Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Drittes Kapitel. Hinreichende Bedingungen bei der einfachsten Klasse von Aufgaben

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Drittes Kapitel.

Hinreichende Bedingungen bei der einfachsten Klasse von Aufgaben.

§ 15. Hinreichende Bedingungen für ein „schwaches Extremum"[1]).

Wir setzen jetzt voraus, daß für unsere Extremale[2])

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \mathring{y}(x), \qquad x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2$$

die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$R(x) > 0, \quad \text{für} \quad x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2, \tag{II'}$$

$$\Delta(x, x_1) \neq 0, \quad \text{für} \quad x_1 < x \overline{\overline{<}} x_2{}^{3)} \tag{III'}$$

und fragen: *Sind diese Bedingungen hinreichend für ein Minimum?*

Dies ist in der Tat bis in die siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts allgemein als selbstverständlich angenommen worden, und erst WEIERSTRASS hat gezeigt, daß der Schluß falsch ist. Es verlohnt sich daher genauer zuzusehen, einerseits worin der Fehlschluß bestand, andererseits was man aus den obigen Annahmen wirklich schließen darf.

---

[1]) Man vergleiche für diesen Paragraphen die Arbeit von SCHEEFFER, *Über die Bedeutung der Begriffe Maximum und Minimum in der Variationsrechnung*, Mathematische Annalen, Bd. XXVI (1886), p. 197, welche für die Aufklärung der Grundbegriffe der Variationsrechnung von größter Wichtigkeit gewesen ist.

[2]) An den im Eingang von § 9, a) über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ gemachten Annahmen wird ein für allemal festgehalten; sie sind bei allen in der Folge über die Extremale $\mathfrak{E}_0$ aufgestellten Sätzen, den sonstigen Voraussetzungen hinzuzufügen. Vgl. auch p. 58.

[3]) Man beachte das Gleichheitszeichen, durch welches sich (III') von (III) unterscheidet; wegen des Falles $x_1' = x_2$ vgl. die Zitate auf p. 83, Fußnote [2]).

a) **Analyse des Fehlschlusses:**

Wir haben gesehen, daß aus den beiden Annahmen (II') und (III') in aller Strenge folgt, daß $\delta^2 J > 0$ für alle zulässigen Funktionen η, welche nicht identisch verschwinden. Daraus folgt aber in der Bezeichnung von § 4: Hat man eine zulässige Funktion $\eta(x)$ fest gewählt, so besitzt das Integral

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathring{y} + \varepsilon\eta, \mathring{y}' + \varepsilon\eta')\, dx$$

als Funktion von ε ein Minimum für $\varepsilon = 0$, da $J'(0) = 0$, $J''(0) > 0$. Das heißt: Es läßt sich eine positive Größe δ angeben, derart daß $\Delta J > 0$ für alle Kurven der Schar

$$y = \mathring{y}(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{1}$$

für welche $0 < |\varepsilon| < \delta$, oder wie wir sagen können: *In Beziehung auf die spezielle Schar* (1) *von Kurven* liefert $\mathfrak{E}_0$ wirklich ein Minimum.

Ist andererseits eine beliebige zulässige Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad y = \overline{y}(x), \qquad x_1 \overline{\leqq} x \leqq x_2$$

gegeben, so läßt sich dieselbe stets als Individuum einer Schar dieser Art betrachten; man braucht nur für $\eta(x)$ die Funktion $\eta(x) = \overline{y}(x) - \mathring{y}(x)$ zu wählen, so liefert die Schar (1) für $\varepsilon = 1$ die gegebene Kurve.

Hiernach scheint in der Tat aus den angegebenen Bedingungen die Existenz eines Minimums zu folgen. Dabei ist aber ein wesentlicher Punkt außer Acht gelassen. Die Funktion $J(\varepsilon)$, und daher ebenso *die Größe δ, hängt von der Wahl der Funktion η ab*; dies wollen wir auch in der Bezeichnung[1]) zum Ausdruck bringen, indem wir statt δ schreiben δ_η. Um unsere Definition des Minimums (§ 3, b)) zur Vergleichung heranziehen zu können, führen wir das Maximum m_η der Funktion $|\eta(x)|$ im Intervall $[x_1 x_2]$ ein und setzen: $\varrho_\eta = m_\eta \delta_\eta$; dann folgt für das Inkrement $\Delta y = \overline{y}(x) - \mathring{y}(x)$:

$$|\Delta y| < \varrho_\eta \quad \text{in} \quad [x_1 x_2] \tag{2}$$

für alle Kurven der Schar (1), für welche $|\varepsilon| < \delta_\eta$, d. h. diese Kurven

---

[1]) Nach E. H. Moore, vgl. z. B. *Transactions of the American Mathematical Society*, Bd. I (1900), p. 500. Diese Bezeichnungsweise empfiehlt sich sehr bei allen schwierigeren Grenzbetrachtungen.

liegen alle in der Nachbarschaft[1]) (ϱ_η) von $\mathfrak{C}_0$. Umgekehrt: Ziehen wir in der Nachbarschaft (ϱ_η) von $\mathfrak{C}_0$ irgend eine Kurve der Schar (1), so ist für dieselbe $\Delta J > 0$; denn aus der Annahme (2) folgt aus der Betrachtung des speziellen Wertes von x, welcher $|\eta(x)| = m_\eta$ liefert, daß $\varepsilon < \delta_\eta$.

Betrachten wir jetzt die Gesamtheit aller nicht identisch verschwindenden zulässigen Funktionen η, so besitzt die Menge der zugehörigen Werte ϱ_η nach § 2, a) eine untere Grenze ϱ_0, welche entweder positiv oder Null ist. Wenn nun $\varrho_0 > 0$, so kann man schließen, daß $\Delta J > 0$ für alle zulässigen Variationen $\overline{\mathfrak{C}}$, welche ganz in der Nachbarschaft (ϱ_0) von $\mathfrak{C}_0$ liegen, wie man sofort sieht, wenn man die gegebene Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ in der oben angegebenen Weise in eine Schar von der Form (1) einreiht. In diesem Fall tritt also tatsächlich ein Minimum ein. Die Untersuchungen des nächsten Paragraphen werden jedoch ergeben, daß es unmöglich ist, allgemein zu beweisen, daß $\varrho_0 > 0$. Wenn aber $\varrho_0 = 0$, so wird der ganze Schluß hinfällig.

Es zeigt sich also, daß der Fehlschluß in letzter Instanz auf der stillschweigenden Annahme, daß $\varrho_0 > 0$, oder was auf dasselbe hinausläuft, auf der Verwechslung von Minimum und unterer Grenze beruht, die an den meisten Fehlern und Ungenauigkeiten der älteren Infinitesimalrechnung Schuld trägt.

Es läßt sich aber auch a priori einsehen[2]), daß die Methode, welche unserer ganzen bisherigen Untersuchung zugrunde lag, überhaupt nie zu hinreichenden Bedingungen führen kann, so lange man der Funktion f ihre volle Allgemeinheit läßt.[3])

Denn wenn man die Taylor'sche Entwicklung (mit oder ohne Restglied) auf die Differenz

$$\Delta f = f(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - f(x, y, y')$$

anwendet und integriert, so kann man aus dem Vorzeichen der ersten Glieder nur dann auf das Zeichen von ΔJ schließen, *wenn nicht nur* $|\Delta y|$, *sondern auch* $|\Delta y'|$ *hinreichend klein bleibt*, oder, geometrisch gesprochen, wenn für entsprechende Punkte der Kurven $\mathfrak{C}_0$ und $\overline{\mathfrak{C}}$

---

[1]) Vgl. § 3, b).

[2]) Zuerst von Weierstrass betont.

[3]) Dagegen kann man für spezielle Funktionen f mittelst der Taylor'schen Formel hinreichende Bedingungen ableiten, z. B. wenn $f(x, y, y')$ die Ableitung y' überhaupt nicht enthält; vgl. auch p. 122, Fußnote [1]), sowie die *Übungsaufgaben* Nr. 20, 21 am Ende von Kap. III.

nicht nur der Abstand, sondern auch der Unterschied in der Richtung der Tangenten hinreichend klein ist.[1])

b) **Das schwache Extremum:**

Sehen wir jetzt zu, was aus den beiden Voraussetzungen (II') und (III') wirklich gefolgert werden darf. Wir können das Resultat am einfachsten formulieren, wenn wir den Begriff des „schwachen Extremums" einführen[2]): Wenn es zwei positive Größen ϱ und ϱ' gibt, derart, daß $\Delta J \gtreqless 0$ für alle zulässigen Variationen, für welche gleichzeitig

$$|\Delta y| < \varrho \text{ und } |\Delta y'| < \varrho' \text{ für } x_1 \leqq x \leqq x_2, \tag{3}$$

so sagt man nach KNESER (*Lehrbuch*, § 17): die Kurve $\mathfrak{C}_0$ liefert ein *schwaches Minimum* für das Integral J, und unterscheidet davon das Minimum, wie wir es nach WEIERSTRASS definiert haben (§ 3, b)), und bei welchem die zulässigen Variationen nur durch die erste Ungleichung $|\Delta y| < \varrho$ eingeschränkt sind, als *starkes Minimum*. Aus der Definition folgt, daß, wenn eine Kurve ein starkes Extremum liefert, sie allemal auch a fortiori ein schwaches Extremum liefert, aber nicht umgekehrt.

---

[1]) Auf diesen Punkt hat zuerst TODHUNTER aufmerksam gemacht, siehe *Researches in the Calculus of Variations* (London and Cambridge, 1871), p. 269.

[2]) Man kann das schwache Extremum noch kürzer definieren, wenn man mit KNESER den Begriff der *„engeren Umgebung"* einer Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad y = y(x), \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

von der Klasse C' einführt. Darunter versteht man irgend einen Bereich im Raum der Variabeln x, y, y', welcher die Kurve

$$\mathfrak{C}': \qquad y = y(x), \quad y' = y'(x), \quad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

ganz in seinem Innern enthält.

Weiter sagen wir, eine zweite Kurve

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad y = \bar{y}(x), \qquad \bar{x}_1 \leqq x \leqq \bar{x}_2$$

liege in einer gewissen engeren Umgebung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{C}$, wenn die Kurve

$$\overline{\mathfrak{C}}': \qquad y = \bar{y}(x), \quad y' = \bar{y}'(x), \quad \bar{x}_1 \leqq x \leqq \bar{x}_2$$

im Raum der Variabeln x, y, y' in $\mathfrak{A}'$ liegt.

Unter Benutzung dieser Terminologie können wir sagen: *Die Kurve $\mathfrak{C}_0$ liefert für das Integral J ein schwaches Minimum, wenn: $\Delta J \geqq 0$ für alle zulässigen Variationen in einer gewissen engeren Umgebung von $\mathfrak{C}_0$.*

ZERMELO hat diese Unterscheidungen noch weiter ausgebildet, indem er von einer Umgebung 0^{ter}, 1^{ter}, ... m^{ter} Ordnung spricht, vgl. *Dissertation*, p. 29.

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir dann den folgenden Satz[1]) aussprechen:

Wenn für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ *die Bedingungen*

$$R(x) > 0, \text{ für } x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2, \tag{II'}$$

$$\Delta(x, x_1) \neq \text{ für } x_1 < x \overline{\gtrless} x_2, \tag{III'}$$

erfüllt sind, so liefert sie zum mindesten ein schwaches Minimum für das Integral J.

Der Satz ist zuerst von WEIERSTRASS[2]) in seinen Vorlesungen bewiesen worden; der erste publizierte Beweis stammt von SCHEEFFER[3]); der folgende Beweis rührt von KNESER[4]) her:

Wir variieren die Extremale $\mathfrak{E}_0$, indem wir sie durch eine beliebige[5]) zulässige Kurve

$$\mathfrak{E}: \qquad y = \bar{y}(x), \qquad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$$

ersetzen, und bezeichnen, wie schon früher, das Inkrement $\Delta y = \bar{y}(x) - \mathring{y}(x)$ mit ω. Dann wenden wir, wie in § 4, auf das Inkrement Δf die Taylor'sche Formel mit Restglied an, brechen aber diesmal erst bei den Gliedern dritter Ordnung ab. Wir können dann schreiben

$$\Delta J = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(P\omega^2 + 2\,Q\omega\omega' + R\omega'^2)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(L\omega^2 + N\omega'^2)\,dx,$$

wo L und N „gleichmäßig[6]) unendlich klein“ sind im Intervall $[x_1 x_2]$, worunter wir folgendes verstehen: Zu jeder positiven Größe σ gibt es eine zweite positive, von x unabhängige Größe ϱ_σ, derart daß

$$|L| < \sigma, \qquad |N| < \sigma \qquad \text{in } [x_1 x_2]$$

vorausgesetzt, daß

$$|\omega| < \varrho_\sigma, \quad \text{und } |\omega'| < \varrho_\sigma \quad \text{in } [x_1 x_2].$$

[1]) Vgl. p. 88, Fußnote [2]).

[2]) Vgl. HANCOCK, *Lectures* Nr. 137—139; der Weierstraß'sche Beweis beruht auf ähnlichen Prinzipien wie der von KNESER.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. XXVI (1886), p. 200.

[4]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI (1899), p. 95. Wir gehen nicht auf die Einzelheiten des Beweises ein, da sich später ein einfacherer aus dem Weierstraß'schen Theorem (§ 19, c)) ergeben wird.

[5]) Jetzt, wo es sich um hinreichende Bedingungen handelt, dürfen wir uns nicht mehr auf spezielle Variationen der Form $\varepsilon\eta$ oder selbst $\omega(x, \varepsilon)$, beschränken.

[6]) Vgl. A II 6.

Mittelst der Legendre'schen Transformation (§ 9, b)) läßt sich das erste Integral auf die Form bringen

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[R\left(\omega' + \frac{Q+w}{R}\omega\right)^2 + \left(P + w' - \frac{(Q+w)^2}{R}\right)\omega^2\right]dx.$$

Da wir voraussetzen, daß die Bedingungen (II') und (III') erfüllt sind, so existieren[1]) Lösungen der Legendre'schen Differentialgleichung

$$P + \frac{dw}{dx} - \frac{(Q+w)^2}{R} = 0, \tag{4}$$

welche in $[x_1 x_2]$ von der Klasse C' sind. Daraus folgt nach allgemeinen Sätzen[2]) über Differentialgleichungen, welche einen konstanten Parameter enthalten, daß auch die Differentialgleichung

$$P + \frac{dw}{dx} - \frac{(Q+w)^2}{R} = c^2 \tag{5}$$

Integrale besitzt, welche in $[x_1 x_2]$ von der Klasse C' sind, vorausgesetzt, daß die Konstante c hinreichend klein genommen wird. Wählen wir für w ein solches Integral von (5) und schreiben zur Abkürzung:

$$\zeta = \omega' + \frac{Q+w}{R}\omega,$$

so nimmt der Ausdruck für ΔJ die folgende Form an:

$$\Delta J = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}[(c^2+\lambda)\omega^2 + 2\mu\omega\zeta + (R+\nu)\zeta^2]dx,$$

wo λ, μ, ν in demselben Sinne wie L und N gleichmäßig unendlich klein sind in $[x_1 x_2]$. Statt dessen können wir aber schreiben

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[(R+\nu)\left(\zeta + \frac{\mu}{R+\nu}\omega\right)^2 + \left(c^2 + \lambda - \frac{\mu^2}{R+\nu}\right)\omega^2\right]dx,$$

und da λ, μ, ν in dem angegebenen Sinne unendlich klein sind, so können wir zwei positive Größen ϱ und ϱ' so wählen, daß $R + \nu > 0$

---

[1]) Dies folgt aus dem Zusammenhang zwischen der Legendre'schen und Jacobi'schen Differentialgleichung, vgl. § 10, a) und § 12, a).

[2]) Siehe die Zitate auf p. 82, Fußnote [2]) und § 24, e).

und $c^2 + \lambda - \frac{\mu^2}{R+\nu} > 0$ in $[x_1 x_2]$ und daher $\Delta J > 0$, vorausgesetzt, daß $|\omega| < \varrho$ und $|\omega'| < \varrho'$, womit der Satz bewiesen ist.

c) **Schwache und starke Variationen:**

Die Ausdrücke „schwach" und „stark" werden bisweilen auch auf die Variationen übertragen.[1]) Eine einen Parameter ε enthaltende Variation

$$\Delta y = \omega(x, \varepsilon)$$

heiße *schwach*, wenn nicht nur

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\,\omega(x, \varepsilon) = 0, \text{ sondern auch } \underset{\varepsilon=0}{L}\,\omega'(x, \varepsilon) = 0,$$

und zwar gleichmäßig[2]) im Intervall $[x_1 x_2]$, dagegen *stark*, wenn zwar die erste aber nicht die zweite Bedingung erfüllt ist.

Sowohl die Variationen der Form

$$\Delta y = \varepsilon \eta$$

als auch die allgemeineren in § 8 betrachteten „Normalvariationen" sind schwache Variationen.[3])

Dagegen stellt die Funktion[4])

$$\Delta y = \varepsilon \sin \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\varepsilon^n},$$

wo n eine positive ganze Zahl ist, eine starke Variation dar; hier ist die Bedingung

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\,\Delta y = 0$$

erfüllt, aber nicht die Bedingung

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\,\Delta y' = 0.$$

Andere Beispiele von starken Variationen werden in § 15, d) vorkommen.

d) **Unzulänglichkeit der Bedingungen (I), (II'), (III'), für ein starkes Minimum:**

Wir kehren jetzt wieder zum starken Extremum zurück und beweisen, daß die drei Bedingungen (I), (II'), (III') für ein starkes

[1]) Vgl. Osgood, loc. cit., p. 106. Die Terminologie ist schwankend.

[2]) Vgl. A II 6.

[3]) Daraus folgt, daß die Bedingungen (I), (II), (III) nicht nur für ein starkes, sondern auch für ein schwaches Minimum notwendig sind.

[4]) Dies ist eine von Goursat herrührende Modifikation eines Beispiels von Weierstrass.

