universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

# Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

**Duhamel, Jean Marie Constant**

**1853**

urn:nbn:at:at-ubi:2-6620

K. K.
UNIVERSITÄT INNSBRUCK
Physikalisches Institut

# LEHRBUCH

DER

# REINEN MECHANIK.

**PAPIER**
AUS DER MECHANISCHEN PAPIER-FABRIK
DER GEBRÜDER VIEWEG ZU WENDHAUSEN
BEI BRAUNSCHWEIG.

# LEHRBUCH

DER

# REINEN MECHANIK

VON

DUHAMEL,

Mitglied des französischen Instituts (Academie der Wissenschaften).

---

DEUTSCH BEARBEITET

FÜR

UNIVERSITÄTEN, POLYTECHNISCHE UND KRIEGS-SCHULEN,

SOWIE ZUM SELBSTUNTERRICHTE

VON

WILHELM WAGNER.

---

IN ZWEI THEILEN.

---

ZWEITER THEIL.

---

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

---

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1853.

# Inhalt des zweiten Theils.


Seite

Dynamik. 1

Bewegung um ein festes oder bewegtes Centrum. — Beispiele. — Anwendung auf das Weltsystem . . —

Erstes Beispiel. — Ein Punkt beschreibt eine Ellipse durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung beständig durch das Centrum der Ellipse geht. Der Ausdruck dieser Kraft soll gefunden werden . . . . . 4

Umkehrung . . . . . 6

Zweites Beispiel. — Ein Punkt beschreibt einen Kegelschnitt durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung beständig durch einen Brennpunkt des Kegelschnitts geht. Der Ausdruck dieser Kraft soll gefunden werden . . . . . 10

Umkehrung . . . . . 11

Drittes Beispiel. — Die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Würfel der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird . . . 14

Anwendung auf das Weltsystem. — Bewegung der Planeten . . . . 20

Massen der Planeten . . . . . 32

Rechnung für die Bewegung eines Punktes um einen anderen, durch welchen er im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung angezogen wird . . . . . 37

Formel des Lagrange zur Entwicklung gewisser implicit gegebenen Functionen . . . . . 50

Auflösung des Kepler'schen Problems . . . . . 55

Ausdruck des Radius vector durch die Zeit . . . . . 57

Ausdruck der wahren Anomalie durch die Zeit . . . . . 58

Bewegung irgend eines Systems materieller Punkte 62

Princip von d'Alembert . . . . . —

Seite

Was versteht man unter Momentankräften? — Ihr Maass. — Bestimmung der Bewegung, welche sie erzeugen. — Zusammensetzung ihrer Wirkungen . . . . . 67
Anwendung des Princips von d'Alembert auf einige Beispiele . . 71
Bewegung eines biegsamen Fadens . . . . . 75

Allgemeine Gesetze der Bewegung freier Systeme . 82
Bewegung des Schwerpunkts . . . . . —
Gesetz der Flächen . . . . . 86
Unveränderliche Ebene . . . . . 95
Anwendung auf das Weltsystem . . . . . 96
Gleichung der lebendigen Kräfte . . . . . 97
Verlust an lebendiger Kraft in Folge des Stosses . . . . 101
Anwendung auf den geraden Stoss sphärischer Körper . . . . . 104
Anwendung der Gleichung der lebendigen Kräfte auf die Stabilität des Gleichgewichts . . . . . 106
Anwendung derselben Gleichung beim Berechnen der Leistung von Maschinen . . . . . 109
Gesetz der kleinsten Wirkung . . . . . 113

Von den Trägheitsmomenten . . . . . 116

Bewegung eines Körpers um eine feste Axe . . 126

Bewegung eines Körpers um eine Axe durch eine Momentankraft . 132
Stoss gegen die Axe . . . . . 134
Mittelpunkt des Stosses . . . . . 135
Druck auf die Axe während der Bewegung . . . . . 136
Permanente Drehaxen . . . . . 138
Anfangsbewegung eines Körpers um einen festen Punkt durch Momentankräfte . . . . . —
Zweifache Bewegung eines freien Körpers . . . . . 140
Anwendung auf das schwere Ellipsoid . . . . . 142

Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt . . 145
Augenblickliche Drehaxe . . . . . 147
Geschwindigkeit irgend eines Punktes . . . . . 149
Grösse und Richtung der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit . . . . . 150
Componenten der beschleunigenden Kraft . . . . . 153
Gleichungen der Bewegung . . . . . 154
Eigenschaften dieser Bewegung, wenn keine äusseren Kräfte wirken 155
Anwendung des Gesetzes der Flächen . . . . . —
Anwendung des Gesetzes der lebendigen Kräfte . . . . 156
Winkel der augenblicklichen Drehaxe mit der Axe des mittleren Paars . . . . . 157
Lage der augenblicklichen Drehaxe im Centralellipsoid . . —
Die Winkelgeschwindigkeit ist proportional demjenigen Ra-

Seite

dius des Centralellipsoids, um welchen augenblicklich die Drehung stattfindet . . . . . 158
Erste geometrische Darstellung der Bewegung des Körpers . . . . . 159
Poloide . . . . . —
Stabilität der Drehung um eine der drei Hauptdrehaxen . 161
Zweite geometrische Darstellung der Bewegung des Körpers . . . . . 162
Ort der Lagen, welche die feste Axe des mittleren Paars nach einander im Körper hat . . . . . —
Verschiedene Formeln . . . . . 163
Rechnung für den Fall, wo keine äussere Kraft wirkt . . . . . 164

## Hydrostatik. 172

Allgemeine Gleichungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten . . 175
Permanenter Zustand einer flüssigen Masse, deren Molekel sich gegenseitig anziehen und einer gleichförmigen Rotationsbewegung unterworfen sind . . . . . 183
Gleichgewicht schwerer Flüssigkeiten . . . . . 187
Druck auf die Wände . . . . . 189
Gleichgewicht schwimmender Körper . . . . . 194
Stabilität ihres Gleichgewichts . . . . . 199
Oscillationen schwimmender Körper . . . . . 204
Anwendung auf das Ellipsoid . . . . . 211
Gleichgewicht eines Gemenges schwerer Gase . . . . . 214
Höhenmessung durch das Barometer . . . . . 215

## Hydrodynamik. 221

Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten . . . . 222
Bedingungen für die Oberfläche . . . . . 226
Reduction der allgemeinen Gleichungen in einem ausgedehnten Falle . . . . . 227
Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit bei parallelen Schichten . . 232
Permanente Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit . . . . . 237
Ausfluss einer elastischen Flüssigkeit . . . . . 239
Bemerkungen über den Widerstand der Flüssigkeiten . . . . . 241

## Kleine Bewegungen der elastischen Flüssigkeiten 244

Die Wirkungen legen sich über einander . . . . . 247
Bewegung eines Gases in einem unendlichen Cylinder . . . . . 248
Bewegung, wenn der Cylinder nach einer Richtung begrenzt ist . . 253
Bewegung, wenn der Cylinder nach beiden Richtungen begrenzt ist . 259
Auflösung dieser Aufgaben mittelst trigonometrischer Reihen . . . 264
Bewegung eines nach allen Seiten unendlichen Gases . . . . . 273

Seite

Dynamik. 277

Gleichgewicht und kleine Bewegungen eines elastischen Fadens . . —
Längenschwingungen der Stäbe . . . . . 282
Kleine Bewegungen eines beliebigen Systems Punkte aus einer stabilen Gleichgewichtslage . . . . . —
Zusammensetzung der Bewegungen . . . . . 286
Anwendung auf das Kegelpendel . . . . . 287
Einführung neuer Kräfte . . . . . 290
Uebereinanderlagerung der Wirkungen . . . . . 293
Integration der Gleichungen . . . . . 294
Zerlegung der Bewegung in einfache Schwingungen . . . 295

# Bewegung
# um ein festes oder bewegtes Centrum. — Beispiele. — Anwendung auf das Weltsystem.

---

1. Wir wollen zuerst einen materiellen Punkt betrachten, welcher durch eine Kraft angegriffen wird, deren Richtung stets durch einen festen Punkt geht und deren Grösse allein vom Abstand von diesem abhängt. Es ist bekannt, dass die Bewegung in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit und den festen Punkt gelegten Ebene stattfindet. Zum Ursprung rechtwinkliger Coordinaten $x, y$ in dieser Ebene werde der feste Punkt genommen; $r$ bezeichne den Leitstrahl aus dem Ursprung nach einem beliebigen Punkt, $\theta$ seinen Winkel mit der Axe der positiven $x$ und $\varphi$ die Intensität der beschleunigenden Kraft. Die Cosinus der von ihrer Richtung mit den Axen gebildeten Winkel sind bezüglich $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}$, während die Kraft anzieht; sowie $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$, während sie abstösst. Im ersten Fall werden die Componenten $-\varphi\frac{x}{r}, -\varphi\frac{y}{r}$; im zweiten $\varphi\frac{x}{r}, \varphi\frac{y}{r}$. Unsere Formeln sollen sich auf den ersten Fall beziehen; man braucht daher nur $\varphi$ negativ zu nehmen, wenn man auf den zweiten übergehen will.

Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des Punktes sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}.$$

Das Princip der Flächen liefert

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c dt,$$

wo $c$ eine Constante bezeichnet, welche sich leicht durch den Anfangszustand bestimmen lässt.

In der That, die Componenten der Geschwindigkeit nach dem Radius vector und der darauf Senkrechten sind $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{r d\theta}{dt}$. Wenn nun $v_0$ die Grösse der Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, $\alpha$ aber den Winkel, welchen ihre Richtung mit der aus dem anfänglichen Ort des Punktes gegen den Pol geführten bildet, so ist $v_0 \sin\alpha$ Anfangswerth der Componente $\frac{r d\theta}{dt}$. Dieser gibt, wenn man ihn zugleich mit $r_0$ für $r$ in $r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$ setzt:

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha.$$

Das Princip der lebendigen Kräfte führt zu der Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int \varphi\, dr = v^2,$$

wo das unbestimmte Integral eine neue Constante einschliesst, die aus den Anfangswerthen von $v$ und $r$ zu bestimmen ist; so dass

$$(2) \qquad v^2 = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr$$

wird.

Indem man $dr^2 + r^2 d\theta^2$ statt $ds^2$ schreibt, geht die vorletzte Gleichung über in

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -2\int \varphi\, dr.$$

Mit Hülfe von (1) schaffen wir $dt$ hieraus weg und erhalten dadurch folgende Differentialgleichung zwischen $r$ und $\theta$, welche der Trajectorie angehört:

$$(3) \quad \int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\frac{dr^2}{d\theta^2}}{r^4}\right) = -\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

2. Wird die Kraft $\varphi$ als Function von $r$ gegeben, so bestimmt sich durch (3) die Bahnlinie.

Ist letztere dagegen bekannt, so hat man (3) nach $r$ zu differenziiren, wenn man $\varphi$ erhalten will. Die allgemein ausgeführte Differentiation gibt:

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right), \tag{4}$$

wo das zweite Glied sich aus der Gleichung der Trajectorie bilden lässt. Doch wird es zuweilen bequemer sein, die Formel (3) anzuwenden und die Differentiation erst am Ende zu verrichten.

Auf alle Fälle liefert die Gleichung der Trajectorie, wenn dieselbe bekannt ist, eine Coordinate als Function der anderen; und man erhält dann $t$ aus (1) als Function von $r$ oder von $\theta$, sowie umgekehrt. Damit ist aber die Aufgabe vollständig gelöst, weil die Coordinaten des Beweglichen durch die Zeit ausgedrückt sind.

Die Gleichung (2) nimmt eine bemerkenswerthe Form an, wenn wir die Senkrechte $p$ vom Ursprung auf die Tangente der Bahncurve einführen. Die ähnlichen Dreiecke ergeben:

$$\frac{ds}{r\,d\theta} = \frac{r}{p} \text{ oder } ds = \frac{r^2 d\theta}{p},$$

woraus mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{c}{p}$$

folgt; welche Gleichung lehrt, dass bei jeder Bewegung durch eine nach einem festen Punkt gerichtete Kraft die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn sich umgekehrt verhält wie der Abstand des festen Punktes von der Tangente.

Setzt man für $v$ den Werth $\frac{c}{p}$, so geht (2) über in:

$$\frac{c^2}{p^2} = v_0{}^2 - 2\int_{r_0}^{r} \varphi\, dr. \tag{5}$$

Diese Gleichung drückt den für die Trajectorie zwischen $r$ und $p$ stattfindenden Zusammenhang aus.

3. Denken wir uns jetzt den Mittelpunkt der Wirkung bewegt. Im ersten Theile ist gezeigt worden, dass alle Eigenschaften der absoluten Bewegung auch für die relative gelten, sofern man die relativen Grössen den absoluten substituirt. Demnach bleiben die vorhergehenden Formeln anwendbar, wenn wir $x$ und $y$ als Coordinaten des materiellen Punktes in Bezug auf Axen betrachten, welche parallel zu sich selbst bewegt werden und dabei beständig durch das bewegte Centrum gehen; $r$ als Länge der Geraden, die in jedem Augenblick dieses Centrum mit dem materiellen Punkt verbindet; $\theta$ als ihren Winkel mit der Axe der $x$; endlich $\varphi$ als die relative beschleunigende Kraft an dem materiellen Punkt, d. h. als die Resultante aus der auf ihn wirkenden absoluten Kraft und aus einer solchen, welche gleich, parallel und entgegengesetzt ist mit derjenigen, die das bewegte Centrum angreift.

Wir wollen nun einige Beispiele zu den aufgefundenen Formeln geben.

4. ***Erstes Beispiel.*** — Ein Punkt beschreibt eine Ellipse durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung durch das Centrum dieser Curve geht. Der Ausdruck der Kraft soll gefunden werden.

Man kann zunächst die Verträglichkeit der Bedingungen der Aufgabe leicht einsehen. Denn man kann immer einen materiellen Punkt zwingen sich auf einer beliebigen Curve auf solche Weise zu bewegen, dass diejenigen Flächenräume der Zeit proportional sind, welche durch den Leitstrahl beschrieben werden, der aus irgend einem festen Punkt nach dem bewegten geführt wird. Dem Beweis in Nro. 197 des ersten Theils zufolge dürfen wir daher annehmen, dass ein beweglicher Punkt eine beliebige ebene Curve durch die Wirkung einer Kraft beschreiben könne, welche beständig nach irgend einem festen Punkt in der Curvenebene gerichtet ist.

Die grosse Axe der Ellipse soll $2a$ betragen; ihre kleine $2b$. Nehmen wir das Centrum zum Pol und zählen die Winkel von der grossen Axe an. Die Gleichung der Curve wird dadurch

$$(a) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{a^2 \sin\theta^2 + b^2 \cos\theta^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin\theta^2,$$

woraus man durch Ableiten erhält:

$$(b) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\,\sin\theta\,\cos\theta.$$

Wenn wir das zweite Glied vermöge $(a)$ in $r$ ausdrücken, so kann $\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}$ aus $(b)$ als Function von $r$ gefunden werden; und indem wir den dafür erhaltenen Werth in die allgemeine Formel (3) einsetzen, bekommen wir $\int\varphi\,dr$, folglich auch $\varphi$ als Function von $r$.

Nun liefert $(a)$:

$$\sin\theta^2 = \frac{b^2(a^2-r^2)}{(a^2-b^2)r^2} \text{ und } \cos\theta^2 = \frac{a^2(r^2-b^2)}{(a^2-b^2)r^2};$$

$(b)$ aber giebt, wenn man diese Werthe substituirt:

$$\left(\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2-r^2)\,(r^2-b^2)}{a^2b^2r^2}.$$

Durch Einsetzen des letzten Ausdrucks in (3) findet sich:

$$\int\varphi\,dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}\right),$$

und hieraus durch Ableiten nach $r$:

$$\varphi = \frac{c^2r}{a^2b^2}.$$

Die vom Centrum ausgeübte Kraft wirkt demnach bei der vorliegenden Bewegung der Entfernung proportional und zwar anziehend, da der für $\varphi$ gefundene Werth positiv ist.

Dem Princip der Flächen gemäss braucht der Punkt stets die gleiche Zeit, um die ganze Ellipse zu durchlaufen, von welcher Stelle er auch ausgeht. Bezeichnen wir diese Zeit mit $T$. Da die Constante $c$ das Doppelte des Flächenraumes ausmacht, welcher während der Zeiteinheit vom Radius vector durchstrichen wird, so beträgt der Inhalt der Ellipse

$$\tfrac{1}{2}\,c\,T = \pi\,a\,b;\ \text{daher } T = \frac{2\pi ab}{c}.$$

Durch Einführung der Umlaufszeit erhält die Kraft den Ausdruck

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2}\,r.$$

Die Betrachtung einer Hyperbel würde eine nach dem nämlichen Gesetz abstossend wirkende Kraft ergeben haben.

5. Umkehrung. — Wenn ein Punkt gegen ein festes Centrum durch eine der Entfernung proportionale Kraft hingezogen wird, so beschreibt er eine Ellipse, deren Mittelpunkt das feste Centrum ist.

In der That, denken wir uns eine Ellipse, welche dieses Centrum zum Mittelpunkt hat, durch den anfänglichen Ort des Beweglichen geht und von der Anfangsgeschwindigkeit tangirt wird. Wir fügen, um dieselbe vollständig zu bestimmen, noch die Bedingung bei, dass in der anfänglichen Lage des Punktes die Normalcomponente der vorgelegten Anziehungskraft oder die Centripetalkraft gleich dem Quadrat der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit, getheilt durch den Krümmungsradius, sein soll. Dieser Radius ist dadurch gegeben, und wir haben somit ausreichende Bestimmungsstücke für die Ellipse.

Wenn man nun den Punkt auf irgend eine Weise nöthigt, sich auf dieser Ellipse dergestalt zu bewegen, dass die Flächen, welche durch den vom Mittelpunkt ausgehenden Radius vector beschrieben werden, mit der Zeit in Proportion stehen, so zeigt die in Nro. 4 durchgeführte Untersuchung, dass eine gegen das Centrum gerichtete und der Entfernung von diesem proportionale Kraft auf den Punkt wirken müsse. Wenn wir noch dazu dem Punkt eine mit der gegebenen gleiche und gleichgerichtete Anfangsgeschwindigkeit ertheilen, so kann jene Kraft offenbar keine andere als die vorgelegte sein. Denn sie ist nach dem nämlichen Centrum gerichtet, sie befolgt dasselbe Gesetz und hat den gleichen Anfangswerth, da der Krümmungshalbmesser in der angegebenen Weise festgesetzt wurde*). Die von uns bestimmte Ellipse wird demnach vermöge der vorgelegten Kraft beschrieben. Und folglich hat eine Kraft, welche das Bewegliche gegen ein festes Centrum dem Abstand proportional anzieht, jedesmal die Wirkung, dass das Bewegliche eine Ellipse beschreibt, von der das feste Centrum der Mittelpunkt ist.

---

*) Man denke nur daran, dass ein Dreieck durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt wird.

Diese Bewegung bietet eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dar.

Wir haben in Nro. 4 für die Kraft $\varphi$ den Ausdruck $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ erhalten. Wenn nun $\mu$ ihren Werth in der Einheit der Entfernung bedeutet, so hat man

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2}, \text{ daher } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}};$$

welches zeigt, dass die Umlaufszeit nicht von den Anfangsumständen abhängt, wodurch die besondere Ellipse bestimmt wird. Dieselbe ändert sich vielmehr nur mit der Constante $\mu$, welche die Intensität der Anziehungskraft in der Einheit der Entfernung ausdrückt.

6. Die umgekehrte Aufgabe analytisch behandelt. — Wir wollen jetzt auf dem Wege der Rechnung die Curve finden, welche ein Punkt beschreibt, der durch ein festes Centrum der Entfernung proportional angezogen oder abgestossen wird.

Wir setzen $\varphi = \mu r$; dabei ist $\mu$ positiv im Fall der Anziehung, negativ im Fall der Abstossung. Die Gleichung (3) liefert, wenn $c'$ eine aus dem Anfangszustand zu bestimmende Constante vorstellt:

$$\pm \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = \sqrt{-\frac{\mu r^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} + 2c'}.$$

Setzt man hier $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = z$, so folgt:

$$\pm 2\,d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-\frac{\mu}{c^2} - z^2 + 2c'z}} = \frac{dz}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2} - (c' - z)^2}};$$

woraus man durch Integriren erhält:

$$\pm 2(\theta - \alpha) = arc\ cos \frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}},$$

während $\alpha$ eine durch die Anfangswerthe von $r$ und $\theta$ sich ergebende Constante bezeichnet. Zählt man der Einfachheit wegen die Winkel von der Richtung an, welche den Winkel $\alpha$ mit der ursprünglichen Axe macht, so ist $\theta$ statt $\theta - \alpha$ zu

schreiben. Dadurch geht vorstehende Gleichung, indem wir auf beiden Seiten die Cosinus nehmen, über in:

$$\frac{c' - z}{\sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}} = \cos \cdot 2\theta,$$

woraus:

$$z = c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\,(\cos\theta^2 - \sin\theta^2) = \frac{1}{r^2}.$$

Multiplicirt man mit $r^2$, so kommt:

$$c'\,(x^2 + y^2) - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\,(x^2 - y^2) = 1,$$

oder:

$$\left(c' + \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) y^2 + \left(c' - \sqrt{c'^2 - \frac{\mu}{c^2}}\right) x^2 = 1.$$

Die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ besitzen gleiche Zeichen, wenn $\mu$ positiv ist, und die Trajectorie wird dann eine Ellipse, welche den festen Punkt zum Centrum hat, was wir in Nro. 5 ohne Rechnung gezeigt haben. Wenn dagegen $\mu$ negativ ist d. h. wenn die Kraft abstösst, so erhalten die Coefficienten verschiedene Zeichen, und die Curve wird eine Hyperbel, ebenfalls mit dem festen Punkt als Centrum.

Im letzten Fall ist die Bewegung keine wiederkehrende, sondern das Bewegliche bleibt offenbar auf demselben Ast der Hyperbel.

7. Die Aufgabe, welche wir so eben behandelt haben, bietet einen Umstand dar, den man benutzen kann, um die Coordinatenwerthe $x$ und $y$ unmittelbar als Functionen von $t$ zu erhalten; was die vollständigste Auflösung liefert, weil man dadurch den Ort des Beweglichen in jedem Augenblick kennt, und weil alle anderen Elemente der Bewegung sofort daraus hervorgehen. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Punktes werden für $\varphi = \mu r$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu y.$$

Da die Variablen $x$, $y$ von einander getrennt sind, so können wir jede dieser Gleichungen für sich integriren und auf diese Weise $x$ und $y$ in $t$ ausdrücken. Man findet, wenn $\mu$ zuerst positiv vorausgesetzt wird:

$$x = A \sin \cdot t \sqrt{\mu} + B \cos \cdot t \sqrt{\mu},$$
$$y = A' \sin \cdot t \sqrt{\mu} + B' \cos \cdot t \sqrt{\mu}.$$

Nehmen wir jetzt zur Axe der $x$ die Gerade, welche den Ursprung mit der Anfangslage des Beweglichen verbindet und deren Länge $r_0$ sein mag. Bezeichne $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit sowie $\alpha$ den Winkel, den ihre Richtung mit der aus dem anfänglichen Ort des Punktes nach dem Ursprung geführten bildet. Die Axe der positiven $y$ soll auf derselben Seite der $x$-Axe wie die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit liegen. Für $t = 0$ erhalten wir dann die Bedingungen:

$$y = 0,\ x = r_0,\ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha,\ \frac{dx}{dt} = -v_0 \cos \alpha.$$

Dadurch bestimmen sich die vier Coefficienten $A$, $B$, $A'$, $B'$, so dass

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \cdot t \sqrt{\mu} + r_0 \cos \cdot t \sqrt{\mu},$$
$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin \cdot t \sqrt{\mu}$$

wird. Diese Gleichungen enthalten die vollständige Auflösung des Problems. Sie ergeben für $x$ und $y$ periodische Werthe, und die Dauer der Periode beträgt für beide $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, was wir schon gefunden haben.

Durch Eliminiren von $t$ kommt:

$$(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin \alpha^2.$$

Wenn nun $\mu$ positiv ist, d. h. wenn die Kraft anzieht, so beschreibt der Punkt eine Ellipse, welche das feste Centrum zum Mittelpunkt hat. Die Ellipse geht in einen Kreis über, und die Bewegung wird gleichförmig, sobald

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ und } v_0^2 = \mu r_0^2.$$

Ist aber $\mu$ negativ, d. h. stösst die Kraft ab, so treten Exponentialgrössen an die Stelle der Sinus und Cosinus. Man kann sich indessen der vorhergehenden Rechnung bedienen und die Transformation in den Resultaten verrichten. Die Trajectorie wird durch den Zeichenwechsel von $\mu$ eine Hyperbel

mit demselben Mittelpunkt, und die Werthe für $x$ und $y$ nehmen folgende Gestalt an:

$$x = \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{t\sqrt{\mu}} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{-t\sqrt{\mu}},$$

$$y = \frac{v_0 \sin\alpha}{2\sqrt{\mu}} \left(e^{t\sqrt{\mu}} - e^{-t\sqrt{\mu}}\right),$$

worin $\mu$ den Absolutwerth hat. Diese Ausdrücke können nur mit $t$ zugleich unendlich werden; der Punkt bedarf mithin einer unendlichen Zeit, um den Hyperbelast zu durchlaufen, auf welchem er sich beim Anfang der Bewegung befand.

8. ***Zweites Beispiel.*** — Ein materieller Punkt beschreibt einen Kegelschnitt durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung beständig durch einen Brennpunkt desselben geht. Der Ausdruck dieser Kraft soll gefunden werden.

Von welcher Art der Kegelschnitt auch sein mag, seine Polargleichung lässt sich bekanntlich auf die Form

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\theta}$$

bringen, wo $p$ den halben Parameter, $e$ die Excentricität bezeichnet. Dabei wird ein Brennpunkt zum Pol genommen und die Winkel $\theta$ werden gebildet mit der Richtung der Axe aus dem Brennpunkt nach dem nächsten Scheitel hin. Die Curve ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$e < 1,\ e = 1,\ e > 1.$$

Vorstehende Gleichung giebt:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos\theta}{p},$$

daher

$$\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e \sin\theta}{p}.$$

Wenn man nun wie im ersten Beispiel von der Formel (3) Gebrauch machen will, so hat man zuvor für $\sin\theta$ seinen Werth in $r$ aus der Gleichung der Curve zu entnehmen und dann $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta}$ einzusetzen, wodurch man findet:

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{pr} + \frac{c^2(1-e^2)}{2p^2};$$

folglich:

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Daraus sieht man, dass die Kraft das Bewegliche gegen den Brennpunkt anzieht, da der Werth für $\varphi$ positiv ist; und dass ihre Intensität sich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung ändert.

Im vorliegenden Fall wäre jedoch die Anwendung der Formel (4) einfacher gewesen. In der That, die Gleichung der Curve giebt sofort:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e \cos\theta}{p},$$

und das Einsetzen in (4) liefert:

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

Wir wollen diesen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen, da wir bei der Bewegung der Planeten darauf zurückkommen werden.

9. Umkehrung. — Suchen wir jetzt alle diejenigen Curven auf, welche ein Punkt beschreiben kann, der gegen ein festes Centrum dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird.

Für den Augenblick beschränken wir uns auf eine synthetische Lösung der Aufgabe.

Man denke sich einen Kegelschnitt, von dem das feste Centrum einen Brennpunkt bildet, der ferner durch den anfänglichen Ort des Beweglichen geht und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit auf derselben Seite tangirt, auf welcher das feste Centrum liegt. Zu seiner vollständigen Bestimmung fügen wir noch die Bedingung bei, dass das Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit, wenn man es durch den Krümmungsradius im Ausgangspunkt der Bewegung theilt, der Normalcomponente der Kraft gleich sein soll, welche an dieser Stelle wirkt.

Die letzte Bedingung setzt den Krümmungsradius fest, so dass der Kegelschnitt nun vollständig bestimmt und nur einer ist. Wir werden gleich nachher sehen, wie man mit diesen Bestimmungsstücken ihn construiren und seine Art erkennen kann.

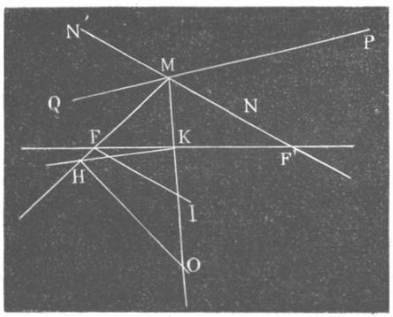
Denken wir uns einen Punkt genöthigt, sich auf dieser bestimmten Curve dergestalt zu bewegen, dass der aus dem festen Centrum nach ihm geführte Leitstrahl der Zeit proportionale Flächen beschreibt. In Gemässheit von Nro. 8 muss dann die auf den neuen Punkt wirkende Kraft nach dem festen Centrum gerichtet, ihre Intensität aber dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sein. Lassen wir nun den neuen Punkt von derselben Stelle wie den vorgelegten und mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit in Grösse und Richtung ausgehen, so wird im Ausgangspunkt der Bewegung die nach der gemeinschaftlichen Normale geschätzte Kraft für beide Punkte denselben Werth haben, weil sie dem Quadrat der gemeinsamen Anfangsgeschwindigkeit durch den nämlichen Krümmungsradius getheilt gleich ist. Folglich wird auch der Anfangswerth der ganzen nach dem festen Centrum gerichteten Kraft in beiden Fällen der gleiche sein. Die Kraft, welche die Bewegung auf dem Kegelschnitt bewirkt, muss demnach mit der vorgelegten zusammenfallen. Da aber der vorgelegte, den gegebenen Anfangsbedingungen unterworfene Punkt durch die auf ihn wirkende Kraft eine ganz bestimmte Bewegung erhält, so kann diese Bewegung sich von derjenigen nicht unterscheiden, welche auf dem Kegelschnitt stattfindet.

Ein Punkt, der gegen ein festes Centrum dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird, bewegt sich also nothwendig auf einem Kegelschnitt, von dem das feste Centrum ein Brennpunkt ist.

Es bleibt uns noch die Bestimmung des Kegelschnittes aus den gegebenen Bedingungen übrig, welche ein Brennpunkt (im Falle der Hyperbel der des betreffenden Zweiges), ein Punkt der Curve und die in demselben gezogene Tangente, sowie der Krümmungsradius zu diesem Punkte sind; welcher Radius mit dem Brennpunkt auf derselben Seite der Tangente liegt.

Den Brennpunkt stelle $F$ (Fig. 1) vor; $M$ den Punkt der Curve, $PQ$ die Tangente, $O$ den Krümmungsmittelpunkt. Fällt man von $O$ eine Senkrechte $OH$ auf $MF$ und von $H$ eine solche auf die Normale, so ist bekannt, dass der Fusspunkt $K$ des letzten Perpendikels der durch den Brennpunkt gehenden Hauptaxe angehört. Wir erhalten daher die Richtung dieser Axe, indem wir $FK$ ziehen; und der zweite Brennpunkt wird durch ihren Durchschnitt mit der Geraden $MN$ gegeben, welche durch $M$ unter dem mit $FMQ$ gleichen Winkel $PMN$ gezogen ist. Wenn der Durchschnitt auf derjenigen Seite von $PQ$ stattfindet, wo $F$ liegt, so wird die Curve eine Ellipse. Sie wird eine Parabel, wenn $MN$ mit $FK$ parallel läuft, und eine Hyperbel, sobald der Durchschnitt auf der anderen Seite stattfindet.

Fig. 1.




Aus den gegebenen Bestimmungsstücken lässt sich leicht beurtheilen, welcher von diesen drei Fällen vorliegt. Wir ziehen durch $F$ eine Parallele mit $MN$, welche die Normale in $I$ schneidet. Ist nun $MK < MI$, so treffen $FK$ und $MN$ in einem Punkt $F'$ zusammen, der auf der nämlichen Seite von $QP$ wie $F$ liegt; die Curve wird folglich eine Ellipse. Hat man $MK = MI$, so läuft $FK$ parallel mit $MN$, und die Curve wird eine Parabel. Hat man endlich $MK > MI$, so schneidet $FK$ die Verlängerung $MN'$, daher die Curve dann eine Hyperbel wird.

Wir müssen deshalb $MK$ und $MI$ durch die Bestimmungsstücke ausdrücken. Das Dreieck $MFI$ ist gleichschenklig, denn $MI$ hälftet den Winkel $FMF'$; man erhält folglich, indem man den bekannten Winkel $FMO$ durch $\varepsilon$ und die bekannte Entfernung $FM$ durch $r_0$ bezeichnet:

$$MI = 2 r_0 \cos \varepsilon.$$

Da der Punkt $K$ auf die oben bezeichnete Weise erhalten wurde, so ist:

$$MK = MO \cos \varepsilon^2.$$

Der Werth von $MO$ aber ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\varphi \cos \varepsilon = \frac{v_0^2}{MO},$$

wenn $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit und $\varphi$ die in $M$ wirkende Kraft bedeutet, welche den Werth $\frac{\mu}{r_0^2}$ hat; so dass

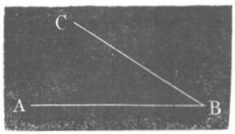
$$MO = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu \cos \varepsilon} \text{ und folglich } MK = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos \varepsilon}{\mu} \text{ wird.}$$

Vergleicht man jetzt die für $MK$ und $MI$ gefundenen Ausdrücke und lässt den ihnen gemeinschaftlichen Factor $r_0 \cos \varepsilon$ weg, so sieht man, dass die Trajectorie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, je nachdem $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ negativ, Null oder positiv ist. Bemerkenswerth ist dabei, dass die Art der Curve nur von dem anfänglichen Abstand des Beweglichen vom Centrum und von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit abhängt, während die Richtung der letzten dafür gleichgültig ist.

Wollte man diese Aufgabe durch Rechnung behandeln, so könnte man von der Gleichung (3) Gebrauch machen und hätte eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen $r$ und $\theta$ zu integriren. Man würde leicht erkennen, dass die dadurch erhaltene Gleichung alle drei Kegelschnitte vorstellen kann, und würde sich zu den nämlichen Unterscheidungsmerkmalen wie die eben gefundenen geführt sehen. Wir werden aber Gelegenheit haben darauf zurückzukommen und dort die Rechnungen ausführen, deren wir hier blos erwähnen.

10. ***Drittes Beispiel.*** — Die Curve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Würfel der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird.

Fig. 2.




$A$ (Fig. 2) bezeichne das feste Centrum; $B$ die Anfangslage des Punktes; $v_0$ die Entfernung $AB$; $\alpha$ den Winkel, welchen die Richtung $BC$ der Anfangsgeschwindigkeit, deren Grösse $v_0$ sei, mit $BA$ macht.

Die Formel (4) liefert für $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \left(\frac{\mu}{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin \alpha^2} - 1\right)\frac{1}{r}.$$

Wir unterscheiden nun, ob $\frac{\mu}{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin \alpha^2} - 1$ negativ, Null oder positiv ist. In allen drei Fällen ergiebt sich die Geschwindigkeit aus der Gleichung:

$$v^2 = \frac{\mu}{r^2} + c',$$

während $c'$ durch die anfänglichen Werthe von $v$ und $r$ bestimmt wird.

1) Es sei zuerst $\frac{\mu}{r_0{}^2 v_0{}^2 \sin \alpha^2} - 1 = 0$, welches der einfachste Fall ist. Man hat jetzt:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = 0, \text{ folglich } \frac{1}{r} = A\theta + B.$$

Um die Constanten $A$ und $B$ zu bestimmen, bemerken wir, dass man im Punkte $B$, durch welchen der Einfachheit wegen die Polaraxe gehen mag, hat:

$$r = r_0, \quad \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\tang \alpha.$$

Die Gleichung $\frac{1}{r} = A\theta + B$ ergiebt für $\theta = 0$:

$$\frac{1}{r} = B, \quad -\frac{\frac{dr}{d\theta}}{r^2} = A.$$

Daraus geht hervor:

$$B = \frac{1}{r_0}, \quad A = \frac{\cotg \alpha}{r_0};$$

und die Gleichung der Trajectorie wird:

$$r = \frac{r_0}{1 + \theta \cotg \alpha}.$$

Diese Curve ist folglich eine hyperbolische Spirale mit dem Punkt $A$ als Pol.

Wenn $\alpha$ ein spitzer Winkel, folglich $\cotg \alpha$ positiv ist, so

rückt das Bewegliche mit wachsendem $\theta$ ohne Ende dem Pol näher.

Ist $\alpha$ ein rechter Winkel, so hat man $cotg\,\alpha = 0$ und $r = r_0$; die Curve wird ein Kreis, und die Bewegung wird gleichförmig.

Wir wollen hier ein- für allemal folgende Bemerkung anknüpfen. Wenn das Bewegliche (wie hier stattfindet) mit einer gegen den Radius vector senkrechten Geschwindigkeit ausgeht, von welcher das Quadrat, durch den Leitstrahl getheilt, der beschleunigenden Kraft gleich ist, die in dem Augenblick wirkt, so muss das Bewegliche bei jedem Anziehungsgesetz nothwendig mit gleichförmiger Bewegung den Kreis durchlaufen, dessen Mittelpunkt im Pol liegt. Denn dieser Kreis würde die Trajectorie vorstellen, wenn man sich die Kraft beständig dem bezeichneten Anfangswerth gleich dächte. Man kann denselben aber auch als durch die Wirkung der vorgelegten Kraft beschrieben betrachten, weil diese nur von der Entfernung abhängt und daher in allen Punkten des Kreises gleiche Intensität behält. Da nun die vorgelegte Kraft unter den gegebenen Anfangsumständen nur eine einzige Bewegung hervorzubringen vermag, so hat dieselbe das Durchlaufen des Kreises zur nothwendigen Folge.

Ist $\alpha$ endlich stumpf, so entfernt sich der Punkt immer weiter vom Pol; und der Leitstrahl wird unendlich für $\theta = -\,tang\,\alpha$, wodurch die Richtung der Asymptote bestimmt wird.

Suchen wir jetzt den Ausdruck der Coordinaten des Beweglichen durch die Zeit.

Die Gleichung $r^2 d\theta = c dt$ giebt, wenn man für $r$ seinen Werth setzt:

$$dt = \frac{r_0{}^2\, d\theta}{c\,(1 + \theta\, cotg\,\alpha)^2};$$

daher:

$$t = -\,\frac{r_0{}^2}{c\, cotg\,\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \theta\, cotg\,\alpha} + c_1.$$

Indem man die Constante $c_1$ vermöge der Bedingung $t = 0$, $\theta = 0$ bestimmt und zugleich $r_0\, v_0\, sin\,\alpha$ statt $c$ schreibt, erhält man:

$$t = \frac{r_0}{v_0\, cos\,\alpha}\left(1 - \frac{1}{1 + \theta\, cotg\,\alpha}\right) = \frac{1}{v_0\, cos\,\alpha}\,(r_0 - r);$$

woraus folgt:

$$r = r_0 - v_0 t \cos\alpha$$

sowie:

$$\theta = \frac{1}{\cot g\,\alpha}\left(\frac{1}{1 - \frac{v_0 t}{r_0}\cos\alpha} - 1\right).$$

Der Werth von $r$ nimmt, sofern $\alpha$ spitz ist, mit wachsendem $t$ ab und wird Null für $t = \frac{r_0}{v_0 \cos\alpha}$; das Bewegliche erreicht mithin den Pol am Ende dieses Zeitintervalls, vom Beginn der Bewegung gerechnet. Der zugehörige Werth von $\theta$ ist unendlich gross; folglich hat der Punkt unterdessen eine unendliche Anzahl von Umläufen um den Pol gemacht.

Um die Lagen zu finden, welche der Punkt vor dem Augenblick inne hatte, der als Anfang der Bewegung genommen wurde, muss man $t$ von Null an bis zum Unendlichen negativ nehmen; $r$ wächst dabei von $r_0$ bis ins Unendliche, $\theta$ aber geht von Null bis $-\tang\alpha$, welcher Werth die Richtung der Asymptote bestimmt.

Wenn der Winkel $\alpha$ stumpf ist, so haben wir gesehen, dass $r$ unendlich wird für $\theta = -\tang\alpha$; dieses trifft mit $t = \infty$ zusammen. Dagegen wird $r$ Null für den Zeitpunkt, welcher um den Absolutwerth von $\frac{r_0}{v_0 \cos\alpha}$ dem als Zeitanfang betrachteten Augenblick voran liegt; $\theta$ ist dann unendlich negativ.

2) Es sei jetzt $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin\alpha^2} - 1 = -n^2$, während $n$ eine reelle Grösse bedeutet.

Die Differentialgleichung der Trajectorie hat zum Integral

$$\frac{1}{r} = A \sin n\theta + B \cos n\theta.$$

Die Constanten $A$ und $B$ bestimmen sich, indem man ausdrückt, dass $r = r_0$ sowie $\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\tang\alpha$ für $\theta = 0$. Wir

erhalten dadurch:

$$\frac{r_0}{r} = \cos n\theta + \frac{\cot g\,\alpha}{n} \sin n\theta = \frac{\sin(n\theta + \varepsilon)}{\sin \varepsilon},$$

wenn $\frac{\cot g\,\alpha}{n} = \cot g\,\varepsilon$ gesetzt wird.

Will man den Ort des Beweglichen haben, welcher dem Pol am nächsten liegt, so muss man $\frac{1}{r}$ zu einem Maximum machen. Man muss also $\sin(n\theta + \varepsilon) = 1$ setzen, welches liefert:

$$r = r_0 \sin \varepsilon \text{ und } n\theta + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

oder:

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon;$$

woraus:

$$\tang n\theta = \cot g\,\varepsilon = \frac{\cot g\,\alpha}{n},$$

wie man es würde gefunden haben, wenn man $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\theta} = 0$ gesetzt hätte.

Lässt man von diesem besonderen Werth an $\theta$ um gleiche Grössen zu- und abnehmen, so erhält $\sin(n\theta + \varepsilon)$ in beiden Fällen gleiche Werthe, weshalb die Curve gegen die Richtung des kürzesten Leitstrahls symmetrisch ist.

Der Werth von $r$ wird unendlich, wenn

$$\sin(n\theta + \varepsilon) = 0 \text{ oder } n\theta + \varepsilon = m\pi,$$

wo $m$ jede ganze Zahl bezeichnet. Man hat alsdann:

$$\tang n\theta = -\tang \varepsilon = -n \tang \alpha.$$

Der kleinste Werth von $\theta$, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, bestimmt die Richtung, gegen die der Leitstrahl hinstrebt, während derselbe unendlich wächst. Er erreicht diese Richtung jedoch erst nach einer unendlichen Zeit, wie man leicht sehen kann, indem man $t$ mit Hülfe der Gleichung

$$r^2 d\theta = c dt$$

in $\theta$ ausdrückt.

3) Zuletzt möge $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha^2} - 1 = n^2$ sein.

Die Integration der Differentialgleichung der Bahncurve liefert:

$$\frac{1}{r} = Ae^{n\theta} + Be^{-n\theta};$$

und die Bestimmung von $A$ und $B$ aus dem Anfangszustand ergiebt:

$$\frac{2r_0}{r} = \left(1 + \frac{cotg\,\alpha}{n}\right) e^{n\theta} + \left(1 - \frac{cotg\,\alpha}{n}\right) e^{-n\theta}.$$

Daraus sehen wir, dass $r$ mit wachsendem $\theta$ sich der Null nähert.

Wenn man zu grösserer Einfachheit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt, so wird

$$r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}.$$

Diese Spirale ist symmetrisch gegen die Polaraxe. Ihre beiden Zweige nähern sich dem Pol, und es lässt sich leicht einsehen, dass das Bewegliche nach einer endlichen Zeit den Pol erreichen wird. In der That, aus

$$r^2 d\theta = c\,dt$$

folgt:

$$c\,dt = \frac{4r_0^2\,d\theta}{(e^{n\theta} + e^{-n\theta})^2} = \frac{4r_0^2 e^{2n\theta}\,d\theta}{(e^{2n\theta} + 1)^2};$$

daher:

$$\frac{nct}{2r_0^2} = -\frac{1}{e^{2n\theta} + 1} + C_1.$$

Bestimmen wir die Constante durch die Bedingung $t = 0$, $\theta = 0$, so findet sich:

$$C_1 = \tfrac{1}{2},$$

und folglich:

$$e^{2n\theta} = \frac{2}{1 - \frac{nct}{r_0^2}} - 1.$$

Man sieht hieraus, dass $\theta$ unendlich wächst, während $t$ dem Werth $\frac{r_0^2}{nc}$ näher rückt. Demnach erreicht das Bewegliche den Pol am Ende dieser Zeit.

Will man die Bewegung untersuchen, welche dem Augenblick vorausgeht, der als Anfang der Zeit betrachtet wurde,

so muss $t$ negativ genommen werden. Vorstehende Gleichung ergiebt dann auch $\theta$ negativ, und wir erhalten $\theta = -\infty$ für $t = -\frac{r_0^2}{nc}$, was man vorher wissen konnte.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden; derjenige nämlich, wo nur eine Exponentialgrösse in der Gleichung der Trajectorie vorkommt und diese daher eine logarithmische Spirale wird. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$cotg\,\alpha = \pm n.$$

Die Trajectorie erhält z. B. für $cotg\,\alpha = -n$ die Gleichung:

$$r = r_0 e^{n\theta}.$$

Man kann diese Wahrheit auch unmittelbar aus der allgemeinen Formel (3) erkennen, welche für den gegenwärtigen Fall folgende Gestalt erhält:

$$c^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (\mu - c^2)r^2 + \left(v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^2}\right)r^4.$$

Nehmen wir an, dass die gegebenen Constanten der Bedingung $v_0^2 = \frac{\mu}{r_0^2}$ genügen, so ist klar, dass dann die Gleichung einen unveränderlichen Werth für den Quotienten $\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$ liefert, welcher die Tangente der Neigung des Leitstrahls gegen die Curve vorstellt. Darin besteht aber die charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Spirale. Der Werth von $n^2$, welcher $\frac{\mu}{r_0^2 v_0^2 \sin\alpha^2} - 1$ war, wird jetzt

$$\frac{1}{\sin\alpha^2} - 1 \text{ oder } cotg\,\alpha^2,$$

welches die oben gefundene Bedingung ist.

## Anwendung auf das Weltsystem. Bewegung der Planeten.

11. Die aufmerksame Beobachtung der Bewegungen der Himmelskörper während vieler Jahrhunderte hat mehrere allgemeine Gesetze ergeben, welche der Anwendung mathematischer Theorien als Grundlage dienen konnten. Damit die bisher aufgestellten Formeln bei der Bewegung der Planeten so-

wie aller anderen Himmelskörper anwendbar bleiben, muss man annehmen, dass ihre Materie den Gesetzen unterworfen sei, welche wir ohne Ausnahme an den Körpern wahrnehmen, die uns umgeben und unserer Erfahrung unterworfen werden können. Wenn auch a priori Zweifel daran möglich wären, dass die Himmelskörper aus einer mit solchen Eigenschaften begabten Materie bestehen, so giebt doch die Uebereinstimmung selbst der kleinsten Folgerungen aus dieser Hypothese mit der Beobachtung den Beweis dafür a posteriori.

Die Bewegungen der Planeten, in Bezug auf die Erde betrachtet, erscheinen äusserst verwickelt; sie gewinnen dagegen grosse Einfachheit, wenn man dieselben auf die Sonne bezieht. Sie befolgen drei grosse, nach Kepler benannte Gesetze, welche wir aussprechen, indem wir die Planeten als einfache materielle Punkte betrachten:

1. Die Planeten durchlaufen bei ihrer Bewegung um die Sonne ebene Curven, und die von der Sonne ausgehenden Leitstrahlen beschreiben dabei Flächen, welche mit den Zeiten proportional sind.

2. Die relativen Bahnen der Planeten sind Ellipsen, von denen das Centrum der Sonne einen Brennpunkt bildet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Würfel der grossen Axen ihrer Bahnen.

Wir wollen sehen, welche strengen Folgerungen sich aus diesen Gesetzen ziehen lassen.

Da wir nicht wissen, ob der Mittelpunkt der Sonne unbewegt ist, so müssen wir schliessen, wie wenn er bewegt wäre. Gemäss der Theorie der relativen Bewegung folgert man aus dem ersten Kepler'schen Gesetz, dass die relative Kraft an jedem Planeten nach dem Centrum der Sonne gerichtet ist, welche Beschaffenheit auch dieselbe ausserdem haben mag. Das will sagen: wenn man in irgend einem Augenblick an dem Planeten eine Kraft anbrächte, die gleich, parallel und entgegengesetzt wäre mit derjenigen, wodurch die Bewegung der Sonne im Raum hervorgebracht wird, so würde die Resultante dieser Kraft und der den Planeten wirklich angreifenden nach dem Sonnencentrum gerichtet sein.

Das zweite Gesetz bestimmt, indem es die relative Bahn des Planeten kennen lehrt, den Ausdruck für die relative Kraft, der zufolge die Bahn beschrieben wird. Bezeichne $2a$ die grosse Axe der Ellipse, $e$ ihre Excentricität, $r$ den Radius vector vom Mittelpunkt der Sonne nach einer beliebigen Stellung des Planeten, $\omega$ den Winkel der grossen Axe mit derjenigen festen, durch das Sonnencentrum gehenden Geraden, von welcher an die Winkel des Leitstrahls gezählt werden. Dann wird die Gleichung der Bahn:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Als allgemeinen Ausdruck der beschleunigenden Kraft $\varphi$ bei der Centralbewegung haben wir gefunden:

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Die Gleichung der gegenwärtig betrachteten Trajectorie giebt:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e(\cos\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

und somit:

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2},$$

welcher Werth positiv ist. Die relative Bewegung eines beliebigen Planeten um die Sonne wird daher durch eine nach dem Sonnencentrum gerichtete Kraft hervorgebracht, deren Grösse im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung steht.

Eine ähnliche Rechnung würde zu demselben Gesetz führen, wenn die Bahn eine Parabel oder Hyperbel wäre.

12. Wir wollen nun die beschleunigenden Kräfte mit einander vergleichen, welche auf verschiedene Planeten bei ihrer Bewegung um die Sonne wirken.

Wie in Nro. 11 bezeichne $c$ das Doppelte des während

der Zeiteinheit vom Radius vector durchstrichenen Flächenraumes; $T$ möge die ganze Umlaufszeit bedeuten. Dann wird:

$$\tfrac{1}{2} c T = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

und hiernach:

$$\varphi = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}.$$

Dem dritten Kepler'schen Gesetz zufolge bleibt der Quotient $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten derselbe. Die Kraft, welche die Masseneinheit eines jeden Planeten gegen den Mittelpunkt der Sonne hinzieht, ist deshalb von der Entfernung allein abhängig.

Die relativen Bewegungen der Planeten um die Sonne werden folglich durch Kräfte hervorgebracht, welche nach dem Sonnencentrum gerichtet sind und im directen Verhältniss der Massen stehen, worauf sie wirken, sowie im umgekehrten des Quadrats der Entfernung.

13. Man muss jedoch diesen Folgerungen den rechten Sinn unterlegen.

Die Kepler'schen Gesetze zeigen, dass bei der relativen Bewegung, so wie dieselbe für einen beliebigen Planeten stattfindet, die auf ihn wirkende Kraft das Gesetz befolgt, welches wir so eben bestimmt haben. Folgt aber daraus, dass dieses Gesetz auch noch das nämliche sein würde bei einer anderen Bewegung des Planeten? Zum Beispiel, wenn man denselben ohne Geschwindigkeit in verschiedene Abstände vom Mittelpunkt der Sonne brächte, würde er dann auch noch dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional dagegen angezogen werden? Das geht aus dem für $\varphi$ gefundenen Werthe keineswegs hervor, denn derselbe hätte ebenso gut als Function von $\theta$ oder selbst von $t$ ausgedrückt werden können; und mit gleichem Recht würde man daraus andere Gesetze für die beschleunigende Kraft hergeleitet haben. Diese Gesetze wären wohl für die betrachtete Bewegung jedoch für keine andere erwiesen. Offenbar ist vielmehr, dass zwei solche Gesetze nicht zugleich allgemeine sein können, da jedes das andere ausschliesst.

Gleichwohl kann die Gesammtheit der Resultate bezüglich der verschiedenen Planeten zur Kenntniss des allgemei-

nen Gesetzes führen, wonach sich die Kraft richtet, welche ihre Bewegungen bewirkt. Man sieht zunächst, dass dieselbe nicht von der Zeit abhängen darf; denn sie würde für jeden Planeten durch eine periodische Function ausgedrückt werden, deren Periode mit seinem Umlauf gleiche Dauer hätte; was darum nicht angeht, weil diese Dauer bei anderen Planeten verschieden ist. Eben so wenig lässt sich die Abhängigkeit der Kraft von der Richtung annehmen; denn die Rechnungen für die einzelnen Planeten würden der Function nicht einerlei Form ertheilen. Dagegen führen die Bewegungen aller Planeten auf denselben Ausdruck der beschleunigenden Kraft durch die Entfernung. Sofern man die Kepler'schen Gesetze als genau und unwandelbar betrachtet, kann man daher nicht zweifeln, dass dieser Ausdruck das wahre Gesetz ausspricht, nach welchem die Materie der Planeten gegen den Mittelpunkt der Sonne angezogen wird.

Nur in der Materie der Sonne scheint die Ursache dieser beständig nach ihrem Mittelpunkt hinzielenden Wirkung gesucht werden zu können. Ueberträgt man das Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung auf die getrennt auf einander wirkenden Himmelskörper, so muss man annehmen, dass die Sonne auch gegen jeden Planeten seiner Masse proportional hingezogen werde. Da die Sonne die Materie von jeder Art anzieht, woraus die in so verschiedenen Entfernungen von ihr befindlichen Planeten bestehen, so ist es unmöglich, sich der ferneren Annahme zu entziehen, dass dieselbe in gleicher Weise auf die Satelliten wirke; und umgekehrt. Weil nun die Radien vom Centrum der Sonne nach den verschiedenen Punkten eines Planeten und seiner Satelliten nahezu gleich und parallel sind, so darf man ein solches System als durch parallele, den Massen proportionale Kräfte angegriffen betrachten. Daraus geht hervor, wie die Wirkung der Sonne die relativen Bewegungen der Satelliten gegen ihren Planeten nicht merklich ändert.

Auf diese letzten Bewegungen finden die Kepler'schen Gesetze Anwendung. Hieraus folgt vermöge der bereits für die Planeten in Bezug auf die Sonne gemachten Schlüsse, dass die zu einem Planeten gehörigen Satelliten gegen dessen Mittelpunkt durch Kräfte hingezogen werden, welche in directer

Proportion mit ihren Massen und in umgekehrter mit dem Quadrat der Entfernungen von diesem Centrum stehen. Dem Princip von der Gleichheit der Gegenwirkung gemäss ziehen dann die Satelliten wieder den gemeinsamen Planeten im Verhältniss ihrer Massen und der nämlichen Function der Entfernung an.

Wenn ein Planet die Sonne seiner Masse proportional anzieht, so erscheint die Annahme naheliegend, dass alle Theile, aus welchen er besteht, im Verhältniss ihrer Massen zu dieser Wirkung beitragen, d. h. dass jedes Molekül die Sonne also auch ihre Theile im Verhältniss seiner Masse zu jener des Planeten anzieht. Ebenso natürlich ist es, Gleiches vorauszusetzen von der Anziehung, welche der Planet auf seine Satelliten äussert, so dass jedes Molekül einen Satelliten und dessen Theile im Verhältniss der ihm eigenen Masse zu der des Planeten anzieht. Da die zu demselben Planeten gehörigen Satelliten von diesem proportional mit ihren Massen angezogen werden, so schliesst man, dass ihre gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung ebenfalls den Massen proportional sei, und dass deshalb alle Theile eines Satelliten proportional mit den ihnen zukommenden Massen den Planeten und seine Theile anziehen. Gleiches gilt für den Satelliten in Bezug auf die Sonne. Der Analogie nach übertragen wir dieselbe Eigenschaft auch auf die Materie der Sonne und nehmen an, dass alle sie zusammensetzenden Theile im directen Verhältniss ihrer Massen und im umgekehrten des Quadrats der Entfernung sowohl die Planeten als die Satelliten und die Theile von beiden anziehen. Indem wir jetzt diese Annahme ganz allgemein machen, betrachten wir es als eine der Materie, woraus unser Planetensystem besteht, gemeinsame Eigenschaft, dass je zwei Moleküle einander ihren Massen proportional und im umgekehrten Verhältniss des Quadrats ihrer Entfernung anziehen.

14. Wenn die Himmelskörper vollkommen kugelförmig wären und aus homogenen concentrischen Schichten beständen, so müssten dieselben bei dem angenommenen Attractionsgesetz, wie wir im ersten Theil gezeigt haben, in solcher Weise auf einander wirken, als ob ihre Massen in den Mittelpunkten vereinigt wären. In der That aber weicht ihre Gestalt von der Kugelform etwas ab; jedoch entspringen hieraus nur solche

Unterschiede, um welche man sich bei einer ersten Annäherung an die Wahrheit nicht zu bekümmern braucht. Wir werden deshalb Sonne, Planeten und Satelliten wie materielle Punkte von ungleichen Massen betrachten, welche einander anziehen ihren Massen direct und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Die Attraction, welche ein Planet durch die übrigen Körper des Systems erfährt, hat Störungen seiner Bewegung um die Sonne zur Folge, welche den hauptsächlichen Gegenstand der Mechanik des Himmels bilden. Wir beschäftigen uns damit in diesem Buche nicht, sondern betrachten die Bewegung eines jeden Planeten unter der Voraussetzung, dass dieselbe allein durch die Wirkung zwischen ihm und der Sonne erzeugt werde.

Bezeichnen wir mit $f$ die gegenseitige Anziehung zweier als einfache Punkte gedachten Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung von einander. $M$ und $m$ mögen die Massen der Sonne und eines Planeten vorstellen; ihre gegenseitige Wirkung in der Entfernung $r$ wird dann durch $\frac{fMm}{r^2}$ ausgedrückt. Die beschleunigende Kraft an dem Planeten beträgt $\frac{fM}{r^2}$; an der Sonne $\frac{fm}{r^2}$. Dieselbe ist an jedem von beiden Punkten gegen den anderen gerichtet. Will man daher die relative Bewegung des Planeten um die Sonne erfahren, so muss man sich die Sonne als relativ ruhend und den Planeten durch eine der Summe

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{fm}{r^2} \text{ oder } \frac{f(M+m)}{r^2}$$

gleiche Kraft angegriffen denken, welche gegen die Sonne hinwirkt. Denn zufolge der allgemeinen Theorie der relativen Bewegung hat man an demjenigen Punkt, dessen Bewegung untersucht werden soll, eine beschleunigende Kraft anzubringen, welche gleich, parallel und entgegengesetzt ist mit der auf den anderen Punkt wirkenden. Man darf dann diesen letzten als ruhend und die Bewegung des ersten wie eine absolute betrachten. Die Anfangsgeschwindigkeit, welche man dem beweglichen Punkt beilegen muss, ist die Resultante seiner absoluten Anfangsgeschwindigkeit und einer gleichen, parallelen und entgegengesetzten mit jener des anderen.

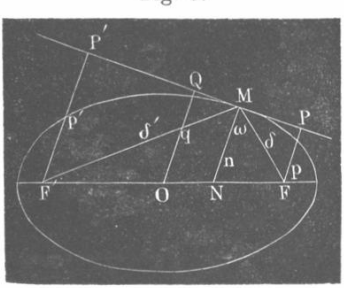
Wir haben in Nro. 12 für die relative Bewegung eines Planeten um die Sonne $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ als Ausdruck der relativen beschleunigenden Kraft in der Einheit der Entfernung gefunden. Nach dem so eben Gesagten ist daher:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m).$$

Man sieht demnach, dass $\frac{a^3}{T^2}$ von $m$ abhängt, folglich von einem Planeten zum anderen sich ändert, wofern die Planeten nicht gleiche Massen haben, was ausser aller Wahrscheinlichkeit liegt. Da jedoch Kepler durch die Beobachtung darauf geführt wurde, diesen Quotienten für alle Planeten als gleich zu betrachten, so ist man zu dem Schlusse genöthigt, dass das Glied $fm$ nur einen sehr kleinen Theil von $f(M + m)$ ausmache, und dass folglich die Masse eines beliebigen Planeten, gegen die der Sonne gehalten, sehr klein sei. Wir werden bald eine Anwendung dieser wichtigen Bemerkung kennen lernen.

15. Wir sind mit Hülfe der allgemeinen Formeln für die Centralkräfte auf das Attractionsgesetz gekommen. Einfacher kann man zu demselben durch die blosse Betrachtung der Centripetalkraft gelangen. Bevor wir diese neue Verfahrungsart auseinandersetzen, wollen wir an einige auf die Ellipse bezügliche Formeln erinnern, welche häufig Anwendung finden.

Fig. 3.




Die Halbaxen der Ellipse mögen durch $a$ und $b$ bezeichnet werden; der Abstand ihrer Brennpunkte vom Centrum durch $c$. Verbinden wir irgend einen Punkt $M$ (Fig. 3) dieser Curve mit den Brennpunkten $F, F'$; fällen wir aus $F$, $F'$ und dem Centrum $O$ die Perpendikel $FP$, $F'P'$, $OQ$ auf die Tangente in $M$ und ziehen die Normale $MN$. Wir setzen:

$FM = \delta$, $F'M = \delta'$, $FP = p$, $F'P' = p'$, $OQ = q$, $MN = n$, $NMF = \omega$. Man erhält dann leicht die nachstehenden Formeln:

$$FN = \frac{c\delta}{a},\ F'N = \frac{c\delta'}{a},\ p = b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}},\ p' = b\sqrt{\frac{\delta'}{\delta}},\ n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'},$$

$$\cos\omega = \sin FMP = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}},\ q = \frac{p+p'}{2} = \frac{ab}{\sqrt{\delta\delta'}} = \frac{b^2}{n}.$$

Aus ihnen folgt $pp' = b^2$, $qn = b^2$; somit auch $pp' = qn$ oder $p : n = q : p'$.

Der Krümmungsradius $R$ ist bei allen Kegelschnitten gleich dem Würfel der Normalen, getheilt durch das Quadrat des halben Parameters. Demnach hat man hier:

$$R = \frac{a^2 n^3}{b^4} = \frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Man erkennt ferner sofort die Gleichheit des halben Parameters $\frac{b^2}{a}$ mit der Projection $n\cos\omega$ der Normalen auf jeden von beiden Leitstrahlen.

Ebenso sieht man, dass die Projection $R\cos\omega$ des Krümmungshalbmessers auf einen Leitstrahl mit $\frac{\delta\delta'}{a}$ gleich ist; welche vierte Proportionale man auf solche Weise construiren kann, dass $M$ einen Endpunkt derselben bildet, während der andere in dem Leitstrahl liegt. Die im zweiten Endpunkt auf diesen errichtete Senkrechte begegnet der Normalen im Krümmungsmittelpunkt.

Noch einfacher ist die von Newton gezeigte Construction, welche aus der Gleichung

$$R\cos\omega = \frac{n}{\cos\omega}$$

hervorgeht. Errichtet man nämlich im Fusspunkt der Normalen ein Perpendikel bis zu einem der zwei Leitstrahlen und im Durchschnittspunkt wieder ein solches auf den Leitstrahl, so trifft das letztere die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

16. Nehmen wir jetzt unsere Aufgabe vor. Da die Flächen der Zeit proportional sind, so geht die Richtung derjenigen Kraft, welche die relative Bewegung um die Sonne bewirkt, beständig durch den Mittelpunkt dieser letzten. Und es handelt sich darum, ihr Gesetz aufzufinden, während wir wis-

sen, dass die Bahn eine Ellipse ist, von welcher die Sonne den einen Brennpunkt bildet.

Bezeichnen wir die nach $MF$ gerichtete beschleunigende Kraft an dem materiellen Punkt $M$ mit $\varphi$. Ihre Componente $\varphi \cos \omega$ in der Richtung der Normalen wird durch $\frac{v^2}{R}$ ausgedrückt, wo $v$ die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ vorstellt. Wenn $C$ den doppelten in der Zeiteinheit vom Radius vector beschriebenen Flächenraum bedeutet, so macht $Cdt$ das Doppelte der während der Zeit $dt$ beschriebenen Fläche aus. Diese Fläche ist aber ein Dreieck, welches zur Basis den in der Zeit $dt$ durchlaufenen Bogen $ds$ hat und zur Höhe den Abstand $p$ des Brennpunktes von der Tangente. Man erhält daher:

$$p\,ds = Cdt, \text{ woraus } v = \frac{C}{p};$$

folglich:

$$\varphi \cos \omega = \frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{p^2 R}, \; \varphi = \frac{C^2}{p^2 R \cos \omega}.$$

Setzen wir nun für $p$, $R$, $\cos \omega$ ihre in Nr. 15 durch $\delta$ und $\delta'$ gegebenen Werthe, so ergiebt sich:

$$\varphi = \frac{C^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{\delta^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Sonne steht.

Wir können die Constante $C$ mit Hülfe der Umlaufszeit des Planeten ausdrücken; denn, da der doppelte Flächeninhalt der Ellipse $2\pi ab$ beträgt, so ist:

$$CT = 2\pi ab, \; C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Dadurch wird:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\delta^2};$$

daher die beschleunigende Kraft in der Einheit der Entfernung den Werth $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ hat.

Somit sind die schon erhaltenen Resultate auf's Neue gefunden.

17. Bevor Newton den Beweis des Attractionsgesetzes fand, hatte er dasselbe durch Betrachtungen vorausgesehen, welche, ohne den gleichen Grad der Strenge zu besitzen, doch sehr gewichtige Anzeigen dafür abgaben. Wir theilen diese Betrachtungen mit.

Die Planeten beschreiben Bahnen von verschiedener Excentricität. Man darf daher annehmen, dass die Kepler'schen Gesetze auch noch für Kreisbahnen gelten würden; zumal, da die wirklich durchlaufenen Ellipsen eine sehr geringe Excentricität haben und man deshalb mit hinreichender Annäherung dieselben als kreisförmig betrachten kann. Demnach wird man, wo nicht genaue, doch sehr genäherte Resultate erhalten, indem man die Kepler'schen Gesetze auf Kreise anwendet.

Dieses vorausgeschickt, lehrt das erste Gesetz, die an jedem Planeten wirkende Kraft sei beständig gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet. Das zweite Gesetz, woraus in dem allgemeinen Fall folgte, dass die beschleunigende Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung stehe, zeigt hier die Constanz der Geschwindigkeit. Denn die Kreisbogen sind den Sectoren proportionirt und somit den Zeiten; oder auch die Kraft steht senkrecht auf der Trajectorie, und folglich bleibt die Geschwindigkeit unverändert. Die an der Masseneinheit wirkende Centripetalkraft hat den Werth $\frac{v^2}{R}$, wenn $v$ die Geschwindigkeit und $R$ den Kreishalbmesser vorstellt; auch sie ist mithin constant. In dem vorliegenden Falle sagt also das zweite Gesetz, wie vorauszusehen war, nichts über die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung; wohl aber giebt es ihren Ausdruck durch die Umlaufszeit $T$ des Planeten und den Halbmesser seiner Bahn. In der That, man hat $2\pi R = vT$, und die Substitution des damit gegebenen Werthes für $v$ in den Ausdruck der Centripetalkraft, welche wir mit $\varphi$ bezeichnen, liefert:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Dieser Werth trifft mit dem allgemeinen $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ zusammen, wenn man $r = a = R$ setzt.

Gehen wir nun zu dem dritten Gesetz über, welches bei dem allgemeinen Fall das Attractionsgesetz für die Stellungen jedes Planeten in seiner Bahn ausdehnte auf die Stellungen in verschiedenen Bahnen. Im gegenwärtigen Falle kann das zu findende Resultat keine Ausdehnung sondern nur das erste Hervortreten des letzteren Gesetzes sein. Bezeichnen $\varphi$, $\varphi'$ die beschleunigenden Kräfte an zwei beliebigen Planeten; $R$, $R'$ ihre Abstände von der Sonne, $T$, $T'$ ihre Umlaufszeiten. Aus dem vorstehenden Werthe für $\varphi$ folgt:

$$\varphi : \varphi' = \frac{R}{T^2} : \frac{R'}{T'^2}.$$

Wenn man im zweiten Verhältniss dieser Proportion statt $T^2$, $T'^2$ die proportionirten Grössen $R^3$, $R'^3$ nimmt, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\varphi : \varphi' = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2};$$

welches beweist, dass die an der Masseneinheit wirkende Kraft umgekehrt sich verhält wie das Quadrat der Entfernung vom Sonnencentrum.

Da die Satelliten, welche zu demselben Planeten gehören, in Bezug auf diesen die nämlichen Gesetze beobachten, so schloss man, dass auch ihre Anziehung umgekehrt proportional sei dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt des gemeinsamen Planeten. Die Erde, weil sie nur einen Satelliten hat, vermochte das Attractionsgesetz in dieser Weise nicht zu bestätigen; aber sie gewährte eine andere Bestätigung, welche Newton sich nicht entgehen liess. Wenn man aus der Gesammtheit der mitgetheilten Erscheinungen den Schluss zieht, wie wir in Nro. 13 gethan haben, dass je zwei Moleküle einander proportional mit ihren Massen anziehen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung; so folgt, dass die Wirkung der Erde auf Punkte ihrer Oberfläche und auf äussere Punkte dieselbe ist, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Man darf nämlich die Erde aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzt betrachten. Nun macht die mittlere Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond 60 Erdhalbmesser aus. Die Schwere einer bestimmten Masse an der Erdoberfläche müsste demnach 3600mal so gross sein als diejenige Anziehung, welche die Erde auf

eine gleiche Masse im Mond äussert; und dasselbe Verhältniss müsste bestehen zwischen dem Fallraum an der Erdoberfläche und dem Wege, den der Mond während gleicher Zeit in der Richtung der Attraction gegen die Erde hin zurücklegt. Der leicht anzustellende Versuch dieser Bestätigung gelang vollkommen.

Wenn wir der Einfachheit wegen die sehr wenig excentrische Ellipse, welche der Mond beschreibt, als Kreis betrachten, dessen Radius $R$ den Halbmesser $r$ der kugelförmig gedachten Erde 60mal enthält, so ist die Wirkung $g'$ der Erde auf den Mond dessen Centripetalkraft gleich. Diese letzte beträgt aber $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$, wenn $T$ die Umlaufszeit des Mondes um die Erde bedeutet, welche in Secunden durch die Zahl $39343 \times 60$ ausgedrückt wird. Man erhält folglich:

$$g' = \frac{4\pi^2 r}{60(39343)^2};$$

und da $2\pi r = 40000000$, so kommt:

$$g' = \frac{4000000\pi}{3\cdot(39343)^2},$$

welcher Werth wenig verschieden ist von $\frac{g}{3600}$. Und man würde keinen bemerkbaren Unterschied finden, wenn man auf mehrere Umstände Rücksicht nähme, welche wir vernachlässigt haben.

Das Resultat dieser Rechnung lieferte demnach eine neue Bestätigung dafür, dass alle Moleküle dem fraglichen Gesetze gemäss einander anziehen, und dass sowohl die Schwere an der Erdoberfläche ein Product dieser Anziehung ist als diejenige, welcher der Mond gegen denselben Mittelpunkt hin unterliegt.

18. Massen der Planeten. — Das Verhältniss der Masse eines Planeten zu jener der Sonne lässt sich leicht bestimmen, wenn den Planeten ein Satellit von relativ sehr geringer Masse begleitet. Bezeichnen $m$, $m'$ die Massen des Planeten und seines Satelliten, $2a$, $2a'$ die grossen Axen ihrer Bahnen, $T$, $T'$ ihre Umlaufszeiten; so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M+m), \quad \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m+m'),$$

und daher:

$$\frac{a^3 T'^2}{a'^3 T^2} = \frac{M+m}{m+m'}.$$

Da nun das zweite Glied nahezu $\frac{M}{m}$ gleich ist, weil $m$ sehr klein gegen $M$ und $m'$ gegen $m$, so darf man schreiben:

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

Aus der Beobachtung sind $T$ und $T'$ bekannt; es genügt deshalb, dass man einen genäherten Werth für $\frac{a'}{a}$ kenne, um das Verhältniss der Masse des Planeten zur Sonne mit entsprechender Annäherung zu erhalten. Newton hat auf diese Weise für den Jupiter $\frac{1}{1067}$ der Sonnenmasse gefunden. Genauere Verfahrungsarten haben den davon wenig verschiedenen Werth $\frac{1}{1050}$ ergeben.

19. Die Masse der Erde lässt sich auf diesem Wege nicht genau genug bestimmen, weil der Mond ihr gegenüber nicht vernachlässigt werden darf. Doch kann man die vorletzte Gleichung als ein Prüfungsmittel benutzen, wenn man das Verhältniss der Erd- und Mondmasse kennt. Wir vermögen aber die Masse der Erde durch ein Verfahren zu finden, welches bei keinem anderen Planeten anwendbar ist und durch die Kenntniss bedingt wird, welche wir von der Anziehung an ihrer Oberfläche haben. Diese Anziehung ist gleich der Schwere, vermehrt um die verticale Componente der Centrifugalkraft. Dabei muss man auf die Abplattung der Erde Rücksicht nehmen, und es findet sich, dass auf demjenigen Parallelkreis, für welchen das Quadrat des Sinus der Breite $\frac{1}{3}$ beträgt, und dessen Abstand $r$ vom Erdmittelpunkt 6 364 551 Meter ausmacht, die Anziehung $G$ der Erde fast genau so gross ist, als wenn die Erde eine Kugel mit demselben Halbmesser $r$ wäre. Wenn man nun die wirklich stattfindende Attraction auf diesem Parallelkreis nach dem Gesetz für die Aenderung der Schwere an der Erdoberfläche (*Mécanique céleste* von Laplace) und mit Einbegriff der Verticalcompo-

nente der Centrifugalkraft berechnet, so erhält man $G = 9{,}81645$, welches etwas mehr ist als $g = 9{,}80896$.

Der Werth $G$ muss dem eben Gesagten zufolge gleich $\frac{fm}{r^2}$ sein, wo $m$ die Masse der Erde bedeutet, $f$ die gegenseitige Anziehung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung und $r$ den angegebenen Abstand des Parallelkreises vom Mittelpunkt. Entnimmt man daraus $f = \frac{Gr^2}{m}$ und substituirt diesen Ausdruck in die für die Bewegung der Erde um die Sonne geltende Formel:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

so folgt:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{Gr^2(M + m)}{m};$$

daher:

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gr^2 T^2} - 1.$$

Man hat aber:

$$T = 86400 \cdot (365{,}256374),$$

und die Grösse der Sonnenparallaxe, welche stattfindet unter der vorbemerkten Breite bei der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, die der halben grossen Axe der Erdbahn gleich ist, ergiebt:

$$a = 23984 \cdot r.$$

Indem man jetzt die Rechnungen ausführt, findet man:

$$\frac{M}{m} = 354592 \text{ oder } \frac{m}{M} = \frac{1}{354592}.$$

Hieraus können wir das Verhältniss der Erd- und Sonnendichte bestimmen. Der Durchmesser der Sonne enthält den der Erde 110mal, und die Dichten zweier Körper verhalten sich wie die durch ihre Volumina getheilten Massen. Auf diese Weise findet man leicht, dass die Dichte der Erde etwa das Vierfache der Sonnendichte beträgt.

Berechnet man hiernach die Schwere an der Oberfläche der Sonne, so ergiebt sich dieselbe $29\frac{1}{2}$mal so gross als an der Erdoberfläche. Der Fallraum in der ersten Secunde be-

trägt mithin dort 145 Meter, auf der Erde dagegen nur $\frac{g}{2}$.

20. Die Massen derjenigen Planeten, welche keine Satelliten haben, können durch das in Nro. 18 angegebene Verfahren nicht bestimmt werden. Man muss daher zu den Störungen seine Zuflucht nehmen, welche die Bewegung derselben um die Sonne durch ihre gegenseitigen Wirkungen erleidet. Da die Wirkung eines Planeten seiner Masse proportional ist, so begreift man *a priori*, wie die Störung, welche er in einer durch die Sonne verursachten Bewegung hervorbringt, zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen seiner Masse und der Sonnenmasse dienen könne. Diese wichtige Aufgabe fällt jedoch der Mechanik des Himmels anheim, und wir begnügen uns hier mit ihrer Andeutung. Natürlich lässt sich dasselbe Verfahren auch bei den Planeten anwenden, welche Satelliten haben, und auf diese Weise hat man $\frac{1}{1050}$ für die Masse des Jupiters gefunden.

Die Massen der Satelliten eines und desselben Planeten werden mit der Masse dieses letzten ebenfalls mittelst der Störungen verglichen, welche ihre gegenseitigen Wirkungen in ihrer Bewegung um den Planeten veranlassen. Und daraus kann man die Verhältnisse dieser Massen zur Sonnenmasse finden, weil man die Masse des Planeten kennt. Auch hier macht die Erde, die nur einen Satelliten besitzt, eine Ausnahme. Aber man hat wieder den Vortheil, dessen wir uns schon bei Ausmittelung ihrer Masse bedienten; nämlich die Kenntniss der Verhältnisse an ihrer Oberfläche. Der Mond bringt vermöge der Ungleichheit seiner Entfernungen von den verschiedenen Punkten der Erde Störungen auf ihrer Oberfläche hervor, welche die Ebbe und Fluth des Meeres sind. Die Sonne hat ähnliche Wirkungen auf das Meer zur Folge; man begreift daher, dass die Vergleichung beider Effecte das Verhältniss der Mond- und Sonnenmasse ergeben könne. Diese Vergleichung ist leicht durch die Beobachtung der Mond- und Sonnenfluthen, die nach verschiedenen Gesetzen erfolgen. Wir beschränken uns hier auf die Angabe, dass im Hafen von Brest das Verhältniss der ersten zur zweiten 2,3533 beträgt (*Mécanique céleste*). Durch eine Rechnung, welche wir übergehen, findet man hieraus das Verhältniss der Masse des Mon-

des zur Sonne und folglich zur Erde; und zwar hat man $\frac{1}{75}$ der Erdmasse gleich der Masse des Mondes gefunden.

