Vorlesungen über Variationsrechnung

Bolza, Oskar

Leipzig [u.a.], 1909

Zweites Kapitel. Die zweite Variation bei der einfachsten Klasse von Aufgaben

urn:nbn:at:at-ubi:2-6614

Zweites Kapitel.

Die zweite Variation bei der einfachsten Klasse von Aufgaben.

§ 9. Die Legendre'sche Bedingung.

Nach Integration der Euler'schen Differentialgleichung und Bestimmung der Integrationskonstanten erhält man im allgemeinen eine gewisse Anzahl[1]) von Kurven, als die einzig möglichen Lösungen des vorgelegten Problems; d. h. wenn es überhaupt Kurven gibt, welche das Integral J zu einem Minimum machen, so müssen dieselben unter den so gefundenen enthalten sein. Wir haben jetzt jede einzelne dieser Kurven daraufhin zu untersuchen, ob sie wirklich ein Minimum liefert oder nicht.

a) **Allgemeines über die zweite Variation:**

Wir nehmen also an, wir hätten eine Extremale[2]) der Klasse C' gefunden, welche durch die beiden gegebenen Punkte P_1 und P_2 geht; sie möge mit $\mathfrak{E}_0$ bezeichnet werden, und sei durch die Gleichung

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \mathring{y}(x), \quad x_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} x_2 \tag{1}$$

dargestellt. Wir nehmen überdies an, daß $\mathfrak{E}_0$ ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt.

Wir variieren jetzt die Kurve $\mathfrak{E}_0$ ganz wie in § 4, wobei wir uns wieder auf Variationen der speziellen Form $\omega = \varepsilon\eta$ beschränken.

---

[1]) Die Anzahl kann auch unendlich sein; es kann andererseits aber auch unmöglich sein, die Integrationskonstanten den Anfangsbedingungen entsprechend zu bestimmen, vgl. p. 32, Fußnote [1]).

[2]) Hierin ist stets implizite die Annahme enthalten, daß der Differentialquotient $\dfrac{d}{dx} f_{y'}$ existiert.

Dann muß, wie schon in § 4 bewiesen worden ist, in der dort benutzten Bezeichnung[1])

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 J''(0) \overline{\gtrless} 0$$

sein, falls $\mathfrak{C}_0$ wirklich ein Minimum liefert. Führen wir die Differentiation aus, wobei wir nach unseren Annahmen über die Funktionen f und y wieder die gewöhnlichen Regeln für die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter anwenden dürfen, und setzen zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} f_{yy}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) &= P(x) \\ f_{yy'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) &= Q(x) \\ f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) &= R(x) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

so kommt

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} (P\eta^2 + 2\,Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx. \tag{3}$$

Es muß also im Fall eines Minimums

$$\int_{x_1}^{x_2} (P\eta^2 + 2\,Q\eta\eta' + R\eta'^2)\,dx \overline{\gtrless} 0 \tag{4}$$

sein und zwar für alle Funktionen η der Klasse C', welche in x_1 und x_2 verschwinden.

Aus unseren Annahmen über die Funktionen f und y folgt[2]), daß die drei Funktionen P, Q, R stetig sind in $[x_1 x_2]$. Wir nehmen in der Folge an, daß sie nicht alle drei identisch verschwinden in $[x_1 x_2]$.

b) Legendre's Transformation der zweiten Variation:

In dem speziellen Fall, wo $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$, kann man unmittelbar über das Vorzeichen der zweiten Variation entscheiden; denn dann ist

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} R\eta'^2\,dx,$$

und man schließt leicht[3]), daß im Fall eines Minimums $R \overline{\gtrless} 0$ sein muß.

---

[1]) Im Fall eines Maximums lautet die Bedingung natürlich $\delta^2 J \overline{\lessgtr} 0$.

[2]) Nach A III 4.

[3]) Vgl. unten. Dieser spezielle Fall liegt z. B. bei *Beispiel VI* vor: $f = G(y')$.

Auf diesen speziellen Fall hat LEGENDRE[1]) die Diskussion des allgemeinen Falles durch folgenden Kunstgriff zurückgeführt:

Er addiert zur zweiten Variation das Integral

$$\varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} (2\eta\eta' w + \eta^2 w')\, dx,$$

wo w eine vorläufig willkürliche Funktion von x ist. Das Integral ist gleich Null; denn es ist gleich

$$\varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(\eta^2 w)\, dx = \varepsilon^2 \Big[\eta^2 w\Big]_{x_1}^{x_2},$$

und η verschwindet in x_1 und x_2. Daher ist

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} [(P + w')\eta^2 + 2(Q + w)\eta\eta' + R\eta'^2]\, dx.$$

Und nunmehr bestimmt Legendre die bisher willkürlich gelassene Funktion w durch die Bedingung, daß die Diskriminante der quadratischen Form in η, η' unter dem Integralzeichen verschwindet[2]), d. h. so daß

$$(Q + w)^2 - R(P + w') = 0; \tag{5}$$

dies reduziert $\delta^2 J$ auf die Form

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} R\left(\eta' + \frac{Q + w}{R}\eta\right)^2 dx. \tag{6}$$

Hieraus schließt Legendre, daß R sein Zeichen nicht wechseln darf in $[x_1 x_2]$, und daß alsdann $\delta^2 J$ dasselbe Zeichen hat wie R.

Schon LAGRANGE[3]) hat gegen diesen Schluß den Einwand erhoben, daß Legendre's Transformation stillschweigend voraussetzt, daß die Differentialgleichung (5) ein Integral besitzt, welches im Intervall $[x_1 x_2]$ endlich und stetig ist.

---

[1]) LEGENDRE, „*Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations*“, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1786; in STÄCKEL's Übersetzung in OSTWALD's *Klassiker* usw. Nr. 47, p. 59.

[2]) Eine von LAGRANGE herrührende Modifikation dieses Schlusses wird weiter unten (§ 15, b)) zur Sprache kommen.

[3]) Im Jahr 1797, vgl. *Œuvres,* Bd. IX, p. 303.

Trotzdem läßt sich durch eine leichte Modifikation des Beweises der erste Teil des Legendre'schen Schlusses völlig streng beweisen, d. h. der

Fundamentalsatz II: Soll die Extremale

$$y = \mathring{y}(x)$$

ein Minimum[1]) *für das Integral J liefern, so muß sein*

$$R(x) \equiv f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) \geqq 0 \quad in \quad [x_1 x_2]. \tag{II}$$

Beweis[2]): Angenommen, es sei $R(c) < 0$ in einem inneren Punkt c des Intervalls $[x_1 x_2]$. Dann können wir ein Teilintervall $[\xi_1 \xi_2]$ von $[x_1 x_2]$ angeben, für welches gleichzeitig die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $R(x) < 0$ im ganzen Intervall $[\xi_1 \xi_2]$.

2. Es gibt ein partikuläres Integral w der Differentialgleichung (5), welches in $[\xi_1 \xi_2]$ von der Klasse C' ist.

Denn da $R(x)$ stetig ist in $[x_1 x_2]$ und $R(c) < 0$, so[3]) können wir ein ganz in $[x_1 x_2]$ enthaltenes Intervall $[c - \delta, c + \delta]$ angeben, in welchem $R(x) < 0$. Lösen wir jetzt die Differentialgleichung (5) nach w' auf:

$$\frac{dw}{dx} = -P + \frac{(Q + w)^2}{R} \tag{7}$$

und verstehen wir unter w_0 irgend einen Wert von w, so ist die rechte Seite von (7) eine Funktion von x und w, welche in der Umgebung der Stelle $x = c$, $w = w_0$ stetig ist und eine stetige Ableitung nach w besitzt. Daraus folgt aber nach dem Cauchy'schen Existenztheorem[4]), daß es ein Integral von (5) gibt, welches für $x = c$ den Wert $w = w_0$ annimmt, und welches in einem gewissen Intervall $[c - \delta', c + \delta']$ von der Klasse C' ist. Bezeichnet dann $[\xi_1 \xi_2]$ das kleinere der beiden Intervalle $[c - \delta, c + \delta]$ und $[c - \delta', c + \delta']$, so sind in der Tat in $[\xi_1 \xi_2]$ die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt. Nunmehr wählen wir $\eta = 0$ außerhalb $[\xi_1 \xi_2]$ und[5]) $\eta = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2$ in $[\xi_1 \xi_2]$. Die so definierte Funktion η liefert

[1]) Für ein Maximum lautet die Bedingung natürlich $R \leqq 0$.

[2]) Nach Weierstrass, *Vorlesungen,* 1879.

[3]) Nach A III 2.

[4]) Vgl. § 23, a).

[5]) Würde man $\eta = (x - \xi_1)(x - \xi_2)$ wählen, so hätte η' Unstetigkeiten in ξ_1 und ξ_2, und eine Nebenbetrachtung wie in § 14, c) wäre nötig.

eine zulässige Variation der Kurve $\mathfrak{C}_0$, da sie in $[x_1 x_2]$ von der Klasse[1]) C' ist und in x_1 und x_2 verschwindet.

Für diese spezielle Funktion η wird aber

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)\, dx.$$

Auf dieses Integral ist aber wegen der Eigenschaften des Intervalls $[\xi_1 \xi_2]$ die Legendre'sche Transformation anwendbar, und wir erhalten

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} R\left(\eta' + \frac{Q+w}{R}\eta\right)^2 dx.$$

Da $R < 0$ in $[\xi_1 \xi_2]$, so ist $\delta^2 J \overline{\gtrless} 0$; wegen der Stetigkeit sämtlicher auftretender Funktionen könnte nur dann das Gleichheitszeichen gelten, wenn $\eta' + \frac{Q+w}{R}\eta \equiv 0$, identisch im ganzen Intervall. Das ist aber nicht möglich; denn dividiert man $\eta' + \frac{Q+w}{R}\eta$ durch $(x-\xi_1)(x-\xi_2)$ und läßt x sich der Grenze ξ_1 nähern, so nähert sich der Quotient dem von Null verschiedenen Wert $2(\xi_1 - \xi_2)$.

Somit wäre $\delta^2 J$ für die betrachtete Variation negativ, was unmöglich ist, wenn $\mathfrak{C}_0$, wie wir voraussetzen, das Integral J zu einem Minimum macht. Es muß also, zunächst im Innern des Intervalls $[x_1 x_2]$ und dann wegen der Stetigkeit von R auch in den Endpunkten $R(x) \overline{\geqq} 0$ sein, was zu beweisen war.

Indem wir den Ausnahmefall[2]), in welchem $R(x)$ in Punkten des Intervalls $[x_1 x_2]$ verschwindet, beiseite lassen, werden wir *in der Folge voraussetzen, daß die Extremale* $\mathfrak{C}_0$ *die Bedingung*

$$R(x) > 0 \quad \textit{in} \quad [x_1 x_2] \tag{II'}$$

erfüllt.