Extremum *nicht hinreichend* sind. Dazu genügt es, ein einziges Beispiel beizubringen, in welchem die Bedingungen (I), (II'), (III') erfüllt sind, und in welchem trotzdem kein Minimum stattfindet. Ein einfaches Beispiel[1]) dieser Art ist das folgende:

Beispiel IX: Das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y'^3)\,dx$$

zu einem Minimum zu machen unter der Annahme, daß die Koordinaten der Endpunkte sind: $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$.

Die Extremalen sind hier gerade Linien, und $\mathfrak{E}_0$ ist das Segment [01] der x-Achse. Ferner ist

$$R = 2$$

$$\Delta(x, x_1) = (x - x_1);$$

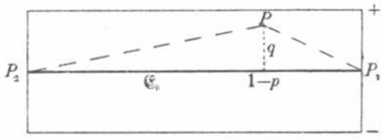

Fig. 16.

somit sind die Bedingungen (I), (II'), (III') für ein Minimum erfüllt. Trotzdem kann ΔJ negativ gemacht werden. Denn wählen wir für $\overline{\mathfrak{E}}$ die gebrochene Linie P_1PP_2 und bezeichnen die Koordinaten von P mit $(1 - p, q)$, wo $0 < p < 1$ und $q > 0$, so erhalten wir für ΔJ den Ausdruck

$$\Delta J = \frac{q^2}{p(1-p)}\left(1 + \frac{q}{1-p} - \frac{q}{p}\right).$$

Ist nun irgend eine Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ gegeben, so wähle man $q < \varrho$; dann kann man p stets so klein nehmen, daß $\Delta J < 0$.

Schließlich kann man nach dem Lemma über Abrundung der Ecken, § 14, c), die gebrochene Linie P_1PP_2 durch eine Kurve der Klasse C' ersetzen, welche ebenfalls $\Delta J < 0$ macht, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 16. **Konstruktion eines Feldes von Extremalen.**

Nachdem im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, daß die bisher als notwendig erkannten Bedingungen nicht hinreichend sind,

---

[1]) Das erste Beispiel dieser Art war das Problem des Rotationskörpers von geringstem Widerstand, mit dem wir uns später noch ausführlich beschäftigen werden (§ 49). Schon Legendre fand, daß der Widerstand durch eine passend gewählte Zickzacklinie beliebig klein gemacht werden kann; vgl. Legendre, loc. cit., p. 73 in Stäckel's Übersetzung, und Pascal, loc. cit., p. 113.

wäre es das natürlichste, zunächst nach weiteren notwendigen Bedingungen[1]) zu suchen. Wir werden jedoch, um Wiederholungen zu vermeiden, hier diesen Weg nicht einschlagen, sondern uns direkt zur Ableitung des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes wenden, aus dem sich sowohl weitere notwendige als auch hinreichende Bedingungen ergeben werden. Dazu ist es vor allem nötig, den wichtigen Begriff eines „Feldes von Extremalen" zu entwickeln.

a) **Definition eines Feldes von Extremalen:**

Wir betrachten irgend[2]) eine Schar von Extremalenbogen

$$y = \varphi(x, a), \qquad \overset{1}{x}(a) \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} \overset{2}{x}(a), \tag{6}$$

und beschränken den Parameter a auf ein Intervall

$$a_1 \overline{\overline{<}} a \overline{\overline{<}} a_2. \tag{6a}$$

Die Funktionen $\overset{1}{x}(a)$, $\overset{2}{x}(a)$ sollen im Intervall $[a_1 a_2]$ stetig sein und der Ungleichung: $\overset{1}{x}(a) < \overset{2}{x}(a)$ genügen; und die Funktionen φ und φ_x sollen von der Klasse C' sein in dem Bereich

$$a_1 \overline{\overline{<}} a \overline{\overline{<}} a_2, \qquad \overset{1}{x}(a) \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} \overset{2}{x}(a). \tag{7}$$

Wir sagen dann: *die Bogenschar* (6), (6a) *bildet ein „Feld*[3]) *von Extremalen", wenn keine zwei Bogen der Schar einen Punkt gemeinsam haben.* Das läßt sich auch so ausdrücken: wenn die Gleichungen

$$x = x, \qquad y = \varphi(x, a),$$

als Transformation zwischen der x, a-Ebene und der x, y-Ebene aufgefaßt, eine ein-eindeutige Beziehung zwischen dem Bereich (7) der x, a-Ebene und dessen Bild in der x, y-Ebene, das wir mit $\mathcal{S}$ bezeichnen, definieren. Das Feld ist dann eben diese Punktmenge $\mathcal{S}$, d. h. die Gesamtheit der Punkte sämtlicher Bogen der Schar (6), (6a), oder, wie wir auch sagen können, derjenige Teil der x, y-Ebene,

---

[1]) Eine vierte notwendige Bedingung wird sich später aus dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz ergeben, § 18, a); eine direkte Ableitung derselben nach der Methode von Weierstrass findet man bei Bolza, *Lectures,* § 18, b); bei Goursat, *Cours d'Analyse,* Bd. II, p. 607, und in Parameterdarstellung unten in § 31

[2]) Die Bezeichnung $\varphi(x, a)$ ist also hier allgemeiner als in § 13, a).

[3]) Nach Kneser, *Lehrbuch,* § 14; der Begriff eines Feldes in einem engeren Sinn rührt von Weierstrass her, im allgemeinsten Sinn von H. A. Schwarz, *Werke,* Bd. I, p. 225. Vgl. auch Osgood, loc. cit. p. 112, und Goursat, loc. cit. p. 611.

welcher von den Extremalenbogen (6) überstrichen wird, wenn der Parameter a von a_1 bis a_2 wächst.

Da die Begrenzung $\mathfrak{L}$ des Bereiches (7) eine stetige, geschlossene Kurve ohne mehrfache Punkte ist (eine sogenannte „Jordan'sche Kurve"), so ist auch das Bild $\mathfrak{L}'$ von $\mathfrak{L}$ eine solche Kurve; sie teilt daher nach A VI 2 die x, y-Ebene in ein Inneres und ein Äußeres. Nach einem allgemeinen Satz von SCHÖNFLIES[1]) ist dann die Punktmenge $\mathcal{S}$ identisch mit dem Inneren der Kurve $\mathfrak{L}'$ zusammen mit der Begrenzung $\mathfrak{L}'$. Das Feld ist also stets *einfach zusammenhängend.*

Analytisch bedeutet die oben gegebene Definition eines Feldes, daß die Gleichung

$$y = \varphi(x, a)$$

für jeden Punkt (x, y) des Bereiches $\mathcal{S}$ eine und nur eine Wurzel a besitzt, welche der Ungleichung (6a) genügt; diese Wurzel ist also eine in $\mathcal{S}$ eindeutig definierte Funktion von x und y, die wir mit

$$a = \mathfrak{a}(x, y)$$

bezeichnen und *die inverse Funktion des Feldes* nennen, so daß also

$$y \equiv \varphi(x, \mathfrak{a}(x, y)), \qquad a_1 \overline{\overline{<}} \mathfrak{a}(x, y) \overline{\overline{<}} a_2 \tag{8}$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathcal{S}$ und

$$a \equiv \mathfrak{a}(x, \varphi(x, a)) \tag{8a}$$

für jeden Punkt (x, a) des Bereiches (7).

Es soll dann neben der angegebenen Haupteigenschaft des Feldes noch die weitere Bedingung in die Definition des Feldes aufgenommen werden, daß *die inverse Funktion* $\mathfrak{a}(x, y)$ *im Bereich* $\mathcal{S}$ *von der Klasse* C' sein soll.

Wir beschränken uns überdies ausschließlich auf Felder, welche ganz im Bereich $\mathfrak{R}$ liegen.

Die durch einen beliebigen Punkt (x, y) von $\mathcal{S}$ gehende Feldextremale hat in diesem Punkt ein ganz bestimmtes Gefälle, welches daher ebenfalls eine in $\mathcal{S}$ eindeutig definierte Funktion von x und y ist; wir bezeichnen dieselbe mit $p(x, y)$ und nennen sie die *Gefällfunktion des Feldes*, so daß also

---

[1]) Vgl. A VII 2; um den Satz von SCHÖNFLIES anwenden zu können, transformiere man zunächst den Bereich (7) in ein Quadrat mittels der Transformation

$$\xi = \frac{x - \overset{1}{x}(a)}{\overset{2}{x}(a) - \overset{1}{x}(a)}, \qquad \eta = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}.$$

$$p(x, y) = \varphi_x(x, \mathfrak{a}(x, y)). \tag{9}$$

Nach den über die Funktionen φ und $\mathfrak{a}$ gemachten Annahmen folgt nach A IV 9, daß $p(x, y)$ im Bereich $\mathcal{S}$ von der Klasse C' ist. Zugleich folgt aus (8a) und (9) die Identität

$$p(x, \varphi(x, a)) \equiv \varphi_x(x, a) \tag{9a}$$

für jedes (x, a) in (7).

Man kann die Definition des Feldes dahin verallgemeinern, daß man auch „offene" und „unendliche" Felder zuläßt, indem man gestattet, daß in den Ungleichungen (7) einige oder alle Gleichheitszeichen unterdrückt werden, und daß die Intervalle a_1, a_2 und $\overset{1}{x}(a)$, $\overset{2}{x}(a)$ sich nach einer oder nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken (vgl. die Beispiele unter b)).

Eine weitere Verallgemeinerung, von der wir jedoch keinen Gebrauch machen werden, erhält man, wenn man jeden Teilbereich eines Feldes selbst wieder ein Feld nennt.

b) **Beispiele von Feldern von Extremalen:**

Wir wollen diese Definitionen zunächst an einigen Beispielen erläutern.

Beispiel VI (Siehe p. 32): $f = G(y')$.

Hier waren die Extremalen die Geraden der Ebene. Die Schar paralleler Geraden

$$y = mx + a,$$
$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < a < +\infty,$$

bildet ein Feld, das aus sämtlichen (im Endlichen gelegenen) Punkten der x, y-Ebene besteht. Hier ist

$$\mathfrak{a}(x, y) = y - mx, \qquad p(x, y) = m.$$

Ebenso liefert die Schar von Halbstrahlen durch einen festen Punkt P_0:

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$
$$x_0 < x < +\infty, \qquad -\infty < a < +\infty$$

ein Feld, nämlich die durch die Ungleichung $x > x_0$ charakterisierte Hälfte der Ebene. Man pflegt das auch so auszudrücken: Die Halbebene $x > x_0$ wird durch das obige Geradenbüschel „einfach und lückenlos" ausgefüllt. Es ist hier

$$\mathfrak{a}(x, y) = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \qquad p(x, y) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Zuweilen ist es wünschenswert, den Punkt P_0 dem Feld zu adjungieren; wir nennen allgemein ein Feld, dem gewisse, ursprünglich nicht zu ihm gehörige Punkte seiner Begrenzung adjungiert worden sind, ein *„uneigentliches Feld"*.

Beispiel VII (Siehe p. 33): $f = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$.

Die Extremalen waren die Halbkreise mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse. Hier bilden z. B. die konzentrischen Halbkreise mit demselben Mittelpunkt $P_0(x_0, 0)$:

$$y = \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2},$$

$$0 < a < \infty, \qquad x_0 - a < x < x_0 + a$$

ein Feld, nämlich die obere Halbebene: $y > 0$. Dabei ist

$$\mathfrak{a}(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}, \qquad p(x, y) = -\frac{x - x_0}{y}.$$

Beispiel VIII (Siehe p. 33): $f = \sqrt{y}\sqrt{1 - y'^2}$.

Die Extremalen waren hier die Parabeln

$$y = \beta - \frac{(x - \alpha)^2}{4\beta}, \qquad \beta > 0.$$

Wir greifen aus dieser doppelt unendlichen Schar von Parabeln die einfach unendliche Schar durch den Koordinatenanfang heraus $\left(\alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{a}{4}\right)$:

$$y = x - \frac{x^2}{a},$$

$$0 < a < \infty, \qquad 0 < x < +\infty.$$

Dieselbe bildet ein Feld, bestehend aus dem Inneren des Winkelraums zwischen der positiven x-Achse und dem Halbstrahl von der Amplitude [1] $\frac{\pi}{4}$ vom Koordinatenanfangspunkt aus, inklusive der positiven x-Achse, jedoch mit Ausschluß des Punktes $(0, 0)$:

$$\mathcal{S}: \qquad x > y \geqq 0.$$

Man findet

$$\mathfrak{a}(x, y) = \frac{x^2}{x - y}, \qquad p(x, y) = \frac{2y - x}{x}.$$

Beispiel I (Siehe pp. 1, 33, 79): $f = y\sqrt{1 + y'^2}$.

Wir betrachten die Schar von Kettenlinien mit der x-Achse als Direktrix, welche durch den Punkt P_1 gehen. Von jeder dieser Kettenlinien behalten wir den Bogen

$$x_1 < x < x_1'$$

bei, d. h. den Bogen vom Punkt P_1 bis zum konjugierten Punkt P_1' (mit Ausschluß der Endpunkte), also bis zum Berührungspunkt mit der Enveloppe $\mathfrak{F}$ (Siehe Fig. 12). Dabei ist x_1' durch $+\infty$ zu ersetzen, falls kein konju-

[1] Unter der „*Amplitude*" eines Vektors verstehen wir, wie dies in der Funktionentheorie üblich ist, den Winkel, welchen derselbe mit der positiven x-Achse bildet, gerechnet im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers.

gierter Punkt auf der betreffenden Kettenlinie existiert. Diese Bogen erfüllen einfach und lückenlos das Innere des Bereiches I der x, y-Ebene (siehe Fig. 12)

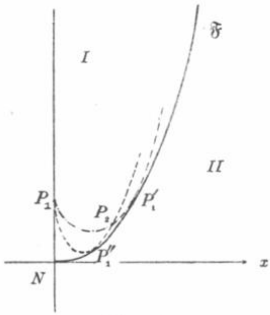

Fig. 12.

zwischen der Geraden $x = x_1$ und der Enveloppe 𝔉, da nach p. 81 durch jeden Punkt dieses Bereiches ein und nur ein Bogen der Schar gezogen werden kann. Da sich überdies zeigen läßt[1]), daß die inverse Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ von der Klasse C' ist, so bildet unsere Bogenschar ein Feld von Extremalen.

Adjungiert man dem Feld die Enveloppe 𝔉, so bleibt zwar für das so erhaltene uneigentliche Feld die Haupteigenschaft eines Feldes bestehen, aber die Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ hört nach (15) und (15a) auf, von der Klasse C' zu sein, da $\varphi_a(x, a) = 0$ entlang 𝔉.[2])

c) **Satz über die Existenz eines Feldes:**

Wir werden sagen: *ein Feld $\mathcal{S}$ von Extremalen „umgibt" unseren Extremalenbogen* $\mathfrak{E}_0$, wenn erstens der Bogen $\mathfrak{E}_0$ einer der Extremalen des Feldes angehört, und wenn sich zweitens eine Nachbarschaft (ϱ) des Bogens $\mathfrak{E}_0$ angeben läßt, welche ganz in $\mathcal{S}$ enthalten ist.

Es sei jetzt irgend eine Extremalenschar

$$y = \varphi(x, a) \tag{10}$$

gegeben, welche den Bogen $\mathfrak{E}_0$ für $a = a_0$ enthält, und für welche die Funktionen φ und φ_x in dem Bereich

$$X_1 \leqq x \leqq X_2, \qquad |a - a_0| \leqq d_0 \tag{11}$$

von der Klasse C' sind, wobei $X_1 < x_1$, $x_2 < X_2$.

Alsdann gilt der folgende Satz:

Wenn

$$\varphi_a(x, a_0) \neq 0 \quad in \quad [x_1 x_2], \tag{12}$$

so kann man eine positive Größe k so klein wählen, daß die Bogenschar

$$y = \varphi(x, a), \tag{10}$$

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad |a - a_0| \leqq k \tag{13}$$

ein den Bogen $\mathfrak{E}_0$ umgebendes Feld bildet.[3])

[1]) Vgl. § 16, c).

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 2—12, 35—40 am Ende von Kap. III.

[3]) Der Bereich (7) ist also hier insbesondere ein Rechteck.

Beweis: Aus (12) folgt, daß die Funktion $\varphi_a(x, a_0)$ in $[x_1 x_2]$ ihr Zeichen nicht wechseln kann, da sie stetig ist. Um die Ideen zu fixieren, wollen wir annehmen, es sei

$$\varphi_a(x, a_0) > 0 \quad \text{in} \quad [x_1 x_2]. \tag{12a}$$

Dann folgt nach § 21, b), daß $k \leqq d_0$ so klein genommen werden kann, daß

$$\varphi_a(x, a) > 0 \tag{14}$$

im ganzen Bereich (13).

Es bezeichne jetzt $\mathcal{S}_k$ das Bild des Bereiches (13) der x, a-Ebene in der x, y-Ebene mittels der Transformation (10), und es sei $P_3(x_3, y_3)$ irgend ein Punkt von $\mathcal{S}_k$, d. h. also irgend ein Punkt auf einem der Bogen der Schar (10), (13). Dann ist $x_1 \leqq x_3 \leqq x_2$ und es gibt mindestens einen Wert $a = a_3$ im Intervall $[a_0 - k, a_0 + k]$, so daß

$$y_3 = \varphi(x_3, a_3).$$

Wir haben zu zeigen, daß es außer dem Wert a_3 im Intervall $[a_0 - k, a_0 + k]$ keinen zweiten, von a_3 verschiedenen Wert a'_3 geben kann, für welchen ebenfalls

$$y_3 = \varphi(x_3, a'_3).$$

Wäre das der Fall, so wäre

$$\varphi(x_3, a_3) = \varphi(x_3, a'_3).$$

Dies ist aber nicht möglich; denn[1]) wegen (14) wächst die Funktion $\varphi(x_3, a)$ beständig von dem Anfangswert $\varphi(x_3, a_0 - k)$ bis zu dem Endwert $\varphi(x_3, a_0 + k)$, während a von $a_0 - k$ bis $a_0 + k$ zunimmt; es ist also $\varphi(x_3, a'_3) \gtrless \varphi(x_3, a_3)$, je nachdem $a'_3 \gtrless a_3$.