Wenn $m$, $m_1$ die Massen der Erde und eines beliebigen Planeten bezeichnen, $T$, $T_1$ ihre Umlaufszeiten, sowie $a$, $a_1$ die halben grossen Axen ihrer Bahnen, so besteht folgende Gleichung:

$$\frac{a_1{}^3}{a^3} = \frac{M + m_1}{M + m} \cdot \frac{T_1{}^2}{T^2},$$

worin $M$ die Sonnenmasse bedeutet. Kennt man nun $m_1$ und $T_1$, so bestimmt sich hieraus das Verhältniss $\frac{a_1}{a}$ und somit $a_1$, weil $a$ bekannt ist. Jedoch ist diese Gleichung nicht geeignet zur Bestimmung von $m_1$, denn man vermag $a_1$ nicht mit dem Grade der Annäherung zu finden, den wir in Nro. 18 für $a'$ voraussetzen durften, wo es sich um die Bahn eines Satelliten handelte.

21. Bisher haben wir nur die Verhältnisse der Planetenmassen zur Sonne bestimmt. Man kann aber einen angenäherten Werth der Erdmasse erhalten, aus welchem sich alle anderen ergeben. Man braucht zu diesem Behufe nur das Verhältniss zu kennen, welches zwischen der Anziehung, die eine bekannte Masse auf irgend einen Körper in gegebener Entfernung ausübt, und zwischen dem Gewicht dieses Körpers besteht. Dazu kann sowohl die Betrachtung des Gleichgewichts als die von Schwingungen führen. Wir begnügen uns damit, eine Vorstellung von dem ersten Mittel beizubringen.

Man denke sich eine kleine Kugel an einem Faden von der Länge $l$ hängend der Einwirkung einer grösseren ausgesetzt, welche den Radius $R$ und die Dichte $D$ haben mag, und deren Centrum in der durch den Endpunkt des Pendels gehenden Horizontalebene liegt und von diesem Punkt um die Strecke $a$ absteht. Die mittlere Dichte der Erde sei $d$, ihr Halbmesser $r$, und $\alpha$ der Winkel der Verticalen mit der Richtung des im Gleichgewicht befindlichen Pendels.

Die Masse der kleinen Kugel werde durch $m$ bezeichnet; dann ist die von der grossen Kugel auf sie ausgeübte Attraction $\frac{4}{3}\pi \frac{R^3 Dfm}{a^2}$, und ihr Hebelarm $l \cos\alpha$. Die Anziehung der kleinen Kugel durch die Erde beträgt $\frac{4}{3}\pi r dfm$, der He-

belarm aber $l \sin \alpha$. Im Gleichgewicht müssen die Momente beider Kräfte einander gleich sein; man erhält daher nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren:

$$\frac{R^3 D}{a^2} \cos \alpha = r d \sin \alpha, \text{ folglich } \tang \alpha = \frac{R^3 D}{a^2 r d}.$$

Kann man den nothwendig sehr kleinen Winkel $\alpha$ beobachten, so ist in dieser Gleichung nur $d$ unbekannt, welches dadurch bestimmt wird.

Eine Beobachtung dieser Art, die Maskelyne in Schottland in der Nähe eines Berges machte, dessen Masse und mittlere Entfernung er näherungsweise ausgewerthet hatte, ergab ihm die mittlere Dichte der Erde vier- bis fünfmal so gross als die des Wassers.

Einem durch Cavendish angestellten Versuch zufolge, bei welchem die Attraction einer bekannten Kugel Schwingungen hervorbrachte, deren Dauer man bestimmen konnte, ist die Dichte der Erde $5\frac{1}{2}$mal so gross als jene des Wassers.

Nachdem die mittlere Dichte der Erde mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, findet man daraus ihre Masse, sowie die Massen aller anderen Planeten und der Sonne.

## Berechnung der Bewegung eines Punktes um einen anderen, durch welchen er im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung angezogen wird.

22. Wir haben erkannt, dass die Bewegungen der Planeten um die Sonne durch eine anziehende Kraft hervorgebracht werden, welche im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkt, und dass diese Kraft noch dasselbe Gesetz befolgen würde, wenn die Bahnen Parabeln oder Hyperbeln wären. Wir wollen jetzt umgekehrt verfahren, also eine anziehende Kraft annehmen, deren Grösse dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionirt ist, und uns die Aufgabe stellen, die Trajectorien, welche der angegriffene Punkt in Folge dieser Kraft beschreiben kann, sowie den Ort, den er in jedem Augenblick einnimmt, auf die allgemeinste Art zu bestimmen.

Wir setzen dabei voraus, dass auf den anziehenden und

den angezogenen Punkt ausser der Anziehung nur noch gleiche und parallele beschleunigende Kräfte wirken. Diese haben keinen Einfluss auf die relative Bewegung zwischen beiden Punkten und können deshalb ganz ausser Acht bleiben. Aber auch von ihnen abgesehen, muss man unterscheiden, ob das Centrum der Anziehung fest oder bewegt ist. Der zweite Fall, welcher vorliegt, sobald die Punkte gegenseitig einander anziehen, lässt sich jedoch leicht auf den ersten zurückführen.

Denn es bezeichne $P$ die gegenseitige Anziehung zweier Punkte mit den Massen $m$ und $M$; dann sind ihre beschleunigenden Kräfte respective $\frac{P}{m}$ und $\frac{P}{M}$. Um nun die relative Bewegung von $m$ um $M$ zu erfahren, denke man sich den letzten Punkt unbewegt und betrachte den ersten als durch die beschleunigende Kraft

$$\frac{P}{m} + \frac{P}{M} = P\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

gegen ihn hingetrieben. Die dem Punkt $m$ gleichzeitig beizulegende Anfangsgeschwindigkeit resultirt aus seiner absoluten Anfangsgeschwindigkeit und aus der entgegengesetzten mit jener von $M$.

Die relative Bewegung zweier Punkte, welche sich im umgekehrten Verhältniss des Quadrats ihrer Entfernung anziehen, ist somit auf die absolute Bewegung eines Punktes zurückgeführt, der gegen ein festes Centrum durch eine nach demselben Gesetz wirkende Kraft hingetrieben wird, die sich von der anderen nur um einen constanten Coëfficienten unterscheidet.

23. Wir betrachten demnach das Centrum der Anziehung als fest und bezeichnen mit $\frac{\mu}{r^2}$ die beschleunigende Kraft, welche es auf den beweglichen Punkt ausübt. Die Gleichungen der Bewegung werden dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

Das Princip der Flächen und das der lebendigen Kräfte liefern die beiden ersten Integrale:

(1) $$r^2 d\theta = c\,dt,$$

(2) $$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + b = v^2,$$

worin $b$, $c$ willkürliche Constanten vorstellen.

Durch Eliminiren von $dt$ erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b;$$

dasselbe ergiebt die Gleichung (3) in Nro. 1, wenn man $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ setzt. Für:

$$\frac{1}{r} = z$$

geht vorstehende Gleichung über in:

(3) $$\frac{c^2 dz^2}{d\theta^2} = -c^2 z^2 + 2\mu z + b.$$

Wir wollen nun die Constanten $b$ und $c$ bestimmen durch den anfänglichen Ort des Punktes sowie durch die Richtung und Grösse seiner Anfangsgeschwindigkeit. Bezeichnen $r_0$ und $v_0$ die anfänglichen Werthe von $r$ und $v$, so giebt die Gleichung (2):

$$b = v_0{}^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

Für die Constante $c$ haben wir in Nro. 1 allgemein gefunden:

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha,$$

wo $\alpha$ den Winkel bedeutet, den die Richtung der Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung mit dem Leitstrahl bildet. Damit sind $b$ und $c$ bestimmt.

24. Um die endliche Gleichung der Trajectorie zu erhalten, muss man die Gleichung (3) integriren. Diese lässt sich auf die Form bringen:

$$d\theta = \frac{\pm dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}},$$

und es handelt sich zunächst darum, dass man wisse, welches von beiden Zeichen zu nehmen sei.

Wir nehmen $d\theta$ stets positiv; $dz$ ist deshalb positiv, so lange der Leitstrahl bei wachsendem $\theta$ abnimmt, negativ aber während seines Zunehmens. Der zweite Theil der Differentialgleichung erhält im ersten Falle das Zeichen $+$ und im

zweiten das Zeichen —; dabei muss man sich die Wurzel immer positiv denken.

Es ist daher zu untersuchen, an welchen Stellen die Zeichenwechsel von $dz$ oder die grössten und kleinsten Werthe von $z$ stattfinden. Man erhält dieselben, indem man

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \text{ oder } c^2 z^2 - 2\mu z - b = 0$$

setzt; woraus:

$$z = \frac{\mu}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}}.$$

So oft $z$ einen dieser beiden Werthe annimmt, muss man das Zeichen von $dz$ ändern und es nachher so lange beibehalten, bis $z$ den anderen Werth erreicht; dann wird wieder eine Zeichenänderung nöthig, und so fort.

Setzen wir den Fall, dass von derjenigen Lage ab, welche dem Werthe $r_0$ für $r$ entspricht, die Radien anfänglich wachsen; $dz$ ist jetzt negativ und folglich:

$$(4) \quad d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}} = \frac{-dz}{\sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2} - \left(z - \frac{\mu}{c^2}\right)^2}}.$$

Hieraus geht hervor, indem man von den der Anfangslage entsprechenden Werthen $\theta_0$ und $z_0$ an integrirt:

$$\theta - \theta_0 = arc\,cos\,\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} - arc\,cos\,\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} \text{ *)};$$

oder, wenn man $\theta_1$ statt $\theta_0 - arc\,cos\,\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$ schreibt:

$$(5) \qquad \theta - \theta_1 = arc\,cos\,\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}.$$

Bei solchen Integrationen, in welchen Kreisbögen vorkommen, hat man wohl darauf zu achten, innerhalb welcher Grenzen die Differentiale dasselbe Zeichen behalten. So ist $\frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}}$ das Differential von $arc\,cos\,u$, während der Sinus die-

---

*) In keinem Fall kann $\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$ ausserhalb des Intervalls zwischen 1 und — 1 liegen, wovon man sich leicht durch die Werthe für $b$ und $c$ überzeugt. Auch sieht man dabei, dass $\mu^2 + b c^2$ immer positiv ist.

ses Bogens positiv bleibt; es wird dagegen $\frac{+du}{\sqrt{1-u^2}}$ bei negativem Sinus.

Damit hiernach die Gleichung (5) richtig sei, so muss die Voraussetzung gemacht werden, dass man für $\theta_0 - \theta_1 = arc\,cos\,\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}}$ den Werth zwischen 0 und $\pi$ nehme. Und sie darf nicht länger in Anwendung kommen, als der Bogen $\theta - \theta_1$ innerhalb dieser Grenzen bleibt, also nur bis zu demjenigen Werthe von $z$, für welchen man hat $\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} = -1$, d. h. bis zu:

$$\text{(A)} \qquad z = \frac{\mu}{c^2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}}.$$

Wollte man dieselbe Gleichung (5) darüber hinaus anwenden, und zwar zunächst bis zu $\theta - \theta_1 = 2\pi$, wo $\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} = 1$ und folglich:

$$\text{(B)} \qquad z = \frac{\mu}{c^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}};$$

so würde dies voraussetzen, dass in diesem Intervall $d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}}$ wäre. Und in der That ist es so; denn, wie wir oben gesehen haben, wird mit dem Werthe (A) für $z$ eine Aenderung des Zeichens von $dz$ nothwendig, damit $d\theta$ durch $dz$ und durch die absolute Wurzel ausgedrückt bleibe, und man muss das geänderte Zeichen von da an beibehalten, bis $z$ den Werth (B) erreicht. Somit sehen wir, dass die Gleichung (5) bis zu $2\pi$ hin besteht.

Ueberschreitet der Bogen $\theta - \theta_1$ diesen Werth, so ist wie im ersten Intervall $d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{-z^2 + \frac{2\mu}{c^2} z + \frac{b}{c^2}}}$, bis $z$ wieder den Werth (A) annimmt, welches bei $\theta - \theta_1 = 3\pi$ geschieht. Der Sinus bleibt unterdessen positiv; man erhält folglich durch Integriren genau wieder die Gleichung (5), und so

fort. Dieselbe besteht daher in der ganzen Ausdehnung der Bewegung ohne jede Aenderung.

Würden die Radien anfänglich abnehmen, so wäre eine ganz ähnliche Discussion zu führen. Der Bogen würde sich dann mit dem entgegengesetzten Zeichen in der Gleichung (5) finden, und diese Form müsste während der ganzen Bewegung beibehalten werden; oder man könnte auch, ohne das Zeichen zu ändern, die Bogen $\theta - \theta_1$ beginnen lassen mit jenem Werthe von $arc\,cos\,\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}}$, welcher zwischen $\pi$ und $2\pi$ liegt. In jedem Fall ergiebt sich für $\theta_1$ ein von dem vorhergehenden verschiedener Werth. Bis auf diese Verschiedenheit von $\theta_1$ bleibt jedoch hier dasjenige Resultat geltend, welches wir jetzt aus (5) ableiten wollen.

Die Gleichung (5) lässt sich schreiben:

$$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + b c^2}} = cos(\theta - \theta_1);$$

daraus folgt, indem man $\frac{1}{r}$ statt $z$ nimmt:

$$(6) \qquad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{b c^2}{\mu} cos(\theta_1 - \theta)}}.$$

Diese Gleichung gehört einem Kegelschnitt an, dessen einen Brennpunkt der Pol bildet. Sie stellt eine Ellipse vor, wenn $b < 0$, eine Parabel für $b = 0$, und eine Hyperbel, wenn $b > 0$.

In der That, eine Ellipse, von welcher man einen Brennpunkt zum Pol nimmt und zur Polaraxe die Richtung der Geraden aus diesem Pol nach dem nächsten Scheitel, hat als Gleichung:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,cos\,\omega},$$

worin $a$ die halbe grosse Axe sowie $e$ die Excentricität vorstellt. Die Gleichung (6) wird mit ihr identisch, indem man setzt:

$$(7) \qquad \theta - \theta_1 = \omega,\ e^2 = 1 + \frac{b c^2}{\mu^2},\ a(1 - e^2) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Da bei der Ellipse $e < 1$, so ist die zweite von diesen Gleichungen nur für ein negatives $b$ möglich; und sie ertheilt dem $e$ bloss reelle Werthe, weil $\mu^2 + bc^2$ immer positiv ist. Die dritte Gleichung bestimmt $a$; während die erste sagt, dass $\theta_1$ den Winkel vorstellt, welchen die $x$-Axe mit der vom Pol nach dem nächsten Scheitel gerichteten Axe der Ellipse bildet.

Die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $2p$ ist:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\omega},$$

wenn die aus dem Brennpunkt durch den Scheitel gehende Richtung zur Polaraxe genommen wird. Die Gleichung (6) fällt mit ihr zusammen für:

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad b = 0, \quad p = \frac{c^2}{\mu}.$$

Demnach ist die Bahn in dem Falle von $b = 0$ eine Parabel, welche zur Axe diejenige Gerade hat, die durch den Ursprung geht und mit der $x$-Axe den Winkel $\theta_1$ bildet. Der Scheitel dieser Parabel liegt auf der diesem Winkel entsprechenden Seite, und ihr Parameter beträgt $\frac{2c^2}{\mu}$.

Hat man endlich $b > 0$, so lässt sich (6) mit folgender Gleichung identisch machen:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\omega},$$

in welcher $e > 1$ vorausgesetzt wird, und die denjenigen Zweig einer Hyperbel vorstellt, in dessen Innerem der zum Pol genommene Brennpunkt liegt; Polaraxe ist dabei die Richtung der Geraden vom Pol durch den Scheitel. Um die Identität beider Gleichungen herzustellen, setzt man:

$$\theta - \theta_1 = \omega, \quad e^2 = 1 + \frac{bc^2}{\mu}, \quad a(e^2 - 1) = \frac{c^2}{\mu}.$$

Hieraus bestimmen sich $e$ und $\omega$, daher für $b > 0$ die Bahn ein Hyperbelzweig wird, dessen Brennpunkt der Pol einnimmt und dessen Axe den Winkel $\theta_1$ mit der $x$-Axe einschliesst, während der Scheitel auf jener Seite liegt, welche diesem Winkel entspricht.

25. Man kann leicht die Gleichung der Trajectorie in rechtwinkligen Coordinaten erhalten und dann die Resultate wiederfinden, welche wir aus der Polargleichung abgeleitet

haben. Nehmen wir zur Axe der $x$ diejenige Richtung, welche durch den Ursprung geht und mit der bisherigen $x$-Axe den Winkel $\theta_1$ macht; dadurch wird

$$x = r \cos(\theta - \theta_1),\ y = r \sin(\theta - \theta_1),\ x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Elimination von $\cos(\theta - \theta_1)$ zwischen der ersten dieser Gleichungen und zwischen (6) giebt:

$$r = \frac{c^2}{\mu} - x\sqrt{1 + \frac{b c^2}{\mu^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\mu^2 y^2 - b c^2 x^2 + 2 c^2 x \sqrt{\mu^2 + b c^2} = c^4.$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse vor, wenn $b < 0$, eine Parabel für $b = 0$, eine Hyperbel, wenn $b > 0$. Da $r$ als rationale Function von $x$ erscheint, so ist in allen drei Fällen die Gerade, auf welcher die $x$ gezählt werden, eine Axe der Curve, und zugleich bildet der Ursprung einen Brennpunkt.

Man mag bemerken, dass die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit völlig gleichgültig ist für den Werth $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ von $b$, welcher die Art der Curve bedingt. Dieses Resultat kommt überein mit dem in Nro. 9 auf einem anderen Wege gefundenen.

Nachdem wir die Gleichung der Trajectorie kennen, bleibt uns nur noch übrig, die Coordinaten als Functionen von $t$ zu bestimmen, welches Problem gewöhnlich das Kepler'sche genannt wird.

Wir werden die Rechnung für den Fall einer Ellipse unternehmen, der bei allen Planeten stattfindet. Beziehen wir dieselbe auf Polarcoordinaten $r$, $\theta$ und zählen dabei die $\theta$ von derjenigen Richtung an, welche aus dem Brennpunkt nach dem nächsten Scheitel geht. Dies kommt darauf hinaus, dass man $\theta_1 = 0$ also $\omega = \theta$ setzt. Wir haben dann:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\theta};$$

$a$ und $e$ sind in Nro. 24 durch die Anfangswerthe bestimmt worden.

Aus (1) und (2) erhält man durch Eliminiren von $d\theta$ oder von $dt$ eine Differentialgleichung zwischen $t$ und der nicht eliminirten Coordinate. Die Integration derselben giebt diese

Coordinate als Function von $t$; und hernach lässt sich auch die andere mit Hülfe der Bahngleichung in $t$ ausdrücken.

Das Wegschaffen von $d\theta$ liefert:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + b;$$

daher:

$$dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}}.$$

Wählt man zum Zeitanfang den Augenblick, wo $\theta = 0$, so befindet sich der Planet in demjenigen Scheitel, welcher dem Brennpunkt am nächsten liegt und für den $r = a\,(1-e)$ ist. Man nennt denselben das Perihelium (Sonnennähe). Der entgegengesetzte Scheitel der Ellipse heisst Aphelium (Sonnenferne); in ihm hat der Leitstrahl seinen grössten Werth, nämlich $r = a\,(1+e)$. Hiernach ist $dr$ positiv vom Perihelium bis zum Aphelium und negativ von dem letzten an bis zur Rückkehr nach dem ersten. In der ersten Hälfte der Bahn muss man also nehmen:

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}};$$

in der folgenden Hälfte dagegen hat man das Zeichen der zweiten Seite zu ändern. Man könnte diesen Ausdruck leicht mittelst Kreisbögen integriren; dabei würde sein Zeichen eine ähnliche Discussion veranlassen wie die in Nro. 24 geführte. Die Einführung einer neuen Veränderlichen ist jedoch vorzuziehen.

Da $r$ beständig zwischen $a\,(1-e)$ und $a\,(1+e)$ liegt, so darf man setzen:

$$r = a\,(1 - e\cos u).$$

Der Winkel $u$ geht zu gleicher Zeit mit $\theta$ durch die Werthe $0, \pi, 2\pi$. Man hat ihm den Namen excentrische Anomalie gegeben, während $\theta$ die wahre Anomalie des Planeten genannt wird.

Macht man die Substitution für $r$ in dem Werthe von $dt$, und schreibt zugleich statt $b$, $c$ die aus (7) entnommenen Werthe:

$$b = -\frac{\mu}{a},\ c^2 = \mu a\,(1 - e^2),$$

so kommt:

$$dt = a\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot (1 - e\cos u)\, du.$$

Beim Integriren dieser Gleichung ist zu beachten, dass $t$ und $u$ gleichzeitig Null werden. Es ergiebt sich daher, indem wir der Kürze wegen $a\sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{n}$ setzen:

$$nt = u - e\sin u.$$

Hierdurch wird $u$ als Function von $t$ bestimmt, und dann auch $r$ vermöge

$$r = a\,(1 - e\cos u).$$

Schliesslich liefert die Bahngleichung $\theta$ als Function von $r$, folglich von $t$.

Man kann $\theta$ auch direct als Function von $u$ und somit von $t$ erhalten. Es ist nämlich:

$$d\theta = \frac{c\,dt}{r^2} = \frac{c\,dr}{r\sqrt{br^2 + 2\mu r - c^2}} = \frac{du}{1 - e\cos u}\sqrt{1 - e^2}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setzt man:

$$\tang \tfrac{1}{2} u = z,$$

welches

$$\frac{du}{(\cos \frac{1}{2} u)^2} = 2\,dz$$

giebt. Da nun

$$\cos u = (\cos \tfrac{1}{2} u)^2 - (\sin \tfrac{1}{2} u)^2,$$

so findet sich:

$$d\theta = \frac{2\,dz\sqrt{1 - e^2}}{1 - e + (1 + e)z^2}, \text{ daher } \tfrac{1}{2}\theta = \arc\tang z\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} + c_1.$$

Die Constante $c_1$ ist Null, weil $\theta$ und $z$ gleichzeitig Null werden. Wir erhalten demnach:

$$z\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} = \tang \tfrac{1}{2}\theta$$

oder:

$$\tang \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \tang \tfrac{1}{2} u.$$

Damit ist $\theta$ durch $u$, also mittelbar durch $t$ gegeben.

26. Aus der Gleichung $nt = u - e\sin u$ lässt sich die Umlaufszeit $T$ des Planeten bestimmen, indem man $u = 2\pi$ setzt. Man findet:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

Derselbe Werth wird erhalten, wenn man den Flächeninhalt der Ellipse theilt durch die vom Radius in der Zeiteinheit beschriebene Fläche. Die Halbaxen der Ellipse sind $a$ und $a\sqrt{1-e^2}$, ihr Flächeninhalt beträgt folglich $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$; und theilt man diesen durch $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, so findet sich in der That $2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$.

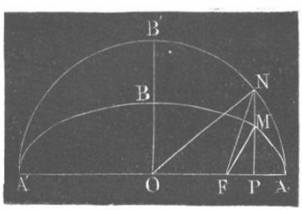
Die Geschwindigkeit in jedem Punkt wird mittelst der Gleichung gegeben:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

welche aus (2) hervorgeht, wenn man $-\frac{\mu}{a}$ statt $b$ schreibt.

27. Die in Nro. 25 gefundenen Formeln, welche $t$, $r$, $\theta$ durch die Hülfsvariable $u$ ausdrücken, können leicht geometrisch erwiesen werden, wobei man zugleich die Bedeutung dieser Grösse erfährt.

Fig. 4.




Es sei $O$ (Fig. 4) der Mittelpunkt der Ellipse, $F$ der zu betrachtende Brennpunkt und $M$ irgend ein Punkt der Curve. Die Ordinate $MP$ treffe in $N$ den Kreis, welcher über der grossen Axe $AA'$ als Durchmesser beschrieben ist. Man hat dann:

$$MFA = \theta,\ MF = r,\ OF = ae,\ \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}.$$

Dieses festgesetzt behaupten wir, dass der Winkel $NOA$ nichts Anderes sei als die mit dem Namen der excentrischen Anomalie bezeichnete Grösse $u$. Und in der That, dem bekannten Ausdruck für den Leitstrahl der Ellipse zufolge ist:

$$r = a - e \cdot OP = a\,(1 - e \cos NOA),$$

also, wenn $NOA$ durch $u$ bezeichnet wird:

$$r = a\,(1 - e \cos u).$$

Suchen wir jetzt $t$ in $u$ auszudrücken, und betrachten deswegen den während der Zeit $t$ beschriebenen elliptischen Sector

$MFA$. Da die doppelte in der Zeiteinheit durchstrichene Fläche $c = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$ beträgt, so folgt:

$$sect\ MFA = \tfrac{1}{2}\, t \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{n a^2 \sqrt{1 - e^2}}{2}\, t,$$

wenn man wie oben $\frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}} = n$ setzt. Derselbe Sector lässt sich noch auf eine andere Weise durch $u$ darstellen. Weil die zu gleicher Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse, und des Kreises beständig in dem Verhältniss $b : a$ stehen, hat man nämlich:

$$sect\ MFA = \frac{b}{a}\ sect\ NFA = \sqrt{1 - e^2}\,(NOA - NOF).$$

Nun ist:

$$NOA = \frac{a^2}{2}\, u,\ NOF = \frac{NO \cdot OF\ sin\, u}{2} = \frac{a^2 e\ sin\, u}{2},$$

mithin:

$$sect\ MFA = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{2}\,(u - e\ sin\, u).$$

Die Vergleichung beider Werthe des Sectors liefert:

$$n t = u - e\ sin\, u.$$

Um zwischen $\theta$ und $u$ eine Relation zu erhalten, braucht man nur die Ausdrücke von $r$ durch jede dieser beiden Grössen gleichzusetzen. Das giebt:

$$\frac{1 - e^2}{1 + e\ cos\, \theta} = 1 - e\ cos\, u,\ \text{woraus}\ cos\, \theta = \frac{cos\, u - e}{1 - e\ cos\, u}.$$

Man muss nun suchen, diese Gleichung auf eine solche Form zu bringen, welche sich besser eignet zur Berechnung von $\theta$ für gegebene Werthe von $u$. Hierzu hat man:

$$1 - cos\, \theta = \frac{(1 + e)(1 - cos\, u)}{1 - e\ cos\, u},\ 1 + cos\, \theta = \frac{(1 - e)(1 + cos\, u)}{1 - e\ cos\, u}.$$

Wenn wir beide Gleichungen durch einander dividiren und zugleich die Quadratwurzeln ausziehen, so findet sich:

$$tang\ \tfrac{1}{2}\, \theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\ tang\ \tfrac{1}{2}\, u,$$

worin der absolute Werth der Wurzel gemeint ist.

28. Bevor wir zur Aufsuchung von solchen Formeln übergehen, welche für die Ortsbestimmung des Planeten bequemer

sind, wollen wir zeigen, wie die bisher gefundenen sich vereinfachen, wenn man blos die erste Potenz von $e$ berücksichtigt.

Aus $u = nt + e \sin u$ folgt:

$$u = nt + e \sin(nt + e \sin u),$$

und hieraus durch Vernachlässigen von $e^2$:

$$u = nt + e \sin nt.$$

Man hat ferner:

$$r = a\,(1 - e \cos u).$$

Vernachlässigt man auch hier $e^2$, so wird:

$$r = a\,(1 - e \cos nt).$$

Es bleibt nur noch $\theta$ zu bestimmen. Man könnte diese Coordinate aus der Bahngleichung entnehmen, wohinein der eben für $r$ gefundene Werth zu substituiren wäre. Man thut aber besser, $\theta$ direct aus

$$r^2 d\theta = c\,dt = dt \sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}$$

zu berechnen. Da mit Weglassung von $e^2$ die Gleichung der Ellipse

$$r = a\,(1 - e \cos \theta),\ r^2 = a^2 (1 - 2e \cos \theta)$$

liefert, so wird:

$$d\theta\,(1 - 2e \cos \theta) = dt \frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}} = n\,dt.$$

Integriren wir und beachten dabei, dass $t$ und $\theta$ gleichzeitig Null werden, so ergiebt sich:

$$nt = \theta - 2e \sin \theta;$$

und hieraus, indem man wieder $e^2$ weglässt:

$$\theta = nt + 2e \sin nt.$$

29. Die Winkelbewegung des Planeten würde gleichförmig sein, wenn man das Glied $2e \sin nt$ vernachlässigen dürfte. Aber man kann sich immer einen Planeten fingiren, dessen gleichförmige Winkelbewegung durch die Gleichung $\theta = nt$ bestimmt wird, und welcher vom Perihelium gleichzeitig mit dem wirklichen Planeten ausgeht. Beide treffen nach der Zeit $\frac{\pi}{n}$ im Aphelium ein und erreichen das Perihelium wieder, wenn $t = \frac{2\pi}{n}$. In der ersten Hälfte der Bahn ist der wirkliche Planet dem fingirten um eine Winkelgrösse voraus, welche den angenäherten Werth $2e \sin nt$ hat und Gleichung des Mit-

telpunkts genannt wird. In der zweiten Hälfte bleibt dagegen der wirkliche Planet hinter dem fingirten zurück, weil nun $\sin nt$ negativ ist. Im Perihelium sowohl als im Aphelium treffen sie stets zusammen.

Der Winkel $nt$ führt den Namen der mittleren Anomalie; auch heisst derselbe die mittlere Bewegung des Planeten.

Bei der Erde ist die Annahme eines solchen fingirten Gestirns zur Bestimmung der mittleren Zeit von Nutzen. Auf diese Weise werden diejenigen Unterschiede der wahren Sonnentage ausgeglichen, welche durch die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Bewegung der Sonne in der Ekliptik entstehen. Ausserdem bedarf es noch der Correction jener Unterschiede, welche die Neigung der Ekliptik gegen den Aequator verursacht. Hierzu gelangt man durch Annahme eines zweiten Gestirns, dessen Bewegung in der Ebene des Aequators gleichförmig und während derselben Zeit vor sich geht, in welcher die Sonne die Ekliptik durchzieht. Das letztere Gestirn bestimmt die sogenannte mittlere Zeit; dieselbe fällt viermal im Jahre mit der durch die wirkliche Sonne angezeigten wahren Zeit zusammen.

Wir wollen jetzt die beiden Coordinaten $r$, $\theta$ als entwickelte Functionen von $t$ herstellen. Dabei machen wir von der Formel des Lagrange Gebrauch, deren Beweis hier Platz finden mag.

## Formel des Lagrange zur Entwicklung gewisser unentwickelten Functionen.

30. Betrachten wir diejenige Function $z$ der Veränderlichen $x$, welche durch die Gleichung

$$z = x + \alpha f(z) \tag{1}$$

bestimmt ist, wo $f$ irgend eine gegebene Function, $\alpha$ aber eine sehr kleine Grösse bezeichnet; und stellen wir uns die Aufgabe, $z$ nach Potenzen von $\alpha$ zu entwickeln. Die Coëfficienten dieser Potenzen werden Functionen von $x$ sein; und zwar sind sie dem Maclaurin'schen Lehrsatz zufolge $z$ und alle partiellen Ableitungen von $z$ nach $\alpha$, worin man durchaus für $\alpha$

die Null zu setzen hat. Demnach handelt es sich um das Gesetz dieser Ableitungen.

Das Problem, mit welchem wir beginnen, ist nur ein besonderer Fall von demjenigen, welches wir im Auge haben, nämlich von der Entwicklung einer beliebigen Function von $z$ nach Potenzen von $\alpha$.

Statt der Reihe, die wir suchen, könnte man sich successiver Substitutionen bedienen, um mehr und mehr angenäherte Werthe für $z$ zu finden. Indem man im zweiten Theile der Gleichung (1) statt $z$ den ersten Näherungswerth $x$ setzt, wird

$$z = x + \alpha f(x).$$

Die Substitution dieses neuen, dem wahren $z$ schon näher kommenden Werthes liefert:

$$z = x + \alpha f[x + \alpha f(x)];$$

und so könnte man fortfahren. Dadurch würden aber sehr verwickelte Formeln erhalten, welche keine genaue Schätzung des Grades der Annäherung erlauben; und dies ist der Grund, weshalb man eine nach Potenzen von $\alpha$ fortschreitende Entwicklung gesucht hat, welche um so rascher convergirt, je kleiner $\alpha$ ist.

Der Lehrsatz des Maclaurin giebt:

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2 z}{d\alpha^2}\right)_0 \frac{\alpha^2}{2} + \cdots + \left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0 \frac{\alpha^m}{m!} + \cdots$$

Wir müssen daher die Werthe bestimmen, welche $z$ und seine Ableitungen für $\alpha = 0$ annehmen. Die Gleichung (1) zeigt, dass

$$z_0 = x;$$

folglich bleibt allgemein $\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0$ zu finden.

Um dies zu erreichen, differenziiren wir zunächst (1) partiell nach jeder von den beiden Grössen $x$ und $\alpha$, diese als unabhängige Variablen betrachtet. Dann findet sich:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \alpha f'(z)\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z) + \alpha f'(z)\frac{dz}{d\alpha},$$

und hieraus durch Wegschaffen von $f'(z)$:

$$\frac{dz}{d\alpha} = f(z)\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

Diese Formel führt die Differentiationen von $z$ nach $\alpha$ zurück

auf solche nach $x$, deren Anwendung sehr vortheilhaft ist, wie wir sehen werden.

Man erhält aus (2) sogleich $\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0$; für $\alpha = 0$ wird nämlich $z = x$ und $\frac{dz}{dx} = 1$, also:

$$\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)_0 = f(x).$$

Um $\frac{d^2z}{d\alpha^2}$ zu erhalten, differenziiren wir (2) nach $\alpha$ und bekommen:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + f(z)\frac{d^2z}{dx\,d\alpha} = f(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)\frac{d^2z}{dx\,d\alpha}.$$

Die Differentiation von (2) in Bezug auf $x$ giebt:

$$\frac{d^2z}{dx\,d\alpha} = f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)\frac{d^2z}{dx^2};$$

und wenn man diesen Werth in die vorletzte Gleichung einsetzt, so folgt:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = 2f(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)^2\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Das zweite Glied ist die Ableitung von $(fz)^2\frac{dz}{dx}$ nach $x$; daher

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{d\left[(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{dx};$$

für $\alpha = 0$ wird

$$\left(\frac{d^2z}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{d\cdot(fx)^2}{dx}.$$

Die Werthe aller folgenden Ableitungen von $z$ in Bezug auf $\alpha$ für $\alpha = 0$ lassen sich finden durch wiederholte Differentiation der verschiedenen Potenzen von $f(x)$ nach $x$, was jetzt gezeigt werden soll.

Wollte man $\frac{d^3z}{d\alpha^3}$ erhalten, so müsste man den zweiten Theil von (3) nach $\alpha$ differenziiren. Die Reihenfolge der Differentiationen ist gleichgültig; man kann deshalb zuerst $(fz)^2\frac{dz}{dx}$

nach $\alpha$ und darauf das Resultat nach $x$ differenziiren. Um jedoch die Wiederholung der nämlichen Reductionen zu vermeiden, wollen wir allgemein von $\varphi(z)\frac{dz}{dx}$ die Ableitung nach $\alpha$ nehmen und dieselbe auf Ableitungen nach $x$ zurückbringen.

Man erhält zunächst:

$$\frac{d\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \varphi'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\frac{d^2z}{dx\,d\alpha}.$$

Dieser Ausdruck geht durch Einsetzen der oben gefundenen Werthe für $\frac{dz}{d\alpha}$, $\frac{d^2z}{dx\,d\alpha}$ in den folgenden über:

$$\varphi'(z)f(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z)f(z)\frac{d^2z}{dx^2},$$

welcher die Ableitung von $\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}$ in Bezug auf $x$ vorstellt. Somit haben wir die allgemeine Formel:

$$(4)\qquad \frac{d\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Mit Hülfe derselben könnte man (3) aus (2) ableiten, indem man $\varphi(z) = f(z)$ setzte.

Setzt man $\varphi(z) = (fz)^2$, so wird

$$\frac{d\left[(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[(fz)^3\frac{dz}{dx}\right]}{dx};$$

daraus folgt mit Rücksicht auf (3), wenn man nach $x$ differenziirt:

$$\frac{d^3z}{d\alpha^3} = \frac{d^2\left[(fz)^3\frac{dz}{dx}\right]}{dx^2}.$$

Von hier geht man durch $\varphi(z) = (fz)^3$ zu $\frac{d^4z}{d\alpha^4}$ über.

Das in diesen ersten Formeln ausgesprochene Gesetz hat allgemeine Geltung. Denn nehmen wir an, dass

$$\frac{d^n z}{d\alpha^n} = \frac{d^{n-1}\left[(fz)^n \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}};$$

so kommt, indem wir beide Glieder mit Benutzung von (4), worin $\varphi(z) = (fz)^n$ zu setzen ist, nach $\alpha$ differenziiren:

$$\frac{d^{n+1} z}{d\alpha^{n+1}} = \frac{d^n\left[(fz)^{n+1} \frac{dz}{dx}\right]}{dx^n}.$$

Weil nun das für die Ordnung $n$ angenommene Gesetz auch für die nächste $n+1$ besteht und es sich bei den ersten Derivirten bewährt hat, so ist seine Allgemeinheit bewiesen; mithin:

$$(5) \qquad \frac{d^m z}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}\left[(fz)^m \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{m-1}}.$$

Für $\alpha = 0$ hat man $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$; folglich:

$$\left(\frac{d^m z}{d\alpha^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}\left[(fx)^m\right]}{dx^{m-1}}.$$

Die Entwicklung von $z$ ist daher:

$$(6) \qquad \begin{cases} z = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d(fx)^2}{dx} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^2(fx)^3}{dx^2} + \cdots \\ \qquad + \frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}(fx)^m}{dx^{m-1}} + \cdots \end{cases}$$

31. Nehmen wir jetzt die Entwicklung einer beliebigen Function $F(z)$ nach Potenzen von $\alpha$ vor; dabei soll $z$ noch immer durch die Gleichung (1) bestimmt bleiben.

Der Lehrsatz des Maclaurin liefert:

$$F(z) = F(z)_0 + \left(\frac{dF}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \left(\frac{d^2 F}{d\alpha^2}\right)_0 \frac{\alpha^2}{2} + \cdots$$
$$+ \left(\frac{d^m F}{d\alpha^m}\right) \frac{\alpha^m}{m!} + \cdots.$$

Das erste Glied kann nur $F(x)$ sein; denn $z$ wird $x$ für $\alpha = 0$. Demnach bleibt allgemein $\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m}\right)_0$ zu bestimmen.

Zunächst ist:

$$\frac{dF}{d\alpha} = F'(z)\frac{dz}{d\alpha} = F'(z)f(z)\frac{dz}{dx}.$$

Um $\frac{d^2F}{d\alpha^2}$ zu erhalten, muss man die zweite Seite nach $\alpha$ differenziiren. Mittelst der Gleichung (4) lässt sich diese Differentiation in eine solche nach $x$ verwandeln; man findet dadurch:

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = \frac{d\left[F'(z)(fz)^2\frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Vermöge (4) führt diese Gleichung zu:

$$\frac{d^3F}{d\alpha^3} = \frac{d^2\left[F'(z)(fz)^3\frac{dz}{dx}\right]}{dx^2}.$$

Auf gleiche Weise geht es fort, indem sich jedesmal der Exponent von $(fz)$ sowie der Ableitungszeiger des Products um eine Einheit erhöht. Wir haben folglich allgemein:

$$\frac{d^mF}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}\left[F'(z)(fz)^m\frac{dz}{dx}\right]}{dx^{m-1}}.$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, also $z = x$ und $\frac{dz}{dx} = 1$, dann wird:

$$\left(\frac{d^mF}{d\alpha^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}\left[F'(x)(fx)^m\right]}{dx^{m-1}}.$$

Somit sind sämmtliche Coëfficienten der Entwicklung von $F(z)$ durch Differentiation bekannter Functionen von $x$ nach dieser Veränderlichen ausgedrückt. Die gesuchte Entwicklung ist:

$$(7)\quad \begin{cases} F(z) = F(x) + \alpha F'(x)f(x) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d[F'(x)(fx)^2]}{dx} + \cdots \\ \qquad \cdots + \frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}\left[F'(x)(fx)^m\right]}{dx^{m-1}} + \cdots \end{cases}$$

## Auflösung des Kepler'schen Problems.

32. Dieses Problem bezweckt die Entwicklung der Polarcoordinaten $r$, $\theta$ eines Planeten als Functionen der unabhän-

gigen Variablen $t$. Wir werden dasselbe für die elliptische Bewegung lösen unter der Voraussetzung, dass $e$ ein sehr kleiner Bruch sei, was bei den meisten Planeten stattfindet. Für die Erdbahn z. B. ist:

$$e = 0{,}01685318.$$

Zwischen $r$, $\theta$, $t$ und der Hülfsgrösse $u$ haben wir nachstehende Gleichungen gefunden:

$$u = nt + e \sin u, \tag{8}$$

$$r = a(1 - e \cos u), \tag{9}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tang \tfrac{1}{2} u. \tag{10}$$

Aus ihnen ergeben sich $t$, $r$, $\theta$ auf bequeme Weise durch $u$. Dagegen werden mühsame Interpolirungen nothwendig zur Bestimmung von $r$ und $\theta$ für einen gegebenen Werth von $t$. Um dieser Unbequemlichkeit zu entgehen, hat man gesucht, die Grössen $r$, $\theta$ durch $t$ direct auszudrücken.

Die Gleichung (8) trifft mit (1) zusammen, wenn man $z = u$, $x = nt$, $\alpha = e$, $f(z) = \sin u$ nimmt; dadurch wird $f(x) = \sin x = \sin nt$. Macht man diese Substitutionen in (6), so erhält man unmittelbar folgende Entwicklung des $u$ nach Potenzen von $e$:

$$u = x + e \sin x + \frac{e^2}{2}\frac{d \cdot \sin x^2}{dx} + \cdots + \frac{e^m}{m!}\frac{d^{m-1} \cdot \sin x^m}{dx^{m-1}} + \cdots;$$

dabei wurde der Kürze wegen $x$ statt $nt$ beibehalten.

Folgende Gleichungen drücken die Potenzen von $\sin x$ durch Sinus und Cosinus der Vielfachen von $x$ aus:

$$\begin{aligned}
2 \sin x^2 &= -\cos 2x + 1,\\
2^2 \sin x^3 &= -\sin 3x + 3 \sin x,\\
2^3 \sin x^4 &= \cos 4x - 4 \cos 2x + 3,\\
2^4 \sin x^5 &= \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x,\\
2^5 \sin x^6 &= -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10.
\end{aligned}$$

Man erhält hieraus mittelst Differenziiren nach vorhergegangener Division durch die links stehenden Potenzen von 2:

$$\frac{d \cdot \sin x^2}{dx} = \sin 2x,$$

$$\frac{d^2 \cdot \sin x^3}{dx^2} = \frac{3^2 \sin 3x - 3 \sin x}{2^2},$$

$$\frac{d^3 . \sin x^4}{d x^3} = 2^3 \sin 4 x - 4 \sin 2 x,$$

$$\frac{d^4 . \sin x^5}{d x^4} = \frac{5^4 \sin 5 x - 5 . 3^4 \sin 3 x + 10 \sin x}{2^4},$$

$$\frac{d^5 . \sin x^6}{d x^5} = 3^5 \sin 6 x - 6 . 2^5 \sin 4 x + 3 \cdot 5 \sin 2 x.$$

Machen wir diese Substitutionen und ersetzen zugleich $x$ durch $nt$, so folgt:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u = nt &+ e \sin nt + \frac{e^2}{2} \sin 2 nt \\ &+ \frac{e^3}{2^3} (3 \sin 3 nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2.3} (2 \sin 4 nt - \sin 2 nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^7.3} (5^3 \sin 5 nt - 3^4 \sin 3 nt + 2 \sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^4.3.5} (3^4 \sin 6 nt - 2^6 \sin 4 nt + 5 \sin 2 nt) + \ldots \end{aligned} \right.$$

Man vermag jetzt $u$ aus jedem Werthe von $t$ bequem zu finden und könnte dann mit Hülfe von (9) und (10) auch $r$ und $\theta$ berechnen. Noch besser ist es jedoch, die Zwischengrösse $u$ zu vermeiden und deshalb $r$ sowie $\theta$ unmittelbar durch $t$ darzustellen.

33. Ausdruck des Radius vector durch die Zeit. — Zufolge der Gleichung (9) ist $\frac{r}{a}$ eine bekannte Function von $u$, welche sich durch die Formel (7) bestimmen lässt. Man muss darin nehmen:

$$F(x) = 1 - e \cos x, \; F'(x) = e \sin x$$

und wie vorher:

$$\alpha = e, \; f(x) = \sin x, \; x = nt.$$

Dies ergiebt:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos x + e^2 \sin x^2 + \frac{e^3}{2} \frac{d . \sin x^3}{dx} + \frac{e^4}{2.3} \frac{d^2 . \sin x^4}{dx^2} + \frac{e^5}{2.3.4} \frac{d^3 . \sin x^5}{dx^3} + \ldots.$$

Man hat nun:

$$\sin x^2 = \frac{- \cos 2x + 1}{2},$$

$$\frac{d.\sin x^3}{dx} = \frac{-3\cos 3x + 3\cos x}{2^2},$$

$$\frac{d^2.\sin x^4}{dx^2} = -2\cos 4x + 2\cos 2x,$$

$$\frac{d^3.\sin x^5}{dx^3} = \frac{-5^3\cos 5x + 5.3^3\cos 3x - 5.2\cos x}{2^4},$$

$$\frac{d^4.\sin x^6}{dx^4} = \frac{-3^4\cos 6x + 6.2^4\cos 4x - 3.5\cos 2x}{2},$$

. . . . . .

Durch Einsetzen dieser Werthe in den Ausdruck für $\frac{r}{a}$, wobei wir zugleich $nt$ statt $x$ schreiben, erhalten wir:

$$12)\begin{cases} \frac{r}{a} = 1 - e\cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3\cos 3nt - 3\cos nt) \\ -\frac{e^4}{3}(\cos 4nt - \cos 2nt) - \frac{e^5}{2^7.3}(5^3\cos 5nt - 5.3^3\cos 3nt + 5.2\cos nt) \\ -\frac{e^6}{2^4.5}(3^3\cos 6nt - 2^5\cos 4nt + 5\cos 2nt) - \ldots \end{cases}$$

34. Die wahre Anomalie ausgedrückt durch die Zeit. — Es erübrigt noch der Ausdruck von $\theta$ durch $t$. Zuerst liefert die Gleichung (10) mit Hülfe eleganter Transformationen, welche man Lagrange verdankt, $\theta$ als Function von $u$, $\sin u$, $\sin 2u$, etc. Ersetzt man diese Grössen durch ihre Entwicklungen nach Potenzen von $e$, so hat man die Lösung der Aufgabe.

Indem wir statt der Tangenten die Quotienten der Sinus durch die Cosinus nehmen und letztere durch imaginäre Exponentialgrössen ausdrücken, geht die Gleichung (10), wenn hier $\varepsilon$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, über in:

$$\frac{\varepsilon^{\theta i} - 1}{\varepsilon^{\theta i} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{\varepsilon^{ui} - 1}{\varepsilon^{ui} + 1};$$

dabei hat $i$ die Bedeutung von $\sqrt{-1}$. Man findet daraus:

$$\varepsilon^{\theta i} = \frac{\varepsilon^{ui}(\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}) + \sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}}{\varepsilon^{ui}(\sqrt{1-e} - \sqrt{1+e}) + \sqrt{1-e} + \sqrt{1+e}}.$$

Setzen wir:

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e}-\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}+\sqrt{1-e}} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

dann folgt:

$$\varepsilon^{\theta i} = \frac{\varepsilon^{ui}-\lambda}{1-\lambda\varepsilon^{ui}} = \varepsilon^{ui}\,\frac{1-\lambda\varepsilon^{-ui}}{1-\lambda\varepsilon^{ui}}.$$

Nehmen wir von beiden Gliedern die natürlichen Logarithmen und theilen darauf durch $i$; das liefert:

$$\theta = u + \frac{log(1-\lambda\varepsilon^{-ui}) - log(1-\lambda\varepsilon^{ui})}{i}.$$

Man darf die Logarithmen entwickeln, weil $\lambda < 1$; schreibt man zugleich statt der imaginären Exponentialgrössen die entsprechenden Sinus und Cosinus, so ergiebt sich:

$$\theta = u + 2\left(\lambda\, sin\, u + \frac{\lambda^2}{2} sin\, 2u + \frac{\lambda^3}{3} sin\, 3u + \frac{\lambda^4}{4} sin\, 4u + \ldots\right).$$

Für $u$, $sin\, u$, $sin\, 2u$, .... müssen die nach $e$ fortschreitenden Entwicklungen substituirt werden, welche die Formel des Lagrange liefert. Der Werth von $u$ ist bereits durch (11) gegeben; und aus (8) erhält man:

$$sin\, u = \frac{u-nt}{e} = sin\, nt + \frac{e}{2} sin\, 2nt + \frac{e^2}{2^3}(3\, sin\, 3nt - sin\, nt) + \ldots.$$

Nach der Formel des Lagrange findet man:

$$sin\, 2u = sin\, 2nt + e(sin\, 3nt - sin\, nt) + e^2(sin\, 4nt - sin\, 2nt)$$
$$+ \frac{e^3}{2^3.3}(25\, sin\, 5nt - 27\, sin\, 3nt + 4\, sin\, nt) + \ldots,$$

$$sin\, 3u = sin\, 3nt + \frac{e}{2}(3\, sin\, 4nt - 3\, sin\, 2nt)$$
$$+ \frac{e^2}{2^3}(15\, sin\, 5nt - 18\, sin\, 3nt + 3\, sin\, nt)$$
$$+ \frac{e^3}{4}(9\, sin\, 6nt - 12\, sin\, 4nt + 3\, sin\, 2nt) + \ldots.$$

Nun bleiben noch die Potenzen von $\lambda$ nach $e$ zu entwickeln. Wir setzen zu dem Ende:

$$1 + \sqrt{1-e^2} = E,$$

wodurch

$$E = 2 - \frac{e^2}{E}$$

wird. Die Formel (7) liefert die Entwicklung von $E^{-p}$ nach Potenzen von $e^2$; dabei ist zu nehmen:

$$z = E,\ x = 2,\ \alpha = e^2,\ F(z) = z^{-p} = E^{-p}.$$

Es ergiebt sich:

$$E^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}} e^2 + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}} e^4 + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}} e^6 + \ldots.$$

Da nun:

$$\lambda = eE^{-1},$$

so hat man:

$$\lambda^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}} e^{p+2} + \frac{p(p+3)}{2.2^{p+4}} e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2.3.2^{p+6}} e^{p+6} + \ldots$$

Wir substituiren jetzt die aus dieser Formel hervorgehenden Werthe der verschiedenen Potenzen von $\lambda$ zugleich mit den Werthen von $u$, $\sin u$, $\sin 2u$, etc. in den Ausdruck für $\theta$ und erhalten dadurch bei Weglassung höherer Potenzen von $e$ als die sechste:

$$(13)\quad \begin{cases} \theta = nt + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin nt \\ \qquad + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right) \sin 2nt \\ \qquad + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right) \sin 3nt \\ \qquad + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right) \sin 4nt \\ \qquad + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5nt + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6nt, \end{cases}$$

oder, wenn man nach Potenzen von $e$ ordnet:

$$(14)\quad \begin{cases} \theta = nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt \\ \qquad + \frac{e^3}{2^2.3}(13 \sin 3nt - 3 \sin nt) \\ \qquad + \frac{e^4}{2^5.3}(103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt) \\ \qquad + \frac{e^5}{2^6.3.5}(1097 \sin 5nt - 645 \sin 3nt + 50 \sin nt) \\ \qquad + \frac{e^6}{2^6.3.5}(1223 \sin 6nt - 902 \sin 4nt + 85 \sin 2nt). \end{cases}$$

Mit Vernachlässigung aller höheren Potenzen von $e$ als die erste geben (12) und (14) die bereits in Nro. 28 gefundenen Formeln:

$$r = a(1 - e \cos nt),$$
$$\theta = nt + 2e \sin nt.$$

Ebenso giebt die Gleichung (11):

$$u = nt + e \sin nt.$$

## Bewegung irgend eines Systems materieller Punkte.

35. Nur der Fall ist gemeint, wo Verbindungen bestehen zwischen den Punkten des Systems; denn ausserdem wäre die Bewegung eines jeden für sich nach dem bisher Vorgetragenen zu bestimmen.

Nehmen wir an, dass die Verbindungen durch Gleichungen ausgedrückt werden, und zwar seien es $k$ Gleichungen:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0 \ldots,$$

denen die Zeit und die Coordinaten der Punkte in jedem Augenblick zu genügen haben. Kennt man Grösse und Richtung der Kräfte, welche auf jeden Punkt wirken und von seiner Lage abhängen können sowie von der Zeit; kennt man ferner die Anfangslagen aller Punkte sowie Grösse und Richtung ihrer Anfangsgeschwindigkeiten; dann ist offenbar die Bewegung vollkommen bestimmt, und die Coordinaten jedes Punktes hängen von der Zeit auf eine ganz bestimmte Weise ab. Bezeichnet $n$ die Anzahl der materiellen Punkte, so hat man zwischen ihren $3n$ Coordinaten und der Zeit noch $3n-k$ Gleichungen zu finden, da bereits $k$ Gleichungen bekannt sind. Nachdem man dies erreicht hat, ist die Aufgabe vollständig gelöst, denn man vermag nun für jeden Augenblick die Lagen sämmtlicher Punkte folglich auch alle Umstände der Bewegung anzugeben. Die fehlenden $3n-k$ Gleichungen werden mit Hülfe des nachstehenden Princips erhalten, das man d'Alembert verdankt.

### Princip des d'Alembert.

36. Dieses Princip führt die Bestimmung der Bewegung irgend eines Systems auf die Betrachtung seines Gleichgewichts zurück.

Kräfte, welche auf Punkte wirken, die gewissen Verbindungen unterworfen sind, bringen im Allgemeinen nicht dieselben Bewegungen hervor, wie wenn die Punkte getrennt und frei wären. Könnte man die von den Verbindungen ausgeübten Kräfte berechnen, so dürfte man sämmtliche Punkte als vollkommen frei betrachten, wenn man diese Kräfte an jedem Punkt zu denen hinzunähme, die ihn von aussen angreifen. Bezeichne $m$ die Masse eines beliebigen Punktes des Systems und $x$, $y$, $z$ seine Coordinaten; die Componenten der ihn angreifenden Gesammtkraft $Q$ (mit Einbegriff der von den Verbindungen herrührenden) sind dann beziehlich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Nun sei $P$ die gegebene äussere Kraft, welche auf den Punkt $m$ wirkt. Bringen wir an diesem die Kraft $Q$ an so wie die mit ihr gleiche und entgegengesetzte $Q_1$, und verfahren wir ebenso für alle anderen Punkte. Die Kräfte $Q$, $Q_1$ vernichten sich an jedem Punkt und erzeugen deshalb keine Wirkung zwischen verschiedenen Punkten. Durch ihre Einführung wird folglich nichts geändert weder an der Bewegung noch an den Wirkungen, welche auf die verschiedenen Theile des Systems ausgeübt werden.

Wie bemerkt, darf man den Punkt $m$ als frei betrachten, wenn man die Kräfte einführt, welche die Verbindungen des Systems auf ihn äussern. Diese Kräfte müssen demnach $P$ und $Q_1$ das Gleichgewicht halten. Denn $Q$ würde dem Punkt, wenn er frei wäre, genau die Bewegung ertheilen, welche er wirklich befolgt. Wenn daher $P$ und $Q_1$ nicht aufgehoben würden durch die Kräfte der Verbindungen, so würden sie sich mit ihnen zusammensetzen und eine Resultante geben, welche verbunden mit $Q$ den freien Punkt in dieselbe Bewegung versetzen müsste wie $Q$ allein; was unmöglich ist. Es ist somit bewiesen, dass die Verbindungen des Systems in jedem Augenblick solche Kräfte entwickeln, welche den mit $P$ und $Q_1$ bezeichneten sämmtlicher Punkte das Gleichgewicht halten. Man kann daher das nachstehende Princip des d'Alembert aussprechen:

Bei der Bewegung irgend eines Systems von Punkten, die in ganz beliebigen Verbindungen

stehen können und durch irgend welche Kräfte angegriffen werden, findet mit Hülfe der Verbindungen jeden Augenblick Gleichgewicht statt zwischen diesen Kräften und zwischen solchen, welche gleich und entgegengesetzt sind mit jenen, die jedem einzelnen materiellen Punkt, wenn er frei wäre, diejenige Bewegung ertheilen würden, welche er wirklich befolgt.

Was die auf das System ausgeübten Wirkungen betrifft, so ändern sich dieselben im Allgemeinen jeden Augenblick und werden hervorgebracht durch die veränderlichen Kräfte, welche sich fortwährend an dem System das Gleichgewicht halten.

37. Wir wollen nun sehen, wie man durch das d'Alembert'sche Princip so viele Gleichungen erhalten kann, als unabhängige Coordinaten vorhanden sind. $X$, $Y$, $Z$ mögen die bekannten Componenten der äusseren Kraft an dem Punkt von der Masse $m$ bedeuten; $X'$, $Y'$, $Z'$ diejenigen an $m'$, und so fort. Diese Kräfte können bei einer beliebigen Anzahl Punkte auch Null sein. Nach dem zuvor Gesagten muss in jedem Augenblick am System Gleichgewicht stattfinden zwischen ihnen und den Kräften, welche beziehlich an den einzelnen Punkten die Componenten haben:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ -m'\frac{d^2y'}{dt^2},\ -m'\frac{d^2z'}{dt^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

während $x$, $y$, $z$, $x'$, .... die Coordinaten der Punkte vorstellen. Mit anderen Worten, es müssen sich an dem System folgende Kräfte, die auf $m$, $m'$, .... parallel mit den Coordinatenaxen wirken, das Gleichgewicht halten:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},\ \ldots.$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2},\ \ldots.$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2},\ Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2},\ \ldots$$

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert die Gleichgewichtsbedingungen durch nachstehende Gleichung, worin rechtwinklige Axen vorausgesetzt sind:

$$(1)\quad \sum\left\{\begin{aligned}\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \\ + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\end{aligned}\right\} = 0.$$

Hier bezeichnen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ die Componenten irgend einer unendlich kleinen Verrückung, welche man dem Punkt $(x, y, z)$ in einem beliebigen Augenblick der Bewegung ertheilen kann, ohne dadurch die Bedingungen zu verletzen, denen das System gerade in dem betrachteten Augenblick unterliegt. Die Zeit kommt bei diesen virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ nicht in Betracht. Die Summe $\Sigma$ erstreckt sich über alle materiellen Punkte des Systems, und für $X$, $Y$, $Z$ werden Nullen gesetzt bei jenen Punkten, auf welche keine äussere Kraft wirkt.

Die Gleichung (1) enthält $3n$ Variationen, wenn $n$ die Zahl der Punkte ist. Und zwar müssen diese Variationen, weil die virtuelle Verrückung des Systems mit dessen Verbindungen verträglich sein soll, den Differentialgleichungen der $k$ Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ... genügen; welches giebt:

$$(2)\quad \begin{cases}\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \cdots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \frac{dM}{dx'}\delta x' + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Wenn die Bedingungsgleichungen auch die Zeit explicit enthalten sollten, so darf man letztere doch nicht variiren. Mit Hülfe von (2) lassen sich $k$ Variationen aus (1) wegschaffen, so dass nur noch $3n - k$ vollkommen unbestimmte übrig bleiben. Indem wir den Coëfficienten einer jeden von diesen der Null gleich setzen, erhalten wir $3n - k$ Gleichungen, welche in Verbindung mit den $k$ gegebenen die Coordinaten aller Punkte durch die Zeit bestimmen. Damit ist die Aufgabe auf Integration von Differentialgleichungen hinausgebracht.

38. Multiplicirt man die Gleichungen (2) durch unbestimmte Factoren $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ..., addirt sie darauf zu (1) hinzu und setzt dann die Coëfficienten aller Variationen der Null gleich, so erhält man:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \cdots = 0,$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \cdots = 0,$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \cdots = 0,$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \cdots = 0,$$

. . . . . .

Eliminirt man nun die $k$ unbestimmten Multiplicatoren $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ..., so ergeben sich $3n - k$ Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen $x$, $y$, $z$, $x'$, ... und der Zeit $t$. Diese Gleichungen sind dieselben wie diejenigen, welche man findet, wenn man, wie in Nro. 37 angegeben wurde, $k$ Variationen eliminirt. Die neue Verfahrungsart hat aber den Vortheil, welchen wir schon bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erkannten; sie bestimmt nämlich diejenigen Kräfte, welche an die Stelle der Bedingungsgleichungen treten könnten, indem die Werthe der veränderlichen Grössen $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ... die Wirkungen erkennen lassen, welche in jedem Augenblick von den Verbindungen zu tragen sind, wodurch die Punkte des Systems gezwungen werden den Bedingungsgleichungen zu genügen.

Hängt das System von anderen Variablen ab als von den Coordinaten seiner Punkte, so hat man doch immer den nämlichen Gang zu befolgen. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert stets so viele Gleichungen, als es unabhängige Variablen giebt. Nimmt man dieselben zu den Bedingungsgleichungen hinzu, so ist man im Stande alle Veränderlichen durch die Zeit zu bestimmen; und darin besteht gerade das Ziel, welches man erreichen will.

### Was versteht man unter Momentankräften? — Ihr Maass. — Bestimmung der Bewegung, welche sie erzeugen. — Zusammensetzung ihrer Wirkungen.

39. Wir haben in Nro. 174 des ersten Theils gezeigt, wie eine constante Kraft durch das von ihr hervorgebrachte Bewegungsmoment gemessen werden könne, wenn man dasselbe durch die Zeit theilt, deren die Kraft zu seiner Erzeugung bedarf. Daraus geht hervor, dass die zum Hervorbringen eines bestimmten Bewegungsmoments erforderliche Wirkungsdauer um so geringer ausfallen müsse, je grösser die aufgewendete Kraft ist. Es kann aber keine Kraft geben, die nicht dazu einer gewissen Zeit bedürfte. Nichtsdestoweniger darf man fast immer von dieser Zeit absehen, wenn die Wirkung während eines so kurzen Intervalls erfolgt, dass unterdessen in der Lage der Punkte keine bemerkbare Veränderung vorgeht. Dies wollen wir andeuten, indem wir der Kraft den Namen Momentankraft beilegen, ohne dadurch dem in Nro. 163 des ersten Theils Gesagten zu widersprechen.

Um den constanten Werth einer solchen Kraft zu messen oder, wenn sie veränderlich ist, ihren Mittelwerth, so könnte man dieselbe auf die gewöhnliche Krafteinheit beziehen, und hätte dann als Maass das von ihr hervorgebrachte Bewegungsmoment, getheilt durch die Wirkungsdauer. Weil aber die letzte nicht angebbar ist, wenigstens nicht in den Fällen, wo die Betrachtung dieser besonderen Art Kräfte Vortheil bietet, so thut man besser, nicht die Zeit in das Maass aufzunehmen, sondern auf das Bewegungsmoment sich zu beschränken. Man mag dann der Wirkung eine beliebige, wenn nur ausserordentlich kleine Dauer beilegen; für den Effect ist dies gleichgültig, wie wir bei Berechnung desselben sehen werden. Wir messen demnach eine Momentankraft durch das Bewegungsmoment, welches sie hervorbringt, wenn sie auf einen freien in Ruhe befindlichen Punkt wirkt. Und da die Zerlegung von Kräften auf gleiche Weise geschieht wie jene von Geschwindigkeiten, so folgt, dass die Componenten einer Momentankraft, wenn dieselben parallel mit gegebenen Richtungen nach den Regeln für continuirliche Kräfte genommen werden, nichts Anderes

vorstellen als solche Momentankräfte, welche den Componenten der totalen Geschwindigkeit nach den nämlichen Richtungen entsprechen.

Weil endlich die mit drei festen Axen parallelen Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes durch Wirkung irgend welcher Kräfte auf dieselbe Weise vermehrt werden, als wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null wäre; so ergiebt sich, dass die Componenten von Momentankräften, welche auf einen bewegten Punkt wirken, gemessen werden durch die Bewegungsgrössen, die den Zunahmen seiner Geschwindigkeitscomponenten entsprechen.

40. Um den Effect von Momentankräften an einem in Bewegung begriffenen System zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (1) an, lassen jedoch dabei alle anderen Kräfte ausser Acht, welche keinen merklichen Einfluss ausüben während der ganzen Dauer $\theta$ der Wirkungen der ersten, von denen die einen vor den anderen aufhören können. Innerhalb dieses Zeitintervalls darf man die Werthe von $x$, $y$, $z$, $x'$, .... als unveränderlich betrachten und, wie sich leicht sehen lässt, auch die von $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, .... In der That, diese Variationen genügen den Differentialgleichungen, welche aus $L = 0$, $M = 0$, ... hervorgehen, wenn $t$ als eine Constante betrachtet wird. Da nun diese Constante sich während des betrachteten Intervalls nur unendlich wenig ändert, so können $\delta x$, $\delta y$, ... sich nur um gegen sie selbst unendlich kleine Grössen ändern und müssen daher als unveränderlich betrachtet werden. Integrirt man jetzt die Gleichung (1) nach $t$ und nimmt zu Grenzen Anfang und Ende von $\theta$, so erhält man, wenn $mX$, $mY$, $mZ$ die Componenten der während der Zeit $\theta$ auf die Masse $m$ wirksamen Kraft bezeichnen:

$$\sum m\left[\left(\int X dt - \frac{dx}{dt} + \frac{dx_0}{dt}\right)\delta x + \left(\int Y dt - \frac{dy}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\right)\delta y + \left(\int Z dt - \frac{dz}{dt} + \frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right] = 0.$$

Darin stellen $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit vor, welche der Punkt $m$ beim Beginn der Wirkung

der Momentankräfte besass; und $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Componenten seiner Geschwindigkeit am Ende von $\theta$.

Die auf $m$ wirksame Kraft hat $mX$, $mY$, $mZ$ zu Componenten; folglich sind $m\int Xdt$, $m\int Ydt$, $m\int Zdt$ die Componenten der Bewegungsgrösse, welche sie in der Zeit $\theta$ an dem freien Punkt hervorbringen würde. Diese Integrale sind also die Componenten der die Masse $m$ angreifenden Momentankraft nach dem Begriff, den wir mit dieser Benennung verbinden. Und wenn man dieselben durch $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ bezeichnet, so erhält die vorhergehende Gleichung folgende Gestalt:

$$(3)\quad \sum\left[\begin{aligned}&\left(X_1-m\frac{dx}{dt}+m\frac{dx_0}{dt}\right)\delta x+\left(Y_1-m\frac{dy}{dt}+m\frac{dy_0}{dt}\right)\delta y\\&\qquad\qquad+\left(Z_1-m\frac{dz}{dt}+m\frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\end{aligned}\right]=0.$$

Wäre die Masse $m$ frei, so würden:

$$m\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right),\ m\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right),\ m\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)$$

die Componenten derjenigen Momentankraft sein, welche die Geschwindigkeitscomponenten von $m$ genau so ändern würde, wie es wirklich während der Zeit $\theta$ geschieht. Die Gleichung (3) lehrt uns daher, dass an dem System Gleichgewicht besteht zwischen den Momentankräften, welche gewirkt haben, und zwischen solchen, aber im entgegengesetzten Sinn genommen, welche dieselbe Aenderung der Bewegung eines jeden Punktes wie die wirklich stattfindende zur Folge hätten, wenn er vollkommen frei wäre. Das Princip des d'Alembert findet demnach Anwendung wie auf die stetigen so auf die plötzlichen Aenderungen in der Bewegung irgend eines Systems. Dabei verstehen wir die Momentankräfte immer so, dass dieselben gemessen werden durch die Bewegungsgrösse, welche sie einem freien Punkt beibringen.

41. Hat man aus der Gleichung (3) alle abhängigen Variationen eliminirt und die Coëfficienten der übrig bleibenden gleich Null gesetzt, dann enthalten die Endgleichungen in linearer Form die Componenten der Momentankräfte und die Zuwachse der Componenten der Bewegungsgrössen; zugleich

ist kein Glied von diesen Grössen unabhängig. Durch Differentiation verschafft man sich aus den Bedingungsgleichungen solche Gleichungen, welche in allen Gliedern die Zuwachse der Geschwindigkeitscomponenten linear enthalten, und darauf kann man die Unbekannten $\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}, \ldots$ sämmtlich bestimmen.

Nach der Theorie der Gleichungen ersten Grades sind die Nenner der Werthe, welche sich für $\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}, \ldots$ ergeben, unabhängig von $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, $X'_1$, ...; ihre Zähler dagegen enthalten diese Grössen linear und ohne unabhängige Glieder. Wenn nun alle Momentankräfte in einem und demselben Verhältniss variiren, so ändern sich auch die Zunahmen der Geschwindigkeitscomponenten in diesem Verhältniss. Und allgemeiner: Bei beliebig vielen Systemen von Momentankräften sind die Zuwachse der Geschwindigkeitscomponenten für jeden Punkt gleich der Summe derjenigen Zuwachse, welche jedes System für sich hervorbringen würde.

Zu derselben Folgerung könnte man gelangen, ohne sich auf die Auflösung der Gleichungen ersten Grades zu stützen, lediglich durch die Bemerkung, welche wir über die Form der Gleichungen der Aufgabe gemacht haben.

Demnach geschehen die Wirkungen, welche jede Kraft allein hervorbringen würde, gleichzeitig ohne einander zu stören; sie setzen sich zusammen, und aus der Summirung aller nach gleicher Richtung erlangten Geschwindigkeiten entspringt die nach dieser Richtung erlangte totale Geschwindigkeit.

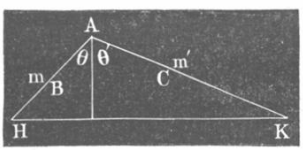
Wie man auf ähnliche Weise erkennt, so erstreckt sich dieselbe Eigenschaft auf die unendlich kleinen Zuwachse der Componenten der Bewegungsgrössen oder Geschwindigkeiten, die in jedem Augenblick durch die stetigen Kräfte hervorgebracht und zu jenen hinzugefügt werden, welche ohne die hervorbringenden Kräfte stattfinden würden. Auch sind diese Zuwachse stets dieselben, als wenn die Kräfte auf das System in der Ruhelage wirkten.

## Anwendung des d'Alembert'schen Princips auf einige Beispiele.

42. Wir betrachten zwei materielle Punkte, durch einen undehnbaren Faden verbunden, auf zwei schiefen Ebenen mit horizontalem Durchschnitt. Es soll blos die Schwere wirken und kein Grund vorhanden sein, der das System veranlasst aus einer auf die Schnittlinie senkrechten Ebene herauszutreten.

Es seien $m$, $m'$ die Massen beider Punkte; $\theta$, $\theta'$ die Winkel ihrer Ebenen mit der Verticalen; $x$, $x'$ ihre Abstände $AB$, $AC$ (Fig. 5) von dem beiden Ebenen gemeinsamen Punkt $A$; endlich $l$ die Fadenlänge.

Fig. 5.




Diejenigen Kräfte, welche den freien Punkten die wirklich stattfindende Bewegung ertheilen würden, sind nach den Richtungen $AH$, $AK$ wirkend bezüglich $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$. Die in der That wirkenden Kräfte aber sind $mg$, $m'g$ und im Sinne der Schwere gerichtet. Es muss folglich Gleichgewicht bestehen am System zwischen den ersten Kräften, in entgegengesetztem Sinn genommen, und den letzten im Sinn der Schwere.

Um die Gleichung dafür zu erhalten, denken wir uns irgend eine mögliche virtuelle Verrückung aber blos in der auf die Schnittlinie senkrechten Ebene $AHK$. Denn man darf annehmen, die Punkte seien gezwungen darin zu bleiben, weil die wirkliche Bewegung nothwendig darin vorgeht, durch diese Annahme also nichts an derselben geändert wird.

Bezeichnen $\delta x$, $\delta x'$ die Variationen von $x$, $x'$. Die Summe der virtuellen Momente, der Null gleich gesetzt, giebt:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + mg\cos\theta\,\delta x + m'g\cos\theta'\,\delta x' = 0.$$

Man hat:

$$x + x' = l,$$

woraus folgt:

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Wird diese Gleichung mit $\lambda$ multiplicirt und zu der vorletzten

addirt, werden darauf die Coëfficienten von $\delta x$, $\delta x'$ der Null gleich gesetzt, so ergeben sich:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+mg\cos\theta+\lambda=0,\quad -m'\frac{d^2x'}{dt^2}+m'g\cos\theta'+\lambda=0.$$

Daraus:

$$\lambda=m\left(-g\cos\theta+\frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}+mg\cos\theta-m'g\cos\theta'=0.$$

Weil nun $\frac{d^2x'}{dt^2}=-\frac{d^2x}{dt^2}$, so wird

$$(m+m')\frac{d^2x}{dt^2}=g(m\cos\theta-m'\cos\theta');$$

daher:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}.$$

Man erhält hieraus durch Integriren, wenn $v$ die Geschwindigkeit von $m$ vorstellt:

$$\frac{dx}{dt}=v=gt\cdot\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}+c,$$

$$x=\frac{gt^2}{2}\cdot\left(\frac{m\cos\theta-m'\cos\theta'}{m+m'}+ct+c'\right).$$

Die Constanten $c$, $c'$ müssen aus dem Anfangszustand des Systems bestimmt werden.

Sind $x_0$, $v_0$ die Werthe, welche $x$ und $v$ für $t=0$ annehmen, dann erhält man:

$$c=v_0,\ c'=x_0.$$

Ist sowohl $v_0$ gegeben als $x_0$, so sieht sich die Aufgabe vollständig gelöst, denn man kennt nun $x$ und somit $x'$. Dabei misst der Werth von $\lambda$ die Spannung des Fadens, welche hier durchaus constant bleibt.

Sind aber blos $x_0$ und die Momentankräfte gegeben, welche beim Anfang der Bewegung auf beide materiellen Punkte wirken, so muss man erst die Anfangsgeschwindigkeiten daraus bestimmen, dass an dem System Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen Momentankräften und jenen, in entgegengesetztem Sinn genommen, welche durch die hervorgebrachten Bewegungsgrössen gemessen werden. Es seien $\omega$, $\omega'$ diejenigen Geschwindigkeiten, welche die Momentan-

kräfte den beiden Punkten ertheilen würden, wenn letztere frei wären. Diese Kräfte werden dann durch $m\omega$, $m'\omega'$ gemessen, und man findet bei demselben Gange wie vorher:

$$\lambda = m\left(-\omega + \frac{dx}{dt}\right), \; -m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} + m\omega - m'\omega' = 0.$$

Weil aber $\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt}$, so wird:

$$(m + m')\frac{dx}{dt} = m\omega - m'\omega';$$

daher:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m\omega - m'\omega'}{m + m'} = v_0.$$

Der Werth von $\lambda$ drückt die durch den Stoss hervorgebrachte anfängliche Spannung aus. Setzt man statt $\frac{dx}{dt}$ den gefundenen Werth, dann folgt:

$$\lambda = \frac{-mm'}{m + m'}(\omega + \omega').$$

Wenn man sich $\theta = 0$, $\theta' = 0$ denkt, so ist das betrachtete System nichts Anderes als eine Atwood'sche Maschine, bei welcher jedoch die Masse der Rolle nicht berücksichtigt wird.

43. Betrachten wir jetzt den Fall, wo die beiden Körper durch ein Wellrad auf einander wirken, und wo jeder sich in einer besonderen senkrechten Ebene auf den horizontalen Durchschnitt der schiefen Ebenen bewegt. Das d'Alembert'sche Princip liefert folgende Gleichung, wenn $r$, $r'$ die Halbmesser des Rades und der Welle bezeichnen:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + mg\cos\theta\,\delta x + m'g\cos\theta'\,\delta x' = 0.$$

Man hat ferner dem Absolutwerth nach $\delta x : \delta x' = r : r'$, also:

$$r'\delta x + r\delta x' = 0,$$

da $\delta x$ und $\delta x'$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dadurch findet sich:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} + mg\cos\theta + \lambda r' = 0,$$

$$-m'\frac{d^2x'}{dt^2} + m'g\cos\theta' + \lambda r = 0.$$

Die Elimination von $\lambda$ unter Rücksicht auf $\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{r'}{r}\frac{d^2 x}{dt^2}$ ergiebt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g\,\frac{(m r \cos\theta - m' r' \cos\theta') r}{m r^2 + m' r'^2}.$$

Man könnte die Discussion wie vorher zu Ende führen.