Eine Folge dieser Annahme ist, daß $y''(x)$ im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ existiert und stetig ist, wie in § 5, d) gezeigt worden ist. Daraus folgt weiter, daß *nicht nur die Funktionen P, Q, R, sondern auch ihre ersten Ableitungen in* $[x_1 x_2]$ *stetig sind.*

---

[1]) Vgl. p. 26, Fußnote [2]).

[2]) Ein Beispiel dieses Ausnahmefalls betrachtet Erdmann, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXIII (1878), p. 369, nämlich $f = y'^2 \cos^2 x$, wenn $x_1 < \frac{\pi}{2} < x_2$. Vgl. dazu die *Übungsaufgaben*, Nr. 27—32.

Eine weitere Folge der Voraussetzung (II') ist, daß die Lösung $y = \mathring{y}(x)$ der Euler'schen Differentialgleichung sich nach beiden Seiten hin über das Intervall $[x_1 x_2]$ auf ein etwas weiteres Intervall $[X_1 X_2]$ fortsetzen[1]) läßt ($X_1 < x_1$, $x_2 < X_2$), und zwar derart, daß auch in dem erweiterten Intervall $[X_1 X_2]$ die Ungleichung (II') erfüllt ist und P, Q, R von der Klasse C' sind.

Beispiel I: (Siehe pp. 1, 33): $f = y\sqrt{1 + y'^2}$.

Hier ist

$$f_{yy} = 0, \quad f_{yy'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad f_{y'y'} = \frac{y}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}.$$

Ferner ist, wenn wir mit α_0, β_0 ein den Anfangsbedingungen (39) von § 6 genügendes Wertsystem der Integrationskonstanten α, β bezeichnen,

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \alpha_0 \operatorname{Ch} \frac{x - \beta_0}{\alpha_0},$$

woraus sich ergibt

$$P = 0, \quad Q = \operatorname{Th} \frac{x - \beta_0}{\alpha_0}, \quad R = \frac{\alpha_0}{\operatorname{Ch}^2 \dfrac{x - \beta_0}{\alpha_0}}.$$

Da wir voraussetzen, daß $y > 0$ (vgl. p. 17), so folgt, daß $\alpha_0 > 0$ und daher ist die Bedingung $R > 0$ für jedes x erfüllt.[2])

§ 10. Die Jacobi'sche Differentialgleichung.

Wir haben jetzt den zweiten Teil des Legendre'schen Schlusses zu prüfen, welcher besagte, daß auch umgekehrt allemal $\delta^2 J \gtreqless 0$, wenn $R > 0$ in $[x_1 x_2]$.

Der Schluß ist richtig, wie unmittelbar aus den vorangehenden Entwicklungen folgt, wenn ein Integral der Differentialgleichung (5) existiert, welches im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ stetig[3]) ist; er ist dagegen falsch, wie wir in § 14 sehen werden, wenn kein solches Integral existiert.

a) Reduktion der Legendre'schen Differentialgleichung auf die Jacobi'sche:

Die ganze Entscheidung hängt also von der Integration der Differentialgleichung (5) ab.

Da ist es denn zunächst von Wichtigkeit, daß die Legendre'sche Differentialgleichung (5) zur Klasse der Riccati'schen Differential-

[1]) Im Sinne der Theorie der Differentialgleichungen, siehe § 23, d).

[2]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 2—12, 35—40 am Ende von Kap. III.

[3]) Da $R \neq 0$, so folgt nach (7) die Stetigkeit von w' aus derjenigen von w.

gleichungen gehört und sich daher auf eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren läßt, wie zuerst JACOBI[1]) bemerkt hat.

Dies geschieht mittels der Substitution

$$w = -Q - R\frac{u'}{u}, \tag{8}$$

durch welche (5) übergeht in[2])

$$\Psi(u) \equiv \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)u - \frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right) = 0. \tag{9}$$

Wir werden diese Differentialgleichung die *Jacobi'sche Differentialgleichung* nennen und ihre linke Seite mit $\Psi(u)$ bezeichnen.

Führen wir die Differentiation aus, so können wir (9) auch schreiben

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{R'}{R}\frac{du}{dx} + \frac{(Q' - P)}{R}u = 0. \tag{10}$$

Nach den am Ende von § 9 gemachten Bemerkungen sind die Koeffizienten der Differentialgleichung (10) im Intervalle $[X_1 X_2]$ stetig. Daraus folgt nach allgemeinen Existenztheoremen über lineare Differentialgleichungen (§ 11, a)), daß jedes Integral der Differentialgleichung (10) im Intervalle $[X_1 X_2]$ von der Klasse C'' ist. Also ist die durch (8) definierte Funktion w in $[x_1 x_2]$ von der Klasse C', sobald u im ganzen Intervalle $[x_1 x_2]$ von Null verschieden ist. Unser früheres Resultat läßt sich jetzt also so aussprechen:

Wenn $R > 0$ in $[x_1 x_2]$, so ist $\delta^2 J > 0$ für alle[3]) *zulässigen Funktionen η, vorausgesetzt, daß es ein partikuläres Integral u der*

---

[1]) JACOBI, *„Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen"*, Journal für Mathematik, Bd. XVII (1837), p. 68; auch von STÄCKEL herausgegeben in OSTWALD's *Klassiker* usw., Nr. 47, p. 87. JACOBI's Abhandlung, welche übrigens auch den allgemeineren Fall behandelt, wo die Funktion f höhere Ableitungen von y enthält, bezeichnet einen Wendepunkt in der Geschichte der Variationsrechnung. JACOBI gibt jedoch nur kurze Andeutungen der Beweise; ausführliche Beweise sind von DELAUNAY, SPITZER, HESSE und anderen gegeben worden (vgl. die Literaturnachweise bei PASCAL, loc. cit. p. 63 und KNESER, *Encyclopädie* II A, p. 588—591). Unter diesen Kommentaren zu Jacobi's Abhandlung ist der vollständigste der von HESSE (Journal für Mathematik, Bd. LIV (1857), p. 255), dessen Darstellung wir hier folgen. Jacobi's Resultate sind auf das allgemeinste Problem für einfache Integrale von CLEBSCH und A. MAYER ausgedehnt worden (vgl. die von PASCAL, loc. cit. p. 64, 65 gegebenen Zitate und JORDAN, *Cours d'Analyse,* III, Nr. 373—394).

[2]) Man beachte, daß, wie oben gezeigt, die Ableitungen Q', R' existieren und stetig sind.

[3]) Natürlich außer: $\eta \equiv 0$ in $[x_1 x_2]$.

Jacobi'schen Differentialgleichung (9) gibt, welches im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ *von Null verschieden ist.*

Falls es ein solches partikuläres Integral u gibt, so läßt sich $\delta^2 J$ auch schreiben

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2}{u^2}\, dx, \tag{11}$$

wie man sofort sieht, wenn man in (6) mittels der Substitution (8) die Funktion u statt w einführt.

b) **Jacobi's Transformation der zweiten Variation:**

Wenn es dagegen kein partikuläres Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung gibt, welches im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ von Null verschieden ist, mit anderen Worten, wenn jedes Integral von (9) mindestens in einem Punkt von $[x_1 x_2]$ verschwindet, so ist die Legendre'sche Transformation der zweiten Variation nicht anwendbar und wir kommen also auf diesem Wege zu keiner Entscheidung über das Vorzeichen der zweiten Variation.

Hier setzt nun eine zweite, von Jacobi herrührende Transformation der zweiten Variation ein, die uns auch für diesen Fall Aufschluß über das Vorzeichen der zweiten Variation geben wird.

Es bezeichne $[\xi_1 \xi_2]$ entweder das Intervall $[x_1 x_2]$ selbst oder ein Teilintervall von $[x_1 x_2]$ und es sei η außerhalb $[\xi_1 \xi_2]$ identisch Null, und in $[\xi_1 \xi_2]$ gleich einer Funktion der Klasse C'', welche in ξ_1 und ξ_2 verschwindet.

Bezeichnen wir dann mit 2Ω die in bezug auf η, η' quadratische Form

$$2\Omega = P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2,$$

und wenden den Euler'schen Satz über homogene Funktionen an, so können wir $\delta^2 J$ in der Form schreiben:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \eta' \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'}\right) dx.$$

Dieses Integral können wir jetzt — ganz so wie den ähnlich gebauten Ausdruck für δJ in § 4 — durch partielle Integration[1]) des zweiten Gliedes umformen. Wir erhalten so:

[1]) Die partielle Integration ist statthaft, da nach den gemachten Annahmen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} = Q\eta + R\eta'$$

im Intervall $[\xi_1 \xi_2]$ von der Klasse C' ist.

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left\{ \left[\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right]_{\xi_1}^{\xi_2} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right) dx \right\}.$$

Da η in ξ_1 und ξ_2 verschwindet, und da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} = (P - Q')\eta - \frac{d}{dx}(R\eta') = \Psi(\eta),$$

so ergibt sich hieraus der folgende Ausdruck für die zweite Variation:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta \, \Psi(\eta) \, dx, \tag{12}$$

gültig für jede Funktion η von den angegebenen Eigenschaften.

Auf Grund der Formel (12) können wir jetzt dem unter a) ausgesprochenen Resultat das folgende als Gegenstück zur Seite stellen: *Wenn die Jacobi'sche Differentialgleichung (9) ein partikuläres Integral u_1 besitzt, welches in zwei Punkten ξ_1, ξ_2 des Intervalls $[x_1 x_2]$ verschwindet, so kann man durch passende Wahl der Funktion η die zweite Variation gleich Null machen.*

Dazu braucht man nur $\eta \equiv 0$ zu wählen in $[x_1 \xi_1]$ und in $[\xi_2 x_2]$, und $\eta = u_1$ in $[\xi_1 \xi_2]$.

Wenn aber $\delta^2 J = 0$ ist, so hängt das Vorzeichen von ΔJ von demjenigen der dritten Variation ab, und wird daher im allgemeinen durch passende Wahl des Vorzeichens von ε negativ gemacht werden können.[1])

Wir haben nunmehr weiter zu zeigen, daß von den beiden Fällen: (9) besitzt ein in $[x_1 x_2]$ nicht verschwindendes Integral, und: (9) besitzt ein in $[x_1 x_2]$ mindestens zweimal verschwindendes Integral, stets entweder der eine oder der andere eintreten muß; ferner haben wir Kriterien für das Eintreten des einen oder des anderen Falles zu entwickeln.[2])

---

[1]) Gegen diesen von Jacobi herrührenden Schluß können zwei Einwände erhoben werden: Erstens ist die benutzte Funktion η nicht von der Klasse C' wegen der Unstetigkeit von η' in ξ_1 und ξ_2; diesem Einwand kann durch „Abrunden der Ecken" begegnet werden, wie in § 14, c) näher ausgeführt werden wird; zweitens wäre es noch denkbar, daß die spezielle Funktion η, welche $\delta^2 J = 0$ macht, allemal auch $\delta^3 J = 0$ macht, womit der obige Schluß hinfällig würde; wir kommen auf diesen Punkt weiter unten, p. 70, zurück.

