Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Übungsaufgaben zu den drei ersten Kapiteln

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Übungsaufgaben zu den drei ersten Kapiteln.

(Schwierigere Aufgaben sind durch einen Stern gekennzeichnet.)

1. Obere und untere Grenze, resp. absolutes Maximum und Minimum der folgenden Funktionen für die angegebenen Intervalle zu bestimmen (§ 2):

a) $$s(x) = 2\left\{\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right\}$$

$$\text{in } [0, \pi], \quad \text{in } [-\pi, +\pi], \quad \text{in } -\infty < x < +\infty.$$

b) $$\frac{1}{\pi - s(x)} \quad \text{in } \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \quad \text{in } [-\pi, +\pi], \quad \text{in } [-\pi, 0].$$

c) $$\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}\,dt \quad \text{in } [0, 1].$$

d) $$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2 \quad \text{in } [-1, 4].$$

Die notwendigen und die hinreichenden Bedingungen für ein starkes, respektive schwaches, Extremum des Integrals

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$$

für die folgenden Funktionen f aufzustellen, sowie die Konstantenbestimmung und die Konstruktion von Extremalenfeldern zu diskutieren:

2. $$f = xy'^3 - 3yy'^2.$$

3. $$f = \tfrac{1}{2}(y'^2 - y^2).$$ (A. Mayer).

4. $$f = ay^2 + 2byy' + cy'^2$$

a, b, c konstant.

5. $$f = \sqrt{y}\,\sqrt{1 + y'^2}, \qquad y \gtreqless 0.$$

6. $$f = y\sqrt{1 - y'^2},$$

$$y \gtreqless 0, \qquad |y'| \lesseqgtr 1.$$

(Wegen der Gefällbeschränkung vgl. Beispiel VIII, p. 34; wegen der geometrischen Deutung vgl. Nr. 35).

7. $$f = (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \sqrt{1 + y'^2}.$$

(Euler, Erdmann.)

Andeutung: Führe Polarkoordinaten ein. Spezielle Fälle

$$m = -2, 1, -\tfrac{1}{2}, -3.$$

8. $$f = (x^2 + \lambda^2) y'^2.$$

(Weierstrass.)

Die Koordinaten der Endpunkte seien: $(-1, a)$, $(+1, b)$.

Spezialfall:

$$\lambda = 0.$$

9. $$f = \frac{\sqrt{y'}}{x - y}, \qquad x - y > 0, \qquad y' > 0.$$

Extremalen: $$(\alpha x + \beta)(\alpha y + \beta) + 1 = 0.$$

(Guldberg.)

10. $$f = \frac{1 + 2y'^2}{3y^3 \sqrt{1 + y'^2}}, \qquad y > 0.$$

Extremalen: $$(x - \alpha)^2 + y^2 = \beta^2.$$

(Stromquist.)

11*. $$f = y^r \sqrt{1 + y'^2}, \qquad y \gtreqless 0.$$

(Euler.)

Wird die Funktion $\varphi(u)$ durch die Differentialgleichung: $\varphi'' = r\varphi^{2r-1}$ und die Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ definiert, so sind die Extremalen (außer für $r = 0$):

$$y = \alpha \varphi\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

Diskutiere die Gestalt der Extremalen, wobei die Fälle: $r > 1$, $0 < r \lesseqgtr 1$, $r < 0$ zu unterscheiden sind. Untersuche die Periodizitätseigenschaften der Extremalen, wenn r rational. Diskutiere die Konstantenbestimmung.

12*. $$f = y^r \sqrt{1 - y'^2}, \qquad y \gtreqless 0, \quad |y'| \lesseqgtr 1.$$

Ähnliche Resultate wie in der vorigen Aufgabe.

13. Das Hamilton'sche Prinzip[1]) auf die Bewegung eines materiellen Punktes anzuwenden, welcher gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Kurve:

$$x = \varphi(q), \qquad y = \psi(q), \qquad z = \chi(q)$$

zu bewegen. Anwendung auf das ebene Pendel.

---

[1]) Vgl. Kap. XI.

14. Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß die gegebene Kurve sich nach einem gegebenen Gesetz bewegt:

$$x = \varphi(q, t), \qquad y = \psi(q, t), \qquad z = \chi(q, t).$$

15. Alle Funktionen $f(x, y, y')$ von der Form

$$f = L(x, y) y'^2 + M(x, y) y'^3 + N(x, y) y'^4$$

zu bestimmen, für welche die Extremalen Gerade sind (§ 6, c)).