44. Betrachten wir eine homogene Kette, welche auf zwei schiefen Ebenen ohne Reibung gleitet und dabei immer in einer senkrechten Ebene auf dem horizontalen Durchschnitt jener beiden bleibt. Ihre Länge sei $l$ und $\varepsilon$ die Masse der Längeneinheit. Man hat daher:

$$x + x' = l,$$

folglich:

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Beide Theile der Kette haben bezüglich die Gewichte $g\varepsilon x$, $g\varepsilon x'$; dagegen sind die Kräfte, welche die stattfindende Beschleunigung erzeugen könnten, $\varepsilon x \frac{d^2 x}{dt^2}$, $\varepsilon x' \frac{d^2 x'}{dt^2}$. Mit Auslassung des gemeinsamen Factors $\varepsilon$ giebt das Princip von d'Alembert:

$$-x\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x - x'\frac{d^2 x'}{dt^2}\delta x' + g x \cos\theta\,\delta x + g x' \cos\theta'\,\delta x' = 0;$$

demnach:

$$-x\frac{d^2 x}{dt^2} + g x \cos\theta + \lambda = 0, \quad -x'\frac{d^2 x'}{dt^2} + g x' \cos\theta' + \lambda = 0.$$

Durch Wegschaffen von $\lambda$ und $x'$ findet man:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g}{l}\left[x\cos\theta + (x - l)\cos\theta'\right]$$
$$= \frac{g}{l}(\cos\theta + \cos\theta')\left(x - \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}\right).$$

Setzt man nun:

$$\frac{g}{l}(\cos\theta + \cos\theta') = a^2, \quad x - \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'} = y,$$

so wird:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 y;$$

daher:

$$y = \alpha e^{at} + \beta e^{-at}, \text{ also } x = \alpha e^{at} + \beta e^{-at} + \frac{l\cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}.$$

Die Constanten $\alpha$, $\beta$ sind aus dem Anfangszustand zu bestimmen. Für $t = 0$ erhält man:

$$x_0 = \alpha + \beta + \frac{l \cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'}, \; v_0 = a(\alpha - \beta);$$

woraus $\alpha$, $\beta$ sich entnehmen lassen, wenn $x_0$ und $v_0$ bekannt sind. Kennt man nur diejenigen Momentankräfte, welche die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ erzeugen, zugleich mit der anfänglichen Lage, so ist zu verfahren wie in den vorhergehenden Fällen.

Der Werth von $\frac{d^2x}{dt^2}$ wird Null, sobald:

$$x = \frac{l \cos\theta'}{\cos\theta + \cos\theta'} \text{ und folglich } x' = \frac{l \cos\theta}{\cos\theta + \cos\theta'}.$$

Wenn daher $x$, $x'$ den Längen der schiefen Ebenen proportional sind und die Kette in dieser Lage keine Anfangsgeschwindigkeit hat, so beharrt sie beständig in derselben.

45. Bewegung eines biegsamen Fadens. — Es sei $\varepsilon$ die Masse der Längeneinheit eines Fadens, von dem sämmtliche Punkte durch Kräfte angegriffen werden, deren Componenten, auf die Längeneinheit bezogen, wir mit $X$, $Y$, $Z$ bezeichnen. An den Endpunkten mögen die Kräfte $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ angreifen.

Auf ein Element $ds$ wirken $Xds$, $Yds$, $Zds$; folglich muss man haben dem Princip des d'Alembert gemäss:

$$\left.\begin{aligned} &\int ds \left[\left(X - \varepsilon \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \varepsilon \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \right. \\ &\qquad \left. + \left(Z - \varepsilon \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] \\ &+ X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Das Integral erstreckt sich von einem Endpunkt des Fadens bis zum anderen.

Man hat ferner, weil der Faden nicht ausdehnbar sein soll, für alle Punkte desselben $\delta ds = 0$ oder:

$$\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch einen unbestimmten Multiplicator $\lambda$, der von der Zeit abhängig und für jeden

Punkt ein anderer sein wird; addirt man darauf alle von ihr vorgestellten Gleichungen zu der ersten, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\int ds\left[\left(X-\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]\\ +\int\lambda\left(\frac{dx}{ds}d\delta x+\frac{dy}{ds}d\delta y+\frac{dz}{ds}d\delta z\right)\\ +X_1\delta x_1+Y_1\delta y_1+Z_1\delta z_1+X_2\delta x_2+Y_2\delta y_2+Z_2\delta z_2\end{aligned}\right\}=0.$$

Die theilweise Integration der Glieder des zweiten Integrals, welches gleiche Grenzen mit dem ersten hat, liefert:

$$\lambda\left(\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z\right)$$
$$-\int\left(\delta x\,d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}+\delta y\,d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}+\delta z\,d\cdot\lambda\frac{dz}{ds}\right).$$

Fassen wir nun alle Glieder unter dem Integralzeichen zusammen, so müssen die Coëfficienten von $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ der Null gleich gesetzt werden. Die Ausdrücke aber, welche keiner Integration unterworfen sind und sich blos auf die beiden Grenzen beziehen, müssen sich unter einander aufheben.

Man erhält daher für irgend einen Punkt des Fadens die drei Gleichungen:

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}\left(X-\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)ds-d\cdot\lambda\frac{dx}{ds}=0,\\ \left(Y-\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)ds-d\cdot\lambda\frac{dy}{ds}=0,\\ \left(Z-\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)ds-d\cdot\lambda\frac{dz}{ds}=0.\end{aligned}\right.$$

Und wenn die beiden Endpunkte unabhängig sind von einander, so hat man noch:

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}&X_1\delta x_1+Y_1\delta y_1+Z_1\delta z_1\\ &\qquad-\lambda_1\left(\frac{dx_1}{ds_1}\delta x_1+\frac{dy_1}{ds_1}\delta y_1+\frac{dz_1}{ds_1}\delta z_1\right)\Big\}=0,\\ &X_2\delta x_2+Y_2\delta y_2+Z_2\delta z_2\\ &\qquad+\lambda_2\left(\frac{dx_2}{ds_2}\delta x_2+\frac{dy_2}{ds_2}\delta y_2+\frac{dz_2}{ds_2}\delta z_2\right)\Big\}=0.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (1) würden ungeändert bleiben, wenn auf irgend ein Fadenelement $ds$ statt seiner Verbindung mit den anderen eine Kraft wirkte, welche zu Componenten hätte:

$$-d.\lambda\frac{dx}{ds},\quad -d.\lambda\frac{dy}{ds},\quad -d.\lambda\frac{dz}{ds}.$$

Oder es könnten auch an seinen Endpunkten solche Tangentialkräfte angreifen, deren Componenten wären am ersten Endpunkt:

$$+\lambda\frac{dx}{ds},\quad +\lambda\frac{dy}{ds},\quad +\lambda\frac{dz}{ds}$$

und am zweiten:

$$-\left(\lambda\frac{dx}{ds}+d.\lambda\frac{dx}{ds}\right),\ -\left(\lambda\frac{dy}{ds}+d.\lambda\frac{dy}{ds}\right),\ -\left(\lambda\frac{dz}{ds}+d.\lambda\frac{dz}{ds}\right).$$

Der Erfolg der Verbindung der Fadenelemente ist daher in jedem Punkt die Erzeugung einer durch $-\lambda$ ausgedrückten Spannung.

Die Elimination von $\lambda$ aus (1) ergiebt zwei Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, $t$, welche den Ort sämmtlicher Punkte des Fadens durch die Zeit bestimmen. Was die Gleichungen (2) betrifft, so hat man damit anzufangen, dass man die Anzahl der darin enthaltenen Variationen auf die kleinstmögliche zurückführt. Die Coëfficienten der übrig bleibenden setzt man darauf gleich Null und erhält dadurch Gleichungen, welche in Verbindung mit den für den Anfangszustand und die Fadenlänge geltenden Bedingungen jeden Augenblick den Ort der Endpunkte bestimmen sowie die bei der Integration eingehenden willkürlichen Grössen.

Sind die Kräfte an den Endpunkten Null und diese zugleich beweglich, so kann den Gleichungen (2) nur dadurch genügt werden, dass man $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ setzt, welches zeigt, dass dann die Endspannungen beständig Null sind. Doch muss man hier den sehr besonderen Fall ausnehmen, wenn ein Endpunkt eine Curve oder Oberfläche nicht verlassen kann und zugleich der Faden auf dieser fortwährend senkrecht steht. Für diesen Endpunkt wäre:

$$dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 = 0;$$

es brauchte deshalb nicht mehr $\lambda_1 = 0$ zu sein. Dasselbe gilt von dem anderen Ende.

Wenn die Endpunkte fest sind, so werden die Gleichungen (2) von selbst erfüllt. Man kennt dann $x_1$, $y_1$, $z_1$, $x_2$, $y_2$, $z_2$ und hat auszudrücken, dass diese Coordinaten für jedes $t$ den Gleichungen der Curve genügen; welcher Umstand zur Bestimmung der willkürlichen Grössen beiträgt.

46. Man vermag die vorhergehenden Gleichungen auf folgende Weise unmittelbar zu erhalten. Bezeichnet $T$ die Span-

nung an einem beliebigen Punkt, so wirken an dem Element $ds$ Kräfte, welche die mit den Axen parallelen Componenten haben:

$$Xds + d.T\frac{dx}{ds},\quad Yds + d.T\frac{dy}{ds},\quad Zds + d.T\frac{dz}{ds}.$$

Das Princip des d'Alembert, auf dieses Element angewendet, giebt sofort:

$$\left(X - \varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\left(Y - \varepsilon\frac{d^2y}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dy}{ds} = 0,$$

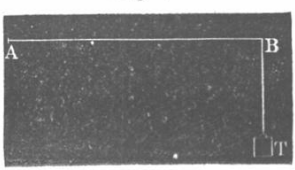
$$\left(Z - \varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}\right)ds + d.T\frac{dz}{ds} = 0.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (1) nur dadurch, dass $T$ statt $-\lambda$ steht.

An jedem Ende des Fadens muss Gleichgewicht bestehen zwischen allen auf dasselbe wirkenden Kräften mit Einbegriff der Spannung. Denn ein geometrischer Punkt würde durch irgend eine Kraft in endlicher Zeit eine unendliche Geschwindigkeit erlangen. Daraus gehen Gleichungen hervor, welche mit (2) übereinstimmen.

47. Wir wollen jetzt insbesondere den nachstehenden Fall betrachten. Die stetigen Kräfte $X$, $Y$, $Z$ seien Null. Der Faden sei gerade ausgespannt, und seine in allen Punkten gleiche Spannung werde durch ein Gewicht $T$ gemessen. $A, B$ (Fig. 6) seien die Endpunkte des Fadens in diesem Zustand. Die Gerade $AB$, welche $l$ zur Länge haben mag, bildet seine Gleichgewichtslage.

Fig. 6.




Während der Faden sich bewegt, wird vorausgesetzt, dass seine Endpunkte $A$, $B$ fest bleiben und dass alle anderen Punkte desselben sich in Ebenen bewegen, welche in den respectiven Ruhelagen senkrecht stehen auf $AB$. Aus dieser Geraden soll sich der Faden so wenig entfernen, dass man von seiner Verlängerung absehen und ihn als unausgedehnt betrachten darf. Auch sollen die Tangenten zu sämmtlichen Punkten der verschiedenen Curven, welche er nach einander

während seiner Bewegung bildet, sich sehr wenig aus $AB$ entfernen.

Unter diesen Voraussetzungen allein wird die Bewegung betrachtet. Nehmen wir den Punkt $A$ zum Ursprung und die Gleichgewichtslage $AB$ zur $x$-Axe. Die Abscisse $x$ bleibt für jeden Punkt des Fadens während der ganzen Bewegung constant; und ferner ist nach unserer Annahme der veränderliche Bogen $s$ so wenig von $x$ verschieden, dass man $s = x$ setzen kann. Damit ist zugleich $\frac{ds}{dx} = 1$ gegeben im Sinne der für die Tangenten gemachten Voraussetzung.

Bringen wir nun den Faden entsprechend wenig aus seiner Gleichgewichtslage und überlassen ihn sich selbst, nachdem wir allen Punkten desselben gewisse Anfangsgeschwindigkeiten in den senkrechten Ebenen auf jene Lage beigebracht haben, so lässt sich die Bewegung wie folgt bestimmen.

Weil die Abscisse $x$ eines jeden Punktes constant ist, so hat man $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$; daher geht aus der ersten Gleichung (1) hervor $d.\lambda \frac{dx}{ds} = 0$. Da aber $\frac{dx}{ds} = 1$, so wird $d\lambda = 0$ oder $\lambda = c$; welches zeigt, dass die Spannung sich nicht ändert, sondern beständig dem Gewicht $T$ gleich bleibt.

Für $s = x$ und $-\lambda = T$ ergeben die beiden anderen Gleichungen (1):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Nehmen wir um der Einfachheit willen an, dass die anfängliche Lage des Fadens in einer und derselben Ebene enthalten sei. Die Anfangsgeschwindigkeiten sollen in dieser Ebene senkrecht auf die Gleichgewichtslage ertheilt werden; nothwendig wird dann die ganze Bewegung darin vorgehen. Wenn wir die Axe der $y$ in derselben Ebene nehmen, so bleibt allein die Gleichung zu betrachten:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2},$$

deren vollständiges Integral ist:

$$(3) \qquad y = F\left(x + t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right) + f\left(x - t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right).$$

Hier bezeichnen $F$ und $f$ willkürliche Functionen, welche man aus den Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten sämmtlicher Punkte zu bestimmen hat.

Die Gleichung $y = \varphi(x)$ möge die anfängliche Gestalt des Fadens zwischen $A$ und $B$ ausdrücken; die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes von der Abscisse $x$ habe den Ausdruck $\psi(x)$. Dann muss die Gleichung (3) für $t = 0$ ergeben $y = \varphi(x)$ und $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$. Dies führt zu:

$$F(x) + f(x) = \varphi(x), \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}[F'(x) - f'(x)] = \psi(x).$$

Daraus würde man leicht $F(x)$ und $f(x)$ finden.

Wir werden später Gelegenheit haben, Untersuchungen dieser Art umständlicher durchzuführen. Für jetzt beschränken wir uns auf Betrachtung des Falles, wo die Anfangsgeschwindigkeit $\psi(x)$ durchaus Null ist.

Man hat nun:

$$F'(x) - f'(x) = 0; \text{ also } F(x) = f(x) + C,$$

wenn $C$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Aus dieser Gleichung und aus $F(x) + f(x) = \varphi(x)$ ergiebt sich:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \frac{C}{2}, f(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \frac{C}{2}.$$

Die Gleichung (3) wird daher:

$$(4) \qquad y = \frac{\varphi\left(x + t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right) + \varphi\left(x - t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\right)}{2}.$$

Die Function $\varphi$ ist nur für solche Werthe der Veränderlichen gegeben, welche zwischen 0 und $l$ liegen; und gerade diese Unbestimmtheit macht es möglich, der Bedingung zu genügen, dass die Punkte $A$ und $B$ fest bleiben, oder dass man $y = 0$ habe bei $x = 0$ wie bei $x = l$ für jedes $t$. Es müssen daher, indem man $u$ statt $t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ schreibt, für jedes $u$ die beiden Gleichungen stattfinden:

$$(5) \qquad \varphi(u) + \varphi(-u) = 0, \ \varphi(l+u) + \varphi(l-u) = 0.$$

Sie lehren uns, dass die Curve, welche durch $y = \varphi(u)$ vorgestellt wird, sowohl $A$ als $B$ zu Mittelpunkten hat. Dadurch bestimmt sich ihre Gestalt in der ganzen Ausdehnung der Ab-

scissenaxe, sobald dieselbe zwischen $A$ und $B$ bekannt ist. Sie kehrt periodisch wieder, dergestalt, dass zwei Punkte, deren Abscissen um $2l$ verschieden sind, dieselbe Ordinate haben. Man beweist dies aus den Gleichungen (5) dadurch, dass man $l + u$ statt $u$ schreibt, wodurch die zweite übergeht in $\varphi(2l + u) + \varphi(-u) = 0$. Da nun $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, so hat man:

$$\varphi(2l+u) = \varphi(u).$$

Die Function $\varphi$ ändert sich also nicht, wenn die Variable um $2l$ zu- oder abnimmt.

Jetzt, wo wir die Function $\varphi$ für alle positiven und negativen Werthe der Veränderlichen bestimmt haben, lässt die Gleichung (4) in der Vergangenheit wie in der Zukunft die Bewegung eines jeden Punktes des Fadens erkennen.

Aus dem über die Form der Function $\varphi$ Gesagten erhellt, dass, wenn $t\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ sich um $2l$ ändert, der frühere Zustand aller Punkte des Fadens wiederkehrt. Die Bewegung ist mithin periodisch; und die Dauer $\theta$ der Periode ergiebt sich aus $\theta\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} = 2l$, nämlich:

$$\theta = 2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}.$$

Denkt man sich den Faden cylindrisch, bezeichnet $D$ den Durchmesser des senkrechten Querschnitts sowie $\Delta$ die Dichte der Substanz, so findet man die ganze Schwingungsdauer gleich:

$$lD\sqrt{\frac{\pi\Delta}{T}}.$$

Der durch Schwingungen einer Saite hervorgebrachte Ton ist um so höher, je kürzer die Schwingungsdauer; man sieht daher, dass die Tonhöhe einer schwingenden Saite von den vier Grössen $l$, $D$, $\Delta$, $T$ in der Weise abhängt, wie der vorstehende Ausdruck es zeigt.

---

## Allgemeine Gesetze der Bewegung freier Systeme.

48. Welche Verbindungen auch in einem bewegten System vorhanden sein mögen, so findet doch nach dem Vorhergehenden mit Hülfe derselben Gleichgewicht statt zwischen den Kräften, welche an jedem Punkt die Componenten haben:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dieses Gleichgewicht würde nicht gestört werden, wenn man zu den vorhandenen Verbindungen solche neue hinzufügte, dass dieselben das System zu einem starren machten. Daher finden die Gleichungen, welche dann das Gleichgewicht ausdrücken, wirklich statt, während man die Verbindungen so lässt, wie sie gegeben sind.

Wir wollen diese Betrachtung anwenden auf den Fall eines vollkommen freien Systems. Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines freien starren Systems giebt es sechs. Drei davon drücken aus, dass die Summen der Componenten aller Kräfte parallel mit den Axen einzeln Null sind. Die drei anderen lehren, dass auch die Momentensummen aller Kräfte Null sein müssen in Bezug auf jede von denselben rechtwinkligen Axen. Wir werden nach einander die Folgerungen untersuchen, welche sich an beide Arten von Bedingungen knüpfen.

49. Bewegung des Schwerpunkts. — Die drei ersten Gleichungen, von denen so eben gesprochen wurde, sind:

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,\quad \sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$
$$\sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

Sie ergeben:

$$(1)\quad \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen lassen sich dadurch transformiren, dass man die veränderlichen Coordinaten $x_1, y_1, z_1$ des Schwerpunkts des vorgelegten Systems einführt, worunter man denjenigen Punkt versteht, welcher in irgend einem Zeitpunkt der Bewegung zum Schwerpunkt des Systems werden würde, wenn man augenblicklich alle Punkte fest verbände.

In der That, die Coordinaten dieses Punktes müssen beständig den Gleichungen genügen:

$$(2)\qquad \Sigma m x = M x_1, \quad \Sigma m y = M y_1, \quad \Sigma m z = M z_1,$$

während $M$ die Gesammtmasse des Systems bedeutet. Man kann dieselben, weil sie in jedem Zeitpunkt stattfinden, nach $t$ differenziiren und erhält dabei:

$$(3)\quad \Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_1}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{dy_1}{dt}, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dz_1}{dt}.$$

Differenziirt man neuerdings, so kommt:

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma m \dfrac{d^2x}{dt^2} = M \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \Sigma m \dfrac{d^2y}{dt^2} = M \dfrac{d^2y_1}{dt^2}, \\ \Sigma m \dfrac{d^2z}{dt^2} = M \dfrac{d^2z_1}{dt^2}. \end{cases}$$

Daher mit Rücksicht auf (1):

$$(5)\quad M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Die letzten Gleichungen lehren uns, dass die Beschleunigungscomponenten der Bewegung des Schwerpunkts jenen gleich sind, welche man für einen Punkt mit der Masse $M$ finden würde, auf den alle gegebenen Kräfte, parallel versetzt, wirkten. Dächte man sich diesen Punkt von demselben Ort, mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit und in der nämlichen Richtung ausgehend wie den Schwerpunkt, so würden die Coordinaten beider durch dieselben Gleichungen bestimmt; folglich müssten die zwei Punkte nothwendig jeden Augenblick zusammenfallen.

Was die Anfangsbewegung des Systems betrifft, so wollen wir annehmen, sie werde durch Momentankräfte hervorgebracht, welche die Componenten $A$, $B$, $C$ an dem Punkt $m$ haben mögen, $A'$, $B'$, $C'$ an $m'$, etc. Diese Kräfte können an einer

beliebigen Zahl von Punkten Null sein. Setzen wir in dem Vorhergehenden an die Stelle der stetigen Kräfte die momentanen, so erhalten wir statt der Gleichungen (1) folgende:

$$(6) \qquad \Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma A, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma B, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma C.$$

Die Gleichungen (3) haben vom Beginn der Bewegung an Geltung; wir können sie daher zu Hülfe nehmen und erhalten:

$$(7) \qquad M \frac{dx_1}{dt} = \Sigma A, \quad M \frac{dy_1}{dt} = \Sigma B, \quad M \frac{dz_1}{dt} = \Sigma C,$$

welche den Gleichungen (5) entsprechen.

Man sieht demnach, dass die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts denen eines freien Punktes gleich sind, welcher die Masse $M$ hat und auf den alle jene Momentankräfte parallel versetzt wirken, welche dem ruhenden System seine Anfangsgeschwindigkeiten ertheilen. Fassen wir nun die beiden Wahrheiten zusammen, so haben wir nachstehenden Lehrsatz:

Die Bewegung des Schwerpunkts irgend eines freien Systems geschieht gerade so, als wenn man alle Massen der verschiedenen Punkte in ihm vereinigte und sowohl jene Momentankräfte als jene stetigen Kräfte parallel mit sich an ihn versetzte, welche den Anfangszustand und die folgenden Zustände des Systems hervorbringen.

Bemerkung. — Wir wollen hier eine oft anwendbare Bemerkung machen bezüglich der Momentankräfte, d. h. solcher Kräfte, welche so gross sind, dass sie während einer unangebbar kleinen Zeit merkliche Wirkungen hervorbringen. Wenn man die aus den Gleichungen (5) gezogene Folgerung auf diese Art von Kräften anwendet während der sehr kurzen Zeit, welcher sie zur Erzeugung der Anfangsgeschwindigkeiten bedürfen, so zeigt sich aufs Neue, dass die Componenten der dem Schwerpunkt zukommenden Anfangsgeschwindigkeit genau dieselben sind, als wenn alle Massen in ihm vereinigt wären und sämmtliche Kräfte mit Beibehaltung ihrer Wirkungsweise an ihn versetzt würden. Es ergiebt sich dies für jede Componente durch eine Integration. Und in der That gehen auf diesem Wege die Gleichungen (7) aus den allgemeinen (5) hervor, wenn man letztere auf sehr grosse Kräfte anwendet, welche

eine sehr kurze Zeit wirken. Die Gleichung, welche uns überall dient, wo Momentankräfte vorkommen, nämlich die Anwendung des d'Alembert'schen Princips auf dieselben, ist durch eine ähnliche Integration der Gleichung stetiger Kräfte erhalten worden. Hat man aber diesen Punkt einmal wohl verstanden, dann ist es vorzuziehen, dass man nicht immer darauf zurückkommt, sondern die Momentankräfte direct einführt, wie wir es zu thun gelehrt haben. Aus diesem Grunde haben wir die Gleichungen (6) und (7) hingeschrieben, während wir uns derselben nach dem Gesagten hätten überheben können. Jedoch konnten wir sie auch zuerst aufstellen vor Betrachtung der folgenden Zustände des Systems.

Enthält das System feste Punkte, Linien oder Flächen, so darf man es als frei betrachten, indem man die Kräfte einführt, welche diese Bedingungen zu ersetzen vermöchten. Der vorhergehende Lehrsatz würde dann zwar noch bestehen; man müsste aber auf Kräfte Rücksicht nehmen, welche nicht gegeben sind und nur bekannt werden können, wenn die Bewegung bestimmt ist.

50. Aus unserem Lehrsatz folgt für den Fall, wo keine äussere Kraft am System wirkt, dass der Schwerpunkt eine gleichförmige und geradlinige Bewegung hat. Die Richtung derselben ist jene der Anfangsgeschwindigkeit, folglich der Resultante aller Momentankräfte, welche das System in Bewegung versetzt haben, oder auch derjenigen Momentankräfte, welche ihm in irgend einem Augenblick die Bewegung beibringen würden, welche es wirklich besitzt.

Aber selbst, wenn die Punkte des Systems auf einander gleiche und entgegengesetzte Wirkungen ausüben, diese mögen stetig oder plötzlich sein, so wird die Bewegung des Schwerpunkts dadurch nicht geändert. Denn diese Kräfte zerstören sich zu zwei, wenn man sie an denselben versetzt. Stösse zwischen den Körpern des Systems, plötzlich hergestellte Verbindungen zwischen ihnen, innere Explosionen haben nothwendig gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkungen zur Folge und können deshalb die Bewegung des Schwerpunkts in Nichts ändern. Hierin besteht das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Wesentlich ist die Bemerkung, dass alle vorhergehenden Sätze unabhängig sind von der Natur der Kräfte und den Gesetzen ihrer Wirkung.

51. Princip der Flächen. — Betrachten wir nunmehr die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen, welche ausdrücken, dass die Momentensummen der Kräfte $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, etc. in Bezug auf die rechtwinkligen Axen Null sind. Sie lauten:

$$\Sigma\left[y\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) - z\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[z\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) - x\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right] = 0$$

und können auf die Form gebracht werden:

$$(1)\quad \begin{cases} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma\,(yZ - zY), \\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma\,(zX - xZ), \\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma\,(xY - yX). \end{cases}$$

Diese Gleichungen, welche für jeden Zeitpunkt der Bewegung gelten, sagen aus, dass die Momentensummen der gegebenen Kräfte in Bezug auf die rechtwinkligen Axen gleich sind den Momentensummen jener Kräfte, welche den freien Punkten die wirklich stattfindende Bewegung ertheilen würden.

Wir wollen uns insbesondere mit dem Fall beschäftigen, wo die zweiten Glieder der Gleichungen (1) Null sind. Er liegt zunächst vor, wenn man für sämmtliche Kräfte $X$, $Y$, $Z$,.. Null hat, wenn also das bewegte System sich selbst überlassen bleibt ohne äussere Einflüsse.

Derselbe Fall findet ferner statt, wenn die Punkte solchen Kräften unterworfen sind, dass diese sich das Gleichgewicht halten würden, wenn das System starr wäre. Denn die zweiten Glieder stellen die Momentensummen der Kräfte in Bezug auf die Axen vor und sind folglich Null, da die Kräfte an dem starren System im Gleichgewicht stehen. Dabei ist der

Fall von gegenseitigen gleichen und entgegengesetzten Wirkungen, z. B. von beliebigen Stössen zwischen den verschiedenen Theilen des Systems einbegriffen.

Endlich werden die zweiten Glieder Null, wenn alle Kräfte, welche an den verschiedenen Punkten des Systems wirken, durch einen und denselben Punkt gehen, sofern dieser zum Ursprung genommen wird. In der That, unter dieser Voraussetzung sind die Componenten $X$, $Y$, $Z$ irgend einer Kraft unter sich den Coordinaten ihres Angriffspunktes proportional; man hat also, wie behauptet:

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0.$$

Der Fall, welcher uns beschäftigt, hat demnach noch eine beträchtliche Allgemeinheit. Die Gleichungen (1) werden für ihn:

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = 0, \quad \Sigma m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ \Sigma m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Integrirt man nach $t$ und bezeichnet mit $c$, $c'$, $c''$ drei willkürliche Constanten, so folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = c, \quad \Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = c', \\ \Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = c''. \end{cases}$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen stellen in Bezug auf die Axen die Momentensummen der Kräfte vor, welche an jedem Punkt die Componenten $m\dfrac{dx}{dt}$, $m\dfrac{dy}{dt}$, $m\dfrac{dz}{dt}$ haben, d. h. die Momentensummen jener Momentankräfte, welche den freien Punkt aus der Ruhe in diejenige Bewegung versetzen würden, welche ihm wirklich zukommt.

Dem gemäss drücken die Gleichungen (3) aus, dass in Bezug auf jede von drei rechtwinkligen Axen die Momentensummen aller einzelnen Bewegungsgrössen, welche das System besitzt, constant sind; was natürlich nun auch für jede beliebige Richtung stattfindet. Oder mit anderen Worten: Wenn man in irgend einem Augenblick die Momentankräfte betrachtet,

welche sämmtliche Punkte des Systems, frei gedacht, aus der Ruhe in die wirklich ihnen zukommenden Bewegungen versetzen würden; wenn man darauf jede solche Kraft in drei andere nach den Coordinatenaxen gerichtete und drei Kräftepaare zerlegt, welche diese Richtungen zu Axen haben; so ist die Momentensumme aller Paare, nach jeder von den drei Richtungen genommen, constant.

Jedes System von Momentankräften, welches die wirklich stattfindende Bewegung erzeugt, steht nach dem d'Alembert'schen Princip im Gleichgewicht mit dem betrachteten in entgegengesetztem Sinn. Es ergiebt sich daher unmittelbar, dass allen solchen Systemen die gleichen Momentensummen $c$, $c'$, $c''$ zukommen.

52. Bei dem Folgenden habe man das in der Statik über die Reduction eines beliebigen Kräftesystems Gesagte vor Augen. Wir machen die Voraussetzung, dass auf das bewegte System keine anderen als solche Kräfte wirken, welche an dem starren System sich das Gleichgewicht halten würden.

Wenn man nun in irgend einem Zeitpunkt die Grössen der Bewegung, welche den verschiedenen Punkten des Systems entsprechen, als Kräfte betrachtet und so zusammensetzt, als ob sie an einem starren System wirkten, so findet man für denselben Versammlungspunkt *) aller Kräfte stets die nämliche Resultante und das nämliche mittlere Paar. Hieraus und aus dem von der Bewegung des Schwerpunkts Bemerkten fliessen die nachstehenden Sätze:

Wenn man die Bewegungsgrössen der verschiedenen Punkte des Systems nach gleicher Richtung zerlegt, so ist ihre Summe constant.

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich parallel mit der Resultante aller an einen Punkt versetzten Bewegungsgrössen.

Ihre Momentensumme in Bezug auf eine und dieselbe Gerade ist constant.

Versammelt man alle Bewegungsgrössen an einem Punkt

---

*) Dieser war in Nro. 51 der Coordinatenursprung.

und nimmt ihre Momente in Bezug auf sämmtliche durch ihn gehende Geraden, so hat die Summe derselben für eine bestimmte Gerade den grössten Werth. Diese ist die Axe des mittleren Paares der Bewegungsgrössen für den gewählten Versammlungspunkt und deshalb unveränderlich während der ganzen Bewegung. Zieht man durch diesen Punkt die Richtung der Resultante, so kann man ihren Angriffspunkt darin nehmen, wo man will, und doch bleiben Richtung und Grösse der Axe des zugehörigen grössten Moments ungeändert.

Wenn alle Bewegungsgrössen sich auf eine einzige reduciren lassen und man durch deren Richtung irgend eine Ebene legt, so erhält die Axe des grössten Moments für sämmtliche Punkte dieser Ebene einerlei Richtung. Ihre Grösse aber ist nur für jene Punkte gleich, welche auf derselben Parallelen zur Resultante liegen. Ausser den angeführten zwei Fällen findet keine Uebereinstimmung der Richtung statt.

Es giebt eine einzige zur Resultante parallele Centralaxe, mit welcher stets die Richtung der Axe des grössten Moments zusammenfällt, welchen ihrer Punkte man auch zum Angriffspunkt der Resultante nehmen mag. Für alle ihre Punkte hat das grösste Moment gleichen Werth, und dabei ist es kleiner als für jeden ausser ihr gelegenen Punkt. Sie lässt sich leicht bestimmen, sobald man die Resultante und das zu irgend einem Versammlungspunkt gehörige mittlere Paar kennt. In dem Falle, wo die von den Bewegungsgrössen vorgestellten Kräfte sich auf eine einzige Kraft reduciren, ist deren Richtung die Centralaxe.

53. Die Gerade, welche der Schwerpunkt beschreibt, ist parallel zur Resultante. In ihr kann man daher den Versammlungspunkt nehmen, wo man will, und erhält doch immer in Richtung und Grösse dieselbe Axe des grössten Moments oder mittleren Paares.

Ein beliebiger Punkt $x_1$, $y_1$, $z_1$ auf dieser Geraden, den der Schwerpunkt in irgend einem Augenblick einnimmt, sei Versammlungspunkt. Legen wir durch ihn parallele Coordinatenaxen mit den Axen der $x$, $y$, $z$, so haben wir, wenn man durch $c$, $c'$, $c''$ die Componenten des zu ihm gehörigen mittleren Paares bezeichnet:

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma m\left[(y-y_1)\dfrac{dz}{dt}-(z-z_1)\dfrac{dy}{dt}\right]=c, \\ \Sigma m\left[(z-z_1)\dfrac{dx}{dt}-(x-x_1)\dfrac{dz}{dt}\right]=c', \\ \Sigma m\left[(x-x_1)\dfrac{dy}{dt}-(y-y_1)\dfrac{dx}{dt}\right]=c''. \end{cases}$$

Für jeden anderen Punkt auf derselben Geraden würden die nämlichen Werthe $c$, $c'$, $c''$ gelten.

Betrachten wir jetzt die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ des Schwerpunkts als veränderlich. Es bestehen die Gleichungen:

$$(5)\quad \Sigma m\,(x-x_1)=0,\quad \Sigma m\,(y-y_1)=0,\quad \Sigma m\,(z-z_1)=0,$$

weil die Summe der Momente Null ist in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene. Daraus erkennt man sofort die Richtigkeit der nachstehenden:

$$(6)\quad \begin{cases} \Sigma m\left[(y-y_1)\dfrac{d(z-z_1)}{dt}-(z-z_1)\dfrac{d(y-y_1)}{dt}\right]=c, \\ \Sigma m\left[(z-z_1)\dfrac{d(x-x_1)}{dt}-(x-x_1)\dfrac{d(z-z_1)}{dt}\right]=c', \\ \Sigma m\left[(x-x_1)\dfrac{d(y-y_1)}{dt}-(y-y_1)\dfrac{d(x-x_1)}{dt}\right]=c''. \end{cases}$$

Bewegt man drei rechtwinklige Axen parallel zu sich selbst, so dass der Schwerpunkt fortwährend ihren Ursprung bildet, und hat man nur die relative Bewegung gegen dieselben im Auge; dann haben die Bewegungsgrössen, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen,

$$m\,\frac{d(x-x_1)}{dt},\quad m\,\frac{d(y-y_1)}{dt},\quad m\,\frac{d(z-z_1)}{dt}$$

zu Componenten an dem Punkt von der Masse $m$ und den Coordinaten $x$, $y$, $z$. Die Gleichungen (6) drücken daher aus, dass die Momentensummen der relativen Bewegungsgrössen in Bezug auf die bewegten Axen constant sind, und dass folglich Richtung und Grösse der Axe des grössten Moments unverändert bleiben. Dieses grösste relative Moment ist gleich dem absoluten bei festen durch irgend einen Ort des Schwerpunkts gehenden Axen, weil die Constanten in (4) und (6) übereinstimmen.

54. Man kann einen allgemeineren Satz für einen bewegten Ursprung erhalten. Ziehen wir durch den willkürlichen festen

Coordinatenanfang eine Parallele zu der vom Schwerpunkt beschriebenen Geraden, so bleibt für alle ihre Punkte die Axe des mittleren Paares der absoluten Bewegungsgrössen in Grösse und Richtung dieselbe, wenn man sich jeden solchen Punkt als festen Versammlungspunkt denkt. Lassen wir aber drei Coordinatenaxen sich parallel mit den festen und so bewegen, dass ihr Durchschnittspunkt immer auf der durch den Anfang gezogenen Geraden bleibt, dann werden die Bewegungsgrössen, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen, im Allgemeinen nicht das nämliche mittlere Paar geben wie die absoluten. Man kann nun untersuchen, unter welchen Bedingungen dies stattfindet.

Bezeichnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coordinaten des bewegten Ursprungs, $x_1$, $y_1$, $z_1$ jene des Schwerpunkts; so hat man:

$$(7) \qquad \alpha : \beta : \gamma = d\alpha : d\beta : d\gamma = dx_1 : dy_1 : dz_1,$$

wie übrigens auch die Bewegung des neuen Ursprungs beschaffen sein mag. Die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die festen Axen seien mit $c$, $c'$, $c''$ bezeichnet; ihre Werthe sind durch (3) gegeben. Die Summe der Momente, welche den relativen Geschwindigkeiten entsprechen, in Bezug auf die mit der $x$-Axe parallel sich bewegende Axe wird ausgedrückt durch:

$$\Sigma m \left[ (y - \beta) \frac{d\,(z - \gamma)}{dt} - (z - \gamma) \frac{d\,(y - \beta)}{dt} \right]$$

und ist folglich, wie man leicht aus (5) erkennt, gleich:

$$c + M \left( z_1 \frac{d\beta}{dt} - y_1 \frac{d\gamma}{dt} \right) + M \left( \gamma \frac{dy_1}{dt} - \beta \frac{dz_1}{dt} \right)$$
$$+ M \left( \beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} \right),$$

wobei $M$ statt $\Sigma m$ steht. Aus (7) folgt nun:

$$\gamma \frac{dy_1}{dt} - \beta \frac{dz_1}{dt} = 0, \quad \beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Das betrachtete Moment würde daher $c$ werden, wenn man hätte:

$$d\beta : d\gamma = y_1 : z_1.$$

Für jede der beiden anderen Axen ergiebt sich eine analoge Bedingung; weshalb das mittlere Paar, welches der relativen

Bewegung entspricht, eine in Grösse und Richtung constante Axe erhält unter der Bedingung, dass:

$$d\alpha : d\beta : d\gamma = x_1 : y_1 : z_1$$

oder mit Rücksicht auf (7):

$$\alpha : \beta : \gamma = x_1 : y_1 : z_1,$$

d. h. wenn die Gerade, worauf sich der Ursprung bewegt, die vom Schwerpunkt beschriebene ist.

Der neue Satz ist viel allgemeiner als der vorige, denn er verlangt nicht, dass der bewegte Ursprung beständig im Schwerpunkt genommen werde, ja er fordert nicht einmal eine gleichförmige Bewegung für ihn.

55. Das gefundene Resultat bezieht sich auf die Bedingung, dass die relativen Momente nicht allein constant sondern auch gleich den absoluten seien, welche zu dem festen Ursprung gehören. Wir wollen nun blos die erste Bedingung stellen; dann genügt es, dass man habe:

$$\Sigma m \left[ (y - \beta) \frac{d^2 (z - \gamma)}{dt^2} - (z - \gamma) \frac{d^2 (y - \beta)}{dt^2} \right] = 0$$

sowie zwei ähnliche Gleichungen bezüglich der mit den $y$ und $z$ parallelen Axen.

Weil die Kräfte an dem starren System im Gleichgewicht stehen sollen, so ist:

$$\Sigma m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Es bleiben demnach von der vorstehenden Gleichung nur die Glieder übrig:

$$- \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \Sigma m (y - \beta) + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \Sigma m (z - \gamma),$$

und diese sind gleich mit:

$$M \left[ \frac{d^2 \beta}{dt^2} (z_1 - \gamma) - \frac{d^2 \gamma}{dt^2} (y_1 - \beta) \right].$$

Sie werden deshalb Null sowohl für:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = 0$$

als auch, wenn:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} : \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = y_1 - \beta : z_1 - \gamma.$$

Für die beiden anderen Axen gelten analoge Bedingungen. Man sieht daher, dass die relativen Momente in zwei Fällen constant sind: einmal, wenn

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0,$$

d. h. wenn die Bewegung des Ursprungs geradlinig und gleichförmig geschieht; und ausserdem, sobald:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} : \frac{d^2\beta}{dt^2} : \frac{d^2\gamma}{dt^2} = x_1 - \alpha : y_1 - \beta : z_1 - \gamma,$$

oder wenn der Ursprung sich wie ein Punkt bewegt, auf den eine beständig nach dem Schwerpunkt gerichtete Kraft wirkt. Der zweite Fall liegt z. B. vor, wenn der Ursprung irgendwie die vom Schwerpunkt beschriebene Gerade durchläuft; und wir haben in Nr. 54 gesehen, dass dann die relativen Momente dieselben sind, als wenn der Ursprung fest wäre.

Alle bisherigen Sätze hängen von dem Gesetz der gegenseitigen Wirkungen nicht ab; sie setzen nur voraus, dass dieselben zu zwei gleich und entgegengesetzt sind.

56. Die Gleichungen (3) lassen sich aus einem anderen Gesichtspunkt auffassen und ergeben dann eine merkwürdige geometrische Eigenschaft jeder Bewegung, für welche sie gelten. Der Radius vector vom Ursprung nach dem Punkt $x$, $y$, $z$ beschreibt bei der Bewegung des letzten eine Kegelfläche. Die Projectionen derselben auf die Coordinatenebenen sind jene Flächenräume, welche von den Projectionen des Leitstrahls durchstrichen werden. Wir wollen sie berechnen.

Die Projection $r$ des Leitstrahls auf die Ebene $YZ$ bildet mit der Axe der positiven $y$ einen veränderlichen Winkel. Er sei $\theta$, von der Axe der positiven $y$ gegen die der positiven $z$ hin gezählt. Diese Drehrichtung ist direct in Bezug auf die positive $x$-Axe. Man hat $tang\ \theta = \frac{z}{y}$; dabei sind die Vorzeichen nach gewohnter Weise zu nehmen.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{d\theta}{cos\ \theta^2} = \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2};$$

und da $y = r\ cos\ \theta$, so ergiebt sich:

$$r^2 d\theta = y\,dz - z\,dy.$$

Der Ausdruck $ydz - zdy$ stellt somit das doppelte Differential des vom Radius $r$ durchstrichenen Flächenraums dar. Er stimmt mit $d\theta$ im Zeichen überein; daher dieses positiv ist bei directer und negativ bei rückläufiger Bewegung.

Die Projection des Leitstrahls auf die Ebene $YZ$ hat eine directe Bewegung, wenn die Axe der im Raum beschriebenen unendlich kleinen ebenen Fläche einen spitzen Winkel macht mit der positiven $x$-Axe. Rückläufig ist dagegen ihre Bewegung, wenn dieser Winkel stumpf wird. Folglich ist $ydz - zdy$ in Grösse und Zeichen gleich der doppelten im Raum beschriebenen unendlich kleinen Fläche, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Axe mit jener der positiven $x$ bildet.

Wenn man jetzt mit $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ die Summe derjenigen Flächenräume bezeichnet, welche von den Projectionen der verschiedenen Leitstrahlen auf die Coordinatenebenen beschrieben werden und wobei jeder Flächenraum mit der Masse des entsprechenden Punktes multiplicirt ist, so kann man offenbar statt der Gleichungen (3) folgende schreiben:

$$\frac{d\lambda}{dt} = c, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = c', \quad \frac{d\lambda''}{dt} = c''.$$

Daraus geht hervor:

$$\lambda = ct, \quad \lambda' = c't, \quad \lambda'' = c''t,$$

wenn man die Flächen von $t = 0$ anfangen lässt.

Diese Gleichungen gelten, wenn die Punkte des freien Systems nur ihren gegenseitigen Wirkungen (Stösse unter einander einbegriffen) ausgesetzt sind; und allgemeiner, wenn sie unter dem Einfluss solcher Kräfte stehen, welche sich im Gleichgewicht halten würden, wenn das System starr wäre, sowie unter dem von beliebigen durch den Ursprung gerichteten Kräften. Bei diesen Voraussetzungen sind die drei Summen der Projectionen jener Flächen, welche von den Leitstrahlen nach sämmtlichen Punkten beschrieben werden, jede Fläche multiplicirt mit der Masse des betreffenden Punktes, der Zeit proportional, sofern man die mit directer Bewegung durchstrichenen Räume als positiv betrachtet und die mit rückläufiger Bewegung durchstrichenen als negativ. Darin besteht das Princip der Erhaltung der Flächeninhalte.

57. Wenn zwei Mittelpunkte der Wirkung vorhanden

wären, so würden die zweiten Glieder der Gleichungen (1) selbst dann nicht mehr Null sein, wenn man einen von ihnen zum Ursprung nehmen wollte. Jedoch verschwindet ein Glied, sofern man die Gerade, welche durch die beiden festen Centren geht, zu einer der Axen z. B. zur $z$-Axe nimmt; denn man hat nun:

$$X : Y = x : y \quad \text{oder} \quad xY - yX = 0.$$

Demnach kommt dem Princip der Flächen in diesem Fall Geltung zu nur für die Projectionen auf eine senkrechte Ebene zu der Geraden durch die beiden Centren. Und die nach den Axen zerlegten Paare, welche von den Bewegungsgrössen des Systems herrühren, liefern ein unveränderliches Paar blos nach der Axe, welche jene zwei Punkte verbindet.

58. Unveränderliche Ebene. — Sucht man diejenige Ebene, auf welcher die von den Massen multiplicirten Flächen die grösste Projectionensumme geben, so findet man nach dem in den Vorbemerkungen Bewiesenen, dass die Winkel $p$, $q$, $r$ der Richtung ihrer Axe mit den Coordinatenaxen folgende Cosinus haben:

$$\cos p = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}}, \quad \cos q = \frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}},$$

$$\cos r = \frac{\lambda''}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2}}$$

oder:

$$\cos p = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}, \quad \cos q = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos r = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}.$$

Die Richtung dieser Ebene ist demnach von der Zeit unabhängig. Laplace, welcher dies zuerst erkannte, hat ihr deshalb den Namen unveränderliche Ebene gegeben. Die Gleichungen (3) zeigen, dass man sie zu bestimmen vermag, wenn man die Massen der verschiedenen Punkte des Systems und für irgend einen Zeitpunkt die Lagen derselben sowie ihre Seitengeschwindigkeiten kennt. Die gegenseitigen Wirkungen der Punkte, ihre etwaigen Stösse unter einander ändern die Richtung jener Ebene nicht, weil die zweiten Glieder der Gleichungen (1) darum nicht aufhören Null zu sein.

Das Gesagte hat noch Geltung, wenn ein fester Mittelpunkt der Wirkung oder ein fester Punkt im System vorhanden ist und man ihn zum Ursprung nimmt.

Man sieht, dass diese Ebene keine andere ist als diejenige, worin das mittlere Paar der Bewegungsgrössen liegt, weshalb alle für die zweite geltenden Sätze bei ihr Anwendung finden.

59. Anwendung auf das Weltsystem. — Wenn die Sonne, die Planeten und ihre Satelliten nur durch ihre gegenseitigen Wirkungen angegriffen werden, so muss sich der Schwerpunkt des Systems in gerader Linie gleichförmig bewegen mit einer Geschwindigkeit, die abhängt von den Geschwindigkeiten, welche alle diese Körper damals hatten, als sie sich selbst überlassen wurden. Einen festen Punkt kennen wir nicht. Wollen wir nun doch einen solchen Ursprung für die Flächen haben, welcher derjenigen Ebene eine unveränderliche Richtung giebt, worauf die Projectionensumme den grössten Werth hat; so müssen wir einen Punkt wählen, der sich parallel bewegt mit der vom Schwerpunkt beschriebenen Geraden. Da aber diese Gerade nicht bekannt ist, so bleibt nur der Schwerpunkt selbst übrig. Die Ebene des mittleren Paares der relativen Bewegungsgrössen oder der grössten Projectionensumme der relativen Flächen kann zu irgend einer Epoche bestimmt werden. Und weil sie immer dieselbe bleibt, so kann sie, wenn man alle Punkte des Systems darauf bezieht, zur Vergleichung der astronomischen Beobachtungen aller Zeiten dienen.

Wir bemerken, dass diese Ebene, da sie unabhängig ist von der Grösse der gegenseitigen Wirkungen, unverändert bleiben würde, selbst wenn das Attractionsgesetz ein anderes werden sollte. Ebenso wenig hängt sie ab von den Veränderungen, welche in der Gestalt der Körper des Systems eintreten können, weil diese immer von gleichen und entgegengesetzten Kräften herrühren. Die flüssigen und gasförmigen Theile eines Planeten können sich mit seiner festen Masse fest verbinden; die Planeten können auf beliebige Weise unter einander in Verbindung treten oder sich stossen; sie können durch Explosionen zertrümmert werden, ohne dass jene Ebene dadurch geändert wird.

Sie würde noch dieselbe bleiben, wenn auf alle Körper des Systems parallele, den Massen proportionale Kräfte wirk-

ten. Denn die Bewegungen in Bezug auf drei durch den Schwerpunkt nach constanten Richtungen geführte Axen könnten durch diese Kräfte nicht geändert werden, und folglich würden die Projectionensummen der relativen Flächen auf die Coordinatenebenen dieselben bleiben.

60. Gleichung der lebendigen Kräfte. — Sie wird durch Betrachtung einer besonderen virtuellen Versetzung erhalten, derjenigen nämlich, welche übereintrifft mit der Verrückung, die während einer unendlich kleinen Zeit bei der wirklichen Bewegung des Systems stattfindet.

Diese virtuelle Versetzung ist aber keineswegs in allen Fällen mit den Verbindungen verträglich, welche gerade in dem betrachteten Augenblick bestehen. Um deshalb zu erkennen, wann sie erlaubt ist, so sei $L = 0$ eine der gegebenen Bedingungsgleichungen. Die virtuellen Versetzungen müssen der Gleichung genügen:

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \cdots = 0;$$

denn selbst wenn $L$ die Variable $t$ explicit enthält, so darf man sie doch nicht variiren, weil die virtuellen Versetzungen sich auf denselben Augenblick beziehen.

Bezeichnen wir jetzt durch $dx$, $dy$, $dz$, etc. die unendlich kleinen Coordinatenzuwachse, welche innerhalb der Zeit $dt$ bei der wirklichen Bewegung des Systems erlangt werden, so müssen wir, weil die Gleichung $L = 0$ beständig erfüllt sein will, als Zuwachs ihres ersten Gliedes am Ende von $dt$ Null haben. Dies giebt, wenn man der Allgemeinheit wegen die Variable $t$ explicit darin voraussetzt:

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx'}dx' + \cdots = 0.$$

Wollte man nun

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \text{ etc.}$$

nehmen, so würden beide Gleichungen einander widersprechen. Diese Annahme ist daher nur erlaubt, wenn man $\frac{dL}{dt} = 0$ hat für jedes $t$. Daraus sieht man, dass allein in dem Falle, wo keine Bedingungsgleichung die Zeit explicit enthält, die unendlich kleine Verrückung, welche die Punkte des Systems bei

ihrer wirklichen Bewegung gleichzeitig erfahren, zur virtuellen Versetzung genommen werden darf.

Machen wir deshalb ausdrücklich diese Voraussetzung und nehmen darauf:

$$\delta x = dx, \ \delta y = dy, \ \delta z = dz$$

in der allgemeinen Gleichung

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0;$$

dann kommt:

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Das erste Glied ist das halbe Differential von

$$\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) \text{ oder von } \Sigma m v^2,$$

wenn $v$ die Geschwindigkeit des Punktes mit der Masse $m$ bezeichnet. Vorstehende Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

(1) $$\tfrac{1}{2} d\Sigma m v^2 = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Wenn nun $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ das vollständige Differential einer Function $\varphi$ von $x, y, z, x', y', z', \ldots$ vorstellt, während man diese Grössen sämmtlich als unabhängige Variablen betrachtet; so lässt sich die Gleichung (1) zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten integriren, wobei man erhält:

(2) $$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \varphi(x, y, z, x', \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x_0', \ldots).$$

In diesem Falle also vermag man den Zuwachs an lebendiger Kraft zu bestimmen, sobald man nur die Lagen aller Punkte für die betrachteten zwei Epochen kennt. Und so oft das bewegte System in die nämliche Lage zurückkehrt, wird die Summe der lebendigen Kräfte wieder dieselbe.

Sind die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ Null, dann ist das zweite Glied der Gleichung (2) auch Null und die Summe der lebendigen Kräfte constant. Darin besteht das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

61. Wenn alle Punkte des Systems nur der Schwere unterworfen sind, so hat man:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g\,dm;$$

dabei ist die Axe der positiven $z$ der Schwere entgegengesetzt. Die Gleichung der lebendigen Kräfte wird daher, wenn $z_0$ und

$z_1$ die Werthe von $z$ für den Schwerpunkt des Systems bezeichnen sowie $M$ dessen Gesammtmasse:

(1) $$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = -gM(z_1 - z_0).$$

Die Summe der lebendigen Kräfte hängt demnach allein von der Höhe des Schwerpunktes ab und wird wieder dieselbe, so oft dieser Punkt auf die nämliche Horizontalebene zurückkehrt.

62. Wenn das bewegte System durch eine solche Lage geht, worin es sich im Gleichgewicht befinden würde, wenn die Punkte keine Geschwindigkeit besässen, so hat man:

$$\Sigma m\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

für alle virtuellen Versetzungen aus dieser Lage. Und da wir

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz$$

nehmen dürfen, so folgt:

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Das Differential des zweiten Gliedes der Gleichung (2) ist somit Null, folglich das Glied selbst im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum unter den Werthen, welche es nach einander bei der Bewegung annimmt. Demnach hat die Summe der lebendigen Kräfte des Systems ihre grössten und kleinsten Werthe, während das System durch diejenigen Lagen geht, worin es im Gleichgewicht sein würde, wenn seine Punkte ohne Geschwindigkeit wären.

63. Wir wollen jetzt zeigen, dass der Ausdruck

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

allemal dann ein vollständiges Differential ist, wenn man darin keine anderen Kräfte berücksichtigt als jene, welche die gegenseitigen Wirkungen zwischen den Punkten des Systems verursachen, dabei den Massen proportional sind und allein von den Entfernungen abhängen.

Bezeichnen wir durch $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ die Coordinaten zweier Punkte mit den Massen $m$, $m'$; ihre Entfernung sei $f$. Ihre gegenseitige Wirkung beträgt $mm'F$, wo $F$ eine Function von $f$ allein bedeutet. Die Componenten der Wirkung des Punktes $m'$ auf $m$ sind daher, wenn man sich dieselbe anziehend denkt:

$$mm'F \cdot \frac{x' - x}{f}, \quad mm'F \cdot \frac{y' - y}{f}, \quad mm'F \cdot \frac{z' - z}{f}.$$

Von ihnen gehen in den Ausdruck

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

folgende Glieder ein:

$$mm'F\frac{(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz}{f}.$$

Diejenigen Glieder, welche von den Componenten der anziehenden Wirkung des Punktes $m$ auf $m'$ herrühren, sind

$$mm'F\frac{(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'}{f}.$$

Durch Zusammenfassen beider erhält man:

$$-mm'F\frac{(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')}{f}$$

oder $-mm'F\cdot df$, wie man aus der Gleichung

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=f^2$$

erkennt. Bei abstossender Wirkung würde man $+mm'F\cdot df$ gefunden haben.

Somit ist bewiesen, dass alle Ausdrücke $Xdx+Ydy+Zdz$, welche von den gegenseitigen Wirkungen der Punkte auf einander herrühren, vollständige Differentiale sind, sobald diese Wirkungen nur von der Entfernung abhängen und mit den Massen in Proportion stehen.

In Nro. 203 des ersten Theils haben wir gezeigt, dass Gleiches für alle durch feste Centren gerichteten Kräfte stattfindet, welche nach irgend einer Function der Entfernung allein wirken.

Ist aber der Widerstand eines Mittels oder Reibung vorhanden, dann hängen die darauf bezüglichen Kräfte von der Geschwindigkeit ab oder vom Druck gegen die reibenden Flächen und Linien, so dass:

$$\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

kein vollständiges Differential mehr sein kann.

Man bemerkt, wie das Differential $-mm'F\cdot df$, welches sich auf gegenseitige Anziehungen bezieht, negativ ist für ein positives $df$ und positiv für ein negatives $df$. Die gegenseitigen Anziehungen haben daher Zuwachs an lebendiger Kraft zur Folge, wenn die Punkte sich nähern; Abnahme, wenn sie sich entfernen. Bei abstossenden Wirkungen wächst die Summe der lebendigen Kräfte während der Entfernung der Punkte; sie nimmt dagegen ab während ihrer Annäherung.

64. Wenn die Punkte des Systems einander stossen bei vollkommener Elasticität der sich stossenden Körper, so gehen dieselben während der zweiten Hälfte des Stosses ge-

nau durch dieselben Zustände hindurch wie während der ersten bis zum Augenblick des grössten Zusammenpressens, und die abstossende Kraft, welche sie auf einander ausüben, ist die nämliche für die gleichen Zustände. Man hat dann gegenseitige Wirkungen, welche blos von der Entfernung der Punkte abhängen, zwischen denen sie stattfinden. Und die Summe der lebendigen Kräfte erleidet durch den Stoss keine Aenderung; denn sie erfährt während des ersten Theils einen Verlust, welcher dem durch den zweiten Theil des Stosses erlangten Zuwachs genau gleich ist.

Anders verhält es sich, wenn die sich stossenden Körper nicht mehr vollkommen elastisch sind.

65. Verlust an lebendiger Kraft in Folge des Stosses. — Nehmen wir an, dass die sich stossenden Körper gar keine Elasticität besitzen, und bezeichnen wir durch $a$, $b$, $c$ die Seitengeschwindigkeiten irgend eines Punktes $m$ vor dem Stoss sowie durch $A$, $B$, $C$ ihre Werthe nach beendigtem Stoss, welcher zwischen beliebigen Theilen des Systems stattfinden mag.

Zufolge des Princips von d'Alembert, dessen Anwendbarkeit auf Momentankräfte in Nro. 40 nachgewiesen wurde, besteht Gleichgewicht zwischen den zu zwei gleichen und gerade entgegengesetzten Stosskräften und jenen Momentankräften, welche an jedem Punkt die Componenten haben:

$$m\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz}{dt}\right)$$

oder vermöge der vorstehenden Bezeichnungen:

$$m(a - A), \quad m(b - B), \quad m(c - C).$$

Indem wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden und diejenige virtuelle Versetzung betrachten, welche nach beendigtem Stoss bei der Bewegung wirklich stattfindet, erhalten wir eine von den unbekannten Stosskräften unabhängige Gleichung. In der That, der Stoss ist beendigt, sobald die Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben. Die virtuellen Momente der zwei gleichen und entgegengesetzten Kräfte sind daher jetzt gleich und mit verschiedenen Zeichen behaftet, so dass man sie nicht in die Gesammtsumme aufzunehmen braucht und deshalb die Gleichung erhält:

$$\Sigma m[(a - A)\,dx + (b - B)\,dy + (c - C)\,dz] = 0.$$

Man hat aber:

$$dx = A\,dt,\ dy = B\,dt,\ dz = C\,dt;$$

folglich:

$$\Sigma m(aA + bB + cC - A^2 - B^2 - C^2) = 0.$$

Setzen wir nun:

$$a^2+b^2+c^2=v^2, A^2+B^2+C^2=V^2, (a-A)^2+(b-B)^2+(c-C)^2=w^2,$$

so dass:

$$aA + bB + cC = \frac{v^2 + V^2 - w^2}{2}$$

wird, dann geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\Sigma m(v^2 - V^2 - w^2) = 0 \text{ oder } \Sigma mv^2 - \Sigma mV^2 = \Sigma mw^2;$$

welches beweist, dass der Verlust an lebendiger Kraft gleich ist der Summe jener lebendigen Kräfte, welche den verlorenen Geschwindigkeiten entsprechen. Diese Wahrheit wird das Theorem des Carnot genannt.

Carnot hat seinen Satz auf den Stoss von Körpern ausgedehnt, denen ein beliebiger Grad der Elasticität zukommt. Die Schwierigkeit einer genauen Kenntniss dieses Grades macht jedoch die Anwendung davon fast unmöglich bei dem gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft. Wollte man mit einiger Sicherheit von der Erweiterung Gebrauch machen, so wären zuvor vielfache Erfahrungen nöthig, mit welchen man sich noch nicht beschäftigt hat.

Während der Dauer des Stosses tritt keine merkliche Aenderung in den Lagen der Punkte ein. Wenn daher $x$, $y$, $z$, $x'$, ... die Coordinaten der Punkte beim Beginn des Stosses bezeichnen, so erhalten wir statt der Gleichung (2) in Nro. 60 mit Rücksicht auf den augenblicklich bewirkten Verlust an lebendiger Kraft die nachstehende:

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \varphi(x, y, z, x', \ldots) \\ \qquad\qquad - \varphi(x_0, y_0, z_0, x_0', \ldots) \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}\Sigma mw^2. \end{cases}$$

66. Wir wollen die relativen Geschwindigkeiten der Punkte in Bezug auf den Schwerpunkt des Systems einführen in die Gleichung (2) der Nr. 60.

Die Coordinaten irgend eines Punktes seien $x$, $y$, $z$ gegen feste Axen und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ auf den Schwerpunkt bezogen. Dieser letzte habe die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$; dann ist:

$$x = x_1 + \xi,\ y = y_1 + \eta,\ z = z_1 + \zeta$$

und folglich:

$$(3)\quad \begin{cases} v^2 = \frac{dx_1{}^2}{dt^2} + \frac{dy_1{}^2}{dt^2} + \frac{dz_1{}^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} \\ \qquad + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right). \end{cases}$$

Wir wissen, dass

$$\Sigma m \frac{d\xi}{dt} = 0,\quad \Sigma m \frac{d\eta}{dt} = 0,\quad \Sigma m \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Bezeichnet man nun mit $v$ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und mit $V$ die relativen Geschwindigkeiten in Bezug auf diesen, so hat man unmittelbar:

$$(4)\qquad \Sigma m v^2 = \Sigma m V^2 + M v^2,$$

während $M$ die Gesammtmasse des Systems bedeutet. Wir erhalten jetzt unsere Gleichung in folgender Form:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m V_0{}^2 = \frac{M}{2}(v_0{}^2 - v^2) +$$

$$\varphi(x, y, z, x', \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

67. Bezüglich des Schwerpunkts ist noch eine oft nützliche Bemerkung zu machen. Seine Bewegung geschieht gerade so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und alle Kräfte parallel zu sich selbst an ihn versetzt würden. Man findet deshalb Eigenschaften für die Bewegung des Schwerpunkts eines Systems mit Hülfe der Bewegungsgesetze eines einfachen materiellen Punktes, auf welchen gegebene Kräfte wirken.

Nehmen wir insbesondere die Gleichung der lebendigen Kraft eines Punktes, so erhalten wir, wenn $v$ wieder die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und $x_1$, $y_1$, $z_1$ dessen Coordinaten bedeuten:

$$(5)\qquad \tfrac{1}{2} d.Mv^2 = dx_1 \Sigma X + dy_1 \Sigma Y + dz_1 \Sigma Z;$$

welche Gleichung in vielen Fällen augenblicklich $v$ liefert. Wir bedienen uns derselben hier, um eine merkwürdige Eigenschaft des Schwerpunkts zu zeigen.

Die Gleichung (1) der Nr. 60 giebt, wenn wir statt $\Sigma m v^2$ seinen Werth aus (4) schreiben:

$$\tfrac{1}{2} d\Sigma m V^2 + \tfrac{1}{2} d.Mv^2 = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Bezeichnen jetzt $\xi, \eta, \zeta$ Coordinaten in Bezug auf solche Axen, welche sich parallel mit den Axen der $x, y, z$ bewegen und

dabei immer durch den Schwerpunkt gehen, so hat man:

$$x = x_1 + \xi,\ y = y_1 + \eta,\ z = z_1 + \zeta$$

und folglich:

$$dx = dx_1 + d\xi,\ dy = dy_1 + d\eta,\ dz = dz_1 + d\zeta.$$

Unter Rücksicht auf (5) wird daher die vorstehende Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} d.\Sigma m V^2 = \Sigma(X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta).$$

Demnach hat die Gleichung der lebendigen Kräfte in Bezug auf den bewegten Schwerpunkt gerade so Geltung wie in Bezug auf einen festen Punkt.

## Anwendung auf den unmittelbaren Stoss kugelförmiger Körper.

68. Denken wir uns zwei aus homogenen Schichten bestehende Kugeln, deren Mittelpunkte gleichförmige Bewegungen auf derselben Geraden besitzen. Stossen die beiden Kugeln zusammen, so ändern sich ihre Geschwindigkeiten, aber die Mittelpunkte fahren fort sich auf der Geraden nach der einen oder anderen Richtung zu bewegen. Wir stellen uns die Aufgabe, die Formeln zu finden, welche die Geschwindigkeiten nach dem Stoss durch jene vor demselben ausdrücken.

Wir betrachten nur die zwei Fälle, wo die Kugeln entweder ganz weich oder vollkommen elastisch sind. Und um alle Schwierigkeiten zu entfernen, welche ihre Gestalt nach dem Stosse sowie innere Bewegungen verursachen könnten, so betrachten wir sie als zwei materielle Punkte. Wir nehmen an, dass wenn sie sich in sehr kleiner Entfernung von einander befinden, eine abstossende Kraft zwischen ihnen rege wird, welche für den Fall vollkommen elastischer Körper nur von der Entfernung abhängt, dagegen für den Fall weicher Körper bei einem gewissen Grade der Annäherung Null wird.

Beziehen wir den Ort beider Punkte auf einen festen Ursprung in der Geraden, worauf die Bewegung vorgeht. Die Abscissen der Punkte seien $x$, $x'$; $m$, $m'$ ihre Massen; $v$, $v'$ ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss und $V$, $V'$ nach dem Stoss. Die Geschwindigkeiten werden als positiv betrachtet, wenn die Bewegung nach der Richtung der positiven $x$ geschieht; als negativ bei der entgegengesetzten Richtung. Sie

werden daher immer in Grösse und Zeichen durch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ dargestellt.

Bezeichnet $x_1$ die Abscisse des Schwerpunkts beider Punkte, so hat man beständig:

$$mx + m'x' = (m + m')x_1$$

und:

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = (m + m')\frac{dx_1}{dt}.$$

Gemäss dem Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts bleibt $\frac{dx_1}{dt}$ constant und vor wie nach dem Stosse von demselben Werth. Darum muss auch die erste Seite der Gleichung vor und nach dem Stoss gleichen Werth haben, was uns folgende Relation giebt:

(1) $$mv + m'v' = mV + m'V'.$$

Die Grössen $v$, $v'$, $V$, $V'$ haben dabei beliebige Vorzeichen, und die Körper können weich sein oder elastisch.

Unterscheiden wir jetzt diese zwei Fälle.

1. Besitzen die Körper keine Elasticität, dann hört ihre gegenseitige Wirkung auf, sobald ihre Geschwindigkeiten in Grösse und Richtung gleich geworden sind. Man hat alsdann $V = V'$; die Gleichung (1) giebt daher:

$$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Daraus sehen wir, dass die Körper nach dem Stoss in Ruhe bleiben werden, wenn $mv + m'v' = 0$, d. h. wenn ihre Bewegungsgrössen gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt waren.

Auch überzeugt man sich leicht, dass in jedem Falle die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoss kleiner ist als zuvor, und dass der Verlust jene Summe beträgt, welche den verlorenen Geschwindigkeiten entspricht, wie es der Lehrsatz von Carnot verlangt.

2. Wenn die Körper vollkommen elastisch sind, so erleidet die Summe an lebendiger Kraft durch den Stoss keine Aenderung; man hat folglich:

(2) $$mv^2 + m'v'^2 = mV^2 + m'V'^2.$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen $V$ und $V'$ durch $v$, $v'$.

Wir schreiben dieselben:

$$m(V - v) = m'(v' - V'),$$
$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2)$$

und erhalten durch Division:

$$V + v = V' + v'$$

oder:

(3) $$V - V' = -(v - v').$$

Demnach ist die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoss gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt.

Aus (1) und (3) findet man:

$$V = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'}, \qquad V' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'}.$$

Diese Formeln geben für gleiche Massen:

$$V = v', \quad V' = v,$$

so dass die Körper in diesem Falle stets ihre Geschwindigkeiten austauschen.

Befand sich ein Körper in Ruhe, z. B. der von der Masse $m'$, dann wird:

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \qquad V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

Der bewegte Körper wird daher zurückgeworfen, wenn seine Masse kleiner ist als die des ruhenden. Bei grösserer Masse setzt er seine Bewegung in demselben Sinn fort. Die relative Geschwindigkeit beträgt in beiden Fällen $-v$, wie die Gleichung (3) lehrt.

Wäre ausserdem noch $m = m'$, so würde man finden:

$$V = 0, \quad V' = v.$$

Der ruhende Körper, nachdem er die Geschwindigkeit des bewegten erlangt hat, würde wie dieser zur Ruhe gebracht werden, wenn er auf einen anderen elastischen Körper von gleicher Masse und ohne Geschwindigkeit träfe, und so fort; ein Resultat, welches die Erfahrung bestätigt.

## Anwendung der Gleichung der lebendigen Kräfte auf die Stabilität des Gleichgewichts eines Systems.

69. Wenn ein System unter dem Einfluss gewisser Kräfte im Gleichgewicht steht, und man es noch so wenig aus der

Gleichgewichtslage verrückt, nachher aber denselben Kräften überlässt, dann ereignet sich von zwei Fällen einer: entweder bleiben die Verrückungen eines jeden Punktes in Bezug auf dessen Gleichgewichtslage beständig sehr klein, oder der Punkt entfernt sich mehr und mehr aus derselben und seine Entfernung erreicht einen endlichen Werth nach einer gewissen Zeit. Im ersten Falle nennen wir das Gleichgewicht stabil, im zweiten labil.

Betrachten wir ein System von Punkten, dessen Verbindungen von der Zeit nicht abhängen und welches durch solche Kräfte angegriffen wird, dass $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ das vollständige Differential einer Function $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ darstellt, während man sämmtliche Grössen $x, y, z, x', \ldots$ als von einander unabhängig ansieht.

Wie bekannt, ist in der Gleichgewichtslage diese Function im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum in Bezug auf alle wirklich unabhängigen Variablen. Wir wollen beweisen, dass dem Maximum das stabile Gleichgewicht entspricht.

Nehmen wir daher an, unser System befinde sich im Gleichgewicht. Dann ist zufolge des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten das Differential von $\varphi$ Null für alle unendlich kleinen, den Verbindungen genügenden Versetzungen. Es möge der Fall des Maximums vorliegen in Bezug auf alle Werthe, welche $\varphi$ bei diesen Versetzungen annimmt. Die Werthe von $x, y, z, x', \ldots$ in der Gleichgewichtslage seien durch $a, b, c, a', \ldots$ bezeichnet. Versetzen wir sämmtliche Punkte um sehr kleine Grössen und theilen ihnen sehr kleine Geschwindigkeiten mit; zu zeigen ist, dass die Verrückung des Systems beständig sehr klein bleibt, dass also das Gleichgewicht stabil war.

Wir schreiben zu dem Ende:
$x = a + h$, $y = b + k$, $z = c + l$, $x' = a' + h'$, etc. und bezeichnen durch $v_0, v_0', \ldots$ die sehr kleinen Geschwindigkeiten, welche den einzelnen Punkten mitgetheilt wurden. Die Gleichung der lebendigen Kräfte liefert:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma m v^2 - \frac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \varphi(a + h,\ b + k,\ c + l, \ldots) \\ \qquad\qquad - \varphi(a + h_0,\ b + k_0,\ c + l_0, \ldots); \end{cases}$$

darin stellen $h_0, k_0, l_0, \ldots$ die anfänglichen sehr kleinen Versetzungen, nach den Axen zerlegt, vor.

Die Function $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ soll ein Maximum sein, wenn $x, y, z, \ldots$ die Werthe $a, b, c, \ldots$ haben. Daher fallen aus der Entwicklung von $\varphi(a+h, b+k, c+l, \ldots)$ alle Glieder weg, welche in Bezug auf $h, k, l, \ldots$ vom ersten Grade sind. Und die Glieder des zweiten Grades können, wenn man ihnen die entgegengesetzten Zeichen giebt, als eine Summe von Quadraten solcher Grössen dargestellt werden, welche lineare Functionen von $h, k, l, \ldots$ ohne unabhängige Glieder sind. Die Anzahl dieser Quadrate ist gleich jener der unabhängigen Variablen. Bezeichnen $s, s', s'', \ldots$ die verschiedenen Grössen, deren Quadrate man nehmen soll, und $R$ den Rest der Reihe; dann hat man:

$$\varphi(a+h, b+k, c+l, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots) - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \cdots) + R$$

und ebenso:

$$\varphi(a+h_0, b+k_0, c+l_0, \ldots) = \varphi(a, b, \ldots) - (s_0{}^2 + s'_0{}^2 + s''_0{}^2 + \cdots) + R_0.$$

Die Gleichung (1) wird demnach:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0{}^2 = -(s^2 + s'^2 + \cdots) + (s_0{}^2 + s'_0{}^2 + s''_0{}^2 + \cdots) + R - R_0;$$

folglich erhalten wir:

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = c - (s^2 + s'^2 + s''^2 + \cdots) + R,$$

wenn $c$ die sehr kleine Grösse bedeutet:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v_0{}^2 + s_0{}^2 + s'_0{}^2 + s''_0{}^2 + \cdots - R_0.$$

Die Grössen $h, k, l, h', \ldots$ sind in der That nicht alle von einander unabhängig; man könnte vielmehr eine gewisse Zahl derselben vermöge der Verbindungsgleichungen des Systems eliminiren. Die übrig bleibenden würden in der ersten Potenz in die verschiedenen Glieder der Grössen $s, s', s'', \ldots$ eingehen, deren Anzahl gerade so gross ist als die der unabhängigen Variablen. Daraus folgt, dass wenn diese letzten sehr kleine Werthe haben, dasselbe auch für $s, s', s'', \ldots$ stattfindet; sowie umgekehrt. Wenn wir daher nachweisen, dass $s, s', \ldots$ beständig sehr klein bleiben, so haben wir zugleich dargethan, dass dieses auch mit den Verrückungen sämmtlicher Punkte des Systems der Fall ist.

Das erste Glied der Gleichung (2) hat einen wesentlich positiven Werth, deshalb auch das zweite. Hieraus lässt sich leicht einsehen, dass jede der Grössen $s^2, s'^2, \ldots$ beständig kleiner bleibt als $c$. In der That, der Werth von $c$ zeigt, dass dies zu Anfang der Fall ist; darauf ändern sie sich stetig. Nehmen wir nun an, eine von ihnen z. B. $s^2$ würde gleich $c$, während noch

keine andere über $c$ liegen soll; dann würde diese Grösse sowie alle anderen noch immer sehr klein sein. Folglich wären $h, k, l, \ldots$ sehr klein und $R$ unvergleichbar kleiner als jede von den Grössen $s^2, s'^2, \ldots$. Die Annahme $s^2 = c$ zöge daher die unmögliche Folge nach sich, dass das zweite Glied von (2) negativ würde. Demnach bleiben $s, s', s'', \ldots$ sämmtlich unter $\sqrt{c}$ und somit sehr klein. Die Verrückungen $h, k, l, \ldots$ bleiben deshalb auch sehr klein, oder das Gleichgewicht war stabil.

Ist die Function $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ ein Minimum, so vermag man nicht durch analoge Schlüsse die Labilität des Gleichgewichts darzuthun. Man muss vielmehr jeden besonderen Fall für sich betrachten.

## Anwendung der Gleichung der lebendigen Kräfte beim Berechnen der Leistung von Maschinen.

70. Die Maschinen werden im Allgemeinen nur durch ihre Bewegung nützlich und haben dann den Zweck, gewisse Widerstände zu überwinden und ihre Angriffspunkte so zu bewegen, dass deren Verrückungen, zerlegt nach der Richtung jener Widerstände oder Widerstandskräfte, dieser entgegengesetzt seien. Unter bewegenden Kräften versteht man die zur Erzeugung der Bewegung angewandten.

In der Regel kann eine Maschine nur zwei verschiedene, einander gerade entgegengesetzte Bewegungen annehmen, in welchen die Lage eines Punktes die aller anderen bestimmt. Zur Bestimmung der Bewegung genügt daher eine Gleichung, wenn man noch den Sinn kennt. Am bequemsten eignet sich dazu die der lebendigen Kräfte:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Die Summen des ersten Gliedes erstrecken sich über sämmtliche Punkte des Systems. Die Summe des zweiten Gliedes bezieht sich auf alle bewegenden und widerstehenden Kräfte, welche daran angebracht sind. Das Integral wird zwischen zwei beliebigen Grenzen genommen, denen die Geschwindigkeiten $v_0$ und $v$ des Punktes von der Masse $m$ entsprechen.