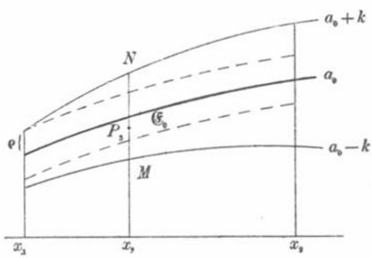

Fig. 17.

Somit ist der Bogen $a = a_3$ der einzige der Schar (10), welcher durch den Punkt (x_3, y_3) von $\mathcal{S}_k$ hindurchgeht, und für welchen $|a - a_0| \leqq k$.

Zugleich folgt, daß das ganze Segment

$$\varphi(x_3, a_0 - k) \leqq y \leqq \varphi(x_3, a_0 + k)$$

der Geraden $x = x_3$ (in Fig. 17 mit MN bezeichnet) zu $\mathcal{S}_k$ gehört. Die Punktmenge $\mathcal{S}_k$ ist also identisch mit dem Flächenstück der

[1]) Statt der hier gewählten Begründung kann man auch den Rolle'schen Satz anwenden.

x, y-Ebene, das von den beiden sich nicht schneidenden Kurven

$$y = \varphi(x, a_0 - k) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x, a_0 + k)$$

einerseits, und den beiden Geraden $x = x_1$, $x = x_2$ andererseits begrenzt wird.

Nachdem hiermit die Existenz der eindeutigen Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ bewiesen ist, haben wir weiter zu zeigen, daß dieselbe von der Klasse C' ist.[1])

Es seien (x, y) und $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ zwei benachbarte Punkte von $\mathcal{S}_k$ und a, resp. $a + \Delta a$, die zugehörigen Werte von $\mathfrak{a}(x, y)$, so daß also

$$y = \varphi(x, a), \qquad y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x,\ a + \Delta a).$$

Dann ist

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x,\ a + \Delta a) - \varphi(x, a)$$

oder nach der Taylor'schen Formel

$$\Delta y = \varphi_x(\tilde{x}, \tilde{a})\,\Delta x + \varphi_a(\tilde{x}, \tilde{a})\,\Delta a,$$

wo $\tilde{x} = x + \theta\,\Delta x, \qquad \tilde{a} = a + \theta\,\Delta a \quad \text{und} \quad 0 < \theta < 1.$

Wir erhalten also

$$\Delta a = \frac{\Delta y - \varphi_x(\tilde{x}, \tilde{a})\,\Delta x}{\varphi_a(\tilde{x}, \tilde{a})}.$$

Nun besitzt die stetige Funktion $\varphi_a(x, a)$ in dem abgeschlossenen Bereich (13) ein positives Minimum m, und ebenso die Funktion $|\varphi_x(x, a)|$ ein endliches Maximum G. Da $(\tilde{x}, \tilde{a})$ dem Bereich (13) angehört, so ist daher

$$|\Delta a| \leqq \frac{|\Delta y| + G\,|\Delta a|}{m},$$

woraus folgt, daß die Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ im Punkt x, y stetig ist.

Wählen wir ferner $\Delta y = 0$ und lassen Δx gegen 0 konvergieren, so konvergiert nach dem eben Bewiesenen Δa gegen 0, also konvergieren $\varphi_x(\tilde{x}, \tilde{a})$ und $\varphi_a(\tilde{x}, \tilde{a})$ gegen $\varphi_x(x, a)$ und $\varphi_a(x, a)$.

Daher existiert die partielle Ableitung $\mathfrak{a}_x$ und es ist

$$\mathfrak{a}_x = -\frac{(\varphi_x)}{(\varphi_a)}, \tag{15}$$

---

[1]) Für den folgenden Beweis vgl. GENOCCHI-PEANO, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung* (Leipzig 1899), Nr. 111; JORDAN, *Cours d'Analyse*, I, Nr. 91. Daß $\mathfrak{a}(x, y)$ von der Klasse C' ist, kann man auch direkt aus dem Satz über implizite Funktionen entnehmen; siehe § 22, e).

wobei die Klammer ( ) andeuten soll, daß das Argument a durch $\mathfrak{a}(x, y)$ zu ersetzen ist.

Ganz ebenso folgt, daß auch $\mathfrak{a}_y$ existiert und daß

$$\mathfrak{a}_y = \frac{1}{(\varphi_a)}. \tag{15a}$$

Aus diesen Ausdrücken für $\mathfrak{a}_x$ und $\mathfrak{a}_y$ folgt dann wegen (14) schließlich noch, daß die Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ von der Klasse C' ist in $\mathcal{S}_k$.

Endlich läßt sich eine Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ angeben, welche ganz in $\mathcal{S}_k$ enthalten ist. Denn jede der beiden stetigen Funktionen

$$\varphi(x, a_0 + k) - \varphi(x, a_0),$$

und

$$\varphi(x, a_0) - \varphi(x, a_0 - k)$$

hat ein positives Minimum in $[x_1 x_2]$; ist daher ϱ der kleinere dieser beiden Minimalwerte, so ist die Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ ganz in $\mathcal{S}_k$ enthalten.

Der Bereich $\mathcal{S}_k$ besitzt also die drei charakteristischen Eigenschaften eines den Bogen $\mathfrak{E}_0$ umgebenden Feldes, was zu beweisen war.

Da wir voraussetzen, daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt, so können wir nach dem Satz über gleichmäßige Stetigkeit k stets so klein annehmen, daß das Feld $\mathcal{S}_k$ ebenfalls ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt. Das soll in der Folge, wenn von einem den Bogen $\mathfrak{E}_0$ umgebenden Feld die Rede ist, stets vorausgesetzt werden.[1]

d) **Zusammenhang mit der Jacobi'schen Bedingung:**

Wir können jetzt den folgenden Satz beweisen:

Sind für den Extremalenbogen[2] $\mathfrak{E}_0$ *die Bedingungen*

$$R(x) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2,$$

und

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 < x \overline{\gtrless} x_2 \tag{III'}$$

erfüllt, so läßt sich der Bogen $\mathfrak{E}_0$ *stets mit einem Feld von Extremalen umgeben.*

Zum Beispiel liefert die Extremalenschar durch einen auf der Fortsetzung von $\mathfrak{E}_0$ über den Punkt P_1 hinaus hinreichend nahe bei P_1 angenommenen Punkt P_0 ein solches Feld.

Zum Beweis ist es nur nötig, die Abszisse x_0 des Punktes P_0 so zu wählen wie in § 12, a). Dann ist in der dortigen Bezeichnung

$$\Delta(x, x_0) \neq 0 \quad \text{in} \quad [x_1 x_2].$$

---

[1]) Der Leser möge von hier direkt zu § 17 übergehen.

[2]) Vgl. p. 88, Fußnote [2]).

Stellt dann die Gleichung

$$y = \varphi(x, a)$$

die Schar der Extremalen durch den Punkt P_0 dar, wobei der Wert $a = a_0$ wieder der Extremale $\mathfrak{E}_0$ entsprechen soll, so besitzt nach § 13, a) die Funktion φ die in § 16, c) vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften, und überdies ist

$$\varphi_a(x, a_0) \neq 0 \quad \text{in} \quad [x_1 x_2],$$

weil nach § 13, Gleichung (34)

$$\varphi_a(x, a_0) \equiv C\Delta(x, x_0),$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Somit erfüllt die Extremalenschar durch den Punkt P_0 alle Bedingungen des unter c) bewiesenen Satzes und bildet daher in der Tat ein den Bogen $\mathfrak{E}_0$ umgebendes Feld.[1])

---

[1]) *Die Extremalenschar durch den Punkt P_1 selbst bildet nur ein uneigentliches Feld* um den Bogen $\mathfrak{E}_0$, weil hier $\varphi_a(x_1, a_0) = 0$. Trotzdem läßt sich zeigen, daß (bei hinreichend kleinem k) durch jeden Punkt des Bereiches $\mathcal{S}_k$ mit Ausnahme des Punktes P_1 selbst, eine und nur eine Extremale der Schar gezogen werden kann, für welche $|a - a_0| \overline{\gtrless} k$. Denn im gegenwärtigen Fall ist: $\varphi(x_1, a) \equiv y_1$ für jedes a und daher $\varphi_a(x_1, a) \equiv 0$. Daraus folgt, daß, wenn wir definieren

$$\chi(x, a) = \begin{cases} \varphi_a(x, a)/(x - x_1), & \text{wenn} \quad x \neq x_1 \\ \varphi_{ax}(x_1, a), & \text{wenn} \quad x = x_1, \end{cases}$$

die Funktion $\chi(x, a)$ stetig ist im Bereich: $X_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} X_2$, $|a - a_0| \overline{\gtrless} d_0$ und $\chi(x, a_0) \neq 0$ in $[x_1 x_2]$ auch für $x = x_1$, da nach § 13, Gleichung (36), $\varphi_{ax}(x_1, a_0) \neq 0$. Wir können daher k so klein wählen, daß: $\chi(x, a) \neq 0$ im Bereich: $x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$, $|a - a_0| \overline{\gtrless} k$. Daraus folgt aber, daß $\varphi_a(x, a) \neq 0$ und daher ein konstantes Vorzeichen besitzt im Bereich: $x_1 < x \overline{\gtrless} x_2$, $|a - a_0| \overline{\gtrless} k$. Und nunmehr kann man weiterschließen wie unter c). Es ist auch zu beachten, daß es im vorliegenden Fall nicht möglich ist, eine Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$ in $\mathcal{S}_k$ einzuschreiben, da die Breite des Streifens $\mathcal{S}_k$ gegen Null konvergiert, wenn x sich dem Wert x_1 nähert. Ferner sind die inverse Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ und das Gefälle $p(x, y)$ von der Klasse C' in $\mathcal{S}_k$ außer im Punkt (x_1, y_1), wo sie unbestimmt sind. Wenn sich jedoch der Punkt (x, y) dem Punkt (x_1, y_1) längs einer ganz in $\mathcal{S}_k$ gelegenen Kurve $\mathfrak{C}$ von der Klasse C' nähert, so nähern sich beide Funktionen bestimmten endlichen Grenzen; die Grenze von $\mathfrak{a}(x, y)$ ist der Parameter a derjenigen Extremale der Schar, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ in (x_1, y_1) berührt; die Grenze von $p(x, y)$ ist das Gefälle der Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkt (x_1, y_1). Überdies besitzen die absoluten Beträge beider Funktionen endliche obere Grenzen im Bereich $\mathcal{S}_k$ mit Ausschluß des Punktes P_1. Diejenige von $|\mathfrak{a}(x, y)|$ ist k, diejenige von $|p(x, y)|$ ist der Maximalwert von $|\varphi_x(x, a)|$ im Bereich (13).

Umgekehrt: *Wenn für den Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingung*

$$R(x) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$$

erfüllt ist, und $\mathfrak{E}_0$ läßt sich mit einem Feld $\mathcal{S}$ von Extremalen umgeben, so ist

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 < x \overline{\gtrless} x_2 . \tag{III'}$$

Beweis: Es sei[1])

$$y = \varphi(x, a)$$

die Extremalenschar, welche das Feld $\mathcal{S}$ liefert, wobei

$$y = \varphi(x, a_0)$$

wieder die Extremale $\mathfrak{E}_0$ darstellt. Da in unserer Definition des Feldes inbegriffen war, daß die inverse Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ von der Klasse C' sein sollte, so folgt durch Differentiation der Identität (8) nach y, daß

$$\varphi_a(x, \mathfrak{a})\mathfrak{a}_y = 1 , \quad \text{also} \quad \varphi_a(x, \mathfrak{a}) \neq 0 \text{ in } \mathcal{S};$$

also insbesondere, da $\mathfrak{E}_0$ in $\mathcal{S}$ liegt,

$$\varphi_a(x, a_0) \neq 0 \quad \text{in} \quad [x_1 x_2] .$$

Nun folgt aber ganz wie in § 12, b), daß die Funktion $\varphi_a(x, a_0)$ der Jacobi'schen Differentialgleichung genügt; wegen der Voraussetzung $R(x) \neq 0$ in $[x_1 x_2]$ sind die allgemeinen Sätze von § 11, insbesondere der Sturm'sche Satz, auf das Intervall $[x_1 x_2]$ anwendbar. Wäre nun $x_1' \overline{\gtrless} x_2$, so würde durch Anwendung des Sturm'schen Satzes auf die beiden linear unabhängigen Integrale $\varphi_a(x, a_0)$ und $\Delta(x, x_1)$ folgen, daß $\varphi_a(x, a_0)$ zwischen x_1 und x_2 verschwinden müßte, was einen Widerspruch involviert. Es folgt also in der Tat

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x \overline{\gtrless} x_2 .$$

§ 17. Der Weierstraß'sche Fundamentalsatz.

Nachdem im vorigen Paragraphen der Begriff eines Feldes von Extremalen entwickelt worden ist, können wir nunmehr zum Beweise des Weierstraß'schen Fundamentalsatzes übergehen, welcher die Grundlage der modernen Variationsrechnung bildet, und der von WEIERSTRASS im Jahre 1879 entdeckt worden ist. Zum Beweis werden wir uns

[1]) Hier hat $\varphi(x, a)$ wieder eine allgemeinere Bedeutung als in dem unmittelbar vorangehenden Beweis.

der eleganten, von HILBERT[1]) herrührenden Methode bedienen, welche unmittelbar an die Entwicklungen des vorigen Paragraphen anknüpft.

a) Die partielle Differentialgleichung für die Gefällfunktion.

Wir kehren jetzt zu den Voraussetzungen und Bezeichnungen von § 16, a) zurück und beweisen zunächst, daß die Gefällfunktion $p(x, y)$ des Feldes $\mathcal{S}$ einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt. Aus der Definitionsgleichung (9) und den Formeln (15) und (15a) erhält man für die partiellen Ableitungen der Funktion $p(x, y)$;

$$\begin{aligned} p_x &= (\varphi_{xx}) + (\varphi_{xa})\mathfrak{a}_x = (\varphi_{xx}) - \frac{(\varphi_{xa})(\varphi_x)}{(\varphi_a)} \\ p_y &= \qquad\quad (\varphi_{xa})\mathfrak{a}_y = \qquad\quad \frac{(\varphi_{xa})}{(\varphi_a)}, \end{aligned} \tag{16}$$

wobei die Klammer wieder andeuten soll, daß in den Ableitungen von φ das Argument a durch die Funktion $\mathfrak{a}(x, y)$ zu ersetzen ist.

Aus (16) und (9) folgt

$$p_x + p p_y = (\varphi_{xx}). \tag{17}$$

Nun genügt aber die Funktion $\varphi(x, a)$ als Funktion von x für jedes a der Euler'schen Differentialgleichung; also ist

$$\varphi_{xx} f_{y'y'} + \varphi_x f_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0, \tag{18}$$

wobei die Argumente der Ableitungen von f sind: $x, \varphi(x, a), \varphi_x(x, a)$. Ersetzt man in dieser in x und a identischen Gleichung a durch $\mathfrak{a}(x, y)$ und macht Gebrauch von (8), (9) und (17), so erhält man den Satz, daß das Gefälle $p(x, y)$ der folgenden *partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* genügt:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}\right)[f_{y'y'}] + p[f_{y'y}] + [f_{y'x}] - [f_y] = 0, \tag{19}$$

wobei die Klammer [ ] bedeutet, daß in den eingeklammerten Funktionen von x, y, y' das Argument y' durch $p(x, y)$ zu ersetzen ist.

Umgekehrt: Kennt man irgend eine Funktion $p(x, y)$, welche in einem gewissen Bereich der x, y-Ebene eindeutig definiert und von

---

[1]) Vgl. Göttinger Nachrichten, 1900, p. 253—297 und Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. I (1901), p. 231; vgl. ferner OSGOOD's Darstellung loc. cit., p. 121; HEDRICK, Bulletin of the American Mathematical Society (2), Bd. IX (1902), p. 11 und GOURSAT, loc. cit., Bd. II (1905), p. 617. WEIERSTRASS' ursprünglichen Beweis werden wir bei Behandlung des Problems in Parameterdarstellung geben (§ 3[?]); für das x-Problem findet man denselben bei OSGOOD, loc. cit., p. 115 und BOLZA, *Lectures,* § 20.

der Klasse C' ist und der partiellen Differentialgleichung (19) genügt, so gibt es stets eine Extremalenschar, für welche diese Funktion $p(x, y)$ die Gefällfunktion ist, nämlich die durch das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) \tag{20}$$

dargestellte Schar.

Bezeichnet nämlich

$$y = \varphi(x, a)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung (20), so ist

$$\varphi_x = p(x, \varphi), \tag{20a}$$

also

$$\varphi_{xx} = p_x(x, \varphi) + p_y(x, \varphi)\varphi_x. \tag{20b}$$

Ersetzt man nun in der partiellen Differentialgleichung (19), welche eine Identität in x, y darstellt, y durch $\varphi(x, a)$, so geht dieselbe unter Benutzung von (20a) und (20b) rückwärts in die Differentialgleichung (18) über, welche zeigt, daß die Schar: $y = \varphi(x, a)$ eine Extremalenschar ist.

Beschränkt man jetzt x und a auf einen hinreichend kleinen Bereich, so wird diese Schar ein Feld bilden, und die Gleichung (20) sagt aus, daß die Funktion $p(x, y)$ die Gefällfunktion für dieses Feld ist.

b) **Der Unabhängigkeitssatz:**

Ordnet man die Glieder der Differentialgleichung (19) folgendermaßen an

$$[f_{y'x}] + [f_{y'y'}]p_x = [f_y] - ([f_{y'y}] + [f_{y'y'}]p_y)p,$$

so sieht man, daß man dieselbe auch schreiben kann

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_{y'}] = \frac{\partial}{\partial y}[f - y'f_{y'}]. \tag{19a}$$

Dieser wichtige Satz ist schon 1868 von BELTRAMI[1]) entdeckt worden; er scheint jedoch von seiten der Variationsrechnung gänzlich unbeachtet[2]) geblieben zu sein und ist erst dreißig Jahre später von HILBERT[3]) wieder entdeckt und in seiner grundlegenden Bedeutung erkannt worden.

---

[1]) BELTRAMI, *Sulla teoria delle linee geodetiche*, Rend. del R. Istituto Lombardo (2), Bd. I (1868), p. 708 und *Opere*, Bd. I, p. 366.