Lösung:

$$L = Y_2, \qquad M = -\tfrac{1}{3} Y_2' x + Y_1,$$

$$N = \tfrac{1}{12} Y_2'' x^2 - \tfrac{1}{2} Y_1' x + Y_0,$$

wobei Y_0, Y_1, Y_2 drei willkürliche ganze Funktionen von y allein sind, deren Grad durch den Index angegeben wird.

15a. Dieselbe Aufgabe für

$$f = \frac{L(x, y) + M(x, y) y' + N(x, y) y'^2}{(1 + y'^2)^n}.$$

Lösung (für $n \neq 0, 1, \tfrac{1}{2}$): √ $n \neq -1$

$$L = ax + b, \qquad M = -(n-1) ay + c, \qquad N = nax + d.$$

16*. Alle Funktionen $f(x, y, y')$ zu bestimmen, für welche die Extremalen Kreise mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse sind (§ 6, c)).

(Stromquist.)

17. Alle Funktionen $f(x, y, y')$ zu bestimmen, für welche „transversal" mit „orthogonal" identisch ist.

Lösung:

$$f = G(x, y) \sqrt{1 + y'^2}.$$

(Hedrick.)

18. Unter der Annahme, daß die Konstantenbestimmung bei gegebenen Endpunkten P_1 und P_2 (wenigstens bei Beschränkuug von P_1 und P_2 auf gewisse Bereiche) eindeutig ist, ist das Integral J, genommen entlang der Extremale von P_1 nach P_2, eine eindeutige Funktion der Koordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2$ dieser Punkte, die wir mit $J(x_1, y_1; x_2, y_2)$ bezeichnen und das *Extremalenintegral zwischen* P_1 *und* P_2 nennen.

Das Extremalenintegral zu berechnen für

$$f = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$f = y'^2$$

$$f = \sqrt{y(1 - y'^2)}$$

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}.$$

19. Zu beweisen, daß die partiellen Ableitungen des Extremalenintegrals folgende Werte haben:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial x_1} &= -[f(x_1, y_1, y_1') - y_1' f_{y'}(x_1, y_1, y_1')], & \frac{\partial J}{\partial y_1} &= -f_{y'}(x_1, y_1, y_1'). \\
\frac{\partial J}{\partial x_2} &= [f(x_2, y_2, y_2') - y_2' f_{y'}(x_2, y_2, y_2')], & \frac{\partial J}{\partial y_2} &= f_{y'}(x_2, y_2, y_2'),
\end{aligned}
\tag{75}
$$

wobei y_1', y_2' das Gefälle der Extremale $P_1 P_2$ in P_1, resp. P_2 bedeuten.

(Hamilton.)

20. Hinreichende Bedingungen für ein starkes Extremum des Integrals

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$

mittels der ersten und zweiten Variation abzuleiten, wenn beide Endpunkte auf gegebenen Geraden $x = x_1$, respektive $x = x_2$ beweglich sind.

Lösung:

$$f_y = 0, \qquad f_{yy} > 0.$$

Andeutung: Benutze die Taylor'sche Formel mit Restglied.

Beispiele:

$$f = (6ax - y^2)y. \tag{Euler}$$

$$f = (6ax - 3x^2 - y^2)(2ax - x^2 - \tfrac{4}{3}xy + y^2). \tag{Euler.}$$

21. Mit Hilfe der zweiten Variation zu beweisen, daß die Gerade $P_1 P_2$ das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} y'^2\, dx$$

zu einem starken Minimum macht. (Bromwich.)

22. Mit Hilfe von Nr. 21 den folgenden Satz von Osgood zu beweisen: Es sei $f(x)$ von der Klasse C' im Intervall $[ab]$ und es sei

$$a < l \leqq b, \quad \text{und} \quad |f(l) - f(a)| = L > 0.$$

Alsdann ist

$$\int_a^l f'(x)^2\, dx \geqq \frac{L^2}{b - a}.$$

23. Enthält f die Variable y nicht explizite, so kann man die Extremale $\mathfrak{E}_0$ stets mit einem Feld umgeben. Daher ist hier die Bedingung $\mathrm{II'_b}$ hinreichend für ein starkes Extremum. (Osgood.)