Wir wollen die Unterscheidung der Kräfte in bewegende und widerstehende in (1) bemerklich machen. Es sei deshalb

$P$ irgend eine bewegende Kraft und $dp$ die unendlich kleine Verrückung ihres Angriffspunktes, geschätzt auf ihrer Richtung. Dann ist $\Sigma P dp$ derjenige Theil von $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$, welcher von den bewegenden Kräften herrührt. Ferner bezeichne $Q$ eine beliebige widerstehende Kraft, $dq$ die Verrückung ihres Angriffspunktes, projicirt auf ihre Richtung und absolut genommen. Der den widerstehenden Kräften entsprechende Theil ist somit $-\Sigma Q dq$; und die Gleichung (1) darf geschrieben werden:

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

71. Man kann jede Kraft durch ein Gewicht ersetzen, welches an einem Faden hängt, der an ihrem Angriffspunkt befestigt ist und dessen Richtung von da ab mit der Kraftrichtung vermöge einer Handrolle zusammenfällt. Nehmen wir auf diese Weise statt der Kraft $P$ ein ihr gleiches Gewicht, so wird dasselbe bei einer unendlich kleinen Bewegung der Maschine um diejenige Grösse $dp$ sinken, welche die Projection der Verrückung des Fadenendes auf die Fadenrichtung ist. Verfahren wir ebenso für irgend eine Kraft $Q$, dann drückt $dq$ die Grösse aus, um welche das mit $Q$ gleiche Gewicht gehoben wird, während $P$ um $dp$ sinkt.

Wenn wir uns daher alle Kräfte constant denken, so sagt die Gleichung (2), dass der Zuwachs der halben Summe an lebendiger Kraft zwischen zwei beliebigen Epochen gleich ist der Summe der Producte der Gewichte $P$ in ihre respectiven Fallhöhen, weniger die Summe der Producte der Gewichte $Q$ in die Höhen, um welche sie gehoben wurden.

Wir verstehen mit Coriolis unter Arbeitsgrösse das Product eines Gewichts in die Höhe, um welche es sich gehoben oder gesenkt hat, und allgemein das Product irgend einer Kraft in die Projection der Verrückung ihres Angriffspunktes auf ihre Richtung. Ist die Intensität der Kraft veränderlich, so betrachtet man die unendlich kleinen Theile der Bewegung. Die elementaren Arbeitsgrössen, welche denselben entsprechen, hängen von dem Gesetz der Kraftänderung ab; und das Integral, welches ihre Summe darstellt, ist die Arbeitsgrösse der Kraft, welche der ganzen Verrückung ihres Angriffspunktes entspricht.

Nennt man bewegende Arbeit diejenige, welche den bewegenden Kräften angehört, und widerstehende Arbeit die den Widerstandskräften zukommende; dann spricht die Gleichung (2) aus, dass der Zuwachs der halben Summe an lebendiger Kraft gleich ist dem Ueberschuss der bewegenden Arbeit über die widerstehende.

72. Wird die Bewegung der Maschine von dem Augenblick ihrer Ruhe an betrachtet, so hat man $v_0 = 0$ und daher statt der Gleichng (2):

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

Folglich ist das zweite Glied immer positiv, oder die bewegende Arbeit überwiegt die widerstehende. Beide werden gleich, wenn die Maschine wieder zur Ruhe kommt.

Wenn die Bewegung gleichförmig wird, was in der Regel den meisten Vortheil gewährt, und man sie nach hergestellter Gleichförmigkeit betrachtet, dann ist das erste Glied der Gleichung (2) beständig Null, folglich auch das zweite. Die bewegende Arbeit ist demnach während eines beliebigen Zeitintervalls der widerstehenden gleich. Weil aber die letzte nicht allein aus der Arbeit besteht, welche man durch die Maschine ausüben wollte und die Nutzeffect genannt wird, sondern noch aus derjenigen, welche der Reibung, dem Widerstand der Mittel, der Fortpflanzung der Bewegung auf die umgebenden Körper, etc. entspricht, so ergiebt sich, dass bei jeder Maschine mehr Arbeit verbraucht wird, als man mit ihr ausübt. Die beste ist diejenige, bei welcher der geringste Verlust stattfindet; und der Nutzen der Maschinen besteht nur in Verwandlung aber nicht in Vermehrung der Arbeit.

Wenn die Geschwindigkeiten constant geworden sind, dann müssen alle Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und in der That kommt man von

$$\int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq = 0$$

auf die Gleichung:

$$\Sigma P dp - \Sigma Q dq = 0,$$

welche bei jedem im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystem erfüllt wird und hier die hinreichende Bedingung dafür ist.

73. Um die Arbeit der Reibung eines bewegten Körpers auszuwerthen, wenn der Berührungspunkt immer ein anderer

wird, muss man als ihren Angriffspunkt für ein unendlich kleines Zeitintervall nicht den fortwährend wechselnden Berührungspunkt betrachten, sondern es ist die Entfernung der zwei durch dieses Intervall getrennten Berührungspunkte als der vom Angriffspunkt beschriebene Weg zu nehmen. Die Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte verlangt, dass die Kräfte während der den Verrückungen $dx$, $dy$, $dz$ entsprechenden unendlich kleinen Zeit die nämlichen materiellen Punkte angreifen. Die tangirende Reibung darf so lange als denselben Punkt angreifend betrachtet werden, weil man dabei nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung fehlt. Man nimmt daher zu ihrer elementaren Arbeit das Product dieser Kraft in die Projection der wirklichen Verrückung desjenigen Körperpunktes auf die Tangente, welcher in dem betrachteten Augenblick Berührungspunkt war.

74. Ereignen sich Stösse zwischen solchen Theilen der Maschine, welche man als unelastisch betrachten darf, so findet augenblicklich ein Verlust an lebendiger Kraft statt gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche den von allen Punkten des Systems verlorenen Geschwindigkeiten entsprechen. Bezeichnet $u$ die von irgend einer Masse $m$ verlorene Geschwindigkeit und $v$ die Geschwindigkeit derselben nach dem Stoss, so haben wir, da während seiner Dauer die Integrale in (2) sich unmerklich ändern:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma m u^2 = \int \Sigma P dp - \int \Sigma Q dq.$$

Man muss folglich, um die Geschwindigkeiten $v$ auf bestimmten Höhen zu erhalten, eine Arbeitsgrösse $\tfrac{1}{2}\Sigma m u^2$ mehr aufwenden, weshalb es gut ist, Stösse soviel als möglich zu vermeiden.

75. Die Bewegung einer Maschine ist entweder gleichförmig oder periodisch; und wenn die Integrale der Gleichung (2) sich über eine ganze Zahl Perioden erstrecken, so hat man $v = v_0$, folglich ist die bewegende Arbeit der widerstehenden gleich, wie wenn die Bewegung gleichförmig wäre. Es genügt aber nicht, dass man dieselbe Arbeitsgrösse ausübt, sondern fast immer kommt es darauf an, dass dies gleichförmig geschehe. Vollkommene Gleichförmigkeit zu erzielen ist beinahe unmöglich; doch kann man die Aenderungen der Geschwindigkeit während einer Periode nahezu unmerklich machen.

Das gewöhnlich angewandte Mittel besteht darin, dass man mit der Maschine eine hinreichend beträchtliche drehbare Masse in Verbindung setzt. Man nimmt dieselbe, damit sie die Stützen weniger belaste, so klein als für den Zweck möglich und giebt ihr deshalb die Form eines Rades (das sogenannte Schwungrad), dessen Masse sich fast ganz an der Peripherie befindet. Bezeichnet $\omega$ seine Winkelgeschwindigkeit und $\mu$ das Product seiner Masse in das Quadrat des Radius, dann beträgt die Summe seiner lebendigen Kräfte nahezu $\mu\omega^2$. Man könnte ihren Werth leicht genau ermitteln, wie auch die Masse vertheilt wäre. Die Summe der lebendigen Kräfte aller anderen Maschinentheile sei $\Sigma m v^2$; durch $\omega'$, $v_0$ mögen die Werthe von $\omega$, $v$ zu einer und derselben Epoche bezeichnet werden. Dann können wir die Gleichung (2) schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(v^2 - v_0^2) + \frac{\mu}{2}(\omega^2 - \omega'^2) = \int(\Sigma P dp - \Sigma Q dq).$$

Nehmen wir zu Grenzen zwei solche Epochen, dass die Differenz zwischen $\int \Sigma P dp$ und $\int \Sigma Q dq$ so gross wird als möglich. Man sieht leicht, dass dies zwei nächste von den Epochen sein müssen, bei welchen die Kräfte an der Maschine im Gleichgewicht stehen; denn darüber hinaus ändern die Elemente des Integrals der Gleichung ihr Zeichen. Die erste Seite ist also dann am grössten, und die Geschwindigkeiten haben die grösste Verschiedenheit, welcher sie fähig sind. Je grösser nun $\mu$, desto enger ist offenbar der Spielraum, welcher den Geschwindigkeiten gestattet bleibt, und man vermag in jedem Falle die angebrachte Masse so zu bestimmen, dass die Aenderungen innerhalb hinlänglich kleiner Grenzen liegen.

## Princip der kleinsten Wirkung.

76. Dieses Princip hat nur für solche Systeme Geltung, auf welche die Gleichung der lebendigen Kräfte anwendbar ist. Es besteht in Folgendem: Wenn man die Bewegungsgrösse eines jeden Punkts durch das Element der von ihm beschriebenen Curve multiplicirt und das Product zwischen zwei beliebigen, für das ganze System gleichen Epochen integrirt, dann ist die Summe aller Integrale ein Minimum; näm-

lich kleiner, als wenn man durch neue Verbindungen die Punkte zwänge, unter dem Einfluss derselben Kräfte andere Curven zwischen den nämlichen Endpunkten zu durchlaufen.

Um den Beweis zu führen, muss man zeigen, dass die Variation Null beträgt, wenn man alle Punkte der Curven mit Festhaltung der Endpunkte unendlich wenig variirt. Es liegt in der Natur dieser Summe, dass dieselbe im Allgemeinen kein Grösstes werden kann und daher, sehr besondere Fälle ausgenommen, ein Kleinstes sein wird.

Man hat:

$$\delta \int \Sigma m v ds = \int \Sigma m \delta (v ds) = \int \Sigma m (\delta v \cdot ds + v \delta ds).$$

Zur Berechnung des ersten Theils setzen wir $v dt$ statt $ds$; dabei bezieht sich $dt$ auf die wirklich stattfindende Bewegung. Dadurch wird:

$$\delta v \cdot ds = v \delta v \cdot dt = \tfrac{1}{2} dt \delta \cdot v^2,$$

folglich:

$$\Sigma m \delta v \cdot ds = \tfrac{1}{2} dt \Sigma m \delta \cdot v^2.$$

Wir haben, wenn $C$ eine Constante bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m v^2 = \varphi (x, y, z, x', \ldots) + C;$$

und zwar muss die Form des zweiten Gliedes bei allen Bewegungen, welche man betrachten mag, dieselbe bleiben, weil die nämlichen Kräfte wirken. Wir nehmen die Variation dieser Gleichung und erhalten:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m \delta \cdot v^2 = \frac{d\varphi}{dx} \delta x + \frac{d\varphi}{dy} \delta y + \text{etc.} = \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

Zufolge der allgemeinen Gleichung der Bewegung [Gl. (1) in Nro. 37] ist der letzte Ausdruck gleich:

$$\Sigma m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right).$$

Demnach:

$$\Sigma m \delta v \cdot ds = \Sigma m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) dt.$$

Um den zweiten Theil zu berechnen, bemerken wir, dass aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt:

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz.$$

Daher:

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z,$$

also:

$$\Sigma mv\delta ds = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt} d\delta x + \frac{dy}{dt} d\delta y + \frac{dz}{dt} d\delta z\right).$$

Vereinigen wir jetzt die zwei Theile der Variation von $\Sigma mvds$, so kommt:

$$\delta \Sigma mvds = \Sigma m d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right).$$

Die Integration giebt:

$$\delta \int \Sigma mvds = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\ \delta x + \frac{dy}{dt}\ \delta y + \frac{dz}{dt}\ \delta z\right) + C'.$$

Die Variationen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sind an den Integralgrenzen Null, weil die Endpunkte fest bleiben. Das zweite Glied ist deshalb Null, und man hat:

$$\delta \int \Sigma mvds = 0,$$

was zu beweisen war.

Daraus sieht man, dass das Integral

$$\int \Sigma mvds \text{ oder } \int \Sigma mv^2 dt$$

bei der Bewegung des Systems ein Minimum ist.

77. Wenn keine Kräfte wirken, so hat man:

$$\Sigma mv^2 = k,$$

wo $k$ constant ist. Deshalb:

$$\int \Sigma mv^2 dt = k(t - t_1);$$

$t$ und $t_1$ bezeichnen die Zeitgrenzen. Das Integral ist ein Minimum, folglich auch $t - t_1$. Das System rückt daher aus einer Lage in die andere während kürzerer Zeit, als wenn man neue Verbindungen herstellte.

Ein Punkt, der sich auf einer festen Oberfläche bewegen muss, hat constante Geschwindigkeit, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Da nun die Zeit, welche er zum Uebergang nach einer anderen Stelle bedarf, ein Minimum ist, so muss auch die Länge der durchlaufenen Linie ein Minimum sein. Dasselbe haben wir im ersten Theil (Nr. 211) auf andere Art bewiesen.

---

## Von den Trägheitsmomenten.

78. Die Bestimmung der Bewegung eines festen Körpers macht die Betrachtung gewisser bestimmten Integrale nothwendig, welche sich über den ganzen Körper erstrecken. Deshalb wollen wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen.

Die Körper bestehen aus Molekülen, welche durch sehr kleine Intervalle getrennt sind; die Materie bietet also nicht Stetigkeit dar. Aber wenn es sich nur um äussere Kräfte handelt, so darf man den Körper in solcher Weise als ein Continuum betrachten, dass man sich jedes sehr kleine Raumtheilchen, welches noch eine grosse Zahl Moleküle enthalten kann, von der Materie stetig erfüllt vorstellt, die ihm nach Maassgabe der Dichte zukommt; alle diese Raumtheilchen schliessen sich stetig an einander. Die äusseren Kräfte zeigen im Umfang eines solchen Theilchens keine merkliche Verschiedenheit; wir werden daher bei unserer Annahme, welche die Rechnung sehr erleichtert, die Wirkungen auf die Theile des Körpers von den wirklich ausgeübten nicht verschieden finden.

79. Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Gerade nennt man die Summe der Producte der Massen aller Elemente in das Quadrat ihres Abstands von der Geraden. Nimmt man sie zur $z$-Axe, so wird das Trägheitsmoment:

$$\Sigma\,(x^2 + y^2)\,dm;$$

$dm$ bedeutet die Masse des Elements mit den Coordinaten $x$, $y$, $z$, und das Integral erstreckt sich über die ganze Masse. Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der $y$ und $x$ sind:

$$\Sigma\,(x^2 + z^2)\,dm, \quad \Sigma\,(y^2 + z^2)\,dm.$$

80. Ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Gerade bekannt, so kann man es leicht in Bezug auf jede Parallele finden.

Nehmen wir die erste zur $z$-Axe; durch die zweite gehe die Ebene der $z$, $x$.

Die Entfernung beider Geraden sei $a$ und $M$ die Masse des Körpers; $Mk^2$ bezeichne sein Trägheitsmoment in Bezug auf die $z$-Axe. Das Moment in Bezug auf die Parallele wird ausgedrückt durch:

$$\Sigma\left[(x-a)^2+y^2\right]dm=\Sigma(x^2+y^2)\,dm-2a\,\Sigma x\,dm+Ma^2,$$

also durch

$$M(k^2+a^2)-2a\,Mx_1,$$

wenn $x_1$ die Abscisse des Schwerpunkts bedeutet.

81. Befände sich der Schwerpunkt auf der $z$-Axe, dann wäre $x_1=0$, und der vorstehende Ausdruck würde:

$$M(k^2+a^2).$$

Man sieht, dass derselbe nur von dem Abstand $a$ abhängt; weshalb das Trägheitsmoment das nämliche ist in Bezug auf alle Erzeugungslinien eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis, dessen Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

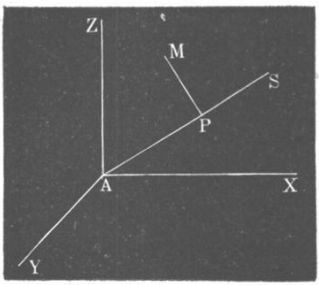
Ferner ergiebt sich, wenn man in Bezug auf irgend zwei parallele Geraden die Trägheitsmomente nimmt, dass ihre Differenz gleich ist der Masse des Körpers multiplicirt mit dem Unterschied der Quadrate der Abstände der Geraden vom Schwerpunkt.

Endlich bemerkt man, dass von allen Parallelen zu einer Richtung das kleinste Trägheitsmoment zu der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden gehört.

82. Suchen wir jetzt das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Gerade $AS$, welche durch den Ursprung geführt ist unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mit den Coordinatenaxen. Hat man dasselbe, so bestimmt sich das Trägheitsmoment leicht in Bezug auf irgend eine Parallele, d. i. irgend eine Gerade im Raum.

Es seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines Punktes $M$ (Fig. 7) des Körpers und $dm$ die Masse des Elements, welches diesen Punkt enthält. Fällt man $MP$ senkrecht auf $AS$, dann wird:

Fig. 7.




$$\overline{MP}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$
$$- (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2$$

oder:

$$\overline{MP}^2 = x^2 \sin\alpha^2 + y^2 \sin\beta^2 + z^2 \sin\gamma^2 - 2\,yz \cos\beta \cos\gamma$$
$$- 2\,xz \cos\alpha \cos\gamma - 2\,xy \cos\alpha \cos\beta.$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf $AS$, d. i. $\Sigma \overline{MP}^2\, dm$ durch $\mu$, so erhalten wir:

$$\mu = a \sin\alpha^2 + b \sin\beta^2 + c \sin\gamma^2$$
$$- 2\,d \cos\beta \cos\gamma - 2\,e \cos\alpha \cos\gamma - 2f \cos\alpha \cos\beta,$$

während:

$$\Sigma x^2 dm = a, \quad \Sigma y^2 dm = b, \quad \Sigma z^2 dm = c,$$
$$\Sigma yz\, dm = d, \quad \Sigma xz\, dm = e, \quad \Sigma xy\, dm = f.$$

Die Constanten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ werden bestimmt durch die Natur des Körpers und seine Stellung zu den Axen.

Denken wir uns die Trägheitsmomente $\mu$ in Bezug auf alle durch $A$ möglichen Geraden $AS$ berechnet, und tragen wir auf jeder Geraden die ihr entsprechende Länge $AN = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ auf, dann wird der Ort aller Punkte $N$ eine vollkommen geschlossene Oberfläche bilden, weil $AN$ stets reelle endliche Werthe hat, welche stetig neben einander liegen. Um ihre Gleichung zu finden, bezeichnet man die Coordinaten von $N$ mit $x$, $y$, $z$ und erhält:

$$\cos\alpha = x\sqrt{\mu}, \quad \cos\beta = y\sqrt{\mu}, \quad \cos\gamma = z\sqrt{\mu},$$
$$\frac{1}{\mu} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Wenn man vermöge dieser Gleichungen aus jener, welche oben den Werth von $\mu$ gab, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\mu$ eliminirt, so folgt:

(1) $(b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2 - 2dyz - 2exz - 2fxy = 1.$

Der Ort ist daher eine Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, und zwar ein Ellipsoid, da kein Radius unendlich werden kann. Poinsot nennt es das Centralellipsoid.

Gestalt und Lage dieses Ellipsoids hängen für denselben Ursprung von der Annahme der Coordinatenaxen nicht ab. Aber die Gleichung wird einfacher, wenn man seine rechtwinkligen Axen dazu nimmt.

Nehmen wir daher an, wir hätten dieses Axensystem gewählt. Die Constanten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ erhalten dadurch bestimmte Werthe und zwar solche, dass die Producte der Coordinaten aus der Gleichung des Centralellipsoids wegfallen. Man hat folglich:

$$d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0$$

oder:

$$\Sigma yz\,dm = 0, \quad \Sigma xz\,dm = 0, \quad \Sigma xy\,dm = 0.$$

Demnach giebt es für jeden Ursprung ein solches Axensystem, dass diese drei Integrale Null werden, welche Gestalt auch der Körper haben mag, und selbst dann, wenn man irgend eine Zahl von getrennten Körpern hätte. Dieses System ist das der Axen des Centralellipsoids und deshalb nur ein einziges, wenn dieselben ungleich sind. Sind zwei von ihnen gleich, so bleibt die dritte Axe zwar unveränderlich, aber statt der beiden ersten können wir irgend zwei rechtwinklige Geraden in derselben Ebene nehmen. Sind alle drei Axen gleich, so hat jedes durch denselben Ursprung gelegte rechtwinklige Axensystem die bemerkte Eigenschaft.

Diese besonderen Richtungen (die Axen des Centralellipsoids) führen den Namen Hauptaxen der Trägheit.

Bezeichnen $A$, $B$, $C$ die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf seine Hauptaxen oder die Hauptträgheitsmomente, so haben wir:

$$b + c = A, \quad a + c = B, \quad a + b = C;$$

die Gleichung (1) des Centralellipsoids wird folglich:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

83. Das Trägheitsmoment $\mu$ in Bezug auf irgend eine durch den Ursprung gehende Axe, welche die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$

mit den Hauptaxen macht, wird erhalten, indem man beachtet, dass der entsprechende Radius des Ellipsoids $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ beträgt, dass also sein Endpunkt zu Coordinaten hat:

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mu}}, \quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\mu}}, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mu}}.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung des Centralellipsoids findet sich:

$$\mu = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2.$$

Offenbar ist das zweite Glied grösser als die kleinste von den Grössen $A$, $B$, $C$ und kleiner als die grösste. Daraus sieht man, dass das kleinste und grösste Hauptmoment zugleich das kleinste und grösste ist unter den Momenten, welche sich auf alle durch denselben Punkt gehende Geraden beziehen. Dasselbe zeigt die blosse Ansicht des Centralellipsoids.

Wenn $A = B$, so wird:

$$\mu = A(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2) + C\cos\gamma^2$$

oder:

$$\mu = A + (C - A)\cos\gamma^2.$$

Folglich sind dann die Trägheitsmomente die nämlichen in Bezug auf alle Geraden, welche durch den Ursprung gehen und mit der ungleichen Axe gleiche Winkel machen. Dasselbe zeigt wieder das Centralellipsoid, welches jetzt eine Umdrehungsfläche um die $z$-Axe ist.

84. Hat man blos:

$$\Sigma xz\,dm = 0, \quad \Sigma yz\,dm = 0,$$

so enthält die Gleichung des Centralellipsoids das Product $xy$, jedoch nicht die zwei anderen. Die Axe der $z$ ist folglich eine Hauptaxe desselben, also eine Hauptaxe der Trägheit in Bezug auf den Coordinatenursprung.

85. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es Punkte giebt, für welche die drei Hauptträgheitsmomente und folglich alle anderen gleich werden. Das Centralellipsoid zu einem solchen Punkt ist eine Kugel, und alle durch den Punkt gehende Geraden sind Hauptaxen. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die zum Schwerpunkt des Körpers gehörenden Hauptaxen Coordinatenaxen seien.

Mit $x'$, $y'$, $z'$ bezeichnen wir die Coordinaten des gesuchten Punkts. Führen wir durch ihn Parallelen mit den Axen der $x$, $y$, $z$; diese Parallelen sollen Hauptaxen sein zu dem Punkt wie alle anderen durch ihn gehende Geraden. Man muss folglich haben:

$$\Sigma\,(y - y')\,(z - z')\,dm = 0, \quad \Sigma\,(z - z')\,(x - x')\,dm = 0,$$
$$\Sigma\,(x - x')\,(y - y')\,dm = 0.$$

Der Voraussetzung nach hat man:

$$\Sigma\,yz\,dm = 0, \quad \Sigma\,xz\,dm = 0, \quad \Sigma\,xy\,dm = 0,$$
$$\Sigma\,x\,dm = 0, \quad \Sigma\,y\,dm = 0, \quad \Sigma\,z\,dm = 0.$$

Die vorhergehenden Gleichungen werden daher, wenn $M$ die Masse des Körpers bedeutet:

$$My'z' = 0, \quad Mx'z' = 0, \quad Mx'y' = 0.$$

Zwei von den Grössen $x'$, $y'$, $z'$ müssen deshalb Null sein. Setzen wir $x' = 0$, $y' = 0$; die Momente in Bezug auf die neuen Axen werden dann:

$$A + Mz'^2, \quad B + Mz'^2, \quad C.$$

Diese drei Werthe sollen gleich sein, welches fordert:

$$A = B, \quad A + Mz'^2 = C.$$

Folglich müssen zwei Hauptmomente, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, gleich sein; und die gesuchten Punkte können nur auf der dem dritten Moment entsprechenden Axe liegen. Damit $z'$ reell werde, muss man haben $C > A$; das dritte Moment muss daher zugleich das grösste sein. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es zwei der Aufgabe genügende Punkte. Sie liegen in der Axe des grössten Moments auf beiden Seiten des Schwerpunkts in der Entfernung $\sqrt{\frac{C - A}{M}}$ von diesem.

86. Die Hauptaxen der Trägheit eines Körpers, welche durch dessen Schwerpunkt gehen, haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie zu jedem ihrer Punkte Hauptaxen bleiben und dann als zugeordnete Hauptaxen parallele mit den beiden anderen besitzen.

In der That, nehmen wir eine von ihnen, z. B. die der $z$, und versetzen wir den Ursprung an irgend einen Punkt derselben; dann wird:

$$z = z' + h.$$

Der Voraussetzung nach ist:

$$\Sigma yz\,dm = 0, \quad \Sigma xz\,dm = 0, \quad \Sigma xy\,dm = 0.$$

Ferner:

$$\Sigma yz\,dm = \Sigma yz'\,dm + h\Sigma y\,dm = \Sigma yz'\,dm;$$

folglich:

$$\Sigma yz'\,dm = 0.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\Sigma xz'\,dm = 0.$$

Legt man daher durch irgend einen Punkt einer der Hauptaxen, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, Parallelen mit denselben, so hat man Hauptaxen zu dem Punkt.

87. Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds. — Führen wir durch den Mittelpunkt des homogenen Parallelepipeds drei Parallelen mit den Kanten, so haben wir die Hauptaxen zu dem Schwerpunkt. Bezeichnen $a$, $b$, $c$ die Kantenlängen, $M$ die Masse; dann werden die Trägheitsmomente in Bezug auf jene Axen:

$$M\left(\frac{b^2 + c^2}{12}\right), \quad M\left(\frac{a^2 + c^2}{12}\right), \quad M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right),$$

wie man leicht durch Integriren findet. Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Gerade, welche die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ mit den Kanten macht und vom Mittelpunkt um die Strecke $d$ absteht, ist folglich:

$$\frac{M}{12}\left[(b^2 + c^2)\cos\alpha^2 + (a^2 + c^2)\cos\beta^2 + (a^2 + b^2)\cos\gamma^2\right] + Md^2.$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Kanten sind:

$$M\left(\frac{b^2 + c^2}{3}\right), \quad M\left(\frac{a^2 + c^2}{3}\right), \quad M\left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right).$$

88. Trägheitsmoment eines Ellipsoids. — Es genügt, dass man die Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen der Trägheit kenne. Diese

sind die Axen des Ellipsoids, wenn dieses homogen ist, was wir annehmen. Die Gleichung sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Suchen wir das Trägheitsmoment in Bezug auf die $z$-Axe. Der Faden über und unter dem Rechteck $dx\,dy$ beträgt:

$$2c\,dx\,dy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

Das Moment wird daher, wenn $D$ die Dichte bezeichnet:

$$2cD\int\int(x^2 + y^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Dieser Ausdruck lässt sich zerlegen in

$$2cD\int\int x^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$$+ 2cD\int\int y^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Den ersten Theil integriren wir nach $y$ zwischen den Grenzen

$$-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Das Integral

$$\int dy\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}$$

zwischen diesen Grenzen ist die Fläche eines Halbkreises vom Radius $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; es hat folglich den Werth

$$\frac{\pi b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Wir müssen daher nach $x$ den Ausdruck integriren

$$\pi bcDx^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

und zwar von $x = -a$ bis $x = +a$; dies giebt:

$$\frac{4}{15}\pi bca^3D \quad \text{oder} \quad \frac{Ma^2}{5},$$

wenn $M$ die Masse des Ellipsoids bedeutet.

Die Integration des zweiten Theils liefert auf gleiche Weise $\frac{Mb^2}{5}$. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die $z$-Axe beträgt daher:

$$M\left(\frac{a^2+b^2}{5}\right).$$

Für die beiden anderen Axen würde man finden:

$$M\left(\frac{a^2+c^2}{5}\right),\ M\left(\frac{b^2+c^2}{5}\right).$$

In dem Falle, wo $a = b = c$, hat man

$$\frac{2Ma^2}{5} \text{ oder } \frac{8\pi Da^5}{15}$$

als Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf irgend einen Durchmesser.

89. Lässt man den Radius $a$ dieser Kugel um das unendlich kleine Stück $da$ wachsen, so wächst ihr Trägheitsmoment um

$$\tfrac{8}{3}\pi Da^4 da.$$

Dieser Ausdruck stellt das Trägheitsmoment einer Kugelschale vor vom Radius $a$, der Dicke $da$ und Dichte $D$.

Integrirt man denselben, während $D$ eine gegebene Function von $a$ ist, zwischen zwei Werthen $R$, $R'$, so erhält man das Trägheitsmoment einer nicht homogenen Hohlkugel, deren Dichte allein abhängt von der Entfernung vom Centrum.

90. Trägheitsmoment eines Umdrehungskörpers. — Betrachten wir noch den homogenen Körper, welcher erzeugt wird durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Gerade, die wir zur Axe der $y$ nehmen, und suchen wir sein Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe. Es seien $F(y)$, $\varphi(y)$ die Ausdrücke der Abscissen der beiden Curven, welche die Fläche begrenzen, und $D$ die Dichte der Substanz. Das Trägheitsmoment einer Scheibe, welche enthalten ist zwischen zwei senkrechten Ebenen auf die Axe, die den Ordinaten $y$ und $y + dy$ entsprechen, beträgt $2\pi D dy \int x^3 dx$. Dieses Integral zwischen den Grenzen $\varphi(y)$, $F(y)$ ist gleich:

$$\frac{\pi D dy}{2}\left[F(y)^4 - \varphi(y)^4\right];$$

welchen Ausdruck man nach $y$ integriren muss zwischen den Grenzen der Erzeugungsfläche.

Ist zum Beispiel

$$\varphi(y) = 0, \quad F(y)^2 = a^2 - y^2,$$

dann wird der Körper eine Kugel; und das Trägheitsmoment erhält den schon bekannten Ausdruck:

$$\frac{\pi D}{2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - y^2)^2 \, dy \quad \text{oder} \quad \frac{8 \pi D a^5}{15}.$$

## Bewegung eines Körpers um eine feste Axe.

91. Betrachten wir einen Körper von bekannter Gestalt und Dichte, welcher unveränderlich verbunden ist mit einer festen Axe, um die er sich frei drehen kann. Alle seine Punkte oder nur eine endliche Zahl derselben werden durch gegebene Kräfte angegriffen. Man soll die Bewegung bestimmen, wenn entweder die Anfangsgeschwindigkeiten bekannt sind oder die Momentankräfte, welche sie hervorgebracht haben.

Liegen die Kraftrichtungen nicht in senkrechten Ebenen auf die Drehaxe, so lässt sich jede Kraft in zwei zerlegen, davon eine parallel zur Axe und die andere in einer senkrechten Ebene. Die erste wird durch den Widerstand der Axe vernichtet; man darf deshalb bei Untersuchung der Bewegung von ihr absehen, und wir nehmen an, dass alle Kräfte in senkrechten Ebenen auf die Drehaxe wirken.

Dem Princip von d'Alembert zufolge findet Gleichgewicht statt zwischen den gegebenen und solchen Kräften, welche gleich und gerade entgegengesetzt sind denjenigen, die den frei gedachten Punkten die Bewegung beibringen würden, welche sie wirklich befolgen. Diese letzten Kräfte sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dm,\quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dm,\quad \frac{d^2z}{dt^2}\,dm$$

für das Element von der Masse $dm$ und den Coordinaten $x, y, z$. Doch betrachten wir besser ihre Tangential- und Normalcomponente. Die erste bewirkt den Zuwachs an Geschwindigkeit; die zweite oder die Centripetalkraft wird durch den Widerstand der Drehaxe aufgehoben, weil jeder Punkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Centrum auf dieser liegt. Wir brauchen daher nur die Tangentialcomponente zu berücksichtigen,

welche durch $\frac{dv}{dt}\,dm$ vorgestellt wird, wenn $v$ die Geschwindigkeit und $dm$ die Masse des Punktes bezeichnet. Bedeutet $r$ dessen Abstand von der Drehaxe und $\theta$ den Winkel zweier durch diese gelegten Ebenen, deren eine fest ist, während die andere sich mit dem Körper bewegt, so hat man:

$$v = r\,\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{folglich} \quad \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Die Geschwindigkeit wird dabei als positiv betrachtet, wenn der Winkel $\theta$ wächst, und die Kraft, wenn sie dies zu bewirken strebt. Das Gleichgewicht eines Körpers um eine feste Axe verlangt, dass die algebraische Summe der Kräftemomente in Bezug auf diese Axe Null sei, während man als positiv z. B. die Momente der Paare betrachtet, welche den Winkel $\theta$ zu vergrössern streben, und als negativ diejenigen, welche ihn verkleinern wollen.

Bezeichnet $P$ irgend eine der gegebenen Kräfte und $p$ ihre Entfernung von der Drehaxe, so liefert das Gleichgewicht zwischen den Kräften $P$ und $-\,r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$ folgende Gleichung:

$$\Sigma Pp - \Sigma r^2\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,dm = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma Pp - \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\Sigma r^2\,dm = 0,$$

wo die Summen sich über alle Punkte des Körpers erstrecken.

Wir wollen mit $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Körpers bezeichnen in Bezug auf eine zur Drehaxe Parallele, welche durch seinen Schwerpunkt geführt ist; $M$ soll die Masse vorstellen. Die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe sei $l$; dann haben wir:

$$\Sigma r^2\,dm = M(k^2 + l^2),$$

und die vorletzte Gleichung wird:

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma Pp}{M(k^2 + l^2)}.$$

Die Momente der gegebenen Kräfte ändern sich im Allgemeinen mit der Lage des Körpers. Wenn diese Kräfte nicht von der Zeit abhängen, so werden ihre Momente bekannte Functionen von $\theta$ sein, und mittelst Integriren der Gleichung (1) erhält man $\theta$ ausgedrückt durch $t$ und zwei Constanten. Diese Constanten und mit ihnen die Bewegung aller Punkte

des Körpers werden bestimmt, wenn man kennt die Werthe von $\theta$ und $\frac{d\theta}{dt}$ für $t = 0$, also Lage und Winkelgeschwindigkeit des Körpers beim Anfang der Bewegung.

Um die Gleichung (1) zu integriren, schreiben wir dieselbe

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varphi(\theta).$$

Durch Multipliciren mit $2\,d\theta$ und Integriren von dem Anfangswerth $\theta_0$ an kommt:

$$(2) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta} \varphi(\theta)\,d\theta + \omega^2;$$

$\omega$ ist Anfangswerth der Winkelgeschwindigkeit. Daraus geht hervor:

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2\int_{\theta_0}^{\theta} \varphi(\theta)\,d\theta + \omega^2}}.$$

Die Quadratur liefert $t$ als Function von $\theta$. Die dabei eingehende Constante wird bestimmt, indem man ausdrückt, dass gleichzeitig

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0.$$

Wenn die gegebenen Kräfte solche sind, dass die Gleichung der lebendigen Kräfte anwendbar ist, so erhält man aus ihr die Formel (2) unmittelbar. Da nämlich die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung $r$ von der Axe $r\,\frac{d\theta}{dt}$ beträgt, so wird die Summe $\Sigma mv^2$ gleich

$$\Sigma mr^2\,\frac{d\theta^2}{dt^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\theta^2}{dt^2}\,\Sigma mr^2.$$

Drückt man nun auch, was hier immer möglich ist, das zweite Glied der Gleichung der lebendigen Kräfte durch die einzige Variable $\theta$ aus, so hat man $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ als Function von $\theta$ und damit die Formel (2).

92. Wir wollen insbesondere den Fall eines schweren Körpers betrachten, der sich um eine horizontale Axe bewegt, die wir zur Axe der $y$ nehmen, während die $z$-Axe der Schwere

entgegengesetzt sei. Der Winkel $\theta$ werde gebildet von der Verticalebene $YZ$ mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers geführten Ebene; er wachse von der positiven $z$-Axe gegen die positive $y$-Axe hin, d. h. im Sinne der directen Bewegung in Bezug auf die Axe der positiven $y$. Das Moment der Schwere an dem Element $dm$ beträgt $gxdm$; denn sie strebt den Winkel $\theta$ zu vergrössern bei positivem $x$ und ihn zu verkleinern bei negativem $x$. Die Gleichung (1) wird daher:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\Sigma x dm}{M(k^2 + l^2)}$$

oder, wenn $x_1$ die Abscisse des Schwerpunkts bezeichnet:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{gx_1}{k^2 + l^2}.$$

Man hat $x_1 = l \sin \theta$; folglich:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{gl}{k^2 + l^2} \sin \theta. \tag{3}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene, welche die Bewegung eines mit dem Ursprung festen materiellen Punktes in der Ebene $XZ$ bestimmt. Ist nämlich sein Abstand vom Ursprung oder die Länge dieses einfachen Pendels $R$, so erhält man als Gleichung seiner Bewegung:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{R} \sin \theta.$$

Sie würde aus (3) hervorgehen, wenn man sich die ganze Masse vereinigt dächte in einem Punkt in der Entfernung $R$ von der Axe. Beide Gleichungen werden identisch, indem man setzt:

$$R = \frac{k^2 + l^2}{l} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Lässt man zugleich die Anfangswerthe von $\theta$ und $\frac{d\theta}{dt}$ für den Körper und das einfache Pendel übereinstimmen, so wird die Bewegung beider beständig dieselbe sein. Die Bewegung eines schweren Körpers um eine feste Axe ist somit auf die Pendelbewegung zurückgeführt, auf welche wir hinweisen.

93. Wenden wir auf diesen Fall die Gleichung der lebendigen Kräfte an. Die Componenten der irgend ein Massenelement $dm$ angreifenden Kraft sind $X=0$, $Y=0$, $Z=-gdm$; die Gleichung der lebendigen Kräfte giebt daher:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \Sigma m r^2 = -2\Sigma \int g\,dm\,dz = -2g\Sigma z\,dm + C.$$

Bezeichnet $z_1$ das $z$ für den Schwerpunkt des Körpers, so hat man:

$$\Sigma z\,dm = Mz_1 = Ml\cos\theta.$$

Setzen wir wie vorher

$$\Sigma m r^2 = M(k^2 + l^2)$$

und bestimmen die Constante $C$ durch die Bedingung, dass $\theta_0$ und $\omega$ die Anfangswerthe von $\theta$ und $\frac{d\theta}{dt}$ seien; dann erhalten wir

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{2gl}{k^2+l^2}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega^2$$

als erstes Integral der Gleichung (3). Die Rechnung wird wie in der Pendeltheorie zu Ende geführt.

Wenn die feste Axe nicht horizontal ist, so braucht man blos die Schwere zu zerlegen und hat dann wieder eine auf den Richtungen der Kräfte senkrechte Drehaxe.

94. Ein fester Körper, der um eine horizontale Axe schwingt, heisst ein zusammengesetztes Pendel. Unter seiner Länge versteht man die Länge desjenigen einfachen Pendels, welches gleiche Bewegung mit ihm hat. Die Länge des betrachteten zusammengesetzten Pendels beträgt daher $l + \frac{k^2}{l}$. Sie ändert sich nicht, wenn man den Körper um die durch den Schwerpunkt geführte Parallele zur Axe dreht; denn $l$ und $k$ bleiben ungeändert.

Man nennt Schwingungspunkt eines zusammengesetzten Pendels jeden Punkt desselben oder jeden fest damit verbundenen Punkt, dessen Bewegung gerade so geschieht, als ob er allein wäre und sich um die Drehaxe bewegte durch die Wirkung der Schwere. Hiernach sind alle jene Punkte Schwingungspunkte, welche sich auf der in der Entfernung $l + \frac{k^2}{l}$

zur Axe Parallelen befinden, die enthalten ist in der durch die Axe und den Schwerpunkt des Körpers geführten Ebene; sie liegen um das Stück $\frac{k^2}{l}$ unterhalb des Schwerpunkts. Einige Schriftsteller nennen insbesondere denjenigen von ihnen den Schwingungspunkt, welcher auf der Verticalen durch den Schwerpunkt liegt.

Die Abstände des Schwerpunkts von der Drehaxe und von der Linie der Schwingungspunkte geben das Product $k^2$; also wird, wenn man den Körper umkehrt, d. h. seinen Schwerpunkt um das Stück $\frac{k^2}{l}$ unterhalb der Drehaxe nimmt, diejenige Gerade zur Linie der Schwingungspunkte werden, welche um $l$ unter dem Schwerpunkt liegt. Die Pendellänge ist dann noch dieselbe, folglich auch die Bewegung.

Pendellänge und Bewegung bleiben ferner ungeändert, wenn man statt der Drehaxe irgend eine Parallele in gleicher Entfernung vom Schwerpunkt nimmt, denn $l$ und $k^2$ ändern sich dadurch nicht.

Allgemein ist die Bewegung dieselbe um alle Axen, welche für das Pendel gleiche Länge geben. Bezeichnet man durch $l$ den Abstand irgend einer Drehaxe vom Schwerpunkt, durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel ihrer Richtung mit den zu diesem Punkt gehörigen Hauptaxen der Trägheit, durch $A$, $B$, $C$ die Hauptträgheitsmomente; so hat man als Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gelegte Parallele zu dieser Drehaxe:

$$Mk^2 = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2;$$

die Pendellänge $l + \frac{k^2}{l}$ beträgt folglich:

$$l + \frac{A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2}{Ml}.$$

Diese Länge kann für unendlich viele Geraden dieselbe bleiben, da $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$ nicht bestimmt sind.

95. Will man wissen, um welche Axe die Schwingung in der kürzesten Zeit geschieht, so hat man diejenigen Werthe zu suchen, welche die Unbestimmten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$ annehmen müssen, damit die Pendellänge ein Minimum werde.

Unter einem System paralleler Axen, für welche $k^2$ constant ist, entspricht dem Werthe $l = k$ diejenige, welche die Pendellänge $l + \frac{k^2}{l}$ zu einem Minimum macht; diese Länge beträgt dann $2k$. Sie wird am kleinsten, wenn $k$ den kleinsten Werth hat. Hiernach fällt die Schwingungszeit am kürzesten aus, wenn die Drehaxe parallel läuft mit der Axe des zum Schwerpunkt gehörigen kleinsten Trägheitsmoments, und wenn ihre Entfernung $k$ von dieser Axe gleich ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten dieses Moments durch die Masse des Körpers.

## Bewegung eines Körpers um eine Axe durch eine Momentankraft.

96. Wir haben die Drehung eines Körpers um eine feste Axe bestimmt, indem wir seine anfängliche Lage und Winkelgeschwindigkeit als bekannt voraussetzten. Wir wollen jetzt bestimmen, welche Winkelgeschwindigkeit der Körper annimmt, wenn er während einer sehr kleinen Zeit der Wirkung einer Kraft unterliegt, die unterdessen einem freien materiellen Punkt eine bekannte Bewegungsgrösse ertheilen würde.

Wir zerlegen sie in zwei Kräfte, davon eine parallel zur Axe und die andere in einer senkrechten Ebene; die letzte ist es allein, welche die Bewegung hervorbringt. Ihren Werth bezeichne $P$ und $p$ ihre Entfernung von der Drehaxe. Das Princip von d'Alembert liefert:

$$\omega \Sigma r^2 dm = Pp,$$

wenn $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Hieraus folgt mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$\omega = \frac{Pp}{M(k^2 + l^2)}.$$

Nachdem die durch die Momentankraft erzeugte Geschwindigkeit bekannt ist, bestimmt sich die Bewegung nach dem Vorhergehenden. Die Gleichung (1) giebt, wenn weiter keine Kraft den Körper angreift, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, oder die Winkelgeschwindigkeit bleibt dann constant.

97. Nehmen wir an, die Anfangsgeschwindigkeit werde hervorgebracht durch den Stoss eines Punktes von der Masse $\mu$ und Geschwindigkeit $v$, die gerichtet sei in einer auf die feste Drehaxe senkrechten Ebene nach einer Geraden, welche von der Axe um das Stück $f$ absteht. Die Masse $\mu$ möge sich mit dem Körper verbinden in dem Punkt, wo sie ihn trifft; $h$ sei dessen Abstand von der Drehaxe.

Man zerlege die Geschwindigkeit $v$ nach dem Radius und der Tangente des Kreises, den der gestossene Punkt um die Axe beschreibt; die erste Componente wird zerstört, und die zweite hat den Werth $\frac{vf}{h}$. Bezeichnet $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems nach dem Stoss, dann hat die Masse $\mu$ durch Reaction des Körpers an Geschwindigkeit verloren $\frac{vf}{h} - h\omega$; die entsprechende Bewegungsgrösse beträgt $\mu\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right)$. Eine so grosse Momentankraft hat folglich der Masse $\mu$ entgegengewirkt; und da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so ist dieser Ausdruck auch das Maass der Momentankraft, welche auf den Körper gewirkt hat. Somit sieht man sich in dem vorher betrachteten Fall und erhält:

$$\mu h\left(\frac{vf}{h} - h\omega\right) = \omega \Sigma r^2 dm, \quad \text{daher} \quad \omega = \frac{\mu v f}{\mu h^2 + \Sigma r^2 dm}.$$

Der Nenner ist das Trägheitsmoment des Körpers und der mit ihm verbundenen Masse. Bezieht man die Summe auf beide, so darf man schreiben:

$$\omega = \frac{\mu v f}{\Sigma r^2 dm}.$$

Wenn statt eines Körpers beliebig viele mit den Massen $\mu$, $\mu'$, $\mu''$, etc. und den Geschwindigkeiten $v$, $v'$, $v''$, etc. in demselben Augenblick stossen, während die Abstände der Geschwindigkeitsrichtungen von der Drehaxe $f$, $f'$, $f''$, etc. betragen, und wenn alle Körper sich mit dem gestossenen verbinden, so erhält man:

$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \text{etc.}}{\Sigma r^2 dm},$$

wo das Trägheitsmoment sich über alle verbundenen Körper erstreckt.

98. Stoss gegen die Drehaxe. — Die Momentankraft, welche den Körper in Bewegung versetzt, bringt eine Erschütterung der festen Axe hervor, die man kennen muss und welche von den Kräften herrührt, die sich mit Hülfe des Widerstands der Axe das Gleichgewicht halten. Nehmen wir die Drehaxe zur Axe der $z$ und zur Ebene der $x$, $y$ diejenige darauf senkrechte Ebene, welche durch den Angriffspunkt der Kraft geht. Wir zerlegen diese in zwei Kräfte; davon soll eine, $Z$, parallel zur Drehaxe sein und die andere, $P$, welche $X$, $Y$ zu Componenten hat, in der Ebene $XY$ liegen.

Gleichgewicht findet statt zwischen $X$, $Y$, $Z$ und dem System der auf alle Elemente des Körpers sich beziehenden Kräfte $-dm\frac{dx}{dt}$, $-dm\frac{dy}{dt}$, $-dm\frac{dz}{dt}$; dabei ist zu beachten, dass $\frac{dz}{dt}=0$, weil die Bewegung um die $z$-Axe geschieht.

Das Element $dm$ habe die Coordinaten $x$, $y$, $z$ und den Abstand $r$ von der Drehaxe; $\theta$ sei der Winkel, den die $x$-Axe bildet mit der Projection von $r$ auf die Ebene $XY$, und $\omega$ die erzeugte Winkelgeschwindigkeit. Man hat:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

und erhält durch Differenziiren:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\ \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \text{ oder } \frac{dx}{dt} = -\omega y,\ \frac{dy}{dt} = \omega x.$$

Daher:

$$-dm\frac{dx}{dt} = \omega y dm,\ -dm\frac{dy}{dt} = -\omega x dm.$$

Wenn man statt aller im Gleichgewicht stehenden Kräfte drei nach den Coordinatenaxen gerichtete und drei Kräftepaare setzt, deren Axen in denselben Richtungen liegen, so sind die Kräfte:

$$X + \omega M y_1,\ Y - \omega M x_1,\ Z;$$

$x_1$, $y_1$ gehören dem Schwerpunkt an. Die Momente der Paare werden ausgedrückt durch:

$$bZ + \omega\Sigma xz dm,\ -aZ + \omega\Sigma yz dm,\ aY - bX - \omega\Sigma r^2 dm;$$

$a$, $b$ stellen die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft vor.

Das letzte Moment ist Null wegen des Gleichgewichts

um die feste Drehaxe. Die Wirkungen, welche sie auszuhalten hat, rühren darum nur her von den zwei anderen Paaren und den drei Kräften.

99. Mittelpunkt des Stosses. — Suchen wir jetzt die Bedingungen, unter welchen die feste Axe keinen Stoss erleidet. Dazu ist erforderlich, dass unabhängig von derselben das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princips stattfinde, dass also die nach den Axen gerichteten Kräfte und die in den Coordinatenebenen liegenden Paare Null seien. Wenn man der Einfachheit wegen die Ebene der $x$, $z$ durch den Schwerpunkt des Körpers führt und ausserdem das Coordinatensystem der Nr. 98 beibehält, so muss man demnach haben, weil jetzt $y_1$ Null ist:

$$Z = 0, \quad X = 0, \quad Y = \omega M x_1,$$

$$\Sigma x z\, dm = 0, \quad \Sigma y z\, dm = 0, \quad a\, Y = \omega \Sigma r^2 dm.$$

Die vierte und fünfte Gleichung zeigen, dass die Drehaxe eine von den zu dem Coordinatenursprung gehörenden Hauptaxen der Trägheit sein muss. Die erste und zweite sagen, die Kraftrichtung müsse senkrecht stehen auf der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers bestimmten Ebene.

Um den Abstand $a$ zu finden, welchen die Richtung der Momentankraft von der Drehaxe haben muss, entnimmt man aus der dritten Gleichung den Werth für $\omega$ und setzt diesen in die sechste; dadurch erhält man:

$$a = \frac{\Sigma r^2 dm}{M x_1}.$$

Bezeichnet $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine zur Drehaxe Parallele durch den Schwerpunkt, so geht diese Gleichung über in:

$$a = x_1 + \frac{k^2}{x_1}.$$

Demnach muss $a$ gleich sein dem Abstand der Drehaxe vom Schwingungspunkt *) des Körpers um dieselbe.

---

*) Diese Bezeichnung wird hier ausgedehnt auf den Fall einer nicht horizontalen Axe.

Damit die Drehaxe keinen Stoss erleide, so ist hiernach nothwendig und hinreichend:

1) Dass die Kraftrichtung senkrecht stehe auf der die Drehaxe mit dem Schwerpunkt des Körpers verbindenden Ebene.

2) Dass die Drehaxe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers sei in Bezug auf ihren Durchschnittspunkt mit der auf ihr senkrechten Ebene, welche die Kraftrichtung enthält.

3) Dass die Entfernung der Kraft von der Drehaxe ebenso gross sei als der Abstand des Schwingungspunktes des Körpers um diese Axe.

Die letzte Bedingung zeigt die Unmöglichkeit, wenn der Schwerpunkt auf der Drehaxe liegt; denn die Kraft müsste dann in unendliche Entfernung rücken.

Der Durchschnittspunkt der Kraftrichtung mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt gehenden Ebene wird Mittelpunkt des Stosses genannt; er liegt auf der Linie der Schwingungspunkte.

Man könnte umgekehrt den im Drehen um die Axe begriffenen Körper plötzlich einhalten vermöge einer den Mittelpunkt des Stosses angreifenden Kraft, ohne dass dadurch irgend eine Wirkung auf die Drehaxe ausgeübt würde, wenn die angegebenen Umstände stattfinden.

100. Hätte man nur:

$$\Sigma xzdm = 0, \ \Sigma yzdm = 0, \ Z = 0;$$

dann wäre der von der Axe auszuhaltende Stoss, wie aus Nro. 98 hervorgeht, eine durch den Ursprung gehende Kraft. In diesem Falle erzeugt daher die Momentankraft, wenn blos der Ursprung fest ist, eine Anfangsdrehung um die $z$-Axe, als ob diese fest wäre. Ebenso verhält es sich, wenn man irgend eine Zahl Momentankräfte in derselben Ebene hat; denn mit Hülfe des festen Punktes lassen sie sich immer auf eine einzige reduciren.

101. Druck auf die Drehaxe während der Bewegung. — In jedem Augenblick verursacht das Gleichgewicht des d'Alembert'schen Princips Drucke auf die Drehaxe, welche wir berechnen wie in dem Falle einer Momentankraft den Stoss.

Es seien $Xdm$, $Ydm$, $Zdm$ die Componenten der das

Element $dm$ angreifenden stetigen Kraft. Gleichgewicht besteht zwischen allen Kräften:

$$Xdm, \quad Ydm, \quad Zdm$$

und allen:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}dm, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}dm, \quad -\frac{d^2z}{dt^2}dm.$$

Die letzte Kraft ist Null, weil die Drehung um die $z$-Axe geschieht.

Der Abstand irgend eines Punktes des Körpers von der Drehaxe sei $r$; der Winkel der $x$-Axe mit der Projection von $r$ auf die Ebene der $x$, $y$ sei $\theta$ und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit. Man hat:

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; \frac{d\theta}{dt} = \omega;$$

daher:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}.$$

Setzt man wieder statt aller sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte drei nach den Axen gerichtete und drei Paare in den Coordinatenebenen, so werden die Kräfte:

$$\Sigma Xdm + \omega^2 Mx_1 + My_1\frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Ydm + \omega^2 My_1 - Mx_1\frac{d\omega}{dt},$$

$$\Sigma Zdm.$$

Die Momente der Paare, deren Axen bezüglich nach den Axen der $x$, $y$, $z$ gerichtet sind, betragen:

$$\Sigma(yZ - zY)dm - \omega^2\Sigma yzdm + \frac{d\omega}{dt}\Sigma xzdm,$$

$$\Sigma(zX - xZ)dm + \omega^2\Sigma xzdm + \frac{d\omega}{dt}\Sigma yzdm,$$

$$\Sigma(xY - yX)dm - \frac{d\omega}{dt}\Sigma r^2dm.$$

Das letzte Moment ist Null wegen des Gleichgewichts; daher $\frac{d\omega}{dt} = 0$, wenn keine stetige Kraft wirkt. Der Druck auf die Axe wird daher in jedem Augenblick hervorgebracht durch die beiden anderen Paare und die an den Ursprung versetzten Kräfte.

102. Permanente Drehaxen. — Nehmen wir an, die $z$-Axe sei eine zum Coordinatenursprung gehörende Hauptträgheitsaxe des Körpers; dann ist

$$\Sigma xz\,dm = 0, \quad \Sigma yz\,dm = 0.$$

Ferner wirke keine äussere Kraft. Der Druck auf die $z$-Axe ist jetzt beständig durch den festen Ursprung gerichtet. Deshalb braucht diese Axe nicht fest zu sein, sondern die Drehung, wenn sie um dieselbe begonnen hat, fährt nothwendig so fort, als ob sie fest wäre.

Somit kommt jedem mit einem Körper fest verbundenen Punkt, den man fest macht, die Eigenschaft zu, dass wenn der Körper sich anfänglich dreht um eine zu dem Punkt gehörende Hauptträgheitsaxe und keine Kraft wirkt, die Drehung um diese Axe gleichförmig fortfährt, als wenn sie fest wäre. Dies findet für keine andere Axe statt. Die drei Hauptaxen der Trägheit zu dem festen Punkt heissen deshalb permanente Drehaxen.

Ist der Schwerpunkt des Körpers Ursprung, so hat man $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, wodurch die an ihn versetzten Kräfte Null werden, weshalb dieser Punkt nicht fest zu sein braucht. Man folgert daraus:

Wenn ein ganz freier Körper sich um eine zu seinem Schwerpunkt gehörende Hauptträgheitsaxe dreht und keine Kraft auf ihn wirkt, so setzt er seine Drehung um diese Axe gleichförmig fort.

Die drei permanenten Drehaxen in Bezug auf den Schwerpunkt werden natürliche Drehaxen genannt.

## Anfangsbewegung eines Körpers, welcher einen festen Punkt hat, und auf den Momentankräfte wirken.

103. Die den Körper gleichzeitig angreifenden Momentankräfte mögen sein, welche sie wollen, man kann sie immer zusammensetzen in eine durch den festen Punkt gehende Kraft und ein Paar. Die Kraft wird zerstört und die Bewegung durch das Paar allein hervorgebracht. Zerlegen wir dasselbe in drei andere, deren Axen gerichtet seien nach den zu dem festen Punkt gehörenden Hauptträgheitsaxen des Körpers.

Nehmen wir diese zu Axen der $x$, $y$, $z$ und bezeichnen durch $L$, $M$, $N$ die Momente der drei Seitenpaare.

Wir wissen aus Nro. 41, dass die durch jeden Punkt des Körpers erlangte Geschwindigkeit erhalten werden kann durch Zusammensetzen der Geschwindigkeiten, welche jedes Seitenpaar für sich hervorbringen würde.

Das Paar $L$ liegt in einer senkrechten Ebene gegen die Gerade, die in Bezug auf ihren festen Durchschnittspunkt mit der Ebene Hauptträgheitsaxe ist. Es erzeugt daher nach Nro. 100 eine Drehung um diese Axe. Ihre Winkelgeschwindigkeit beträgt $\frac{L}{A}$ nach Nro. 96, wenn $A$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die $x$-Axe vorstellt.

Bedeuten $B$, $C$ seine Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der $y$ und $z$, so bewirken die zwei anderen Paare Drehungen um diese Axen, deren Winkelgeschwindigkeiten durch $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$ ausgedrückt werden. Wir haben daher, wenn $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ die Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen:

$$\omega = \frac{L}{A},\ \omega' = \frac{M}{B},\ \omega'' = \frac{N}{C}.$$

Diese drei Bewegungen müssen zusammengesetzt werden nach den Regeln für geometrische Bewegungen. Daraus resultirt eine Anfangsdrehung mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2}$ um diejenige Axe, deren Richtung mit den Coordinatenaxen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ macht, deren Cosinus mit $\omega$, $\omega'$, $\omega''$ proportional sind.

Die Gleichung des Centralellipsoids ist:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Der conjugirte Durchmesser in demselben zu der Ebene

$$Lx + My + Nz = 0$$

bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus proportional sind den Grössen $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$. Die anfängliche Drehaxe ist daher der dieser Ebene zugeordnete Durchmesser.

Eine Senkrechte auf dieselbe Ebene macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich verhalten wie $L$, $M$, $N$. Sie ist deshalb die Axe des stossenden Kräftepaares, und dieses liegt in der Ebene. Somit hat man folgenden Lehrsatz:

Die anfängliche Axe der Drehung eines Körpers mit einem festen Punkt, welche durch ein Momentankräftepaar hervorgebracht wird, ist der der Ebene dieses Paares zugeordnete Durchmesser in dem Centralellipsoid, welches zu dem festen Punkt gehört.

## Zweifache Bewegung eines freien Körpers.

104. Wenn ein Körper sich frei bewegt in Folge anfänglicher Stösse und beliebiger stetigen Kräfte, so kann man seine Bewegung während eines jeden unendlich kleinen Zeitintervalls betrachten als zusammengesetzt aus Verschiebung und Drehung.

Zu dem Ende nehme man irgend einen Punkt des Körpers und ertheile dem System eine solche Bewegung, dass jeder Punkt desselben eine unendlich kleine Gerade beschreibt, welche gleich und parallel ist der von dem betrachteten Punkt wirklich beschriebenen. Dann halte man diesen Punkt fest und drehe den Körper so lange, bis jeder Punkt die Lage eingenommen hat, welche er am Ende des unendlich kleinen Intervalls einnehmen soll.

Man kann den Punkt, dessen Bewegung jeden Augenblick die Verschiebung des Körpers bestimmen soll, nach Belieben wählen, nur muss er fest mit dem Körper verbunden sein; aber es gewährt grossen Vortheil, wenn man den Schwerpunkt nimmt.

Denn wir haben gezeigt, dass derselbe sich so bewegt, als wenn die ganze Masse des Körpers darin vereinigt wäre und alle Kräfte an ihn versetzt würden. Man kennt daher sogleich Richtung und Grösse der ihm zukommenden Anfangsgeschwindigkeit.

Um die Anfangsbewegung des Körpers vollständig zu kennen, denken wir uns alle gegebenen Kräfte reducirt auf eine den Schwerpunkt angreifende Kraft und ein Paar. Bestimmt man die beiden Bewegungen, welche Kraft und Paar getrennt hervorbringen würden, und setzt dieselben für jeden Punkt zusammen, so erhält man nach Nro. 41 die durch gleichzeitige Wirkung aller Kräfte erzeugte Anfangsbewegung.

Die den Schwerpunkt angreifende Mittelkraft kann zerlegt werden in Kräfte, welche parallel und an allen gleichen Massenelementen des Körpers gleich sind; sie ertheilt folglich allen Punkten gleiche und parallele Geschwindigkeiten oder bewirkt gemeinsame Verschiebung.

Das mittlere Paar kann den Schwerpunkt nicht verrücken, denn die beiden Kräfte, an ihn versetzt, zerstören sich. Die Bewegung, welche das Paar erzeugt, bleibt daher dieselbe, wenn man den Schwerpunkt fest macht. Dann aber darf man die Resultantkraft einführen, da sie durch den festen Punkt zerstört wird, und auf diese Weise hat man das System aller gegebenen Kräfte. Man kann daher die Anfangsdrehung so auffassen, als ob sie hervorgebracht würde durch die in ihren respectiven Angriffspunkten auf den Körper wirkenden Stosskräfte, während dessen Schwerpunkt befestigt wäre.

Somit haben wir folgenden ersten Lehrsatz:

Man kann die Geschwindigkeiten, welche alle Punkte eines freien Körpers augenblicklich annehmen, betrachten als Resultanten der Geschwindigkeiten, welche zwei von einander unabhängigen Bewegungen angehören: nämlich einer Verschiebung, bewirkt durch die an den Schwerpunkt versetzten Stosskräfte, und einer Drehung, bewirkt durch das System der gegebenen, den Körper angreifenden Kräfte, wenn der Schwerpunkt befestigt ist.

Durch diesen Satz sind wir im Stande, die Anfangsbewegung eines Körpers vollständig zu bestimmen, denn wir haben ihre Bestimmung um einen festen Punkt gelernt.

Was die fernere Bewegung betrifft, so bewegt sich der Schwerpunkt stets so, als ob alle Masse in ihm vereinigt wäre und alle stetigen Kräfte ohne Aenderung ihrer Grösse und Richtung daran versetzt würden. Diese Kräfte hängen aber im Allgemeinen von der Lage der Punkte und dadurch von der Drehung ab; weshalb man die Bewegung des Schwerpunkts nicht getrennt berechnen kann, den Fall ausgenommen, wo die Kräfte constante Grössen und Richtungen haben wie z. B. die Schwere.

Uebrigens bleibt der Lehrsatz auch für die stetigen Kräfte

wahr. In der That, betrachten wir den Körper in irgend einem Augenblick. Man kann sich denken, dass er aus der Ruhe hervorginge, indem solche Momentankräfte auf ihn wirkten, welche jedem Punkt die Geschwindigkeit ertheilen würden, die er hat, und ausserdem noch die stetigen Kräfte. Die letzten bringen während eines unendlich kleinen Zeitintervalls nur unendlich kleine Geschwindigkeiten hervor und können betrachtet werden als Momentankräfte, welche am Anfang eines jeden unendlich kleinen Intervalls wirken. Nach dem in Nro. 41 enthaltenen Princip hat man die Geschwindigkeiten, welche beide Kräftesysteme getrennt hervorbringen, zu bestimmen und sie nachher zusammenzusetzen. Das erste System bewirkt die Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick wirklich stattfand. Das zweite erzeugt eine unendlich kleine Verschiebungsgeschwindigkeit, die man dadurch erhält, dass man alle stetigen Kräfte an den Schwerpunkt versetzt, und ferner eine Drehung um den fest gedachten Schwerpunkt, indem alle Kräfte wirken, wie sie gegeben sind.

Denkt man sich daher durch den Schwerpunkt des Körpers drei rechtwinklige, parallel zu sich bleibende Axen, so bewegt sich ihr Durchschnittspunkt so, als ob die ganze Körpermasse in demselben vereinigt wäre und alle momentanen sowie stetigen Kräfte daran angriffen. Die Bewegung des Körpers in Bezug auf diese Axen ist dieselbe, als wenn ihr Durchschnittspunkt fest wäre und alle Kräfte an denselben Angriffspunkten und gerade so wirkten wie bei der wirklichen Bewegung.

105. Anwendung auf das schwere Ellipsoid. — Nehmen wir an, ein homogenes Ellipsoid empfange einen Stoss, dessen Richtung enthalten sei in der Ebene zweier seiner Hauptträgheitsaxen in Bezug auf den Schwerpunkt, welche seine rechtwinkligen Axen sind. Darauf werde das Ellipsoid der Wirkung der Schwere überlassen. Bezeichne $\mu v$ die Bewegungsgrösse, welche die Momentankraft misst, und $f$ den Abstand der Kraftrichtung vom Mittelpunkt; $b, c$ seien die beiden Halbaxen, in deren Ebene die Kraftrichtung liegt, $a$ die dritte Halbaxe; $M$ bedeute die Masse des Ellipsoids und $V$ die Anfangsgeschwindigkeit seines Schwerpunkts.

Der Schwerpunkt, d. i. hier das Centrum des Ellipsoids bewegt sich so, als wenn die Masse $M$ in demselben vereinigt wäre und anfänglich die Kraft $\mu v$ auf ihn wirkte sowie nachher die Schwere. Er erhält daher zuerst die Geschwindigkeit:

$$V = \frac{\mu v}{M}$$

nach paralleler Richtung mit der des Stosses, und folglich beschreibt er eine diese Richtung tangirende Parabel, deren Gleichung sich berechnet wie für einen freien Punkt.

Um die Bewegung des Ellipsoids in Bezug auf drei durch seinen Schwerpunkt mit festen Richtungen parallele Axen zu erhalten, denke man sich den Schwerpunkt fest und lasse Stosskraft und Schwere wirken. Die Schwere kann ausser Acht bleiben, weil der Schwerpunkt fest ist, und man hat blos die durch den Stoss bewirkte Drehung zu bestimmen. Die Stosskraft liegt in einer senkrechten Ebene auf eine Gerade, welche Hauptträgheitsaxe ist in Bezug auf ihren festen Durchschnittspunkt mit der Ebene. Daher findet die Drehung ohne Ende gleichförmig um diese Axe statt. Ihre Winkelgeschwindigkeit $\omega$ wird dadurch erhalten, dass man das Moment $\mu v f$ der Kraft theilt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehaxe. Daher:

$$\omega = \frac{5\,\mu v f}{M(b^2 + c^2)}$$

oder durch Einführen der Anfangsgeschwindigkeit $V$ des Schwerpunkts:

$$\omega = \frac{5\,V f}{b^2 + c^2}.$$

Die Drehaxe rückt parallel fort, und der Körper dreht sich gleichförmig um dieselbe. Ihre Lage ist bekannt, weil man die Bewegung des Schwerpunkts kennt. Es bestimmt sich daher leicht die Lage aller Punkte des Ellipsoids für irgend einen Augenblick.

Hat man eine volle oder hohle Kugel, die entweder homogen ist oder aus homogenen concentrischen Schichten besteht, dann ist jeder Durchmesser eine Hauptaxe der Trägheit. Die Drehung geschieht um denjenigen, welcher senkrecht steht auf der durch das Centrum und die Richtung der Stosskraft geführten Ebene, und die Richtung dieser Drehaxe bleibt parallel zu sich selbst.

Die Drehung einer solchen Kugel wird nicht geändert, wenn alle ihre Punkte gegen andere durch Kräfte hingezogen werden, welche den Massen und einer Function der Entfernung proportional sind, weil die Resultante der durch irgend einen Punkt auf die ganze Kugelmasse ausgeübten Wirkungen durch ihren Schwerpunkt geht. Dies würde aber nicht mehr der Fall sein, wenn der Körper noch so wenig von der Kugelform verschieden wäre, was z. B. bei der Erde stattfindet.

---

## Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

106. In den Vorbemerkungen ist der Beweis dafür enthalten, dass jede Verrückung eines starren Systems, welches einen festen Punkt hat, erzielt werden kann vermöge Drehung um eine gewisse durch diesen Punkt gehende Axe; was nicht hindert, dass dasselbe auf unzählig viele andere Arten möglich ist. Daraus folgte, jede stetige Verrückung lasse sich hervorbringen durch eine Folge unendlich kleiner Drehungen um stetig variirende Axen. Dort wurden nur bequeme Verfahrungsarten beabsichtigt, um gegebene Versetzungen zu erreichen ohne Rücksicht auf ihre Ursachen; bei verschiedenen Gelegenheiten haben wir mit Nutzen davon Gebrauch gemacht. Wir wollen uns jetzt mit Bestimmung der wirklichen Bewegung eines Körpers beschäftigen, der einen festen Punkt hat und auf den gegebene Kräfte wirken.

Hierzu wählen wir drei rechtwinklige Geraden, welche durch den festen Punkt gehen und unveränderlich mit dem Körper verbunden sind. Die Aufgabe kommt auf Bestimmung der Bewegung dieser Geraden hinaus. Ihre Lage bestimmt sich, wie man in den Vorbemerkungen gesehen hat, entweder durch die Winkel, welche jede von ihnen mit drei festen rechtwinkligen Axen macht, oder vortheilhafter durch drei andere Winkel.

Zunächst betrachten wir Hülfsgrössen zur Bestimmung der Verrückung, welche die drei mit dem Körper fest verbundenen Axen während unendlich kleiner Zeit erleiden. Wären diese Grössen allgemein bekannt, so könnte man durch Integration von einer Lage auf irgend eine andere übergehen.

Bezeichnen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ die Axen in irgend einer Lage und $X'$, $Y'$, $Z'$ ihre unendlich nahe Lage nach der Zeit $dt$. Die neue Lage ist bestimmt, wenn man die Winkel kennt,

welche jede der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ macht, oder nur die Cosinus derselben; und diese wollen wir einführen. Die drei Winkel $X_1 X'$, $Y_1 Y'$, $Z_1 Z'$ sind unendlich klein von der ersten Ordnung; ihre Cosinus sind daher gleich der Einheit mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung. Demnach bleiben sechs unendlich kleine Cosinus der ersten Ordnung zu bestimmen, da ihre Winkel sich vom rechten um unendlich Kleine dieser Ordnung unterscheiden. Man erkennt leicht, dass dieselben zu zwei gleich und entgegengesetzt sind. In der That, die Ebene $Z' X'$ z. B. ist unendlich wenig geneigt gegen $Z_1 X_1$; die Projection von $Z' X'$ auf $Z_1 X_1$ ist daher ein rechter Winkel, wenn man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung weglässt. Ebenso hat man die Winkel $Z' X_1$, $X' Z_1$ als ihren Projectionen gleich zu betrachten. Sie ergänzen sich folglich zu zwei Rechten und haben deshalb gleiche und entgegengesetzte Cosinus. Gleiches gilt von den vier anderen Winkeln; daher:

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos Y' Z_1 = -\cos Z' Y_1, \\ \cos Z' X_1 = -\cos X' Z_1, \\ \cos X' Y_1 = -\cos Y' X_1. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Lage des Körpers nach der Zeit $dt$ reichen demnach drei unendlich kleine Grössen hin, welche wir so schreiben:

$$\cos Y' Z_1 = p\,dt, \ \cos Z' X_1 = q\,dt, \ \cos X' Y_1 = r\,dt.$$

Sie werden leicht ausgedrückt vermöge der Winkel, welche die Axen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ mit den festen $X$, $Y$, $Z$ einschliessen. Indem wir die Bezeichnung der Vorbemerkungen beibehalten, haben die durch $Z_1$ und $Y'$ mit den festen Axen gebildeten Winkel bezüglich folgende Cosinus:

$$c, \ c', \ c'' \text{ und } b + db, \ b' + db', \ b'' + db''.$$

Da nun:

$$cb + c'b' + c''b'' = 0,$$

so hat man:

$$\cos Y' Z_1 = c\,db + c'\,db' + c''\,db''.$$

Ebenso die beiden anderen; daher:

$$(2) \qquad \begin{cases} p\,dt = c\,db + c'\,db' + c''\,db'', \\ q\,dt = a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'', \\ r\,dt = b\,da + b'\,da' + b''\,da''. \end{cases}$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen können unter anderer Form dargestellt werden. Aus

$$cb + c'b' + c''b'' = 0$$

folgt durch Differenziiren:

$$cdb + c'db' + c''db'' = -bdc - b'dc' - b''dc''.$$

Statt der beiden anderen Glieder erhält man:

$$-cda - c'da' - c''da'' \text{ und } -adb - a'db' - a''db''.$$

Um die Lage der beweglichen Axen durch drei Winkel $\varphi$, $\psi$, $\theta$ zu bestimmen, drückt man $p$, $q$, $r$ durch diese Winkel aus. Dies geschieht vermöge folgender in den Vorbemerkungen gegebenen Formeln:

$$(3) \qquad \begin{cases} pdt = \cos\varphi\, d\theta + \sin\varphi \sin\theta\, d\psi, \\ qdt = -\sin\varphi\, d\theta + \cos\varphi \sin\theta\, d\psi, \\ rdt = d\varphi + \cos\theta\, d\psi. \end{cases}$$

Es genügt daher, dass die Bedingungen der Bewegung drei andere Gleichungen zwischen $p$, $q$, $r$, $\theta$, $\varphi$, $\psi$ liefern, damit das Problem auf Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen zurückgebracht sei.

107. Augenblickliche Drehaxe. — Untersuchen wir, ob es Punkte giebt, die während unendlich kleiner Zeit $dt$ ihren Ort im Raum nicht ändern, sei es nun, dass diese Punkte dem System bereits angehören, oder dass man sie erst unveränderlich damit verbinden müsste. Wenn ein Punkt ohne Geschwindigkeit vorhanden wäre, so würden alle Punkte auf der durch ihn und den festen Ursprung gehenden Geraden in demselben Falle sein, und die Bewegung während der Zeit $dt$ würde bestehen in einer Drehung um diese Gerade. Um ihre Richtung zu finden, wenn es eine solche giebt, braucht man offenbar blos die feste durch den Ursprung gehende Gerade zu suchen, welche innerhalb des Intervalls $dt$ ihre Winkel mit den sich bewegenden Axen nicht ändert.

Zu Anfang des Intervalls seien diese Axen in der Lage $X_1$, $Y_1$, $Z_1$; nach der Zeit $dt$ sei $X'$, $Y'$, $Z'$ ihre Lage. Die gesuchte Gerade bilde mit den ersten die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Die Cosinus ihrer Winkel mit $X'$, $Y'$, $Z'$ werden durch die gewöhnliche Formel erhalten; und zwar findet man mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung:

$$\cos\alpha + \cos\beta \cos X' Y_1 + \cos\gamma \cos X' Z_1,$$
$$\cos\beta + \cos\alpha \cos Y' X_1 + \cos\gamma \cos Y' Z_1,$$
$$\cos\gamma + \cos\alpha \cos Z' X_1 + \cos\beta \cos Z' Y_1.$$

Diese Werthe sollen von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nicht verschieden sein. Dazu wird es erfordert und reicht hin, dass die zwei letzten Summanden eines jeden sich aufheben. Dies giebt mit Rücksicht auf (1):

$$\frac{\cos\alpha}{\cos Y' Z_1} = \frac{\cos\beta}{\cos Z' X_1} = \frac{\cos\gamma}{\cos X' Y_1}$$

oder, indem man $p$, $q$, $r$ einführt:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{r}.$$

Diese Gerade, wenn man sie mit dem System unveränderlich verbindet, hat zu den als fest betrachteten Richtungen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ eine Lage, welche von $dt$ nicht abhängt. Daher haben alle ihre Punkte dieselbe Lage im Raume zu allen von der betrachteten unendlich wenig entfernten Epochen. Die Bewegung dieser mit dem Körper verbundenen Linie im Raum ist nicht absolut Null, weil die unendlich Kleinen zweiter Ordnung vernachlässigt wurden, aber sie ist von derselben Ordnung. Die Geschwindigkeit ihrer Punkte beträgt Null in dem betrachteten Augenblick. Und man darf die wirkliche Bewegung des Körpers mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung während unendlich kleiner Zeit ansehen als Drehung um eine feste Axe, welche im Allgemeinen von einer Epoche zur anderen wechselt und deshalb augenblickliche Drehaxe genannt wird.

Die Cosinus der Winkel, welche dieselbe jeden Augenblick mit den beweglichen Axen bildet, sind $p$, $q$, $r$ proportional und haben daher folgende Werthe:

$$\cos X_1 = \pm \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\cos Y_1 = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\cos Z_1 = \pm \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Dabei muss man alle oberen oder alle unteren Zeichen nehmen.

Wenn $p$, $q$, $r$ constant sind oder nur constante Verhält-

nisse haben, so behält die augenblickliche Drehaxe in Bezug auf den Körper beständig dieselbe Lage. Dann sind also immer die nämlichen Punkte des Systems ohne Geschwindigkeit, oder die Drehaxe ändert auch ihre Lage im Raum nicht. Das System kann folglich nur eine Umdrehungsbewegung um diese Axe haben, welche nicht mehr augenblicklich ist sondern permanent. Die Umkehrung liegt auf der Hand. Wir werden diese Wahrheiten bald durch andere Betrachtungen wiederfinden.