[2]) Ich selbst bin durch Herrn KNESER auf die Beltrami'sche Arbeit aufmerksam gemacht worden.

[3]) Vgl. p. 106, Fußnote [1]).

Die Gleichung (19a) ist nichts anderes als die bekannte Integrabilitätsbedingung für den Differentialausdruck

$$[f - y' f_{y'}]dx + [f_{y'}]dy.$$

Bilden wir daher jetzt mit HILBERT[1]) das Integral

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} \{f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y)) f_{y'}(x, y, p(x, y))\}\, dx, \tag{21}$$

entlang irgend einer ganz im Felde $\mathcal{S}$ verlaufenden Kurve $\mathfrak{C}$ von der Klasse C', von einem Punkt P_0 nach einem Punkt P, so ist der Wert dieses Integrals *unabhängig*[2]) *vom Integrationsweg* $\mathfrak{C}$ *und nur von der Lage der beiden Endpunkte* P_0, P *abhängig, wenn unter* $p(x, y)$ *die Gefällfunktion des Feldes verstanden wird.*

Wir werden das Integral $J^*_{\mathfrak{C}}$ das „*Hilbert'sche invariante Integral*", den Satz selbst den „*Beltrami-Hilbert'schen Unabhängigkeitssatz*" nennen.

Das Integral $J^*_{\mathfrak{C}}$ ist selbst ein Integral von der beim einfachsten Variationsproblem betrachteten Art. Die Funktion unter dem Integralzeichen ist aber von der ganz speziellen Form

$$M(x, y) + y' N(x, y),$$

und daher ist das Hilbert'sche Integral ein *gewöhnliches Linienintegral*[3]) und läßt sich schreiben

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} (f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p))\, dx + f_{y'}(x, y, p)\, dy. \tag{21a}$$

Es hat daher, durch (21a) definiert, nicht nur für die bisher betrachteten, in der Form: $y = y(x)$ darstellbaren Kurven eine Bedeutung, sondern allgemeiner für Kurven in Parameterdarstellung von der in § 25, a) als „gewöhnliche Kurven" definierten Klasse. Zugleich

---

[1]) HILBERT (loc. cit.) geht den umgekehrten Weg: Er setzt das Integral $J^*_{\mathfrak{C}}$ mit einer unbestimmten Funktion $p(x, y)$ an und fragt dann: Wie muß man die Funktion $p(x, y)$ wählen, damit der Wert des Integrals $J^*_{\mathfrak{C}}$ vom Integrationsweg $\mathfrak{C}$ unabhängig wird? Er erhält dann rückwärts die Differentialgleichungen (20) und (19).

[2]) Vgl. § 6, b). Die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Satzes sind erfüllt, denn da das Feld $\mathcal{S}$ ganz im Bereich $\mathfrak{R}$ liegt, so sind die Funktionen $[f - y' f_{y'}]$ und $[f_{y'}]$ in $\mathcal{S}$ nicht nur eindeutig definiert, sondern auch von der Klasse C', und überdies ist der Bereich $\mathcal{S}$ einfach zusammenhängend.

[3]) Vgl. z. B. PICARD, *Traité*, Bd. I, Kap. III; BURKHARDT, *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen* (Leipzig, 1903), p. 91.

folgt nach bekannten Sätzen über Linienintegrale, daß das Integral J^* bei Umkehrung des positiven Sinnes der Integrationsrichtung einfach sein Zeichen wechselt.

Im Gegensatz zu dem „Hilbert'schen Integral" werden wir nach Zermelo und Hahn[1]) unser Integral: $J = \int\limits_{\mathfrak{E}} f(x, y, y')\,dx$ das „*Grundintegral*" nennen, wo es wünschenswert ist, den Gegensatz beider hervorzuheben.

Zusatz: Das Hilbert'sche invariante Integral J^*, genommen zwischen zwei Punkten P_0, P derselben Feldextremale $\mathfrak{E}$, ist gleich dem Grundintegral J, genommen von P_0 nach P entlang eben dieser Extremale $\mathfrak{E}$, vorausgesetzt, daß $x_0 < x$.

Denn wählen wir bei der Berechnung von J^* die Extremale $\mathfrak{E}$ als Integrationsweg, so ist nach (9a) entlang $\mathfrak{E}$

$$y' = p(x, y);$$

also fällt in dem Integranden von J^* das zweite Glied fort, und es kommt

$$J^*(P_0 P) = J_{\mathfrak{E}}(P_0 P), \tag{22}$$

wobei der Integrationsweg für das Integral J^* eine ganz beliebige, die beiden Punkte P_0, P verbindende Kurve der Klasse C' ist, welche ganz im Felde $\mathcal{S}$ liegt.[2])

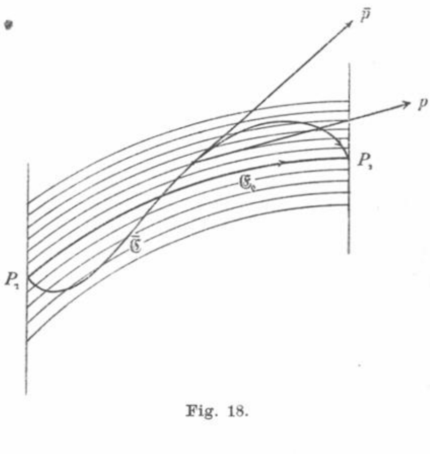

Fig. 18.

c) **Ausdruck der totalen Variation ΔJ mittels der $\mathcal{E}$-Funktion:**

Aus dem Unabhängigkeitssatz läßt sich nun nach Hilbert der Weierstraß'sche Satz folgendermaßen ableiten:

Es sei

$$\overline{\mathfrak{E}}:\quad y = \bar{y}(x), \quad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$$

irgend eine ganz im Feld $\mathcal{S}$ gelegene Kurve der Klasse C', welche die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet. Da die beiden Punkte P_1

[1]) *Encyclopädie*, II A, p. 628.

[2]) Hier läßt sich unmittelbar § 20 anschließen.

und P_2 auf derselben Feldextremale liegen, nämlich auf der Extremale $\mathfrak{E}_0$, so können wir den Zusatz zum Unabhängigkeitssatz anwenden, wonach

$$J^*_{\overline{\mathfrak{C}}} = J_{\mathfrak{E}_0}. \tag{23}$$

Daher können wir die totale Variation

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0}$$

auch schreiben

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J^*_{\overline{\mathfrak{C}}}.$$

Nun ist aber

$$J_{\overline{\mathfrak{C}}} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx,$$

$$J^*_{\overline{\mathfrak{C}}} = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, \bar{y}, p) + (\bar{y}' - p) f_{y'}(x, \bar{y}, p)\}\,dx,$$

wobei $p(x, \bar{y}) = p$ gesetzt ist.

Somit erhalten wir

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, \bar{y}, p) - (\bar{y}' - p) f_{y'}(x, \bar{y}, p)\}\,dx.$$

Führen wir jetzt die *Weierstraß'sche $\mathcal{E}$-Funktion*[1]) ein mittels der Definition

$$\mathcal{E}(x, y; p, \tilde{p}) = f(x, y, \tilde{p}) - f(x, y, p) - (\tilde{p} - p) f_{y'}(x, y, p), \tag{24}$$

wobei $x, y, p, \tilde{p}$ als unabhängige Variable zu betrachten sind, so erhalten wir den

Fundamentalsatz[2]): *Wenn der Extremalenbogen*[3]) $\mathfrak{E}_0$ *mit einem Feld umgeben werden kann, so läßt sich die totale Variation*

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{E}_0}$$

für jede zulässige Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, *welche ganz im Feld liegt, mittels der Weierstraß'schen Formel*

---

[1]) Vgl. Zermelo, *Dissertation*, p. 66.

[2]) Von Weierstrass selbst für das spezielle („uneigentliche") Feld von Extremalen durch den Punkt P_1 und für den Fall der Parameterdarstellung gegeben (1879), vgl. § 31. Die Ausdehnung auf ein beliebiges Feld scheint zuerst von H. A. Schwarz in Vorlesungen gegeben worden zu sein.

[3]) Vgl. p. 88, Fußnote [2]).

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}(x, \bar{y}; p, \bar{p})\, dx \tag{25}$$

ausdrücken; dabei ist $(x, \bar{y})$ *ein Punkt von* $\bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{p}$ *das Gefälle von* $\bar{\mathfrak{C}}$ *im Punkt* $(x, \bar{y})$ *und* $p = p(x, \bar{y})$ *das Gefälle der durch den Punkt* $(x, \bar{y})$ *gehenden Extremale des Feldes im Punkt* $(x, \bar{y})$.

Der Weierstraß'sche Satz behält seine Gültigkeit auch noch für das „uneigentliche" Feld $\mathcal{S}_k$ von Extremalen durch den Punkt P_1[1]) (obgleich alsdann die Funktion $p(x, y)$ im Punkt P_1 unbestimmt wird), sowie für Kurven $\bar{\mathfrak{C}}$ der Klasse[2]) D'.

§ 18. Ableitung weiterer notwendiger Bedingungen aus dem Weierstraß'schen Satz.

Wir benutzen den Weierstraß'schen Satz zunächst zur Ableitung weiterer notwendiger Bedingungen.

---

[1]) Denn schreibt man das Hilbert'sche Integral

$$J^*_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} M dx + N dy,$$

so haben nach p. 104, Fußnote [1]), Ende, die Funktionen $|M|$ und $|N|$ in $\mathcal{S}_k$ endliche obere Grenzen G und H. Führt man daher den Bogen als unabhängige Variable ein und bezeichnet mit l die Länge des Bogens $\mathfrak{C}$, so folgt hieraus, zunächst für eine Kurve $\mathfrak{C}$, welche nicht vom Punkte P_1 ausgeht:

$$|J^*_{\mathfrak{C}}| \overline{\overline{<}} (G + H)\, l. \tag{26}$$

Hieraus folgt nach den üblichen Festsetzungen über uneigentliche bestimmte Integrale, daß das Integral $J^*_{\mathfrak{C}}$ auch noch für solche Kurven $\mathfrak{C}$ einen bestimmten endlichen Wert behält, welche vom Punkt P_1 ausgehen, und daß auch für solche Kurven die Ungleichung (26) bestehen bleibt. Wir ziehen jetzt vom Punkt P_1 nach irgend einem Punkt P von $\mathcal{S}_k$ zwei Kurven $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ der Klasse C'. Um zu zeigen, daß $J^*_{\mathfrak{C}'} = J^*_{\mathfrak{C}}$, ziehen wir eine Gerade: $x = x_1 + \varepsilon$, wo ε eine kleine positive Größe ist; ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ seien Q und Q' resp. Dann können wir schreiben

$$J^*_{\mathfrak{C}'} - J^*_{\mathfrak{C}} = [J^*(QQ'P) - J^*(QP)] + [J^*(P_1 Q') - J^*(P_1 Q) - J^*(QQ')].$$

Die erste Klammer auf der rechten Seite ist Null, da hier der Hilbert'sche Unabhängigkeitssatz gilt; die zweite wird nach (26) mit ε unendlich klein, also ist

$$J^*_{\mathfrak{C}'} = J^*_{\mathfrak{C}}.$$

Hieraus folgt dann wie oben der Weierstraß'sche Satz.

[2]) Vgl. § 10, c) und § 6, p. 36, Fußnote [3]).

a) **Die Weierstraß'sche Bedingung:**

Wir setzen voraus, daß für unseren Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ die Bedingungen (II') und (III') erfüllt sind. Dann bildet die Schar von Extremalen durch den Punkt P_1 ein „uneigentliches" Feld[1]) $\mathfrak{S}_k$ um den Bogen $\mathfrak{E}_0$.

Wir wählen dann auf $\mathfrak{E}_0$ zwischen P_1 und P_2 einen Punkt $P_3(x_3, y_3)$ und ziehen durch P_3 eine Gerade

$$y - y_3 = \tilde{p}_3(x - x_3).$$

P_4 sei derjenige Punkt dieser Geraden, dessen Abszisse $x_4 = x_3 - h$, wo h eine kleine positive Größe ist. Wählen wir h hinreichend klein, so wird der Punkt P_4 im Innern von $\mathfrak{S}_k$ liegen, und es geht daher durch P_4 eine und nur eine Extremale $P_1 P_4$ des Feldes. Wir variieren jetzt den Bogen $\mathfrak{E}_0$, indem wir den Bogen $P_1 P_3$ durch die gebrochene Kurve $P_1 P_4 P_3$ er setzen, während wir das Stück $P_3 P_2$ ungeändert lassen. Dann ist nach dem Weierstraß'schen Satz, der nach den am Ende von § 17, c) gemachten Bemerkungen auf den gegenwärtigen Fall anwendbar ist

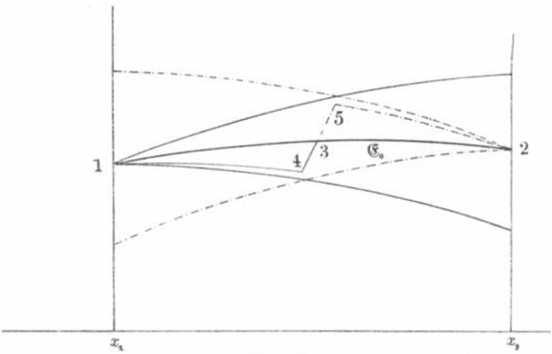

Fig. 19.

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_3} \mathcal{E}(x, \overline{y}\,;\, p, \overline{y}')\, dx,$$

genommen entlang der Kurve $P_1 P_4 P_3$.

Da aber der Bogen $P_1 P_4$ eine Extremale des Feldes ist, so ist entlang $P_1 P_4 : \overline{y}' = p$, und deshalb, wie aus der Definition (24) der $\mathcal{E}$-Funktion folgt, der Integrand von ΔJ gleich Null. Daher reduziert sich der Ausdruck für ΔJ auf

$$\Delta J = \int_{x_3 - h}^{x_3} \mathcal{E}(x, \overline{y}\,;\, p, \tilde{p}_3)\, dx \tag{27}$$

genommen entlang $P_4 P_3$.

[1]) Vgl. § 16, d) und p. 104, Fußnote [1]).

Angenommen, es wäre nun

$$\mathcal{E}(x_3, y_3; p_3, \tilde{p}_3) < 0,$$

wo $p_3 = \mathring{y}'(x_3)$ das Gefälle von $\mathfrak{E}_0$ im Punkt P_3 bedeutet; so ließe sich eine gewisse Umgebung des Punktes (x_3, y_3) angeben, in welcher

$$\mathcal{E}(x, y; p(x, y), \tilde{p}_3) < 0,$$

wie aus der Stetigkeit der $\mathcal{E}$-Funktion als Funktion ihrer vier Argumente einerseits und der Stetigkeit von $p(x, y)$ andererseits folgt. Daraus ergibt sich aber, daß der Integrand von ΔJ für hinreichend kleine Werte von h im Intervall $[x_3 - h, x_3]$ beständig negativ ist, also $\Delta J < 0$. Macht man schließlich noch von dem Lemma über die Abrundung der Ecken (§ 14, c)) Gebrauch, so erhält man den

Fundamentalsatz IV: Die vierte notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimums besteht darin, daß

$$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) \geqq 0 \tag{IV}$$

für[1] $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *und für jeden endlichen Wert von* $\tilde{p}$.

Diese Bedingung ist von Weierstrass im Jahre 1879 entdeckt worden[2]) und wird die *Weierstraß'sche Bedingung* genannt.

Beispiel IX: (Siehe p. 95)

$$f = y'^2 + y'^3.$$

Entlang der Kurve $\mathfrak{E}_0 : y = 0$ ist

$$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) = \tilde{p}^2(1 + \tilde{p}).$$

Der Ausdruck kann in jedem Punkt von $\mathfrak{E}_0$ sein Zeichen wechseln; Bedingung (IV) ist also nicht erfüllt und $\mathfrak{E}_0$ liefert kein starkes Minimum, wie wir schon in § 15, d) auf elementarem Wege gezeigt haben.

Beispiel X: Das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y'^2(1 + y')^2 \, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

Nach § 6, a), Beispiel VI, sind die Extremalen gerade Linien; insbesondere ist also die Extremale $\mathfrak{E}_0$ die Gerade durch die beiden gegebenen Punkte P_1

---

1) Zunächst für $x_1 < x < x_2$ und aus Stetigkeitsgründen auch für $x = x_1$ und $x = x_2$.

2) Vgl. p. 96, Fußnote 1). Für den hier gegebenen Beweis vgl. Hedrick, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. IX (1902), p. 14.

und P_2; ihre Gleichung sei

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = mx + n.$$

Dann ist

$$R(x) = 2(6m^2 + 6m + 1)$$

$$\Delta(x, x_1) = x - x_1.$$

Sind jetzt m_1 und m_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$6m^2 + 6m + 1 = 0,$$

nämlich

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0 \cdot 2113\ldots$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0 \cdot 7887\ldots,$$

so ist

$$R > 0, \quad \text{wenn} \quad m > m_1 \quad \text{oder} \quad m < m_2,$$

$$R < 0, \quad \text{wenn} \quad m_2 < m < m_1.$$

Im ersten Fall sind die drei ersten notwendigen Bedingungen für ein Minimum, im zweiten Fall für ein Maximum erfüllt.

Endlich ist

$$\mathcal{E}(x, \overset{0}{y}(x); \overset{0}{y}'(x), \tilde{p}) = (\tilde{p} - m)^2 [(\tilde{p} + m + 1)^2 + 2m(m+1)].$$

Nun ist die quadratische Funktion von $\tilde{p}$ in der eckigen Klammer beständig positiv, wenn $m(m+1) > 0$; sie kann ihr Zeichen wechseln, wenn $m(m+1) < 0$; und sie reduziert sich auf ein vollständiges Quadrat, wenn $m(m+1) = 0$.

Wir erhalten also das Resultat:

Wenn $m \geqq 0$ *oder* $m \leqq -1$, *so ist die Bedingung* (IV) *erfüllt; wenn* $-1 < m < 0$, *so ist die Bedingung* (IV) *nicht erfüllt,* und die Gerade $P_1 P_2$ liefert sicher weder ein starkes Maximum noch ein starkes Minimum.