24. Für die Aufgabe Nr. 2 die Transversalenschar zu dem von der Schar paralleler Geraden

$$y = mx + a$$

gebildeten Feld zu bestimmen (§ 20, a)).

25. Für Beispiel X die Transversalenschar des aus dem Geradenbüschel durch den Koordinatenanfang bestehenden Feldes zu bestimmen (§ 20, a)).

26. Für Beispiel VIII die Transversalenschar des auf p. 99 betrachteten Feldes zu bestimmen (§ 20, a)).

Die folgenden Aufgaben Nr. 27 bis 32 sind singulär, insofern bei ihnen nicht alle in der allgemeinen Theorie gemachten Voraussetzungen erfüllt sind; insbesondere verschwindet $f_{y'y'}$ im Integrationsintervall. Es soll besonders die Extremalenschar durch den Punkt P_1 und ihre Enveloppe untersucht werden:

27*.
$$f = x^2 y'^2 + 12 y^2,$$
$$(x_1, y_1) = (-1, -1), \qquad (x_2, y_2) = (+1, +1).$$

(Hilbert.)

28*.
$$f = y'^2 \cos^2 x, \qquad x_1 < \frac{\pi}{2} < x_2.$$

(Erdmann.)

29*.
$$f = x^2 y'^2 + x y'^3, \qquad x_1 < 0 < x_2.$$

30*.
$$f = x\sqrt{1 + y'^2}, \qquad x_1 < 0 < x_2.$$

31*.
$$f = y'^4$$
$$(x_1, y_1) = (0, 0), \qquad (x_2, y_2) = (1, 0).$$

(Hilbert.)

32*.
$$f = x^{\frac{2}{3}} y'^2$$
$$(x_1, y_1) = (-1, -1), \qquad (x_2, y_2) = (+1, +1).$$

(Hilbert.)

33*. Die Bedingungen (IV) und (V) für das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(-x + yy' + (1 - 2x)y'^2)\,dx}{(1 + y'^2)^2}$$

zu diskutieren, wobei $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ sein soll (§ 18, d)).

Lösung:

$$x_1 \geqq 0, \qquad x_2 - x_1 \leqq 2.$$

34*. Dieselbe Aufgabe für

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{[(y + 1) + xy' + (2y + 1)y'^2]\,dx}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Lösung:

$$-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1.$$

Wenn $x_1 = -1$, so muß überdies $x_2 \leqq \frac{1}{2}$ sein.

Wenn $x_2 = +1$, so muß überdies $x_1 \geqq \frac{1}{2}$ sein.

Gewisse isoperimetrische Aufgaben mit variabeln Endpunkten lassen sich mittels eines schon von Euler angewandten Kunstgriffes auf Aufgaben ohne Nebenbedingungen und mit festen Endpunkten reduzieren. Dieser Art ist die folgende Aufgabe:

35. Unter allen Kurven von gegebener Länge l, welche vom Koordinatenanfang $P_1(0, 0)$ durch die obere Halbebene $(y > 0)$ nach einem nicht vorgeschriebenen Punkt $P_2(x_2, 0)$ der positiven x-Achse gezogen werden können, diejenige zu bestimmen, welche mit der x-Achse den größten Flächeninhalt einschließt.

Der Euler'sche Kunstgriff besteht hier darin, daß man auf allen zulässigen Kurven die Bogenlänge s, gemessen vom Punkt P_1 bis zu dem variabeln Punkt P als unabhängige Variable einführt, die zulässigen Kurven also schreibt

$$x = x(s), \qquad y = y(s).$$

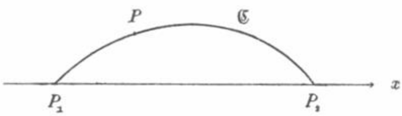

Fig. 27.

Der Punkt $P(x, y)$ beschreibt dann die Kurve von P_1 bis zum Endpunkt P_2, wenn s von 0 bis l wächst:

$$0 \leqq s \leqq l.$$

Da s die Bogenlänge bedeutet, müssen die Funktionen $x(s)$, $y(s)$ der Differentialgleichung genügen

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{76}$$

Hiernach formulieren wir jetzt die Aufgabe folgendermaßen analytisch:

Unter allen Funktionenpaaren $x(s)$, $y(s)$ von der Klasse C', welche der Differentialgleichung (76) und überdies den Bedingungen

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0; \qquad x(l) > 0, \qquad y(l) = 0,$$
$$y(s) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < l, \qquad x' \geqq 0\,^{1)}$$

genügen, diejenige zu bestimmen, welche das Integral

$$J = \int_0^l y x' \, ds$$

zu einem Maximum macht.