Für die Winkel der augenblicklichen Drehaxe mit den festen Axen $X$, $Y$, $Z$ hat man:

$$\cos X = \pm \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos Y = \pm \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos Z = \pm \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Die Grössen $p$, $q$, $r$ sind im Allgemeinen veränderlich. Man kann daher die Bewegung betrachten als stetige Folge von unendlich kleinen Drehungen um Axen, welche durch den festen Punkt gehen und ihre Lage sowohl im Körper als im absoluten Raum auf stetige Weise ändern.

108. Geschwindigkeit irgend eines Punktes. — Die Geschwindigkeit irgend eines Punktes im Körper kann zerlegt werden parallel mit den drei festen Axen oder, wenn man es vorzieht, parallel mit den beweglichen Axen in der Lage, welche sie in dem Augenblick einnehmen, den man betrachtet. Die Werthe der ersten Componenten sind:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Die zweiten Componenten beziehen sich auf Axen von veränderlicher Richtung und können daher nicht dargestellt werden durch die Ableitungen der Coordinaten in Bezug auf diese Axen. Wir wollen sie mit $u$, $v$, $w$ bezeichnen.

Die Gleichungen, welche beide Coordinatensysteme verknüpfen, sind:

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1.$$

Man erhält hieraus, indem man beachtet, dass $x_1$, $y_1$, $z_1$ für denselben Punkt des Körpers constant bleiben, folgende Werthe der ersten Componenten:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1 \dfrac{da}{dt} + y_1 \dfrac{db}{dt} + z_1 \dfrac{dc}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x_1 \dfrac{da'}{dt} + y_1 \dfrac{db'}{dt} + z_1 \dfrac{dc'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x_1 \dfrac{da''}{dt} + y_1 \dfrac{db''}{dt} + z_1 \dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Um die Componente nach der Axe $X_1$ zu erhalten, muss man die Summe der Projectionen darauf bilden. Das giebt:

$$a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt},$$

welcher Ausdruck sich reducirt auf $qz_1 - ry_1$. Für die beiden anderen verfährt man ebenso und erhält:

$$(5)\quad \begin{cases} u = qz_1 - ry_1, \\ v = rx_1 - pz_1, \\ w = py_1 - qx_1. \end{cases}$$

Diese Formeln liefern sogleich die Punkte, deren Geschwindigkeit Null ist. Man setzt zu dem Ende:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0$$

und findet:

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Sie liegen demnach sämmtlich auf einer durch den festen Punkt gehenden Geraden, welche mit den beweglichen Axen Winkel macht, deren Cosinus mit $p$, $q$, $r$ proportional sind. Die wirkliche Bewegung des Körpers besteht also während unendlich kleiner Zeit in einer Drehung um diese Gerade. Somit haben wir das schon gefundene Resultat wieder; doch hatten wir bei Bildung der Werthe für $u$, $v$, $w$ einen wichtigeren Zweck im Auge als diese Verification.

109. Grösse und Richtung der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit. — Um die Drehgeschwindigkeit zu erhalten, braucht man nur die absolute Geschwindigkeit irgend eines Punktes zu suchen und sie durch seinen Ab-

stand von der augenblicklichen Drehaxe zu theilen. Nehmen wir den Punkt, welcher auf $Z_1$ in der Entfernung 1 vom Ursprung liegt. Seine Coordinaten sind:

$$x_1 = 0, \; y_1 = 0, \; z_1 = 1.$$

Die Gleichungen (5) geben für ihn:

$$u = q, \; v = -p, \; w = 0;$$

seine absolute Geschwindigkeit beträgt daher $\sqrt{p^2 + q^2}$. Der Abstand desselben von der augenblicklichen Drehaxe ist der Sinus ihres Winkels mit $Z_1$ oder $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. Demnach hat die Winkelgeschwindigkeit, welche wir durch $\omega$ bezeichnen, den Werth:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \tag{6}$$

Es ist nun leicht, ihre Componenten um die beweglichen Axen zu finden. Ein starres System lässt sich bekanntlich in die Lage, in welche es durch unendlich kleine Drehung um eine Axe kommt, auch bringen durch drei in beliebiger Ordnung sich folgende Drehungen um rechtwinklige Axen. Diese Drehungen heissen die componirenden der ersten. Die Winkel, welche ihnen entsprechen, sind beziehlich gleich den Producten des wirklichen Drehungswinkels in die Cosinus der Winkel der augenblicklichen Drehaxe mit den drei rechtwinkligen Axen. Wir wissen ferner: wenn man unter Richtung einer Drehaxe immer diejenige versteht, in Bezug auf welche die Bewegung von links nach rechts vorgehend erscheint, dann geben die Producte der absoluten Drehung in die Cosinus der Winkel ihrer Axenrichtung mit den drei positiven Axen durch Grösse und Zeichen Werth und Richtung der componirenden Drehungen.

In dem vorliegenden Falle hat die Drehung während der unendlich kleinen Zeit $dt$ den Werth $\omega dt$. Indem man aus diesem und aus den Werthen der Componenten den gemeinsamen Factor $dt$ weglässt, bezieht man sie alle auf die Zeiteinheit und hat dann die Componenten der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit. Ihre Werthe sind bezüglich:

$$+p, \; +q, \; +r \quad \text{oder} \quad -p, \; -q, \; -r,$$

je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen der Ausdrücke für $\cos X_1$, $\cos Y_1$, $\cos Z_1$ nehmen muss. Es ist uner-

lässlich dies zu bestimmen, damit man die Drehrichtung kenne. Dazu genügt es, zu wissen, ob die z. B. zur Axe der positiven $z_1$ gehörende Drehcomponente $+r$ ist oder $-r$.

Zu dem Ende legen wir durch den Ursprung eine Ebene senkrecht auf die augenblickliche Drehaxe. Wir nehmen in dieser Ebene einen Punkt mit den Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$, verbinden denselben mit dem Ursprung und betrachten die Bewegung der Projection seines Leitstrahls auf die Ebene $X_1 Y_1$. Wir wissen: die Axe dieser Bewegung hat die Richtung der positiven $z_1$-Axe, wenn die augenblickliche Drehaxe einen spitzen Winkel mit dieser macht; sie hat dagegen die Richtung der negativen $z_1$-Axe, wenn derselbe Winkel stumpf ist. Das Zeichen des Cosinus des Winkels der augenblicklichen Drehaxe mit der Axe der positiven $z_1$ stimmt daher überein mit dem Zeichen der Drehung der Projection unseres Leitstrahls, sofern man diese als positiv betrachtet, wenn sie stattfindet von der Axe der positiven $x_1$ gegen die der positiven $y_1$ hin.

Die Geschwindigkeitscomponenten des in der senkrechten Ebene gewählten Punktes parallel mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ seien $u$, $v$, $w$. Seine Projection auf die Ebene $X_1 Y_1$ hat die Coordinaten $x_1$, $y_1$ und die Geschwindigkeitscomponenten $u$, $v$. Die Bewegung ihres Leitstrahls ist den Vorbemerkungen, Seite 11 zufolge gerichtet von der Axe der positiven $x_1$ gegen die der positiven $y_1$, wenn $vx_1 - uy_1$ positiv, und umgekehrt, wenn dieser Ausdruck negativ ist. Sein Zeichen stimmt daher überein mit dem Zeichen des Cosinus des Winkels, den die Richtung der augenblicklichen Drehaxe mit der Axe der positiven $z_1$ macht.

Wir wollen deshalb $vx_1 - uy_1$ bilden für einen besonderen Punkt der senkrechten Ebene, z. B. für einen Punkt ihrer Spur auf $X_1 Y_1$. Für einen solchen Punkt hat man $z_1 = 0$, also:

$$v = rx_1, \quad u = -ry_1 \text{ und } vx_1 - uy_1 = r\,(x_1^2 + y_1^2).$$

Das Zeichen ist das von $r$. Die Componente der Drehgeschwindigkeit in der Ebene $X_1 Y_1$ wird folglich der Grösse und dem Zeichen nach durch $r$ ausgedrückt; ebenso die beiden anderen durch $q$ und $p$. Und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung $OI$ der augenblicklichen Drehaxe mit

den positiven $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ macht, stimmen im Zeichen überein respective mit $p$, $q$, $r$. Ihre Werthe sind daher:

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos IOX_1 = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IOY_1 = \dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IOZ_1 = \dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \end{cases}$$

Die Wurzel ist absolut gemeint. Die Cosinus der Winkel mit den festen Axen haben folgende Werthe:

$$(8)\qquad \begin{cases} \cos IOX = \dfrac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IOY = \dfrac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IOZ = \dfrac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \end{cases}$$

110. Componenten der beschleunigenden Kraft irgend eines Punktes. — Diese Componenten parallel mit drei beliebigen festen Richtungen sind die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit. Wir wollen aber diejenigen Richtungen wählen, welche die beweglichen Axen in irgend einem Augenblick haben. Die Componenten der Geschwindigkeit nach diesen Axen sind:

$$u,\ v,\ w.$$

Nach der Zeit $dt$ werden sie:

$$u+du,\quad v+dv,\quad w+dw$$

parallel mit den Richtungen $X'$, $Y'$, $Z'$, welche dann die beweglichen Axen haben. Um die Componenten nach den Axen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ zu erhalten, muss man diese Werthe auf jede derselben projiciren. Zieht man nachher respective $u$, $v$, $w$ ab und theilt durch $dt$, so hat man die Componenten der beschleunigenden Kraft parallel mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$. Wir bezeichnen dieselben durch $u'$, $v'$, $w'$. Die Gleichungen (5) geben:
$du = z_1\,dq - y_1\,dr$, $dv = x_1\,dr - z_1\,dp$, $dw = y_1\,dp - x_1\,dq$.
Die Cosinus, deren man bedarf um die Projectionen zu bilden, sind die Einheit und die in den Gleichungen (1) stehenden,

welche durch $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ bezeichnet wurden. Man findet mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen:

$$(9)\quad \begin{cases} u' = z_1 \dfrac{dq}{dt} - y_1 \dfrac{dr}{dt} + q(py_1 - qx_1) - r(rx_1 - pz_1), \\ v' = x_1 \dfrac{dr}{dt} - z_1 \dfrac{dp}{dt} + r(qz_1 - ry_1) - p(py_1 - qx_1), \\ w' = y_1 \dfrac{dp}{dt} - x_1 \dfrac{dq}{dt} + p(rx_1 - pz_1) - q(qz_1 - ry_1). \end{cases}$$

111. Gleichungen der Bewegung. — Bezeichnet man durch $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ die mit den beweglichen Axen parallelen Componenten der äusseren bewegenden Kraft an irgend einem Punkt, so liefert das Princip von d'Alembert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma(y_1 w' - z_1 v')\,dm &= \Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1), \\ \Sigma(z_1 u' - x_1 w')\,dm &= \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1), \\ \Sigma(x_1 v' - y_1 u')\,dm &= \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1). \end{aligned}$$

Die Summen der ersten Glieder erstrecken sich über die ganze Masse. Die Summen der zweiten Glieder beziehen sich auf alle äusseren Kräfte, sowohl diejenigen, welche alle Punkte des Körpers angreifen, als jene, welche an einer endlichen Zahl von besonderen Punkten angebracht sind. Die äusseren Kräfte können jeden Augenblick ausgedrückt werden mittelst der Elemente, welche die Lage des Körpers bestimmen. Die zweiten Glieder sind daher bekannte Functionen der Winkel $\varphi$, $\psi$, $\theta$ und der Zeit, wenn die Kräfte von dieser abhängen.

Die ersten Glieder nehmen eine sehr einfache Gestalt an, wenn man die Hauptträgheitsaxen des Körpers zu Axen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ wählt. Die Summen $\Sigma y_1 z_1\,dm$, $\Sigma z_1 x_1\,dm$, $\Sigma x_1 y_1\,dm$ werden dadurch Null. Bedeuten $A$, $B$, $C$ die respectiven Hauptträgheitsmomente des Körpers und $L$, $M$, $N$ die bekannten Functionen, welche die zweiten Glieder vorstellen; so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + L, \\ B \dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + M, \\ C \dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + N. \end{cases}$$

Diese in Verbindung mit (3) bilden ein System von sechs Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welches die sechs Functionen $p, q, r, \varphi, \psi, \theta$ von $t$ bestimmt. Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmen die sechs Constanten.

## Verschiedene Eigenschaften dieser Bewegung für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken.

112. Anwendung des Princips der Flächen. — Die Geschwindigkeiten, welche zu irgend einer Epoche sämmtlichen Punkten des um den festen Punkt beweglichen Körpers zukommen, können augenblicklich hervorgebracht werden durch Momentankräfte, die auf den Körper wirken, während derselbe in der gerade stattfindenden Lage ruht. Alle diese Kräfte lassen sich vermöge des festen Punktes auf ein Paar reduciren. Dieses Paar ist identisch mit demjenigen, welches aus den Bewegungsgrössen aller Punkte des Körpers resultirt. Zerlegt man jedes der beiden Paare in drei andere, deren Axen nach festen rechtwinkligen Geraden gerichtet sind, so stimmen auch die Seitenpaare überein.

Das Princip der Flächen lehrt, dass wenn keine äusseren Kräfte wirken, die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf drei feste Axen constant sind und daher ein constantes mittleres Moment mit constanter Axenrichtung geben. Die Momentankräfte, welche jeden Augenblick dem Körper, wenn derselbe in der gerade stattfindenden Lage ruhte, die Geschwindigkeiten ertheilen würden, welche er wirklich besitzt, lassen sich folglich auf ein Paar mit constanter Axe und constantem Moment reduciren. Wir wollen Axe und Moment bestimmen.

Zerlegen wir deshalb die Bewegungsgrössen in irgend einem Zeitpunkt nach den mit dem Körper festen Hauptträgheitsaxen, auf welchen wir im Folgenden immer die $x_1$, $y_1$, $z_1$ zählen wollen. Die Momente der resultirenden Seitenpaare werden ausgedrückt durch:

$$\Sigma(y_1 w - z_1 v)\,dm, \quad \Sigma(z_1 u - x_1 w)\,dm, \quad \Sigma(x_1 v - y_1 u)\,dm.$$

Indem man für $u, v, w$ die Werthe der Gleichungen (5) setzt, findet man:

$$(11)\qquad \begin{cases} \Sigma(y_1 w - z_1 v)\,dm = Ap, \\ \Sigma(z_1 u - x_1 w)\,dm = Bq, \\ \Sigma(x_1 v - y_1 u)\,dm = Cr; \end{cases}$$

$A$, $B$, $C$ bezeichnen die Hauptträgheitsmomente.

Diese Grössen sind nicht constant, denn die Axen der $x_1$, $y_1$, $z_1$ sind nicht fest; dagegen ist die Summe ihrer Quadrate constant, weil das resultirende Moment constant ist. Bezeichnen wir seinen Werth durch $k$, so haben wir:

$$(12)\qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Kennt man den Anfangszustand des Körpers, d. h. Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeiten desselben oder statt der letzten die hervorbringenden Momentankräfte, so kennt man auch die Anfangswerthe von $Ap$, $Bq$, $Cr$ und folglich von $p$, $q$, $r$.

Die Axe des mittleren Paares der Bewegungsgrössen habe die Richtung $OK$. Folgende Gleichungen bestimmen diese Richtung in Bezug auf die beweglichen Axen:

$$(13)\quad \cos KOX_1 = \frac{Ap}{k},\quad \cos KOY_1 = \frac{Bq}{k},\quad \cos KOZ_1 = \frac{Cr}{k}.$$

In Bezug auf die festen Axen hat man:

$$(14)\qquad \begin{cases} \cos KOX = \dfrac{Aap + Bbq + Ccr}{k}, \\ \cos KOY = \dfrac{Aa'p + Bb'q + Cc'r}{k}, \\ \cos KOZ = \dfrac{Aa''p + Bb''q + Cc''r}{k}. \end{cases}$$

Die Zähler dieser drei Quotienten sind constant, weil $OK$ fest ist.

Die Formeln (11) zeigen, was schon bewiesen wurde, dass die Cosinus der Winkel, welche die augenblickliche Drehaxe macht mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, dieselben Zeichen haben wie $p$, $q$, $r$.

Denn die Componenten der augenblicklichen Drehung um die Richtungen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ sind jene Drehungen, welche die Seitenpaare $Ap$, $Bq$, $Cr$ erzeugen würden. Sie haben folglich gleiche Zeichen mit diesen Paaren, also mit $p$, $q$, $r$.

113. Anwendung des Princips der lebendigen Kräfte. — Das Princip der lebendigen Kräfte bleibt geltend, wenn feste Punkte im System vorhanden sind, und man braucht auf die von ihnen geäusserten Kräfte keine Rücksicht zu neh-

men. Im vorliegenden Fall, wo keine äusseren Kräfte wirken, ist die Summe der lebendigen Kräfte constant. Bezeichne $h$ ihren Werth; derselbe ist bekannt, wenn man den Anfangszustand des Körpers kennt. Das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes $x_1$, $y_1$, $z_1$ beträgt:

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2(y_1^2 + z_1^2) + q^2(z_1^2 + x_1^2) + r^2(x_1^2 + y_1^2) - 2qry_1z_1 - 2rpz_1x_1 - 2pqx_1y_1.$$

Durch Multipliciren mit $dm$ und Integriren über die ganze Ausdehnung der Masse erhält man die constante Summe $h$ der lebendigen Kräfte. Man findet:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \tag{15}$$

Nimmt man zu (12) und (15) die Bedingung hinzu, dass die Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ constant sein soll, so hat man drei Gleichungen zwischen $p$, $q$, $r$, wodurch diese Grössen bestimmt werden, wenn $A$, $B$, $C$ ungleich sind. Die Drehaxe ist dann fest. Den Gleichungen (10) zufolge müssen zwei von den Grössen $p, q, r$ Null sein, weil $dp, dq, dr, L, M, N$ sämmtlich Null sind. Die Bewegung geschieht daher um eine der Hauptträgheitsaxen, wie man leicht vorhersehen konnte.

114. Winkel der augenblicklichen Drehaxe und der Axe des mittleren Paares. — Bezeichnet $\varepsilon$ den Winkel beider Axen, so ergeben die Cosinus ihrer Winkel mit $Z_1$, $Y_1$, $Z_1$:

$$\cos\varepsilon = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{k\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

oder:

$$\cos\varepsilon = \frac{h}{k\omega}.$$

Daher:

$$\omega\cos\varepsilon = \frac{h}{k};$$

was die merkwürdige Eigenschaft zeigt, dass die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit eine constante Componente hat um die Axe des resultirenden Paares, dessen Ebene die der grössten Flächeninhalte oder die unveränderliche Ebene ist.

115. Lage der augenblicklichen Drehaxe im Centralellipsoid. — Das Centralellipsoid hat die Gleichung:

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1.$$

Die Normale zu irgend einem Punkt $x_1, y_1, z_1$ desselben macht mit den beweglichen Axen Winkel, deren Cosinus den Grössen $Ax_1, By_1, Cz_1$ proportional sind.

Die Cosinus der Winkel, welche die Axe des mittleren Paares mit denselben Axen bildet, sind proportional mit $Ap$, $Bq$, $Cr$. Beide Geraden fallen daher zusammen, wenn $\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$, d. h. wenn der nach dem Punkt $x_1, y_1, z_1$ geführte Radius des Ellipsoids zusammenfällt mit der augenblicklichen Drehaxe. Somit hat man folgenden von Poinsot gegebenen Satz:

Legt man an das Centralellipsoid eine tangirende Ebene parallel mit der Ebene des resultirenden Paares, so ist der Leitstrahl nach dem Berührungspunkt derselben die augenblickliche Drehaxe.

116. Die Winkelgeschwindigkeit als Function des Radius des Centralellipsoids. — Den Punkt, in welchem die augenblickliche Drehaxe durch das Centralellipsoid geht, nennen wir den Pol der Drehung. Seine Coordinaten sind $p, q, r$ proportional. Bezeichnen wir den Abstand desselben vom Mittelpunkt durch $R$ und durch $P$ das Perpendikel vom Mittelpunkt auf die tangirende Ebene im Pol; so bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{\sqrt{Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2}}{\sqrt{Ap^2+Bq^2+Cr^2}} = \frac{\sqrt{A^2x_1^2+B^2y_1^2+C^2z_1^2}}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}.$$

Die drei letzten Glieder ergeben:

$$\frac{R}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{Pk}; \text{ daher } \omega = R\sqrt{h},\ P = \frac{\sqrt{h}}{k}.$$

Hieraus folgen mehrere wichtige Wahrheiten, welche man Poinsot verdankt.

Die Gleichung $\omega = R\sqrt{h}$ lehrt:

Die Winkelgeschwindigkeit ist proportional der Länge desjenigen Radius des Ellipsoids, um welchen augenblicklich die Drehung stattfindet.

Die Gleichung $P = \frac{\sqrt{h}}{k}$ zeigt, dass das Perpendikel aus dem festen Punkt auf die tangirende Ebene im Pol constant ist. Diese Ebene bleibt parallel zu der festen Ebene des mittleren Paares; sie bleibt daher selbst fest. Man hat somit den anderen Satz:

Das Centralellipsoid tangirt beständig die Ebene, welche parallel ist zur Ebene des mittleren Paares und von dem festen Punkt absteht um die Strecke $\frac{\sqrt{h}}{k}$. Sein Berührungspunkt mit derselben ist der Pol der Drehung und hat folglich keine gleitende Bewegung auf der festen Ebene.

Diese Eigenschaft gewährt eine erste sehr klare geometrische Vorstellung der Bewegung des Körpers.

117. Poloide. — Bewegt man eine Ebene so, dass sie immer das fest gedachte Centralellipsoid und eine concentrische Kugel vom Halbmesser $\frac{\sqrt{h}}{k}$ tangirt, dann bildet nach dem letzten Satze der Ort ihrer Berührungspunkte mit dem Ellipsoid die Curve der Pole auf diesem. Sie liegt symmetrisch gegen zwei der Hauptebenen und wird in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen des Körpers durch nachstehende Gleichungen bestimmt:

$$A x_1^2 + B y_1^2 + C z_1^2 = 1,$$
$$A^2 x_1^2 + B^2 y_1^2 + C^2 z_1^2 = \frac{k^2}{h};$$

aus welchen folgt

(16) $$A(k^2 - Ah)\, x_1^2 + B(k^2 - Bh)\, y_1^2 + C(k^2 - Ch)\, z_1^2 = 0:$$

eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Hauptaxen die des Ellipsoids sind. Diese bildet in Bezug auf den Körper den Ort aller augenblicklichen Drehaxen.

Um die Richtung ihrer beiden Flächenäste zu bestimmen, sei $A$ das grösste Trägheitsmoment und $C$ das kleinste. Man findet leicht:

(17) $$\begin{cases} k^2 - Ah = B(B - A)\, q^2 + C(C - A)\, r^2, \\ k^2 - Bh = C(C - B)\, r^2 + A(A - B)\, p^2, \\ k^2 - Ch = A(A - C)\, p^2 + B(B - C)\, q^2. \end{cases}$$

Daher:

$$k^2 - Ah < 0, \quad k^2 - Ch > 0.$$

Diese zwei Ungleichheiten ergeben sich auch unmittelbar, weil $\frac{h}{k^2}$ das Quadrat der Entfernung des Mittelpunkts ist von der Tangentialebene des Ellipsoids durch den Punkt $x_1, y_1, z_1$; woraus folgt $\frac{h}{k^2} > \frac{1}{A}$, $\frac{h}{k^2} < \frac{1}{C}$.

Demnach sind die elliptischen Schnitte des Kegels senkrecht auf die Axe der $x_1$, wenn man hat:

$$k^2 - Bh > 0,$$

und senkrecht auf die Axe der $z_1$, wenn:

$$k^2 - Bh < 0.$$

Zur ersten dieser beiden Axen gehört das grösste, zur zweiten das kleinste Trägheitsmoment.

Für $B = C$ hat man einen Umdrehungskegel um die Axe der $x_1$; für $B = A$ einen solchen um die Axe der $z_1$.

Wenn $A = B = C$, dann sind $p$, $q$, $r$ den Gleichungen (10) zufolge constant, und die Bewegung geschieht um eine feste Axe.

Ist $k^2$ gleich einer von den Grössen $Ah$, $Bh$, $Ch$, so wird der Kegel eine Ebene. Sobald aber nicht $A$, $B$, $C$ alle drei gleich sind, hat man nothwendig:

$$k^2 - Ah < 0, \quad k^2 - Ch > 0.$$

Daher kann nur $k^2 - Bh$ Null sein, wenn $A$, $B$, $C$ alle drei ungleich sind. Der Ort der augenblicklichen Drehaxen erhält in diesem Falle die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} = \frac{C(B - C)}{A(A - B)};$$

der letzte Ausdruck geht aus der zweiten Formel (17) hervor. Die Gleichung stellt zwei Ebenen dar, welche durch die Axe der $y_1$, d. i. die Axe des mittleren Hauptträgheitsmoments gehen und mit $Y_1 Z_1$ gleiche Winkel machen. Sie schneiden das Ellipsoid nach zwei Ellipsen, welche den Ort der Pole bilden. Daher ist der Abstand des Mittelpunkts von den durch alle Punkte dieser Ellipsen gelegten Tangentialebenen des Ellipsoids constant und offenbar gleich dessen mittlerer Halbaxe.

Wenn $k^2 - Bh$ positiv, so legt sich die Kegelfläche um die Axe der $x_1$ herum, und die Gleichung (16) giebt:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} > \frac{C(k^2 - Ch)}{A(Ah - k^2)} > \frac{C(B - C)}{A(A - B)};$$

das Letzte erkennt man wieder aus der zweiten Formel (17). Alle auf Seite der positiven $z_1$ liegenden Erzeugungslinien befinden sich folglich unterhalb jener beiden Ellipsen.

Wenn dagegen $k^2 - Bh$ negativ, so legt sich die Kegelfläche um die Axe der $z_1$ herum, und die Erzeugungslinien befinden sich oberhalb der Ellipsen.

Diese theilen demnach das Ellipsoid in vier solche Räume, dass die augenblickliche Drehaxe, wenn sie zu irgend einer Epoche sich in einem von ihnen befindet, dann immer in demselben bleibt und sich um die in seiner Mitte enthaltene Hauptaxe herum bewegt. Liegt die augenblickliche Drehaxe in einer der vier Grenzebenen dieser Räume, so tritt sie auch aus ihr nicht heraus.

Aus (7) und (17) mit Benutzung von (12) oder (15) geht hervor: Wenn unter den drei Hauptaxen des Centralellipsoids nicht zwei nahezu gleiche sind, und die augenblickliche Drehaxe sich anfänglich sehr nahe an der kleinsten oder grössten von ihnen befand, dann entfernt sie sich während der ganzen Bewegung nur sehr wenig von derselben. — Sind aber zwei Hauptaxen nahe einander gleich, dann ist diese Eigenschaft nur erwiesen für die Bewegung der augenblicklichen Drehaxe um die dritte Hauptaxe; dagegen braucht die Stabilität nicht stattzufinden bei ihrer Bewegung um die wenig von der mittleren verschiedene Hauptaxe. Zwar wird derjenige von den vier Lappen der Oberfläche des Ellipsoids, in dessen Mitte der Endpunkt dieser Hauptaxe liegt, sehr schmal, allein der Pol kann um seinen Mittelpunkt eine lange Poloide beschreiben.

Befand sich die augenblikliche Drehaxe in der Nähe der mittleren Hauptaxe, dann entfernt sich die Poloide in allen Fällen beträchtlich von dem Endpunkt derselben. Soll die Stabilität dennoch stattfinden, so darf der Pol die Curve nicht ganz durchlaufen.

Ist die Poloide verzeichnet und die anfängliche Drehgeschwindigkeit bekannt sowie die Axe, um welche sie stattfindet, so kann man sich die Bewegung leicht vorstellen ohne Ende fort. Man weiss, um welchen Winkel sich der Körper nach unendlich kleiner Zeit gedreht hat; man vermag also den Punkt der Poloide zu bestimmen, der Berührungspunkt mit der festen Ebene geworden ist; man kennt daher den Radius des Ellipsoids, um welchen die neue Drehung stattfindet, und

folglich den Werth ihrer Winkelgeschwindigkeit. Ebenso bestimmt man Drehaxe und Geschwindigkeit nach einem zweiten Zeitdifferential, und so fort.

Die Punkte, welche nach einander Pole werden, bilden auch auf der festen Tangentialebene eine Curve: die Serpoloide. Man sieht leicht den Weg, auf dem man dieselbe bestimmen könnte.

118. Zweite geometrische Darstellung der Bewegung des Körpers. — Der Ort aller augenblicklichen Drehaxen im absoluten Raum ist eine Kegelfläche, welche ihre Spitze in dem festen Punkt und zur Basis die Serpoloide hat. Es lässt sich leicht zeigen, dass sie beständig die im Körper feste Kegelfläche tangirt, welche den Ort aller augenblicklichen Drehaxen in Bezug auf diesen bildet. Da die augenblickliche Drehaxe sich jeden Augenblick auf beiden Flächen zugleich befindet, so haben diese immer eine gemeinschaftliche Kante. Nach unendlich kleiner Zeit fällt eine unendlich nahe Kante des beweglichen Kegels zusammen mit einer solchen des festen. Weil sie aber bei dieser Bewegung sich nur um unendlich Kleine zweiter Ordnung verrückt, so folgt, dass wenn man auf beiden Kegeln zwei Kanten nimmt, welche von der gemeinschaftlichen um unendlich Kleine erster Ordnung entfernt sind, dieselben von einander nur um Grössen zweiter Ordnung abstehen. Demnach tangiren die beiden Kegel einander. Der bewegliche gleitet übrigens nicht auf dem festen, denn ihre Berührungskante ist die augenblickliche Drehaxe. Die Bewegung des Körpers kann somit hervorgebracht werden vermöge eines Kegels zweiten Grades, der im Körper fest ist und auf einem anderen Kegel rollt, dessen Oberfläche unendlich viele Windungen hat und sich um die Axe des mittleren Paares herum legt.

119. Ort der Lagen, welche die feste Axe des mittleren Paares nach einander im Körper hat. — Bezeichnet man durch $x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Axe in Bezug auf die beweglichen Axen, so hat man die aus (13) folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{Ap}{Cr}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{Bq}{Cr}.$$

Die Formeln (12) und (15) ergeben:

$$A(k^2 - Ah)\,p^2 + B(k^2 - Bh)\,q^2 + C(k^2 - Ch)\,r^2 = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{p}{r}, \frac{q}{r}$ zwischen diesen drei Gleichungen erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche:

$$\left(\frac{k^2}{A} - h\right) x_1^2 + \left(\frac{k^2}{B} - h\right) y_1^2 + \left(\frac{k^2}{C} - h\right) z_1^2 = 0.$$

Sie ist ein Kegel zweiten Grades, dessen Schnitte senkrecht auf die Axe des grössten oder kleinsten Trägheitsmoments Ellipsen sind.

Für $B = C$ wird derselbe ein Umdrehungskegel um die Axe der $x_1$, für $B = A$ um die Axe der $z_1$.

Wenn $A = B = C$, so hat man $k^2 = Ah$. Die aus (12) und (15) gefolgerte Gleichung sagt uns jetzt nichts. Dagegen erhält man

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{p}{r}, \quad \frac{y_1}{z_1} = \frac{q}{r};$$

welches beweist, dass die Axe des mittleren Paares und die augenblickliche Drehaxe in einander fallen. Dasselbe lässt sich darthun aus der Formel für den Winkel dieser beiden Richtungen. Die Bewegung findet jetzt um eine feste Axe statt.

120. Verschiedene Formeln. — Man findet brauchbare Formeln, wenn man die zweiten Glieder der Gleichungen (4) gleichsetzt den Projectionensummen auf die festen Axen der $x, y, z$, welche die Grössen $u, v, w$ der Gleichungen (5) geben. Man erhält durch Vergleichung der Coëfficienten von $x_1, y_1, z_1$ neun Gleichungen:

$$(18)\begin{cases} \frac{da}{dt} = br - cq, & \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, & \frac{da''}{dt} = b''r - c''q, \\ \frac{db}{dt} = cp - ar, & \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, & \frac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\ \frac{dc}{dt} = aq - bp, & \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, & \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p. \end{cases}$$

Aus ihnen folgen:

$$\begin{aligned} p\,da + q\,db + r\,dc &= 0, \\ p\,da' + q\,db' + r\,dc' &= 0, \\ p\,da'' + q\,db'' + r\,dc'' &= 0. \end{aligned}$$

### Rechnung für den besonderen Fall, dass keine äussere Kraft wirkt.

121. Wirkt keine äussere Kraft, so hat man

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,$$

und die Gleichungen (10) werden

$$(19)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases}$$

Indem man respective mit $p$, $q$, $r$ multiplicirt und addirt, erhält man:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0.$$

Daraus durch Integriren:

$$(20)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Die Constante $h$ ist nach dem Vorhergehenden die Summe der lebendigen Kräfte des Systems.

Man erhält ein anderes Integral, wenn man die Gleichungen (19) mit $Ap$, $Bq$, $Cr$ multiplicirt und addirt. Dadurch wird:

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0;$$

folglich:

$$(21)\qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Die neue Constante $k$ ist das Moment des mittleren Paares der Bewegungsgrössen des Systems.

Die Constanten $h$, $k$ sowie die Anfangswerthe von $p, q, r$ lassen sich leicht aus den Anfangsdaten bestimmen. Die Axenrichtung des mittleren Paares und sein Moment $k$ sind bekannt, mag man die Anfangsgeschwindigkeiten selbst oder die erzeugenden Momentankräfte kennen. Die anfängliche Lage der Coordinatenaxen $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ ist gegeben; man kennt daher die Seitenpaare von $k$, deren Axen nach $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ gerichtet sind. Ihre Momente sind beziehlich $Ap$, $Bq$, $Cr$; folglich kennt man zu Anfang der Bewegung Grösse und Zeichen von $p$, $q$, $r$. Vermöge (20) ist nun auch $h$ bekannt.

Aus (20) und (21) ergeben sich für $p$ und $q$ Werthe in $r$. Setzt man diese in die dritte Gleichung (19), so erhält man eine Gleichung, deren Quadratur $t$ als Function von $r$ liefert. Zunächst findet sich:

$$(22)\ p^2 = \frac{k^2 - Bh + C(B-C)r^2}{A(A-B)},\ q^2 = \frac{k^2 - Ah + C(A-C)r^2}{B(B-A)}.$$

Was die Zeichen von $p$, $q$, $r$ betrifft, so werden dieselben, wie bemerkt, im Anfangszustand bekannt aus der Lage der Axe des mittleren Paares gegen die Hauptträgheitsaxen, deren Lage man für diesen Augenblick kennt. Die Cosinus der Winkel, welche die Axe dieses Paares mit den Hauptaxen macht, sind $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$; woraus sich Grösse und Zeichen von $p$, $q$, $r$ für den Anfang ergeben. Man sieht aus (19), dass während diese drei Grössen ihre Zeichen behalten, auch die Derivirten es thun. Mithin ändert sich jede der Grössen $p$, $q$, $r$ stets in demselben Sinne, so lange als keine von ihnen Null wird. Wird aber eine Null, dann giebt die entsprechende Gleichung (19) den Werth ihrer Derivirten für diesen Augenblick und damit das Zeichen, welches die Grösse unmittelbar nachher hat; und nun findet das Gesagte wieder statt. Man ist daher niemals im Zweifel wegen der Zeichen von $p$, $q$, $r$.

Durch Einsetzen der Werthe von $p$, $q$ aus (22) in die dritte Gleichung (19) findet sich:

$$(23)\ dt = \frac{C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{k^2 - Bh + C(B-C)r^2}\,\sqrt{Ah - k^2 + C(C-A)r^2}}.$$

Wir nehmen $dt$ immer positiv und die Wurzeln absolut; $dr$ ist positiv, wenn $p$ und $q$ gleiche Zeichen haben, negativ, wenn ihre Zeichen verschieden sind. Im letzten Fall muss man der zweiten Seite das Zeichen — geben. Das Integral hängt von den elliptischen Functionen ab. Man kann die Integration ausführen, wenn zwei von den Grössen $A$, $B$, $C$ einander gleich werden, oder wenn $k^2$ gleich einer von $Ah$, $Bh$, $Ch$ wird; wir haben jedoch gesehen, dass $k^2$ nur gleich $Bh$ werden kann.

Die Integration von (23) liefert $t$ als Function von $r$, und die dabei eingehende Constante wird durch den Anfangswerth von $r$ bestimmt. Man findet nun umgekehrt $r$ als Function von $t$ und vermöge (22) auch $p$ und $q$.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe bleibt uns noch übrig, die Winkel $\varphi$, $\theta$, $\psi$ durch $p$, $q$, $r$ zu bestimmen. Dazu dienen folgende drei Gleichungen der Vorbemerkungen:

$$(24)\qquad \begin{cases} p = \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ q = -\sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ r = \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Man kann sich dabei der Formeln (13) bedienen, deren jede in den zwei anderen enthalten ist. Der Einfachheit wegen nehmen wir die Axe des mittleren Paares zu einer der festen Coordinatenaxen, z. B. zur $z$-Axe. Die ersten Glieder der Formeln (13) werden dann $a''$, $b''$, $c''$, und man erhält nach den in den Vorbemerkungen gegebenen Werthen:

$$(25)\quad \frac{Ap}{k} = \sin\theta \sin\varphi, \quad \frac{Bq}{k} = \sin\theta \cos\varphi, \quad \frac{Cr}{k} = \cos\theta.$$

Diese Gleichungen bestimmen $\cos\theta$ und $\tang\varphi$ durch $p$, $q$, $r$, folglich durch $t$. Da diese trigonometrischen Linien jeden Augenblick ohne Zweideutigkeit des Zeichens bekannt sind und ihre Winkel sich stetig ändern, so sind letztere vollständig bestimmt.

Es handelt sich also noch um Bestimmung von $\psi$, wozu man die Gleichungen (24) benutzt. Indem man $\frac{d\theta}{dt}$ zwischen den beiden ersten eliminirt, findet sich:

$$p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$$

oder:

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{k \sin\theta} = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Daher:

$$Ap^2 + Bq^2 = k \sin\theta^2 \frac{d\psi}{dt} = k\left(1 - \frac{C^2 r^2}{k^2}\right)\frac{d\psi}{dt} = h - Cr^2;$$

woraus folgt:

$$(26)\qquad d\psi = \frac{k\,(h - Cr^2)}{k^2 - C^2 r^2}\, dt.$$

Setzt man für $dt$ den Werth aus (23), so hat man $d\psi$ als

Function von $r$ und $dr$. Folglich ergiebt sich $\psi$ als Function von $r$ und somit von $t$ durch eine Integration, welche auf die elliptischen Functionen hinauskommt und in denselben Fällen genau ausgeführt werden kann, wie die von $dt$. Die Constante wird durch die Anfangswerthe von $\psi$ und $r$ bestimmt.

### Der Fall, wo $A = B$.

122. Die Gleichungen (19) werden für ihn

$$\frac{dr}{dt} = 0, \text{ daher } r = n,$$

wo $n$ eine durch den Anfangszustand bestimmte Constante, und

$$(\alpha) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{A - C}{A} nq,$$

$$(\beta) \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{C - A}{A} np.$$

Daraus folgt:

$$p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} = 0,$$

also:

$$p^2 + q^2 = m^2.$$

Die Constante $m^2$ wird durch den Anfangszustand bestimmt.

Die Winkelgeschwindigkeit ist constant, obgleich $p$ und $q$ es nicht sind. Sie hat den Werth:

$$\omega = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Dasselbe würden die Gleichungen (20), (21) ergeben.

Um $p$ als Function von $t$ zu erhalten, eliminirt man $q$ zwischen den Gleichungen $(\alpha)$, $(\beta)$, indem man die erste differenziirt und für $\frac{dq}{dt}$ den Werth aus der zweiten setzt. Man findet:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p^2 = 0,$$

wo

$$\frac{A - C}{A} = \mu.$$

Daher:

$$p = M \sin(\mu n t + \varepsilon);$$

$M$ und $\varepsilon$ bezeichnen zwei Constanten.

Nun ergiebt sich:

$$q = \frac{1}{\mu n} \frac{dp}{dt} = M \cos(\mu n t + \varepsilon).$$

Und da $p^2 + q^2 = m^2$, so wird

$$M = \pm m.$$

Wir haben daher für $p$, $q$ nachstehende Werthe, wobei wir uns $m$ beider Zeichen fähig denken:

$$(\gamma) \qquad p = m \sin(\mu n t + \varepsilon), \quad q = m \cos(\mu n t + \varepsilon).$$

Zur Bestimmung von $m$, $\varepsilon$ seien $p_0$, $q_0$ die Anfangswerthe von $p$, $q$; dann folgt:

$$m = \pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \quad p_0 = m \sin\varepsilon, \quad q_0 = m \cos\varepsilon.$$

Der Winkel $\varepsilon$ ist bestimmt, sobald man ein Zeichen für $m$ gewählt hat. Nähme man das andere Zeichen, so würde $\varepsilon$ sich um 180 Grade ändern. Es steht daher frei, welches man nehmen will. Wir setzen z. B.:

$$m = + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}.$$

Bestimmen wir jetzt $\varphi$, $\psi$, $\theta$.

Die Gleichungen (25) geben:

$$\cos\theta = \frac{Cn}{k}, \quad \tang\varphi = \frac{p}{q} = \tang(\mu n t + \varepsilon).$$

Die Bogen $\varphi$ und $\mu n t + \varepsilon$ haben dieselbe Tangente; sie können sich daher nur um ein Vielfaches von $\pi$ unterscheiden, das man beliebig wählen kann. Wir nehmen sie gleich und erhalten:

$$\varphi = \varphi_0 + \mu n t,$$

wo $\varphi_0$ der Anfangswerth von $\varphi$.

Die Gleichung (26) wird:

$$d\psi = \frac{k(h - Cn^2)}{k^2 - C^2 n^2} dt.$$

Folglich:

$$\psi = \frac{k(h - Cn^2)}{k^2 - C^2 n^2} t + \psi_0;$$

$\psi_0$ ist Anfangswerth von $\psi$.

Der constante Werth für $\cos\theta$ lehrt, dass die ungleiche Axe des Centralellipsoids eine gerade Kegelfläche um die feste

Axe des mittleren Paares beschreibt, und dass folglich der Aequator des Ellipsoids eine beständige Neigung gegen die Ebene des Paares beibehält.

Der Werth von $\psi$ zeigt, dass die Spur des Aequators des Centralellipsoids auf der festen Ebene des mittleren Paares sich gleichförmig bewegt, und dass folglich auch die ungleiche Axe ihre Kegelfläche gleichförmig beschreibt.

Der Werth von $\varphi$ beweist, dass ein beliebiger Radius der Aequatorebene sich gleichförmig bewegt in Bezug auf die veränderliche Spur des Aequators auf der Ebene des mittleren Paares. Man darf aber die Winkelgeschwindigkeit $\mu n$ dieser Bewegung nicht verwechseln mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{m^2 + n^2}$ des Körpers.

Die augenblickliche Drehaxe macht mit $Z_1$ einen constanten Winkel, dessen Cosinus $\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ ist. Sie beschreibt daher auf dem Centralellipsoid einen Kreis.

Die augenblickliche Drehaxe, die ungleiche Axe des Ellipsoids und die Axe des mittleren Paares liegen beständig in derselben beweglichen Ebene. Um dies nachzuweisen, wollen wir zeigen, dass die Cosinus der Winkel, welche die augenblickliche Drehaxe und die Axe des mittleren Paares mit $X_1$, $Y_1$ bilden, proportional sind. Denn dann liegen die beiden Axen in einer durch $Z_1$ (die ungleiche Axe des Ellipsoids) gehenden Ebene.

Das Verhältniss der zwei ersten Cosinus ist $\frac{p}{q}$, das der zwei anderen $\frac{a''}{b''}$, folglich $\frac{Ap}{Bq}$ nach (25) und also auch $\frac{p}{q}$.

### Der Fall, wo $k^2 = Bh$.

123. Wir haben gesehen, dass in diesem Falle der Ort der augenblicklichen Drehaxen nur eine halbe von den zwei Ellipsen sein kann, deren Ebenen durch die Gleichung

$$\frac{x_1{}^2}{z_1{}^2} = \frac{C(B-C)}{A(A-B)}$$

dargestellt werden.

Aus den Gleichungen (20), (21) mit Rücksicht auf $k^2 = Bh$ findet man:

$$p^2 = \frac{(C-B)(k^2 - B^2q^2)}{BA(C-A)}, \quad r^2 = \frac{(B-A)(k^2 - B^2q^2)}{BC(C-A)}.$$

Daraus folgt, dass stets

$$k^2 - B^2q^2 > 0 \text{ oder } q^2 < \frac{k^2}{B^2}.$$

Die zweite Gleichung (19) ergiebt nun:

$$B\frac{dq}{dt} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}(k^2 - B^2q^2).$$

Daher:

$$dt = \frac{B^2\sqrt{AC}}{\sqrt{(C-B)(B-A)}}\frac{dq}{k^2 - B^2q^2}.$$

Die Wurzeln nehmen wir absolut und geben der zweiten Seite das Zeichen —, wenn $dq$ negativ.

Es sei $dq$ positiv. Setzt man

$$\frac{k}{B} = m, \quad \frac{2k\sqrt{(C-B)(B-A)}}{B\sqrt{AC}} = \mu,$$

wo $\mu$ positiv, so ergiebt sich durch Integriren:

$$\mu t = log.\ \frac{m+q}{\alpha(m-q)};$$

$\alpha$ bezeichnet eine Constante. Folglich:

$$q = m\frac{\alpha e^{\mu t} - 1}{\alpha e^{\mu t} + 1}.$$

Bezeichnet $q_0$ den Anfangswerth von $q$, dann ist:

$$q_0 = \frac{m(\alpha - 1)}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{m + q_0}{m - q_0}.$$

Somit:

$$q = m\frac{(m+q_0)e^{\mu t} + q_0 - m}{(m+q_0)e^{\mu t} + m - q_0}.$$

Vermöge dieses Werthes von $q$ hat man auch $p$ und $r$ als Functionen von $t$.

Die Gleichungen (25) ergeben darauf $\theta$ und $\varphi$ durch $t$. Die Gleichung (26) giebt, indem man für $r$ seinen Werth in $q$ setzt:

$$d\psi = Bm \frac{(C-B)\,m^2 + (B-A)\,q^2}{A\,(C-B)\,m^2 + C\,(B-A)\,q^2}\,dt.$$

Die Integration hat keine Schwierigkeit, wenn man für $q$ den Werth in $t$ substituirt.

Lässt man $t$ ohne Ende wachsen, so nähert sich $q$ der Grenze $m$ oder $\frac{k}{B}$; folglich nähern sich $p$ und $r$ der Null. Die Richtung der augenblicklichen Drehaxe (welche durch die Gleichungen (7) gegen $+X_1$, $+Y_1$, $+Z_1$ bestimmt wird) strebt jetzt gegen die mittlere Halbaxe $+Y_1$ des Centralellipsoids hin.

Es ist hier folgende wichtige Bemerkung zu machen. Der Grenzwerth von $q$ ist $+\frac{k}{B}$ nur unter der Voraussetzung, dass $dq$ beständig positiv. Dies erheischt, dass $p$ und $r$ zu Anfang gleiche Zeichen haben, sofern $C > A$. Die Grössen $p$, $r$ behalten ihre anfänglichen Zeichen, denn sie können erst dann Null werden, wenn $q^2 = m^2$, und dies findet statt bei $t = \infty$. Hätten $p$ und $r$ zu Anfang verschiedene Zeichen, so würden sie auch diese beibehalten, und $dq$ wäre beständig negativ. Man müsste nun $-\mu$ statt $\mu$ schreiben. Dadurch würde man $-m$ oder $-\frac{k}{B}$ als Grenze von $q$ finden.

Demnach strebt die Richtung der augenblicklichen Drehaxe gegen $+Y_1$ oder $-Y_1$ hin, je nachdem $p$ und $r$ in der Anfangslage gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Das erste findet statt, wenn die Winkel, welche die Drehaxe zu Anfang mit $+X_1$ und $+Z_1$ macht, zugleich spitz oder stumpf sind; das letzte, wenn ein Winkel spitz ist und der andere stumpf.

Die augenblickliche Drehaxe hat Stabilität im ersten Falle, sofern sich ihre (durch (7) bestimmte) Richtung anfänglich in der Nähe von $+Y_1$ befand; im zweiten musste sie sich in der Nähe von $-Y_1$ befinden.

# Hydrostatik.

124. Man versteht unter Flüssigkeit eine Anhäufung materieller Punkte, die sich in so kleinen Entfernungen von einander befinden, dass man die Materie, welche sie zusammensetzen, als stetig betrachten darf, den Fall ausgenommen, wo es sich um Wirkungen handelt, die von einer Molekel zur anderen sich merkbar ändern; man nimmt an, dass diese Punkte durch die geringste Kraft verschoben und beliebig von einander entfernt werden können. Diese Annahme einer vollkommenen Beweglichkeit ist jedoch nicht ohne Beschränkung richtig, sondern würde in Bezug auf die Bewegung zu manchen Resultaten führen, welche mit der Erfahrung wenig übereinstimmen. Für das Gleichgewicht aber kann man sie als genau betrachten, ohne merkbare Fehler zu begehen.

Die Flüssigkeiten theilen sich in tropfbare und luftförmige oder Gase. Die ersten werden auch unzusammendrückbare genannt, weil man lange geglaubt hat, dass es unmöglich sei, ihr Volumen durch Druck zu verringern. Es hat sich aber später gezeigt, dass sie doch, freilich nur sehr wenig zusammendrückbar sind.

Der Theil der Statik, welcher vom Gleichgewicht aller Flüssigkeiten handelt, heisst Hydrostatik.

125. Wenn eine Flüssigkeit in einem offenen oder überall verschlossenen Gefäss unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht steht, so übt sie einen Druck auf die Wände des Gefässes. Dieser Druck kann von einem Punkt zum an-

deren verschieden sein. Um ihn mit Bestimmtheit zu definiren, denkt man sich die Kraft, welche auf ein unendlich kleines Element der Wand ausgeübt wird, mit gleicher Stärke und in derselben Richtung auf jedes Element einer ebenen Flächeneinheit wirkend. Die Resultante aller dieser gleichen und parallelen Kräfte ist es, welche man den Druck der Flüssigkeit an der betrachteten Stelle der Wand nennt. Dieser Druck ist somit nichts Anderes als der Grenzwerth des Quotienten der auf das unendlich kleine Element wirkenden Kraft durch die Fläche des Elements.

Man kann es als ein Resultat der Erfahrung betrachten, dass die Druckrichtung immer senkrecht steht auf dem gedrückten Element der Wand. Und da Wirkung und Gegenwirkung stets gleich sind, so leistet die Wand einen gleichen senkrechten Gegendruck in der Ausdehnung desselben Elements. Uebrigens ist das Senkrechtstehen der Druckrichtung ein specieller Fall der allgemeineren Thatsache, dass Körper, welche sich berühren, nur normal auf einander wirken können, wenn ihre Oberflächen sich weder anziehen noch reiben. Denn wäre auch eine ausserordentlich dünne Schicht der Flüssigkeit an der Wand haftend, so könnte man doch diese Schicht als Theil der Wand ansehen, über welchen die andere Flüssigkeit frei hin gleiten könnte.

Wir nehmen als Resultat der Erfahrung folgende andere Grundeigenschaft der Flüssigkeiten an. Wenn eine Flüssigkeit ein überall verschlossenes Gefäss vollständig erf llt und darin unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte m Gleichgewicht steht, und wenn man vermöge eines Stempels auf einen Theil ihrer Oberfläche einen Druck ausübt, so pflanzt sich derselbe mit gleicher Stärke auf jeden gleich grossen Theil der Wände des Gefässes fort; dabei werden diese Theile eben gedacht. Zwei ungleiche ebene Flächen der Wände werden daher im Verhältniss ihrer Inhalte gedrückt. Sind die Flächen krumm, dann gilt dies nur von unendlich kleinen Theilen.

Diese Sätze bleiben für die inneren Drucke ebenso wahr als für die auf die Wände ausgeübten. Denn das Gleichgewicht würde nicht gestört, und die Wirkungen würden nicht geändert, wenn man alle Punkte irgend eines Theils der Flüssigkeit zu einem starren Körper verbände. Man darf demnach in irgend

einem Punkt der Flüssigkeit nach beliebiger Richtung eine feste Wand annehmen. Der Druck ist gegen ein ebenes Element dieser Wand normal, wovon er auch herrühren mag. Und wird derselbe verursacht durch einen Druck auf die Oberfläche der Flüssigkeit, während diese ein Gefäss vollständig erfüllt, so ist er ihm gleich für eine gleiche ebene Flächenausdehnung. Die Annahmen über die Drucke der Flüssigkeiten auf die Gefässwände gelten somit für die Drucke im Inneren auf jeden Flächentheil, den man daselbst betrachten mag.

Wenn eine Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befindet, dann ist der Druck in irgend einem, aber demselben ihrer Punkte auf alle ebenen Flächenelemente, welche man durch diesen Punkt nach verschiedenen Richtungen legen mag, auf die ebene Flächeneinheit bezogen immer der gleiche. Denn betrachtet man irgend ein unendlich kleines Polyeder, welches den Punkt enthält, so übt die umgebende Flüssigkeit gewisse Drucke auf seine Grenzflächen. Diese Drucke sind wie die Polyederflächen selbst unendlich Kleine zweiter Ordnung. Ferner wirken auf die Punkte der das Polyeder erfüllenden Flüssigkeit ihren Massen proportionale Kräfte. Wir können diese als parallel betrachten und erhalten eine Resultante derselben, welche der Masse des Polyeders, also einem unendlich Kleinen dritter Ordnung proportional ist. Sie können daher gegen die Drucke ausser Acht bleiben. Die das Polyeder erfüllende Flüssigkeit steht im Gleichgewicht. Sie überträgt den Druck, welcher von der umgebenden Flüssigkeit auf irgend eine Polyederfläche geübt wird, wenn man denselben auf die Flächeneinheit bezieht, mit gleicher Stärke auf alle anderen Polyederflächen. Die von innen nach aussen gerichteten Gegendrucke stehen folglich im Verhältniss dieser Flächen. Dasselbe gilt von den ihnen respective gleichen äusseren Drucken. Da nun die Polyederflächen sich ohne Ende dem betrachteten Punkt nähern, so ist unser Satz gerechtfertigt.

126. Ist eine unzusammendrückbare Flüssigkeit in einem unbeweglichen Gefäss enthalten, und werden auf ihre Oberfläche durch beliebig viele Stempel Drucke geübt, so hat für den Fall des Gleichgewichts dieser Drucke das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten Geltung, wenn die virtuelle Verschiebung folgenden Bedingungen genügt: die Flüssigkeit muss

dabei stetig, ihr Volumen constant bleiben, und sie muss immer die Grundflächen der Stempel berühren. Die Inhalte dieser Grundflächen seien $a$, $a'$, $a''$, etc. Die Drucke, welche durch die Stempel hervorgebracht werden, auf die Flächeneinheit bezogen, müssen gleich sein. Bezeichnet man ihren Werth mit $p$, dann drücken auf die Oberfläche der Flüssigkeit respective die Kräfte $ap$, $a'p$, $a''p$, etc. Die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte dieser Kräfte, nach den Richtungen derselben geschätzt, seien $\delta p$, $\delta p'$, $\delta p''$, etc. Die Bedingungen der virtuellen Verschiebung ergeben:

$$a\delta p + a'\delta p' + a''\delta p'' + \cdots = 0;$$

folglich:

$$ap\delta p + a'p\delta p' + a''p\delta p'' + \cdots = 0,$$

welches zeigt, dass die Summe der virtuellen Momente der Kräfte gleich Null ist.

## Allgemeine Gleichungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

127. Es seien $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der beschleunigenden Kraft an dem Punkt $x, y, z$; die Dichte bezeichne $\varrho$ und $p$ den in irgend einem Punkt stattfindenden Druck, auf die Flächeneinheit bezogen; $p$ und $\varrho$ sind im Gleichgewicht Functionen von $x$, $y$, $z$.

Durch den Punkt $x, y, z$ denkt man sich ein Parallelepiped, dessen Kanten den Axen parallel und respective $dx$, $dy$, $dz$ sind. Seine Masse $dm$ beträgt $\varrho\, dx\, dy\, dz$, und es wirken auf sie die Kräfte:

$$\varrho X dx dy dz,\ \varrho Y dx dy dz,\ \varrho Z dx dy dz.$$

Auf die sechs Grenzflächen wirken parallele Kräfte mit den Axen in das Parallelepiped hinein. Betrachten wir zuerst die zwei Flächen, welche der Ebene der $x, y$ parallel sind. Die eine von ihnen geht durch den Punkt $x, y, z$, die andere durch $x, y, z + dz$. Der Druck auf die erste beträgt $p\, dx\, dy$; auf die zweite:

$$-\, dx\, dy \left(p + \frac{dp}{dz}\, dz\right),$$

wo $\frac{dp}{dz}$ die partielle Ableitung von $p$ nach $z$. Wir sehen den Druck in

der ganzen Ausdehnung der entsprechenden Fläche als constant an, woraus kein Fehler entspringt, indem wir die Gleichungen an der Grenze nehmen. Aus den Drucken auf die zwei Flächen resultiren daher zwei gerade entgegengesetzte Kräfte, welche sich in die mit der Axe der $z$ parallele Kraft

$$-dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dz}$$

vereinigen. Aus den Drucken parallel mit den Axen der $y$ und $x$ entspringen die Kräfte:

$$-dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dy},\quad -dx\,dy\,dz\,\frac{dp}{dx}.$$

Diese drei Kräfte können wir im Mittelpunkt des Parallelepipeds angreifen lassen; ebenso die Resultante der auf alle Punkte seiner Masse wirkenden Kräfte, denn diese letzten dürfen in der ganzen Ausdehnung des Parallelepipeds in Grösse und Richtung als constant betrachtet werden, und die Dichte kann man in allen Punkten desselben als gleich annehmen. Für das Gleichgewicht ist es daher nothwendig und hinreichend, dass die mit den Axen parallelen Kräfte im Gleichgewicht stehen, was folgende drei Gleichungen liefert:

$$(1)\qquad \frac{dp}{dx} = \varrho X,\quad \frac{dp}{dy} = \varrho Y,\quad \frac{dp}{dz} = \varrho Z.$$

Multiplicirt man dieselben respective mit $dx$, $dy$, $dz$ und addirt, so kommt:

$$(2)\qquad dp = \varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Dies zeigt, dass, wenn die Flüssigkeit im Gleichgewicht steht, der Ausdruck

$$\varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

das vollständige Differential einer Function von $x, y, z$ darstellt, und dass diese Function nothwendig den Druck liefert bis auf eine zu bestimmende Constante.

Bezeichnen wir diese Function mit $F\,(x, y, z)$, so giebt die Gleichung (2):

$$(3)\qquad p = F\,(x, y, z) + C.$$

Die Constante $C$ lässt sich bestimmen, wenn man den Druck in einem gegebenen Punkt der Flüssigkeit kennt. Wenn die Flüssigkeit nicht in einem überall verschlossenen und vollständig erfüllten Gefäss enthalten ist, dann muss in jedem Punkt des freien Theils ihrer Oberfläche ein von aussen gegen

das Innere der Flüssigkeit gerichteter Druck wirken, dessen Grösse die Gleichung (3) bestimmt.

128. Niveauflächen. — Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so nennt man Niveaufläche eine jede Fläche von solcher Beschaffenheit, dass in jedem ihrer Punkte die Resultante der Kräfte, welche auf diesen Punkt wirken, senkrecht auf ihr steht.

Bezeichnet man die Incremente der Coordinaten von einem Punkt $x, y, z$ einer Niveaufläche bis zu einem unendlich nahen Punkt derselben Fläche durch $dx$, $dy$, $dz$, so hat man die Bedingung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \tag{4}$$

als Differentialgleichung aller Niveauflächen.

Daraus folgt mit Rücksicht auf (2), dass für alle Punkte einer und derselben Niveaufläche

$$dp = 0,$$

dass also der Druck auf ihr constant ist. Man könnte diese merkwürdige Eigenschaft auch zur Definition der Niveauflächen benutzen. Die durch (4) ausgesprochene Eigenschaft würde eine unmittelbare Folge davon sein.

Die endliche Gleichung der Niveauflächen ist, wenn $c$ eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$F(x, y, z) = c,$$

wo $F(x, y, z)$ die Function bedeutet, welche das Differential hat:

$$\varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Lässt man die Constante $c$ nach einander alle möglichen Werthe annehmen, so erhält man alle Niveauflächen.

Diese Flächen können keinen Punkt gemein haben, wenn endliche Werthe von $x, y, z$ der Function $F(x, y, z)$ immer endliche und bestimmte Werthe ertheilen. Denn dann könnte man nicht für dieselben Werthe von $x, y, z$ haben:

$$F(x, y, z) = c \text{ und } F(x, y, z) = c',$$

während $c$ und $c'$ verschieden wären.

Wenn dies aber nicht der Fall ist, dann wird der Druck in den Punkten, wo zwei Niveauflächen einander begegnen, unbestimmt, und man kann nicht mehr sagen, dass derselbe in der ganzen Ausdehnung einer Niveaufläche constant sei. Wir

betrachten die Ausnahmefälle nicht, wo diese Umstände eintreten.

Ist der Druck auf die freie Oberfläche in allen ihren Punkten gleich, so bildet diese selbst eine Niveaufläche.

129. Stellt $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer Function $\varphi$ von $x, y, z$ dar, welches z. B. stattfindet, wenn die Richtungen der gegebenen Kräfte durch feste Centren gehen und ihre Intensitäten nur von der Entfernung von diesen abhängen, so kann die Gleichung (2) in folgender Form geschrieben werden:

$$dp = \varrho\, d\varphi. \tag{5}$$

Das erste Glied ist das Differential einer Function der unabhängigen Variablen $x, y, z$, ebenso $d\varphi$. Es muss daher, damit das erste Glied dem zweiten identisch werde, $\varrho$ irgend eine Function von $\varphi$ sein.

Die Dichte ist folglich dann mit $\varphi$ zugleich constant, also für alle Punkte einer und derselben Niveaufläche. Und diese Flächen theilen die Flüssigkeit in Schichten, innerhalb welcher Druck und Dichte nicht variiren.

130. Bei zusammendrückbaren Flüssigkeiten hängt die Dichte vom Druck ab. Es sei für diesen Fall $\varrho = f(p)$; die Gleichung (5) wird:

$$d\varphi = \frac{dp}{f(p)}, \quad \text{also } \varphi = \int \frac{dp}{f(p)}.$$

Die Constante ist aus dem gegebenen Werthe zu bestimmen, welchen der Druck in einem bekannten Punkte hat. Die Integration bestimmt $p$ als Function von $\varphi$; dadurch ist auch $\varrho$ als Function von $\varphi$ bestimmt, und man kennt somit Dichte und Druck auf einer beliebigen Niveaufläche.

Nehmen wir als Beispiel ein Gas. Nach dem Mariotteschen Gesetz ist:

$$p = k\varrho,$$

wo $k$ von der Temperatur abhängt, die wir zunächst als überall gleich voraussetzen. Die Gleichung (5) liefert:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\varphi}{k}, \quad log\, \frac{p}{C} = \frac{\varphi}{k}. \tag{6}$$

Die Constante $C$ muss aus dem gegebenen Werthe von $p$ bestimmt werden, welcher einem bekannten $\varphi$ entspricht. Man kann die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$p = Ce^{\frac{\varphi}{k}},$$

woraus folgt:

$$\varrho = \frac{C}{k} e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Ist die Temperatur nicht constant, so ist auch $k$ veränderlich. Die Gleichung (6) zeigt aber, dass nach hergestelltem Gleichgewicht $k$ nur Function von $\varphi$ sein kann, weshalb dann in allen Punkten einer und derselben Niveaufläche gleiche Temperatur stattfindet. Druck und Dichte werden in diesem Falle bestimmt durch die Formeln:

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \varrho = \frac{C}{k} e^{\int \frac{d\varphi}{k}}.$$

Betrachtet man die Erde als Kugel und sieht ab von der Umdrehung um ihre Axe, so ist die auf die Luftmolekel wirkende Kraft nach dem Erdmittelpunkt gerichtet, und folglich bilden die Niveauflächen mit der Erde concentrische Kugeln. Zum Gleichgewicht der Atmosphäre würde dann erfordert, dass die Temperatur in gleicher Entfernung von der Erdoberfläche überall dieselbe wäre. Wegen der Anwesenheit der Sonne könnte jedoch dieses und daher auch das Gleichgewicht selbst nicht stattfinden.

131. Bisher wurde eine im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeit betrachtet, die entweder ruht oder mit einer allen ihren Punkten gemeinsamen Geschwindigkeit begabt ist. Wir nehmen jetzt an, sie drehe sich gleichförmig um eine feste Axe, und wir suchen die Bedingungen, unter welchen alle Punkte der Flüssigkeit ihre gegenseitige Lage bei dieser Drehung behalten. Dazu genügt es nach dem Princip von d'Alembert, dass in jedem Punkt Gleichgewicht stattfindet zwischen den gegebenen und solchen Kräften, welche gleich und entgegengesetzt sind denjenigen, die jedem freien Punkt die hier vorgeschriebene Bewegung ertheilen würden. Diese letzten sind die Centripetalkräfte.

Das Gleichgewicht muss mithin stattfinden zwischen den gegebenen und den Centrifugalkräften, wenn man diese als an den Molekeln selbst wirkend betrachtet. Wird die constante Winkelgeschwindigkeit durch $\omega$ bezeichnet, so sind die mit den

Axen der $x$ und $y$ parallelen Componenten der Centrifugalkraft $\omega^2 x$ und $\omega^2 y$, und die dritte Componente ist Null, wenn man die Drehaxe zur Axe der $z$ nimmt. Zur Bestimmung des Druckes hat man folglich:

$$(7) \quad dp = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2 xdx + \omega^2 ydy).$$

Die rechte Seite muss daher ein vollständiges Differential bilden.

Die Niveauflächen haben als gemeinsame Gleichungen:

$$Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2(xdx + ydy) = 0 \text{ und } \varphi = c,$$

wo $c$ eine willkürliche Constante und $\varphi$ diejenige Function von $x$, $y$, $z$ vorstellt, deren Differential die rechte Seite von (7) ist.

Wenn die freie Oberfläche der homogenen oder heterogenen Flüssigkeit einem constanten Druck unterliegt, so ist sie selbst eine Niveaufläche, deren Gleichung in der allgemeinen $\varphi = c$ steckt. Kennt man jetzt das Volumen der Flüssigkeit und die Gestalt des sie einschliessenden Gefässes, so vermag man den Werth der Constante $c$ für die Oberfläche zu bestimmen, wie wir an einigen Beispielen zeigen wollen.

132. Wir denken uns eine schwere homogene Flüssigkeit, auf deren freie Oberfläche der constante Druck $P$ wirkt, eingeschlossen in einen verticalen Cylinder, dessen Basis den Radius $a$ hat, und welchen sie im Ruhezustand bis zur Höhe $h$ anfüllt. Die Axe des Cylinders in entgegengesetzter Richtung mit der Schwere sei Axe der $z$, und der Cylinder rotire um dieselbe gleichförmig.

Man hat:

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = -g,$$

und die Gleichung (7) wird:

$$dp = -g\varrho dz + \varrho\omega^2(xdx + ydy).$$

Die allgemeine Gleichung der Niveauflächen ist:

$$-gdz + \omega^2(xdx + ydy) = 0,$$

also:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - c),$$

während $c$ eine willkürliche Constante.

Diese Gleichung stellt Umdrehungsparaboloide um die Axe der $z$ dar, deren Scheitelhöhe über der Grundebene $c$ beträgt.

Die freie Oberfläche, weil sie einem constanten Druck un-

terliegt, ist selbst eine Niveaufläche. Ihre Gleichung wird aus der vorstehenden erhalten, indem man für $c$ den erforderlichen besonderen Werth setzt. Wir finden diesen Werth dadurch, dass wir das von der zu suchenden Oberfläche begrenzte Flüssigkeitsvolumen berechnen und es gleichsetzen mit $\pi a^2 h$. Man erhält für das Volumen:

$$\pi a^2 z_1 - \frac{\pi g}{\omega^2}(z_1 - c)^2,$$

wo $z_1$ dem Punkte angehört, in welchem die erzeugende Parabel der Oberfläche den Cylinder trifft, so dass:

$$z_1 = c + \frac{a^2 \omega^2}{2g}.$$

Zur Bestimmung von $c$ dient daher die Gleichung:

$$\pi a^2 h = \pi a^2 c + \frac{\pi a^4 \omega^2}{4g},$$

und daraus ergiebt sich:

$$c = h - \frac{a^2 \omega^2}{4g}.$$

Demnach ist die Gleichung der freien Oberfläche der rotirenden Flüssigkeit:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z + \frac{a^2 \omega^2}{4g} - h\right).$$

Es bleibt nun noch der Druck in einem beliebigen Punkte zu ermitteln. Durch Integration von $dp$ findet man:

$$p = -g\varrho z + \varrho \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + c'.$$

Die Constante $c'$ bestimmt sich daraus, dass an der Oberfläche $p = P$. Man erhält:

$$P = \frac{a^2 \omega^2 \varrho}{4} - g\varrho h + c',$$

folglich:

$$c' = P - \frac{a^2 \omega^2 \varrho}{4} + g\varrho h,$$

und damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Man mag bemerken, dass bis die Flüssigkeit von dem Ruhezustand an in der Rotationsbewegung zu ihrer Gleichgewichtslage gelangt, der auf der Axe liegende Punkt ihrer freien Oberfläche sich um eben so viel gesenkt hat, als die in Berührung mit dem Cylinder stehenden Punkte gestiegen sind.

Die Scheitelhöhe $c$ des die Flüssigkeit begrenzenden Paraboloides beträgt $h - \frac{a^2\omega^2}{4g}$, und die Höhe derjenigen Punkte desselben, welche auf der Cylinderfläche liegen, ist:

$$c + \frac{a^2\omega^2}{2g} \text{ oder } h + \frac{a^2\omega^2}{4g};$$

so dass in der That beide sich von der anfänglichen Höhe $h$ um dieselbe Grösse $\frac{a^2\omega^2}{4g}$ unterscheiden.

133. Untersuchen wir jetzt den Fall, wo auf die Molekel der in einem Gefäss enthaltenen Flüssigkeit eine Kraft wirkt, welche nach einem festen Punkt hinstrebt und der Entfernung von diesem proportional ist.

Bezeichnet $\mu$ den Werth dieser Kraft in der Einheit der Entfernung, und nimmt man zum Ursprung den festen Punkt, gegen welchen sie hinstrebt, so sind ihre Componenten:

$$-\mu x, \; -\mu y, \; -\mu z.$$

Die Componenten der Centrifugalkraft sind, wenn $\omega$ die constante Winkelgeschwindigkeit vorstellt:

$$\omega^2 x, \; \omega^2 y.$$

Die Differentialgleichung der Niveauflächen ist:

$$(\omega^2 - \mu)(x\,dx + y\,dy) - \mu z\,dz = 0,$$

und ihre endliche Gleichung:

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu z^2}{\mu - \omega^2} = c,$$

während $c$ eine willkürliche Constante.

Die Niveauflächen sind Umdrehungsflächen zweiten Grades um die feste Axe, nämlich Ellipsoide, wenn $\omega^2 < \mu$; senkrechte Ebenen auf die feste Axe, wenn $\omega^2 = \mu$; Hyperboloide, wenn $\omega^2 > \mu$, und zwar mit zwei Flächenästen oder mit einem, je nachdem $c$ negativ oder positiv ist.

Den der freien Oberfläche angehörenden Werth der Constante bestimmt man in allen Fällen, indem man das zwischen dieser Niveaufläche und den Gefässwänden enthaltene Volumen berechnet und es dem Inhalt der gegebenen Flüssigkeitsmasse gleichsetzt.

Wenn $\omega^2 > \mu$, so bestimmt die Grösse dieses Inhalts nicht allein den Absolutwerth, sondern auch das Zeichen der Con-

stante und lässt dadurch erkennen, ob das Hyperboloid einen oder zwei Flächenäste hat.

Um dies allgemein einzusehen, wollen wir uns irgend einen Werth für $\omega > \sqrt{\mu}$ denken und dem $c$ einen negativen Werth beilegen. Das Hyperboloid hat dann zwei Flächenäste, und die freie Oberfläche der Flüssigkeit ist concav, da sonst der Druck auf dieselbe nicht gegen das Innere gerichtet sein würde. Lassen wir nun den Werth von $c$ bis zu Null wachsen, so bleibt der Asymptotenkegel immer derselbe, und während das Hyperboloid sich ihm unaufhörlich nähert, nimmt das durch es begrenzte Volumen ab und reducirt sich schliesslich auf das vom Kegel begrenzte Volumen. — Wenn wir dagegen von einem positiven Werthe des $c$ ausgehen, so hat das Hyperboloid nur einen Flächenast, und die freie Oberfläche ist convex. Mit abnehmendem $c$ wächst das Volumen der in dem Gefässe enthaltenen Flüssigkeit, indem die begrenzende Oberfläche sich dem vorigen Kegel nähert, ausserhalb dessen sie liegt. Bei $c = 0$ erreicht dieses Volumen seinen grössten Werth, welcher mit dem kleinsten für die Hyperboloide mit zwei Flächenästen zusammenfällt. Daraus folgt, dass es unter allen Hyperboloiden beider Arten nur ein einziges geben kann, welches einer gegebenen Flüssigkeitsmasse und einer Winkelgeschwindigkeit entspricht, die grösser ist als $\sqrt{\mu}$. Und es giebt allemal ein solches, wenn das Gefäss unbegrenzt ist.

## Permanenter Zustand einer flüssigen Masse, deren Molekel sich gegenseitig anziehen und einer gleichförmigen Rotationsbewegung unterworfen sind.

134. In den vorhergehenden Aufgaben war die auf jede Molekel wirkende Kraft bekannt und unabhängig von der Lage der anderen Molekel. Jetzt verhält sich die Sache anders, denn da jede Molekel durch alle anderen angezogen wird, so hängt die Resultante dieser Wirkungen nothwendig ab von der Gestalt der Flüssigkeit. Weil aber diese Gestalt unbekannt ist, so sind auch die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ unbekannt, und die Aufgabe wird viel schwieriger.

Bei einer homogenen Flüssigkeit, wenn die Anziehung

dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, kann man die bisherige Aufgabe nur für eine sehr kleine Winkelgeschwindigkeit lösen, welche der Flüssigkeit eine von der Kugel wenig verschiedene Form giebt. Es lässt sich aber stets zeigen, dass die Gestalt eines Rotationsellipsoids dem Gleichgewicht genügt, sofern die Winkelgeschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Jacobi ist weiter gegangen und hat nachgewiesen, dass die Flüssigkeit auch die Gestalt eines Ellipsoids mit drei ungleichen Axen annehmen kann. Wir können jedoch auf diese Untersuchung nicht eingehen und beschränken uns auf den Nachweis von dem Genügen des Rotationsellipsoids.

Es sei

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2 + y^2}{c^2(1 + \lambda^2)} = 1$$

die Gleichung eines Umdrehungsellipsoids um die Axe der $z$, welches an den Polen abgeplattet ist. Die Componenten $X$, $Y$, $Z$ der Anziehung, welche die Masse desselben auf einen Punkt $x$, $y$, $z$ seiner Oberfläche ausübt, sind:

$$X = \frac{2\pi\varrho f x}{\lambda^3}\left[\lambda - (1 + \lambda^2)\, arc\, tang\, \lambda\right],$$

$$Y = \frac{2\pi\varrho f y}{\lambda^3}\left[\lambda - (1 + \lambda^2)\, arc\, tang\, \lambda\right],$$

$$Z = \frac{4\pi\varrho f z}{\lambda^3}(1 + \lambda^2)\,(arc\, tang\, \lambda - \lambda),$$

wenn $\varrho$ die Dichte bezeichnet.

Die Resultante dieser drei Kräfte und der Centrifugalkraft, deren Componenten $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ sind, muss in dem Punkt $x$, $y$, $z$ senkrecht auf der Oberfläche des Ellipsoids stehen. Diese Bedingung liefert folgende Gleichung zwischen den Coordinaten der Oberfläche und ihren Differentialen, in welcher $\varepsilon$ statt $\frac{\omega^2}{4\pi\varrho f}$ steht:

$$\left[\lambda - (1 + \lambda^2)\, arc\, tang\, \lambda + 2\varepsilon\lambda^3\right](x\,dx + y\,dy)$$
$$+ 2\,(arc\, tang\, \lambda - \lambda)\,(1 + \lambda^2)\, z\,dz = 0.$$

Aus der Gleichung des Ellipsoids folgt aber zwischen denselben Coordinaten die Relation:

$$x\,dx + y\,dy + (1 + \lambda^2)\, z\,dz = 0.$$

Wenn man nun für $x$, $y$, $dx$, $dy$ irgend welche, aber in bei-

den Gleichungen dieselben Werthe nimmt, so müssen auch die Werthe von $z\,dz$ übereinstimmen. Daraus ergiebt sich folgende Bedingung, welche $\lambda$ bestimmt:

$$\lambda - (1 + \lambda^2)\, arc\,tang\,\lambda + 2\,\varepsilon\,\lambda^3 = 2\,(arc\,tang\,\lambda - \lambda).$$

Diese Gleichung hat die Null zur dreimaligen Wurzel, welche uns jedoch nicht angeht. Sie kann geschrieben werden:

$$(1) \qquad \frac{3\,\lambda + 2\,\varepsilon\,\lambda^3}{3 + \lambda^2} - arc\,tang\,\lambda = 0.$$

Eine jede ihrer reellen positiven Wurzeln bestimmt das Verhältniss der zwei Axen einer dem Gleichgewicht genügenden erzeugenden Ellipse, und ihre Grösse findet sich aus dem bekannten Volumen der Flüssigkeit. Somit kommt Alles hinaus auf die Auffindung der Anzahl und des Werthes der positiven Wurzeln von (1). Sie sind die Abscissen der Durchschnittspunkte der positiven $x$-Axe mit der Curve, deren Gleichung ist:

$$(2) \qquad y = \frac{3\,x + 2\,\varepsilon\,x^3}{3 + x^2} - arc\,tang\,x.$$

Durch Differenziiren derselben findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x^2\,[\varepsilon\,x^4 + 2\,(5\,\varepsilon - 1)\,x^2 + 9\,\varepsilon]}{(1 + x^2)\,(3 + x^2)^2}.$$

Dieser Ausdruck ist Null für $x = 0$, und für sehr kleine Werthe von $x$ wird er positiv; so dass die Curve die Axe der $x$ im Ursprung tangirt und von da anfänglich über die positive Seite dieser Axe emporsteigt.

