgt: Wenn d die kleinere der beiden Größen

$$\frac{e^{-nK(t_2-t_1)}\sigma}{2nG}, \qquad \frac{e^{-nK(t_2-t_1)}\sigma}{2n}$$

bedeutet, und wir wählen

$$|\tau - \tau_0| \overline{\gtrless} d, \quad |\xi_k - \xi_k^0| \leqq d, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{44}$$

so ist

$$|\tilde{\varphi}_k(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \varphi_k(t;\, \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)| < \sigma \tag{45}$$

für jedes t in $[t_1 t_2]$.

Nun folgt aber weiter aus der Definition der Funktionen $\tilde{f}_k$, daß jede Lösung des Systems (41), welche ganz in $[\sigma]$ liegt, zugleich dem System (20) genügt und umgekehrt. Hieraus ergibt sich zunächst, daß die Lösung

$$\mathfrak{C}_0: \qquad x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$$

von (20) zugleich dem System (41) genügt.

---

[1]) Für die folgende Umformung vgl. Bliss, loc. cit. p. 62.

Wählen wir daher den Punkt $(\tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ insbesondere auf der Kurve $\mathfrak{C}_0$, so daß also

$$\xi_k^0 = \mathring{x}_k(\tau_0), \tag{46}$$

so gilt nach § 23, c) und d) die Doppelidentität

$$\mathring{x}_k(\tau_0) \equiv \varphi_k(t; \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \equiv \tilde{\varphi}_k(t; \tau_0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0).$$

Zugleich sagt alsdann die Ungleichung (45) aus, daß unter der Voraussetzung (44) die Lösung (42) von (41) ganz in $[\sigma]$ liegt. Daher muß dieselbe nach der eben gemachten Bemerkung auch dem System (20) genügen, und da sie durch den Punkt $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ geht, so ist sie mit der durch das Symbol

$$x_k = \varphi_k(t; \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{28}$$

definierten Lösung von (20) identisch. Somit existiert auch die letztere mindestens im ganzen Intervall $[t_1 t_2]$, vorausgesetzt daß die Ungleichungen (44) erfüllt sind. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Zusatz: Die Lösung (28) existiert sogar sicher noch in einem etwas weiteren Intervall. Denn da die Lösung $\mathfrak{C}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{A}$ liegen sollte, so läßt sie sich nach § 23, d) auf ein etwas weiteres Intervall

$$t_1 - e_1 \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}}\, t_2 + e_2$$

fortsetzen, wo e_1, e_2 zwei hinreichend kleine positive Größen sind. Und nun kann man in dem vorangegangenen Beweis das Intervall $[t_1 - e_1, t_2 + e_2]$ für das Intervall $[t_1 t_2]$ substituieren und erhält das Resultat, daß die Lösung (28) für jedes den Bedingungen (44) genügende Wertsystem $\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ auch noch in dem weiteren Intervall $[t_1 - e_1, t_2 + e_2]$ existiert, wobei wir noch besonders hervorheben, daß e_1, e_2 von $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ unabhängig sind.

Wählt man insbesondere $\tau = \tau_0$ und setzt

$$\varphi_k(t; \tau_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = g_k(t; \xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{47}$$

so stellen die Gleichungen

$$x_k = g_k(t; \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

eine n-fach unendliche Schar von Lösungen (das sogenannte „allgemeine Integral") des Systems (20) dar, welche die gegebene Lösung $\mathfrak{C}_0$ enthält, nämlich für $\xi_1 = \xi_1^0, \ldots, \xi_n = \xi_n^0$. Die Funktionen

$$g_k, \ \frac{\partial g_k}{\partial t}, \ \frac{\partial g_k}{\partial \xi_i}, \ \frac{\partial^2 g_k}{\partial t\, \partial \xi_i} = \frac{\partial^2 g_k}{\partial \xi_i\, \partial t}$$

existieren und sind stetig im Bereich

$$t_1 - e_1 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_2 + e_2, \quad |\xi_k - \xi_k^0| \overline{\overline{<}} d, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{48}$$

und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

ist im Bereich (48) von Null verschieden.

c) **Anwendung der allgemeinen Existenztheoreme auf die Theorie der Extremalen:**

Wir führen zunächst die Euler'sche Differentialgleichung

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \equiv f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} - y'' f_{y'y'} = 0 \tag{49}$$

auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurück, indem wir sie in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' \\ \frac{dy'}{dx} &= \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \equiv H(x, y, y') \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Nach unseren Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y, y')$ (vgl. § 3, a)) sind die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen von der Klasse C' in dem durch die Bedingungen

$$(x, y) \text{ in } \mathfrak{R}; \quad -\infty < y' < +\infty; \quad f_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$$

charakterisierten Bereich $\mathfrak{A}$ im Gebiet der Variabeln x, y, y'.