Wir haben also ein Variationsproblem mit zwei unbekannten Funktionen und einer Differentialgleichung als Nebenbedingung, also ein Problem derart,

[1]) Es läßt sich zeigen, daß dies keine Beschränkung der Allgemeinheit involviert.

wie sie schon in § 1 erwähnt worden sind. In unserem Fall ergibt sich aber aus der speziellen Form des Integranden, daß sich die Aufgabe auf den einfachsten Fall ohne Nebenbedingungen reduzieren läßt. Wir können nämlich x' mittels (76) eliminieren und erhalten dann folgende, mit der vorigen äquivalente Aufgabe: Unter allen Funktionen der Klasse C'

$$y = y(s), \qquad 0 \leqq s \leqq l,$$

welche den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0$$

der Gebietseinschränkung

$$y(s) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < l$$

und der Gefällbeschränkung[1])

$$\left|\frac{dy}{ds}\right| \leqq 1$$

genügen, diejenige zu bestimmen, welche das Integral

$$J' = \int_0^l y\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds$$

zu einem Maximum macht. Dies ist ein Problem vom einfachsten Typus ohne Nebenbedingungen.[2])

Nachdem man das Problem in der s, y-Ebene gelöst hat, berechnet man die Funktion $x(s)$ mittels (76) und kehrt so schließlich zur x, y-Ebene zurück. Als Lösung erhält man einen Halbkreis in der x, y-Ebene.

Die folgenden Aufgaben sind mit derselben Methode zu lösen. Bei der Anwendung derselben hat man jedoch die größte Vorsicht zu beobachten, weil beim Übergang von der ursprünglichen x, y-Ebene in die neue Ebene häufig die eigentümlichsten Beschränkungen der zulässigen Kurven eingeführt werden.

36*. Unter allen Kurven, die in der oberen Halbebene ($y > 0$) von einem gegebenen Punkt P_1 nach einem nicht vorgeschriebenen Punkt P_2 der Geraden $y = y_2$ gezogen werden können, und welche zusammen mit den Ordinaten der Punkte P_1, P_2 und dem dazwischenliegenden Segment $M_1 M_2$ der x-Achse einen gegebenen Flächeninhalt A einschließen, diejenige zu bestimmen, welche die kleinste Länge hat. (Euler.)

---

[1]) Vgl. wegen derselben p. 34.

[2]) Es ist hier ganz wesentlich, daß die Abszisse x_2 nicht gegeben ist. Denn wäre x_2 gegeben, so wäre nunmehr noch die Bedingung hinzuzufügen,

$$\int_0^l \sqrt{1 - y'^2}\, ds = x_2,$$

und man hätte wieder ein isoperimetrisches Problem.

Andeutung: Führe als unabhängige Variable den Flächeninhalt $M_1 M P P_1 M_1$ ein (siehe Fig. 28).

Lösung: Ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse.

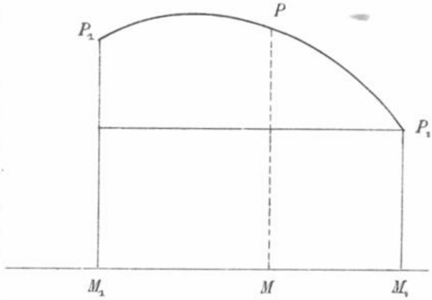

Fig. 28.

37*. Es sind zwei vom Koordinatenanfang O ausgehende Geraden OM und ON gegeben und auf OM ein Punkt P_1. Unter allen Kurven, welche von P_1 nach der Geraden ON gezogen werden können, und welche mit den beiden Geraden einen Sektor von gegebenem Flächeninhalt einschließen, die Kurve kleinster Länge zu bestimmen. (Euler.)

38*. Analoge Aufgabe, wenn der Endpunkt P_2 statt auf der Geraden ON auf einem gegebenen Kreis $r = r_1$ mit dem Mittelpunkt O beweglich ist. (Euler.)