Suchen wir die Punkte, in welchen die Tangente an diese Curve parallel läuft mit der Axe der $x$. Ihre Abscissen werden durch die Gleichung gegeben:

$$(3) \qquad \varepsilon\,x^4 + 2\,(5\,\varepsilon - 1)\,x^2 + 9\,\varepsilon = 0.$$

Hätte diese Gleichung keine reellen Wurzeln, so würde die Curve sich fortwährend von der Axe der $x$ entfernen, und dann könnte auch die Gleichung (1) keine reellen Wurzeln haben. Nun kann offenbar ein positiver Werth für $x^2$ nur dann der Gleichung (3) genügen, wenn $5\,\varepsilon - 1 < 0$ oder $\varepsilon < \frac{1}{5}$. Untersucht man aber die Bedingung, unter welcher sich für $x^2$ zwei reelle Werthe aus (3) ergeben, so zeigt sich, dass $\varepsilon < \frac{1}{8}$ sein muss. Die Gleichung (3) hat höchstens zwei positive Wurzeln und diese immer, wenn $\varepsilon < \frac{1}{8}$.

Dies reicht jedoch nicht dazu hin, dass die Gleichung (1)

reelle Wurzeln habe, vielmehr wird erfordert, dass der grösste positive Wurzelwerth von (3), wenn man ihn in (2) setzt, dem $y$ einen negativen Werth ertheile. Denn in diesem Falle schneidet die Curve die Axe der $x$ einmal, bevor sie diesen Punkt erreicht, und nachher noch einmal, weil die Ordinate schliesslich positiv bleibt und bis ins Unendliche wächst. Mehr als zwei positive Wurzeln hat die Gleichung (1) in keinem Falle. Diese werden einander gleich, wenn der Minimalwerth von $y$ Null ist; und ist derselbe positiv, so existiren sie gar nicht.

Daraus sieht man, dass die vorliegende Aufgabe nur dann möglich ist, wenn der für $\varepsilon < \frac{1}{8}$ sich ergebende grösste Wurzelwerth der Gleichung (3), in (2) gesetzt, $y \overset{=}{<} 0$ macht. Dies ergiebt, indem man für $\varepsilon$ den Werth aus (3) substituirt, die Bedingung:

$7x^4 + 30x^2 + 27 = (7x^2+9)x^2 + (7x^2+9)3$

$$arc\,tang\ x - \frac{(7x^2+9)x}{(x^2+1)(x^2+9)} \overset{=}{>} 0.$$

Die erste Seite dieser Ungleichheit ist Null für $x = 0$. Ihre Derivirte ist dann auch Null und wird darauf mit wachsendem $x$ negativ; einzig für $x = \sqrt{3}$ wird sie wieder Null und bleibt von da an beständig positiv. Die erste Seite der Ungleichung ist also anfänglich negativ, wird Null einzig für einen gewissen Werth von $x$, der grösser als $\sqrt{3}$, und darauf bleibt sie beständig positiv. Der Ungleichung wird daher durch jeden Werth von $x$ genügt, der grösser ist als die positive Wurzel der Gleichung:

$$arc\,tang\ x - \frac{(7x^2+9)x}{(x^2+1)(x^2+9)} = 0.$$

Als genäherter Werth dieser Wurzel findet sich:

$$x = 2{,}5293.$$

Der entsprechende Werth von $\varepsilon$, den die Gleichung (3) dazu liefert, ist:

$$\varepsilon = 0{,}1123.$$

Für diesen Werth von $\varepsilon$ ist der vorstehende von $x$ eine Wurzel der Gleichung (3) und zwar die grösste, wie man sich leicht überzeugt, oder auch wie sich wegen des Laufs der durch (2) vorgestellten Curve von selbst versteht. Da dieser Werth $y = 0$ macht für dieses bestimmte $\varepsilon$, so ist er auch eine Wurzel der Gleichung (1), oder man erhält für $\varepsilon = 0{,}1123$ die Auflösung $\lambda = 2{,}5293$.

Nimmt man für $x$ irgend einen Werth, der grösser ist als 2,5293, so gehören zu ihm zwei positive Werthe von $\lambda$, welche die Gleichung (1) erfüllen, und zwischen denen der Werth von $x$ liegt. Man sieht, dass der grösste Werth für $x^2$ aus (3) sich in entgegengesetztem Sinne mit $\varepsilon$ ändert. Die Aufgabe hat daher zwei Auflösungen, wenn

$$x > 2{,}5293 \text{ und } \varepsilon < 0{,}1123;$$

sie hat nur eine einzige, wenn $\varepsilon = 0{,}1123$, nämlich $\lambda = 2{,}5293$. Bei unendlich wachsendem $x$ nähert sich $\varepsilon$ der Null. Indem wir für $\varepsilon$ seinen grössten Werth setzen, lässt die Gleichung

$$\frac{\omega^2}{4\pi\varrho f} = 0{,}1123$$

die grösste Winkelgeschwindigkeit erkennen, welche noch mit der Gestalt eines Umdrehungsellipsoids vereinbar ist. Bei diesem Grenzwerthe des $\omega$ ist nur eine Figur möglich. Lässt man $\omega$ von da an bis zu Null abnehmen, so wächst der eine Werth von $\lambda$ bis ins Unendliche, und der andere nähert sich der Null. Das dem ersten entsprechende Ellipsoid nähert sich also einer Ebene und das andere einer Kugel, so dass man für $\omega = 0$ nur die Kugel als Auflösung erhält.

## Gleichgewicht der schweren Flüssigkeiten.

135. Wenn die Schwere die einzige Kraft ist, welche auf die Molekel einer homogenen Flüssigkeit wirkt, so hat man:

$$dp = -\varrho g dz, \quad p = -\varrho g z + c;$$

dabei ist die $z$-Axe der Schwere entgegengesetzt. Bezeichnet $P$ den Druck, welcher $z = h$ entspricht, so wird:

$$p = \varrho g (h - z) + P.$$

Die Niveauflächen sind horizontale Ebenen, und der Druck hängt nur von der Höhe ab.

Ist die Dichte $\varrho$ auf stetige oder unstetige Weise variabel, so kann sie nur eine Function von $z$ sein, und man erhält:

$$p = -g \int \varrho dz.$$

136. Als wir die Zunahme des Drucks beim Uebergang von einem Punkt der Flüssigkeit nach einem anderen berechneten, dachten wir uns diese Flüssigkeit zerlegt in stetig zusammenhängende Parallelepipede und untersuchten, um wie

viel der Druck zunahm beim Uebergang von einer Grenzfläche zur parallelen. Aber es ist klar, dass diese Schlussweise und ihre Folgerungen nicht mehr gelten, wenn in der Flüssigkeit Scheidewände vorhanden sind, welche die Communication der Theile aufheben. Und wenn diese Wände die Communication nicht ganz aufheben, sondern nur modificiren, so ist zu untersuchen, in wiefern die vorhergehende Theorie dadurch abgeändert wird.

Wenn allein die Schwere auf die Flüssigkeit wirkt, so erleidet der Druck keinen Zuwachs beim Uebergang von einer verticalen Parallelepipedfläche zur parallelen, vorausgesetzt, dass das Parallelepiped aus der Flüssigkeit ohne Unterbrechung besteht. Man kann also nur dann behaupten, dass in zwei auf derselben Horizontalebene liegenden Punkten gleicher Druck stattfinde, wenn man von dem einen Punkt zum anderen durch die nicht unterbrochene Flüssigkeit übergehen kann, indem man auf derselben Horizontalebene bleibt.

137. Betrachten wir jetzt das Gleichgewicht von verschiedenen schweren Flüssigkeiten, die sich in zwei durch einen horizontalen Canal verbundenen Gefässen befinden. Durch die tiefsten Punkte des Canals legen wir eine horizontale Ebene; die Flüssigkeiten unterhalb dieser Ebene können in beiden Gefässen sehr verschiedenen Drucken auf derselben Horizontalebene unterliegen. Führen wir ebenso eine Horizontalebene durch die höchsten Punkte des Canals, so wird der Druck in allen Punkten irgend einer mittleren Horizontalebene gleich sein; für höher liegende Ebenen kann er sich wieder in beiden Gefässen unterscheiden. Aber in jedem von beiden Gefässen sind die über dem Canal liegenden Flüssigkeitstheile an die Gesetze der Nr. 135 gebunden; in Bezug auf einander brauchen sie dagegen nur der Bedingung zu genügen, dass der Druck, welchen sie auf die durch die höchsten Punkte des Canals gehende Horizontalebene hervorbringen, gleich sei. Ebenso wirkt auf die unterhalb des Canals liegenden Flüssigkeitstheile an ihrer Oberfläche ein gleicher Druck, und dieselben befolgen in jedem Gefässe für sich die Gleichgewichtsgesetze der Nr. 135.

Diese Betrachtungen finden Anwendung auf die Theorie der Heber, Barometer, Wasserwagen, der hydraulischen Presse, etc.

138. Druck auf die Wände. — Wir betrachten zuerst eine ebene Wand und zerlegen dieselbe in unendlich kleine Elemente $d\lambda$. Der Abstand eines solchen Elements von der äusseren Oberfläche der Flüssigkeit sei $z$, und die Flüssigkeit sei homogen. Der Druck, welchen die Flüssigkeit auf das Element $d\lambda$ ausübt unabhängig von dem an ihrer Oberfläche stattfindenden äusseren Druck, beträgt $g\varrho z d\lambda$, wie auch das Element gerichtet sein mag. Die Summe aller dieser Drucke ist:

$$g\varrho\Sigma z d\lambda \text{ oder } g\varrho A z_1,$$

wenn $A$ den Flächeninhalt der Wand bezeichnet und $z_1$ die Entfernung ihres Schwerpunkts von der Oberfläche der Flüssigkeit. Daraus folgt, dass der Druck sich nicht ändert, welche Lage die Wand auch annehmen mag, wenn nur ihr Schwerpunkt fest bleibt.

Dieser Druck ist vollkommen unabhängig von der Form des Gefässes, und man kann auf den Boden desselben einen sehr beträchtlichen Druck ausüben mittelst eines sehr geringen Gewichts Flüssigkeit, indem man den Abstand des Bodens von der Oberfläche sehr gross macht.

Der Angriffspunkt der Resultate aller auf eine ebene Wand wirkenden Druckkräfte heisst Mittelpunkt des Drucks und wird nach der gewöhnlichen Theorie paralleler Kräfte bestimmt. Wenn die Wand nicht horizontal ist, so befindet er sich tiefer als der Schwerpunkt ihrer Fläche.

Um dies einzusehen, wollen wir durch den Schwerpunkt in der Ebene der Wand eine horizontale Linie führen. Diese theilt die Wandfläche in zwei Theile, welche in Bezug auf sie gleiche Momente haben. Dagegen geben die auf den unteren Theil wirkenden Druckkräfte in Bezug auf die Horizontale ein grösseres mittleres Moment als die auf den oberen Theil wirkenden. Denn denken wir uns die ganze Wandfläche in gleiche Elemente zertheilt, so ist der Druck auf irgend ein Element des unteren Theils grösser als die grössten unter den Drucken auf die Elemente des oberen Theils. Nähme man nun diese letzten alle gleich dem grössten unter ihnen, der in den Punkten stattfindet, welche auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt liegen, und nähme man alle Drucke des unteren Theils gleich dem kleinsten von ihnen, der in den Punkten derselben Horizontalen stattfindet, so würden die Momentensummen für

beide Theile gleich sein. Daher ist wirklich die Momentensumme des unteren Theils grösser als die des oberen; und darum liegt der Mittelpunkt der auf die Wand wirkenden Druckkräfte unterhalb der durch ihren Schwerpunkt gehenden Horizontalen, was zu zeigen war.

Um die Coordinaten des Druckmittelpunkts zu bestimmen, muss man die Momentensummen aller auf die Elemente der Wand wirkenden Druckkräfte in Bezug auf die drei Coordinatenebenen berechnen und sie theilen durch die Summe der Druckkräfte.

Betrachten wir zuerst die Momente in Bezug auf die Ebene der $x,y$. Es sei $d\lambda$ ein unendlich kleines Element der Wand; der Druck auf dasselbe beträgt $g\varrho z d\lambda$ und sein Moment $g\varrho z^2 d\lambda$. Bezeichnet man die Coordinaten des Druckmittelpunkts durch $x'$, $y'$, $z'$, durch $x_1$, $y_1$, $z_1$ diejenigen des Schwerpunkts, durch $A$ den Flächeninhalt der Wand, so hat man:

$$\Sigma z^2 d\lambda = z' \Sigma z d\lambda = A z' z_1,$$

wo die beiden Integrale über alle Elemente der Wand zu erstrecken sind.

Für die Momente in Bezug auf die zwei anderen Coordinatenebenen ergeben sich auf dieselbe Weise:

$$\Sigma y z d\lambda = A y' z_1, \quad \Sigma x z d\lambda = A x' z_1.$$

Für die Coordinaten des Druckmittelpunkts hat man daher:

$$x' = \frac{\Sigma x z d\lambda}{A z_1}, \quad y' = \frac{\Sigma y z d\lambda}{A z_1}, \quad z' = \frac{\Sigma z^2 d\lambda}{A z_1}.$$

139. Als Beispiel betrachten wir den Fall eines Trapezes mit horizontalen Basen. Man sieht sofort, dass der Druckmittelpunkt auf derjenigen Geraden liegt, welche die Mitten beider Basen verbindet. Man braucht daher nur eine seiner drei Coordinaten zu kennen, z. B. $z'$. Theilen wir zu dem Ende das Trapez in unendlich kleine Streifen durch Parallelen mit den Basen; die Summe $\Sigma z^2 d\lambda$ kann dadurch erhalten werden, dass man die Fläche eines jeden Streifens mit dem entsprechenden $z^2$ multiplicirt und alle diese Producte summirt. Es sei $a$ die obere Basis des Trapezes, $b$ die untere, $h$ seine Höhe, $u$ die Entfernung eines beliebigen Streifens von der oberen Basis, $c$ die Entfernung dieser Basis von dem Niveau der Flüssigkeit, $\gamma$ der Winkel, welchen die Ebene des Trapezes mit der Hori-

zontalebene einschliesst. Die Fläche eines beliebigen Streifens beträgt:

$$\left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du,$$

und man hat:

$$z = c + u \sin \gamma.$$

Zu berechnen ist daher:

$$\int (c + u \sin \gamma)^2 \left(a + \frac{b-a}{h} u\right) du,$$

und das Resultat ist zu theilen durch $A z_1$ oder durch:

$$\frac{h(a+b)}{2} (c + u_1 \sin \gamma);$$

dann erhält man

$$z' \text{ oder } c + u' \sin \gamma.$$

Der Werth von $u'$ bestimmt die Lage des Druckmittelpunkts bequemer als $z'$. Die Ausführung der angezeigten Rechnung ergiebt:

$$u' = \frac{h^2 (a + 3b) \sin \gamma + 2hc(a + 2b)}{2h(a + 2b) \sin \gamma + 6c(a + b)}.$$

Ist $c = 0$, d. h. befindet sich die obere Basis im Niveau der Flüssigkeit, so wird:

$$u' = \frac{h(a + 3b)}{2(a + 2b)}.$$

In diesem Falle hängt die Lage des Druckmittelpunkts nicht ab von der Neigung der Wand.

Hat man noch entweder $a = 0$ oder $b = 0$, so wird im ersten Falle $u' = \frac{3h}{4}$ und im zweiten $u' = \frac{h}{2}$. Das Trapez ist jetzt ein Dreieck; im ersten Falle liegt dessen Spitze in der Oberfläche des Wassers und im zweiten seine Grundlinie.

Das Trapez wird ein Parallelogramm, wenn $a = b$, und für $c = 0$ findet man:

$$u' = \frac{2h}{3}.$$

140. Die Druckkräfte, welche auf eine krumme Wand ausgeübt werden, sind nicht parallel und lassen sich daher nicht immer auf eine einzige Kraft reduciren. Da sie aber ein starres System angreifen, so kann man sie allemal auf

zwei Kräfte zurückführen. Kennt man die Grössen aller Elementardrucke und die Coordinaten ihrer Angriffspunkte, so kann man dieselben vereinigen in drei nach den Coordinatenaxen gerichtete Kräfte und drei Paare, deren Axen in diesen Richtungen liegen. Dabei sieht man, ob es eine Resultante giebt, und in diesem Falle bestimmt man sie leicht. Ausserdem erhält man eine Kraft und ein Paar, statt welcher man zwei Kräfte setzen kann.

141. Wir wollen insbesondere den Druck betrachten, welcher auf die Oberfläche eines Körpers ausgeübt wird, der ganz oder theilweise in eine schwere im Gleichgewicht stehende Flüssigkeit eingetaucht ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass die horizontalen Componenten der Druckkräfte einander aufheben, und dass nur die verticalen Componenten übrig bleiben, welche immer eine Resultante haben.

In der That, fassen wir den Theil der eingetauchten Oberfläche ins Auge, welcher enthalten ist zwischen zwei unendlich nahen Horizontalebenen, und beschäftigen wir uns zunächst mit den Druckcomponenten, welche auf ihn parallel mit der Axe der $x$ wirken. Zerlegen wir diesen Theil der Oberfläche in Elemente durch unendlich nahe Ebenen, welche parallel sind mit der Ebene der $x, z$; je zwei dieser Elemente projiciren sich in demselben Rechteck $dy\,dz$ auf die Ebene der $y, z$. Ist nun $p$ der Druck, welcher dem Abstand der betrachteten eingetauchten Scheibe von der Oberfläche der Flüssigkeit entspricht, und sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Normale in irgend einem Punkt der Oberfläche dieser Scheibe mit den Axen macht, so werden die Componenten des Drucks $p\omega$, welcher auf ein Oberflächenelement $\omega$ der Scheibe wirkt, ausgedrückt durch:

$$p\,\omega \cos\alpha,\ p\,\omega \cos\beta,\ p\,\omega \cos\gamma$$

oder durch:

$$p\,dy\,dz,\ p\,dx\,dz,\ p\,dx\,dy.$$

Auf das zweite Oberflächenelement der Scheibe, dessen Projection das nämliche Rechteck $dy\,dz$ bildet, wirkt parallel mit der Axe der $x$ die gleiche, aber entgegengesetzte Druckcomponente $p\,dy\,dz$. Diese beiden Componenten zerstören sich; und da dasselbe gilt für je zwei andere Oberflächenelemente der Scheibe, welche einerlei Projection auf die Ebene der $y, z$

haben, so sieht man, dass die mit der Axe der $x$ parallelen Druckcomponenten auf die Oberfläche der Scheibe und folglich auf die ganze eingetauchte Oberfläche sich aufheben.

Ebenso heben sich die zur Axe der $y$ parallelen Druckcomponenten auf; was man einsieht, indem man die eingetauchte Oberfläche in Elemente zerlegt, von denen je zwei das nämliche Rechteck $dxdz$ zur Projection haben. Es bleiben also nur die verticalen Druckcomponenten übrig, und diese sind in der ganzen Ausdehnung der eingetauchten Oberfläche zusammenzusetzen.

Zerlegen wir jetzt diese Oberfläche in Elemente durch unendlich nahe Ebenen, von welchen die einen parallel sind mit der Ebene der $x,z$ und die anderen mit der Ebene der $y,z$, so werden je zwei Elemente sich in dem nämlichen Rechteck $dxdy$ auf die Ebene der $x,y$ projiciren. Die verticalen Druckcomponenten auf zwei solche, durch denselben Faden ausgeschiedene Elemente haben entgegengesetzte Richtung und setzen sich zusammen in eine von unten nach oben gerichtete Kraft, die gleich ist dem Gewicht der Flüssigkeit, welche das Volumen jenes eingetauchten Theils vom Körper einnehmen würde, der enthalten ist in dem über dem Rechteck $dxdy$ senkrechten Faden, und welche Flüssigkeit man sich, wenn die den eingetauchten Körper umgebende heterogen ist, in gleicher Höhe von gleicher Dichte mit dieser zu denken hat.

Es folgt hieraus, dass der Körper in entgegengesetzter Richtung mit der Schwere mit gleicher Kraft getrieben wird, wie die Flüssigkeit, deren Stelle er einnimmt, in der Richtung der Schwere getrieben würde. Die Druckkräfte, welche der Körper erfährt, haben daher eine Resultante gleich dem Gewicht seines eingetauchten Volumens, wenn man sich dieses dergestalt von der umgebenden Flüssigkeit erfüllt denkt, dass innerhalb desselben in gleicher Höhe dieselbe Dichte wie aussen stattfindet; Angriffspunkt dieser Resultante ist der Schwerpunkt des so erfüllt gedachten eingetauchten Volumens. Auf den Körper wirkt ausserdem noch sein Gewicht in seinem eigenen Schwerpunkt; er kann daher nur im Gleichgewicht sein, wenn beide Gewichte gleich sind und beide Schwerpunkte auf derselben Verticalen liegen.

Dieses schon von Archimedes entdeckte Gesetz der

Hydrostatik, welches gleichmässig für tropfbare und gasförmige Flüssigkeiten gilt, wird gewöhnlich so ausgesprochen: Ein Körper, welcher in eine im Gleichgewicht befindliche Flüssigkeit eingetaucht ist, verliert an seinem Gewicht dasjenige der verdrängten Flüssigkeit.

142. In dem für dieses Gesetz gegebenen Beweise haben wir die Elementardrucke auf die eingetauchte Oberfläche betrachtet. Dies ist jedoch nicht nöthig, denn man kann unmittelbar ihre Gesammtwirkung bestimmen. Der Körper erleidet offenbar dieselben Druckkräfte wie diejenige Flüssigkeit, welche sich an der Stelle seines eingetauchten Theils befinden könnte, und die man als starr betrachten darf ohne das Gleichgewicht zu stören. Da nun diese starr gedachte Flüssigkeit in Ruhe bleibt, so muss der Druck, den sie erfährt, genau ihre Schwere aufheben, und folglich müssen alle auf sie wirkenden Druckkräfte sich in eine verticale Resultante vereinigen, die ihrem Gewicht gleich ist und durch ihren Schwerpunkt geht. Jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper befindet sich folglich unter dem Einfluss zweier entgegengesetzten Verticalkräfte. Diese sind das den Schwerpunkt des Körpers angreifende Gewicht desselben und das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, welches deren Schwerpunkt angreift.

Um das Gewicht eines Körpers zu kennen, muss man denselben im leeren Raum wägen. Zu seinem Gewicht in der Luft oder in irgend einer anderen Flüssigkeit ist das Gewicht eines gleichen Volumens dieser Flüssigkeit zu addiren.

Auf das Vorstehende gründet sich die Theorie der Aräometer und der hydrostatischen Wage.

### Gleichgewicht schwimmender Körper.

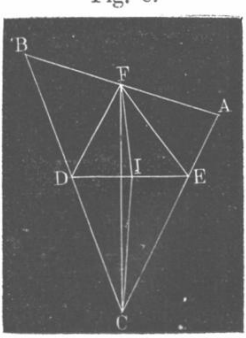
143. Damit ein fester Körper, welcher zum Theil in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, sich im Gleichgewicht befinde, so muss, wie wir gesehen haben, sein Gewicht gleich sein dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, und sein Schwerpunkt muss auf einer Verticalen mit dem Schwerpunkt dieser Flüssigkeit liegen. Ist sowohl die Flüssigkeit homogen als der an ihrer Oberfläche schwimmende Körper, so

fällt der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit mit dem des eingetauchten Theils vom festen Körper zusammen. Um daher die Lagen zu bestimmen, in welchen ein homogener Körper an der Oberfläche einer homogenen Flüssigkeit im Gleichgewicht bleiben kann, muss man ihn durch eine Ebene so schneiden, dass der Rauminhalt eines seiner beiden Theile sich zum Rauminhalt des ganzen Körpers verhält wie dessen Dichte zur Dichte der Flüssigkeit, und dass zugleich die Schwerpunkte dieses Theils und des ganzen Körpers auf derselben zur Schnittebene senkrechten Geraden liegen. Wenn dann dieser Theil eingetaucht wird, so dass die Schnittebene mit der Oberfläche der Flüssigkeit zusammenfällt, so findet Gleichgewicht statt.

Als Beispiel nehmen wir ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Kanten horizontal liegen sollen. In der Gleichgewichtslage hat es entweder zwei dieser Kanten oder nur eine unter dem Niveau der Flüssigkeit. Den letzten Fall untersuchen wir zuerst. Die Länge des Prismas ist offenbar gleichgültig für die gesuchte Lage, und jede zu den Kanten parallele Ebene theilt seinen Inhalt in gleichem Verhältniss mit der Grundfläche. Wir können uns deshalb auf Betrachtung dieser Grundfläche beschränken.

Das Dreieck $ABC$ stelle sie vor; $a$, $b$, $c$ seien respective seine drei Seiten, $C$ die eingetauchte Spitze, $DE$ der Durchschnitt mit der Oberfläche der Flüssigkeit, $F$ und $I$ die Mittelpunkte von $AB$ und $DE$, $r$ das Verhältniss der Dichte des Körpers zur Dichte der Flüssigkeit. Setzen wir:

Fig. 8.




$$CF = f, \quad CD = x, \quad CE = y$$

und bezeichnen die Winkel $ACF$, $BCF$ durch $\alpha$, $\beta$.

Die Aufgabe besteht darin, die Gerade $DE$ so zu ziehen, dass das Verhältniss der Dreiecke $CDE$, $CAB$ gleich $r$ wird, und dass die Gerade $FI$, welche parallel läuft mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Dreiecke, senkrecht steht auf $DE$. Diese letzte Bedingung kommt auf die Gleichheit von $DF$, $FE$ hinaus.

Die zwei Gleichungen zur Bestimmung von $x, y$ sind daher

(1) $$xy = rab, \quad x^2 - 2fx\cos\alpha = y^2 - 2fy\cos\beta.$$

Aus ihnen folgt durch Eliminiren von $y$:

(2) $$x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2rabfx\cos\beta - r^2a^2b^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat nothwendig zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, welche letztere jedoch keine Auflösung unserer Aufgabe bieten kann. Wenn noch die beiden anderen Wurzeln reell sind, so müssen sie der Zeichenregel von Descartes zufolge positiv sein. Es sind daher höchstens drei Gleichgewichtslagen bei eingetauchter Spitze $C$ möglich; und zwar tritt dieser Fall ein, wenn die drei reellen Wurzelwerthe des $x$ kleiner sind als $a$ und für $y$ kleinere Werthe ergeben als $b$.

Werden die zwei Spitzen $A$ und $B$ eingetaucht, so muss das Verhältniss der Flächen $BDEA$ und $ABC$ gleich $r$ sein, dasjenige der Dreiecke $CDE$, $ABC$ also gleich $1 - r$. Da sich übrigens die Schwerpunkte dieser Dreiecke mit dem Schwerpunkt von $BDEA$ in gerader Linie befinden, so braucht man nur $1 - r$ statt $r$ in den Gleichungen (1) zu schreiben, und die Gleichung zur Bestimmung der $x$ für den neuen Fall wird:

$$x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2(1-r)abfx\cos\beta - (1-r)^2a^2b^2 = 0.$$

144. Ist das Dreieck $ABC$ gleichschenklig, so hat man:

$$b = a, \quad \cos\beta = \cos\alpha = \frac{f}{a}, \quad f^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

und die Gleichungen (1) werden:

$$xy = ra^2, \quad x^2 - y^2 - \frac{2f^2}{a}(x - y) = 0.$$

Als erste Auflösung ergiebt sich:

$$x = y = a\sqrt{r}.$$

Lassen wir jetzt den Factor $x - y$ in der zweiten Gleichung weg, so bleiben die Auflösungen der beiden folgenden zu finden:

$$xy = ra^2, \quad x + y = \frac{2f^2}{a}.$$

Demnach hat sowohl $x$ als $y$ die beiden Wurzelwerthe nachstehender Gleichung zweiten Grades, aber während $x$ einen hat $y$ den anderen:

(3) $$x^2 - \frac{2f^2}{a}x + ra^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - \frac{4a^2 - c^2}{2a}x + ra^2 = 0.$$

Ihre zwei Wurzeln sind imaginär, wenn

$$r > \frac{f^4}{a^4} \text{ oder } r > \left(1 - \frac{c^2}{4\,a^2}\right)^2.$$

Sie werden einander gleich und positiv, wenn

$$r = \frac{f^4}{a^4} = \left(1 - \frac{c^2}{4\,a^2}\right)^2.$$

Man hat dann $x = \frac{f^2}{a}$, und da $f^4 = a^4 r$, so folgt $f^2 = a^2 \sqrt{r}$, also $x = y = a\sqrt{r}$; welche Auflösung, wie es sein muss, mit der ersten zusammenfällt.

Die zwei Wurzeln der Gleichung (3) sind ungleich und positiv, wenn

$$r < \frac{f^4}{a^4} \text{ oder } r < \left(1 - \frac{c^2}{4\,a^2}\right)^2.$$

Sie ergeben dann Gleichgewichtslagen, wenn sie beide kleiner sind als $a$.

Werden zwei Spitzen $A, B$ eingetaucht, so hat man $1 - r$ statt $r$ zu setzen. Als erste Auflösung erhält man:

$$x = y = a\sqrt{1 - r}.$$

Die Gleichung, welche die weiteren Auflösungen liefert, ist:

$$(4) \qquad x^2 - \frac{4\,a^2 - c^2}{2\,a}\,x + (1 - r)\,a^2 = 0;$$

für sie wäre eine der vorigen ähnliche Discussion zu führen.

Ist das Dreieck gleichseitig, also noch $c = a$, so erhält man wieder als erste Auflösung:

$$x = y = a\sqrt{r}$$

oder:

$$x = y = a\sqrt{1 - r},$$

je nachdem eine Spitze $C$ oder zwei Spitzen $A$ und $B$ eingetaucht sind.

Die Gleichungen (3) und (4), welche respective die weiteren Auflösungen für diese beiden Fälle liefern, werden jetzt:

$$x^2 - \frac{3\,a}{2}\,x + r\,a^2 = 0,$$

$$x^2 - \frac{3\,a}{2}\,x + (1 - r)\,a^2 = 0.$$

Die erste von ihnen hat als Wurzeln:

$$x = \frac{3\,a}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{9 - 16\,r}.$$

Beide sind reell, wenn $r < \frac{9}{16}$, und dazu kleiner als $a$, wenn $\sqrt{9 - 16r} < 1$ oder $r > \frac{1}{2}$. Man hat also bei eingetauchter Spitze $C$ drei Gleichgewichtslagen, sofern $r$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ liegt.

Die andere Gleichung hat zu Wurzeln:

$$x = \frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{16r - 7}.$$

Diese sind reell, wenn $r > \frac{7}{16}$, und dabei kleiner als $a$, wenn $\sqrt{16r - 7} < 1$ oder $r < \frac{1}{2}$. Demnach erhält man für den Fall zweier eingetauchten Spitzen $A$, $B$ drei Gleichgewichtslagen, sofern $r$ zwischen $\frac{1}{2} - \frac{1}{16}$ und $\frac{1}{2}$ liegt. Diese Bedingung und die vorige schliessen jedoch einander aus.

145. Homogene und solche Prismen oder Cylinder, welche aus homogenen, auf den Kanten senkrechten Schichten von verschiedener Dichte bestehen, können auch bei verticaler Stellung ihrer Kanten im Gleichgewicht sein. Die Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit und des festen Körpers liegen in diesem Falle von selbst auf einer Verticalen; es genügt daher für das Gleichgewicht, dass die Gewichte beider gleich seien.

Soll ein heterogener fester Körper, den man in eine schwere, aus homogenen horizontalen Schichten bestehende Flüssigkeit eintaucht, sich im Gleichgewicht befinden, so muss sein Schwerpunkt auf derselben Verticalen mit dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegen, und die Bedingung der Gleichheit der Gewichte beider ergiebt, dass sich das Volumen des eingetauchten Theils zum Volumen des ganzen Körpers so verhalten muss wie die mittlere Dichte des letzten zur mittleren Dichte der verdrängten Flüssigkeit.

Bei einem Umdrehungskörper mit vertical stehender Axe, welcher von homogenen, auf diese Axe senkrechten Schichten gebildet wird, liegt der Schwerpunkt nothwendig in der Axe, sowie der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit. Man braucht daher nur eine Ebene senkrecht auf diese Axe so zu führen, dass das Volumen des einzutauchenden Theils sich zum Volumen des ganzen Körpers verhält wie die mittlere Dichte des letzten zu jener der verdrängten Flüssigkeit.

## Stabilität des Gleichgewichts schwimmender Körper.

146. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist stabil oder labil, je nachdem er in seine Gleichgewichtslage zurückzukehren oder sich von ihr weiter zu entfernen strebt, wenn man ihn noch so wenig aus derselben verrückt hat. Ist der Körper ein Prisma mit horizontalen Kanten, so sieht man leicht, dass im Allgemeinen die stabilen und labilen Gleichgewichtslagen abwechselnd auf einander folgen. Entfernt man nämlich das Prisma auf stetige Weise aus einer stabilen Gleichgewichtslage um es in eine andere solche zu bringen, so wird es bis zu einem gewissen Punkt in die erste zurückkehren wollen; darüber hinaus wird es suchen sich von ihr noch mehr zu entfernen und der zweiten Lage zu nähern. Es giebt demnach eine solche Zwischenlage, dass wenn man das Prisma nach der einen oder anderen Seite noch so wenig aus derselben verrückt, es das Bestreben hat sich immer mehr von ihr zu entfernen; und diese ist eine Lage des labilen Gleichgewichts. Zwischen zwei stabile Gleichgewichtslagen fällt daher eine labile, und umgekehrt.

147. Durchschneidet man einen Körper mittelst einer Ebene und legt durch den Schwerpunkt der ebenen Durchschnittsfläche irgend eine andere Ebene, welche einen unendlich kleinen Winkel mit der ersten macht, so sind die auf derselben Seite beider Ebenen liegenden Volumina des Körpers gleich, nämlich ihre Differenz ist unendlich klein gegen das zwischen diesen Ebenen enthaltene Volumen.

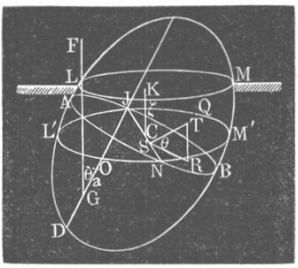
Mit Vernachlässigung von Grössen, welche gegen dieses Volumen unendlich klein sind, kann man die Oberfläche des Körpers in der Nähe beider Schnitte als eine Cylinderfläche betrachten. Wir wollen nun von den zu vergleichenden Körperinhalten zwei unendlich flache Cylinder mit einer gemeinschaftlichen Basis absondern, deren Mantel die Oberfläche des Körpers bildet, und deren nicht gemeinschaftliche Basen die zwei, den unendlich kleinen Winkel einschliessenden Ebenen sind. Diese zwei Basen haben denselben Schwerpunkt, und folglich haben die beiden Cylinder gleichen Inhalt, denn dieser ist das Product der gemeinsamen Basis in den Abstand

jenes Schwerpunktes von derselben. Daher sind auch die beiden Körpervolumina gleich, sowie die zwischen den beiden Durchschnittsebenen enthaltenen zwei Volumina.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

148. Ein Körper, der zum Theil in eine homogene Flüssigkeit eingetaucht ist, befinde sich im Gleichgewicht. Sein Schwerpunkt liegt auf derselben Verticalen mit dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, und die Gewichte beider sind gleich. Bringen wir diesen Körper auf irgend eine Weise sehr wenig aus seiner Gleichgewichtslage, und ertheilen wir allen seinen Punkten sehr kleine Geschwindigkeiten. Wenn dann die Entfernung von der Gleichgewichtslage immer sehr klein bleibt, so war das Gleichgewicht stabil, im anderen Falle labil. Aufgabe ist es, diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden; dies soll mit Hülfe des Princips der lebendigen Kräfte geschehen.

Fig. 9.




Nachdem der Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, stelle $LQM$ den Durchschnitt seiner Oberfläche mit der die Flüssigkeit begrenzenden Horizontalebene oder die Wasserlinie vor;

$ANBI$ sei die augenblickliche Lage der auf das Gleichgewicht sich beziehenden Wasserlinie; der Inhalt der ebenen Fläche $ANBI$ betrage $b$, und $C$ sei ihr Schwerpunkt;

durch $C$ werde eine horizontale Ebene geführt, deren Durchschnitt mit dem Körper $L'NM'I$ vorstellen möge;

$G$ sei der Schwerpunkt des Körpers;

$O$ sei der Schwerpunkt des Volumens $ADB$, das man sich mit Flüssigkeit angefüllt denkt; es betrage $V$, sein Gewicht ist gleich dem Gewicht des Körpers;

$\theta$ sei der Winkel, den $GO$ mit der Verticalen macht; die Gerade $GO$ ist senkrecht auf $ANBI$, ihre Länge sei $a$;

$\zeta$ sei die Entfernung des Punktes $C$ vom Niveau der Flüssigkeit, und dieses werde zur Ebene der $x$, $y$ genommen;

$\varrho$ bezeichne die Dichte der Flüssigkeit, $M$ die Masse des Körpers.

Auf den Körper wirken seine eigene Schwere und die Druckkräfte, welche die Flüssigkeit auf den eingetauchten Theil seiner Oberfläche ausübt. Diese Druckkräfte wirken gerade so, als ob jedes Element des eingetauchten Theils vom Körper durch eine verticale Kraft angegriffen würde, welche von unten nach oben gerichtet und dem Gewicht dieses Elements gleich ist, wenn man sich dasselbe von der Flüssigkeit erfüllt denkt.

Die Componenten $X$, $Y$ sind demnach an allen Punkten Null; und nimmt man die $z$-Axe im Sinne der Schwere, so hat man $Z = g$ an allen Elementen des Körpers und noch ausserdem $Z = -g$ an den Elementen seines eingetauchten Theils, die man dabei als von der Flüssigkeit gebildet ansieht. Wenn man $Z$ in dieser Weise versteht, so giebt das Princip der lebendigen Kräfte folgende Gleichung:

$$(1) \qquad \Sigma v^2 dm = 2 \Sigma dm \int Z dz + C.$$

Die Geschwindigkeiten wurden sehr klein vorausgesetzt; daher ist die erste Seite eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung, und man darf bei der Berechnung der anderen Seite nur solche Ausdrücke vernachlässigen, von welchen in das Resultat blos Glieder höherer Ordnung eingehen würden.

Berechnen wir zuerst jenen Theil der zweiten Seite, welcher von den Gewichten aller Elemente des Körpers herrührt. Man hat für ihn:

$$\int Z dz = gz, \quad \text{folglich} \quad 2 \Sigma dm \int Z dz = 2 g \Sigma z dm = 2 g M z_1,$$

wo $z_1$ das $z$ für den Schwerpunkt des Körpers.

Den eingetauchten Theil betrachten wir als zusammengesetzt aus dem Volumen zwischen den horizontalen Schnitten $LQM$, $L'NM'$ und dem Volumen unterhalb des letzten Schnittes. Dieses zweite Volumen ist gleich $ADB$ oder $V$, vermehrt um $INBM'$ und vermindert um $INAL'$.

Da der Werth von $z$ jetzt $-g$ beträgt, so hat man:

$$\int Z dz = -gz.$$

Bezeichnet $d\omega$ das Raumelement, so wird:

$$dm = \varrho d\omega \text{ und } 2 \Sigma dm \int Z dz = -2 g \varrho \Sigma z d\omega.$$

Es kommt daher darauf an, das Integral $\int z d\omega$ für die vier angegebenen Volumina zu berechnen.

Die Verrückung wurde sehr klein angenommen; wir können daher $b$ als den Inhalt eines jeden der drei im Körper geführten ebenen Schnitte betrachten. Das zwischen den parallelen Schnitten enthaltene Volumen betrachten wir als Cylinder; für dasselbe ergiebt sich:

$$\int z\,d\omega = \tfrac{1}{2} b \zeta^2.$$

Für das Volumen $ADB$ erhält man:

$$\int z\,d\omega = V(z_1 - a \cos\theta)$$

oder, indem man $1 - \frac{\theta^2}{2}$ statt $\cos\theta$ schreibt:

$$\int z\,d\omega = Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2}.$$

Dabei muss aber der Punkt $O$ über $G$ liegen; im entgegengesetzten Falle müsste man das Zeichen von $a$ ändern.

Die beiden Volumina $INBM'$ und $INAL'$ lassen sich in prismatische Elemente zerlegen, deren Kanten vertical stehen, und deren Basen die Elemente der Fläche $ANBI$ bilden.

Es sei $d\lambda$ ein solches, durch den Punkt $R$ gehendes Flächenelement; die Verticale $RT$ stelle die Kantenlänge des entsprechenden Prismas vor. Man fälle $RS = u$ senkrecht auf $IN$ und ziehe $ST$; der Winkel $RST$ ist der Neigungswinkel beider Ebenen, also $\theta$. Der Inhalt des Prismas beträgt daher $RTd\lambda \cos\theta$, wofür man $u\theta d\lambda$ schreiben darf. Um den diesem Prisma entsprechenden Werth von $\int z\,d\omega$ zu erhalten, muss man $u\theta d\lambda$ multipliciren mit dem Werthe des $z$ für die Mitte von $RT$, welcher $\zeta + \frac{1}{2} u \sin\theta$ oder einfach $\zeta + \frac{1}{2} u\theta$ beträgt. Man erhält dadurch:

$$u\theta d\lambda\,(\zeta + \tfrac{1}{2} u\theta);$$

und diesen Ausdruck muss man über die Fläche $INB$ integriren.

Bei einem prismatischen Element des Volumens $INAL'$ wird das $z$ für die Mitte gleich $\zeta - \frac{1}{2} u\theta$; aber der Theil des Integrals $\int z\,d\omega$, welcher diesem Volumen angehört, ist abzuziehen. Man hat also

$$-\,u\theta d\lambda\,(\zeta - \tfrac{1}{2} u\theta)$$

über die Fläche $INA$ zu integriren; und fassen wir dieses

Integral mit dem vorigen zusammen, so brauchen wir blos den Ausdruck

$$u\theta d\lambda\ (\zeta + \tfrac{1}{2} u\theta)$$

über die ganze Fläche $ANBI$ zu integriren. Dabei muss man jedoch $u$ in dem Theile $INB$ als positiv und in dem anderen $INA$ als negativ betrachten.

Nun beträgt $\int u d\lambda$ Null, weil $IN$ durch den Schwerpunkt von $ANBI$ geht; es bleibt daher $\frac{\theta^2}{2} \int u^2 d\lambda$. Das Integral $\int u^2 d\lambda$ wollen wir durch $bh^2$ vorstellen und Trägheitsmoment der Fläche $ANBI$ in Bezug auf $IN$ nennen. Dadurch wird der Theil von $\int z d\omega$, welcher sich auf die beiden letzten Volumina bezieht, $\frac{bh^2\theta^2}{2}$.

Das Zusammenfassen der verschiedenen Theile von $\int z d\omega$ giebt:

$$\int z d\omega = \tfrac{1}{2} b\zeta^2 + \tfrac{1}{2} bh^2\theta^2 + Vz_1 - Va + \frac{Va\theta^2}{2}.$$

Die Gleichung (1) wird, wenn man den Ausdruck $2g\varrho Va$ in die Constante einbegreift und berücksichtigt, dass $M = V\varrho$ ist:

(2) $$\Sigma v^2 dm = -g\varrho b\zeta^2 - g\varrho (bh^2 + aV)\theta^2 + c.$$

Läge der Punkt $O$ tiefer als $G$, so müsste man, wie bemerkt wurde, $-a$ statt $a$ schreiben.

Die Constante $c$ ist, da wir die Anfangswerthe von $v$, $\zeta$, $\theta$ sehr klein vorausgesetzt haben, selbst sehr klein und positiv.

Die erste Seite der Gleichung (2) ist wesentlich positiv, also auch die zweite. Ihre negativen Glieder müssen daher stets eine Summe geben, welche kleiner als $c$, also sehr klein ist; daraus folgt, dass $\theta$ und $\zeta$ beständig sehr klein bleiben. Man sieht somit, dass die Verrückung immer sehr klein bleibt, oder dass das Gleichgewicht stabil war, wenn der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt als der Schwerpunkt der im Zustande des Gleichgewichts verdrängten Flüssigkeit.

Liegt aber umgekehrt der Schwerpunkt des Körpers höher als der Schwerpunkt dieser Flüssigkeit, so geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$\Sigma v^2 dm = -g\varrho b\zeta^2 - g\varrho(bh^2 - aV)\theta^2 + c.$$

Obgleich nun $c$ sehr klein ist, so könnten doch $\theta$ und $\zeta$ aufhören es zu sein, wenn der Coëfficient von $\theta^2$ positiv würde. Mit der Richtung von $IN$ ändert sich $bh^2$. Wenn daher für den kleinsten Werth, den $bh^2$ dadurch annimmt, dass man $IN$ in der Fläche $ANBI$ um ihren Schwerpunkt $C$ herumdreht, die Ungleichheit

$$bh^2 - aV > 0 \quad \text{oder} \quad a < \frac{bh^2}{V}$$

stattfindet, so lässt sich mit Sicherheit behaupten, dass $\theta$ und $\zeta$ stets sehr klein bleiben. Das Gleichgewicht kann also noch stabil sein, wenn der Schwerpunkt des Körpers über jenem der verdrängten Flüssigkeit liegt; dazu genügt es, dass der Abstand beider Punkte kleiner sei als der Quotient aus dem kleinsten der Trägheitsmomente, welche die Schnittfläche des Körpers mit der Wasseroberfläche in Bezug auf alle durch ihren Schwerpunkt in ihr gezogenen Geraden giebt, durch das eingetauchte Volumen.

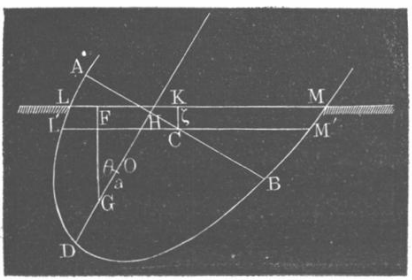
## Oscillationen eines schwimmenden Körpers.

149. Ein Körper, der zum Theil in eine homogene Flüssigkeit eingetaucht ist, befinde sich im Gleichgewicht; derselbe sei in Gestalt und Dichte symmetrisch gegen eine Verticalebene. Man entferne ihn sehr wenig aus der Gleichgewichtslage, und zwar so, dass seine Durchschnittsfigur der Symmetrie in jener Verticalebene und sein Schwerpunkt auf der anfänglichen Verticalen bleibt; die Anfangsgeschwindigkeiten seien Null.

Die Durchschnittsfigur der Symmetrie wird sich offenbar immer in der anfänglichen Verticalebene bewegen; und man vermag die Lage des Körpers jeden Augenblick zu bestimmen, wenn man die Lage seines Schwerpunkts und die Richtung der Geraden kennt, auf welcher sich im Gleichgewicht die Schwerpunkte des Körpers und der verdrängten Flüssigkeit befanden.

Wir behalten die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe bei. Errichtet man in $C$ eine Senkrechte auf die verticale Ebene der Symmetrie, so bildet diese während der ganzen Bewegung den Durchschnitt der Ebenen $AB$, $L'M'$ und trifft den Umfang von $AB$ stets in den nämlichen Punkten, bleibt also in dieser Fläche fest.

Fig. 10.




Wir nehmen an, wenn $G$ über $O$ liegt, dass:

$$bh^2 - aV > 0,$$

worin $bh^2$ das Trägheitsmoment der Fläche $AB$ in Bezug auf jene in ihr feste Gerade bezeichnet.

Wegen des vorausgesetzten Gleichgewichts und dieser Bedingung bleiben $\theta$, $\zeta$ beständig sehr klein. Diese Grössen wollen wir nun zu bestimmen suchen. Mit ihnen wird zugleich die Lage des Schwerpunkts bekannt. Denn, da alle Kräfte vertical sind und der Schwerpunkt sich so bewegt, als ob er die ganze Masse $M$ besässe und alle Kräfte ihn angriffen, so bleibt er nothwendig auf der Verticalen, welche durch seine Anfangslage geht; und folglich kann man ihn construiren, sobald man $\theta$, $\zeta$ kennt. Auch lässt sich seine Ordinate $FG = z_1$ leicht durch $\theta$, $\zeta$ ausdrücken. Es sei $GH = l$, $CH = p$, so hat man:

$$z_1 = l\cos\theta - p\sin\theta + \zeta$$

oder mit Vernachlässigung der sehr Kleinen von höherer Ordnung als die erste:

$$z_1 = l + \zeta - p\theta.$$

Damit ist die Aufgabe auf Bestimmung von $\theta, \zeta$ zurückgebracht.

Die Bewegung des Schwerpunkts $G$ ergiebt eine erste Gleichung zwischen $\theta$ und $\zeta$. Wir müssen uns in $G$ zwei verticale Kräfte denken, die eine gleich $Mg$ nach der Richtung der Schwere und die andere gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit nach entgegengesetzter Richtung. Man darf die Volumina $BCM'$, $ACL'$ als gleich und das Stück $LMM'L'$ als cylindrisch betrachten; das Volumen $LDM$ wird

dadurch $V + b\zeta$, sein Gewicht beträgt mithin $g\varrho V + g\varrho b\zeta$. Da nun $M = \varrho V$, so ist die Resultante aller Kräfte $- g\varrho b\zeta$. Wir erhalten demnach:

$$M\frac{d^2 z_1}{dt^2} = - g\varrho b\zeta \text{ oder } \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{gb}{V}\zeta = 0,$$

also:

$$(1) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} - p\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{V}\zeta = 0.$$

Eine zweite Gleichung liefert die Betrachtung der Bewegung um den als fest gedachten Schwerpunkt des Körpers, d. h. um die in ihm errichtete Senkrechte auf die verticale Ebene der Symmetrie.

Der feste Schwerpunkt hebt das Gewicht des Körpers auf; man hat folglich nur die Summe der Momente jener Kräfte zu betrachten, welche vom Druck der Flüssigkeit herrühren, und die man sich an allen Punkten des eingetauchten Körpertheils angreifend denkt.

Wir wollen die Momente als positiv betrachten, wenn sie den Winkel $\theta$ zu vermindern streben. Das resultirende Moment der Kräfte, welche an dem Stück $LML'M'$ wirken, ist:

$$g\varrho b\zeta\,(l\sin\theta + p\cos\theta) \text{ oder einfach } g\varrho bp\zeta.$$

Man muss hinzunehmen die Momente, welche den Theilen $ADB$, $M'CB$ angehören, und davon abziehen das Moment des Theils $ACL'$.

Das resultirende Moment für $ADB$ beträgt, da die Resultante $O$ angreift:

$$g\varrho Va\sin\theta \text{ oder } g\varrho aV\theta;$$

$a$ ist negativ zu nehmen, wenn $G$ über $O$ liegt.

Das Volumen $M'CB$ zerlegen wir auf dieselbe Weise wie in der vorigen Aufgabe. Das Moment eines Prismas mit der Basis $d\lambda$ ist, wenn $u$ den Abstand dieser Basis von der in $C$ auf die verticale Ebene der Symmetrie Senkrechten bezeichnet:

$$g\varrho\theta u\,d\lambda\,(l\sin\theta + p\cos\theta + u\cos\theta)$$

oder einfach: $$g\varrho\theta u\,(p + u)\,d\lambda;$$

diesen Ausdruck muss man über die Fläche $BC$ integriren.

Statt das auf $ACL'$ bezügliche Moment abzuziehen, wollen wir uns in allen Punkten von $ACL'$ die Kräfte im Sinne der Schwere gerichtet denken. Wir erhalten dann für ein

Prisma, dessen Basis das Element $d\lambda$ der Fläche $AC$ bildet, das zu addirende Moment:

$$-g\varrho\theta u(p-u)\,d\lambda;$$

und folglich können wir auch den Ausdruck

$$g\varrho\theta u(p+u)\,d\lambda$$

über die ganze Fläche $b$ integriren, indem wir auf der rechten Seite des in $C$ errichteten Perpendikels $u$ positiv und auf der linken Seite $u$ negativ nehmen. Dies giebt uns:

$$g\varrho\theta p\int u\,d\lambda + g\varrho\theta\int u^2 d\lambda,$$

wovon das erste Glied Null ist, weil $C$ der Schwerpunkt der Fläche $b$. Setzt man:

$$\int u^2 d\lambda = bh^2,$$

so erhält man als Moment der zwei letzten Theile:

$$gb\varrho\theta h^2.$$

Die Vereinigung aller Momente giebt:

$$g\varrho bp\zeta + g\varrho(bh^2 + aV)\theta.$$

Läge der Punkt $O$ unterhalb $G$, so wäre $-a$ statt $a$ zu schreiben.

Nach der Theorie der Bewegung um eine feste Axe muss diese Momentensumme gleich sein mit:

$$-Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

wenn $Mk^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Gerade vorstellt, welche in seinem Schwerpunkt senkrecht steht auf der verticalen Ebene der Symmetrie. Man erhält daher, indem man $M$ durch $\varrho V$ ersetzt:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gbp}{Vk^2}\zeta + \frac{g}{Vk^2}(bh^2 + aV)\theta = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten die vollständige Auflösung des Problems für den Fall, dass der Schwerpunkt des Körpers in der Gleichgewichtslage unter dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit liegt. Im entgegengesetzten Fall brauchte man blos $a$ negativ zu nehmen.

150. Wir wollen diese Gleichungen zunächst unter der Voraussetzung integriren, dass der Körper auch gegen die Ebene symmetrisch ist, welche durch $GO$ senkrecht auf der ersten steht; ein Fall, der näherungsweise bei Seefahrzeugen vorkommt.

Man hat jetzt $p = 0$, und die Gleichungen werden:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{gb}{V}\zeta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{Vk^2}(bh^2 + aV)\theta = 0.$$

Sie sind getrennt zu integriren, und man findet:

$$\zeta = \alpha \cos\left(t\sqrt{\frac{gb}{V}} + \alpha'\right),\ \theta = \beta \cos\left[\frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2 + aV)}{V}} + \beta'\right].$$

Setzt man der Einfachheit wegen die Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null voraus, so müssen $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ zugleich mit $t$ Null werden, woraus $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ folgt. Die Werthe für $\zeta$ und $\theta$ sind dann:

$$(3) \qquad \zeta = \alpha \cos . t\sqrt{\frac{gb}{V}},\ \theta = \beta \cos \cdot \frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2 + aV)}{V}}.$$

Die Constanten $\alpha$, $\beta$ stellen die sehr kleinen Anfangswerthe von $\zeta$, $\theta$ vor; man sieht also in der That, dass $\theta$, $\zeta$ beständig sehr klein bleiben.

Der Werth von $z_1$ ist $l + \zeta$; die Bewegung des Schwerpunkts $G$ stimmt daher mit der verticalen von $C$ überein. Diese geradlinigen Bewegungen und die Winkelbewegung der $GO$ um $G$ erfolgen in gleicher Weise wie die Bewegungen einfacher Pendel.

Liegt der Punkt $G$ über $O$, so wird:

$$\theta = \beta \cos . \frac{t}{k}\sqrt{\frac{g(bh^2 - aV)}{V}};$$

und da nach der Voraussetzung:

$$bh^2 - aV > 0,$$

so geht $\theta$ nie über $\beta$ hinaus und bleibt folglich sehr klein.

Hätte man aber $bh^2 - aV < 0$, dann würde der Ausdruck für $\theta$ in Exponentialgrössen übergehen und bei wachsendem $t$ nicht mehr sehr klein bleiben; die vorige Rechnung würde nicht mehr gelten.

151. Um die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) zu integriren, eliminirt man zunächst $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ aus der ersten; sie wird dadurch:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{bg(p^2+k^2)}{Vk^2}\zeta + \frac{gp(bh^2+aV)}{Vk^2}\theta = 0.$$

Wir setzen abkürzend:

$$\frac{bg(p^2+k^2)}{Vk^2} = \alpha, \quad \frac{g(bh^2+aV)}{Vk^2} = \beta, \quad \frac{gbp}{Vk^2} = \delta;$$

dadurch werden die zu integrirenden Gleichungen:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \alpha\zeta + p\beta\theta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta\zeta + \beta\theta = 0.$$

Multiplicirt man die zweite mit einem unbestimmten Factor $\lambda$ und addirt sie zur ersten; setzt man darauf:

$$\zeta + \lambda\theta = x, \quad \frac{\beta(p+\lambda)}{\alpha+\lambda\delta} = \lambda, \text{ woraus } \delta\lambda^2 + (\alpha-\beta)\lambda - \beta p = 0$$

folgt, so ergiebt sich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha+\lambda\delta)x = 0.$$

Daher:

$$x = c\cos.t\sqrt{\alpha+\lambda\delta},$$

wenn man die Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null nimmt.

Wir bezeichnen durch $\lambda_1$, $\lambda_2$ die beiden Werthe für $\lambda$, welche wir reell und zwar so voraussetzen, dass $\alpha + \lambda\delta$ positiv ausfällt, weil ausserdem $x$ nicht immer sehr klein bleiben würde; wir erhalten dadurch:

$$(4) \qquad \begin{cases} \zeta + \lambda_1\theta = c\cos.t\sqrt{\alpha+\lambda_1\delta}, \\ \zeta + \lambda_2\theta = c'\cos.t\sqrt{\alpha+\lambda_2\delta}. \end{cases}$$

Die Constanten $c$, $c'$ bestimmen sich aus den Anfangswerthen von $\theta$ und $\zeta$, und man findet dann leicht $\theta$ und $\zeta$ als Functionen von $t$.

52. Trägt man von $C$ aus auf der Geraden $AB$ zwei Längen gleich $\lambda_1$, $\lambda_2$ ab und zwar nach der einen oder anderen Seite je nach den Zeichen dieser Grössen, so erhält man zwei Punkte, deren Abstände vom Niveau der Flüssigkeit

$$\zeta + \lambda_1\theta \text{ und } \zeta + \lambda_2\theta$$

betragen. Die Gleichungen (4) zeigen, dass die verticale Bewegung eines jeden dieser Punkte wie die Bewegung eines einfachen Pendels erfolgt.

153. Die Gleichung $\delta\lambda^2 + (\alpha-\beta)\lambda - \beta p = 0$ hat zwei

reelle Wurzeln mit verschiedenen Zeichen, wenn der Punkt $G$ unter $O$ liegt, weil dann $\beta$ positiv ist. Um das Zeichen von $\alpha + \lambda\delta$ zu erhalten, setzt man:

$$\alpha + \lambda\delta = y;$$

die Bestimmungsgleichung für $\lambda$ geht dadurch über in:

$$y^2 - (\alpha + \beta)y + \frac{\beta bg}{V} = 0.$$

Ihre beiden Wurzeln sind positiv; der Werth von $x$ besitzt daher in der That die oben angenommene Form, und die Werthe von $\theta$, $\zeta$ bleiben sehr klein.

Wenn $G$ über $O$ liegt, so wurde $bh^2 - aV > 0$ vorausgesetzt; also ist $\beta$ noch positiv, und beide Werthe von $\lambda$ sind reell und haben verschiedene Zeichen. Man findet wieder $\alpha + \lambda\delta > 0$, und die Werthe von $\theta$, $\zeta$ bleiben sehr klein.

Wenn aber $G$ über $O$ läge und man $bh^2 - aV < 0$ hätte, so würde $\beta$ und damit einer der Werthe von $\alpha + \lambda\delta$ negativ werden. Die Ausdrücke für $\theta$ und $\zeta$ würden dann Exponentialgrössen enthalten und nicht mehr sehr klein bleiben; die vorigen Rechnungen könnten keine Anwendung finden.

154. Die Gleichungen (3), welche für den Fall gelten, wo der Körper gegen zwei Ebenen symmetrisch ist, zeigen, dass $\alpha = 0$ und dass deshalb $\zeta$ beständig Null bleibt, wenn der Anfangswerth von $\zeta$ Null war. Unter dieser Voraussetzung bleibt der Schwerpunkt des Körpers unbeweglich, und es findet nur eine Drehung um die durch ihn gehende Senkrechte auf die verticale Ebene der Symmetrie statt; ferner bleibt das eingetauchte Volumen constant, weil der Punkt $C$ immer im Niveau liegt.

Die Gleichungen (4) dagegen, welche für eine Ebene der Symmetrie gelten, zeigen, dass wenn auch der Anfangswerth von $\zeta$ Null wäre, man doch nicht immer $\zeta = 0$ haben würde, und folglich das eingetauchte Volumen nicht beständig gleich $V$ bliebe.

155. In den älteren Untersuchungen über das Gleichgewicht schwimmender Körper betrachtete man einen besonderen Punkt, welchen man das Metacentrum nannte, und dessen man sich noch heute bedient.

Wenn ein Körper aus seiner Gleichgewichtslage, in welcher er gegen eine verticale Ebene symmetrisch ist, sehr wenig ver-

rückt wird, so wirken auf ihn sein Gewicht und der Druck der Flüssigkeit, welcher sich auf eine verticale, durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit gehende Kraft reducirt. Liegt nun der Durchschnitt der Richtung dieser Kraft mit $GH$ über $G$, so strebt der Körper gegen seine frühere Lage hin; fällt er dagegen unter $G$, so wird der Körper sich noch mehr von der Gleichgewichtslage zu entfernen suchen. Daraus schloss man, das Gleichgewicht sei im ersten Falle stabil, im zweiten labil gewesen. Den Durchschnittspunkt bestimmte man, indem man annahm, das nach der Verrückung eingetauchte Volumen wäre dem im Gleichgewicht eingetauchten gleich, oder man könnte doch seinen sehr kleinen Zuwachs vernachlässigen, ohne dass dadurch die Bestimmung des Schnittpunktes beider Geraden fehlerhaft würde; dieser so bestimmte Punkt wurde das Metacentrum genannt. Die Annahme, welche man bei seiner Bestimmung machte, ist falsch; denn obgleich der vernachlässigte sehr kleine Zuwachs den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit nur sehr wenig verrückt, so verändert er doch die Lage des Durchschnittspunktes jener beiden Geraden beträchtlich, da diese einen sehr kleinen Winkel zusammen machen *). Man müsste deshalb die verschiedenen Lagen dieses Punktes während der Bewegung des Körpers verfolgen, was erst nach Auflösung des Problems geschehen kann, wo man schon weiss, ob die Verrückungen sehr klein bleiben oder nicht.

Es ist aber zu bemerken, dass selbst wenn das Gleichgewicht stabil war, der wahre Durchschnittspunkt bald über und bald unter den Schwerpunkt des Körpers zu liegen kommt, den Fall ausgenommen, wo die Gerade $GO$ durch den Schwerpunkt des Wasserschnittes geht. Hätte man dies gewusst, so würde man jenes vermeinte Kennzeichen aufgegeben haben.

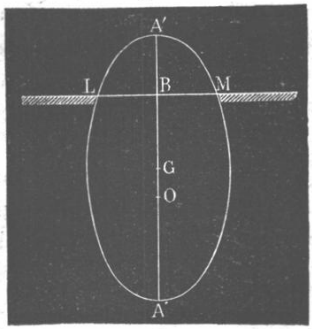
Durch eine der unsrigen ähnliche Untersuchung lässt sich jedoch darthun, dass die Wirkungen der Verrückung des wahren Durchschnittspunktes auf der Geraden $GH$ nach beiden Seiten von $G$ den Körper nur dann umwerfen können, wenn das Metacentrum unterhalb $G$ liegt.

156. Anwendung auf das Ellipsoid. — Suchen wir zunächst nach Nr. 148 die Bedingung für die Stabilität des

*) Man sehe das 24. Heft des Journal de l'Ecole Polytechnique.

Gleichgewichts eines homogenen Ellipsoids, das in einer Flüssigkeit schwimmt. $A$, $B$, $C$, seien die drei Halbaxen desselben, $D$ seine Dichte, $G$ sein Mittelpunkt, $O$ der Schwerpunkt des eingetauchten Volumens $LMA$, welcher nothwendig unter $G$ liegt. Die verticale Axe $AA'$ betrage $2A$, und man habe $B > C$. Behalten wir übrigens die früheren Bezeichnungen bei.

Fig. 11.




Es genügt für die Stabilität des Gleichgewichts, dass $bh^2 > aV$, wenn $bh^2$ das Trägheitsmoment der Schnittfläche $LM$ in Bezug auf diejenige durch ihren Mittelpunkt in ihr gezogene Gerade vorstellt, für welche das Moment am kleinsten wird. Diese Gerade ist die grösste von den zwei Hauptaxen der Ellipse $LM$, also die mit der Axe $2B$ parallele.

Bezeichnet man $AB$ durch $x$, so bestimmt sich der Werth des $x$ aus folgender Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{4DA^3}{\varrho} = (3A - x)x^2.$$

Sie drückt aus, dass das Gewicht des Ellipsoids gleich ist dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, deren Volumen

$$V = \frac{\pi BC}{3A^2}(3A - x)x^2$$

beträgt.

Bestimmt man das Moment des eingetauchten Volumens in Bezug auf die durch $G$ gehende Horizontalebene, so ergiebt sich:

$$aV = \frac{\pi BC}{4A^2}(2Ax - x^2)^2.$$

Die Halbaxen der Ellipse $LM$ sind:

$$\frac{B}{A}\sqrt{2Ax - x^2} \text{ und } \frac{C}{A}\sqrt{2Ax - x^2};$$

davon ist die erste und grössere parallel mit der Axe $2B$, die zweite und kleinere parallel mit der Axe $2C$.

Das Trägheitsmoment einer Ellipse mit den Halbaxen $\alpha$, $\beta$ in Bezug auf die Richtung von $\beta$ beträgt:

$$\frac{\pi \beta \alpha^3}{4}.$$

Daraus findet man das gesuchte kleinste Trägheitsmoment der Fläche $LM$ gleich:

$$\frac{\pi B C^3}{4 A^4} (2 A x - x^2)^2.$$

Dieser Ausdruck soll grösser sein als $a V$; das giebt mit Auslassung der gemeinsamen Factoren:

$$C^2 > A^2 \text{ oder } C > A.$$

Da schon $B > C$ war, so genügt es für die Stabilität des Gleichgewichts, wenn die verticale Axe des Ellipsoids die kleinste ist.

157. Bestimmen wir jetzt die Oscillationen des Ellipsoids unter der Voraussetzung, dass die Ebene der Axen $2A$, $2C$ vertical bleibt, und dass die verticale $A < C$.

Zunächst muss man die Gleichung (1) auflösen. Sie hat nur eine positive Wurzel zwischen 0 und $2A$, welche sich gerade auf unsere Aufgabe bezieht. Kennt man diese Wurzel, so ist auch $a$ bekannt, sowie die Fläche $b$ des Schnittes $LM$ und ihr Trägheitsmoment $b h^2$, welches ausgedrückt wird durch:

$$\frac{\pi B C^3}{4 A^4} (2 A x - x^2)^2.$$

Als Gleichungen für die Bewegung des Ellipsoids ergeben sich:

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + \frac{3 g \varrho (2 A x - x^2)}{4 A^3 D} \zeta = 0,$$

$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} + \frac{15 g \varrho (C^2 - A^2)(2 A x - x^2)^2}{16 D A^5 (C^2 + A^2)} \theta = 0.$$

Wenn $\varrho = 2D$, so wird $x = A$, und die vorstehenden Gleichungen gehen über in:

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} + \frac{3 g}{2 A} \zeta = 0,$$

$$\frac{d^2 \theta}{d t^2} + \frac{15 g (C^2 - A^2)}{8 A (C^2 + A^2)} \theta = 0.$$

Wenn man in diesem Fall noch $C = 3A$ hätte, so würden

beide Bewegungen, die fortschreitende und rotirende einerlei Periode haben.

## Gleichgewicht eines Gemenges schwerer Gase.

158. In einem verticalen, unendlich hohen Cylinder, der an seiner auf der Erdoberfläche stehenden Basis geschlossen ist, seien mehrere schwere Gase enthalten. Die Temperatur sei in der ganzen Ausdehnung des Cylinders constant und die Schwere umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt.

Die Erfahrung hat gelehrt, dass wenn mehrere Gase, welche keine chemische Wirkung auf einander ausüben, in demselben Raum enthalten sind, sie sich nicht wie tropfbare Flüssigkeiten nach der Reihenfolge ihrer Dichten über einander lagern, sondern dass jedes von ihnen sich ganz so verbreitet, als ob es allein in dem Raum wäre. Druck und Dichte an jeder Stelle des Gemenges sind die Summen der Drucke und der Dichten, welche im Gleichgewicht eines jeden einzelnen Gases an dieser Stelle stattfinden würden.

Es bezeichne $p'$ den Druck und $\varrho'$ die Dichte eines jener Gase für einen beliebigen Werth von $z$; $p'_0$, $\varrho'_0$ seien die Werthe beider für $z = 0$; $g$ sei die Schwere an der Erdoberfläche, $r$ der Erdhalbmesser. Man hat $p' = k' \varrho'$; dabei ist $k'$ constant, weil in allen Punkten gleiche Temperatur stattfindet. Ferner hat man:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{gr^2}{(r+z)^2},$$

folglich:

$$dp' = -\varrho' g r^2 \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Daraus ergiebt sich, indem man $\frac{p'}{k'}$ statt $\varrho'$ schreibt:

$$\frac{dp'}{p'} = -\frac{gr^2}{k'} \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Durch Integration von $z = 0$ an und gehörige Reduction erhält man:

$$log\left(\frac{p'}{p'_0}\right) = -\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z},$$

also:

$$p' = p'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}}$$

und:

$$\varrho' = \varrho'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}}.$$

Für ein anderes Gas würde sich auf dieselbe Weise ergeben:

$$p'' = p''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}},$$

$$\varrho'' = \varrho''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}},$$

u. s. w.

Daher hat man für den Druck $p$ und die Dichte $\varrho$, welche in dem Gemenge der verschiedenen Gase der Höhe $z$ entsprechen:

$$p = p'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + p''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots,$$

$$\varrho = \varrho'_0 e^{-\frac{gr}{k'} \cdot \frac{z}{r+z}} + \varrho''_0 e^{-\frac{gr}{k''} \cdot \frac{z}{r+z}} + \ldots$$

Im Allgemeinen sind die Coëfficienten $k'$, $k''$, ... ungleich, und deshalb verhalten sich die Grössen $\varrho'$, $\varrho''$, ... nicht zu einander wie $\varrho'_0$, $\varrho''_0$, ...; folglich werden die Gase in verschiedenen Höhen nicht genau in denselben Verhältnissen gemengt sein. Weil aber diese Coëfficienten in der Regel sehr grosse Zahlen sind, so wird die Aenderung der Mischungsverhältnisse erst in beträchtlichen Höhen merklich.

## Höhenmessung durch das Barometer.

159. Denken wir uns die Atmosphäre im Gleichgewicht und betrachten wir einen verticalen Luftcylinder, der sich von der Oberfläche der Erde bis zur Luftgrenze erhebt. Können wir den Luftdruck in diesem Cylinder als Function der Höhe berechnen, so führt seine Kenntniss in einem beliebigen Punkte zur Kenntniss der Höhe dieses Punktes. Der Luftdruck aber kann durch das Barometer bestimmt werden, wenn man einigen begleitenden Umständen Rechnung trägt.

Wir nehmen die Schwere als im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung vom Erdmittelpunkt variirend

an und lassen die von der Centrifugalkraft herrührende Aenderung dieses Gesetzes ausser Acht, da diese in den zu bestimmenden verticalen Strecken unmerklich ist. Es sei $g$ die Intensität der Schwere am Fusspunkte des Cylinders, $r$ dessen Abstand vom Erdmittelpunkt, $g'$ die Intensität der Schwere in der Entfernung $r + z$, mithin:

$$g' = \frac{g r^2}{(r + z)^2}.$$

Bezeichnet $\theta$ die Temperatur eines Gases, $\alpha$ den Ausdehnungscoëfficienten der Gase für die Temperaturerhöhung von einem Centesimalgrad und $k$ einen für dasselbe Gas constanten Coëfficienten, so besteht zwischen Druck und Dichte die Gleichung:

$$p = k \varrho (1 + \alpha \theta).$$

Sie ist auch anwendbar auf ein Gemenge von Gasen und Dünsten nach unveränderlichen Verhältnissen, wenn $k$ einen gewissen Mittelwerth erhält zwischen denjenigen Werthen, welche sich auf die einzelnen Gase und Dünste beziehen. Einen solchen werden wir für die Luft annehmen, da die Erfahrung gelehrt hat, dass das Verhältniss der in ihr gemengten Gase überall das gleiche ist. Was den beigemengten Wasserdunst betrifft, dessen Quantität in einigermaassen beträchtlichen Höhen sehr gering wird, so muss man auch ihn als in einem constanten Verhältniss vorhanden annehmen, welches ein mittleres ist zwischen denjenigen, die man an den beiden Punkten beobachtet, deren Höhenunterschied gemessen werden soll.

Der Coëfficient $\alpha$ hat nahezu für alle Gase und Dünste den Werth 0,00366. Weil aber die Menge des in der Luft enthaltenen Wasserdunstes mit der Temperatur wächst, und weil der Wasserdunst unter demselben Druck eine geringere Dichte hat als die Luft, so wird bei steigender Temperatur die Dichte der Luft etwas rascher abnehmen, als es die vorstehende Formel anzeigt. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, vergrössert man den Coëfficienten $\alpha$ und giebt ihm gewöhnlich den Werth 0,004.

Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigkeiten liefert, wenn man

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g'$$

setzt:

$$dp = -\frac{\varrho g r^2 dz}{(r+z)^2}$$

oder durch Einführen des Werthes für $\varrho$ als Function von $p$:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g r^2}{k(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Die Temperatur ändert sich nach einem unbekannten Gesetz mit der Höhe; man entfernt sich jedoch wenig von der Genauigkeit, wenn man ihr einen constanten Werth beilegt, welcher gleich ist dem Mittel aus den Temperaturen in den beiden äussersten Punkten, die man betrachtet. Die Integration der Gleichung liefert jetzt:

$$\log p = \frac{g r^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z)} + C;$$

die Constante $C$ bestimmt man aus den der ersten Station entsprechenden Werthen von $p$ und $z$.

Diese seien $p_0$, $z_0$, so erhält man:

$$\log p_0 = \frac{g r^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} + C$$

und durch Abziehen beider Gleichungen von einander:

$$\log \frac{p_0}{p} = \frac{g r^2}{k(1+\alpha\theta)(r+z_0)} \cdot \frac{z-z_0}{r+z}.$$

Bezeichnet $Z$ die verticalen Höhen über der ersten Station, setzt man also $z - z_0 = Z$, und macht man zugleich $r + z_0 = R$, so wird die vorstehende Gleichung:

$$(1) \qquad \log \frac{p_0}{p} = \frac{g r^2}{kR(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{Z}{R+Z}.$$

Für $\theta$ hat man den Werth $\frac{t_0+t}{2}$ zu nehmen; doch wollen wir der Einfachheit wegen fortfahren, ihn durch $\theta$ zu bezeichnen.

Der Quotient $\frac{p_0}{p}$ lässt sich ausdrücken mittelst der den Drucken $p_0$, $p$ entsprechenden Barometerstände, indem man diese auf eine und dieselbe Temperatur reducirt und ausserdem auf die Aenderung der Schwere von einer Station zur anderen Rücksicht nimmt.

Es bezeichne $D$ die Dichte des Quecksilbers bei $0^0$; die auf $0^0$ zurückgeführten Barometerstände an beiden Stationen

seien $h_0$, $h$ und die Werthe der Schwere an diesen Stationen $g_0$, $g'$, so hat man:

$$p_0 = g_0 D h_0, \quad p = g' D h, \quad \frac{g_0}{g'} = \frac{(R+Z)^2}{R^2} = \left(1+\frac{Z}{R}\right)^2.$$

Daraus folgt:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(1+\frac{Z}{R}\right)^2.$$

Die Substitution in (1) liefert, wenn man zugleich die natürlichen Logarithmen durch gemeine ersetzt, welche man durch den Modul $M = 0{,}4342945$ theilt:

$$(2) \quad Z = \frac{k(1+\alpha\theta)R^2}{Mgr^2}\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{Z}{R}\right)\right]\left(1+\frac{Z}{R}\right).$$

160. Um den Werth von $\frac{h_0}{h}$ aus den wirklichen Angaben des Barometers zu bestimmen, seien $H_0$, $H$ die beobachteten Barometerstände und $T_0$, $T$ die Temperaturen an beiden Stationen, welche das Quecksilberthermometer anzeigt.