[2]) Fortsetzung der Entwicklung in § 12, wozu der Leser unmittelbar übergehen möge.

c) Die Jacobi'sche Transformation für Variationen der Klasse D'':

Wir werden später eine *Verallgemeinerung der Formel* (12) nötig haben, nämlich für den Fall, daß die Ableitungen von η gewisse Unstetigkeiten besitzen. Wir werden uns dabei der folgenden Terminologie bedienen: Wir werden zur Abkürzung sagen, eine Funktion $f(x)$ sei in einem Intervall $[x_1 x_2]$ von der Klasse[1] $D^{(p)}$, wenn sie selbst in dem ganzen Intervall stetig ist, und wenn sich das Intervall in eine endliche Anzahl von Teilintervallen $[x_1 c_1], [c_1 c_2], \dots [c_{n-1} x_2]$ zerlegen läßt, derart, daß in jedem der Teilintervalle für sich betrachtet die Funktion von der Klasse $C^{(p)}$ ist. Hieraus folgt, daß in jedem der Punkte c_i die beiden Grenzwerte[2] $f^{(\nu)}(c_i + 0)$ und $f^{(\nu)}(c_i - 0)$ existieren und endlich sind für $\nu = 1, 2, \dots p$. Dabei wird angenommen, daß in einem Punkt c_i mindestens für einen dieser Werte von ν die beiden Grenzwerte voneinander verschieden sind. Die Klasse $C^{(p)}$ betrachten wir als in der Klasse $D^{(p)}$ enthalten, nämlich für $n = 1$.

Dies vorausgeschickt, sei η von der Klasse D'' in $[\xi_1 \xi_2]$. Sind $c_1, c_2, \dots c_{n-1}$, die Unstetigkeiten von η' oder η'', so müssen wir vor Ausführung der partiellen Integration das Integral für $\delta^2 J$ in eine Summe von Integralen zerlegen[3]), von ξ_1 bis c_1, von c_1 bis c_2, usw. Die partielle Integration darf dann in jedem Teilintervall ausgeführt werden, und wir erhalten so:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left[\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right]_{c_\nu + 0}^{c_\nu - 0} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta\, \Psi(\eta)\, dx \right\},$$

oder wenn wir für $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta'}$ seinen Wert $Q\eta + R\eta'$ einsetzen und uns erinnern, daß η, Q und R in $c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ stetig sind,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \eta(c_\nu) R(c_\nu) \left[\eta'(c_\nu - 0) - \eta'(c_\nu + 0) \right] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta\, \Psi(\eta)\, dx \right\}. \tag{13}$$

d) Zweiter Beweis der Formel (11):

Aus der Formel (12) ergibt sich noch ein zweiter, ebenfalls von Jacobi[4]) herrührender Beweis für den Ausdruck (11) für die zweite Variation; derselbe gründet sich auf die folgende Eigenschaft des Differentialausdruckes Ψ: Sind u und v irgend zwei Funktionen der Klasse C'', so ist

$$u\, \Psi(v) - v\, \Psi(u) = -\frac{d}{dx} R(uv' - u'v). \tag{14}$$

---

[1]) Der Buchstabe D soll an „diskontinuierlich" erinnern, ebenso wie C an „kontinuierlich".

[2]) Vgl. A II 2.

[3]) Vgl. dazu die Bemerkungen in ~~§ 44, a)~~.

[4]) Vgl. die Zitate auf p. 60, Fußnote [1]), insbesondere die Arbeit von Hesse.

Wenn daher u der Differentialgleichung

$$\Psi(u) = 0$$

genügt, so erhalten wir

$$u\,\Psi(v) = -\frac{d}{dx} R(uv' - u'v),$$

und wenn wir darin

$$v = pu$$

setzen, wo p irgend eine Funktion der Klasse C'' ist, und mit p multiplizieren, so erhalten wir

$$(pu)\,\Psi(pu) = -p\frac{d}{dx}(Rp'u^2) = -\frac{d}{dx}(Rpp'u^2) + R(p'u)^2. \tag{15}$$

Nehmen wir jetzt überdies an, daß die Funktion u in $[\xi_1\,\xi_2]$ von Null verschieden ist, dann dürfen wir in (15) für p den Quotienten

$$p = \frac{\eta}{u}$$

substituieren, wo η wieder eine beliebige Funktion der Klasse C'' ist, welche in ξ_1 und ξ_2 verschwindet. Integriert man jetzt (15) zwischen den Grenzen ξ_1 und ξ_2, substituiert für p den eben angegebenen Wert und beachtet, daß dann auch p an beiden Grenzen verschwindet, so erhält man[1]) aus (12)

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2\,dx}{u^2}. \tag{11a}$$

§ 11. Hilfssätze über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir stellen in diesem Paragraphen eine Reihe von Sätzen über homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammen die wir bei der weiteren Diskussion der zweiten Variation gebrauchen werden.

---

[1]) Dieser zweite Beweis der Formel (11) setzt voraus, daß η von der Klasse C'' ist in $[\xi_1\,\xi_2]$. Wenn man jedoch mit (15) die schon bei Ableitung von (12) benutzte Identität

$$Pv^2 + 2Qvv' + Rv'^2 = v\,\Psi(v) + \frac{d}{dx} v(Qv + Rv')$$

kombiniert, so erhält man:

$$P(pu)^2 + 2Q(pu)\frac{d}{dx}(pu) + R\left(\frac{d(pu)}{dx}\right)^2 = R(p'u)^2 + \frac{d}{dx}(p^2u(Qu + Ru')), \tag{16}$$

aus welcher (11a) unmittelbar durch Integration folgt. Da aber in (12) die zweite Ableitung von p gar nicht vorkommt, so ergibt sich hieraus, in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat in § 10, a), daß es für die Richtigkeit der Formel (11a) nicht nötig ist, die Existenz von η'' vorauszusetzen.

Es sei die Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = 0, \tag{17}$$

wo p und q gegebene Funktionen von x sind, welche *in einem Intervall* $[ab]$ *stetig* sind. Alsdann gelten die folgenden Sätze und Definitionen:

a) **Existenztheorem:**

Gehört der Punkt x_0 dem Stetigkeitsintervall $[ab]$ an, und sind u_0, u_0' zwei willkürlich vorgeschriebene endliche Werte, so gibt es *ein und nur ein Integral von* (17), *welches den Anfangsbedingungen*

$$u(x_0) = u_0, \qquad u'(x_0) = u_0'$$

genügt[1]), und welches in der Umgebung von x_0 von der Klasse C'' ist.

Dieses Integral und daher überhaupt *jedes Integral der Differentialgleichung* (17) *ist von der Klasse* C'' *im ganzen*[2]) *Intervall* $[ab]$.

Zusätze:

1. Da $u \equiv 0$ eine Lösung von (17) ist, so führt die Anwendung des Existenztheorems auf die speziellen Anfangswerte $u_0 = 0$, $u_0' = 0$ zu dem Satz:

Ein partikuläres Integral u von (17) kann *nicht gleichzeitig mit seiner ersten Ableitung* in einem Punkt x_0 des Intervalls $[ab]$ *verschwinden*, es sei denn, daß $u \equiv 0$ in $[ab]$.

2. Ein partikuläres Integral u der Differentialgleichung (17) kann im Intervall $[ab]$ *nur in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwinden*, es sei denn, daß $u \equiv 0$ in $[ab]$.

Beweis: Angenommen u hätte unendlich viele Nullstellen in $[ab]$, ohne identisch zu verschwinden; dann würde es nach A I 5 für dieselben mindestens eine Häufungsstelle c im Intervall $[ab]$ geben. Es ist nun entweder $u(c) \neq 0$; alsdann läßt sich nach A III 2 wegen der Stetigkeit von $u(x)$ eine Umgebung von c angeben, in welcher $u(x) \neq 0$; oder es ist $u(c) = 0$, dann folgt nach Zusatz 1, daß $u'(c) \neq 0$. Es ist aber nach der Definition der Ableitung

$$u(c+h) = h[u'(c) + (h)],$$

[1]) Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Cauchy'schen Existenztheorems für Differentialgleichungen, vgl. § 23.

[2]) Vgl. Picard, *Traité d'Analyse,* III (Paris, 1896), p. 91, 92 und Painlevé, *Encyclopädie,* II A, p. 194.

wo (h) mit h unendlich klein wird. Daraus folgt, daß sich eine Umgebung von c angeben läßt, in welcher c die einzige Nullstelle von u ist. In beiden Fällen gelangen wir also zu einem Widerspruch mit der Annahme, daß c eine Häufungsstelle der Nullstellen von u ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

3. Es existieren stets (unendlich viele) „*Fundamentalsysteme*“[1]) für die Differentialgleichung (17), d. h. Systeme von zwei linear unabhängigen partikulären Integralen u_1, u_2, für welche also keine Relation der Form

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 \equiv 0$$

besteht, wo C_1, C_2 Konstanten bedeuten, welche nicht beide gleich Null sind.

4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß u_1 und u_2 linear unabhängig sind, besteht darin, daß ihre „Hauptdeterminante“*

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \tag{18}$$

nicht identisch verschwindet.[2])

5. Bilden u_1, u_2 ein Fundamentalsystem, so ist *jedes Integral* von (17) durch u_1 und u_2 *ausdrückbar in der Form*[3])

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 ,$$

wo C_1, C_2 Konstanten sind.

---

[1]) Z. B. die beiden durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{ll} v_1(x_0) = 1 & v_1'(x_0) = 0 \\ v_2(x_0) = 0 & v_2'(x_0) = 1 \end{array}$$

definierten Integrale v_1, v_2. Jedes andere Fundamentalsystem u_1, u_2 ist durch dieses spezielle ausdrückbar in der Form

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 \\ u_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 , \end{aligned}$$

wo α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} Konstanten sind, für welche

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0 .$$

[2]) Vgl. Vessiot, *Encyclopädie,* II A, p. 261; Jordan, *Cours d'Analyse,* III, Nr. 122; Serret, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung* (Leipzig, 1904), Bd. III, Nr. 768. Der Ausdruck „Hauptdeterminante“ bei Serret, loc. cit.; sonst wird auch der Ausdruck „Wronski'sche Determinante“ dafür gebraucht.

[3]) Vgl. *Encyclopädie,* l. c., Jordan, *Cours d'Analyse,* III, Nr. 119; Serret, l. c.

b) **Der Satz von Abel**[1]):

Sind u_1, u_2 *zwei linear unabhängige Lösungen von* (17), *so ist*

$$D \equiv u_1 \frac{d u_2}{d x} - u_2 \frac{d u_1}{d x} = C e^{-\int\limits_a^x p\, d x}, \tag{19}$$

wo C *eine von Null verschiedene Konstante ist.*

Denn nach Voraussetzung ist

$$\frac{d^2 u_1}{d x^2} + p \frac{d u_1}{d x} + q u_1 = 0$$

$$\frac{d^2 u_2}{d x^2} + p \frac{d u_2}{d x} + q u_2 = 0.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $-u_2$, die zweite mit u_1 und addiert, so kommt

$$\frac{d D}{d x} + p D = 0,$$

und daraus folgt durch Integration (19).