Das letztere Resultat läßt sich auch auf ganz elementarem Wege folgendermaßen beweisen: Wenn $-1 < m < 0$, so ist einerseits sicher der Wert von $J_{\mathfrak{E}_0} > 0$; andererseits können wir aber (und zwar auf unendlich viele Weisen) P_1 und P_2 durch eine gebrochene Linie verbinden, die aus geradlinigen Stücken besteht, welche abwechselnd das Gefälle 0 und -1 besitzen (z. B. $P_1 P_3 P_4 P_5 P_2$), und diese gebrochene Linie ist in der Form $y = f(x)$ darstellbar[1]) (was nicht möglich wäre, wenn $m > 0$ oder $m < -1$). Für eine solche gebrochene Linie ist aber offenbar $\bar{J} = 0$. Schließlich hat man noch von dem Lemma über diskontinuierliche Variationen Gebrauch zu machen (§ 14, c)).

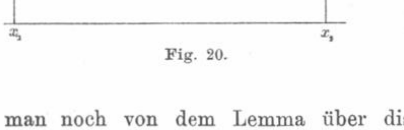

Fig. 20.

[1]) Vgl. dazu § 25, e).

b) Beziehung zwischen der Weierstraß'schen und der Legendre'schen Bedingung:

Wendet man die Taylor'sche Formel auf die Differenz

$$f(x, y, \tilde{p}) - f(x, y, p)$$

an, so erhält man die folgende wichtige Relation[1]) zwischen der $\mathcal{E}$-Funktion und der Funktion $f_{y'y'}$:

$$\mathcal{E}(x, y; p, \tilde{p}) = \frac{(\tilde{p}-p)^2}{2} f_{y'y'}(x, y, p^*), \tag{28}$$

wobei p^* einen Mittelwert zwischen p und $\tilde{p}$ bedeutet, also

$$p^* = p + \theta(\tilde{p} - p), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Hieraus folgt der

Zusatz I: Die Bedingung (IV) *ist stets erfüllt, wenn*

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \tilde{p}) \gtreqless 0 \tag{II$_a$}$$

für $x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$ *und für jeden endlichen Wert von* $\tilde{p}$.

Ferner ergibt sich aus (28)

$$\underset{\tilde{p}=p}{\mathrm{L}} \frac{\mathcal{E}(x, y;\, p, \tilde{p})}{(\tilde{p}-p)^2} = \tfrac{1}{2} f_{y'y'}(x, y, p); \tag{29}$$

daraus folgt der

Zusatz II: Die Legendre'sche Bedingung

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \gtreqless 0 \quad in \quad [x_1 x_2] \tag{II}$$

ist in der Weierstraß'schen Bedingung enthalten.

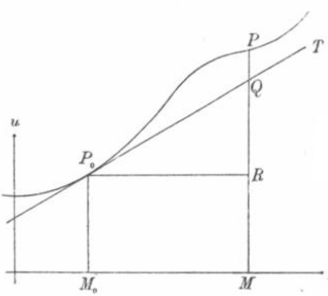

Fig. 21.

Die vorangehenden Resultate werden sehr gut durch die folgende von Zermelo[2]) herrührende *geometrische Interpretation der* $\mathcal{E}$*-Funktion* veranschaulicht:

Es bezeichne $f(p)$ die Funktion $f(x, y, p)$ als Funktion von p allein betrachtet; wir konstruieren, bei festgehaltenen Werten von x und y, die Kurve

$$u = f(p) \tag{30}$$

und ziehen die Tangente $P_0 T$ im Punkt P_0, dessen Abszisse $p = y'$; es seien P

---

[1]) Diese Relation findet sich zuerst bei Zermelo, *Dissertation*, p. 67; sie entspricht der Weierstraß'schen Relation (125), Kap. V, zwischen $\mathcal{E}$ und F_1 im Fall der Parameterdarstellung.

[2]) loc. cit., p. 67.

und Q die Schnittpunkte der Geraden $p = \tilde{p}$ respektive mit der Kurve (30) und der Tangente $P_0 T$.

Alsdann wird die Größe

$$\mathcal{E}(x, y; y', \tilde{p}) = f(\tilde{p}) - f(y') - (\tilde{p} - y') f'(y')$$

dargestellt durch den Vektor QP, und die Bedingung

$$\mathcal{E}(x, y; y', \tilde{p}) \geqq 0 \tag{IV}$$

bedeutet geometrisch, daß *die Kurve* (30) *ganz oberhalb — oder wenigstens nicht unterhalb — der Tangente* $P_0 T$ *liegt.*

Damit die Ungleichung (IV) stattfinde, ist daher:

1. Notwendig, daß die Kurve (30) im Punkt $p = y'$ ihre konvexe Seite nach unten kehrt, d. h. daß

$$f''(y') \geqq 0\,.$$

Dies ist aber unsere alte Bedingung (II).

2. Hinreichend, daß die Kurve (30) überall ihre konvexe Seite nach unten kehrt, d. h. daß

$$f''(p) \geqq 0$$

für jedes p; das ist aber die obige Bedingung ($\mathrm{II_a}$).

Aber weder ist die erste Bedingung hinreichend noch die zweite notwendig.

c) Unzulänglichkeit der Bedingungen (I), (II'), (III'), (IV'):

Indem wir, ähnlich wie bei den früheren Bedingungen, Ausnahmefälle bei Seite lassen, wollen wir voraussetzen, daß für unsere Extremale $\mathfrak{E}_0$ die Bedingung (IV) in der etwas stärkeren Form

$$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) > 0 \tag{IV'}$$

für:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad \tilde{p} \neq \mathring{y}'(x)$$

erfüllt ist.

Wir wollen zunächst zeigen, daß auch *die Bedingungen* (I), (II'), (III'), (IV') *für ein Minimum noch nicht hinreichend sind.*

Dazu genügt wieder ein einziges Beispiel, in welchem die angegebenen Bedingungen erfüllt sind und trotzdem kein Minimum eintritt. Ein derartiges Beispiel ist das folgende:

Beispiel[1]) *XI:* Das Integral

$$J = \int_0^1 [a y'^2 - 4 b y y'^3 + 2 b x y'^4]\, dx$$

zu einem Minimum zu machen; dabei sollen a und b positive Konstanten sein

---

[1]) Vgl. Bolza, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. IX, p. 9. Weitere Beispiele folgen unter d).

und die beiden Endpunkte sollen die Koordinaten $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$ haben.

Die Euler'sche Differentialgleichung reduziert sich hier auf

$$y'' f_{y'y'} = 0,$$

wo

$$f_{y'y'} = 2a - 24byy' + 24bxy'^2.$$

Die einzige Extremale durch die beiden Punkte $P_1(0, 0)$ und $P_2(1, 0)$ ist die gerade Linie

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = 0.$$

Die Bedingung (II') ist erfüllt, da

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \equiv 2a > 0. \tag{II'}$$

Die Schar von Extremalen durch den Punkt P_1 ist das Büschel von Geraden durch den Punkt P_1; daher existiert kein zu P_1 konjugierter Punkt und (III') ist erfüllt.

Ferner ist

$$\mathcal{E}(x, y; y', \tilde{p}) = (\tilde{p} - y')^2 \{(a - 8byy' + 6bxy'^2) - 4b\tilde{p}(y - xy') + 2bx\tilde{p}^2\};$$

also entlang $\mathfrak{E}_0$:

$$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) \equiv \tilde{p}^2(a + 2bx\tilde{p}^2) > 0, \tag{IV'}$$

für $\tilde{p} \neq 0$.

Somit sind die Bedingungen (I), (II'), (III'), (IV') erfüllt.

Trotzdem liefert der Bogen $\mathfrak{E}_0$ kein Minimum für das Integral J. Denn ersetzt man die Gerade $P_1 P_2$ durch die gebrochene Linie $P_1 P P_2$ und bezeichnet die Koordinaten von P mit $h > 0$, k, so findet man für die totale Variation ΔJ leicht den Ausdruck

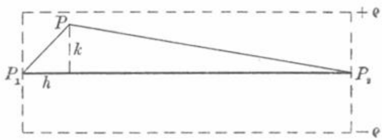

Fig. 22.

$$\Delta J = k^2\left[-\frac{bk^2}{h^2} + \frac{a}{h} + a + 3bk^2\right] + (h),$$

wo (h) mit h gegen Null konvergiert.

Ist jetzt eine positive Größe ϱ beliebig vorgegeben, so wähle man $|k| < \varrho$ und lasse h gegen Null konvergieren, während k festgehalten wird. Dann folgt, da $b > 0$, daß $\Delta J < 0$ für alle hinreichend kleinen Werte von h. Indem man schließlich noch das Lemma über die Abrundung der Ecken (§ 14, c)) anwendet, erhält man das Resultat, daß die Gerade $P_1 P_2$ in der Tat kein starkes Minimum für das Integral J liefert.

d) Eine fünfte notwendige Bedingung[1]);

Man erhält eine weitere notwendige Bedingung durch eine Modifikation des unter a) benutzten Verfahrens, die durch das obige Beispiel nahegelegt wird.

---

[1]) Vgl. Bolza, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. VII (1906), p. 314.

Statt nämlich, wie dort, die Gerade $P_4 P_3$ festzuhalten und P_4 auf derselben sich dem Punkte P_3 nähern zu lassen, *drehen wir jetzt die Gerade $P_4 P_3$ um den Punkt P_3, so daß sie sich der vertikalen Lage nähert,* während der Punkt P_4 sich auf einer Geraden parallel der x-Achse bewegt. Bezeichnen wir die Ordinate des Punktes P_4 mit: $y_4 = y_3 - k$, so heißt dies analytisch, wir halten k fest und lassen h gegen Null konvergieren. Bei diesem Grenzprozess hat die durch (27) ausgedrückte totale Variation ΔJ zwar nicht notwendig einen bestimmten Grenzwert, aber sicher einen bestimmten „unteren Limes"[1], der endlich oder $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann. Für ein Minimum ist dann notwendig, daß dieser untere Limes $\geqq 0$ für alle hinreichend kleinen Werte von $|k|$.

Ganz dieselben Schlüsse kann man auch auf die Extremalenschar durch den Punkt P_2 und die Variation $P_3 P_5 P_2$ (siehe Figur 19) anwenden. Um die Resultate der beiden Prozesse in einer Formel vereinigen zu können, führen wir die Symbole ein:

$$\varepsilon_1 = -1, \qquad \varepsilon_2 = +1$$

und bezeichnen für $i = 1, 2$ mit $p_i(x, y)$ das Gefälle im Punkt (x, y) derjenigen durch den Punkt (x, y) gehenden Extremale, welche dem von den Extremalen durch den Punkt P_i gebildeten Feld angehört. Dann läßt sich die angegebene Bedingung schreiben

$$\underset{h=+0}{\underline{\mathrm{L}}} \int_0^1 h\,\mathcal{E}\left(\bar{x}, \bar{y};\, p_i(\bar{x}, \bar{y}),\, \frac{k}{h}\right) dt \geqq 0, \tag{31}$$

wo

$$\bar{x} = x_3 + \varepsilon_i h t, \qquad \bar{y} = y_3 + \varepsilon_i k t.$$

Die Ungleichung muß gelten für $i = 1$ und $i = 2$, wenn $x_1 < x_3 < x_2$; für $i = 1$, wenn $x_3 = x_2$; für $i = 2$, wenn $x_3 = x_1$, und zwar für alle hinreichend kleinen Werte von $|k|$.

Setzt man für die $\mathcal{E}$-Funktion ihren Wert ein und bezeichnet:

$$S_i(h, k, x_3) = \int_0^1 h f\left(x_3 + \varepsilon_i h t,\, y_3 + \varepsilon_i k t,\, \frac{k}{h}\right) dt, \tag{32}$$

so nimmt die Bedingung (31) nach einigen Vereinfachungen die Form an[2])

$$\underset{h=+0}{\underline{\mathrm{L}}}\; S_i(h, k, x_3) - k \int_0^1 f_{y'}(x_3,\, y_3 + \varepsilon_i k t,\, p_i(x_3,\, y_3 + \varepsilon_i k t))\, dt \geqq 0. \tag{V}$$

---

[1]) Auch „Untere Unbestimmtheitsgrenze", vgl. A II 5.

[2]) Für die weitere Ausführung siehe das Zitat p. 117, Fußnote [1]). Ob diese Bedingung (eventuell nach Unterdrückung des Gleichheitszeichens) zusammen mit den früheren Bedingungen (I), (II'), (III'), (IV') auch hinreichend ist, ist noch unentschieden.

Beispiel XI (siehe p. 116):

$$f = ay'^2 - 4byy'^3 + 2bxy'^4.$$

Man findet

$$S_i(h, k, x_3) = \frac{k^2}{h^3}[2bk^2x_3 - bk^2\varepsilon_i h + ah^2].$$

Wenn $x_3 > 0$, so ist der untere Limes von S_i gleich $+\infty$, und (V) ist erfüllt; ist dagegen $x_3 = x_1 = 0$, in welchem Fall (V) für $i = 2$ erfüllt sein muß, so ist derselbe $-\infty$, und (V) ist nicht erfüllt. Dies ist der Grund, warum hier kein Minimum stattfindet, wenn das Intervall $[x_1 x_2]$ sich bis zum Punkt $x = 0$ erstreckt.

Beispiel XII[1]: Das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 - y^2 y'^4)\, dx,$$

zu einem Minimum zu machen, wenn die beiden gegebenen Punkte P_1, P_2 auf der x-Achse liegen.

Hier sind die Extremalen im allgemeinen keine Geraden, wohl aber ist die spezielle Gerade

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = 0 \equiv \mathring{y}(x)$$

eine Extremale. Man findet leicht

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \equiv 2$$

$$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) \equiv \tilde{p}^2.$$

Also sind die Bedingungen (II'), (III'), (IV') erfüllt, wenn x_1 und x_2 hinreichend nahe beieinander angenommen werden. Trotzdem liefert $\mathfrak{E}_0$ kein starkes Extremum. Denn es ist

$$S_i(h, k, x_3) = \frac{k^2}{h^3}\left[-\frac{k^4}{3} + h^2k^2\right].$$

Der untere Limes von S_i ist also $-\infty$ für $i = 1, 2$ und für jedes x_3.[2]

§ 19. Hinreichende Bedingungen für ein starkes Extremum.

Wir setzen wie im vorigen Paragraphen voraus, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ den Bedingungen (II') und (III') genügt. Es sei[3] $\mathcal{S}$ irgend ein Feld von Extremalen um den Bogen $\mathfrak{E}_0$, und

---

[1] Dasselbe rührt von Carathéodory her, vgl. Archiv für Mathematik und Physik (3), Bd. X (1906), p. 185.

[2] Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 33, 34 am Ende von Kap. III.

[3] Daß $\mathfrak{E}_0$ mit einem Feld umgeben werden kann, folgt nach § 16, d) aus (II') und (III'), wobei übrigens auch § 12, b), insbesondere die Fußnote [1] auf p. 73 sowie § 13, a) zu vergleichen sind. Das Feld braucht aber nicht von der speziellen dort benutzten Art zu sein.

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad y = \overline{y}(x), \qquad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2,$$

irgend eine Kurve der Klasse C', welche von P_1 nach P_2 gezogen ist und ganz im Bereich $\mathcal{S}$ liegt. Dann gilt für die totale Variation: $\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0}$ der Weierstraß'sche Fundamentalsatz (25). Hieraus lassen sich nun auf verschiedene Arten hinreichende Bedingungen für ein starkes Minimum ableiten:

a) **Hinreichende Bedingungen, ausgedrückt mittels der $\mathcal{E}$-Funktion:**

Es bedeute wieder $p(x, y)$ das Gefälle der durch den Punkt (x, y) gehenden Extremale des Feldes, im Punkt (x, y). Wenn dann

$$\mathcal{E}(x, y; p(x, y), \tilde{p}) \overline{\geqq} 0 \tag{IV$_b$}$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathcal{S}$ und für jeden endlichen Wert von $\tilde{p}$, so ist der Integrand von ΔJ sicher $\overline{\geqq} 0$ im Intervall $[x_1 x_2]$, also $\Delta J \overline{\geqq} 0$. Die Kurve $\mathfrak{C}_0$ liefert also nach unserer Definition[1]) (§ 3, b)) ein (starkes) Minimum.

Das Minimum ist jedoch nicht notwendig ein „eigentliches" Minimum, es kann auch ein „uneigentliches" sein (§ 3, b)).

Zu dem letzteren Punkt ist nun noch folgendes zu bemerken: Aus der Definition der Funktion $\mathcal{E}(x, y; p, \tilde{p})$ folgt, daß dieselbe, als Funktion ihrer vier Argumente betrachtet, stets verschwindet, wenn $\tilde{p} = p$; man sagt in diesem Fall nach Kneser, die $\mathcal{E}$-Funktion verschwinde in *„ordentlicher"* Weise. Ist dagegen: $\mathcal{E}(x, y; p, \tilde{p}) = 0$, während $\tilde{p} \neq p$, so sagt man, die $\mathcal{E}$-Funktion verschwinde für das betrachtete Wertsystem in *„außerordentlicher"* Weise.

Wenn wir nun der Bedingung (IV$_b$) noch die Bedingung hinzufügen, daß die $\mathcal{E}$-Funktion im Felde $\mathcal{S}$ nur in ordentlicher Weise verschwinden soll, so läßt sich zeigen, daß alsdann das Minimum stets ein eigentliches ist.