Aus § 23, a) und c) folgt daher:

Ist $P_0(x_0, y_0)$ irgend ein Punkt im Innern von $\mathfrak{R}$ und $y_0' = \operatorname{tg} \theta_0$ das Gefälle irgend einer durch den Punkt P_0 gehenden, nicht mit der y-Achse parallelen Richtung, für welche die Ungleichung

$$f_{y'y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0 \tag{51}$$

erfüllt ist, so läßt sich durch den Punkt P_0 in der Richtung θ_0 eine und nur eine Extremale von der Klasse C' ziehen.

Wir haben schon früher (§ 19, b)) ein Problem der Variationsrechnung von dem in den drei ersten Kapiteln betrachteten Typus *regulär* genannt, falls die Ungleichung

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) \neq 0 \tag{52}$$

für jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{R}$ und für jeden endlichen Wert von $\tilde{p}$ erfüllt ist. Bei einem regulären Problem kann man also von jedem

Punkt im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ nach jeder Richtung, die nicht mit der y-Achse parallel ist, eine und nur eine Extremale ziehen.

Aus dem Satz von § 24, b) Ende folgt ferner:

Ist

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \mathring{y}(x), \qquad x_1 \gtreqless x \gtreqless x_2,$$

irgend ein ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegener Extremalenbogen der Klasse C', für welchen die Bedingung

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \neq 0 \text{ in } [x_1 x_2] \tag{53}$$

erfüllt ist, so läßt sich derselbe in eine doppelt unendliche Schar von Extremalen

$$y = g(x, \alpha, \beta)$$

„einbetten", welche den gegebenen Bogen $\mathfrak{E}_0$ enthält, und welche die in § 12, b) aufgezählten Eigenschaften besitzt, wobei noch zu bemerken ist, daß die dort behauptete Existenz und Stetigkeit von g''' daraus folgt, daß nicht nur die partiellen Ableitungen H_y und $H_{y'}$ sondern auch, — und dies geht über die Voraussetzungen der allgemeinen Theorie hinaus —, H_x existiert und stetig ist in $\mathfrak{A}$.

Die linearen Differentialgleichungen (30) reduzieren sich auf die Jacobi'sche Differentialgleichung.

d) **Ausdehnung des Einbettungssatzes auf ein System von Differentialgleichungen, das nicht in der Normalform gegeben ist:**

Es sei das System von n Differentialgleichungen gegeben

$$F_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0 \tag{54}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Funktionen F_k in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ des $t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$-Raumes von der Klasse C' sind. Ferner sei

$$\mathfrak{E}_0: \qquad x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

eine Lösung des Systems (54) von folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktionen $\mathring{x}_k(t)$ sind von der Klasse C' in einem Intervall $[t_1 t_2]$.

2. Für jedes t im Intervall $[t_1 t_2]$ liegt das Wertsystem

$$t;\ \mathring{x}_1(t), \ldots, \mathring{x}_n(t);\ \mathring{x}_1'(t), \ldots, \mathring{x}_n'(t)$$

im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$.

3. Setzt man in der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}$$

$$x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad x_k' = \mathring{x}_k'(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

so ist die so entstehende Funktion von t von Null verschieden in $[t_1 t_2]$.

Alsdann gelten für die durch den Punkt $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ gehende Lösung

$$x_k = \varphi_k(t;\, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

des Systems (54) dieselben Folgerungen, wie in § 24, b) für die gleichbezeichnete Lösung von (20).

Zum Beweis wenden wir auf das Gleichungssystem (54) den erweiterten Satz über implizite Funktionen von § 22, e) an. Der dort mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten Punktmenge entspricht hier die Menge:

$$\mathfrak{C}_0': \qquad x_k = \mathring{x}_k(t), \quad x_k' = \mathring{x}_k'(t), \quad t_1 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_2, \\ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

welche in der Tat nach A VII 1 beschränkt und abgeschlossen ist und ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegt. Sind ferner

$$(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \quad \text{und} \quad (\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_n')$$

zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{C}_0'$, so muß notwendig $\bar{t} \neq t$ sein, es ist also dann auch allemal

$$(t, x_1, \ldots, x_n) \neq (\bar{t}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n);$$

somit ist auch Bedingung C) des Satzes erfüllt, und ebenso D) wegen unserer dritten Voraussetzung.