Das Quecksilber dehnt sich für jeden Centesimalgrad um $\frac{1}{5550}$ seines Volumens bei $0^0$ aus; daher verhalten sich seine Dichten bei den Temperaturen Null und $T_0$ wie $1+\frac{T_0}{5550}$ zur Einheit. Der Luftdruck wird durch das Gewicht einer Quecksilbersäule gemessen, welche die Flächeneinheit zur Basis und zur Höhe den Barometerstand hat; bei demselben Luftdruck ist folglich diese Höhe der Dichte des Quecksilbers umgekehrt proportional. Zwischen $H_0$ und $h_0$ besteht daher die Gleichung:

$$H_0 = h_0\left(1+\frac{T_0}{5550}\right).$$

Ebenso hat man:

$$H = h\left(1+\frac{T}{5550}\right);$$

folglich:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H}\cdot\frac{1+\frac{T}{5550}}{1+\frac{T_0}{5550}}$$

und mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{T_0 - T}{5550}$ als die erste:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H\left(1 + \frac{T_0 - T}{5550}\right)}.$$

Der Einfachheit wegen behalten wir $h_0$ und $h$ in der Gleichung (2) bei.

An der Formel (2) ist eine Aenderung vorzunehmen, welche sich auf die Breite des Beobachtungsortes bezieht. Durch $g$ haben wir die Schwere zu Paris bezeichnet, welche den Werth

$$g = 9{,}80896$$

hat. Die Formel (2) würde daher nur für Beobachtungen zu Paris brauchbar sein. Um sie überall anwendbar zu machen, muss man für $g$ den Ausdruck setzen:

$$g \cdot \frac{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi_1},$$

worin $\psi$ die Breite des Beobachtungsortes und $\psi_1$ die Breite von Paris bezeichnet.

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung (2), so hat ihr zweites Glied einen rein numerischen Coëfficienten, den man entweder direct berechnen oder aus der Gleichung selbst finden kann, wenn man in ihr für $Z$ einen aus trigonometrischen Messungen hervorgehenden Werth setzt. Beide Wege führen sehr nahe zu demselben Resultat.

Nimmt man die untere Station dem Niveau des Meeres sehr nahe liegend an, so dass:

$$z_0 = 0, \quad R = r, \quad Z = z,$$

dann wird die Formel (2):

$$(3)\quad z = \frac{18336^{\mathrm{m}}\,(1 + \alpha\theta)}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi}\left[\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right),$$

worin die Logarithmen gemeine sind.

161. Um $z$ zu berechnen, substituirt man zunächst $\theta$ und $\psi$ die beobachteten Werthe; setzt man darauf zur Abkürzung:

$$\frac{18336^{\mathrm{m}}\,(1 + \alpha\theta)}{1 - 0{,}002588 \cos 2\psi} = A,$$

so erhält man:

$$z = A\left[log\,\frac{h_0}{h} + 2\,log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Ein erster Näherungswerth $z_1$ für $z$ ergiebt sich, indem man $\frac{z}{r}$ gegen 1 vernachlässigt; er ist:

$$z_1 = A\,log\,\frac{h_0}{h}.$$

Die Substitution von $z_1$ statt $z$ in dem zweiten Gliede der vorletzten Gleichung liefert einen zweiten, dem wahren $z$ schon näher kommenden Werth:

$$z_2 = A\left[log\,\frac{h_0}{h} + 2\,log\left(1 + \frac{z_1}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z_1}{r}\right).$$

Auf dieselbe Weise könnte man fortfahren, aber in der Regel darf man bei $z_2$ stehen bleiben.

Ist $\frac{z}{r}$ sehr klein, so kann man es in der Formel (3) ganz vernachlässigen, nur muss man dann den Coëfficienten 18336 etwas vergrössern. Aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen im südlichen Frankreich hat Ramond gefunden, dass er die Zahl 18393 dafür nehmen musste. Da $cos\,2\,\psi$ dort beinahe gleich Null, so gebrauchte er die einfache Formel:

$$z = 18393\,(1 + \alpha\,\theta)\,log\,\frac{h_0}{h}.$$

# Hydrodynamik.

162. Die Hydrodynamik betrachtet die Bewegung der Flüssigkeiten.

Ihr Problem, in der allgemeinsten Weise aufgefasst, besteht in Folgendem. Für einen bestimmten Augenblick, den man zum Zeitanfang nehmen kann, sind die Lagen sämmtlicher Molekel der Flüssigkeit und ihre Geschwindigkeiten bekannt; ferner werden gegeben die äusseren Kräfte, welche auf alle Punkte der Flüssigkeit wirken, sowie die Drucke und sonstigen Bedingungen, welche sich auf ihre Grenzen nach allen Seiten hin beziehen. Unter diesen Voraussetzungen soll man die Bewegung einer jeden Molekel bestimmen, also den Ausdruck ihrer drei Coordinaten durch die Zeit finden, und ausserdem soll man Druck und Dichte in einem beliebigen Punkt der Flüssigkeit zu irgend einer Epoche berechnen.

Die Coordinaten $x$, $y$, $z$ einer bestimmten Molekel sind Functionen der einzigen Variablen $t$. Aber von einer Molekel zur anderen ändern sich diese Functionen, und in sofern hängen sie ab von den Coordinaten $a$, $b$, $c$ desjenigen Punktes, in welchem die betrachtete Molekel sich am Anfang der Bewegung befand. Man hat demnach $x$, $y$, $z$ als Functionen der vier unabhängigen Variablen $a$, $b$, $c$, $t$ anzusehen; und wenn der allgemeine Ausdruck dieser drei Functionen gefunden ist, so kennt man genau die Bewegung einer beliebigen Molekel von ihrer Anfangslage an.

163. Wäre die Aufgabe gelöst, hätte man also die drei Functionen von $a$, $b$, $c$, $t$ gefunden, so könnte man daraus $a$, $b$, $c$ als Functionen von $x$, $y$, $z$, $t$ ableiten. Folglich darf jede Function der unabhängigen Variablen $a$, $b$, $c$, $t$ als Function der vier Unabhängigen $x$, $y$, $z$, $t$ betrachtet werden.

So hängen z. B. die Componenten der Geschwindigkeit einer Molekel, $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ ab von $a$, $b$, $c$, $t$ und können daher als abhängig von $x$, $y$, $z$, $t$ betrachtet werden. Dies sieht man übrigens a priori ein. Denn fasst man irgend einen Punkt mit constanten Coordinaten $x$, $y$, $z$ ins Auge, so haben die Molekel, welche nach einander durch diesen Punkt gehen, verschiedene Geschwindigkeiten in demselben, und folglich sind die Grössen $u$, $v$, $w$, welche sich auf diesen Punkt beziehen, Functionen von $t$. Lässt man darauf $y$, $z$, $t$ constant und variirt $x$, d. h. betrachtet man in demselben Augenblick alle Punkte einer Parallelen zur Axe der $x$, so ändern sich mit $x$ auch $u$, $v$, $w$; mithin sind diese Grössen Functionen der unabhängigen Variablen $x$. Ebenso werden sie als Functionen von $y$ und $z$ erkannt; so dass man einsieht, wie $u$, $v$, $w$ Functionen der vier unabhängigen Variablen $x$, $y$, $z$, $t$ sind.

Dasselbe gilt für jede Function von $a$, $b$, $c$, $t$.

164. Die Aufgabe, welche uns beschäftigt, ist gelöst, wenn man $u$, $v$, $w$ als Functionen von $x$, $y$, $z$, $t$ bestimmt hat. Denn, will man dann die Bewegung einer bestimmten Molekel kennen, so braucht man nur $x$, $y$, $z$ als Functionen von $t$ allein zu betrachten und zu setzen:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Dadurch erhält man drei Differentialgleichungen zwischen $x$, $y$, $z$, $t$, nachdem man $u$, $v$, $w$ ihre Werthe substituirt hat. Die Integration derselben ergiebt $x$, $y$, $z$ als Functionen von $t$, und man bestimmt die dabei eingehenden drei Constanten daraus, dass $x$, $y$, $z$ für $t = 0$ die anfänglichen Coordinatenwerthe der betrachteten Molekel annehmen.

165. Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeiten. — Es seien $Xdm$, $Ydm$, $Zdm$ die Componenten der Kraft, welche auf die Molekel von der Masse $dm$ wirkt;

$u$, $v$, $w$ seien die Componenten ihrer Geschwindigkeit. Durch $u'$, $v'$, $w'$ mögen die nach allem $t$ genommenen Ableitungen von $u$, $v$, $w$ bezeichnet werden, während man letztere Grössen als auf die Bewegung einer bestimmten Molekel sich beziehend und darum als Functionen der einzigen unabhängigen Variablen $t$ betrachtet. Indem man sich nämlich $u$, $v$, $w$ als Functionen von $x$, $y$, $z$, $t$ denkt, sind $x$, $y$, $z$ Functionen von $t$, und zwar von $t$ allein. Nun sollen $u'$, $v'$, $w'$ die Ableitungen von $u$, $v$, $w$ nach allem $t$ bedeuten. Dieselben dürfen nicht durch $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ vorgestellt werden, da man sie sonst mit den partiell nach $t$ genommenen Ableitungen von $u$, $v$, $w$ verwechseln könnte. Den Druck bezeichne $p$ und $\varrho$ die Dichte; beide können sich mit $x$, $y$, $z$, $t$ ändern.

Dem Princip von d'Alembert zufolge würde die Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn an jeder Molekel die Kraftcomponenten wirkten:

$$(X - u')\,dm,\ (Y - v')\,dm,\ (Z - w')\,dm.$$

Daraus gehen folgende drei Gleichungen hervor:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(X - u'),\ \frac{dp}{dy} = \varrho\,(Y - v'),\ \frac{dp}{dz} = \varrho\,(Z - w').$$

Für $u'$, $v'$, $w'$ erhält man folgende Ausdrücke:

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.$$

Die vorletzten drei Gleichungen werden dadurch:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

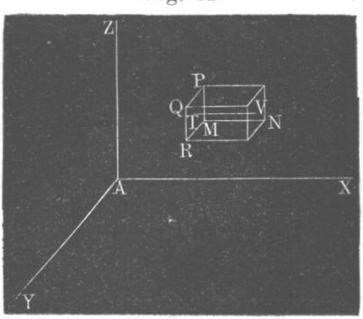
Diese drei Gleichungen reichen nicht hin zur Bestimmung der fünf Functionen $p$, $\varrho$, $u$, $v$, $w$. Es werden dazu noch zwei erfordert; wenn aber $\varrho$ constant ist, nur eine. Wir wollen

sehen, wie man sich diese Gleichungen aus der Bedingung, dass die Flüssigkeit stetig bleibt, verschaffen kann.

166. Denken wir uns den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum in unendlich kleine Parallelepipede $dx\,dy\,dz$ getheilt. Nach der Zeit $dt$ müssen dieselben noch mit Flüssigkeit erfüllt sein, etwa mit Ausnahme derjenigen, welche sich an der freien Oberfläche befanden; und die Zunahme der Dichte in einem solchen Parallelepiped ist gleich dem Zuwachs der darin enthaltenen Masse, getheilt durch das Volumen. Um daher die Zunahme der Dichte zu erhalten, muss man den Ueberschuss der Masse, welche während der Zeit $dt$ in das Parallelepiped eingetreten ist, über die unterdessen aus demselben hinausgetretene Masse suchen.

Es seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten der Ecke $M$ dieses Parallelepipeds und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ diejenigen der gegenüberstehenden Ecke; $u$, $v$, $w$ mögen die Componenten der Geschwindigkeit desjenigen Punktes bezeichnen, welcher sich am Ende der Zeit $t$ in $M$ befindet; $\varrho$ sei zu derselben Zeit die Dichte in $M$.

Fig. 12.




Während Flüssigkeit durch eine Grenzfläche eintritt, geht andere durch die entgegengesetzte hinaus. Berechnet man den Ueberschuss der ersten Quantität über die zweite für jedes der drei Paare paralleler Grenzflächen, so giebt die Summe den Zuwachs an Masse, welchen das Parallelepiped empfangen hat.

Betrachten wir zunächst die Fläche $MPQR$ und die zu ihr parallele. Wären $\varrho$ und $u$ in der ganzen Ausdehnung einer jeden constant, so würde durch die erste eingetreten sein die Masse:

$$\varrho\, u\, dy\, dz\, dt,$$

und ausgetreten wäre durch die zweite Fläche die Masse:

$$\left[\varrho\, u + \frac{d(\varrho u)}{dx}\, dx\right] dy\, dz\, dt.$$

Der Ueberschuss wäre mithin:

$$-\frac{d(\varrho u)}{dx}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Dieses Resultat darf man als richtig annehmen. Denn nimmt man in beiden Flächen auf einer Parallelen zur Axe der $x$ zwei Punkte $T$, $V$, so unterscheidet sich die Differenz der in ihnen stattfindenden Werthe des $\varrho u$ von der Differenz der Werthe des $\varrho u$ in $M$ und $N$ nur um eine gegen die zweite unendlich kleine Grösse, da man statt der Coordinaten von $M$ blos jene von $T$ zu setzen braucht, um die erste Differenz aus der zweiten zu erhalten.

Der Ueberschuss an Masse, welcher durch die Flächen $dx\,dz$, $dx\,dy$ eingetreten ist, über die durch die parallelen Flächen ausgetretene Masse beträgt respective:

$$-\frac{d(\varrho v)}{dy}\,dx\,dy\,dz\,dt,\ -\frac{d(\varrho w)}{dz}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Die Summe der drei Ueberschüsse, getheilt durch das Volumen $dx\,dy\,dz$, giebt den Zuwachs der Dichte der in dem Parallelepiped enthaltenen Flüssigkeit oder der Dichte in dem Punkt $x$, $y$, $z$. Diese Summe ist demnach das partiell in Beziehung auf die Zeit genommene Differential der Dichte, und man erhält:

$$\frac{d\varrho}{dt}+\frac{d.\varrho u}{dx}+\frac{d.\varrho v}{dy}+\frac{d.\varrho w}{dz}=0. \tag{2}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie diese Gleichung in den verschiedenen Fällen gedeutet werden muss, welche bei Flüssigkeiten vorkommen können.

167. Hat man es mit einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit zu thun, deren Dichte in allen Punkten gleich und unabhängig von der Zeit ist, so reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{3}$$

In diesem Falle giebt es nur vier unbekannte Functionen $p$, $u$, $v$, $w$, und die Gleichungen (1) und (3) genügen zu ihrer Bestimmung.

168. Bei einer heterogenen tropfbaren Flüssigkeit ist $\varrho$ eine Function von $x$, $y$, $z$, $t$, welche jedoch für dieselbe Molekel constant bleibt. Um diese Bedingung auszudrücken, muss

man ihr Differential nach allem $t$ nehmen, indem man $x, y, z$ als von $t$ allein abhängig betrachtet, und es gleich Null setzen. Dadurch erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dt} + u\frac{d\varrho}{dx} + v\frac{d\varrho}{dy} + w\frac{d\varrho}{dz} = 0, \tag{4}$$

so dass die Gleichung (2) sich reducirt auf:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \tag{5}$$

In diesem Falle sind fünf Functionen zu bestimmen, und man besitzt eine gleiche Zahl von Gleichungen, nämlich (1), (4), (5).

169. Bei einer zusammendrückbaren Flüssigkeit von constanter Temperatur besteht zwischen $p$ und $\varrho$ die Beziehung:

$$p = k\varrho,$$

welche in Verbindung mit (1) und (2) die fünf unbekannten Functionen bestimmt.

170. Bedingungen, welche sich auf die Oberfläche beziehen. — Die bisher erhaltenen Gleichungen gelten für alle Punkte im Innern der Flüssigkeit; und wenn diese unendlich ist, so hat man mit ihnen nur noch die Bedingungen des Anfangszustandes zu verbinden. Ist aber die Flüssigkeit begrenzt, so finden besondere Gleichungen statt für die Punkte ihrer Oberfläche. Man nimmt gewöhnlich an, dass die Molekel, welche anfangs mit einer festen oder beweglichen Wand in Berührung waren, beständig darin bleiben, und dass die Molekel, welche anfänglich der freien Oberfläche angehörten, ihr immer angehören. Durch diese Annahmen wird die Aufgabe sehr eingeschränkt, und gleichwohl giebt es noch sehr wenige Fälle, in welchen man die Rechnungen vollständig ausführen kann.

Es sei $F(x, y, z, t) = 0$ die Gleichung einer Fläche, auf welcher eine Molekel stets bleiben muss. Nehmen wir an, dass bei einem gewissen Werthe von $t$ ihre Coordinaten dieser Gleichung genügen, und lassen wir $t$ um $dt$ wachsen. Die Coordinaten wachsen dadurch um

$$u\,dt,\ v\,dt,\ w\,dt;$$

und diese Incremente müssen der Differentialgleichung jener Fläche genügen, wenn man sie statt $dx$, $dy$, $dz$ setzt. Daraus ergiebt sich folgende Bedingung:

$$\frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

Ist die Wand fest, so verschwindet der Ausdruck $\frac{dF}{dt}$.

Dieser Gleichung sind während der ganzen Bewegung die Molekel unterworfen, welche sich anfänglich in Berührung mit der in Rede stehenden Wand befanden. Aehnliche Gleichungen gelten für alle nicht freien Theile der Oberfläche.

171. Auf die freie Oberfläche wirkt ein bekannter Druck, welcher gewöhnlich in allen ihren Punkten derselbe ist, aber mit der Zeit variiren kann. Bezeichnet man ihn mit $P$, so ist die Gleichung dieser Oberfläche:

$$p - P = 0;$$

woraus man für die auf ihr befindlichen Molekel nachstehende Bedingung ableitet:

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{dP}{dt}.$$

Diese verschiedenen Gleichungen, welche sich auf die Grenzen der Flüssigkeit beziehen, bestimmen in Verbindung mit dem Anfangszustand die willkürlichen Functionen, welche durch die Integration der partiellen Differentialgleichungen eingehen.

172. Wenn $u$, $v$, $w$ die nach $x$, $y$, $z$ genommenen partiellen Ableitungen einer Function $\varphi(x, y, z, t)$ sind, so lassen sich die Gleichungen (1) auf eine einzige zurückführen, und die Auflösung des Problems kommt auf Bestimmung von $\varphi$ hinaus, weil man dann durch Differenziiren $u, v, w$ findet. Wir nehmen dabei die äusseren Kräfte von solcher Beschaffenheit an, dass $X$, $Y$, $Z$ die partiellen Derivirten einer Function $V$ nach $x$, $y$, $z$ bilden. Unter diesen Voraussetzungen kann man die Gleichungen (1) so schreiben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = \frac{dV}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Indem man respective mit $dx$, $dy$, $dz$ multiplicirt und addirt, erhält man:

$$(6)\quad \frac{dp}{\varrho} = dV - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

In dieser Gleichung sind die Differentiale nach $x$, $y$, $z$ genommen, während man $t$ als constant betrachtet.

Beide Seiten können immer in Beziehung auf $x$, $y$, $z$ integrirt werden, wenn $\varrho$ eine bekannte Function von $p$ oder eine Constante ist.

173. Der letzte Fall findet statt bei einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit; für ihn erhält man:

$$\frac{p}{\varrho} = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Dem zweiten Gliede wäre noch eine willkürliche Function von $t$ beizufügen; doch kann man dieselbe in $\varphi$ einrechnen und braucht sie daher nicht zu schreiben.

Die Gleichung der Continuität ist in diesem Falle:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

oder:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Sie lässt $\varphi$ finden, und nachdem man die willkürlichen Functionen bestimmt hat, erhält man $u$, $v$, $w$ durch Differenziiren von $\varphi$.

174. Bei einer gasförmigen Flüssigkeit von constanter Temperatur ist $p = k\varrho$, und das erste Glied der Gleichung (6) wird $k\frac{dp}{p}$. Die Integration liefert:

$$k \log p = V - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

woraus man $p$ als Function von $\varphi$ entnehmen kann.

Die Gleichung (2) darf geschrieben werden:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0;$$

und wenn man hier den Werth für $p$ aus der vorigen ein-

setzt, so hat man eine Gleichung, welche $\varphi$ und folglich auch $u$, $v$, $w$ bestimmt.

Sind die Bewegungen der Flüssigkeitstheile so rasch, dass die Temperatur in jedem Punkt abwechselnd steigt und fällt, so ist $p$ nicht mehr $\varrho$ einfach proportional, sondern hängt von der Zunahme der Temperatur ab, und diese kann als dem Zuwachse der Dichte proportional angesehen werden; mithin hängt $p$ noch von $\varrho$ ab, und umgekehrt. Man kann daher das erste Glied der Gleichung (6) integriren. Zur Bestimmung von $\varphi$ dient die Gleichung (2).

175. Die äusseren Kräfte seien so beschaffen, dass $X$, $Y$, $Z$ die partiellen Ableitungen einer Function $V$ nach $x$, $y$, $z$ bilden. Wenn dann $u$, $v$, $w$ für irgend einen Werth von $t$ die nach $x$, $y$, $z$ genommenen partiellen Derivirten einer Function sind, so hat Lagrange gezeigt, dass sie es für jedes $t$ sein werden.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes theilen wir die Zeit in unendlich kleine Intervalle und berechnen, um wieviel der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ während eines dieser Intervalle in demselben Punkt zunimmt. Es ist klar: wenn $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ in jedem Augenblick das Differential einer Function von $x$, $y$, $z$ darstellt, so muss auch sein Increment stets ein solches Differential sein; und umgekehrt, wenn jener Ausdruck zu irgend einer Epoche ein vollständiges Differential ist und alle auf einander folgenden Incremente desselben solche Differentiale sind, so wird auch ihre Summe, also der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ zu jeder Epoche ein vollständiges Differential bilden.

Nehmen wir nun an, für $t = t_1$, wo $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$, habe man:

$$u_1\,dx + v_1\,dy + w_1\,dz = d\varphi_1,$$

während $\varphi_1$ eine Function der drei unabhängigen Variablen $x$, $y$, $z$ bezeichne. Die Werthe, welche $u$, $v$, $w$ in demselben Punkt für $t = t_1 + \varepsilon$ annehmen, lassen sich nach Potenzen von $\varepsilon$ entwickeln, und wenn $\varepsilon$ unendlich klein ist, so bleibt man bei den zwei ersten Gliedern stehen, wodurch

$$u = u_1 + u'\varepsilon,\ v = v_1 + v'\varepsilon,\ w = w_1 + w'\varepsilon$$

wird; $u'$, $v'$, $w'$ stellen hier die nach $t$ genommenen partiel-

len Derivirten von $u$, $v$, $w$ für $t = t_1$ vor, welche Functionen von $x$, $y$, $z$ sind.

Aus den vorstehenden Werthen von $u$, $v$, $w$ ergiebt sich

$$udx + vdy + wdz = u_1 dx + v_1 dy + w_1 dz + \varepsilon(u'dx + v'dy + w'dz).$$

Daraus sieht man, dass $udx + vdy + wdz$ für $t = t_1 + \varepsilon$ ein vollständiges Differential bildet, sobald $u'dx + v'dy + w'dz$ ein solches ist.

Um dies zu untersuchen, bedienen wir uns der Gleichungen (1). Für $t = t_1$ werden dieselben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = X - u' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = Y - v' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = Z - w' - \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz} - \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}.$$

Wir multipliciren sie respective mit $dx$, $dy$, $dz$ und addiren. Das dadurch erhaltene erste Glied ist ein vollständiges Differential in den Fällen der Nummern 173, 174. Man darf dann $dP$ statt $\frac{dp}{\varrho}$ schreiben, indem man durch $P$ eine gewisse Function von $x$, $y$, $z$ bezeichnet. Und da wir annehmen, dass $X$, $Y$, $Z$ die nach $x$, $y$, $z$ genommenen partiellen Ableitungen einer gewissen Function $V$ bilden, so folgt:

$$dP = dV - (u'dx + v'dy + w'dz)$$
$$- \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right],$$

demnach:

$$u'dx + v'dy + w'dz$$
$$= d\left\{V - P - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz}\right)^2\right]\right\};$$

wodurch in der That $u'dx + v'dy + w'dz$ als das Differential einer Function der drei unabhängigen Variablen $x$, $y$, $z$ dargestellt wird.

Wenn also der Ausdruck $udx + vdy + wdz$ zu irgend einer Epoche ein vollständiges Differential ist, so wird er es noch sein, nachdem die Bewegung der Flüssigkeit sich unter

allen Einwirkungen und Umständen während einer unendlich kleinen Zeit fortgesetzt hat. Indem man von diesem neuen Zeitpunkte ausgeht, beweist man wie vorher, dass $udx + vdy + wdz$ auch nach einem zweiten unendlich kleinen Intervall ein vollständiges Differential bildet, und so ohne Ende fort.

War daher diese Bedingung einmal erfüllt, so ist dies während der ganzen Bewegung der Fall; war sie dagegen einmal nicht erfüllt, so kann dies auch zu keiner Zeit stattfinden. Ob übrigens die Bedingung im Anfang erfüllt ist, davon überzeugt man sich unmittelbar, da die Anfangswerthe von $u$, $v$, $w$ als Functionen von $x$, $y$, $z$ gegeben werden.

Sind die Anfangsgeschwindigkeiten überall Null, so hat man anfänglich:

$$udx + vdy + wdz = 0,$$

was ein vollständiges Differential ist; die fragliche Bedingung ist also dann immer erfüllt.

176. Bei der sehr einfachen Bewegung einer Flüssigkeit, welche gleichförmig um eine feste Axe rotirt, ohne dass die Molekel ihre gegenseitige Lage ändern, bildet $udx + vdy + wdz$ kein vollständiges Differential. Denn bezeichnet $\omega$ die constante Winkelgeschwindigkeit, und nimmt man die Drehaxe zur Axe der $z$, so wird:

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0$$

und folglich:

$$udx + vdy + wdz = \omega(xdy - ydx).$$

In diesem Falle kann daher das obige besondere Verfahren keine Anwendung finden, sondern man muss sich der allgemeinen Gleichungen bedienen.

Man hat:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad w = 0,$$

und die Gleichungen (1) werden:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dz} = Z,$$

woraus folgt:

$$\frac{dp}{\varrho} = Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2(xdx + ydy);$$

welche Gleichung mit der in der Hydrostatik, Nr. 131 gefundenen übereinstimmt.

### Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit unter einer besonderen Voraussetzung.

177. Eine homogene tropfbare Flüssigkeit sei in einem Gefässe mit horizontaler Basis enthalten und fliesse durch eine Oeffnung aus, welche in dieser Basis angebracht und im Vergleich zu den horizontalen Schnitten des Gefässes klein ist; diese Schnitte seien wenig verschieden und von kleinen Dimensionen gegen die Höhe der Flüssigkeit. Dann lehrt die Erfahrung, dass die Molekel, welche sich in irgend einem Augenblick in derselben horizontalen Schicht befanden, immer in ihr bleiben, so lange sie der Oeffnung nicht sehr nahe kommen, und dass man die horizontalen Geschwindigkeiten vernachlässigen darf. Unter dieser Voraussetzung des Parallelismus der Schichten sind also nur zwei Unbekannte zu bestimmen, verticale Geschwindigkeit und Druck.

Wir nehmen die Axe der $x$ in der Richtung der Schwere, folglich:

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad X = g.$$

Die zwei letzten Gleichungen (1) liefern:

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} = 0;$$

welches zeigt, dass in allen Punkten desselben horizontalen Schnittes gleicher Druck stattfindet. Die erste Gleichung (1) wird:

$$\text{(a)} \qquad \frac{dp}{dx} = \varrho \left( g - \frac{du}{dt} - u \frac{du}{dx} \right).$$

Die Gleichung der Continuität (3) lässt sich im vorliegenden Falle nicht anwenden, weil sie die Derivirten von $u$, $v$, $w$ enthält; denn obgleich $v$ und $w$ gegen $u$ sehr klein sind, so kann man doch nicht sagen, dass ihre Derivirten gegen die von $u$ vernachlässigt werden dürfen. Die Continuität wird hier einfach dadurch ausgedrückt, dass man die Menge Flüssigkeit, welche durch irgend einen Querschnitt während unendlich kleiner Zeit geht, derjenigen gleichsetzt, welche unterdessen durch

die Oeffnung ausfliesst. Bezeichnet man mit $\omega$ den Flächeninhalt eines in der Entfernung $x$ vom Ursprung durch das Gefäss geführten Horizontalschnitts, mit $\Omega$ den Flächeninhalt der Oeffnung und mit $U$ die Ausflussgeschwindigkeit, so sind $\omega u dt$ und $\Omega U dt$ die gleichzusetzenden Volumina; man erhält folglich die Bedingung $\omega u = \Omega U$ oder:

$$\text{(b)} \qquad u = \frac{\Omega U}{\omega},$$

wo die Werthe von $u$, $U$ sich auf denselben Zeitpunkt beziehen. $U$ ist Function von $t$ allein; $\omega$ ist eine durch die Gestalt des Gefässes gegebene Function von $x$, $u$ eine Function von $x$ und $t$. Lässt man $t$ allein in $u$ sich ändern, so erhält man die Geschwindigkeiten verschiedener Schichten bei ihrem Durchgang durch denselben Schnitt; ändert man $x$ allein, so erhält man die Geschwindigkeiten verschiedener Schichten zu derselben Zeit; Aenderung von $x$ und $t$ zugleich ohne Abhängigkeit zwischen beiden giebt die Geschwindigkeit, welche zu einer anderen Zeit in einem anderen Schnitte stattfindet. Will man die Geschwindigkeit erfahren, welche nach der Zeit $dt$ der Schicht zukommt, die für einen gegebenen Werth von $t$ und von $x$ die Geschwindigkeit $u$ hat, so muss man $t$ um $dt$ und $x$ um $dx = u dt$ ändern.

Vermöge (b) kann man $u$ aus (a) eliminiren; man erhält

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\left(g - \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Durch Multipliciren mit $dx$ und Integriren nach $x$ von der oberen Fläche an findet man:

$$p = g\varrho x - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{\omega} - \frac{\varrho\Omega^2 U^2}{2\omega^2} + C.$$

Die Integrationsconstante $C$ enthält kein $x$, kann aber von $t$ abhängen. Das Integral $\int\frac{dx}{\omega}$ lässt sich in jedem besonderen Falle berechnen, da $\omega$ eine bekannte Function von $x$ ist.

Es sind nun zwei verschiedene Fälle zu betrachten: entweder wird das Niveau der Flüssigkeit auf derselben Höhe erhalten, oder es sinkt durch den Ausfluss der Flüssigkeit, die nicht ersetzt wird, herab.

178. Zuerst betrachten wir den Fall, wo die Flüssigkeit beständig dieselbe Höhe behält. Der Abstand ihrer Oberfläche vom Anfangspunkte der $x$ sei $h$, von der Oeffnung $l$. Den constanten Druck auf die Oberfläche bezeichne $P$, den Druck auf die Oeffnung $P'$. Wenn sich der ganze Apparat in demselben gasförmigen Mittel befindet, so ist $P' = P$.

Die Constante der vorigen Gleichung bestimmen wir so, dass $p = P$ wird für $x = h$; daraus findet man:

$$C = P - g\varrho h + \varrho \frac{\Omega^2 U^2}{2 O^2},$$

wenn $O$ den Inhalt der Oberfläche bezeichnet. Demnach ist:

$$\text{(c)} \qquad p = P + \varrho g(x-h) - \varrho \Omega \frac{dU}{dt} \int_h^x \frac{dx}{\omega} - \frac{\varrho \Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Für $x = h + l$ hat man $p = P'$, $\omega = \Omega$; diesen drei Werthen muss die Gleichung (c) genügen. Indem wir setzen:

$$\int_h^{h+l} \frac{dx}{\omega} = m, \quad P - P' = g\varrho\delta,$$

erhalten wir daher:

$$\text{(d)} \qquad g\,(l + \delta) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{U^2}{2}.$$

Diese Gleichung giebt:

$$dt = \frac{2m\Omega\, dU}{k^2 - \alpha^2 U^2},$$

wenn man setzt:

$$1 - \frac{\Omega^2}{O^2} = \alpha^2, \quad 2g\,(l + \delta) = k^2;$$

$\alpha$ ist von der Einheit wenig verschieden. Die Integration liefert:

$$t = \frac{m\Omega}{k\alpha} \log \frac{1}{C}\left(\frac{k + \alpha U}{k - \alpha U}\right);$$

die Constante $C$ muss man aus dem Anfangswerthe von $U$ bestimmen. Sind die Geschwindigkeiten Null für $t = 0$, so ergiebt sich $C = 1$, und die Gleichung, nach $U$ aufgelöst, wird:

$$U = \frac{k}{\alpha} \frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}.$$

Da $U$ bestimmt ist, so findet man $u$ aus der Gleichung $u = \frac{\Omega U}{\omega}$ und $p$ aus der Gleichung (c).

Die Exponentialgrössen nähern sich mit wachsendem $t$ um so rascher der Null, je kleiner $\Omega$ ist; $U$ nähert sich dadurch dem Grenzwerthe $\sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$, sowie $u$ und $p$ gegen entsprechende Grenzen convergiren. Mit Vernachlässigung von $\frac{\Omega^2}{O^2}$ wird der Grenzwerth der Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2g(l+\delta)}$.

Wenn zugleich $\delta = 0$ ist, d. h. an der oberen Fläche und an der Oeffnung derselbe Druck stattfindet, so wird die Ausflussgeschwindigkeit $\sqrt{2gl}$. Dieselbe Geschwindigkeit würde ein Körper erlangen, wenn er im leeren Raum fallend den Weg $l$ zurücklegte.

Nachdem die Geschwindigkeit $U$ constant geworden, hat man $\frac{dU}{dt} = 0$, und die Gleichung (c) vereinfacht sich zu:

$$p = P + \varrho g (x - h) - \varrho \frac{\Omega^2 U^2}{2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Im Gleichgewicht würde der Druck

$$P + \varrho g (x - h)$$

betragen. Der Druck der Bewegung ist daher kleiner als der Druck des Gleichgewichts für alle Schnitte, bei welchen $\omega < O$, und grösser für alle Schnitte, bei welchen $\omega > O$.

Um das Volumen $V$ der bis zu Ende der Zeit $t$ ausgeflossenen Flüssigkeit zu finden, muss man $\Omega U dt$ zwischen 0 und $t$ integriren. Man findet leicht:

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}} \log \frac{e^{\frac{k\alpha t}{2m\Omega}} + e^{-\frac{k\alpha t}{2m\Omega}}}{2}.$$

Nach Verlauf einer gewissen Zeit darf man die zweite Expo-

nentialgrösse vernachlässigen und erhält dadurch, indem man für $\alpha$ und $k$ ihre Werthe setzt:

$$V = \frac{\sqrt{2g\,(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}} \cdot t - \frac{2m\,log\,2}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}.$$

Der erste Summand ist das Volumen, welches ausgeflossen wäre, wenn die Geschwindigkeit vom Anfang an ihren Grenzwerth $\frac{\sqrt{2g\,(l+\delta)}}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{O^2}}}$ gehabt hätte.

179. Wir gehen jetzt auf den Fall über, wo die Flüssigkeit nicht ersetzt wird, ihr Niveau also herabsinkt und $h$ folglich eine unbekannte Function von $t$ ist.

Die Gleichungen (a), (b), (c), (d) gelten auch hier; nur sind $m$ und $O$ jetzt bekannte Functionen von $h$, und $l$ hängt von $h$ ab durch die Gleichung:

$$h + l = a,$$

wo $a$ den constanten Abstand der Oeffnung vom Anfangspunkte der $x$ bezeichnet. Den vier Gleichungen muss man noch eine hinzufügen, welche ausdrückt, dass die während irgend eines Intervalls $dt$ ausfliessende Flüssigkeit das Volumen hat, welches zwischen den zwei Oberflächen enthalten ist, die dem Anfang und dem Ende dieses Intervalls entsprechen. Diese Gleichung ist:

$$\text{(e)} \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\Omega\,U}{O}.$$

Die Gleichung (d) wird, indem man $a - h$ statt $l$ schreibt:

$$\text{(f)} \qquad g\,(a + \delta - h) = m\,\Omega\,\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2\,U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Man hat also das System der zwei simultanen Gleichungen (e) und (f) zu integriren.

Durch Eliminiren von $dt$ erhält man:

$$g\,(a + \delta - h) = \frac{m\,\Omega^2}{O}\,U\,\frac{dU}{dh} + \frac{\Omega^2\,U^2}{2}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right)$$

oder, wenn man $U^2 = 2gz$ setzt:

$$\frac{dz}{dh} + \frac{O}{m}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right)z + \frac{O}{m\,\Omega^2}(h - a - \delta) = 0;$$

eine lineare Gleichung erster Ordnung in Bezug auf $z$, die man in jedem Falle integriren kann, da $O$ und $m$ bekannte Functionen von $h$ sind.

Wenn $z$ und somit $U$ als Function von $h$ bekannt ist, so liefert die Gleichung (e) auch $t$ als Function von $h$; und umgekehrt werden $h$ und $U$ als Functionen von $t$ erhalten. Der Werth von $u$ wird durch die Gleichung (b) gegeben, und derjenige von $p$ durch (c). Die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge bestimmt sich dadurch, dass man das Volumen berechnet, welches zwischen dem anfänglichen und dem variablen Niveau enthalten ist. Der Werth von $t$ liefert für $h = a$ die ganze Dauer des Ausflusses.

180. Ist $\Omega$ ausserordentlich klein im Vergleich zu den horizontalen Schnitten des Gefässes, so wird die Gleichung (d) sehr einfach. Man darf dann sowohl bei veränderlichem als constantem Niveau $\frac{\Omega}{O}$ und $m\Omega$ vernachlässigen, $m\Omega$ jedoch nur, sofern $\frac{dU}{dt}$ nicht sehr gross ist, was aber im Anfang der Bewegung stattfindet. Man erhält dadurch:

$$U^2 = 2g\,(l + \delta),$$

so dass $U$ den Grenzwerth hat, den wir bei constantem Niveau für $t = \infty$ gefunden haben.

Diese Gleichung bleibt geltend, sofern nur die Oeffnung sehr klein ist, wie auch ihre Ebene gerichtet sein mag.

Die Erfahrung giebt aber die wirkliche Geschwindigkeit, wenn man sie aus dem Flächeninhalte der Oeffnung und dem ausgeflossenen Volumen bestimmt, nur gleich 0,62 $U$.

## Permanente Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit.

181. Erhält man das Niveau einer Flüssigkeit beständig auf gleicher Höhe, so tritt nach Verlauf einer gewissen Zeit ein permanenter Zustand ein, bei welchem alle Umstände in demselben Punkt dieselben bleiben und nur von einem Punkte zum anderen variiren. Zwei Molekel, welche zu verschiedener Zeit den nämlichen Punkt einnehmen, werden dann dieselbe Curve in identischer Weise beschreiben.

Wir nehmen die Axe der $x$ in der Richtung der Schwere. Das Princip von d'Alembert liefert folgende Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(g - u'),\quad \frac{dp}{dy} = -\varrho v',\quad \frac{dp}{dz} = -\varrho w',$$

worin $u'$, $v'$, $w'$ die Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten irgend einer Molekel in einem gewissen Punkt nach der Zeit bezeichnen. Als Incremente der Coordinaten dieser Molekel mögen $dx$, $dy$, $dz$ dem Zeitincrement $dt$ entsprechen. Indem wir die vorstehenden Gleichungen durch $dx$, $dy$, $dz$ multipliciren und addiren, erhalten wir:

$$dp = g\varrho\, dx - \varrho(u'dx + v'dy + w'dz)$$

folglich, wenn $V$ die Geschwindigkeit der Molekel in irgend einem Punkte ihrer Bahn bezeichnet:

$$dp = g\varrho\, dx - \frac{\varrho}{2}\, d.V^2.$$

Integrirt man zwischen zwei Punkten dieser Trajectorie, welchen die Abscissen $x_0$, $x$ angehören, so ergiebt sich:

$$\text{(a)} \qquad p - p_0 = g\varrho\,(x - x_0) - \frac{\varrho}{2}\,(V^2 - V_0^2);$$

$p_0$, $V_0$ sind die Werthe von $p$, $V$ im ersten der beiden Punkte.

Nehmen wir nun an, die freie Oberfläche der Flüssigkeit bilde genau eine Horizontalebene und sei in allen Punkten einem gleichen und constanten Drucke $P$ unterworfen; zählen wir überdies die $x$ von dieser Ebene an. Setzt man in der Gleichung (a)

$$x_0 = 0, \quad p_0 = P,$$

so liegt der erste von beiden Punkten der Trajectorie in der freien Oberfläche, und man erhält:

$$p - P = g\varrho x - \frac{\varrho}{2}(V^2 - V_0^2).$$

In der Tiefe $h$ unter dem oberen Niveau habe das Gefäss eine sehr kleine Oeffnung; man darf dann die Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung dieser Oeffnung als gleich betrachten, so dass $V$ für $x = h$ nur einen Werth hat. Bezeichnet $g\varrho\delta$ den Unterschied der äusseren Drucke an der Oberfläche und an der Oeffnung, so giebt die vorstehende Gleichung, indem man $x = h$ setzt:

$$-g\varrho\delta = g\varrho h - \frac{\varrho}{2}\,(V^2 - V_0^2)$$

oder:

$$V^2 - V_0^2 = 2g\,(h + \delta).$$

Das Verhältniss der Fläche der Oeffnung zum Inhalt der Oberfläche sei $k$; dann hat man $V_0 = kV$, folglich:

$$V^2 (1 - k^2) = 2g (h + \delta),$$

mithin:

$$V = \sqrt{\frac{2g (h + \delta)}{1 - k^2}}.$$

Bei sehr kleinem $k$ darf man $k^2$ vernachlässigen und erhält:

$$V = \sqrt{2g (h + \delta)}.$$

Diese Resultate haben wir vorher unter specielleren Voraussetzungen gefunden.

## Ausfluss einer elastischen Flüssigkeit.

182. Auch hier machen wir die Voraussetzung des Parallelismus der Schichten, wodurch die jetzige Aufgabe der vorletzten sehr ähnlich wird; nur ist es erlaubt, die Schwere ausser Acht zu lassen, da diese keinen merklichen Einfluss auf den Druck hat.

Die Gleichung (a) vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{dp}{dx} + \varrho \frac{du}{dt} + \varrho u \frac{du}{dx} = 0.$$

Um die Gleichung der Continuität zu erhalten, betrachtet man zwei den Werthen $x$ und $x + dx$ entsprechende horizontale Schnitte; man sucht die Gasmenge, welche während der Zeit $dt$ durch den oberen Schnitt eintritt, und diejenige, welche unterdessen durch den unteren austritt. Der Ueberschuss der ersten Masse über die zweite, wenn man ihn durch das Volumen $\omega dx$ theilt, giebt das partielle Differential der Dichte nach der Zeit. Man findet auf diese Weise:

$$\omega \frac{d\varrho}{dt} + \frac{d \cdot \varrho \omega u}{dx} = 0.$$

Bei constanter Temperatur ist:

$$p = k\varrho,$$

wo $k$ eine gegebene Constante.

Vorstehende drei Gleichungen bestimmen $p$, $\varrho$, $u$ als Functionen von $t$ und $x$.

Durch Eliminiren von $\varrho$ erhält man:

$$\frac{k}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = 0, \quad \omega \frac{dp}{dt} + \frac{d \cdot p \omega u}{dx} = 0.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen sind nicht unter endlicher Form integrirbar.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, die Ausflussgeschwindigkeit zu kennen, nachdem Druck und Dichte in jedem Punkt constant geworden sind: ein Zustand, welcher bald eintritt, wenn das Gefäss mit einem Behälter in Verbindung steht, der das Gas ersetzt und an der oberen Fläche einen constanten Druck unterhält.

Ist dieser Zustand eingetreten, so hat man $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dp}{dt} = 0$, und die vorigen Gleichungen werden:

$$\frac{k}{p}\frac{dp}{dx} + u\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d \cdot p\omega u}{dx} = 0.$$

Die Integrale beider Gleichungen sind:

$$p\omega u = c, \quad k \log p + \frac{u^2}{2} = c',$$

während $c$, $c'$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Es sei $O$ der Inhalt der oberen Fläche des Gases im Gefässe, $P$ der Druck an derselben, $U$ die Geschwindigkeit; die entsprechenden Werthe an der Oeffnung seien $P'$, $U'$, $O'$. Dann hat man:

$$PUO = c, \quad 2k \log P + U^2 = 2c',$$
$$P'U'O' = c, \quad 2k \log P' + U'^2 = 2c';$$

welche vier Gleichungen die Constanten $c$, $c'$ sowie die Ein- und Ausflussgeschwindigkeit bestimmen.

Das Eliminiren von $c$, $c'$ ergiebt:

$$U' = \frac{PO}{P'O'} \cdot U, \quad U'^2 = U^2 + 2k \log \frac{P}{P'};$$

und daraus findet sich:

$$U = \sqrt{\frac{2k \log \frac{P}{P'}}{\frac{P^2 O^2}{P'^2 O'^2} - 1}}, \quad U' = \sqrt{\frac{2k \log \frac{P}{P'}}{1 - \frac{P'^2 O'^2}{P^2 O^2}}}.$$

Die Oeffnung $O'$ ist kleiner als $O$, und der Druck $P'$ muss kleiner sein als $P$, weil sonst kein Ausfluss stattfindet; folglich sind die Zähler und Nenner unter den Wurzelzeichen positiv und somit $U$, $U'$ reell.

Es sind nun auch $c$, $c'$ bekannt, und man kennt daher $p$, $u$ als Functionen von $\omega$ und folglich von $x$.

Bei sehr kleinem $\frac{O'}{O}$ ist $U$ sehr klein und $U' = \sqrt{2k \log \frac{P}{P'}}$.

## Bemerkungen über den Widerstand der Flüssigkeiten.

183. Wenn ein fester Körper sich in einer Flüssigkeit bewegt, so erfährt er einen Widerstand, welcher abhängt von seiner Gestalt und Geschwindigkeit und von der Natur der Flüssigkeit. Der Druck auf die Punkte seiner Oberfläche ist dann sehr verschieden von demjenigen, welcher im Zustande des Gleichgewichts stattfinden würde, und die Rechnung konnte noch nicht mit Erfolg darauf angewendet werden. Selbst die Versuche haben noch keine empirischen Gesetze von solcher Allgemeinheit ergeben, dass diese der Anwendung auf Körper von beliebiger Gestalt fähig wären. Doch hat man einige hinlänglich allgemeine Resultate gefunden in Bezug auf den Widerstand bewegter Flüssigkeiten gegen Ebenen, die sich parallel zu sich selbst bewegen. Diese Resultate und die Versuche, aus welchen man dieselben hergeleitet hat, gehören aber in die Maschinenlehre. Wir beschränken uns auf einen Fall, welcher sich durch Rechnung behandeln lässt, nämlich auf Bestimmung des Drucks, der von einem Wasserstrahle gegen eine Ebene ausgeübt wird.

184. Druck eines Strahls auf eine Ebene. — Eine Flüssigkeit von der Dichte $\varrho$ fliesse aus durch eine Oeffnung von der Fläche $\omega$. Die Geschwindigkeiten aller Molekel, während sie durch die Oeffnung gehen, seien gleich, parallel und von der Zeit unabhängig. Von der Schwere wollen wir absehen, um nur die Wirkung zu betrachten, welche die Flüssigkeit vermöge ihrer Ausflussgeschwindigkeit ausübt. Der Strahl treffe eine Ebene, die entweder fest ist oder sich parallel zu sich selbst gleichförmig bewegt, und die Flüssigkeit fliesse längs derselben ab. Diese Ebene sei hinreichend ausgedehnt, damit alle Molekel sie nur mit Geschwindigkeiten verlassen, welche zu ihr parallel sind. Man soll den Druck bestimmen, welchen sie auszuhalten hat.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo die Ebene in Ruhe

bleibt und senkrecht auf der Richtung des Wasserstrahls steht. Die constante Geschwindigkeit desselben sei $v$. Wir nehmen die Axe der positiven $x$ in der Richtung des Strahls. $X$ bezeichne die Kraft, welche das Flächenelement $d\lambda$ der Ebene äussert, und welche dem Druck der Flüssigkeit auf dasselbe gleich und entgegengesetzt ist. Man hat:

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Statt $\Sigma X d\lambda$ schreiben wir $R$, dann ist:

$$R = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Unter Voraussetzung, dass der Zustand unveränderlich geworden ist, integriren wir diese Gleichung in Bezug auf die Zeit zwischen zwei um die Zeiteinheit entfernten Epochen; dies giebt:

$$R = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0.$$

Beide Summen erstrecken sich über dieselben Molekel. Sobald eine Molekel die widerstehende Ebene verlässt, ist für sie $\frac{dx}{dt} = 0$. Die Molekel auf der Ebene bilden in jedem Augenblick ein identisches System. Daher ist offenbar $R = v(\Sigma' m - \Sigma m)$, wenn $\Sigma m$ die Menge Flüssigkeit vorstellt, welche sich zu Anfang des betrachteten Zeitintervalls in dem Strahl befand, und $\Sigma' m$ den Theil dieser Flüssigkeit, der sich am Ende noch in demselben befindet. Der Unterschied beider Mengen ist die während der Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeit $\varrho \omega v$; folglich hat man:

$$R = -\varrho \omega v^2.$$

185. Die Ebene werde nun parallel zu sich selbst bewegt und äussere in jedem Punkt nur normale Kräfte. Diejenige Componente ihrer Geschwindigkeit, welche in die Ebene selbst fällt, kommt nicht in Betracht, sondern blos die normale Geschwindigkeit $u$, welche wir als positiv betrachten, wenn sie mit $v$ gleiche, und als negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung hat. Man ändert nichts an den Druckkräften, wenn man allen Punkten des Systems eine gemeinsame Bewegung ertheilt: der gegenwärtige Fall lässt sich daher auf den vorigen zurückführen. Dies geschieht, indem man $-u$ zu der Geschwindig-

keit eines jeden Punktes addirt, wodurch die Ebene zur Ruhe kommt und die Stromgeschwindigkeit $v - u$ wird. Der Ausdruck für den Widerstand gegen die Ebene ist folglich $\varrho\omega(v-u)^2$.

186. Die Ebene mache endlich mit der Richtung des Strahls irgend einen Winkel $\theta$ und bewege sich parallel zu sich selbst. Wir zerlegen ihre Geschwindigkeit in zwei Componenten, von welchen eine stets in die Ebene hineinfällt und ausser Acht bleibt, während die zu berücksichtigende $u$ parallel zur Richtung des Strahls ist. Ertheilen wir dem ganzen System eine mit $u$ gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit: die Ebene wird dadurch fest und die Stromgeschwindigkeit $v-u$.

Nimmt man jetzt die Axe der $x$ senkrecht zu der festen Ebene, so gilt noch immer die Gleichung:

$$\Sigma X d\lambda = \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0;$$

und nachdem der Zustand der Flüssigkeit permanent geworden ist, stellt das zweite Glied die während der Zeiteinheit ausgeflossene Masse $\varrho\,\omega\,(v - u)$ dar, multiplicirt mit der zur Ebene senkrechten Componente $(v-u)\sin\theta$ der Geschwindigkeit $v-u$. Der Druck auf die bewegte Ebene beträgt daher:

$$\varrho\,\omega\,(v - u)^2 \sin\theta.$$

Bezeichnet $a$ die Geschwindigkeit der Ebene in der Richtung der Normalen, so ist $u = \frac{a}{\sin\theta}$, und der Druck wird durch diese Substitution:

$$\varrho\,\omega\,\frac{(v\sin\theta - a)^2}{\sin\theta}.$$

Bleibt die Ebene in Ruhe, so ist der Druck:

$$\varrho\,\omega v^2 \sin\theta.$$

Man findet diese Formeln durch andere Betrachtungen bewiesen in dem Mémoire von Coriolis sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines. Dasselbe steht im 21. Heft des Journal de l'Ecole Polytechnique.

## Von den kleinen Bewegungen der elastischen Flüssigkeiten.

187. Wenn alle Molekel eines Gases nur sehr kleine Bewegungen haben, so vereinfachen sich die allgemeinen Gleichungen bedeutend und führen zu einigen einfachen Gesetzen, welche wir entwickeln wollen.

Wir setzen voraus, dass der Ausdruck $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ in jedem Augenblick das Differential einer Function $\varphi$ von $x$, $y$, $z$, $t$, nach den Variablen $x$, $y$, $z$ allein genommen, bilde. Bekanntlich wird dazu erfordert und genügt es, dass die Anfangswerthe von $u$, $v$, $w$ die partiell nach $x$, $y$, $z$ genommenen Ableitungen einer und derselben Function dieser drei als unabhängig betrachteten Variablen darstellen; was z. B. dann stattfindet, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind.

Wir werden daher bei den folgenden Untersuchungen die Gleichung (6) der Nr. 172 anwenden. Zunächst aber wollen wir die Vereinfachungen derselben vornehmen, welche sich aus der Annahme ergeben, dass die Bewegungen sehr klein bleiben.

Im Gleichgewichtszustande des Gases sei $v$ dessen überall gleiche Temperatur, $D$ seine überall gleiche Dichte, die des Quecksilbers zur Einheit genommen, $p_0$ seine elastische Kraft und $h$ die Höhe des Quecksilbers, welche sie misst; $g$ bezeichne die Schwere. Man hat:

$$p_0 = gh.$$

Die variable Dichte des Gases heisse $\varrho$, seine positive oder negative Condensation $\gamma$ und $p$ seine elastische Kraft. Dann ist:

$$\varrho = D(1 + \gamma)$$

und bei gleicher Temperatur mit der des Gleichgewichtszustandes

$$p = gh(1 + \gamma).$$

Aber die Verdichtung (Verdünnung) $\gamma$ entwickelt (bindet) eine gewisse Wärmemenge, welche ihr so lange proportional bleibt, als $\gamma$ sehr klein ist, was wir annehmen. Wenn die Verdichtungen und Verdünnungen abwechselnd rasch genug auf einander folgen, wie dies bei den nachstehenden Untersuchungen der Fall sein wird, so hat weder die bei der Verdichtung frei werdende Wärme Zeit sich zu verbreiten, noch kann die Umgebung die bei der Verdünnung gebundene Wärme ersetzen. Der Erfolg wird also darin bestehen, dass in den Punkten, in welchen durch Condensation Wärme frei oder gebunden wird, die Temperatur sich um eine Grösse erhöht, welche das Zeichen der Condensation hat und ihrer Grösse proportional ist. Sollte dagegen die erforderliche Zeit zur Verbreitung oder zum Ersatz dieser Wärme sich finden, so wäre letztere ausser Acht zu lassen.

Es bezeichne $\theta$ die positive oder negative Zahl von Centesimalgraden, um welche bei einer Condensation $\gamma$ die Temperatur $v$ des Gases steigt; seine specifische Wärme bei constantem Druck heisse $c$, bei constantem Volumen $c'$; sein Ausdehnungscoëfficient sei $\alpha$. In der Physik wird gezeigt, dass zwischen diesen Grössen die Beziehung besteht:

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right).$$

Man hat ferner die Proportion:

$$p : p_0 = D(1+\gamma)\left[1 + \alpha(v+\theta)\right] : D(1+\alpha v).$$

Aus ihr folgt, wenn man $gh$ statt $p_0$ setzt und das Product der sehr kleinen Grössen $\gamma$, $\theta$ sowie höhere Potenzen von $\alpha$ als die erste vernachlässigt:

$$p = gh(1 + \gamma + \alpha\theta);$$

folglich, indem man für $\alpha\theta$ vorstehenden Werth nimmt:

$$p = gh\left(1 + \gamma\frac{c}{c'}\right),$$

und daher:

$$\frac{dp}{\varrho} = \frac{ghc}{Dc'}\,\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

Die Gleichung (6) der Nr. 172 liefert jetzt, da wir $X$, $Y$, $Z$ gleich Null voraussetzen:

$$\frac{ghc}{Dc'}\log(1+\gamma) = -\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Wir nehmen an, dass die Verdichtungen und Geschwindigkeiten zu Anfang und zu jeder Zeit sehr klein sind. Man darf deshalb die Quadrate von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ vernachlässigen und $\gamma$ statt $log(1+\gamma)$ nehmen. Dadurch reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$\frac{ghc}{Dc'}\gamma = -\frac{d\varphi}{dt}$$

oder, wenn man $\frac{ghc}{Dc'} = a^2$ setzt, auf:

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{1}$$

Die Gleichung der Continuität wird zunächst:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.(1+\gamma)\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0$$

und vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen $\gamma$ und $\varphi$.

Durch Eliminiren von $\gamma$ zwischen ihnen erhält man:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \tag{3}$$

Somit ist das Problem zurückgebracht auf die Integration einer linearen Partialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten. Die willkürlichen Functionen bestimmt man aus den Anfangswerthen von $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ ohne weitere Bedingungen, wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten hin unendlich ist. Im anderen Falle gelten, wie wir wissen, besondere Gleichungen für die Grenzen, welche die Schwierigkeiten der Rechnung bedeutend vergrössern.

Der Anfangswerth von $\frac{d\varphi}{dt}$ wird bekannt durch jenen von $\gamma$, welcher nothwendig gegeben sein muss. Der Anfangswerth von $\varphi$ ergiebt sich bis auf eine Constante aus den Anfangswerthen der Geschwindigkeitscomponenten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, welche ebenfalls gegeben sein müssen. Diese Constante hat je-

doch keinen Einfluss auf die gesuchten Grössen, welche alle durch Differenziiren der Function $\varphi$ erhalten werden; man darf sie deshalb ausser Acht lassen.

188. Die Wirkungen legen sich über einander. — Denkt man sich in einer nach allen Seiten hin unendlichen elastischen Flüssigkeit verschiedene Anfangszustände und die aus ihnen hervorgehenden partiellen Bewegungen, welche, jede für sich, der Gleichung (3) genügen; denkt man sich darauf einen neuen Anfangszustand, welcher aus der Zusammensetzung der ersten resultirt, so kann die auf ihn folgende Bewegung zu irgend einer Epoche erhalten werden durch Zusammensetzen der partiellen Bewegungen, welche zu dieser Epoche stattfinden würden. Diese Zusammensetzung ist in dem gewöhnlichen Sinne gemeint für die Geschwindigkeiten und besteht in einer algebraischen Addition für die Verdichtungen.

Es seien $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, . . . die Werthe von $\varphi$, welche den partiellen Bewegungen entsprechen und einzeln der Gleichung (3) genügen. Setzen wir:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots,$$

so genügt die Function $\varphi$ selbst der Gleichung (3) und stellt folglich eine besondere Bewegung der Flüssigkeit dar. Ihre Ableitung nach $t$ ist die Summe der Ableitungen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Nimmt man alle diese Ableitungen für $t = 0$, so sieht man zunächst, dass die anfängliche Verdichtung der Flüssigkeit in der durch $\varphi$ dargestellten Bewegung die Summe jener anfänglichen Verdichtungen ist, welche den verschiedenen partiellen Bewegungen angehören. Ebenso sind die Ableitungen von $\varphi$ nach $x$, $y$, $z$ die Summen der Ableitungen von $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, . . .; und setzt man hier $t = 0$, so zeigt sich, dass in der durch $\varphi$ dargestellten Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit einer jeden Molekel aus der Zusammensetzung derjenigen Geschwindigkeiten resultirt, welche in den einzelnen Anfangszuständen dieser Molekel zukommen würden. Mithin ist der Anfangszustand der Flüssigkeit in der durch $\varphi$ dargestellten Bewegung, sowohl was die Condensationen als was die Geschwindigkeiten betrifft, identisch mit demjenigen, welchen wir im Auge hatten; daher stimmen auch die auf diese beiden Anfangszustände folgenden Bewegungen jederzeit überein. Legt man jetzt der

Variablen $t$ in den Functionen $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ einen beliebigen Werth bei, so bleiben diese immer die Summen der entsprechenden Ableitungen von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$. Damit ist bewiesen, dass in der auf den resultirenden Anfangszustand folgenden Bewegung die Verdichtungen und Geschwindigkeitscomponenten in jedem Augenblick die algebraischen Summen von denjenigen sind, welche zu derselben Zeit und in denselben Punkten den durch die einzelnen Anfangszustände bestimmten Bewegungen entsprechen würden.

## Bewegung eines Gases in einem unendlichen Cylinder.

189. Der senkrechte Schnitt dieses unendlichen, mit einem homogenen Gase angefüllten Cylinders bilde irgend eine Curve. In einer beliebigen Ausdehnung werden die Gasmolekel auf solche Weise verschoben, dass diejenigen, welche einer auf den Kanten senkrechten unendlich dünnen Schicht angehörten, ihr noch angehören und sich parallel mit den Kanten fortbewegt haben; darauf werden allen verschobenen Molekeln Geschwindigkeiten mitgetheilt, welche parallel zu den Kanten und für die in demselben Schnitt befindlichen Molekel gleich gross sind: und nun wird das Fluidum sich selbst überlassen, ohne dass irgend eine äussere Kraft wirkt. Man soll alle Umstände der Bewegung bestimmen, welche aus diesem Anfangszustand hervorgeht.

Offenbar wird jede Molekel sich nur parallel mit den Kanten des Cylinders bewegen, und alle in demselben Schnitt befindlichen Molekel werden gleiche Bewegung haben. Wir nehmen die Richtung der Kanten zur Axe der $x$; die Condensation $\gamma$ und die Geschwindigkeit $u$ oder $\frac{d\varphi}{dx}$ hängen somit von $x$ und $t$ allein ab.

Die Gleichungen der Aufgabe sind:

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Die Function $\psi(x)$ möge die Anfangsgeschwindigkeiten ausdrücken und $\chi(x)$ die anfänglichen Verdichtungen, dann muss man haben:

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \text{ für } t = 0.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist:

$$(3) \qquad \varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at),$$

wo $F_1, f_1$ willkürliche Functionen bezeichnen, deren Ableitungen $F, f$ heissen mögen. Zur Bestimmung dieser Derivirten geben die Gleichungen (2):

$$f(x) + F(x) = \psi(x),$$
$$f(x) - F(x) = a\chi(x);$$

daraus folgt:

$$f(x) = \frac{\psi(x) + a\chi(x)}{2}, \; F(x) = \frac{\psi(x) - a\chi(x)}{2}.$$

Differenziirt man jetzt die Gleichung (3) nach $x$ und nach $t$, so findet sich vermöge der für die Functionen $f$, $F$ bestimmten Werthe:

$$u = \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2} + \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2},$$
$$a\gamma = \frac{\psi(x-at) + a\chi(x-at)}{2} - \frac{\psi(x+at) - a\chi(x+at)}{2}.$$

Der Einfachheit wegen behalten wir jedoch die Bezeichnungen $F, f$ bei und schreiben also:

$$(4) \qquad u = F(x + at) + f(x - at),$$
$$(5) \qquad a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Die Functionen $\psi$, $\chi$ sind gegeben für alle Werthe der Variablen zwischen $-\infty$ und $+\infty$; man kennt daher $u$ und $\gamma$ für beliebige Werthe von $x$ und $t$.

Um die Bewegung einer Schicht zu erfahren, welcher im Anfangszustand die Abscisse $\alpha$ zukam, muss man $\frac{dx}{dt}$ statt $u$ in (4) setzen und die so erhaltene Gleichung integriren. Man findet dadurch die Abscisse dieser Schicht als Function der Zeit. Die bei der Integration eingehende Constante bestimmt sich aus der Bedingung, dass $x = \alpha$ für $t = 0$.

190. Wir wollen den besonderen Fall untersuchen, wo die anfängliche Erschütterung begrenzt ist und sich von $x = 0$ bis $x = l$ oder vom Ursprung $A$ bis $B$ erstreckt.

Fig. 13.

Die gegebenen Functionen $\psi$, $\chi$ sind jetzt Null für jeden Werth der Variablen, der kleiner als Null oder grösser als $l$; und folglich ist dasselbe der Fall mit den Functionen $F$, $f$. Wir theilen diese Untersuchung in drei Theile, welche den Abschnitten entsprechen, in welche die anfängliche Erschütterung die Axe der $x$ theilt.

1. Betrachten wir zuerst irgend einen Punkt $M$ ausserhalb $AB$ auf Seite der positiven $x$, für welchen also $x > l$, und setzen wir $t > 0$.

Dann ist:

$$x + at > l$$

und folglich:

$$F(x + at) = 0, \; f(x + at) = 0.$$

Die Formeln (4), (5) vereinfachen sich zu:

$$(6) \qquad \begin{cases} u = f(x - at), \\ a\gamma = f(x - at), \end{cases}$$

so dass man zwischen der Condensation und Geschwindigkeit die einfache Beziehung erhält:

$$u = a\gamma.$$

Damit aber $u$ und $\gamma$ nicht Null seien, muss man haben:

$$x - at \begin{matrix} < l \\ > 0 \end{matrix}$$

oder:

$$t \begin{matrix} > \dfrac{x - l}{a} \\ < \dfrac{x}{a} \end{matrix}.$$

Mithin besteht Ruhe in dem Punkt $M$ bis zu der Epoche:

$$t = \frac{BM}{a},$$

und von da an findet Bewegung durch ihn statt bis zu:

$$t = \frac{AM}{a}.$$

Darauf tritt wieder Ruhe ein und dauert nun ohne Ende fort.

Demnach dauert die Bewegung in jedem Punkt ein Zeitintervall $\frac{l}{a}$ hindurch, und sie pflanzt sich nach der Richtung $BX$ mit constanter Geschwindigkeit $a$ fort. Folglich hat der erschütterte Theil oder die Welle in jedem Augenblick die Länge $l$. In einer solchen Welle kommen gleichzeitig alle Werthe von $u$ und $\gamma$ vor, denn die Variable hat in ihren verschiedenen Schnitten der Reihe nach alle Werthe von 0 bis $l$. Irgend zwei zu verschiedenen Epochen stattfindende Wellen sind also identisch. Indem jeden Augenblick eine neue, mit der vorigen identische Welle entsteht, sieht es so aus, als ob die alte Welle sich mit der Geschwindigkeit $a$ in der Richtung $BX$ fortbewegte; was jedoch nichts weiter sagen will, als dass nach der Zeit $t'$ der Zustand in dem Schnitte $x + a(t' - t)$ genau derselbe ist wie nach der Zeit $t$ in dem Schnitte $x$.

2. Für einen Punkt $M'$, bei welchem $x < 0$ und um so mehr $x - at < 0$, hat man:

$$F(x - at) = 0,\ f(x - at) = 0;$$

die Formeln (4), (5) werden:

$$(7) \qquad \begin{cases} u = F(x + at), \\ a\gamma = -F(x + at), \end{cases}$$

daher:

$$u = -a\gamma.$$

Damit $u$ und $\gamma$ Werthe erhalten, welche von Null verschieden sind, muss man haben:

$$x + at \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix},$$

folglich:

$$t \begin{matrix} > -\frac{x}{a} \\ < \frac{l-x}{a} \end{matrix}.$$

In dem Punkt $M'$ ist daher Bewegung nur während des Zeitintervalls

$$\text{von } t = \frac{AM'}{a} \text{ bis } t = \frac{BM'}{a}.$$

Die Bewegung pflanzt sich in dem Theile $AX'$ wie in $BX$ mit der Geschwindigkeit $a$ fort; sie dauert in jedem Punkt eine Zeit $\frac{l}{a}$ hindurch. Der erschütterte Theil oder die Welle hat jeden Augenblick die Länge $l$, und alle auf einander folgenden Wellen sind identisch. Man kann daher wieder sagen, die Welle schreite in der Richtung der negativen $x$ gleichförmig weiter mit der Geschwindigkeit $a$; der Sinn davon ist, dass nach der Zeit $t'$ in dem Schnitte $x - a(t' - t)$ genau derselbe Zustand stattfindet wie nach der Zeit $t$ in dem Schnitte $x$.

3. Betrachten wir zuletzt einen Punkt $M''$ zwischen $A$ und $B$, so ist:

$$x \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix};$$

daher liegen während einer gewissen Zeit $x - at$ und $x + at$ beide zwischen 0 und $l$, und so lange bestehen alle Glieder in den Formeln (4), (5). Es wird aber $x + at > l$ nach dem Zeitpunkt, für welchen

$$at = BM'',$$

und von da an sind die Functionen von $x + at$ Null. Ferner wird $x - at$ negativ nach der Epoche, für welche

$$at = AM'',$$

und dann verschwinden die Functionen von $x - at$.

Betrachtet man die beiden Theile der Formeln (4), (5) so, als ob sie die Geschwindigkeiten und Condensationen in zwei verschiedenen Wellen ausdrückten, von denen jede mit der Geschwindigkeit $a$, die eine im Sinne der negativen $x$ und die andere im Sinne der positiven $x$, fortschreitet, während sie immer dieselbe Beschaffenheit behalten: so kann man für einen beliebigen Zeitpunkt den Zustand des Gases dadurch erhalten, dass man diese beiden Wellen in die Lage bringt, in welche ihre Bewegung sie zu dieser Epoche geführt hat, und nun die Verdichtungen und Geschwindigkeiten an den Stellen addirt, wo die Wellen sich durchdringen, wenn sie noch nicht gänzlich getrennt sind.

Diejenigen Zustände, welche dem Zeitanfang vorangehen,

würde man erhalten, wenn man dieselben Wellen in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit $a$ während des Zeitraums fortschreiten liesse, um welchen die fragliche Epoche vom Zeitanfang entfernt liegt.

191. Wir haben gesehen, dass eine anfängliche Erschütterung von endlicher Länge zwei Wellen von derselben Länge erzeugt, welche sich mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung bewegen. Es ist aber möglich, dass eine dieser Wellen nicht existirt. Die den Formeln (6) entsprechende Welle verschwindet, wenn man für alle Werthe von $z$ zwischen 0 und $l$ hat:

$$\psi(z) + a\chi(z) = 0.$$

Es bleibt dann nur die den Formeln (7) entsprechende Welle übrig. Diese letzte würde verschwinden und blos die erste übrig bleiben, wenn

$$\psi(z) - a\chi(z) = 0$$

wäre. Damit nur eine Welle vorhanden sei, so ist hiernach nothwendig und hinreichend, dass $\frac{\psi(z)}{\chi(z)} = \pm a$; d. h. es muss im Anfangszustand das Verhältniss der Geschwindigkeit zur Condensation in jedem Punkt des erschütterten Theils $+a$ oder $-a$ betragen.

## Bewegung eines Gases in einem Cylinder, welcher nach einer Richtung begrenzt ist.

192. Nachdem wir die Bewegung in einem nach beiden Richtungen unendlichen Cylinder betrachtet haben, wollen wir jetzt die Aenderung untersuchen, welche sie für den Fall erleidet, wo der Cylinder nach einer Richtung begrenzt ist, also entweder durch eine feste Ebene geschlossen wird oder sich in einen unendlichen Gasvorrath öffnet, der einen constanten Druck auf die Endfläche ausübt.

1. Das Rohr sei durch eine feste Ebene geschlossen. — Zählen wir die positiven $x$ von dieser Ebene an in der Richtung des Rohres.

Es wurde früher allgemein angenommen, dass die Molekel, welche zu Anfang in Berührung mit einer Wand stehen, immer darin bleiben. Demnach ist im vorliegenden Falle die

Geschwindigkeit in dem Schnitte, für welchen $x = 0$, beständig Null, oder man hat:

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ bei jedem } t.$$

Diese neue Bedingung muss mit jenen verbunden werden, welche aus dem Anfangszustande des Gases hervorgehen, der in der ganzen Ausdehnung des Rohrs, also für alle positiven Werthe von $x$ gegeben ist. Wir bezeichnen die anfängliche Geschwindigkeit und Verdichtung wieder durch $\psi(x)$ und $\chi(x)$. Diese Functionen sind nur für die positiven Werthe der Variablen gegeben; für negative Werthe derselben sind sie dagegen ganz willkürlich. Gerade diese Unbestimmtheit ist es, welche die Erfüllung der auf das Ende des Rohrs bezüglichen Bedingung gestattet; denn wir haben gesehen, dass, wenn diese Functionen für alle Werthe der Variablen gegeben sind, der Werth von $\varphi$ vollkommen bestimmt ist, und man ihn keiner neuen Bedingung mehr unterwerfen kann.

Der allgemeine Werth von $\varphi$, welcher der Differentialgleichung genügt, ist immer:

$$(2) \qquad \varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (1) führt zu folgender Gleichung:

$$F(at) + f(-at) = 0.$$

Diese muss für einen in Grösse und Zeichen beliebigen Werth von $t$ gelten; man hat daher für jedes $z$:

$$(3) \qquad F(z) + f(-z) = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Functionen $F$, $f$, welche durch $\psi$, $\chi$ nur für die positiven Werthe der Variablen gegeben sind, auch für ihre negativen Werthe; man erhält nämlich:

$$f(-z) = -F(z), \quad F(-z) = -f(z).$$

Beide Bedingungen können geometrisch sehr einfach dargestellt werden. Denkt man sich die Curven, deren Gleichungen

$$y = F(x), \quad y = f(x)$$

sind, in der ganzen Ausdehnung der Axe der $x$ verzeichnet, so hat der geometrische Ort, welcher aus dem Theile einer Curve über der positiven Hälfte und aus dem Theile der anderen Curve über der negativen Hälfte besteht, den Ursprung zum Mittelpunkt.

Die Bedingung (1), welche die Unbeweglichkeit der einen

Gasschicht ausdrückt, hat also zur vollständigen Kenntniss der Functionen $F, f$ geführt und damit zur Lösung der Aufgabe.

Die Geschwindigkeit $u = \frac{d\varphi}{dx}$ und die Verdichtung $\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ bestimmen sich aus (2) so:

$$u = F(x + at) + f(x - at), \tag{4}$$

$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at). \tag{5}$$

Wenn man hier $-x$ statt $x$ schreibt und den neuen Werth von $u$ durch $u_1$ sowie den von $\gamma$ durch $\gamma_1$ bezeichnet, so erhält man:

$$u_1 = F(-x + at) + f(-x - at) = -f(x - at) - F(x + at) = -u,$$

$$a\gamma_1 = -F(-x + at) + f(-x - at) = f(x - at) - F(x + at) = a\gamma.$$

Es ergeben sich somit in zwei von der festen Ebene gleich weit entfernten Schnitten, welche auf beiden Seiten dieser Ebene liegen, gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten und gleiche Verdichtungen. Dies gilt im Anfangszustand und für jedes $t$.

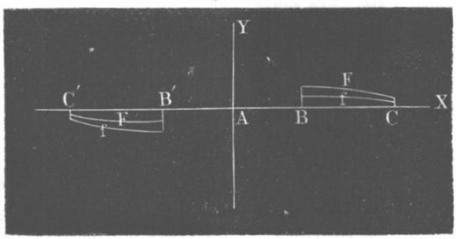
Wir wollen hier eine wichtige Bemerkung machen über das Verfahren, wodurch man in der Rechnung die Bedingungen ausdrückt, welche sich auf die Grenzen beziehen. Die partielle Differentialgleichung würde für die Bewegung des homogenen Gases noch gelten, wenn man unter Wegnahme der festen Wand das Rohr rückwärts unendlich verlängert und mit demselben Gase angefüllt hätte. Ueber den Anfangszustand in dem ganzen Raume, um welchen man das System erweitert hat, kann man willkürlich verfügen; es kommt daher darauf an, ihn so zu wählen, dass wenn man nachher das ganze System sich selbst überlässt, die physikalischen Bedingungen, welche sich auf die Grenzen bezogen, von selbst jeden Augenblick erfüllt werden, und man folglich auf dieselben nicht besonders Rücksicht zu nehmen braucht. Kann man dahin gelangen, so geht die Aufgabe für das begrenzte System in die immer leichtere für das unendliche System mit bekanntem Anfangszustand über.

Hier ist leicht zu sehen, dass man zu dem Ende den Anfangszustand in der Verlängerung des Rohres so wählen muss, wie die Rechnung dies ergab. Denn offenbar bleiben dann die Molekel, welche die Stelle der Wand einnehmen, bestän-

dig in Ruhe, weil sie jeden Augenblick durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte angegriffen werden.

193. Untersuchen wir insbesondere den Fall, wo die anfängliche Erschütterung nur zwischen den Abscissen $d$ und $d + l$ stattfindet. Die Functionen $F, f$ sind jetzt Null für alle positiven Werthe der Variablen, welche nicht zwischen $d$ und $d + l$ liegen; der Gleichung (3) zufolge sind sie aber auch Null für alle negativen Werthe, welche nicht zwischen $-d$ und $-d-l$ liegen. Dies stellt die Figur dar, in welcher:

Fig. 14.




$$AB = AB' = d, \quad BC = B'C' = l.$$

Der Theil $BC$ der Erschütterung erzeugt zwei Wellen, von denen die eine mit der Geschwindigkeit $+ a$ und die andere mit der Geschwindigkeit $- a$ fortschreitet. Der Theil $B'C'$ erzeugt zwei Wellen, welche in Bezug auf die Ebene $A$ immer symmetrisch mit den beiden ersten sind.