Wäre $C = 0$, so würde folgen

$$\frac{d}{d x}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = 0, \quad \text{also} \quad u_2 = \text{konst.}\, u_1,$$

gegen die Annahme, daß u_1 und u_2 linear unabhängig sind.

Zusätze: 1. Die Hauptdeterminante $D(x)$ eines Fundamentalsystems ist *in jedem Punkt* des Stetigkeitsintervalls $[ab]$ von Null verschieden.

2. Zwei linear unabhängige Lösungen u_1, u_2 können *nicht in demselben Punkt* x_0 des Intervalls $[ab]$ *verschwinden.*

c) **Der Satz von Sturm**[2]):

Sind u_1, u_2 *zwei linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung* (17), *so liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von* u_1 *stets eine und nur eine Nullstelle von* u_2, *vorausgesetzt, daß diese Nullstellen sämtlich dem Stetigkeitsintervall* $[ab]$ *angehören.*

Beweis: Aus (19) folgt, daß die Determinante im ganzen Intervall $[ab]$ ein konstantes Vorzeichen besitzt, nämlich dasselbe wie die

---

[1]) Œuvres, Bd. I, p. 251.

[2]) Sturm, *Mémoire sur les équations différentielles du second ordre,* Journal de Liouville, Bd. I (1836), p. 131; vgl. auch Sturm, *Cours d'Analyse,* 12. Aufl., Bd. II, Nr. 609, und Serret, l. c. Nr. 775; ferner Darboux, *Théorie des surfaces,* (Paris, 1894), Bd. III, Nr. 628, und Bôcher, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 150, 428.

Konstante C; es sei, um die Ideen zu fixieren,

$$u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} > 0 .$$

Sind nun x_1 und x_1' zwei dem Intervall $[ab]$ angehörige, aufeinanderfolgende Nullstellen von u_1 (so daß also u_1 zwischen x_1 und x_1' nicht verschwindet), so ist hiernach

$$u_2(x_1)u_1'(x_1) < 0, \qquad u_2(x_1')u_1'(x_1') < 0 .$$

Andererseits sind aber nach a) Zusatz 1, die beiden Werte $u_1'(x_1)$ und $u_1'(x_1')$ von Null verschieden; also wechselt $u_1(x)$ sein Zeichen in x_1 und x_1'; und da überdies u_1 zwischen x_1 und x_1' sein Zeichen nicht wechselt, so müssen $u_1'(x_1)$ und $u_1'(x_1')$ entgegengesetztes Zeichen haben; also müssen auch $u_2(x_1)$ und $u_2(x_1')$ entgegengesetztes Zeichen haben. Daraus folgt aber wegen der Stetigkeit von u_2, daß zwischen x_1 und x_1' mindestens eine Nullstelle von u_2 liegen muß.

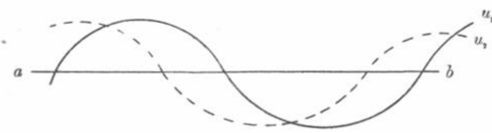

Fig. 8.

Angenommen es gäbe noch eine zweite, so würde nach dem eben Bewiesenen folgen, daß zwischen diesen beiden Nullstellen von u_2 mindestens eine Nullstelle von u_1 liegen müßte, was gegen die Annahme ist, daß x_1' die zunächst auf x_1 folgende Nullstelle von u_1 ist. Hiermit ist der Satz in allen seinen Teilen bewiesen: Die Nullstellen von u_1 und u_2 müssen also miteinander alternieren.[1])

§ 12. Das Jacobi'sche Kriterium.

Wir sind nunmehr in der Lage, die am Ende von § 10, b) aufgeworfenen Fragen über das Vorzeichen der zweiten Variation mit Hilfe des eben bewiesenen Sturm'schen Satzes zu beantworten.

a) Einführung der Funktion $\Delta(x, x_1)$:

Zu diesem Zweck führen wir dasjenige, — bis auf einen konstanten Faktor bestimmte —, Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung (9)

[1]) Das einfachste Beispiel des Satzes ist die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$

mit den beiden partikulären Integralen: $u_1 = \sin x$, $u_2 = \cos x$.

ein, welches für $x = x_1$ verschwindet.[1]) Wir bezeichnen dasselbe, indem wir den konstanten Faktor in bestimmter, später näher zu präzisierender Weise gewählt denken, mit $\Delta(x, x_1)$. Da nach der am Ende von § 9, b) gemachten Bemerkung das Stetigkeitsintervall der Jacobi'schen Differentialgleichung sich mindestens auf das Intervall $[X_1 X_2]$ erstreckt, so lassen sich die Sätze des vorigen Paragraphen auf die Jacobi'sche Differentialgleichung und das Intervall $[X_1 X_2]$ anwenden. Die Funktion $\Delta(x, x_1)$ verschwindet also nach § 11, a) nur in einer endlichen Anzahl von Punkten im Intervall $[X_1 X_2]$; wir bezeichnen mit x_1' die zunächst auf x_1 folgende Nullstelle von $\Delta(x, x_1)$, falls eine solche überhaupt im Intervall $[X_1 X_2]$ existiert, so daß also

$$\Delta(x_1, x_1) = 0, \qquad \Delta(x_1', x_1) = 0$$

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x < x_1'.$$

Alsdann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

Fall I: $x_1' \overline{\gtrless} x_2$. Dann folgt nach dem Satz von Sturm (§ 11, c)), daß jedes von $\Delta(x, x_1)$ unabhängige Integral von (9) in einem Punkt zwischen x_1 und x_1' verschwindet. Somit existiert in diesem Fall kein Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung, welches im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ von Null verschieden ist, dagegen sicher mindestens ein Integral, — nämlich: $u = \Delta(x, x_1)$ — welches in zwei Punkten des Intervalls verschwindet. Es tritt also die zweite der in § 10 betrachteten Möglichkeiten ein. Wir können also nach den in § 10, b) erhaltenen Resultaten den Satz aussprechen:

Wenn $\Delta(x, x_1)$ außer in x_1 noch in einem zweiten Punkt des Intervalls $[x_1 x_2]$ verschwindet, so kann man $\delta^2 J = 0$ machen durch passende Wahl[2]) der Funktion η.

Nach Jacobi schließt man hieraus, wie wir bereits in § 10, b) gesehen haben unter Zuziehung von $\delta^3 J$, daß in diesem Fall ein Extremum nicht eintreten kann. Der Schluß ist zwar nicht einwandfrei[2]), trotzdem ist Jacobi's Resultat, abgesehen von gewissen Ausnahmefällen, richtig[3]) wie wir später sehen werden (§ 14).

---

[1]) Vgl. Hesse, loc. cit. p. 258, und für das allgemeinste Problem für einfache Integrale A. Mayer, Journal für Mathematik, Bd. 69 (1868), p. 250.

[2]) Vgl. p. 62, Fußnote [1]).

[3]) Erdmann beweist dies, indem er den Wert von $\delta^3 J$ für die spezielle Funktion η, welche $\delta^2 J$ zum Verschwinden bringt, d. h. also für die Funktion

$$\eta = \begin{cases} \Delta(x, x_1) & \text{in } [x_1 x_1'] \\ 0 & \text{in } [x_1' x_2], \end{cases}$$

Fall II: $x_1' > x_2$, oder x_1' existiert nicht,[1]) mit andern Worten:

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x \leqq x_2. \tag{21}$$

In diesem Fall gibt es stets Integrale der Jacobi'schen Differentialgleichung, welche im ganzen Intervall $[x_1 x_2]$ von Null verschieden sind.

Zum Beweis betrachten wir neben dem Integral $\Delta(x, x_1)$ dasjenige Integral $\Delta(x, x_2)$ der Jacobi'schen Differentialgleichung, welches in x_2 verschwindet; beide sind linear unabhängig, da nach Voraussetzung

$$\Delta(x_2, x_1) \neq 0, \quad \text{während} \quad \Delta(x_2, x_2) = 0.$$

Daher folgt nach dem Sturm'schen Satz aus (21), daß

$$\Delta(x, x_2) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x < x_2,$$

also, da $\Delta(x, x_2)$ stetig in $[X_1 X_2]$, auch noch in dem Intervall $[x_1 - \delta, x_1]$, wo δ eine hinreichend kleine positive Größe ist. Wählen wir jetzt x_0 zwischen $x_1 - \delta$ und x_1, und größer als X_1, so sind auch die beiden Funktionen $\Delta(x, x_0)$ und $\Delta(x, x_2)$ linear unabhängig, da

$$\Delta(x_0, x_0) = 0, \qquad \Delta(x_0, x_2) \neq 0,$$

und eine nochmalige Anwendung des Sturm'schen Satzes, diesmal auf die beiden Integrale $\Delta(x, x_0)$ und $\Delta(x, x_2)$, ergibt das Resultat,[2]) daß

$$\Delta(x, x_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Somit können wir, indem wir $u = \Delta(x, x_0)$ wählen, die zweite Variation auf die Form (11) transformieren, und erhalten so den Satz:

---

wirklich berechnet (Schlömilch's Zeitschrift, Band XXII (1877) p. 327). Er findet in der Bezeichnung von § 13

$$\delta^3 J = -\varepsilon^3 R(x_1')\, \varphi_a'(x_1', a_0)\, \varphi_{aa}(x_1', a_0); \tag{20}$$

$R(x_1')$ und $\varphi_a'(x_1', a_0)$ sind stets von Null verschieden: und $\varphi_{aa}(x_1', a_0)$ ist gleichfalls von Null verschieden, außer wenn die Enveloppe der Schar (32a) eine Spitze in P_1' hat oder in einen Punkt degeneriert. Mit Ausnahme dieser beiden Fälle ist also Jacobi's Resultat richtig.

[1]) Man kann den Fall, wo x_1' nicht existiert, in der Ungleichung: $x_1' > x_2$ mit einbegreifen, wenn man für diesen Fall, d. h. also wenn $\Delta(x, x_1) \neq 0$ für $x_1 < x \leqq X_2$, definiert: $x_1' = X_2$, wie es Goursat (*Cours d'Analyse Mathématique* (Paris 1905), II, p. 601) tut.

[2]) Man kann dasselbe auch aus dem folgenden Lemma ableiten, das auch sonst gelegentlich nützlich ist: Es sei $X_1 \leqq \xi \leqq X_2$, und ξ' die zunächst auf ξ folgende Wurzel der Gleichung $\Delta(x, \xi) = 0$, falls eine solche in $[\xi X_2]$ existiert, dagegen $\xi' = X_2$ wenn $\Delta(x, \xi) \neq 0$ in $\xi < x \leqq X_2$. Dann läßt sich leicht zeigen,

Wenn

$$R > 0 \quad \textit{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

und

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \quad \textit{für} \quad x_1 < x \leqq x_2 \tag{21}$$

so ist $\delta^2 J$ positiv für alle zulässigen Funktionen η.