Denn wenn die Bedingung (IV$_b$) erfüllt ist, so kann nach bekannten Sätzen über bestimmte Integrale ΔJ nur dann gleich Null sein, wenn entlang der ganzen Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$

$$\mathcal{E}(x, \overline{y}; p(x, \overline{y}), \overline{y}') = 0; \tag{33}$$

und wenn die $\mathcal{E}$-Funktion im Feld nur in ordentlicher Weise verschwindet, so ist dies nur in der Weise möglich, daß in jedem Punkt $(x, \overline{y})$ von $\overline{\mathfrak{C}}$:

$$\overline{y}' = p(x, \overline{y}), \tag{34}$$

[1]) Man beachte, daß nach der Definition eines den Bogen $\mathfrak{C}_0$ umgebenden Feldes $\mathcal{S}$ (§ 16, c)) eine Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{C}_0$ existiert, welche in $\mathcal{S}$ enthalten ist.

d. h. wenn die Extremale des Feldes durch den Punkt $(x, \bar{y})$ die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ im Punkt $(x, \bar{y})$ berührt. Dies kann jedoch nur dann für jeden Punkt der Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ eintreten, wenn $\bar{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{E}_0$ identisch ist. Denn[1]) wird die das Feld $\mathcal{S}$ bildende Extremalenschar, wie früher, mit

$$y = \varphi(x, a)$$

bezeichnet, so gilt nach (8) in jedem Punkt von $\bar{\mathfrak{C}}$ die Gleichung

$$\bar{y}(x) = \varphi(x, \mathfrak{a}(x, \bar{y})),$$

wobei $\mathfrak{a}$ wieder die inverse Funktion des Feldes bedeutet. Differentiiert man diese Gleichung nach x, so kommt

$$\bar{y}'(x) = \varphi_x(x, \mathfrak{a}) + \varphi_a(x, \mathfrak{a}) \frac{d\mathfrak{a}(x, \bar{y})}{dx}$$

oder nach (9),

$$\bar{y}' - p(x, \bar{y}) = \varphi_a(x, \mathfrak{a}) \frac{d\mathfrak{a}(x, \bar{y})}{dx}.$$

Nun ist aber nach § 16, d), Ende, $\varphi_a(x, \mathfrak{a}) \neq 0$ in $\mathcal{S}$. Wäre daher (34) in jedem Punkt von $\bar{\mathfrak{C}}$ erfüllt, so müßte sein

$$\frac{d\mathfrak{a}(x, \bar{y})}{dx} = 0,$$

also $\mathfrak{a}(x, \bar{y}) =$ konst., d. h. aber $\bar{\mathfrak{C}}$ müßte selbst eine Extremale des Feldes sein, und zwar müßte $\bar{\mathfrak{C}}$ mit $\mathfrak{E}_0$ identisch sein, da $\bar{\mathfrak{C}}$ durch den Punkt P_2 geht und $\mathfrak{E}_0$ die einzige Extremale des Feldes ist, welche durch P_2 geht.

Hieraus ergibt sich aber in der Terminologie von § 3, b) das Resultat:

Wenn die Ungleichung

$$\mathcal{E}(x, y; p(x, y), \tilde{p}) > 0 \qquad (\mathrm{IV}_b')$$

erfüllt ist für jeden Punkt (x, y) *eines Feldes* $\mathcal{S}$ *um den Extremalenbogen* $\mathfrak{E}_0$ *und für jeden endlichen Wert* $\tilde{p}$, *welcher von* $p(x, y)$ *verschieden ist, so liefert der Bogen* $\mathfrak{E}_0$ *ein starkes, eigentliches Minimum für das Integral* J.

Zuweilen kommt es vor, daß der Bereich $\mathfrak{R}$, auf welchen die zulässigen Funktionen beschränkt sind, selbst ein Feld um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ bildet; alsdann ist das Minimum nicht nur ein relatives, sondern ein *absolutes* (§ 3, a)).

---

[1]) Der Beweis rührt von Kneser her, vgl. *Lehrbuch,* § 22; vgl. auch Osgood, loc. cit., p. 118.

Beispiel X (siehe p. 113):

$$f = y'^2(1+y')^2.$$

Die Schar von geraden Linien

$$y = mx + a$$

parallel der Geraden P_1P_2 liefert offenbar ein Feld um P_1P_2, für welches

$$p(x, y) = m.$$

Daher ist hier

$$\mathcal{E}(x, y;\, p(x, y), \tilde{p}) = (\tilde{p} - m)^2[(\tilde{p} + m + 1)^2 + 2m(m+1)].$$

Wenn $m > 0$ oder $m < -1$, so ist also die Bedingung (IVb') erfüllt. Zusammenfassend erhalten wir daher mit Rücksicht auf die Ergebnisse von p. 114 für das gegenwärtige Beispiel das Resultat:

1. Wenn $m > 0$ oder $m < -1$, so liefert die Gerade P_1P_2 ein *starkes, eigentliches Minimum*[1]), und zwar nicht nur ein relatives, sondern ein *absolutes*, da das Feld hier die ganze x, y-Ebene ausfüllt.

2. Dies gilt auch noch für $m = 0$ und $m = -1$, da alsdann $J_{\mathfrak{C}_0} = 0$, während für jede andere zulässige Kurve $J_{\overline{\mathfrak{C}}} > 0$.

3. Wenn $m_1 < m < 0$ oder $-1 < m < m_2$, so liefert P_1P_2 zwar *kein starkes aber doch ein schwaches Minimum* (nach § 15, b)); vgl. auch unten unter c).

4. Wenn $m_2 < m < m_1$, so liefert P_1P_2 ein *schwaches Maximum*.

5. Wenn endlich $m = m_1$ oder $m = m_2$, so liefert P_1P_2 *weder ein Minimum noch ein Maximum, und zwar nicht einmal ein schwaches.* Denn alsdann ist die zweite Variation identisch Null und die dritte von Null verschieden, da allgemein entlang einer Extremale für $\bar{y} = y + \omega$:

$$\Delta J = 6(m - m_1)(m - m_2)\int_{x_1}^{x_2} \omega'^2 dx + 2(2m+1)\int_{x_1}^{x_2} \omega'^3 dx + \int_{x_1}^{x_2} \omega'^4 dx.$$

Wenn die Bedingung (IV'b) erfüllt ist, so ist a fortiori auch (IV') erfüllt, da entlang $\mathfrak{C}_0$: $p(x, y) = \mathring{y}'(x)$. Daß das Umgekehrte nicht richtig ist, folgt schon a priori aus dem in § 18, c) Bewiesenen.

Wir wollen es zum Überfluß noch an Beispiel XI verifizieren. Die Geraden parallel der x-Achse bilden ein Feld $\mathcal{S}_k$, für welches $p(x, y) = 0$. Daher ist

$$\mathcal{E}(x, y;\, p(x, y), \tilde{p}) = \tilde{p}^2(a - 4b\tilde{p}y + 2bx\tilde{p}^2).$$

---

[1]) Man kann dies übrigens auch mit ganz elementaren Mitteln beweisen, da die totale Variation für irgend eine zulässige Variation $\bar{y} = y + \omega$ sich schreiben läßt:

$$\Delta J = 2m(m+1)\int_{x_1}^{x_2} \omega'^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} [\omega'^2 + (2m+1)\omega']^2 dx.$$

Für die Extremale $y=0$ ist dies zwar stets positiv, wenn $\tilde{p} \neq 0$; aber wie klein wir auch k wählen mögen, so können wir doch stets in $\mathfrak{S}_k$ Punkte finden, für welche bei passendem $\tilde{p}$, $\mathcal{E} < 0$. Wir brauchen nur $\tilde{p} = \frac{y}{x}$ zu wählen und x hinreichend klein zu nehmen.

b) Hinreichende Bedingungen, ausgedrückt mittels der Funktion $f_{y'y'}$:

Bei Anwendungen sind die hinreichenden Bedingungen, die sich auf diese Weise unmittelbar aus dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz ergeben, im allgemeinen ziemlich umständlich. In vielen Fällen reicht man jedoch mit einer einfacheren, allerdings weniger allgemeinen Bedingung aus, die wir in folgendem Satz formulieren:

Fundamentalsatz V: Wenn die Extremale[1] $\mathfrak{C}_0$ *den zu* P_1 *konjugierten Punkt* P_1' *nicht enthält:*

$$x_2 < x_1' \tag{III'}$$

und überdies die Bedingung

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) > 0 \tag{II$_b$'}$$

in jedem Punkt (x, y) *einer gewissen Nachbarschaft* (ϱ) *von* $\mathfrak{C}_0$ *für jeden endlichen Wert von* $\tilde{p}$ *erfüllt ist, so liefert* $\mathfrak{C}_0$ *ein starkes, eigentliches Minimum für das Integral*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx\,.$$

Denn nach dem Satz über gleichmäßige Stetigkeit[2]) können wir stets k so klein wählen, daß das Feld $\mathfrak{S}_k$, mit dem wir alsdann den Bogen $\mathfrak{C}_0$ umgeben können,[3]) ganz in der Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{C}_0$ enthalten ist. Dann folgt aber aus der Voraussetzung (II$_b$') auf Grund der Relation (28) zwischen der $\mathcal{E}$-Funktion und der Funktion $f_{y'y'}$, daß die Bedingung (IV$_b$') im Bereich $\mathfrak{S}_k$ erfüllt ist, woraus dann nach a) die Existenz des Minimums folgt.

Ein Problem, für welches

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) \neq 0 \tag{35}$$

in jedem Punkt (x, y) des Bereiches $\mathfrak{R}$ für jeden endlichen Wert von $\tilde{p}$, wird nach HILBERT ein *reguläres Problem* genannt.[4]) Bei

---

[1]) Vgl. p. 88, Fußnote [2]). [2]) Vgl. A III 3.

[3]) Man vergleiche die Bemerkungen im Eingang dieses Paragraphen und beachte, daß (II') in (II$_b$') enthalten ist.

[4]) Vgl. dazu § 24, c).

einem regulären Problem braucht man sich daher nur zu überzeugen, daß der Extremalenbogen $P_1 P_2$ den zu P_1 konjugierten Punkt nicht enthält, um sicher zu sein, daß ein starkes Extremum stattfindet.

Beispiel XIII[1]:

$$f = G(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

wo $G(x, y)$ eine Funktion von x und y ist, welche in einem gewissen Bereich $\mathfrak{R}$ von der Klasse C'' ist.

Hier ist

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) = \frac{G(x, y)}{(\sqrt{1 + \tilde{p}^2})^3}.$$

Daher liefert jede Extremale $\mathfrak{E}_0$, welche ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt, und welche den zu P_1 konjugierten Punkt nicht enthält, ein starkes Minimum, vorausgesetzt daß $G(x, y) > 0$ entlang $\mathfrak{E}_0$. Denn da $G(x, y)$ in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{E}_0$ stetig ist und positiv entlang $\mathfrak{E}_0$, so ist $G(x, y)$ nach § 21, b) auch noch positiv in einer gewissen Nachbarschaft (ϱ) von $\mathfrak{E}_0$, und daher ist (II'_b) erfüllt.

Für $G(x, y) = y$ folgt hieraus für Beispiel I (siehe pp. 1, 33, 72, 79), daß der Bogen $P_1 P_2$ der Kettenlinie

$$y = \alpha_0 \operatorname{Ch} \frac{x - \beta_0}{\alpha_0}$$

ein starkes Minimum für das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

liefert, falls er den zu P_1 konjugierten Punkt P_1' nicht enthält.[2]

Aus dem Beweis des letzten Satzes geht hervor, daß man dem Satz auch folgende, nach § 16, d) damit äquivalente Form geben kann:

Wenn der Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ mit einem Feld umgeben werden kann, und wenn überdies die Bedingung (II_b') erfüllt ist, so liefert $\mathfrak{E}_0$ ein starkes Minimum.

Häufig ist die Existenz eines speziellen Feldes um den Bogen $\mathfrak{E}_0$ geometrisch evident, während die Bestimmung des konjugierten Punktes umständlicher ist. In solchen Fällen ist die zweite Form des Satzes vorzuziehen.

Beispiel VII (Siehe pp. 33, 99): Das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx$$

---

[1] Wegen mechanischer und optischer Deutungen dieses Problems vgl. die *Übungsaufgaben* Nr. 9 und 17 zu Kap. V.

[2] Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 2—12, 33—38 am Ende von Kap. III.

zu einem Minimum zu machen. Dabei war der Bereich $\mathfrak{R}$ die obere Halbebene: $y > 0$.

Die Extremalen waren Halbkreise, welche ihre Mittelpunkte auf der x-Achse haben. Bezeichnet

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \sqrt{\beta_0^2 - (x - \alpha_0)^2}$$

den speziellen Halbkreis, welcher durch die beiden Punkte P_1, P_2 geht, so bildet die Schar der damit konzentrischen Halbkreise

$$y = \sqrt{a^2 - (x - \alpha_0)^2} \equiv \varphi(x, a)$$

ein Feld um den Bogen $\mathfrak{E}_0$. Überdies ist ($\mathrm{II_b'}$) in der ganzen oberen Halbebene erfüllt, da

$$f_{y'y'} = \frac{1}{y\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^3}.$$

Der Halbkreis $\mathfrak{E}_0$ liefert also wirklich ein starkes, eigentliches Minimum für das Integral J, und zwar ist das Minimum ein *absolutes*, da das Feld die ganze obere Halbebene ausfüllt, also mit dem Bereich $\mathfrak{R}$ identisch ist.

Anmerkung: Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß es *nicht hinreichend* ist, daß die Ungleichung

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) > 0$$

entlang der Extremalen $\mathfrak{E}_0$ erfüllt ist, oder anders geschrieben, daß

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \tilde{p}) > 0 \tag{$\mathrm{II_a'}$}$$

für $x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$ und für jedes endliche $\tilde{p}$.

Dies zeigt unser *Beispiel XI* (Siehe p. 116):

$$f = ay'^2 - 4byy'^3 + 2bxy'^4.$$

Denn hier ist entlang der Extremalen

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = 0, \qquad 0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} 1,$$

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \tilde{p}) = 2a + 24bx\tilde{p}^2 > 0$$

für $0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} 1$ und für jedes endliche $\tilde{p}$. Trotzdem findet kein starkes Minimum statt, wie wir in § 18, c) gesehen haben.

Andererseits ist die *Bedingung* ($\mathrm{II_b'}$) *nicht notwendig* für ein starkes Minimum, ja sogar *nicht einmal die viel schwächere Bedingung:*

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \tilde{p}) \overline{\gtrless} 0 \tag{$\mathrm{II_a}$}$$

für $x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2$ und für jedes endliche $\tilde{p}$.

Dies zeigt *Beispiel X* (Siehe p. 122):

$$f = y'^2(1 + y')^2.$$

Hier ist

$$f_{y'y'}(x, \overset{0}{y}(x), \tilde{p}) = 2(6\tilde{p}^2 + 6\tilde{p} + 1);$$

diese Funktion von $\tilde{p}$ kann sowohl negative als positive Werte annehmen, und trotzdem findet, wie wir unter a) gesehen haben, ein starkes Minimum statt, wenn $m < -1$ oder $m > 0$.

c) Hinreichende Bedingungen für ein Extremum bei Gefällbeschränkungen[1]:

Bei unserer Definition des Minimums (§ 3, b)) konnte das Gefälle der zulässigen Kurven irgend welche endlichen Werte annehmen. Man kann aber die Definition auch in der Weise modifizieren, daß man dem Gefälle gewisse Beschränkungen auferlegt. Auch für solche Fälle lassen sich aus dem Weierstraß'schen Fundamentalsatz hinreichende Bedingungen ableiten.

Hierher gehört vor allem der folgende, von Lindeberg[2]) herrührende Satz, für dessen Beweis wir auf die Arbeit von Lindeberg verweisen:

Sind für die Extremale $\mathfrak{E}_0$ *die Bedingungen* (II') *und* (III') *erfüllt, und ist*

$$\mathcal{E}(x, \overset{0}{y}(x);\ \overset{0}{y}{}'(x), \tilde{p}) > 0 \tag{36}$$

in dem Bereich

$$x_1 \overline{\overline{<}}\, x\, \overline{\overline{<}}\, x_2, \qquad 0 < |\,\tilde{p} - \overset{0}{y}{}'(x)\,| \overline{\overline{<}}\, r' \tag{37}$$

wo r' *eine beliebige endliche positive Größe ist, so läßt sich eine positive Größe* r *bestimmen, derart, daß*

$$\Delta J > 0$$

für alle zulässigen Variationen $\overline{\mathfrak{C}}$ *des Bogens* $\mathfrak{E}_0$, *für welche*

$$|\,\bar{y}(x) - \overset{0}{y}(x)\,| < r, \qquad |\,\bar{y}'(x) - \overset{0}{y}{}'(x)\,| < r'. \tag{38}$$

Zusatz I: Aus dem obigen Satz folgt unmittelbar der schon früher (§ 15, b)) bewiesene Satz, daß *die Bedingungen* (I), (II'), (III') *für ein schwaches Minimum hinreichend sind.*

Denn zunächst folgt aus (II'), nach § 21, b) daß sich eine positive Größe r' bestimmen läßt, derart, daß

$$f_{y'y'}(x, \overset{0}{y}(x), \tilde{p}) > 0$$

im Bereich

$$x_1 \overline{\overline{<}}\, x\, \overline{\overline{<}}\, x_2, \qquad |\,\tilde{p} - \overset{0}{y}{}'(x)\,| \overline{\overline{<}}\, r';$$

und nunmehr ergibt sich aus (28), daß für eben diesen Wert r' die Voraussetzungen des Lindeberg'schen Satzes erfüllt sind.

Zusatz II: Ist G eine beliebige positive Größe, größer als das Maximum M' von $|\,\overset{0}{y}{}'(x)\,|$, und *werden alle zulässigen Kurven der Bedingung unterworfen, daß*

---

[1]) Vgl. hierzu auch *Beispiel VIII*, p. 34.

[2]) Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), p. 334. Der Satz sagt wesentlich mehr aus, als daß der Bogen $\mathfrak{E}_0$ ein schwaches Minimum liefert; das Hauptgewicht liegt darauf, daß die obere Grenze für $|\,\bar{y}'(x) - \overset{0}{y}{}'(x)\,|$ in (38) identisch ist mit der in (37) vorkommenden Größe r'.

ihr Gefälle dem absoluten Wert nach $\overline{\overline{<}} G$ *sein soll, so sind die Bedingungen* (I), (II'), (III'), (IV') *für ein starkes Minimum hinreichend.*

Zum Beweis braucht man nur den obigen Satz mit $r' = G + M'$ anzuwenden.

d) **Tabelle der notwendigen und der hinreichenden Bedingungen:**

Zur bessern Übersicht stellen wir die verschiedenen Bedingungen, welche bei der Aufgabe, das Integral

$$J = \int_{\mathfrak{C}} f(x, y, y')\, dx$$

bei festen Endpunkten zu einem Minimum zu machen (§ 3, b)), vorgekommen sind, tabellarisch zusammen:

1. $$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{I}$$

(*Euler's Differentialgleichung*, p. 24: Eigenschaften ihres allgemeinen Integrals, p. 72).