Daher lassen sich die Gleichungen (54) im Sinne von § 22, e) in der Umgebung der Punktmenge $\mathfrak{C}_0'$ eindeutig nach $x_1', \ldots, x_n'$ auflösen:

$$x_k' = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (55)$$

und die Funktionen f_k sind in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{C}_0$ eindeutig definiert und von der Klasse C'.

Nunmehr ergibt sich der Beweis unserer Behauptung, indem man den unter b) bewiesenen Satz auf das Normalsystem (55) anwendet.

e) **Anwendung auf Systeme von Differentialgleichungen, welche konstante Parameter enthalten:**

Es sei ein System von n Differentialgleichungen gegeben, welche r Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ enthalten:

$$F_k(t;\, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n';\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = 0 \qquad (56)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Funktionen F_k nach sämtlichen Argumenten in einem Bereich $\mathfrak{B}$ von der Klasse C' sind.

Für ein spezielles Wertsystem der λ, $\lambda_h = \lambda_h^0$, sei eine Lösung von (56) bekannt:

$$x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

von folgenden Eigenschaften:

1. die Funktionen $\mathring{x}_k(t)$ sind von der Klasse C' in $[t_1 t_2]$.

2. Für jedes t in $[t_1 t_2]$ liegt das Wertsystem

$$t;\, x_k = \mathring{x}_k(t);\, x_k' = \mathring{x}_k'(t);\, \lambda_h = \lambda_h^0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r;\, k = 1, 2, \ldots, n)$$

im Innern von $\mathfrak{B}$.

3. Setzt man in der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1', \ldots, x_n')}$$
$$x_k = \mathring{x}_k(t), \qquad x_k' = \mathring{x}_k'(t), \qquad \lambda_h = \lambda_h^0,$$

so ist die so entstehende Funktion von t von Null verschieden in $[t_1 t_2]$.

Endlich sei τ_0 irgend ein Wert von t im Intervall $[t_1 t_2]$ und $\mathring{x}_k(\tau_0) = \xi_k^0$.

Alsdann gibt es eine Lösung von (56):

$$x_k = G_k(t;\, \xi_1, \ldots, \xi_n;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r), \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (57)$$

von folgender Beschaffenheit:

1. Die Funktionen $G_k(t;\, \xi_1, \ldots, \xi_n;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sind samt den Ableitungen $\frac{\partial G_k}{\partial t}$, $\frac{\partial G_k}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial G_k}{\partial \lambda_h}$, $\frac{\partial^2 G_k}{\partial t\, \partial \xi_i}$, $\frac{\partial^2 G_k}{\partial t\, \partial \lambda_h}$ stetig in einem Bereich

$$t_1 - e_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2 + e_2, \quad |\xi_k - \xi_k^0| \overline{\gtrless} d, \quad |\lambda_h - \lambda_h^0| \overline{\gtrless} d.$$

2. Es ist

$$G_k(t;\, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0;\, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_r^0) = \mathring{x}_k(t) \text{ in } [t_1 t_2]. \qquad (58)$$

3. Für $t = \tau_0$ ist

$$G_k(\tau_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \xi_k \qquad (59)$$

für alle:

$$|\xi_k - \xi_k^0| \leq d, \quad |\lambda_h - \lambda_h^0| \overline{\gtrless} d.$$

Zum Beweis ist es nur nötig zu bemerken, daß das System (56) wegen der Konstanz der Größen λ_h mit dem folgenden erweiterten System

$$\left.\begin{aligned} F_k(t;\ x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n';\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}) &= 0 \\ \frac{dx_{n+h}}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (56\text{a})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_{n+h}(\tau_0) = \lambda_h^0$$

äquivalent ist.

Wendet man auf dies erweiterte System den unter d) gegebenen Satz an und setzt

$$\varphi_k(t;\ \tau_0, \xi_1, \ldots, \xi_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \equiv G_k(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$

so haben die Funktionen G_k die oben ausgesprochenen Eigenschaften.

Einen für Anwendungen wichtigen Zusatz erhält man, wenn man speziell $\xi_k = \xi_k^0$ setzt.