Die Bedingung (21) können wir auch durch die Ungleichung

$$x_1' > x_2 \tag{21a}$$

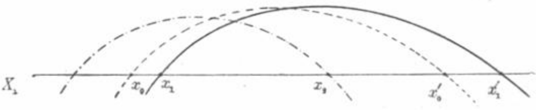

Fig. 9.

ersetzen, wenn wir die auf p. 70, Fußnote [1]) erwähnte Verabredung über die Bedeutung von x_1' treffen.

Aus dem vorangehenden Satz schloß Jacobi, daß in diesem Fall wirklich ein Minimum eintritt, und dies wurde allgemein angenommen, bis Weierstrass im Jahre 1879 zeigte, daß der Schluß falsch ist, wenigstens wenn man den Begriff des Minimums in der allgemeinen Weise faßt, wie wir denselben in § 3, b) definiert haben (vgl. § 15, a)).

Die beiden obigen Sätze pflegt man unter dem Namen *„Jacobi'sches Kriterium"* zusammenzufassen.

Der Wert x_1' wird *der zu x_1 konjugierte Wert* genannt, und der Punkt P_1' der Extremale[1]) $\mathfrak{E}_0$, dessen Abszisse x_1' ist, *der zu Punkt P_1 konjugierte Punkt* (nach Weierstrass).

Beispiel VI (Siehe p. 32): $f = G(y')$.

Hier ist

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = G''(\alpha_0),$$

also wird die Jacobi'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0,$$

und daraus

$$\Delta(x, x_1) = x - x_1.$$

Es ist also stets $\delta^2 J > 0$, was freilich hier unmittelbar aus der speziellen Form von $\delta^2 J$ klar ist.

---

daß ξ' als Funktion von ξ im Intervall $[X_1 X_2]$ stetig ist und mit ξ beständig zunimmt, so lange $\xi' < X_2$; so bald aber ξ' diesen Wert erreicht hat, bleibt es von da ab konstant gleich X_2.

Hieraus folgt noch weiter, daß die Funktion $\xi' - \xi$ von ξ im Intervall $[x_1 x_2]$ einen positiven Minimalwert l erreicht. *Ist daher $[\alpha\beta]$ irgend ein Teilintervall von $[x_1 x_2]$ dessen Länge $< l$, so kann das Intervall $[\alpha\beta]$ kein Paar konjugierter Punkte enthalten.*

[1]) oder ihrer Fortsetzung auf das erweiterte Intervall $[X_1 X_2]$, siehe § 9, b).

Beispiel I (Siehe pp. 1, 33, 59): $f = y\sqrt{1+y'^2}$.
Aus den auf p. 59 gegebenen Werten von P, Q, R erhält man für die Jacobi'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2}{\alpha_0} \operatorname{Th} \frac{x-\beta_0}{\alpha_0} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\alpha_0{}^2} u = 0 .$$

Zwei partikuläre Integrale dieser Differentialgleichung sind:

$$u_1 = -\operatorname{Sh} \frac{x-\beta_0}{\alpha_0}, \qquad u_2 = \operatorname{Ch} \frac{x-\beta_0}{\alpha_0} - \frac{x-\beta_0}{\alpha_0} \operatorname{Sh} \frac{x-\beta_0}{\alpha_0},$$

und hieraus ergibt sich

$$\Delta(x, x_1) = \operatorname{Sh} v \operatorname{Ch} v_1 - \operatorname{Sh} v_1 \operatorname{Ch} v + (v - v_1) \operatorname{Sh} v \operatorname{Sh} v_1 ,$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{x-\beta_0}{\alpha_0} = v, \qquad \frac{x_1-\beta_0}{\alpha_0} = v_1$$

gesetzt ist. Auf die Diskussion der sich hieraus ergebenden transzendenten Gleichung für die Bestimmung von x_1' werden wir weiter unten näher eingehen[1]) (p. 80).

b) Der Jacobi'sche Fundamentalsatz über die Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung:

Nach dem Vorangehenden ist es zur Entscheidung über das Vorzeichen der zweiten Variation erforderlich, die Jacobi'sche Differentialgleichung zu integrieren; dies kann praktisch auf große Schwierigkeiten führen, ja die weitere Diskussion überhaupt unmöglich machen.

Daher ist die Entdeckung Jacobi's[2]) von fundamentaler Bedeutung, daß das allgemeine Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung stets durch bloße Differentiationsprozesse erhalten werden kann, sobald das allgemeine Integral $g(x, \alpha, \beta)$ der Euler'schen Differentialgleichung (I) bekannt ist.

Dazu müssen wir zunächst einiges über die Eigenschaften der Funktion $g(x, \alpha, \beta)$ vorausschicken.

Wir haben bereits in § 9 die Annahme eingeführt, daß unsere Extremale

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \mathring{y}(x), \qquad x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2$$

im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt, und daß für sie die Bedingung

$$R(x) \equiv f_{y'y'}(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x)) > 0, \quad \text{in} \quad [x_1 x_2], \tag{II'}$$

erfüllt ist.

---

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 2—12, 35—40 am Ende von Kap. III.

[2]) in der schon mehrfach zitierten Abhandlung vom Jahr 1837, siehe p. 60, Fußnote [1]).

Aus diesen Annahmen, die für die ganze weitere Untersuchung des vorliegenden Problems festgehalten werden sollen, folgt, nach allgemeinen Sätzen[1]) aus der Theorie der Differentialgleichungen, daß die Extremale $\mathfrak{E}_0$ aus dem allgemeinen Integral der Euler'schen Differentialgleichung abgeleitet werden kann, indem man den Integrationskonstanten α, β spezielle Werte: $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ erteilt, so daß also

$$g(x, \alpha_0, \beta_0) \equiv \mathring{y}(x) \quad \text{in} \quad [x_1 x_2], \tag{22}$$

und daß sich eine positive Größe d so klein annehmen läßt, daß die Funktion $g(x, \alpha, \beta)$ in dem Bereich:

$$X_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} X_2, \qquad |\alpha - \alpha_0| \overline{\overline{<}} d, \qquad |\beta - \beta_0| \overline{\overline{<}} d \tag{23}$$

folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Funktionen g, $g' \equiv g_x$, $g'' \equiv g_{xx}$ sind als Funktionen der drei Variabeln x, α, β von der Klasse C' im Bereich (23).

2. Für jedes α, β im Bereich

$$|\alpha - \alpha_0| \overline{\overline{<}} d, \qquad |\beta - \beta_0| \overline{\overline{<}} d \tag{24}$$

genügt $g(x, \alpha, \beta)$ als Funktion von x im Intervall $[X_1 X_2]$ der Euler'schen Differentialgleichung.

3. Die Kurve

$$y = g(x, \alpha, \beta), \qquad X_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} X_2$$

liegt für jedes α, β des Bereiches (24) ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ und es ist

$$f_{y'y'}(x, g(x, \alpha, \beta), g'(x, \alpha, \beta)) > 0 \tag{25}$$

im Bereich (23).

4. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(g, g')}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0 \tag{26}$$

im Bereich (23).

Dies vorausgeschickt, erhalten wir nach Jacobi auf folgende Weise zwei partikuläre Integrale der Differentialgleichung (9): Substituieren wir in der Euler'schen Differentialgleichung für y das allgemeine Integral $g(x, \alpha, \beta)$, so erhalten wir:

$$f_y(x, g(x, \alpha, \beta), g'(x, \alpha, \beta)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, g(x, \alpha, \beta), g'(x, \alpha, \beta)) = 0.$$

[1]) Um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, verschieben wir eine eingehende Besprechung dieser Sätze und ihrer Anwendung auf die Euler'sche Differentialgleichung auf später (§ 24). Vorläufig mag der Leser die genannten Eigenschaften des allgemeinen Integrals $g(x, \alpha, \beta)$ statt als Folgerungen aus früheren Annahmen als neue selbständige Annahmen betrachten.

Diese Gleichung ist für alle Werte von x, α, β im Bereich (23) identisch erfüllt und darf daher nach α oder β differentiiert werden. Führen wir diese Differentiation aus und machen von der Vertauschbarkeit[1]) der beiden Differentiationen nach x und α Gebrauch, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\left(f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{y'y}\right) g_\alpha - \frac{d}{dx}\left(f_{y'y'}\, g'_\alpha\right) = 0\\ \left(f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{y'y}\right) g_\beta - \frac{d}{dx}\left(f_{y'y'}\, g'_\beta\right) = 0\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Geben wir jetzt den Größen α, β die speziellen Werte $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ und erinnern uns der Gleichungen (2) und (22), so erhalten wir *Jacobi's Fundamentalsatz: Ist*

$$y = g(x, \alpha, \beta)$$

die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung, dann besitzt die Jacobi'sche Differentialgleichung

$$\Psi(u) \equiv \left(P - \frac{dQ}{dx}\right) u - \frac{d}{dx}\left(R \frac{du}{dx}\right) = 0$$

die beiden partikulären Integrale

$$\left.\begin{aligned}r_1 = g_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)\\ r_2 = g_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)\end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Zusatz: Die beiden partikulären Integrale r_1, r_2 sind *linear unabhängig.*

Dazu ist nach § 11, a) notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} r_1(x), & r_2(x) \\ r'_1(x), & r'_2(x) \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

Nun lautet aber die Determinante $D(x)$ ausgeschrieben:

$$D(x) = \begin{vmatrix} g_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0), & g_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) \\ g_{\alpha x}(x, \alpha_0, \beta_0), & g_{\beta x}(x, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix};$$

andererseits ist

$$\frac{\partial(g, g')}{\partial(\alpha, \beta)}\Bigg|_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}} = \begin{vmatrix} g_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0), & g_{x\alpha}(x, \alpha_0, \beta_0) \\ g_\beta(x, \alpha_0, \beta_0), & g_{x\beta}(x, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix}$$

und da aus den Eigenschaften von $g(x, \alpha, \beta)$ folgt, daß $g_{\alpha x} = g_{x\alpha}$,

---

[1]) Dieselbe ist nach A IV 7 und A IV 9 eine Folge der Eigenschaften von $g(x, \alpha, \beta)$.

$g_{\beta x} = g_{x\beta}$, so ist

$$D(x) = \frac{\partial(g, g')}{\partial(\alpha, \beta)}\bigg|_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}}$$

und daher nach (26)

$$D(x) \neq 0 \quad \text{in} \quad [X_1 X_2],$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.[1])

Daraus folgt: *Das allgemeine Integral der Jacobi'schen Differentialgleichung ist:*

$$u = C_1 r_1 + C_2 r_2,$$

wo C_1, C_2 willkürliche Konstanten sind.

Um also das allgemeinste partikuläre Integral $\Delta(x, x_1)$ zu erhalten, welches für $x = x_1$ verschwindet, müssen wir $C_1 : C_2$ aus der Gleichung

$$C_1 r_1(x_1) + C_2 r_2(x_1) = 0$$

bestimmen. Wir erhalten so, indem wir zugleich eine bestimmte Wahl über den bisher unbestimmt gelassenen konstanten Faktor treffen, das *Resultat*:[2])

$$\Delta(x, x_1) = r_1(x) r_2(x_1) - r_2(x) r_1(x_1), \tag{29}$$

womit das Jacobi'sche Kriterium erst in seiner vollen Bedeutung erscheint.