Die Kurve

$$\mathfrak{C}_0: \quad y = \mathring{y}(x), \qquad x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2,$$

ist eine Extremale der Klasse C', welche die beiden gegebenen Punkte P_1 und P_2 verbindet, und ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt (p. 54).

2. $$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \overline{\overline{>}} 0 \quad \text{in} \quad [x_1 x_2] \tag{II}$$

(*Legendre's Bedingung*, p. 57).

$$f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \tilde{p}) \overline{\overline{>}} 0 \tag{II$_a$}$$

in $[x_1 x_2]$ für jedes endliche $\tilde{p}$ (p. 115).

$$f_{y'y'}(x, y, \tilde{p}) \overline{\overline{>}} 0 \tag{II$_b$}$$

für jedes (x, y) in einer gewissen Nachbarschaft von $\mathfrak{C}_0$ und für jedes endliche $\tilde{p}$ (p. 123).

3. $$x_2 \overline{\overline{<}} x_1' \tag{III}$$

wo x_1' der zu x_1 konjugierte Wert ist (*Jacobi's Bedingung*, p. 87 und p. 70, Fußnote [1]).

4. $$\mathcal{E}(x, \mathring{y}(x); \mathring{y}'(x), \tilde{p}) \overline{\overline{>}} 0 \tag{IV}$$

in $[x_1 x_2]$ für jedes endliche $\tilde{p} \neq \mathring{y}'(x)$. (*Weierstraß' Bedingung*, p. 113).

$$\mathcal{E}(x, y; p(x, y), \tilde{p}) \overline{\overline{>}} 0 \tag{IV$_b$}$$

für jedes (x, y) in einer gewissen Nachbarschaft von $\mathfrak{E}_0$ und für jedes $\tilde{p} \neq p(x, y)$ (p. 120).

5. *Bedingung* (V), p. 118.

Die Unterdrückung des Gleichheitszeichens in (II) bis (IV_b) wird durch einen Apostroph angedeutet. *Die Bedingungen* (I), (II), (III) *sind notwendig, die Bedingungen* (I), (II'), (III') *sind hinreichend für ein schwaches Minimum.*

Die Bedingungen (I), (II), (III), (IV), (V) *sind notwendig, die Bedingungen* (I), (II'), (III'), (IV_b') *und ebenso die Bedingungen* (I), (II_b'), (III') *sind hinreichend für ein starkes Minimum.*

Die Bedingung (III') läßt sich hierbei durch die Bedingung, daß $\mathfrak{E}_0$ sich mit einem Feld von Extremalen umgeben läßt ersetzen (pp. 105, 124).

§ 20. Zusammenhang des Unabhängigkeitssatzes mit der Hamilton-Jacobi'schen Theorie und der Transversalentheorie.[1])

Wir schließen hier noch einige weitere Folgerungen aus dem Unabhängigkeitssatz an, die zwar für die Aufstellung hinreichender Bedingungen für ein Extremum des Integrals J bei festen Endpunkten nicht erforderlich sind, die aber vom Standpunkte der Theorie der Differentialgleichungen von größtem Interesse sind. Dem mehr formalen Charakter der Untersuchung entsprechend verzichten wir jedoch darauf, an dieser Stelle eine strenge Detailbegründung der Schlüsse zu geben, indem wir in dieser Beziehung auf die ausführliche Behandlung der Transversalentheorie in Parameterdarstellung in Kap. VII und auf Kap. XII verweisen.

a) Die Funktion $W(x, y)$ und die Transversalen des Feldes[2]):

Wir kehren zu den Voraussetzungen und Bezeichnungen von § 17 zurück und denken uns in dem Hilbert'schen invarianten Integral $J^*(P_0 P)$ den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ festgehalten; den Punkt $P(x, y)$ dagegen betrachten wir als frei variabel im Feld $\mathcal{S}$. Für jeden Punkt des Feldes ist dann nach dem Unabhängigkeitssatz der Wert des Integrals $J^*_{\mathfrak{C}}(P_0 P)$ vom Integrationsweg $\mathfrak{C}$ unabhängig, und durch

---

[1]) Dieser Paragraph schließt sich unmittelbar an die Entwicklungen von § 17, a) an.

[2]) Vgl. Zermelo und Hahn, Encyklopädie II A, p. 628 und Hilbert, *Zur Variationsrechnung,* Göttinger Nachrichten, 1905, 2. Heft.

Angabe des Punktes P eindeutig bestimmt; er ist also eine eindeutige Funktion von x, y, die wir mit $W(x, y)$ bezeichnen:

$$W(x, y) = J^*(P_0 P). \tag{39}$$

Nach bekannten Sätzen über Linienintegrale folgt dann, daß das Hilbert'sche Integral J^*, genommen zwischen irgend zwei Punkten P_3, P_4 des Feldes entlang irgend einer ganz im Felde gelegenen Kurve, sich durch die Funktion $W(x, y)$ ausdrücken läßt, nämlich

$$J^*_{34} = J^*_{04} - J^*_{03} = W(x_4, y_4) - W(x_3, y_3). \tag{40}$$

Ferner folgt[1]) aus der Definition von W, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p) \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= f_{y'}(x, y, p) \end{aligned}\right\}, \tag{41}$$

wo p wieder die Gefällfunktion $p(x, y)$ des Feldes $\mathcal{S}$ bedeutet.

Wir betrachten jetzt die Kurvenschar

$$W(x, y) = \text{konst.} \tag{42}$$

Da die Funktion W im Feld eindeutig definiert ist, so geht durch jeden Punkt des Feldes eine und nur eine Kurve dieser Schar.

Es sei

$$W(x, y) = c$$

irgend eine Kurve der Schar (42).

Sie möge mit $\mathfrak{T}_c$ bezeichnet werden, und sei darstellbar[2]) in der Form

$$\mathfrak{T}_c: \qquad y = \tilde{y}(x),$$

so daß also

$$W(x, \tilde{y}(x)) = c. \tag{43}$$

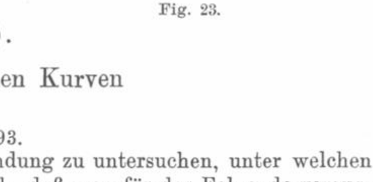

Fig. 23.

Die durch einen beliebigen Punkt $P(x, y)$ der Kurve $\mathfrak{T}_c$ gehende Feldextremale $\mathfrak{E}$ sei

$$\mathfrak{E}: \qquad y = y(x).$$

Dann ist im Schnittpunkt P der beiden Kurven

---

[1]) Vgl. z. B. Picard, *Traité*, Bd. I, p. 93.

[2]) Hier wäre bei einer strengen Begründung zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dies der Fall ist. Es zeigt sich, daß man für das Folgende voraussetzen muß, daß

$$f(x, \varphi(x, a), \varphi'(x, a)) \neq 0, \qquad f_{y'}(x, \varphi(x, a), \varphi'(x, a)) \neq 0$$

für jede Extremale des Feldes.

$$y(x) = \tilde{y}(x)$$

und ferner nach der Definition der Gefällfunktion

$$p(x, y) = y'(x). \tag{44}$$

Differentiieren wir jetzt die Identität (43) nach x und machen von den Gleichungen (41) Gebrauch, so erhalten wir

$$f(x, y, p) - pf_{y'}(x, y, p) + \tilde{y}' f_{y'}(x, y, p) = 0;$$

wegen (44) können wir dies auch schreiben

$$f(x, y, y') + (\tilde{y}' - y') f_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{45}$$

Hierin sind x, y die Koordinaten des Schnittpunktes P, y' ist das Gefälle der Feldextremale $\mathfrak{E}$, $\tilde{y}'$ dasjenige der Kurve $\mathfrak{T}_c$. Die Gleichung (45) ist aber nichts anderes als die schon in 7, b) eingeführte Transversalitätsbedingung. Wir haben also das Resultat:

Jede Kurve der Schar

$$W(x, y) = \text{konst.} \tag{42}$$

schneidet sämtliche Extremalen des Feldes transversal.

Aus diesem Grunde heißen die Kurven der Schar (42) *die „Transversalen des Feldes“*.

Dem Zusatz von § 17, a) stellt sich nunmehr der folgende Satz an die Seite:

Das Hilbert'sche invariante Integral J^*, genommen zwischen irgend zwei Punkten P_3, P_4 derselben Transversalen, ist gleich Null.

Denn nach (40) ist

$$J^*_{34} = W(x_4, y_4) - W(x_3, y_3)$$

und dies ist gleich Null, wenn P_3 und P_4 auf derselben Transversalen liegen.

Hieraus ergibt sich eine neue Definition der Funktion $W(x, y)$. Ziehen wir nämlich die Transversale $\mathfrak{T}_0$ durch den Punkt P_0, und schneidet die Feldextremale $\mathfrak{E}$ durch den Punkt $P(x, y)$ die Transversale $\mathfrak{T}_0$ im Punkt Q, so wählen wir bei der Berechnung der Funktion $W(x, y)$ die aus dem Transversalenbogen $P_0 Q$ und dem Extremalenbogen QP zusammengesetzte Kurve $P_0 QP$ als Integrationsweg für das Hilbert'sche Integral J^*. Dann ist

$$W(x, y) = J^*(P_0 Q) + J^*(QP),$$

und dies ist nach dem Zusatz von § 17, a) und nach dem soeben bewiesenen Satz gleich

$$W(x, y) = J_{\mathfrak{E}}(QP). \tag{39a}$$

Die Funktion $W(x, y)$ kann also auch definiert werden als *der Wert des „Grundintegrals J“ genommen entlang der durch den Punkt P gehenden Feldextremalen $\mathfrak{E}$ vom Schnittpunkt von $\mathfrak{E}$ mit der Transversalen $\mathfrak{T}_0$ bis zum Punkt P.* Hiermit ist gezeigt, daß die Funktion $W(x, y)$ mit dem „*Feldintegral*“ identisch ist, welches in den Theorien von WEIERSTRASS und KNESER eine so hervorragende Rolle spielt (siehe unten § 33).

Es seien jetzt ferner $\mathfrak{T}_{c'}$ und $\mathfrak{T}_{c''}$ zwei Transversalen des Feldes, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ zwei sie verbindende Extremalen des Feldes (siehe Fig. 25).

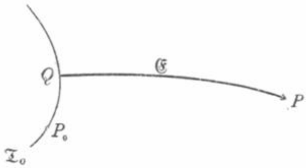

Fig. 24.

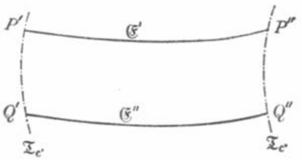

Fig. 25.

Dann ist nach dem Unabhängigkeitssatz das Integral J^* genommen entlang der geschlossenen Kurve $P'Q'Q''P''P'$ gleich Null. Nun ist aber nach dem eben bewiesenen Satz

$$J^*(P'Q') = 0, \qquad J^*(Q''P'') = 0$$

und nach dem Zusatz von § 17, a)

$$J^*(Q'Q'') = J_{\mathfrak{E}''}(Q'Q''), \quad J^*(P''P') = -J^*(P'P'') = -J_{\mathfrak{E}'}(P'P'').$$

Also folgt

$$J_{\mathfrak{E}'}(P'P'') = J_{\mathfrak{E}''}(Q'Q''). \tag{46}$$

Wir erhalten also den *Kneser'schen Transversalensatz*[1]):

Irgend zwei Transversalen des Feldes schneiden auf den verschiedenen Extremalen des Feldes Bogen aus, welche für das Integral J denselben Wert liefern.

Beispiel VII (siehe pp. 33, 99): $f = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$. Es sollen zu dem aus der Schar konzentrischer Halbkreise um den Punkt $(0, 0)$ gebildeten Feld (vgl. p. 99) die Transversalen bestimmt werden. Die Transversalitätsbedingung (45) reduziert sich auf

$$\frac{1 + y'\tilde{y}'}{y\sqrt{1+y'^2}} = 0;$$

[1]) Vgl. KNESER, *Lehrbuch*, § 15, und unten § 40.

„transversal" ist also hier mit „orthogonal" identisch und daher müssen die Transversalen mit dem Geradenbüschel durch den Punkt $(0, 0)$ identisch sein. Wir wollen dies auch analytisch verifizieren. Nach p. 99 ist

$$p(x, y) = -\frac{x}{y}.$$

Die Gleichungen (41) werden daher

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}},$$

woraus man durch Integration[1]) erhält

$$W = \log\left(\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) + C.$$

Die Transversalen sind also

$$\frac{x}{y} = c,$$

d. h. die Geraden durch den Punkt $(0, 0)$[2]).

b) **Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung:**

Wie schon Beltrami (loc. cit.) bemerkt hat, ergibt sich durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (41) *eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion W:*

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0. \tag{47}$$

Aus der Ableitung derselben geht hervor, daß die Funktion Φ nur von f, nicht aber von der Wahl des Feldes $\mathcal{S}$ abhängig ist, während die Funktion $W(x, y)$ auch von $\mathcal{S}$ abhängt.

Beispiel XIII (Siehe p. 124): $f = G(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$.
Hier lauten die Gleichungen (41)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{G(x, y)}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{p\,G(x, y)}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Die partielle Differentialgleichung für W lautet also

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = G^2(x, y).$$

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, daß nicht jede beliebige Kurvenschar

$$F(x, y) = c$$

---

[1]) Vgl. z. B. Picard, *Traité*, Bd. I, p. 94.

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben*, Nr. 24, 25, 26 am Ende von Kap. III.

Transversalenschar für ein gegebenes Variationsproblem sein kann, sondern nur diejenigen, für welche die Funktion F der partiellen Differentialgleichung

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \tag{47a}$$

genügt.

Ist umgekehrt $F(x, y)$ irgend eine Funktion, welche der partiellen Differentialgleichung (47a) genügt, so gibt es stets eine einparametrige Extremalenschar, welcher die gegebene Schar $F(x, y) = c$ als Transversalenschar zugehört.

Denn die partielle Differentialgleichung (47a) ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es eine Funktion $p = p(x, y)$ gibt, welche gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_{y'}(x, y, p) \tag{41a}$$

befriedigt. Diese Funktion $p(x, y)$ genügt dann der partiellen Differentialgleichung (19), wie man sofort sieht, wenn man die erste der Gleichungen (41a) nach y, die zweite nach x differentiiert und die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen einander gleichsetzt, was gestattet ist, da bei geeigneten Stetigkeitsannahmen $F_{xy} = F_{yx}$.

Nunmehr bilden wir mit dieser Funktion $p(x, y)$ die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y). \tag{48}$$

Es bezeichne

$$y = \varphi(x, a) \tag{49}$$

das allgemeine Integral derselben, so daß also

$$\varphi_x = p(x, \varphi) \tag{50}$$

für jedes a. Durch Differentiation nach x folgt hieraus

$$\varphi_{xx} = p_x + p_y \varphi_x = p_x + p_y p. \tag{51}$$

Ersetzt man jetzt in der partiellen Differentialgleichung (19) die Variable y durch $\varphi(x, a)$ und macht von (50) und (51) Gebrauch, so erhält man die Gleichung (18), welche aussagt, daß die Schar (49) eine Extremalenschar für das durch die Funktion $f(x, y, y')$ charakterisierte Variationsproblem ist.

Diese Schar wird dann, wenn x und a auf einen geeigneten Bereich beschränkt werden, ein Feld bilden, und für dieses Feld ist nach (50) die Funktion $p(x, y)$ Gefällfunktion und die gegebene Schar $F(x, y) = c$ nach (41a) die Transversalenschar. —

Die Elimination von p aus den beiden Gleichungen (41) wird man naturgemäß in der Weise ausführen, daß man zunächst die zweite Gleichung nach p auflöst und den gefundenen Wert in die erste Gleichung einsetzt.

Bezeichnet daher allgemein

$$p = \mathfrak{p}(x, y, v)$$

die durch Auflösung der Gleichung

$$f_{y'}(x, y, p) = v \tag{52}$$

nach p erhaltene Funktion, so daß also identisch

$$f_{y'}(x, y, \mathfrak{p}) \equiv v, \tag{53}$$

so folgt aus (41_2):

$$p(x, y) = \mathfrak{p}\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right), \tag{54}$$

und man erhält somit als Resultat der Elimination die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f\left(x, y, \mathfrak{p}\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right)\right) - \frac{\partial W}{\partial y}\mathfrak{p}\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right), \tag{47a}$$

oder wenn man nach der in der Hamilton'schen Theorie üblichen Bezeichnungsweise die Funktion

$$H(x, y, v) \equiv v\mathfrak{p}(x, y, v) - f(x, y, \mathfrak{p}(x, y, v)) \tag{55}$$

einführt:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0. \tag{56}$$

Hiermit hängt unmittelbar die *Reduktion der Euler'schen Differentialgleichung auf ein sogenanntes „kanonisches System"*[1]) zusammen. Aus der Definition der Funktion H folgt unter Benutzung der Identität (53)

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -f_y(x, y, \mathfrak{p}), \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = \mathfrak{p}.$$

Man ersetze jetzt die Euler'sche Differentialgleichung durch das damit äquivalente System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit den beiden unbekannten Funktionen y, y':

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0,$$

---

[1]) Vgl. z. B. Jordan, *Cours d'Analyse,* Bd. III, Nr. 256—260, 375.

und führe dann statt y' eine neue unbekannte Funktion v ein mittels der Gleichung

$$v = f_{y'}(x, y, y'),$$

woraus durch Auflösen folgt

$$y' = \mathfrak{p}(x, y, v),$$

so erhält man für die beiden Funktionen y, v das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{57}$$

das in der Tat in der kanonischen Form ist. Die Beltrami'sche partielle Differentialgleichung für die Funktion W, in der Form (56) geschrieben, ist also mit der zu dem kanonischen System (57) gehörigen *Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung* identisch.

c) **Ableitung des allgemeinen Integrals der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung aus einem ersten Integral der Euler'schen Differentialgleichung:**

Nach der Hamilton-Jacobi'schen Theorie[1]) folgt aus dem letzten Resultat, daß die Integration der partiellen Differentialgleichung (47) und die Integration der Euler'schen Differentialgleichung äquivalente Probleme sind. Wir wollen dieses wichtige Resultat nach Beltrami[2]) und Hilbert[3]) direkt aus dem Unabhängigkeitssatz, ohne Zuhilfenahme der Hamilton-Jacobi'schen Theorie, beweisen.