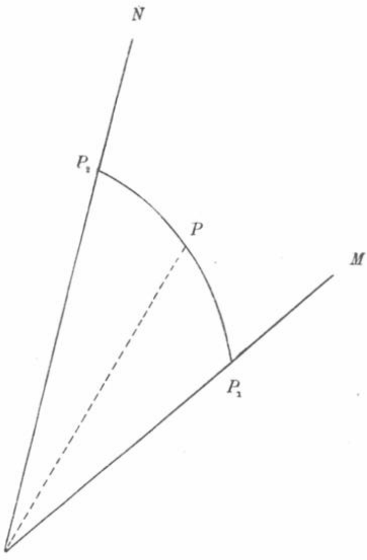

Fig. 29.

39*. Einen Rotationskörper von gegebener Oberfläche und möglichst großem Volumen zu konstruieren, dessen Oberfläche die Rotationsachse genau zweimal trifft. (Kneser.)

Die Aufgabe läßt sich auf das *Beispiel VIII* reduzieren. Die gesuchte Rotationsfläche ist eine Kugel.

40*. Aus einem gegebenen Quantum homogener, nach dem Newton'schen Gesetz anziehender Materie einen Rotationskörper zu bilden, dessen Oberfläche die Rotationsachse genau in zwei Punkten trifft, und welcher auf einen materiellen Punkt, der sich in einem dieser beiden Treffpunkte befindet, eine möglichst große Anziehung ausübt. (Gauss, Kneser, N. R. Wilson.)

Die Gleichung der Meridiankurve der gesuchten Rotationsfläche lautet in Polarkoordinaten

$$r^2 = a^2 \cos\theta .$$

41. Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum des Integrals

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

aufzustellen (§ 8).

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{77}$$

42. Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten im Raum zu bestimmen.

43. Die erste notwendige Bedingung für ein Extremum des Integrals

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')\,dx$$

aufzustellen:

a) Wenn die Endpunkte und die Tangentenrichtungen in denselben vorgeschrieben sind,

b) Wenn nur die Endpunkte vorgeschrieben sind.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0. \tag{78}$$

Wenn f die Variabeln x und y nicht enthält, so lassen sich zwei Integrationen sofort ausführen und man erhält

$$f - y''\frac{\partial f}{\partial y''} = a + by'. \tag{79}$$

(Euler.)

Im Fall b) kommen noch die Grenzgleichungen

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y''}\right|^1 = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y''}\right|^2 = 0 \tag{80}$$

hinzu (§ 7, a)).

44*. In einer Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten A und B eine Kurve zu ziehen, welche zusammen mit den Radien AA', BB' der Krümmungskreise in A, resp. B, und dem Bogen $A'B'$ der Evolute den kleinsten Flächenraum einschließt. Das Gefälle der Kurve in A und B ist vorgeschrieben.

(Euler.)

Lösung: Die Extremalen sind Zykloiden.

Andeutung: Mache von (79) Gebrauch, setze

$$a = 2c\cos\gamma, \qquad b = 2c\sin\gamma,$$

und mache alsdann die Substitution

$$y' = \operatorname{cotg}\left(\frac{t}{2} - \gamma\right).$$

Diskussion der Konstantenbestimmung. Diskutiere den Fall, wo nur die Endpunkte gegeben sind.

45. Die erste notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

aufzustellen.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0\,. \tag{81}$$

(Euler.)

Andeutung: Wende die Lagrange'sche partielle Integration wiederholt an.

46*. Unter welchen Bedingungen ist die Funktion

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

bei beliebiger Wahl der Funktion y die vollständige Ableitung einer Funktion

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

nach x? (§ 6, b))

Antwort: Es ist notwendig und hinreichend, daß identisch in $x, y, y', \ldots, y^{(2n)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \equiv 0\,.$$

(„Integrabilitätsbedingung“). (Euler, Lexell.)

47*. Es sei N eine in $[x_1 x_2]$ stetige Funktion und es sei

$$\int_{x_1}^{x_2} N \frac{d^n \eta}{dx^n}\, dx = 0$$

für alle Funktionen η, welche in $[x_1 x_2]$ von der Klasse $C^{(n)}$ sind und samt ihren $n-1$ ersten Ableitungen in x_1 und x_2 verschwinden. Alsdann ist N eine ganze Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades (§ 5, c)). (Zermelo.)