Bei Anwendungen ist es daher gar nicht nötig, die Jacobi'sche Differentialgleichung wirklich aufzustellen, man kann vielmehr direkt aus dem allgemeinen Integral $g(x, \alpha, \beta)$ die Funktion $\Delta(x, x_1)$ ableiten und daraus den konjugierten Punkt x_1' bestimmen.[3])

§ 13. Geometrische Bedeutung der konjugierten Punkte.

Jacobi[4]) hat eine sehr elegante geometrische Deutung der konjugierten Punkte gegeben, welche auf der Betrachtung der Extremalenschar durch den Punkt P_1 beruht.

---

[1]) Vgl. Pascal, loc. cit., p. 75.

[2]) Daß $\Delta(x, x_1)$ nicht etwa identisch verschwinden kann, (d. h. für jedes x), folgt aus der linearen Unabhängigkeit von r_1 und r_2 nach § 11, b), Zusatz 2.

[3]) Beispiele folgen am Ende von § 13.

[4]) Loc. cit., und *Vorlesungen über Dynamik*, p. 46; vgl. auch Hesse, loc. cit., p. 258.

a) **Zusammenhang der Funktion $\Delta(x, x_1)$ mit der Extremalenschar durch den Punkt P_1:**

Wir wählen (etwas allgemeiner als es für unsern unmittelbaren Zweck nötig ist) irgend einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$ auf dem Extremalenbogen $\mathfrak{E}_0$ oder auf dessen Fortsetzung auf das erweiterte Intervall $[X_1 X_2]$ und betrachten die Schar von Extremalen durch den Punkt P_0. Man erhält dieselbe analytisch, indem man zwischen den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= g(x_0, \alpha, \beta) \\ y &= g(x, \alpha, \beta) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

eine der beiden Konstanten α, β eliminiert. Die Gleichung (30_1) wird durch die Werte $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ befriedigt; ihre rechte Seite ist in der Umgebung der Stelle $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ von der Klasse C', und überdies ist mindestens eine der beiden partiellen Ableitungen

$$g_\alpha(x_0, \alpha_0, \beta_0) = r_1(x_0) \quad \text{und} \quad g_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) = r_2(x_0)$$

von Null verschieden, da $r_1(x)$ und $r_2(x)$ zwei linear unabhängige Integrale der Jacobi'schen Differentialgleichung sind, und die Stelle x_0 dem Stetigkeitsbereich der letzteren angehört. Sei, um die Ideen zu fixieren,

$$g_\beta(x_0, \alpha_0, \beta_0) \neq 0\,.$$

Dann gibt es nach dem Dini'schen Satz[1]) über implizite Funktionen eine und nur eine Funktion,

$$\beta = \beta(\alpha),$$

welche in der Umgebung von $\alpha = \alpha_0$ von der Klasse C' ist, der Gleichung (30_1) genügt und für $\alpha = \alpha_0$ den Wert β_0 annimmt.

Setzen wir dieselbe in (30_2) ein, und bezeichnen

$$g(x, \alpha, \beta(\alpha)) \equiv \mathring{\varphi}(x, \alpha), \tag{31}$$

so stellt die Gleichung

$$y = \mathring{\varphi}(x, \alpha), \tag{32}$$

die durch den Punkt P_0 gehende Extremalenschar dar, wobei dann die Extremale $\mathfrak{E}_0$ selbst durch

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \varphi(x, \alpha_0) \tag{33}$$

[1]) Vgl. § 22, e).

dargestellt wird. Aus den Eigenschaften der Funktionen $g(x, \alpha, \beta)$ und $\beta(\alpha)$ folgt, daß man eine positive Größe d_0 so klein wählen kann, daß die Funktion $\mathring{\varphi}$ und die Ableitungen $\mathring{\varphi}_x$, $\mathring{\varphi}_\alpha$, $\mathring{\varphi}_{xx}$, $\mathring{\varphi}_{x\alpha}$ und $\mathring{\varphi}_{\alpha x}$ in dem Bereich

$$X_1 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} X_2, \qquad |\alpha - \alpha_0| \overline{\gtrless} d_0$$

existieren und stetig sind.

Führen wir dann die Funktion

$$\Delta(x, x_0) = r_1(x) r_2(x_0) - r_2(x) r_1(x_0)$$

ein, so ist[1])

$$\mathring{\varphi}_\alpha(x, \alpha_0) \equiv C_0 \Delta(x, x_0), \tag{34}$$

wo C_0 eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Denn[2]) nach der Definition von $\mathring{\varphi}(x, \alpha)$ ist

$$\mathring{\varphi}_\alpha(x, \alpha_0) = r_1(x) + r_2(x) \beta'(\alpha_0);$$

und aus (30_1) folgt

$$g_\alpha(x_0, \alpha, \beta) + g_\beta(x_0, \alpha, \beta) \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

also

$$\mathring{\varphi}_\alpha(x, \alpha_0) = \frac{\Delta(x, x_0)}{r_2(x_0)}.$$

Wir haben der Einfachheit halber den Parameter der Schar in ganz bestimmter Weise gewählt. Man erhält daraus die allgemeinste für unsere Zwecke brauchbare Darstellung der Extremalenschar durch den Punkt P_0, indem man in (32) für α eine beliebige Funktion $\alpha = \alpha(a)$ eines neuen Parameters[3]) a einführt, welche den Wert $\alpha = \alpha_0$ für einen bestimmten Wert $a = a_0$ annimmt, in der Umgebung dieses Wertes von der Klasse C' ist und überdies der Bedingung $\alpha'(a_0) \neq 0$ genügt.

Setzt man dann

$$\mathring{\varphi}(x, \alpha(a)) \equiv \varphi(x, a),$$

so stellt die Gleichung

$$y = \varphi(x, a) \tag{32a}$$

[1]) Vgl. Erdmann, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXII (1877), p. 325.

[2]) Die Gleichung (34) folgt noch einfacher daraus, daß die Funktion $\mathring{\varphi}_\alpha(x, \alpha_0)$ der Jacobi'schen Differentialgleichung genügt und für $x = x_0$ verschwindet.

[3]) Hierzu eignet sich z. B. aus geometrischen Gründen das Gefälle der betreffenden Extremale im Punkt P_0:

$$a = g'(x_0, \alpha, \beta).$$

in allgemeinster Weise die Extremalenschar durch den Punkt P_0 dar, die Funktion $\varphi(x, a)$ hat dieselben Stetigkeitseigenschaften wie $\mathring{\varphi}(x, \alpha)$ und es ist

$$\Delta(x, x_0) = C\varphi_a(x, a_0). \tag{34a}$$

Wenden wir die vorangehenden Resultate insbesondere auf den Fall an, wo der Punkt P_0 mit dem Endpunkt P_1 des Bogens $\mathfrak{E}_0$ zusammenfällt, so erhalten wir den Satz:

Ist

$$y = \varphi(x, a) \tag{32a}$$

die Schar von Extremalen durch den Punkt P_1, so kann der zu x_1 konjugierte Wert x_1' auch definiert werden als die zunächst auf x_1 folgende Wurzel der Gleichung

$$\varphi_a(x, a_0) = 0.$$

Neben den beiden Gleichungen

$$\varphi_a(x_1, a_0) = 0, \qquad \varphi_a(x_1', a_0) = 0 \tag{35}$$

folgen aus den bekannten Eigenschaften von $\Delta(x, x_1)$ noch die Ungleichungen[1])

$$\varphi_{ax}(x_1, a_0) \neq 0, \qquad \varphi_{ax}(x_1', a_0) \neq 0. \tag{36}$$

b) **Die Enveloppe der Extremalenschar durch den Punkt P_1:**

Aus dem letzten Satz ergibt sich unmittelbar die im Eingang dieses Paragraphen erwähnte geometrische Interpretation der konjugierten Punkte. Denn die Koordinaten x_1', y_1' des zu P_1 konjugierten Punktes P_1' genügen den beiden Gleichungen

$$\Phi(x_1', y_1', a_0) \equiv \varphi(x_1', a_0) - y_1' = 0$$
$$\Phi_a(x_1', y_1', a_0) \equiv \varphi_a(x_1', a_0) = 0,$$

und außerdem ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y \\ \Phi_{ax} & \Phi_{ay} \end{vmatrix}$$

für $x = x_1'$, $y = y_1'$, $a = a_0$ von Null verschieden, da ihr Wert gleich $\varphi_{ax}(x_1', a_0)$ ist. Hieraus erhalten wir nach der Theorie der Enve-

---

[1]) Vgl. § 11, a), Zusatz 1.

loppen[1]) folgende geometrische Interpretation: Man betrachte neben der Extremale

$$\mathfrak{E}_0: \qquad y = \varphi(x, a_0)$$

eine benachbarte Extremale der durch den Punkt P_1 gehenden Schar:

$$\mathfrak{E}: \qquad y = \varphi(x, a_0 + k).$$

Wird dann $|k|$ hinreichend klein gewählt, so schneidet[2]) die Kurve $\mathfrak{E}$ die Kurve $\mathfrak{E}_0$ in einem und nur einem Punkt P in der Nähe von P_1'; und läßt man k gegen Null konvergieren, so nähert sich der Schnittpunkt P dem konjugierten Punkt P_1' als Grenzlage. Nach der Definition der Enveloppe haben wir also den Satz:

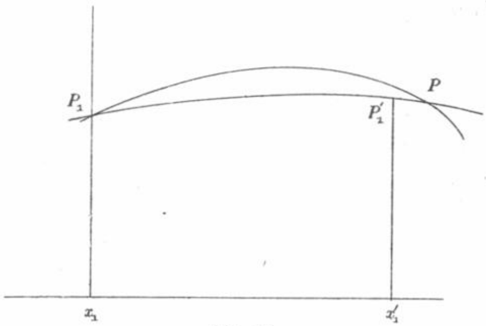

Fig. 10.

Der zum Punkt P_1 konjugierte Punkt P_1' ist derjenige Punkt, in welchem die Extremale $\mathfrak{E}_0$ zum ersten Mal (von P_1 aus gerechnet) die Enveloppe der Extremalenschar durch den Punkt P_1 berührt.

Beispiel VI (Siehe pp. 32, 71): $f = G(y')$.

Hier ist:

$$g(x, \alpha, \beta) = \alpha x + \beta,$$

also

$$r_1 = x, \qquad r_2 = 1,$$

$$\Delta(x, x_1) = x - x_1.$$

Es existiert also *kein konjugierter Punkt,* wie auch sofort aus der geometrischen Deutung der konjugierten Punkte folgt; denn die Schar von Extremalen durch den Punkt P_1 ist hier das Geradenbüschel durch P_1.

Beispiel I (Siehe pp. 1, 33, 72): $f = y\sqrt{1 + y'^2}$.