Wir nehmen zunächst an, das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung sei gefunden:

$$y = g(x, \alpha, \beta),$$

und betrachten nun die einparametrige Extremalenschar, die man erhält, wenn man β einen festen Wert beilegt und nur den Parameter α variiert. Bei geeigneter Beschränkung von x und α wird diese Schar ein Feld bilden. Zu diesem Feld gehört dann eine bestimmte Gefällfunktion $p(x, y)$ und eine bestimmte Funktion $W(x, y)$; beide werden von der Konstanten β abhängen, und die Gleichungen (41)

---

[1]) Vgl. *Encyclopädie,* II A, p. 343 (E. v. Weber), und die dort gegebenen Literaturnachweise auf Hamilton und Jacobi.

[2]) Loc. cit. p. 368.

[3]) „*Zur Variationsrechnung*", Göttinger Nachrichten, 1905, und Mathematische Annalen, Bd. 62, p. 356.

erscheinen daher jetzt als Identitäten in x, y, β und können nach β differentiiert werden. Man erhält so:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \beta} = -f_{y'y'}(x, y, p)\, p \frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial \beta} = f_{y'y'}(x, y, p) \frac{\partial p}{\partial \beta}. \tag{58}$$

Aus der Definition der Gefällfunktion berechnet man leicht

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{g_\alpha g_{x\beta} - g_\beta g_{x\alpha}}{g_\alpha}.$$

Daraus folgt aber, daß $\frac{\partial p}{\partial \beta}$ nicht identisch verschwinden kann, da $g(x, \alpha, \beta)$ das allgemeine Integral[1]) der Euler'schen Differentialgleichung sein sollte. Da überdies auch $f_{y'y'}(x, y, p)$ nicht identisch verschwinden kann, wenn wir singuläre Vorkommnisse beiseite lassen, so ist

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial \beta} \not\equiv 0.$$

Hieraus folgt aber, daß die Funktion $W(x, y; \beta)$ die Konstante β nicht additiv enthalten kann, d. h. nicht von der Form

$$W_0(x, y) + h(\beta)$$

sein kann. Die Funktion $W(x, y; \beta) + \gamma$ ist also in der Terminologie von Lagrange ein *„vollständiges"* Integral[2]) der partiellen Differentialgleichung (47). Hieraus ergibt sich dann nach der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung[2]) auf folgende Weise das *„allgemeine"* Integral der partiellen Differentialgleichung (47): Ist $\lambda(\beta)$ eine willkürliche Funktion von β, so ist auch

$$W(x, y; \beta) + \lambda(\beta) \tag{59}$$

ein Integral von (47). Bestimmt man jetzt β als Funktion von x, y aus der Gleichung

$$W_\beta(x, y; \beta) + \lambda'(\beta) = 0, \tag{60}$$

und setzt den gefundenen Wert

$$\beta = \mathfrak{b}(x, y)$$

in den Ausdruck (59) ein, so erhält man eine Funktion von x und y, welche ebenfalls der partiellen Differentialgleichung (47) genügt. Die so erhaltene Lösung wird dann nach Lagrange die allgemeine Lösung

---

[1]) Vgl. § 12, b), Gleichung (26).

[2]) Vgl. z. B. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris 1891), p. 87.

von (47) genannt, weil sie von der willkürlichen Funktion λ abhängt.

Zur Herleitung der Funktion $W(x, y; \beta)$ ist es übrigens nicht einmal nötig, das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung zu kennen; es genügt, wenn ein erstes Integral[1])

$$\Pi(x, y, y') = \beta \tag{61}$$

bekannt ist. Die Auflösung von (61) nach y' möge ergeben

$$y' = p(x, y; \beta). \tag{62}$$

Bei festgehaltenem β ist dann $p(x, y; \beta)$ die Gefällfunktion für diejenige Extremalenschar, die man durch Integration der Differentialgleichung erster Ordnung (62) erhält. Um die Funktion $W(x, y; \beta)$ zu erhalten, braucht man aber diese Integration gar nicht auszuführen, da man dazu nur die Funktion $p(x, y; \beta)$ nötig hat, und zwar erhält man nach dem Unabhängigkeitssatz die Funktion $W(x, y; \beta)$ durch Ausführung von zwei Quadraturen.[2])

Beispiel: $f = G(y)\sqrt{1 + y'^2}$.

Da die Funktion f die Variable x nicht explizite enthält, so läßt sich nach § 6, a) sofort ein erstes Integral der Euler'schen Differentialgleichung angeben, nämlich

$$f - y' f_{y'} \equiv \frac{G(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \beta.$$

Daraus ergibt sich

$$y' = \frac{\sqrt{G^2(y) - \beta^2}}{\beta} \equiv p(x, y; \beta),$$

und hieraus:

$$f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p) = \beta, \qquad f_{y'}(x, y, p) = \sqrt{G^2(y) - \beta^2}.$$

Also ist

$$W(x, y; \beta) + \gamma = \beta x + \int_{y_0}^{y} \sqrt{G^2(y) - \beta^2}\, dy + \gamma.$$

Dies ist in der Tat ein vollständiges Integral der zum Problem gehörigen Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = G^2(y).$$

[1]) Vgl. *Encyclopädie* II A, p. 196 (Painlevé).

[2]) Vgl. z. B. Serret, *Differential- und Integralrechnung,* Bd. II, p. 305.

d) **Ableitung des allgemeinen Integrals der Euler'schen Differentialgleichung aus einem vollständigen Integral der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung:**

Hat man umgekehrt auf irgend einem Weg ein Integral $W(x, y; \beta)$ der partiellen Differentialgleichung (47) gefunden, welches eine nicht additive willkürliche Konstante β enthält, und ist

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial \beta} \neq 0, \tag{63}$$

so erhält man *das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung, indem man die Gleichung*

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \alpha \tag{64}$$

nach y auflöst.

Zum Beweis schließt man zunächst genau wie unter b), daß es eine Funktion p gibt, welche gleichzeitig den beiden Gleichungen (41) genügt, nur mit dem Unterschied, daß jetzt diese Funktion p ebenso wie die Funktion W von dem Parameter β abhängt. Man kann daher die beiden Gleichungen (41) nach β differentiieren und erhält so die beiden Gleichungen (58). Aus denselben folgt aber, daß für jede beliebige Funktion y von x die Gleichung gilt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial W}{\partial \beta} = \left(\frac{dy}{dx} - p(x, y; \beta)\right) f_{y'y'}(x, y, p)\frac{\partial p}{\partial \beta}.$$

Wenn nun insbesondere die Funktion y der Gleichung (64) genügt, so ist die linke Seite und daher auch die rechte Seite der letzten Gleichung gleich Null. Da aber wegen der Voraussetzung (63) der Faktor $f_{y'y'}\frac{\partial p}{\partial \beta}$ nicht identisch verschwinden kann, so folgt, daß die Funktion y dann stets auch der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y; \beta)$$

genügt, und daraus schließt man ganz wie unter b), daß sie dann auch der Euler'schen Differentialgleichung genügen muß. Da die durch Auflösung von (64) erhaltene Funktion y aber zwei unabhängige willkürliche Konstante enthält, so muß sie das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung sein.

Zugleich folgt nach b), daß bei festgehaltenem β die Gleichung: $W(x, y; \beta) = \text{konst.}$ die Transversalenschar zu der Extremalenschar: $W_\beta(x, y; \beta) = \text{konst.}$ darstellt.

Es läßt sich weiter noch der folgende Satz[1]) beweisen:

Kennt man irgend ein vollständiges Integral $W(x, y; \beta) + \gamma$ der partiellen Differentialgleichung (47), so kann man stets, ohne Ausführung einer weiteren Integration eine Lösung $w(x, y)$ von (47) bestimmen, welche entlang einer beliebig vorgegebenen Kurve

$$\tilde{\mathfrak{C}}: \qquad x = \tilde{x}(\tau), \qquad y = \tilde{y}(\tau)$$

verschwindet, das heißt also geometrisch, man kann stets eine Transversalenschar bestimmen, welche die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ enthält.

Man erhält die verlangte Lösung $w(x, y)$ nach Darboux folgendermaßen: Man berechne τ aus der Gleichung

$$W_x(\tilde{x}, \tilde{y}; \beta)\tilde{x}' + W_y(\tilde{x}, \tilde{y}; \beta)\tilde{y}' = 0$$

als Funktion von β und substituiere den gefundenen Wert $\tau = \tau(\beta)$ in die Funktion $W(\tilde{x}, \tilde{y}; \beta)$. Definiert man dann

$$\lambda(\beta) = - W(\tilde{x}, \tilde{y}; \beta)|^{\tau = \tau(\beta)},$$

setzt mit dieser Funktion $\lambda(\beta)$ die Gleichung (60) an, und bestimmt daraus $\beta = \mathfrak{b}(x, y)$ als Funktion von x, y, so ist

$$w(x, y) = W(x, y; \mathfrak{b}) + \lambda(\mathfrak{b})$$

die gesuchte Lösung der partiellen Differentialgleichung (47).

In dem besonderen Fall, wo die Kurve $\tilde{\mathfrak{C}}$ in einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ degeneriert, wo also

$$\tilde{x}(\tau) \equiv x_0, \qquad \tilde{y}(\tau) \equiv y_0,$$

vereinfacht sich die Regel dahin, daß

$$\lambda(\beta) = - W(x_0, y_0; \beta)$$

zu nehmen ist. In diesem Fall gehen die sämtlichen Extremalen der Schar, deren zugehörige Transversalenschar durch: $w(x, y) = \text{konst.}$ dargestellt wird, durch den Punkt P_0.

Beispiel: $f = \sqrt{1 + y'^2}$.

Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung lautet hier

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Ihr genügt offenbar die Funktion

$$W(x, y; \beta) = x \sin \beta - y \cos \beta;$$

[1]) Für den Beweis verweisen wir auf Darboux, *Théorie des surfaces*, Bd. II, p. 447.

daraus ergibt sich das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung in der Form

$$W_\beta(x, y; \beta) \equiv x \cos\beta + y \sin\beta = \alpha .$$

Die Geradenschar:

$$x \sin\beta - y \cos\beta = \text{konst.}$$

ist in der Tat transversal (d. h. hier orthogonal) zur Extremalenschar:

$$x \cos\beta + y \sin\beta = \text{konst.}$$

Wir wollen diejenige Lösung der partiellen Differentialgleichung bestimmen, welche entlang dem Kreise

$$\tilde{\mathfrak{C}}: \qquad x = R\cos\tau \equiv \tilde{x}(\tau), \qquad y = R\sin\tau \equiv \tilde{y}(\tau)$$

verschwindet. Dazu haben wir nach der obigen Regel die Gleichung

$$-R\cos(\tau - \beta) = 0$$

nach τ aufzulösen:

$$\tau = \beta \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi \equiv \tau(\beta) .$$

Es ist dann

$$\lambda(\beta) = -R\left[\sin\beta\cos\left(\beta \pm \frac{\pi}{2}\right) - \cos\beta\sin\left(\beta \pm \frac{\pi}{2}\right)\right] = \pm R ;$$

sodann haben wir die Gleichung

$$W_\beta(x, y; \beta) + \lambda'(\beta) \equiv x\cos\beta + y\sin\beta = 0$$

nach β aufzulösen und die gefundenen Werte

$$\sin\beta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos\beta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

in die Funktion $W(x, y; \beta) + \lambda(\beta)$ einzusetzen. Wir erhalten so bei passender Wahl der Vorzeichen die gesuchte Lösung:

$$w(x, y) = \pm\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right).$$

Schrumpft der Kreis auf seinen Mittelpunkt zusammen ($R = 0$), so wird

$$w(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2} .$$

Das letztere Resultat ergibt sich auch nach der obigen Regel, indem man

$$\lambda(\beta) = -W(0, 0; \beta) \equiv 0$$

setzt.

e) Die Methode von Caratheodory zur Behandlung von Variationsproblemen:

Wir knüpfen an die vorangehenden Entwicklungen noch einen kurzen Bericht über die Methode, die neuerdings CARATHEODORY[1]) für die Behandlung von Variationsproblemen gegeben hat.

[1]) *„Über diskontinuierliche Lösungen in der Variationsrechnung“, Dissertation* (Göttingen, 1904), p. 65, und Göttinger Nachrichten 1905, p. 1.

Wir betrachten mit CARATHEODORY eine beliebige, nach dem Parameter aufgelöste Kurvenschar

$$F(x, y) = \text{konst.} \tag{65}$$

und greifen zwei benachbarte Kurven der Schar heraus

$$F(x, y) = \mu \tag{66}$$

und

$$F(x, y) = \mu + d\mu\,. \tag{67}$$

Durch einen beliebigen Punkt $P(x, y)$ der Kurve (66) ziehen wir ein Linienelement PQ bis zu dessen Schnittpunkt $Q(x + dx, y + dy)$ mit der Kurve (67). Der Wert des Integrals

$$J = \int\limits_{\mathfrak{C}} f(x, y, y')\, dx$$

genommen entlang dem Linienelement PQ ist dann bis auf Glieder höherer Ordnung gegeben durch[1])

$$J(PQ) \sim f(x, y, p)\, dx \sim \frac{f(x, y, p)\, d\mu}{F_x(x, y) + p F_y(x, y)}, \tag{68}$$

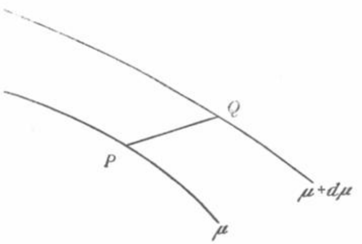

Fig. 26.

wenn p das Gefälle des Elementes PQ im Punkt P bezeichnet.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, p so zu bestimmen, daß dieser angenäherte Wert des Integrals $J(PQ)$ ein Minimum wird. Dazu muß

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{f}{F_x + p F_y} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{f}{F_x + p F_y} \geqq 0$$

sein, oder, wenn wir die Differentiation ausführen

$$F_x f_{y'} - (f - p f_{y'}) F_y = 0 \tag{69}$$

$$f_{y'y'} \geqq 0\,. \tag{70}$$

Da das Gefälle der Kurve (66) im Punkt P durch $-\frac{F_x}{F_y}$ gegeben ist, so zeigt der Vergleich mit (45), daß *diejenige Richtung, für welche das Segment PQ für das Integral $J(PQ)$ den kleinsten Wert liefert, von der Kurve (66) im Punkt P transversal geschnitten wird.*

Durch Auflösung der Gleichung (69) erhält man den gesuchten Wert des Gefälles p als Funktion von x, y; wir bezeichnen dieselbe mit

$$p = p(x, y)\,.$$

[1]) Das Zeichen $\sim$ soll hier bedeuten: annähernd gleich.

Setzt man diesen Wert von p in (68) ein, so erhält man den Minimalwert M von $J(PQ)$ als Funktion von x, y. Im allgemeinen wird sich dieser Minimalwert M von Punkt zu Punkt ändern, wenn wir den Punkt P die Kurve (66) durchlaufen lassen. Es soll nun die Funktion $F(x, y)$ so bestimmt werden, daß der Minimalwert M entlang jeder Kurve der Schar (65) einen konstanten, nur von μ abhängigen Wert hat. Eine Kurvenschar, welche diese Eigentümlichkeit hat, nennt CARATHEODORY *eine Schar geodätisch äquidistanter Kurven.* Bei einer solchen Schar kann man den Parameter μ stets so wählen, daß der konstante Wert des Minimalwerts M gleich $d\mu$ wird. Alsdann ist

$$\frac{f}{F_x + pF_y} = 1, \tag{71}$$

wobei für p die Funktion $p(x, y)$ einzusetzen ist. Durch Elimination von p aus den beiden Gleichungen (69) und (71) erhält man eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $F(x, y)$, welche die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquidistanz ausdrückt. Diese partielle Differentialgleichung ist aber mit der Beltrami'schen Differentialgleichung (47) identisch, wenn man W statt F schreibt. Denn man kann die in Frage stehende Elimination von p in der Weise ausführen, daß man zunächst die beiden Gleichungen (69) und (71) nach F_x, F_y auflöst, was

$$F_x = f - pf_{y'}, \qquad F_y = f_{y'} \tag{72}$$

ergibt, und dann aus diesen p eliminiert. Der Vergleich mit den Gleichungen (41) zeigt dann die Richtigkeit unserer Behauptung. *Die partielle Differentialgleichung (47) ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven der Schar $W(x, y) =$ Konst. geodätisch äquidistant sind.*

Wir kehren jetzt wieder zu einer beliebigen Kurvenschar (65) zurück, und stellen uns die Aufgabe, in der allgemeinsten Weise eine Kurve

$$\mathfrak{C}: \qquad y = y(x)$$

zu bestimmen, welche die Eigenschaft hat, daß in jedem ihrer Punkte das Gefälle der Kurve mit dem oben bestimmten Wert von p übereinstimmt, welcher für $J(PQ)$ den kleinsten Wert liefert. Es muß dann entlang der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) \tag{73}$$

sein. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung (die mit derjenigen Differentialgleichung identisch ist, die man aus (69) erhält, wenn man p durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt), ist eine Kurvenschar

$$y = \varphi(x, a); \tag{74}$$

jede Kurve derselben wird dann von jeder Kurve der gegebenen Schar (65) transversal geschnitten.

Wenn nun insbesondere die Kurven der Schar (65) geodätisch äquidistant sind, so ist die zugehörige Schar (74) eine Extremalenschar für das Integral J. Denn alsdann gelten die Gleichungen (72), aus denen man genau so weiter schließt wie unter b) bei der Lösung der Aufgabe, zu einer gegebenen Lösung W der partiellen Differentialgleichung (47) die zugehörige Extremalenschar zu bestimmen.