Hier ist

$$g(x, \alpha, \beta) = \alpha \operatorname{Ch} \frac{x - \beta}{\alpha};$$

---

[1]) Vgl. *Encyclopädie,* III D, p. 47. Der Beweis setzt die Stetigkeit von Φ_x, Φ_y, Φ_a, Φ_{ax}, Φ_{ay}, Φ_{aa} in der Nähe des Punktes $x = x_1'$, $y = y_1'$, $a = a_0$ voraus. Diese Bedingungen sind für die Schar (32a) erfüllt, wofern man die weitere Voraussetzung macht, daß auch φ_{aa} existiert und stetig ist.

[2]) Vgl. die eingehendere Diskussion derselben Frage in Parameterdarstellung, in § ~~30~~, c).

daraus erhält man für r_1 und r_2 die beiden auf p. 72 mit u_1 und u_2 bezeichneten Funktionen und hieraus, in Übereinstimmung mit dem schon dort angegebenen Resultat,

$$\Delta(x, x_1) = \operatorname{Sh} v \operatorname{Ch} v_1 - \operatorname{Sh} v_1 \operatorname{Ch} v + (v - v_1) \operatorname{Sh} v \operatorname{Sh} v_1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$v = \frac{x - \beta_0}{\alpha_0}, \qquad v_1 = \frac{x_1 - \beta_0}{\alpha_0}.$$

Daraus ergibt sich (wenn $v_1 \neq 0$) für die Bestimmung von x_1' die transzendente Gleichung

$$\operatorname{Coth} v - v = \operatorname{Coth} v_1 - v_1. \tag{37}$$

Da die Funktion[1] $\operatorname{Coth} v - v$ von $+\infty$ bis $-\infty$ abnimmt, während v von $-\infty$ bis 0 wächst, und dann wieder von $+\infty$ bis $-\infty$ abnimmt, während v von 0 bis $+\infty$ wächst, so hat die Gleichung (37) außer der trivialen Lösung $v = v_1$ noch eine andere Lösung v_1', und v_1 und v_1' haben entgegengesetztes Zeichen.

Wenn daher $v_1 > 0$, d. h. *wenn der Punkt P_1 auf dem aufsteigenden Ast der Kettenlinie liegt, so existiert kein zu P_1 konjugierter Punkt*:

$\Delta(x, x_1) \neq 0$ für jedes $x > x_1$. Dasselbe Resultat gilt für $v_1 = 0$.

Wenn dagegen $v_1 < 0$, d. h. *wenn P_1 auf dem absteigenden Ast der Kettenlinie liegt, so existiert stets ein zu P_1 konjugierter Punkt P_1'*, und zwar liegt derselbe auf dem aufsteigenden Ast. Der Punkt P_1' kann geometrisch durch folgende von Lindelöf[2]) entdeckte Eigenschaft bestimmt werden: *Die Tangenten an die Kettenlinie in den beiden Punkten P_1 und P_1' schneiden sich auf der Direktrix der Kettenlinie, d. h. der x-Achse.* Denn die Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Tangenten mit der x-Achse sind:

$$X = x_1 - \alpha_0 \operatorname{Coth} \frac{x_1 - \beta_0}{\alpha_0}$$

und

$$X' = x_1' - \alpha_0 \operatorname{Coth} \frac{x_1' - \beta_0}{\alpha_0},$$

und es ist $X' - X = 0$ wegen (37).

Wir bemerken noch, daß die Lindelöf'sche Konstruktion ganz allgemein für diejenigen Probleme der Variationsrechnung gilt, für welche das allgemeine Integral der Euler'schen Differentialgleichung die Form hat:

$$y = \alpha F\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

Wir knüpfen hieran noch einige Bemerkungen über die *Enveloppe der Schar von Kettenlinien durch den Punkt P_1*.

---

[1]) Der Leser möge sich die diese Funktion darstellende Kurve aufzeichnen.

[2]) Lindelöf-Moigno, loc. cit., p. 209, und Lindelöf, Mathematische Annalen, Bd. II (1870), p. 160.

Vom Punkt P_1 aus läßt sich nach § 24, c) nach jeder Richtung (außer parallel der y-Achse) eine Kettenlinie mit der x-Achse als Direktrix ziehen. Bestimmt man auf jeder Kettenlinie dieser Schar den zu P_1 konjugierten Punkt P_1',

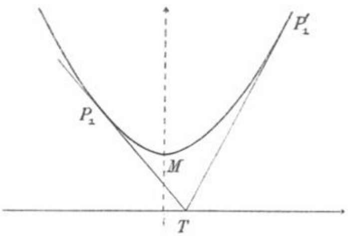

Fig. 11.

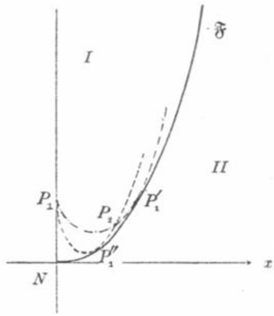

Fig. 12.

so ist der geometrische Ort der Punkte P_1' die Enveloppe $\mathfrak{F}$ der Schar. Nach (37) erhält man die Enveloppe in Parameterdarstellung, wenn man u_1 aus den Gleichungen

$$x = x_1 + y_1 \frac{(u - u_1)}{\operatorname{Ch} u_1}, \qquad y = y_1 \frac{\operatorname{Ch} u}{\operatorname{Ch} u_1},$$

$$\operatorname{Coth} u - u = \operatorname{Coth} u_1 - u_1$$

eliminiert.

Mac Neish [1]) hat diese Enveloppe näher untersucht. Sie hat etwa die Gestalt einer Parabel mit der positiven Hälfte der Geraden $x = x_1$ als Achse und dem Fußpunkt N der Senkrechten von P_1 auf die x-Achse als Scheitel.

Hiermit hängt nun die Frage der *Konstantenbestimmung* aufs engste zusammen. Das Resultat ist folgendes [2]): Durch die Enveloppe $\mathfrak{F}$ wird der von der positiven x-Achse und der positiven Hälfte der Geraden $x = x_1$ begrenzte Quadrant in zwei Teile I und II zerlegt (Fig. 12).

1. Nach jedem Punkt P_2 im Innern von I lassen sich von P_1 aus *zwei Kettenlinien* mit der x-Achse als Direktrix ziehen; die eine enthält den zu P_1 konjugierten Punkt nicht, die andere enthält den konjugierten Punkt zwischen P_1 und P_2. Nur die erstere kann also ein Minimum liefern und tut es auch in der Tat (vgl. § 19).

---

[1]) Annals of Mathematics (2), Bd. VII (1905), p. 65.

[2]) Vgl. Goldschmidt, *Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae*, Göttingen, 1831; H. A. Schwarz, *Berliner Vorlesungen,* mitgeteilt von Hancock, *Lectures on the Calculus of Variations,* Chap. III, und Mac Neish, loc. cit.

2. Nach jedem Punkt P_2 der Kurve $\mathfrak{F}$ läßt sich von P_1 aus *eine Kettenlinie* mit der x-Achse als Direktrix ziehen; auf derselben ist der Punkt P_2 zugleich der zu P_1 konjugierte Punkt. Diese Kettenlinie liefert kein Minimum (vgl. § 43).

3. Liegt P_2 im Innern des Bereiches II, so läßt sich von P_1 aus *keine Kettenlinie* mit der x-Achse als Direktrix nach P_2 ziehen.[1]

§ 14. Notwendigkeit der Jacobi'schen Bedingung.

Wir haben bereits hervorgehoben, daß die beiden in § 12, a) bewiesenen Sätze Jacobi's, obgleich sie uns wichtige Aufschlüsse über das Vorzeichen der zweiten Variation geben, dennoch weder eine notwendige noch eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Extremums enthalten.

Trotzdem kann man wenigstens eine notwendige Bedingung aus dem ersten der beiden Sätze durch eine leichte Modifikation der Jacobi'schen Schlußweise ableiten. Es läßt sich nämlich zeigen: Wenn $x_1' < x_2$, so kann man $\delta^2 J$ nicht nur gleich Null, sondern sogar negativ machen.

Dies ist zuerst von Weierstrass[2]) und Erdmann[3]) bewiesen worden.

---

[1]) Hierzu die *Übungsaufgaben* Nr. 2—12, 35—40 am Ende von Kap. III.

[2]) Weierstrass, *(Vorlesungen)* schreibt die zweite Variation in der Form

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[(P+k)\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2 \right] dx - k\int_{x_1}^{x_2} \eta^2 dx \right\},$$

wo k eine kleine positive Konstante ist, und wendet auf das erste Integral die Jacobi'sche Transformation an (§ 10, b)):

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \eta\, \overline{\Psi}(\eta)\, dx - k\int_{x_1}^{x_2} \eta^2 dx \right\},$$

wo

$$\overline{\Psi}(\eta) \equiv ((P+k) - Q')\,\eta - \frac{d}{dx}(R\eta').$$

Dann zeigt er auf Grund allgemeiner Sätze über Differentialgleichungen, welche einen Parameter enthalten (vgl. unten § 24, e) und Poincaré, *Mécanique céleste* (Paris 1892), Bd. I, p. 58, und Picard, *Traité*, Bd. III, p. 157), daß man für hinreichend kleine Werte von k eine Funktion η der Klasse D'' konstruieren kann, welche der Differentialgleichung $\overline{\Psi}(\eta) = 0$ genügt und in x_1 und x_2 verschwindet. Für eine solche Funktion η ist aber offenbar $\delta^2 J$ negativ.

[3]) Schlömilch's Zeitschrift, Bd. XXIII (1878), p. 367.

Andere Beweise sind später von SCHEEFFER[1]) und SCHWARZ[2]) gegeben worden.

a) **Der Erdmann'sche Beweis:**

Wir nehmen also an, es sei

$$x_1' < x_2. \tag{38}$$

Alsdann können wir eine Größe x_3' so wählen, daß

$$x_1' < x_3' < x_2$$

und gleichzeitig

$$\Delta(x_3', x_1) \neq 0.$$

Wir bezeichnen dann

$$u = \Delta(x, x_1), \qquad v = \pm \Delta(x, x_3'),$$

wobei wir uns die Wahl des Vorzeichens vorbehalten. Die Funktionen u und v sind zwei linear unabhängige Integrale der Jacobi'schen Differentialgleichung (10); daher gilt für sie der Abel'sche Satz (19), welcher für die spezielle Differentialgleichung (10) die Form annimmt

$$R(uv' - u'v) = K, \tag{39}$$

wo K eine von Null verschiedene Konstante ist.

Jetzt wählen wir das Vorzeichen von v so, daß K positiv wird. Dies ist stets möglich; denn wenn man v durch $-v$ ersetzt, so geht K in $-K$ über.

Da ferner auch u und $u - v$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung (10) bilden, so folgt nach dem Sturm'schen Satz, daß $u - v$ eine und nur eine Nullstelle zwischen x_1 und x_1' besitzt; wir bezeichnen dieselbe mit c; es ist dann also

$$u(c) = v(c).$$

---

[1]) Mathematische Annalen, Bd. XXV (1885), p. 548; der Scheeffer'sche Beweis ist nur unwesentlich von dem Erdmann'schen verschieden.

[2]) In seinen *Vorlesungen*, 1898—1899; vgl. SOMMERFELD, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. VIII (1900), p. 189, und HANCOCK, *Lectures on the Calculus of Variations*, Nr. 133. Es ist zu beachten, daß bei allen diesen Beweisen die Annahme $x_1' < x_2$ (mit Ausschluß des Gleichheitszeichens!) wesentlich ist; für den Fall $x_1' = x_2$, soweit er nicht durch Erdmann's Formel (20) für $\delta^3 J$ erledigt wird, vgl. KNESER, Mathematische Annalen, Bd. L (1897), p. 50, und OSGOOD, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. II (1901), p. 166. Wir werden diesen Fall später in Parameterdarstellung ausführlich behandeln (vgl. § 43).

Jetzt wählen wir die Funktion η folgendermaßen:

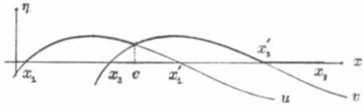

Fig. 13.

$$\eta = \begin{cases} u & \text{in } [x_1 c] \\ v & \text{in } [c x_3'] \\ 0 & \text{in } [x_3' x_2]. \end{cases}$$

Die so definierte Funktion η ist von der Klasse D'' in $[x_1 x_2]$. Denn sie ist selbst stetig wegen $u(c) = v(c)$ und $v(x_3') = 0$, während ihre Ableitungen in c und x_3' Unstetigkeiten der in § 10, c) charakterisierten Art besitzen. Wir dürfen also die Formel (13) für die zweite Variation anwenden und erhalten, da $\Psi(\eta) = 0$ in jedem der drei Teilintervalle,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \eta(c) R(c) [\eta'(c-0) - \eta'(c+0)].$$

Da aber

$$\eta(c) = u(c) = v(c),$$

und

$$\eta'(c-0) = u'(c), \qquad \eta'(c+0) = v'(c),$$

so können wir dies schreiben

$$\delta^2 J = -\varepsilon^2 R(uv' - u'v)\Big|^{c} = -\varepsilon^2 K, \tag{40}$$

wobei wir von dem allgemeinen Substitutionszeichen

$$\Phi(x)\Big|^{c} = \Phi(c) \tag{41}$$

Gebrauch machen. Da $K > 0$, so ist hiermit bewiesen, daß man in der Tat die zweite Variation, und daher auch die vollständige Variation ΔJ negativ machen kann.

b) **Der Schwarz'sche Beweis:**

In § 10, b) und § 12, a) haben wir nach Jacobi's Vorgang eine Funktion η aufgestellt, für welche $\delta^2 J = 0$; Schwarz konstruiert nun auf folgende Weise eine von jener Funktion nur unendlich wenig abweichende Funktion, für welche $\delta^2 J < 0$. Er wählt:

$$\eta = \begin{cases} u + ks & \text{in } [x_1 x_1'] \\ \phantom{u+{}} ks & \text{in } [x_1' x_2], \end{cases}$$

wo wieder $u = \Delta(x, x_1)$, während s irgend eine Funktion der Klasse C'' bedeutet, welche in x_1 und x_2 verschwindet, dagegen in x_1' von Null verschieden ist; k endlich bedeutet eine kleine Konstante.

Die so definierte Funktion η ist von der Klasse D'' in $[x_1 x_2]$; sie ist stetig, da $u(x_1') = 0$, und ihre Ableitungen haben als einzige Unstetigkeitsstelle den Punkt $x = x_1'$.

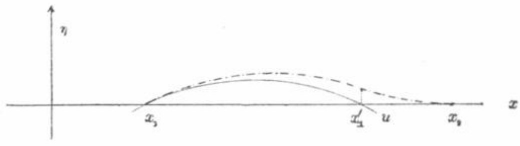

Fig. 14.

Wir dürfen daher zur Berechnung von $\delta^2 J$ wieder die Formel (13) anwenden. Da

$$\eta(x_1') = ks(x_1'),$$

$$\eta'(x_1' - 0) = u'(x_1') + ks'(x_1'),$$

$$\eta'(x_1' + 0) = ks'(x_1'),$$

so erhalten wir

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \Big\{ kR(x_1')\, u'(x_1')\, s(x_1') + \int_{x_1}^{x_1'} (u + ks)\, \Psi(u + ks)\, dx + \\ + \int_{x_1'}^{x_2} ks\, \Psi(ks)\, dx \Big\} \cdot$$

Beachtet man nun, daß

$$\Psi(u + ks) = \Psi(u) + \Psi(ks) = \Psi(u) + k\Psi(s),$$

ferner daß

$$\Psi(u) = 0,$$

und daher nach (14)

$$u\Psi(s) = -\frac{d}{dx} R(us' - u's),$$

und endlich daß

$$u(x_1) = 0, \qquad u(x_1') = 0, \qquad s(x_1) = 0,$$

so reduziert sich der Ausdruck für $\delta^2 J$ auf

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \Big\{ 2kR(x_1')\, u'(x_1')\, s(x_1') + k^2 \int_{x_1}^{x_2} s\Psi(s)\, dx \Big\} \cdot \tag{42}$$

Nun ist nach Voraussetzung $R(x_1') \neq 0$; ferner nach § 11, a) $u'(x_1') \neq 0$, weil $u(x_1') = 0$; und endlich $s(x_1') \neq 0$ nach der Bildung der Funktion s. Also ist der Koeffizient von k von Null verschieden, und daher können wir durch passende Wahl von k die zweite Variation in der Tat negativ machen.

c) **Ein Lemma über Variationen der Klasse D':**

Wir haben zwar im Vorangehenden gezeigt, daß ΔJ negativ gemacht werden kann; damit ist aber noch nicht bewiesen, daß kein

Minimum eintreten kann. Denn die spezielle Variation, welche wir dazu benutzt haben, gehört gar nicht zu den zulässigen Variationen, da ja die Ableitung von η Unstetigkeiten im Intervall $[x_1 x_2]$ besitzt. Der Beweis wird erst vollständig durch den folgenden Hilfssatz[1]):

Kann man ΔJ negativ machen mittels einer Variation der Klasse D', so ist dies stets auch möglich mittels einer Variation der Klasse C'.

Man beweist denselben leicht mittels eines Prozesses, den man kurz als „*Abrunden der Ecken*" beschreiben kann. Es sei nämlich

$$\overline{\mathfrak{C}}: \qquad y = \overline{y}(x), \qquad x_1 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_2$$

eine die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindende, ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ gelegene Kurve der Klasse D', für welche

$$\Delta J = J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0} < 0;$$

ferner sei $C(a, b)$ eine der Ecken der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$, und p_1, p_2 die beiden Werte des Gefälles der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ in der Ecke C. Sodann wählen wir eine positive Größe $L > |p_1|, |p_2|$, nehmen auf $\overline{\mathfrak{C}}$ zwei der Ecke links und rechts benachbarte Punkte Q_1 und Q_2 mit den Abszissen $a - h$ und $a + h$, und konstruieren eine Kurve $\mathfrak{C}$ der Klasse C', welche durch Q_1 und Q_2 geht, die Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ in Q_1 und Q_2 berührt, und deren Gefälle dem absoluten Werte nach beständig kleiner als L ist, was stets möglich ist, z. B. indem man die Kurve $\mathfrak{C}$ aus einem Segment einer Geraden und einem Kreisbogen zusammensetzt.

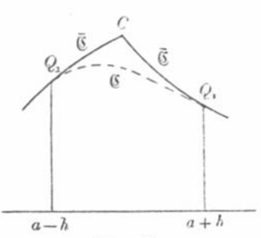

Fig. 15.

Man zeigt dann leicht weiter[2]): Ist σ eine beliebig kleine vorgegebene positive Größe, so kann man stets h so klein wählen, daß

$$|J_{\overline{\mathfrak{C}}}(Q_1 C Q_2) - J_{\mathfrak{C}}(Q_1 Q_2)| < \sigma.$$

Wir „runden jetzt die Ecke C ab", indem wir das gebrochene Stück $Q_1 C Q_2$ durch das Stück $Q_1 Q_2$ der Kurve $\mathfrak{C}$ ersetzen.

Führen wir diese Operation für sämtliche Ecken der Kurve $\overline{\mathfrak{C}}$ durch, so erhalten wir als Resultat eine Kurve $\mathfrak{L}$ der Klasse C',

---

[1]) Vgl. hierzu Goursat, *Cours d'Analyse, II,* p. 606.

[2]) Wählt man $\varrho > 0$ so klein, daß die geschlossene Umgebung

$$[\varrho]_C: \qquad |x - a| \overline{\overline{<}} \varrho, \qquad |y - b| \overline{\overline{<}} \varrho$$

welche ebenfalls die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet und im Bereich $\mathfrak{R}$ liegt, und durch Verkleinerung von h können wir erreichen, daß die Differenz $J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{L}}$ dem absoluten Wert nach unter jede vorgegebene Größe sinkt. Da nun nach Voraussetzung $J_{\overline{\mathfrak{C}}} - J_{\mathfrak{C}_0} < 0$, so können wir durch Verkleinerung von h auch erreichen, daß

$$J_{\mathfrak{L}} - J_{\mathfrak{C}_0} < 0, \qquad \text{Q} \cdot \text{E} \cdot \text{D}.$$

Wir dürfen daher jetzt den Satz aussprechen:

Fundamentalsatz III: Die dritte notwendige Bedingung für ein Minimum (Maximum) besteht darin, daß

$$\Delta(x, x_1) \neq 0 \tag{III}$$

für alle Werte von x in dem offenen Intervall $x_1 < x < x_2$.

Zusatz: Dieselbe Bedingung läßt sich auch schreiben: $x_2 \overline{\overline{<}} x_1'$ oder aber x_1' existiert nicht, d. h. *wenn der Endpunkt P_2 jenseits des zu P_1 konjugierten Punktes P_1' liegt, so findet kein Maximum oder Minimum statt.*

Wir werden diese Bedingung die *Jacobi'sche Bedingung* nennen.

---

des Punktes C ganz im Innern des Bereiches $\mathfrak{R}$ liegt, so hat die Funktion $|f(x, y, y')|$ ein endliches Maximum M im Bereich

$$|x - a| \overline{\overline{<}} \varrho, \qquad |y - b| \overline{\overline{<}} \varrho, \qquad |y'| \overline{\overline{<}} L.$$

Wählt man jetzt $h < \varrho$, so ist das Integral J, genommen entlang irgend einer Kurve: $y = y(x)$ der Klasse D', welche ganz in $[\varrho]_C$ liegt und der Bedingung $|y'(x)| < L$ genügt, vom Punkt $a - h$ bis zum Punkt $a + h$, dem absoluten Wert nach kleiner als $2hM$, also

$$|J_{\overline{\mathfrak{C}}}(Q_1 C Q_2) - J_{\mathfrak{C}}(Q_1 Q_2)| < 4hM.$$