Sind die zwei Wellen, welche gegen $A$ fortschreiten, an dieser Ebene angekommen, so setzen sie ihren Weg fort und durchdringen sich, indem ihre Wirkungen sich in den gemeinschaftlichen Punkten nach dem Gesetz der Nr. 188 über einander legen. Hieraus ersieht man, auf welche Weise in dem geschlossenen Rohre $AX$ die Reflexion der von $BC$ gegen $A$ fortschreitenden Welle erfolgt, sobald ihr vorderes Ende $A$ erreicht hat. Um während des Vorgangs dieser Reflexion für einen beliebigen Augenblick den Zustand in irgend einem Schnitte, dessen Abscisse $x \begin{smallmatrix} > 0 \\ < l \end{smallmatrix}$, zu erhalten, denke man sich die Wand $A$ nicht vorhanden, also die von $BC$ gegen $A$ rückende Welle ihren Weg ungehindert fortsetzend; man braucht dann nur die Geschwindigkeit, welche in Folge dieser Welle in dem Schnitte $x$ stattfindet, zu addiren mit jener Geschwindigkeit, welche gleich und entgegengesetzt ist der gleichzeitig in Folge derselben Welle in dem Schnitte $- x$ stattfindenden; die Condensationen beider Schnitte muss man unverändert ad-

diren. Die Reflexion von der Wand $A$ ist beendigt in dem Augenblick, wo das zweite Ende der von $BC$ ausgegangenen Welle in $A$ ankommen würde; die Geschwindigkeit, welche dann in einem Schnitte $x \begin{matrix} > 0 \\ < l \end{matrix}$ stattfindet, ist gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche bei Ankunft des vorderen Wellenendes in dem Schnitte $l - x$ stattgefunden hat; die Condensation aber ist dieselbe. Darauf schreitet die so reflectirte Welle im Sinne der positiven $x$ ohne Ende rückwärts.

Diese Wirkung erfolgt, welche Länge auch der erschütterte Theil haben mag; derselbe kann sich von der Wand $A$ bis $x = \infty$ ausdehnen, er kann auch eine unendlich kleine Länge haben. Findet man es vortheilhaft, die Erschütterung in unendlich kleine Theile zu zerlegen, so hat man nur die Wirkungen zusammenzusetzen, welche den einzelnen Elementen nach einer beliebigen Zeit entsprechen, und man erhält dadurch die Wirkung, welche der gegebenen Erschütterung nach derselben Zeit entspricht.

2. Das Rohr sei offen. — Es öffne sich mit dem senkrechten Schnitte $A$ in einen nach allen Seiten hin unendlichen Gasvorrath, welcher einen constanten Druck auf die Endfläche ausübt. Diesen Druck würde man im Gleichgewicht überall im Gase des Rohrs beobachten; $\gamma$ bezeichnet die Zunahme der diesem Gleichgewicht entsprechenden Dichte. Wir zählen die positiven $x$ wieder von $A$ an in der Richtung des Rohrs.

Für alle Punkte des Gases im Rohre ist:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

und man hat die Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ bei jedem } t. \tag{2}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei $\psi(x)$, die anfängliche Verdichtung $\chi(x)$. Diese Functionen werden nur zwischen $x = 0$ und $x = \infty$ gegeben; sie sind dagegen ganz willkürlich zwischen $x = 0$ und $x = -\infty$. Diese Unbestimmtheit verstattet wieder, dass man der auf das Ende des Rohrs bezüglichen Bedingung genügt.

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist wie früher:

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (2) ergiebt, wenn $z$ der Grösse und dem Zeichen nach beliebig ist und $F$, $f$ die Ableitungen von $F_1$, $f_1$ bezeichnen:

(3) $$F(z) = f(-z).$$

Diese Gleichung bestimmt die Functionen $F$, $f$, welche durch $\psi$, $\chi$ nur für alle positiven Werthe der Variablen gegeben waren, auch für alle negativen Werthe derselben. Construirt man die Curven, deren Gleichungen

$$y = F(x),\ y = f(x)$$

sind, so ist der geometrische Ort, welcher aus dem Theile einer Curve über der positiven Axe der $x$ und aus dem Theile der anderen über der negativen Axe besteht, symmetrisch in Bezug auf die Axe der $y$. Ferner ist hier wie schon in dem vorigen Falle zu bemerken, dass die Aufgabe dieselbe ist, als wenn man das Rohr nach der Seite der negativen $x$ unendlich verlängerte und dem Gase in dieser Verlängerung denjenigen Anfangszustand ertheilte, welcher sich aus den Werthen von $F$, $f$ ergiebt, die wir für die negativen Werthe der Variablen bestimmt haben.

Folgende Formeln drücken $u$ und $\gamma$ aus:

(4) $$u = F(x + at) + f(x - at),$$

(5) $$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Schreibt man $-x$ statt $x$ und bezeichnet die neuen Werthe von $u$, $\gamma$ durch $u_1$, $\gamma_1$, so erhält man unter Rücksicht auf (3):

$$u_1 = F(-x+at) + f(-x-at) = f(x-at) + F(x+at) = u,$$

$$a\gamma_1 = -F(-x+at) + f(-x-at) = -f(x-at) + F(x+at) = -a\gamma.$$

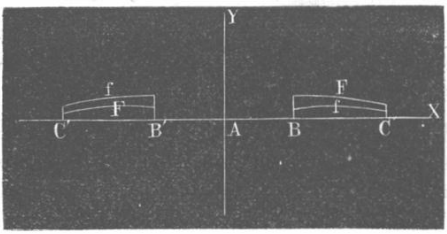
Somit sind in zwei senkrechten Schnitten, welche auf beiden Seiten des Ursprungs liegen und gleich weit von diesem abstehen, die Geschwindigkeiten gleich und gleich gerichtet, die Verdichtungen aber gleich und entgegengesetzt. Dies gilt im Anfangszustande und für jeden Zeitpunkt.

Bei einem offenen Rohre besteht demnach das Mittel, um die Aufgabe auf den Fall eines nach beiden Seiten unendlichen Rohres zurückzuführen, darin, dass man sich die Verlängerung mit demselben Gase erfüllt denkt und diesem einen solchen Anfangszustand beilegt, dass in irgend einem senkrechten Schnitte ganz dieselbe Geschwindigkeit stattfindet wie in dem Schnitte, welcher in der anderen Hälfte des Rohres gleich

weit vom Ursprung entfernt liegt, und dass die Verdichtungen in beiden Schnitten gleich, aber entgegengesetzt sind.

194. Wir wollen den besonderen Fall betrachten, wo die anfängliche Erschütterung eine endliche Ausdehnung $BC$ zwischen den Abscissen $d$ und $d + l$ hat. Die Functionen $F$, $f$ verschwinden jetzt für alle positiven Werthe der Variablen, welche nicht zwischen $d$ und $d + l$ liegen, und zufolge (3) auch für alle negativen Werthe ausserhalb des Intervalls von $-d$ bis $-d-l$. Sie werden durch die Curven der Figur dargestellt. Jede der Erschütterungen $BC$, $B'C'$ erzeugt zwei Wellen, welche mit constanter Geschwindigkeit $a$ fortschreiten. Die beiden Wellen, welche sich von $A$ entfernen, geben zu keiner besonderen Bemerkung Veranlassung. Die beiden anderen kommen zugleich in dem Schnitte $A$ an und setzen dann ihren Gang fort, wobei ihre Wirkungen sich in den gemeinschaftlichen Punkten nach dem Gesetz der Nr. 188 über einander legen. Wenn das zweite Ende einer jeden in $A$ angekommen ist, so sind beide Wellen völlig getrennt, und die von $B'C'$ ausgegangene setzt nun ihren Weg in der Richtung der positiven $x$ bis ins Unendliche fort. Die Reflexion, welche in dem offenen Rohre an der Oeffnung $A$ eintritt, erzeugt also genau diese letzte Welle. Der Vorgang der Reflexion ist analog dem oben beschriebenen.

Fig. 15.




Trifft die reflectirte Welle auf eine neue Oeffnung, welche in den unendlichen Gasvorrath hineingeht, so erleidet sie neuerdings eine Reflexion in derselben Weise und wird wieder identisch mit der ersten einfallenden Welle. Diese Erscheinung wiederholt sich unendlich oft.

## Bewegung eines Gases in einem nach beiden Richtungen begrenzten Rohre.

195. Wenn das Rohr nach beiden Richtungen begrenzt ist, so gehen an seinen Enden, mögen diese offen oder ge-

schlossen sein, ähnliche Wirkungen vor wie diejenigen, welche wir betrachtet haben. Jedes Element der Erschütterung erzeugt zwei Wellen, welche in entgegengesetztem Sinne fortschreiten und an den Enden nach den Gesetzen reflectirt werden, die wir kennen gelernt haben. Hieraus ergiebt sich die Periodicität der Bewegung und die Dauer der Periode.

Betrachten wir zunächst ein an beiden Enden geschlossenes Rohr. Ein unendlich kleines Element der anfänglichen Erschütterung erzeugt zwei elementare Wellen. Verfolgen wir den Gang einer von ihnen. Ist sie am Ende angekommen, so wird sie so reflectirt, dass nach der Reflexion die Verdichtung wieder die vorige ist und die Geschwindigkeit nur ihr Zeichen geändert hat; am zweiten Ende angekommen, erleidet sie eine neue Reflexion, nach welcher die Verdichtung wieder dieselbe ist und die Geschwindigkeit abermals nur das Zeichen geändert hat: sie befindet sich dann wieder in demselben Zustand wie bei ihrem Ausgang. Diese elementare Welle kehrt in ihre anfängliche Lage zurück, nachdem sie mit der Geschwindigkeit $a$ die doppelte Länge des Rohres zurückgelegt hat. Gleichzeitig mit ihr nehmen alle Elementarwellen ihre respectiven Anfangslagen wieder ein; folglich ist in diesem Augenblick der Zustand des Gases in dem ganzen Rohre identisch mit dem Anfangszustand. Die folgenden Zustände sind daher Wiederholungen der bis dahin stattgehabten; und wenn $l$ die Länge des Rohrs, so ist die Dauer der Periode $\frac{2l}{a}$.

Eine analoge Betrachtung zeigt, dass auch in einem an beiden Enden offenen Rohre der Zustand des Gases wieder derselbe wird, wenn die elementare Welle den Weg $2l$ durchlaufen hat.

Ist aber das Rohr an einem Ende geschlossen und am anderen offen, so sind die Umstände nicht ganz dieselben. Damit der Zustand des Gases wieder derselbe werde, muss die elementare Welle zweimal die gleiche Art der Reflexion erleiden; da nun an beiden Enden verschiedene Reflexionen stattfinden, so muss diese Welle die Länge des Rohrs viermal durchlaufen, und folglich beträgt die Dauer der Periode $\frac{4l}{a}$.

Unter Schwingung versteht man eine periodisch wieder-

kehrende Bewegung. Man weiss aus der Physik, dass der Ton um so höher wird, je grösser die Anzahl der Schwingungen in derselben Zeit ist. Die obigen Resultate zeigen, dass der Ton einer an einem Ende offenen und am anderen geschlossenen Röhre die untere Octave von demjenigen bildet, welchen ein gleich langes Rohr giebt, das an beiden Enden offen oder geschlossen ist.

Uebrigens muss man bemerken, dass die Dauer, welche wir für die Periode gefunden haben, eine obere Grenze ist. Wir haben eingesehen, dass nach diesem Zeitintervall derselbe Zustand des Gases wiederkehrt; und im Allgemeinen wird diese Wiederkehr nicht früher eintreten. Der Anfangszustand könnte aber so beschaffen sein, dass er sich vor Ablauf jener Periode identisch wieder erzeugte; offenbar müsste dann die kleinere Periode ein Theiler der oben gefundenen sein.

Wir werden jetzt die drei Fälle der Rechnung unterziehen.

1. Das Rohr sei an beiden Enden geschlossen. — Seine Länge sei $l$; wir behalten die früheren Bezeichnungen bei und haben daher nachstehenden Gleichungen zu genügen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l \text{ bei jedem } t. \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \text{ für } t = 0. \tag{3}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist:

$$\varphi = F_1(x + at) + f_1(x - at).$$

Die Bedingung (2) für $x = 0$ führt zu folgender Gleichung, worin $z$ ganz beliebig:

$$F(z) + f(-z) = 0. \tag{4}$$

Dieselbe Bedingung für $x = l$ liefert:

$$F(l + z) + f(l - z) = 0; \tag{5}$$

auch hier ist $z$ ganz beliebig. Die Bedingungen (3) ergeben:

$$f(x) + F(x) = \psi(x), \; f(x) - F(x) = a\chi(x);$$

hierdurch sind die Functionen $F, f$ für alle Werthe der Variablen zwischen 0 und $l$ bestimmt. Die Gleichungen (4), (5) bestimmen sie nun vollständig; und man ersieht daraus, wie

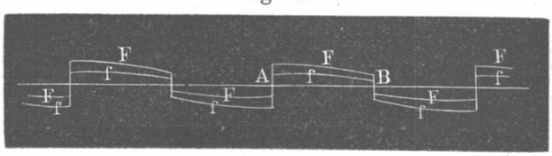
in einem nach beiden Seiten unendlichen Rohre der Anfangszustand des Gases beschaffen sein müsste, um zwischen 0 und $l$ immer diejenigen Wirkungen zu geben, welche in dem geschlossenen Rohre sich erzeugen.

Die Gleichung (4) lehrt, dass wenn man von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ die Curven

$$y = F(x),\ y = f(x)$$

construirt, der Ort aus dem auf einer Seite von $A$ liegenden Theile einer Curve und dem auf der anderen Seite liegenden Theile der anderen Curve den Ursprung $A$ zum Mittelpunkt hat. Die Gleichung (5) lässt dasselbe in Bezug auf den Punkt $B$ sehen. — Da dieser geometrische Ort zwei Mittelpunkte $A$, $B$ hat, so besitzt er noch eine Unzahl andere, welche um die Strecke $l$ von einander abstehen und zu beiden Seiten von $A$ liegen, wie es die Figur zeigt. Es geht daraus hervor,

Fig. 16.




dass die Functionen $F$, $f$ periodisch sind und sich nicht ändern, wenn die Variable um $2l$ zu- oder abnimmt.

Diese wichtige Eigenschaft lässt sich auch in folgender Weise herleiten. Die Gleichung (5) wird, wenn man $z + l$ statt $z$ schreibt:

$$F(2l + z) + f(-z) = 0;$$

folglich vermöge (4):

$$F(z) = F(2l + z).$$

Verwandelt man das $z$ der Gleichung (5) in $z - l$, so erhält man:

$$F(z) + f(2l - z) = 0,$$

und wegen (4):

$$f(2l - z) = f(-z).$$

Die Grössen $u$, $\gamma$ findet man durch Differenziiren von $\varphi$, nämlich:

$$u = F(x + at) + f(x - at),$$
$$a\gamma = -F(x + at) + f(x - at).$$

Aus der Periodicität der Functionen $F, f$ folgt, dass in demselben Punkte die Geschwindigkeit und Condensation respective gleiche Werthe annehmen zu allen Epochen, welche um ein Intervall $T$ aus einander liegen, das durch die Gleichung

$$aT = 2l$$

bestimmt wird. Der Zustand des Gases ist mithin ein periodischer und $\frac{2l}{a}$ die Dauer seiner Periode.

2. Das Rohr sei an beiden Enden offen. — In diesem Falle muss die Verdichtung an beiden Enden beständig Null sein und man daher bei jedem $t$ haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Diese Bedingung ergiebt für ein beliebiges $z$:

(1) $$F(z) = f(-z),$$

(2) $$F(l + z) = f(l - z).$$

Indem man das $z$ der Gleichung (2) in $z + l$ verwandelt, erhält man:

$$F(2l + z) = f(-z),$$

und wegen (1):

$$F(2l + z) = F(z).$$

Setzt man $z - l$ statt $z$ in (2), so folgt:

$$F(z) = f(2l - z),$$

und mit Rücksicht auf (1):

$$f(2l - z) = f(-z).$$

Der Zustand im Rohre ist also wieder periodisch und seine Periode von derselben Dauer $\frac{2l}{a}$.

3. Das Rohr sei offen an einem Ende, geschlossen am anderen. — Der Ursprung werde an dem geschlossenen Ende genommen, dann hat man bei jedem $t$ die Bedingungen:

(1) $$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0,$$

(2) $$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = l.$$

Diese führen zu den folgenden:

(3) $$F(z) + f(-z) = 0,$$

(4) $$F(l + z) = f(l - z).$$

Setzt man $z + l$ statt $z$ in (4), so folgt:

$$F(2l + z) = f(-z),$$

demnach wegen (3):

$$F(2l + z) = -F(z),$$

und daher:

$$F(z) = F(4l + z).$$

Dieselbe Eigenschaft findet man für die Function $f$, wenn man das $z$ der Gleichung (4) in $z - l$ verwandelt. Der Zustand des Gases ist also wieder periodisch, aber die Dauer der Periode beträgt im Allgemeinen $\frac{4l}{a}$.

## Auflösung der vorigen Aufgaben mittelst trigonometrischer Reihen.

196. Wir wollen jetzt die Aufgabe über die Bewegung eines homogenen Gases in einem endlichen Rohre mittelst einer sehr fruchtbaren und in den meisten Fällen viel bequemeren Methode behandeln. Sie besteht darin, nicht das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung, sondern unendlich viele besondere Integrale aufzusuchen, welche man so bestimmt, dass jedes einzelne den Grenzbedingungen des Systems genügt. Hat man die Gleichungen so eingerichtet, dass sie keine von der Function oder deren Derivirten unabhängigen Glieder enthalten, so bildet eine Summe von besonderen Integralen, deren jedes mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt ist, gleichfalls ein Integral der Differentialgleichung, welches den Grenzbedingungen genügt, wenn alle besonderen Integrale ihnen genügen. Es handelt sich also dann nur noch darum, die unendlich vielen Constanten, welche dieses Integral einschliesst, so zu bestimmen, dass man für $t = 0$ den gegebenen Anfangszustand erhält. Diesen Weg einschlagend, werden wir die letzten Aufgaben noch einmal auflösen.

1. Bewegung eines Gases in einem an beiden Enden geschlossenen Cylinder. — Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen hat man folgenden Gleichungen zu genügen:

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

(2) $$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l \text{ bei jedem } t,$$

(3) $$\frac{d\varphi}{dx} = \psi(x) \text{ für } t = 0,$$

(4) $$\frac{d\varphi}{dt} = -a^2\chi(x) \text{ für } t = 0.$$

Man sieht sofort, dass der Gleichung (1) nachstehender Werth genügt:

$$\varphi = (M\cos mx + N\sin mx)(A\sin amt + B\cos amt),$$

während $M$, $N$, $A$, $B$, $m$ willkürliche Constanten bezeichnen. Damit die Bedingung (2) erfüllt sei, muss die Ableitung des Factors

$$M\cos mx + N\sin mx,$$

welche

$$-m(M\sin mx - N\cos mx)$$

ist, Null werden für $x = 0$ und $x = l$; hieraus ergiebt sich:

$$N = 0, \ \sin ml = 0, \text{ also } m = \frac{n\pi}{l},$$

wo $n$ jede ganze positive oder negative Zahl sein kann. Man darf sich jedoch auf die positiven Zahlen beschränken, weil die Werthe von $\varphi$, welche den negativen Zahlen entsprechen, sich bei der Unbestimmtheit der Coëfficienten nicht von den anderen unterscheiden würden.

Bezeichnen wir durch $\Sigma$ eine Summe, welche sich auf alle ganzen und positiven Werthe von $n$ bezieht; lassen wir $A$ und $B$ sich willkürlich mit $n$ ändern und werfen den unnützen Factor $M$ weg, so haben wir folgendes allgemeinere Integral der Gleichung (1), welches den Bedingungen an den Enden des Rohrs genügt:

$$\varphi = \Sigma\cos\frac{n\pi x}{l}\left(A\sin\frac{an\pi t}{l} + B\cos\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Wir differenziiren diesen Ausdruck nach $x$ und $t$, schreiben dabei $A$, $B$ statt $A\frac{n\pi}{l}$, $B\frac{n\pi}{l}$ und erhalten:

(5) $$u = -\Sigma\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A\sin\frac{an\pi t}{l} + B\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

(6) $$a\gamma = -\Sigma\cos\frac{n\pi x}{l}\left(A\cos\frac{an\pi t}{l} - B\sin\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Wenn man hier $t = 0$ setzt, so geben die Gleichungen (3), (4) zur Bestimmung von $A$ und $B$:

$$(7) \qquad \Sigma B \sin \frac{n\pi x}{l} = -\psi(x),$$

$$(8) \qquad \Sigma A \cos \frac{n\pi x}{l} = -a\chi(x).$$

Diese Formeln drücken $\psi$, $\chi$ in der ganzen Ausdehnung der Axe der $x$ aus, wenn man setzt:

$$\psi(-x) = -\psi(x), \ \chi(-x) = \chi(x),$$
$$\psi(2l + x) = \psi(x), \ \chi(2l + x) = \chi(x).$$

Um die Coëfficienten $B$ zu bestimmen, entwickeln wir die nur von $x = 0$ bis $x = l$ gegebene Function $\psi(x)$ in eine nach den Sinus der Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe. Dazu dient die Formel:

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \sin n \frac{\pi x}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \sin n \frac{\pi \alpha}{l} d\alpha;$$

man genügt daher der Bedingung (7), indem man

$$B = -\frac{2}{l} \int_0 \psi(\alpha) \sin n \frac{\pi \alpha}{l} d\alpha$$

nimmt.

Um die Coëfficienten $A$ zu bestimmen, entwickelt man die ebenfalls nur von $x = 0$ bis $x = l$ gegebene Function $-a\chi(x)$ in eine nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe, wozu die Formel dient:

$$\varphi(x) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{2}{l} \sum_1^\infty \cos n \frac{\pi x}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) \cos n \frac{\pi \alpha}{l} d\alpha.$$

In dem gegenwärtigen Falle wird

$$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\alpha) d\alpha = -\frac{a}{l} \int_0^l \chi(\alpha) d\alpha = 0,$$

da die mittlere Condensation des Gases im Rohre Null ist. Man muss daher, um der Bedingung (8) zu genügen,

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos n\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

nehmen, wo $n$ jeden ganzen positiven Werth ausser Null hat.

Die Formeln (5) und (6) werden jetzt:

$$(9)\quad u = \frac{2}{l}\Sigma \sin n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} a\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \\ +\cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \end{array}\right\},$$

$$10)\quad \gamma = \frac{2}{l}\Sigma \cos n\frac{\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \\ -\frac{1}{a}\sin\frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha \end{array}\right\}.$$

Diese Functionen ändern sich nicht, wenn bei demselben $t$ der Werth von $x$ um $2l$ zunimmt; sie ändern sich auch nicht, wenn $t$ für dasselbe $x$ um $\frac{2l}{a}$ wächst.

Die Formeln (9) und (10) gelten zugleich für ein unendliches Rohr mit dem Anfangszustande, den sie für $t = 0$ ergeben. In Folge dieses offenbar periodischen Anfangszustandes würden die Grenzbedingungen des endlichen Rohres jederzeit erfüllt sein.

197. Wenn man von einem besonderen Anfangszustande des Gases ausgeht, für welchen die Reihe sich auf ein einziges, einem beliebigen Werthe von $n$ entsprechendes Glied reducirt, so erhält man eine sogenannte einfache Bewegung. Sie wird durch Gleichungen von folgender Form dargestellt:

$$u = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} + Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(P\cos\frac{an\pi t}{l} - Q\sin\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Die Dauer der Periode ist in diesem Falle $\frac{2l}{na}$ statt $\frac{2l}{a}$.

Die Werthe von $u$ sind beständig Null für alle Werthe von $x$, welche der Gleichung

$$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

genügen, also für alle in der Formel

$$x = \frac{kl}{n}$$

enthaltenen Werthe, wo $k$ Null und jede ganze Zahl bedeutet. Die Punkte, in welchen das Gas unbewegt bleibt, heissen Knoten; sie theilen die Länge $l$ des Rohres in $n$ gleiche Stücke.

Die Punkte, in denen die Condensation beständig Null ist, und welche man Bäuche nennt, werden durch die Gleichung bestimmt:

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woraus } x = \frac{(2k+1)l}{2n};$$

sie liegen also in den Mitten zwischen den Knoten.

198. 2. Das Rohr sei an beiden Enden offen. — Die Grenzbedingungen sind jetzt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l \text{ bei jedem } t.$$

Die übrigen Gleichungen bleiben dieselben wie in der vorigen Aufgabe. Man erhält einen Werth für $\varphi$, welcher Allem ausser dem Anfangszustande genügt, wenn man

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right)$$

nimmt, wo die Summe $\Sigma$ sich auf alle ganzen positiven Werthe von $n$ bezieht und $A$, $B$ willkürliche, mit $n$ variirende Constanten vorstellen. Durch Differenziiren von $\varphi$ ergiebt sich, indem man $A \frac{n\pi}{l}$, $B \frac{n\pi}{l}$ durch $A$, $B$ ersetzt:

$$u = \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left( A \sin \frac{an\pi t}{l} + B \cos \frac{an\pi t}{l} \right),$$

$$a\gamma = -\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A \cos \frac{an\pi t}{l} - B \sin \frac{an\pi t}{l} \right).$$

Damit diese Werthe dem Anfangszustand genügen, müssen zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ folgende zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma B \cos \frac{n\pi x}{l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin \frac{n\pi x}{l} = - a\chi(x).$$

Dadurch werden $\psi$, $\chi$ in der ganzen Ausdehnung der Axe der $x$ ausgedrückt, wenn man nimmt:

$$\psi(-x) = \psi(x), \quad \chi(-x) = -\chi(x),$$
$$\psi(2l + x) = \psi(x), \quad \chi(2l + x) = \chi(x).$$

Man findet für irgend einen Werth von $n$:

$$A = -\frac{2a}{l}\int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha,$$

$$B = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha.$$

Der Werth von $B$, welcher sich für $n = 0$ ergiebt, würde in $u$ das constante Glied liefern:

$$\frac{1}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

welches den mittleren Werth von $\psi(x)$ oder die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunkts des im Rohre enthaltenen Gases darstellt. Wenn nun das Gas und die endliche Röhre, welche es enthält, keine fortschreitende Bewegung haben, so ist dieses Glied Null und man braucht $n$ nur von 1 bis $\infty$ gehen zu lassen. Die Auflösung des Problems wird dann durch nachstehende Formeln gegeben:

$$u = \frac{2}{l}\Sigma \cos \frac{n\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} -a \sin \frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \\ + \cos \frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \end{array}\right\},$$

$$\gamma = \frac{2}{l}\Sigma \sin \frac{n\pi x}{l}\left\{\begin{array}{l} + \cos \frac{an\pi t}{l}\int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \\ + \frac{1}{a} \sin \frac{an\pi t}{l}\int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha \end{array}\right\}.$$

Diese Ausdrücke ändern sich nicht, wenn bei demselben $t$ das $x$ um $2l$ wächst; sie ändern sich auch nicht, wenn bei demselben $x$ der Werth von $t$ um $\frac{2l}{a}$ zunimmt.

199. Eine der möglichen einfachen Bewegung wird durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$u = \cos\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} + Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

$$a\gamma = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(P\sin\frac{an\pi t}{l} - Q\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

wo $n$ irgend eine ganze Zahl und $P$, $Q$ Constanten bezeichnen. Die Dauer der Periode ist jetzt $\frac{2l}{na}$.

Die Bäuche bestimmen sich durch die Gleichung:

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woraus } x = \frac{kl}{n},$$

während $k$ Null und jede ganze Zahl vorstellt. Sie theilen das Rohr in $n$ gleiche Theile.

Die Knoten ergeben sich aus:

$$\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, \text{ woher } x = (2k+1)\frac{l}{2n};$$

sie liegen also in den Mitten zwischen den Bäuchen.

200. 3. Die Röhre sei offen an einem Ende, geschlossen am anderen. — Verlegen wir den Ursprung an das offene Ende, dann muss man bei jedem $t$ haben:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } x = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ für } x = l.$$

Man genügt allen Bedingungen mit Ausnahme des Anfangszustandes, wenn man

$$\varphi = \Sigma\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{A\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l} + B\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right\}$$

nimmt, wo $A$ und $B$ willkürliche, mit $n$ variirende Constanten bezeichnen und die Summe $\Sigma$ sich auf Null und alle ganzen

positiven Werthe von $n$ bezieht. Hieraus erhält man für $u$, $\gamma$ folgende Werthe, indem man $\frac{(2n+1)\pi}{2l} A$, $\frac{(2n+1)\pi}{2l} B$ durch $A$, $B$ ersetzt:

$$u = \Sigma \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ A \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right\},$$

$$a\gamma = -\Sigma \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{ A \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} - B \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \right\}.$$

Damit diese Ausdrücke dem Anfangszustand genügen, muss man zwischen $x = 0$ und $x = l$ die Bedingungen erfüllen:

$$\Sigma B \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \psi(x),$$

$$\Sigma A \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} = -a\chi(x).$$

Dies geschieht durch nachstehende Werthe von $A$ und $B$:

$$B = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{(2n+1)\pi \alpha}{2l} d\alpha,$$

$$A = -\frac{2a}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi \alpha}{2l} d\alpha.$$

Durch die zwei vorigen Gleichungen bleiben die nur von 0 bis $l$ gegebenen Functionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ in der ganzen Ausdehnung der Axe der $x$ ausgedrückt, wenn man nimmt:

$$\psi(-x) = \psi(x), \quad \chi(-x) = -\chi(x),$$
$$\psi(l+x) = -\psi(l-x), \quad \chi(l+x) = \chi(l-x),$$
$$\psi(4l+x) = \psi(x), \quad \chi(4l+x) = \chi(x).$$

Bei diesem Anfangszustand des unendlichen Rohres würden die Grenzbedingungen des endlichen Rohres fortwährend erfüllt sein.

Die Auflösung des Problems ist enthalten in den Formeln:

$$u=\frac{2}{l}\Sigma\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{array}{l}-a\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\\+\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\end{array}\right\},$$

$$\gamma=\frac{2}{l}\Sigma\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left\{\begin{array}{l}+\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\chi(\alpha)\sin\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\\+\frac{1}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\int\limits_0^l\psi(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}d\alpha\end{array}\right\},$$

wo die Summen sich über Null und alle ganzen positiven Werthe von $n$ erstrecken. Die Ausdrücke für $u$ und $\gamma$ sind periodisch, und zwar in Bezug auf $x$ in dem Intervall $4l$, in Bezug auf $t$ in dem Intervall $\frac{4l}{a}$.

201. Die einfache Bewegung, welche einem einzelnen Werthe von $n$ entspricht, hat die Periode $\frac{4l}{(2n+1)a}$.

Die Knoten bestimmen sich durch die Gleichung:

$$\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=0,\ \text{woraus}\ x=\frac{(2k+1)l}{2n+1},$$

während $k$ Null und jede ganze Zahl bezeichnet. Ihre Abstände vom Ursprung sind also der Reihe nach:

$$\frac{l}{2n+1},\ \frac{3l}{2n+1},\ \frac{5l}{2n+1},\ \ldots,\ l;$$

mithin stehen die Knoten von einander ab um $\frac{2l}{2n+1}$, und folglich kann man das Rohr vom ersten Knoten ab als eine Reihenfolge von geschlossenen Röhren betrachten, deren jede die Länge $\frac{2l}{2n+1}$ hat.

Die Bäuche ergeben sich aus der Gleichung:

$$\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}=0,\ \text{woraus}\ x=\frac{2kl}{2n+1}.$$

Ihre Abstände vom Ursprung sind also:

$$0, \frac{2l}{2n+1}, \frac{4l}{2n+1}, \ldots, \frac{2nl}{2n+1},$$

sie liegen demnach in den Mitten zwischen den Knoten. Der Abstand der Bäuche von einander beträgt $\frac{2l}{2n+1}$, und das zwischen zwei nächsten Bäuchen enthaltene Gas ist in demselben Falle, als wenn es in einem an beiden Enden offenen Rohre von der Länge $\frac{2l}{2n+1}$ enthalten wäre.

## Bewegung in einem nach allen Seiten hin unendlichen Gase.

202. Betrachten wir jetzt die kleinen Bewegungen eines nach jeder Richtung unendlichen Gases. Wir haben darauf die früher gefundene Gleichung anzuwenden:

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

Grenzbedingungen giebt es bei unserer Aufgabe nicht; aber man muss immer dem Anfangszustande genügen, und dazu wird erfordert, dass $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t = 0$ in gegebene Functionen von $x$, $y$, $z$ übergehen. Aus den für $t=0$ gegebenen Werthen von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ bestimmt sich der Anfangswerth von $\varphi$ bis auf eine hier ausser Acht zu lassende Constante. Die Bedingungen des Anfangszustandes werden daher, wenn $f$, $F$ willkürliche Functionen von $x$, $y$, $z$ vorstellen, ausgedrückt durch:

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z), \ \frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z) \text{ für } t = 0;$$

und die Aufgabe kommt darauf hinaus den Gleichungen (1) und (2) zu genügen. Dies geschieht mittelst der von Poisson gegebenen Formel:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, F\begin{pmatrix} x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi, \\ z + at\sin\theta\sin\psi \end{pmatrix} \\ \quad + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f\begin{pmatrix} x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi, \\ z + at\sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}, \end{cases}$$

worin die Integrationen nach $\theta$ zwischen 0 und $\pi$, nach $\psi$ zwischen 0 und $2\pi$ auszuführen sind. Diesen Ausdruck für $\varphi$ kann man auch in folgender Weise schreiben:

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi}\mathbf{S}\, t\, d\omega\, F(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma) \\ \quad + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{d}{dt}\mathbf{S}\, t\, d\omega\, f(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma). \end{cases}$$

Hier bezeichnet $d\omega$ das unendlich kleine Element der aus dem Ursprung mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind die Winkel, welche der aus dem Ursprung nach diesem Element gezogene Radius vector mit den Axen bildet; die Summen $\mathbf{S}$ erstrecken sich über die ganze Kugelfläche.

Diese wichtige Formel lässt sich sehr bequem anwenden, wenn die Functionen $F$, $f$ wie im vorliegenden Falle für alle reellen Werthe von $x$, $y$, $z$ gegeben sind. Wenn dagegen die Flüssigkeit begrenzt wäre, so würden die hieraus hervorgehenden besonderen Bedingungen schwierig auszudrücken und man genöthigt sein, andere Formen für das Integral der Gleichung (1) aufzusuchen; wir beschäftigen uns jedoch damit nicht.

Die Formel enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, denn sie liefert die Function $\varphi$ und somit die Condensation und die Componenten der Geschwindigkeit in jedem Punkt und zu jeder Epoche. Wir beschränken uns darauf, aus ihr die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher irgend eine Erschütterung sich in dem Gase fortpflanzt; und damit die Resultate einer leichteren und klareren Deutung fähig werden, so wollen wir annehmen, dass die Erschütterung nur in einem nach allen Richtungen unendlich kleinen Theile stattfinde, in dessen Inneres wir den Anfang der Coordinaten verlegen.

In diesem Falle verschwinden die Functionen $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ für alle Werthe von $x$, $y$, $z$, welche nicht einem

Punkte des anfänglich erschütterten Theils als (unendlich kleine) Coordinaten angehören. Setzen wir daher

(5) $x + at\cos\alpha = x', \quad y + at\cos\beta = y', \quad z + at\cos\gamma = z',$

so kann der Werth von $\varphi$ in einem Punkt $M$, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z$ sind, nur dann von Null verschieden sein, wenn $t$ einen solchen Werth hat, dass es Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ giebt, bei welchen $x'$, $y'$, $z'$ die (unendlich kleinen) Coordinaten von Punkten darstellen, welche in dem anfänglich erschütterten Theile liegen. Diese Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind jetzt in den bestimmten Integralen, welche $\varphi$ ausdrücken, allein zu berücksichtigen.

Man kann sich leicht geometrisch die Richtungen vorstellen, welche denjenigen Werthen von $\alpha, \beta, \gamma$ oder $\theta$, $\psi$ entsprechen, die keine verschwindenden Elemente der Integrale liefern. In der That, man erhält den Punkt, dessen Coordinaten die Werthe $x'$, $y'$, $z'$ der Gleichungen (5) haben, indem man auf der durch den Punkt $M$ unter den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gezogenen Richtung von $M$ an ein Stück $at$ abträgt. Wenn man also mit dem Radius $at$ aus dem Mittelpunkt $M$ eine Kugel beschreibt, so werden diejenigen Punkte ihrer Oberfläche, welche in die anfängliche Erschütterung hineinfallen, die einzigen sein, für welche die Functionen $f$, $F$ nicht verschwinden; und die Richtungen der Radien, welche von $M$ nach diesen verschiedenen Punkten gehen, sind die einzigen, auf welche man Rücksicht zu nehmen braucht. Daraus ersieht man, dass die Function $\varphi$ in dem Punkte $M$ den Werth Null hat bis zu der Epoche, wo die aus $M$ mit gleichförmig wachsendem Radius $at$ beschriebene Kugelfläche in die anfängliche Erschütterung einzudringen beginnt, und dass $\varphi$ in $M$ wieder Null ist, sobald die Oberfläche der wachsenden Kugel die anfängliche Erschütterung nicht mehr trifft; in jedem zwischenliegenden Zeitpunkte bestimmt den Werth von $\varphi$ allein derjenige Theil der anfänglichen Erschütterung, welcher auf der Kugelfläche mit dem Radius $at$ liegt.

Die unmittelbare Folgerung aus diesem Satze ist, dass eine nach jeder Richtung unendlich kleine Erschütterung sich in allen Richtungen mit der Geschwindigkeit $a$ fortpflanzt, weil am Ende der Zeit $t$ die Bewegung in den um $at$ vom Ursprung entfernten Punkten beginnt.

Die Dauer der Bewegung in irgend einem Punkt $M$ wird durch die beiden Kugelflächen bestimmt, welche aus diesem Punkt als Mittelpunkt so beschrieben werden, dass der anfänglich erschütterte Theil ganz ausserhalb der ersten und ganz innerhalb der zweiten liegt, während er mit jeder einen Punkt gemein hat.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem homogenen, nach allen Seiten unendlichen Gase ist also dieselbe wie in einer cylindrischen Röhre.

---

## Von dem Gleichgewichte und den kleinen Bewegungen eines elastischen Fadens.

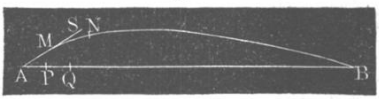
203. Die Aehnlichkeit dieser Aufgabe mit den vorigen hat uns bestimmt, sie hier folgen zu lassen.

Bisher haben wir von der Ausdehnbarkeit der Fäden ganz abgesehen; jetzt dagegen wollen wir Rücksicht darauf nehmen, dass sie fähig sind, sich unter dem Einflusse von Kräften, welche in ihnen eine beliebige Spannung hervorbringen, zu verlängern. Wir werden unsere Betrachtung nur innerhalb solcher Grenzen anstellen, dass der Faden nicht zerreisst und seine vorige Länge wieder annimmt, wenn die Kraft zu wirken aufhört. Die Erfahrung lehrt, dass innerhalb dieser Grenzen die Verlängerung der Spannung proportional ist.

Den natürlichen Zustand des Fadens nennen wir denjenigen, in welchem er von keiner Kraft angegriffen wird. Erzeugt man in einem homogenen Faden, der sich in diesem Zustande befindet, eine der Krafteinheit gleiche Spannung, so verlängert sich die Längeneinheit um ein Stück $\delta$, welches in allen Fällen gegeben sein muss. Läge die der Einheit gleiche Spannung ausserhalb der oben bezeichneten Grenzen, so würde man sie zwar nicht wirklich in dem Faden hervorbringen; aber wegen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wollen wir auch in diesem Falle voraussetzen, dass man uns die Grösse $\delta$ giebt, um welche die Längeneinheit sich ausdehnen würde, wenn der Faden dabei innerhalb der Elasticitätsgrenzen bliebe. Nur ist bei jeder besonderen Anwendung zu untersuchen, ob diese Grenzen nicht überschritten werden, in welchem Falle die Erfahrung mit den Ergebnissen unserer Rechnung nicht übereinstimmen könnte.

204. Es stelle $AB$ einen homogenen elastischen Faden vor, dessen Endpunkte $A$, $B$ fest sind, und welcher eine Spannung $\tau$ erleidet, während keine äussere Kraft auf ihn wirkt und folglich alle seine Punkte in der Geraden $AB$ liegen; die Masse seiner Längeneinheit sei $\varepsilon$. Nehmen wir den Punkt $A$ zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Richtung $AB$ zur Axe der $x$. Lassen wir nun bewegende Kräfte an allen Punkten des Fadens wirken, deren Componenten, auf die Masseneinheit bezogen, an irgend einem Punkt $X$, $Y$, $Z$ heissen mögen. Die Aufgabe besteht darin, für irgend einen Punkt des Fadens die drei Coordinatenwerthe zu bestimmen, welche constant sind im Falle des Gleichgewichts und bei der Bewegung von der Zeit $t$ abhängen.

Fig. 17.




Die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ bewirken eine allgemeine Verrückung. Es sei $M$ die Lage, welche in einem gewissen Augenblick der ursprünglich in $P$ gelegene materielle Punkt einnimmt. Suchen wir zunächst den allgemeinen Ausdruck für die Spannung in diesem Punkt. Zu dem Ende betrachten wir einen zweiten Punkt des Fadens, welcher in dem ursprünglichen Zustande um das unendlich kleine Stück $PQ = \alpha$ von $P$ entfernt war und sich in $N$ befindet in dem Augenblick, wo $P$ in $M$ ist. Die Differenz $MN - PQ$, getheilt durch $PQ$, giebt die auf die Längeneinheit bezogene Ausdehnung, welche das Element $PQ$ in der Lage $MN$ erfahren hat; und aus dieser findet sich unmittelbar die Zunahme der Spannung.

Die ursprüngliche Abscisse $AP$ des materiellen Punktes $P$ heisse $x$; die Coordinaten von $M$ seien $x + u$, $y$, $z$. Die drei sehr kleinen Grössen $u$, $y$, $z$ sind die Unbekannten der Aufgabe; im Falle des Gleichgewichts sind sie Functionen von $x$, bei der Bewegung Functionen von $x$ und $t$. Betrachtet man die Bewegung eines und desselben materiellen Punktes, so bleibt $x$ constant; es ändert sich dagegen, wenn man auf eine andere Molekel übergeht.

Der Unterschied $MN - PQ$ ist sehr klein im Vergleich zu $PQ$; man darf also bei seiner Berechnung nur solche Grössen vernachlässigen, welche gegen $PQ$ sehr klein von zweiter

Ordnung sind. Wir beschränken uns auf die Fälle, wo die Winkel aller Fadenelemente mit der Axe der $x$ sehr klein bleiben, und dürfen deshalb statt $MN$ seine Projection auf diese Axe nehmen. Man hat folglich, wenn $u'$ den Werth des $u$ für den Punkt $Q$ bezeichnet:

$$MN - PQ = u' - u.$$

Nun geht aber $u'$ aus $u$ hervor, indem man $x + \alpha$ statt $x$ setzt, also ist:

$$u' - u = \frac{du}{dx}\alpha.$$

Theilt man diese Verlängerung durch $\alpha$, so erhält man, auf die Längeneinheit bezogen, $\frac{du}{dx}$ als die positive oder negative Dehnung des ursprünglich in $PQ$ gelegenen Elements oder als die Dehnung des Fadens in dem Punkt mit der ursprünglichen Abscisse $x$. Die Verlängerung ist dem Zuwachse der Spannung proportional, mithin beträgt dieser $\frac{1}{\delta}\frac{du}{dx}$, und folglich wird die Spannung des Fadens in dem Punkt mit der ursprünglichen Abscisse $x$ zu jeder Zeit ausgedrückt durch:

$$T = \tau + \frac{1}{\delta}\frac{du}{dx};$$

$\frac{du}{dx}$ bezeichnet die partielle Ableitung von $u$ nach $x$.

Nachdem man den allgemeinen Ausdruck der Spannung kennt, befolgt man denselben Gang wie bei unelastischen Fäden. Die Kräfte, welche auf ein unendlich kleines Element $MN$ wirken, sind die in $M$ und $N$ angreifenden, nach aussen gerichteten Spannungen und die Kräfte

$$\alpha\varepsilon X,\ \alpha\varepsilon Y,\ \alpha\varepsilon Z.$$

Die Richtung $MS$ der Tangente bilde mit den Axen die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$, dann sind

$$-T\cos\lambda,\quad -T\cos\mu,\quad -T\cos\nu$$

die Componenten der das Element $MN$ in $M$ angreifenden Spannung und

$$T\cos\lambda + d.T\cos\lambda,\quad T\cos\mu + d.T\cos\mu,\quad T\cos\nu + d.T\cos\nu$$

die Componenten der in $N$ angreifenden Spannung.

Mag man nun das Element $MN$ als starr oder als veränderlich ansehen, die Bewegung seines Schwerpunkts geschieht

immer so, als ob er die Masse des Elements besässe und alle darauf wirkenden Kräfte ihn angriffen. Für die Bewegung des Punktes $M$ kann man die des Schwerpunktes von $MN$ setzen und erhält dadurch folgende Gleichungen der Bewegung für $M$:

$$d\,.\,T\cos\lambda + \alpha\varepsilon X = \alpha\varepsilon\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$d\,.\,T\cos\mu + \alpha\varepsilon Y = \alpha\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$d\,.\,T\cos\nu + \alpha\varepsilon Z = \alpha\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wenn man dieselben durch $\alpha$ theilt und auf die Grenze übergeht, so werden ihre ersten Summanden die partiell nach $x$ genommenen Ableitungen von

$$T\cos\lambda,\quad T\cos\mu,\quad T\cos\nu;$$

und diese wollen wir zunächst ausdrücken.

Für $\cos\lambda$ kann man bei Vernachlässigung der sehr Kleinen zweiter Ordnung 1 setzen; dies giebt mit Rücksicht auf den gefundenen Werth von $T$:

$$\frac{d\,.\,T\cos\lambda}{dx} = \frac{1}{\delta}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Die Werthe von $\cos\mu$, $\cos\nu$ sind sehr klein erster Ordnung, ebenso $\frac{du}{dx}$, man darf daher $T\cos\mu$, $T\cos\nu$ gleich $\tau\cos\mu$, $\tau\cos\nu$ nehmen. Bezeichnet man die Unterschiede der Coordinaten $y$, $z$ der zwei unendlich nahen Punkte $M$, $N$ durch $dy$, $dz$, so hat man:

$$\cos\mu = \frac{dy}{MN},\quad \cos\nu = \frac{dz}{MN}.$$

Da nun beide Cosinus sehr klein sind und $MN$ sich von $PQ$ oder $dx$ nur um eine gegen $dx$ sehr kleine Grösse unterscheidet, so darf man setzen:

$$\cos\mu = \frac{dy}{dx},\quad \cos\nu = \frac{dz}{dx}$$

und erhält dadurch:

$$\frac{d\,.\,T\cos\mu}{dx} = \tau\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d\,.\,T\cos\nu}{dx} = \tau\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Demnach werden die Gleichungen der Bewegung des Fadens:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen, welche gelten, wenn der Faden unter dem Einflusse der Kräfte $X$, $Y$, $Z$ im Gleichgewicht steht:

$$(2)\qquad \begin{cases} X + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0, \\ Y + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \\ Z + \dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{d^2z}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Wenn die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ Null sind oder von $t$ und $x$ allein abhängen, so lassen sich die Functionen $u$, $y$, $z$ unabhängig von einander aus (1) berechnen. Die durch $u$ bestimmte Längenbewegung ist dann unabhängig von der durch $y$ und $z$ bestimmten Querbewegung.

Für $X = Y = Z = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (1) zu:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\delta\varepsilon}\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\tau}{\varepsilon}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Diese sind von derselben Form wie die Gleichungen der Bewegung eines Gases in einem cylindrischen Rohre und ergeben analoge Resultate. Man würde finden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in longitudinaler Richtung $\sqrt{\frac{1}{\delta\varepsilon}}$ beträgt und $\sqrt{\frac{\tau}{\varepsilon}}$ in darauf senkrechter Richtung; die Dauer der Län-

genschwingungen des Fadens von der Länge $l$ ist $2l\sqrt{\delta\varepsilon}$, also unabhängig von seiner Spannung; die Dauer der Querschwingungen $2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{\tau}}$.

## Längenschwingungen der Stäbe.

205. Um die zur Bestimmung von $u$ dienende Gleichung zu erhalten, bedarf es der Voraussetzung eines biegsamen und dünnen Fadens nicht; sie bleibt deshalb geltend für einen elastischen Stab, in welchem man nur Längenbewegungen betrachtet, die für alle Punkte eines und desselben Querschnitts dieselben sind. Die Verlängerung $\delta$, welche die Längeneinheit durch die Krafteinheit erfährt, steht im umgekehrten Verhältniss mit dem Flächeninhalte des Querschnitts; da aber die Masse $\varepsilon$ der Längeneinheit diesem Flächeninhalte direct proportional ist, so bleibt das Product $\delta\varepsilon$ unabhängig von der Dicke des Stabes.

Sind beide Enden des Stabes fest, so ist die Dauer seiner Längenschwingungen $2l\sqrt{\delta\varepsilon}$ wie bei einem elastischen Faden.

Es können aber auch beide Enden frei, oder das eine Ende kann frei und das andere fest sein. Diese zwei neuen Aufgaben sind nicht schwieriger als die erste. Die Spannung an dem freien Ende ist unveränderlich, und folglich muss man hier beständig $\frac{du}{dx} = 0$ haben. Man findet, wenn beide Enden frei sind, die Dauer der Längenschwingungen gerade so gross, als wenn sie fest wären; die Schwingungsdauer wird aber doppelt so gross, wenn ein Ende fest und das andere frei ist. Es findet somit vollständige Analogie zwischen den Längenschwingungen der Stäbe und denen von Gasen in cylindrischen Röhren statt; ein festes Ende des Stabes entspricht einem geschlossenen des Rohres und ein freies Ende einem offenen.

## Von den kleinen Bewegungen eines beliebigen Systems Punkte.

206. Ein beliebiges System Punkte, welche in gewissen Verbindungen mit einander stehen, die durch Gleichungen zwischen ihren Coordinaten ausgedrückt werden, befinde sich un-

ter dem Einflusse von Kräften, welche auf irgend eine Art von den Coordinaten abhängen, in stabilem Gleichgewicht. Die Zeit soll in den Verbindungsgleichungen und in den Ausdrücken für die Kräfte nicht explicit vorkommen. Entfernt man die Punkte sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage, theilt ihnen sehr kleine Geschwindigkeiten mit und überlässt sie darauf der Wirkung jener gegebenen Kräfte, so werden die Aenderungen ihrer Coordinaten immer sehr klein bleiben, weil das Gleichgewicht stabil war. Wir wollen diese Aenderungen als Functionen der Zeit bestimmen und einige allgemeine Eigenschaften derselben kennen lernen.

Es seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Systems in irgend einem Augenblick, $a$, $b$, $c$ ihre Werthe in der Gleichgewichtslage, $\mu$ die Masse dieses Punktes. Setzen wir

$$x = a + \alpha, \quad y = b + \beta, \quad z = c + \gamma,$$

so sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sehr kleine, mit der Zeit variable Grössen, von welchen die Lage des Punktes $\mu$ in jedem Augenblick abhängt. Für einen zweiten Punkt $\mu'$ hat man:

$$x' = a' + \alpha', \quad y' = b' + \beta', \quad z' = c' + \gamma',$$

u. s. w. Die Componenten der den Punkt $\mu$ angreifenden Kraft mögen $X$, $Y$, $Z$ heissen; ihre Werthe für den Punkt $\mu'$ seien $X'$, $Y'$, $Z'$, etc. Die gegebenen Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten $x, y, z, x', y', z', \ldots$ seien:

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots.$$

Man verlangt die Gleichungen, welche $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots$ durch $t$ bestimmen.

Setzt man $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma, \ldots$ statt $x, y, z, \ldots$ in (1), so darf man die Entwickelungen mit der ersten Dimension von $\alpha$, $\beta$, $\gamma, \ldots$ abbrechen. Hierdurch erhält man, weil $a$, $b$, $c, \ldots$ den Gleichungen (1) selbst genügen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dL}{da}\alpha + \frac{dL}{db}\beta + \frac{dL}{dc}\gamma + \frac{dL}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\ \frac{dM}{da}\alpha + \frac{dM}{db}\beta + \frac{dM}{dc}\gamma + \frac{dM}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\ \frac{dN}{da}\alpha + \frac{dN}{db}\beta + \frac{dN}{dc}\gamma + \frac{dN}{da'}\alpha' + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

dabei stellen $\frac{dL}{da}, \frac{dL}{db}, \ldots$ die Werthe vor, welche $\frac{dL}{dx}, \frac{dL}{dy}, \ldots$ dadurch annehmen, dass man durchaus $x = a$, $y = b, \ldots$ setzt.

Die Functionen $X$, $Y$, $Z$, $X'$, ... mögen in der Gleichgewichtslage des Systems die Werthe $A$, $B$, $C$, $A'$, ... haben. In einer beliebigen Nachbarlage ist dann:

$$(3).\quad \begin{cases} X = A + \frac{dX}{da}\alpha + \frac{dX}{db}\beta + \frac{dX}{dc}\gamma + \frac{dX}{da'}\alpha' + \cdots, \\ Y = B + \frac{dY}{da}\alpha + \frac{dY}{db}\beta + \frac{dY}{dc}\gamma + \cdots, \\ Z = C + \frac{dZ}{da}\alpha + \frac{dZ}{db}\beta + \cdots, \\ X' = A' + \frac{dX'}{da}\alpha + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wenn $\frac{dX}{da}, \frac{dX}{db}, \ldots$ die Werthe von $\frac{dX}{dx}, \frac{dX}{dy}, \ldots$ für $x = a$, $y = b, \ldots$ bezeichnen.

Weil

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \ldots,$$

so ist die allgemeine Gleichung, welche die Bewegung des Systems bestimmt:

$$(4)\quad \sum\left\{\left(X - \mu\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \mu\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \mu\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo die Grössen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta x'$, ... den Bedingungen zu genügen haben:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \frac{dN}{dz}\delta z + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Coëfficienten der Gleichungen (5) unterscheiden sich

von denen der Gleichungen (2) um Grössen, welche in Bezug auf $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... linear sind. So hat man z. B.:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dL}{da} + \frac{d^2 L}{da^2}\alpha + \frac{d^2 L}{da\,db}\beta + \cdots,$$

etc.

Die Gleichungen (5) bestimmen eine gewisse Anzahl der Grössen $\delta$ als lineare Functionen der übrigen, welche ganz willkürlich bleiben. In diesen linearen Functionen sind die willkürlichen $\delta$ mit Coëfficienten behaftet, welche man in zwei Theile zerlegen kann: in einen endlichen Theil, der dadurch erhalten wird, dass man $\alpha = 0$, $\beta = 0$, etc. macht, und in einen anderen, welcher die sehr kleinen Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... mit Vernachlässigung ihrer zweiten und höheren Dimensionen überall linear enthält. Wollte man den Ausdruck derjenigen $\delta$ haben, welche sich auf die Gleichgewichtslage des Systems beziehen, so müsste man sich auf den ersten Theil beschränken.

Substituirt man nun in der Gleichung (4) denjenigen $\delta$, welche aus (5) als lineare Functionen der übrigen gefunden sind, ihre Werthe, so hat man die Coëfficienten der willkürlich bleibenden $\delta$ gleich Null zu setzen. Jeder dieser Coëfficienten lässt sich in zwei Summanden zerlegen: in dem ersten, endlichen haben die Kräfte $X$, $Y$, $Z$, ... und die Functionen $\frac{dL}{dx}$, ... jene Werthe, welche sich auf die Gleichgewichtslage beziehen; der andere Summand enthält $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, ... in allen Gliedern linear, indem man die höheren Dimensionen (auch die Producte von $\alpha$, $\beta$, ... in eine der zweiten Ableitungen) vernachlässigt. Den ersten Summanden würde man durch die Betrachtung des Gleichgewichts allein erhalten; er ist deshalb Null, und es bleibt nur der zweite, welchen man gleich Null zu setzen hat.

Die so erhaltenen Gleichungen muss man mit den Gleichungen (2) verbinden, welche eine gewisse Anzahl von Unbekannten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, ... als lineare Functionen der übrigen bestimmen. Eliminirt man mittelst (2) diejenigen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., deren Zeiger am höchsten sind, und löst die dadurch entstehenden Gleichungen in Bezug auf die zweiten Derivirten auf,

so gelangt man schliesslich zu einem Systeme von Gleichungen nachstehender Form mit constanten Coëfficienten und ohne unabhängige Glieder:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + m_3\alpha' + \cdots, \\ \dfrac{d^2\beta}{dt^2} = n\alpha + n_1\beta + n_2\gamma + n_3\alpha' + \cdots, \\ \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = p\alpha + p_1\beta + p_2\gamma + p_3\alpha' + \cdots, \\ \dfrac{d^2\alpha'}{dt^2} = m'\alpha + m'_1\beta + m'_2\gamma + m'_3\alpha' + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der nach der Elimination übrigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

207. Es kann zuweilen nützlich sein, die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ mittelst anderer unabhängiger Variablen $u, v, w, \ldots$, welche ebenfalls sehr klein sind, auszudrücken. Man erkennt leicht, dass die Form der Gleichungen (6) für die Gleichungen zwischen $u, v, w, \ldots$ bestehen bleibt. Denn die Ausdrücke für $\alpha, \beta, \ldots$ durch $u, v, w, \ldots$ werden nur solche Glieder enthalten, welche in Bezug auf die letzteren Grössen von der ersten Dimension sind. Setzt man nun diese Ausdrücke und ihre zweiten Derivirten nach $t$ in die Gleichungen (6), so erhält man neue lineare Gleichungen, aus welchen sich für $\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots$ Ausdrücke ergeben, die in allen Gliedern $u, v, w, \ldots$ linear enthalten.

208. Zusammensetzung der Bewegungen. — Die Form der Gleichungen (6) führt zu einer sehr wichtigen Folgerung.

Wenn mehrere Systeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einzeln genommen jenen Gleichungen genügen, so liefert die Addition aller $\alpha$, aller $\beta$, etc. ein neues System, welches denselben Gleichungen genügt. Der Anfangszustand der Punkte in der durch das letzte System dargestellten Bewegung resultirt aus den Anfangszuständen, welche den partiellen Systemen entsprechen, offenbar dadurch, dass man die mit den Axen paralle-

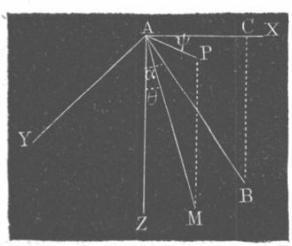
len Componenten der Verrückungen und Geschwindigkeiten algebraisch addirt.

Folglich erzeugt ein aus dieser Zusammensetzung mehrerer Anfangszustände resultirender Anfangszustand eine solche Bewegung, dass man in jedem Augenblick den Weg und die Geschwindigkeit irgend eines Punktes erhält, indem man nach den Regeln für Kräfte die Wege und Geschwindigkeiten zusammensetzt, welche in demselben Augenblick den aus den einzelnen Anfangszuständen hervorgehenden Bewegungen entsprechen würden.

209. Anwendung auf das Kegelpendel. — Um die Nützlichkeit dieses Gesetzes zu zeigen, wollen wir es auf das schon früher behandelte Beispiel anwenden.

Betrachten wir einen schweren materiellen Punkt, der gezwungen ist in constanter Entfernung von einem festen Punkt zu bleiben, und den man sehr wenig aus der durch diesen Punkt gehenden Verticalen entfernt hat, unter Ertheilung einer sehr kleinen horizontalen Geschwindigkeit. Diese Aufgabe ist bereits in den Nrn. 236, 237 des ersten Theils gelöst worden; die dortigen Bezeichnungen wenden wir auch bei der neuen Auflösung an.

Fig. 18.




Zum Ursprung nehmen wir den festen Punkt $A$, zur Axe der $z$ die Richtung der Schwere und führen die Ebene der $x$, $z$ durch die Anfangslage $AB$ des Pendels. Es sei $M$ die Lage des materiellen Punktes zu irgend einer Epoche, $P$ die Projection von $M$ auf die Ebene $XY$, $C$ die Projection von $B$. Wir setzen:

$$BAZ = \alpha, \quad MAZ = \theta, \quad PAX = \psi, \quad AM = l, \quad AP = r$$

und bezeichnen die parallel mit $AY$ gerichtete Anfangsgeschwindigkeit durch $k$.

Wir führen die Aufgabe auf zwei andere und einfachere zurück, indem wir den Anfangszustand in folgende zwei zerlegen. Im ersten dieser beiden Anfangszustände denken wir uns den materiellen Punkt in der Lage $B$ ohne Geschwindigkeit;

im zweiten denken wir uns ihn senkrecht unter $A$ aber mit der Anfangsgeschwindigkeit begabt.

Bezeichnen wir in der auf den ersten Anfangszustand folgenden Bewegung durch $\varphi$ den variablen Winkel des Pendels mit $AZ$, so ist bei dem hier genügenden Grade der Annäherung nach Nr. 226 des ersten Theils:

$$\text{(a)} \qquad \varphi = \alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Bei der zweiten Bewegung sei $\omega$ der Winkel, welchen das Pendel mit $AZ$ bildet. Nach derselben Nr. 226 findet man:

$$\text{(b)} \qquad \omega = \frac{k}{\sqrt{gl}} \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}} = \beta \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

indem man $\frac{k^2}{gl} = \beta^2$ setzt.

Die Gleichungen (a) und (b), welche jeden Augenblick die Lage des Punktes angeben, bestimmen alle Umstände seiner Bewegung.

210. Will man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $M$ kennen, so muss man sein $x$ aus der Gleichung (a) berechnen und sein $y$ aus (b). Die dritte Coordinate unterscheidet sich von $l$ nur um eine sehr kleine Grösse zweiter Ordnung; man könnte sie mittelst der beiden ersten aus der Gleichung der Kugel finden, aber es ist nicht von Interesse dies zu thun.

Man hat:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \sin \omega$$

oder mit Vernachlässigung der sehr Kleinen dritter Ordnung:

$$x = l\varphi, \quad y = l\omega,$$

wenn man die positiven $\varphi$ und $\omega$ auf Seite der positiven $x$ und $y$ zählt. Demnach wird:

$$\text{(c)} \qquad x = l\alpha \cos . t \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad y = l\beta \sin . t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

und da $tang\ \psi = \frac{y}{x}$, so folgt:

$$tang\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}\, tang.t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Der variable Werth $r$ von $AP$ ergiebt sich, wegen $r^2 = x^2 + y^2$, aus den Gleichungen ($c$), nämlich:

$$r^2 = l^2\left[\alpha^2\left(cos.t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2 + \beta^2\left(sin.t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2\right].$$

Daraus findet man den Werth des Winkels $\theta$, dessen Sinus $\frac{r}{l}$ ist:

$$\theta^2 = \alpha^2\left(cos.t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2 + \beta^2\left(sin.t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2.$$

Will man endlich die Projection der Trajectorie auf die Ebene $XY$ kennen, so muss man $t$ zwischen den Gleichungen ($c$) eliminiren; dies giebt:

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = l^2\alpha^2\beta^2,$$

die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen $l\alpha$, $l\beta$.

Diese Resultate stimmen sämmtlich überein mit den im ersten Theile erhaltenen.

Es ist leicht, die Aufgabe in mehreren Beziehungen zu verallgemeinern.

Zunächst könnte die Anfangsgeschwindigkeit eine beliebige, die Kugel tangirende Richtung haben. Man würde sie dann in zwei Componenten zerlegen, eine auf der Anfangslage des Pendels senkrechte und horizontale und eine in der durch die Anfangslage gehenden Verticalebene senkrecht auf das Pendel gerichtete. Die beiden einfachen Bewegungen würden sich nur insofern von den vorigen unterscheiden, als der Anfangszustand der einen aus Verrückung und Geschwindigkeit zugleich bestände.

Liegt der schwere Punkt in dem tiefsten Punkte der verticalen Hauptaxe eines Ellipsoids, so zerlegt man die anfängliche Verrückung in zwei andere, mit den horizontalen Hauptaxen parallele und die Anfangsgeschwindigkeit in zwei mit den verticalen Hauptebenen parallele Seitengeschwindigkeiten. Darauf bestimmt man die Bewegung, welche aus der Ver-

rückung und Geschwindigkeit in einer dieser Ebenen hervorgeht und auf eine Bewegung in dem Krümmungskreise der entsprechenden Hauptellipse hinauskommt. Ebenso bestimmt man die Bewegung auf dem Krümmungskreise der anderen verticalen Hauptellipse aus der anfänglichen Verrückung und Geschwindigkeit in ihrer Ebene; und die Zusammensetzung dieser beiden einfachen Bewegungen giebt die wirkliche Bewegung.

Wenn endlich der schwere Punkt auf irgend einer Oberfläche liegt und sehr wenig von dem Punkte entfernt wird, in welchem die Tangentialebene horizontal ist, so ersetzt man diese Oberfläche durch ein Ellipsoid, welches durch diesen tiefsten Punkt geht und dessen Hauptschnitte hier dieselbe Krümmung und Richtung wie diejenigen der Oberfläche haben; und dann ist die Aufgabe wieder die vorige.

211. Einführung neuer Kräfte. — Die Gleichungen (6) wurden unter der Voraussetzung erhalten, dass man blos die Punkte des Systems aus der Gleichgewichtslage verrückt und ihnen gewisse Anfangsgeschwindigkeiten mittheilt. Durch Einführung neuer Kräfte, welche nur sehr kleine Verrückungen hervorbringen können und selbst sehr klein sind, würde man die Aufgabe verallgemeinern. Dies wollen wir jetzt thun, indem wir jedoch voraussetzen, dass die neuen Kräfte sowohl von der Zeit als von den Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . unabhängig sind. Man gelangt in diesem Falle zu bemerkenswerthen allgemeinen Resultaten.

Zunächst sieht man leicht, dass die Differentialgleichungen der neuen Bewegung sich von den Gleichungen (6) nur durch Hinzufügung constanter Glieder unterscheiden. Denn man muss in der Gleichung (4) die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ um die respectiven Componenten der neuen Kräfte vermehren, und wenn man nun denselben Gang wie in Nr. 206 befolgt, so zeigt sich, dass die zweiten Seiten der Gleichungen (6) nur um solche Glieder vermehrt werden, von denen jedes eine der neuen Componenten in der ersten Dimension enthält und constant ist.

Die Differentialgleichungen der neuen Bewegung sind demnach:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = H + m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + m_3\alpha' + \ldots, \\ \dfrac{d^2\beta}{dt^2} = K + n\alpha + n_1\beta + \ldots, \\ \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = L + p\alpha + p_1\beta + \ldots, \\ \dfrac{d^2\alpha'}{dt^2} = H' + m'\alpha + m'_1\beta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Sie ergeben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Functionen von $t$, und die willkürlichen Constanten sind aus dem Anfangszustand zu bestimmen.

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man auch den neuen Gleichgewichtszustand des Systems nach Einführung der neuen Kräfte finden. Man braucht sich nur $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ constant zu denken: die zweiten Seiten werden dadurch gleich Null gesetzt und ergeben die gesuchten Werthe für die Verrückungen aller Punkte, welche dem neuen Gleichgewichte entsprechen.

212. Die Gleichungen (7) lassen sich auf dieselbe Form bringen wie die Gleichungen (6), wenn man

$$(8)\quad \alpha = \alpha_1 + \xi,\ \beta = \beta_1 + \eta,\ \gamma = \gamma_1 + \zeta,\ \alpha' = \alpha'_1 + \xi', \ldots$$

setzt und die Constanten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(9)\quad \begin{cases} H + m\alpha_1 + m_1\beta_1 + m_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\ K + n\alpha_1 + n_1\beta_1 + n_2\gamma_1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Gleichungen (7) gehen dann durch Substitution der durch (8) gegebenen Werthe für $\alpha, \beta, \ldots$ in nachstehende über:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = m\xi + m_1\eta + m_2\zeta + m_3\xi' + \ldots, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = n\xi + n_1\eta + n_2\zeta + \ldots, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = p\xi + p_1\eta + p_2\zeta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

welche sich von (6) nur dadurch unterscheiden, dass die Variablen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sind statt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Man bemerkt, dass die durch (9) bestimmten Werthe von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ gerade diejenigen sind, welche sich auf das neue Gleichgewicht des Systems nach Einführung der neuen Kräfte beziehen, und dass folglich $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die Verrückungen der Punkte in Bezug auf diese Gleichgewichtslage darstellen.

Die Gleichungen (8) lassen sehen, dass die Anfangswerthe von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}, \ldots$ denen von $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \ldots$ gleich sind, während die Anfangswerthe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ selbst denen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, vermindert respective um $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$, gleich sind.

Weil die Gleichungen (10) für $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ genau dieselben Werthe liefern wie die Gleichungen (6) für die dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wenn nur die Anfangswerthe dieser beiden Reihen von Variablen und ihrer ersten Derivirten respective übereinstimmen, so hat man folgendes merkwürdige und einfache Theorem:

Wenn irgend ein System von Punkten sehr wenig aus einer stabilen Gleichgewichtslage verrückt wird und man es ausserdem durch neue, constante und sehr kleine Kräfte angreift, so ist die Bewegung eines jeden Punktes in Bezug auf seine neue Gleichgewichtslage unter dem Einflusse der ersten und zweiten Kräfte zusammen dieselbe wie diejenige, welche unter dem Einflusse nur der ersten Kräfte in Bezug auf die alte Gleichgewichtslage stattfinden würde, wenn man das System in einen Anfangszustand versetzen wollte, welcher in Bezug auf diese Lage so wäre, wie der gegebene Anfangszustand in Bezug auf die neue Gleichgewichtslage ist.

Dieser Lehrsatz ist unabhängig von der Zahl und den gegenseitigen Entfernungen der Punkte; er besteht mithin noch, wenn man ihr System als stetig ansehen darf. Er hat folglich Geltung für alle kleinen Bewegungen der Flüssigkeiten und elastischen festen Körper.

213. Man kann a priori diesen Satz einsehen, zu dem eine sehr einfache Rechnung uns geführt hat. Die neue Gleichgewichtslage des Systems nach Einführung der neuen Kräfte

liegt sehr nahe bei der alten. Deshalb werden sich die Gleichungen, welche die Bewegung bestimmen, die aus einer Verrückung des Systems aus seinem neuen Gleichgewichtszustande entspringt, nicht von den Gleichungen (6) unterscheiden; denn die Coëfficienten könnten in beiden Systemen von Gleichungen nur um Grössen von demselben Range wie $\alpha$, $\beta$, . . . verschieden sein, und wir vernachlässigen die aus diesen Unterschieden hervorgehenden Glieder. Demnach würden gleiche Verrückungen der Punkte aus jedem der beiden Gleichgewichtszustände Bewegungen erzeugen, welche respective für jeden Punkt übereinstimmen; und damit ist das vorige Theorem bewiesen.

214. Uebereinanderlagerung der Wirkungen. — Die Form der Gleichungen (10) zeigt, dass $\xi$, $\eta$, . . gleich sind respective mit $\xi^1 + \xi^2$, $\eta^1 + \eta^2$, . ., wenn man sich die Anfangswerthe $\xi^1{}_0$, $\eta^1{}_0$, . ., $\frac{d\xi^1{}_0}{dt}$, $\frac{d\eta^1{}_0}{dt}$, . . gleich den wirklichen Anfangsverrückungen und Geschwindigkeiten des Systems denkt, und die anderen Anfangswerthe $\xi^2{}_0$, $\eta^2{}_0$, . . gleich $-\alpha_1$, $-\beta_1$, . . sowie $\frac{d\xi^2{}_0}{dt}$, $\frac{d\eta^2{}_0}{dt}$, . . gleich Null nimmt. Nun stellen $\alpha_1 + \xi^2$, $\beta_1 + \eta^2$, . . diejenigen mit den Axen parallelen Entfernungen der Punkte von ihrer alten Gleichgewichtslage dar, welche unter dem Einflusse der neuen Kräfte ohne anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit stattfinden. Ferner sind die Grössen $\xi^1$, $\eta^1$, . . gleich den Werthen, welche die Gleichungen (6) für die dortigen $\alpha$, $\beta$, . . ergeben würden; sie stellen folglich diejenigen Entfernungen der Punkte von ihrer alten Gleichgewichtslage dar, welche aus dem wirklichen Anfangszustand resultiren, wenn blos die alten Kräfte wirken. Da nun die wahren $\alpha$, $\beta$, . . gleich sind respective mit $\alpha_1 + \xi$, $\beta_1 + \eta$, . . , so sieht man, dass

die gesuchte Bewegung durch Uebereinanderlagerung zweier anderen Bewegungen entsteht: von diesen wird die eine durch den gegebenen Anfangszustand ohne Einführung der neuen Kräfte erzeugt, die andere dagegen durch Einführung dieser Kräfte ohne anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit.

Die erste dieser beiden Bewegungen kann nach Nr. 208

auf unendlich viele Arten zerlegt werden; man überzeugt sich leicht, dass dies auch bei der zweiten der Fall ist.

Die Form der Gleichungen (9) zeigt nämlich Folgendes: Wenn man eine jede der Grössen $H$, $K$, $L$, ... in dieselbe Anzahl beliebiger Theile, welche auch Null sein können, zerlegt; wenn man zunächst nur die ersten Theile nimmt, darauf nur die zweiten und so fort, so bilden die Summen der verschiedenen $\alpha_1$, der verschiedenen $\beta_1$, ..., welche den partiellen Systemen genügen, die Auflösung der Gleichungen (9). Zerlegt man nun die neu eingeführten Kräfte in eine beliebige Anzahl Gruppen, so geben die vollständig bekannten Glieder, welche diese Gruppen in den einzelnen Systemen von Gleichungen der entsprechenden neuen Gleichgewichtslagen liefern, durch ihre Addition respective die Grössen $H$, $K$, $L$,... Mithin geben die Werthe von $\alpha_1$, $\beta_1$, ..., welche einer jeden dieser Gruppen entsprechen, wenn man sie respective addirt, die durch die Gesammtheit der neu eingeführten Kräfte hervorgebrachten Verrückungen. Da sich nun die Wirkungen der Verrückungen addiren, so addiren sich die von den verschiedenen Kräftegruppen erzeugten Wirkungen.

215. Integration der Gleichungen. — Integriren wir jetzt die Gleichungen (6), auf welche alle Fälle zurückkommen, und deren Anzahl $n$ jener der unabhängigen Coordinaten gleich ist.

Eine Auflösung derselben erhält man durch die Annahme:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin(rt + s), \\ \beta &= R_1 \sin(rt + s), \\ \gamma &= R_2 \sin(rt + s), \\ \alpha' &= R_3 \sin(rt + s), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in den Gleichungen (6) gehen $R_1$, $R_2$, ... nur in der ersten Dimension ein; und man erkennt leicht, dass die Elimination von $R_1$, $R_2$, ... eine Endgleichung ergiebt, welche in Bezug auf die Unbekannte $r^2$ vom Grade $n$ ist. Die $n$ Werthe, welche diese Endgleichung für $r^2$ liefert, müssen alle positiv und ungleich ausfallen; denn ausserdem würden die Ausdrücke für die Unbekannten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... Exponentialgrössen oder ganze Functionen von $t$ in sich aufnehmen, welche beide mit der Zeit wachsen, was der Vor-

aussetzung eines stabilen Gleichgewichts zuwider wäre. Davon muss man jedoch die besonderen Fälle ausnehmen, in welchen die Coëfficienten der wachsenden Glieder vermöge des Anfangszustandes Null sind.

Von den $2n$ Werthen, welche sich für $r$ ergeben, berücksichtigen wir blos die positiven, weil die durch die negativen Werthe gegebenen Auflösungen in den anderen enthalten sind.

Jeder Werth von $r$ bestimmt ein einziges System Werthe für $R_1, R_2, \ldots$, es sei denn, dass es unendlich viele derselben giebt.

Multiplicirt man die vorstehenden Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mit einer willkürlichen Constante $R$, so hat man wieder eine Auflösung der Gleichungen (6), und es stecken dann in jeder Unbekannten $\alpha, \beta, \ldots$ die zwei willkürlichen Constanten $R, s$. Indem man die so erhaltenen Auflösungen für jeden der $n$ Werthe von $r$ addirt, gelangt man zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen (6), welche $2n$ willkürliche Constanten $R, R', \ldots, s, s', \ldots$ enthält. Sie wird durch folgende Formeln gegeben:

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = R\sin(rt+s) + R'\sin(r't+s') + \cdots, \\ \beta = RR_1\sin(rt+s) + R'R'_1\sin(r't+s') + \cdots, \\ \gamma = RR_2\sin(rt+s) + R'R'_2\sin(r't+s') + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die $2n$ Constanten sind aus den Anfangswerthen von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots$ zu bestimmen.

216. Zerlegung der Bewegung in einfache Schwingungen. — Die besonderen Bewegungen des Systems, welche einem jeden der $n$ Werthe $r, r', \ldots$ entsprechen, besitzen einige merkwürdige Eigenschaften. Betrachten wir z. B. die erste Bewegung, nehmen also:

$$\begin{aligned} \alpha &= R\sin(rt+s), \\ \beta &= RR_1\sin(rt+s), \\ \gamma &= RR_2\sin(rt+s), \\ \alpha' &= RR_3\sin(rt+s), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Da die Verrückungen $\alpha, \beta, \gamma$ in constanten Verhältnissen stehen, wie auch $t$ sein mag, so folgt, dass die Bewegung des

Punktes, dem sie angehören, geradlinig ist; dasselbe gilt für alle übrigen Punkte. Man sieht ferner, dass die Bewegung periodisch ist, und dass die Dauer der Periode $\frac{2\pi}{r}$ beträgt. Demnach machen alle Punkte geradlinige Schwingungen von gleicher Dauer, welche sie zu gleicher Zeit beginnen und beendigen, und ihre Wege stehen in constanten Verhältnissen.

Der blosse Anblick der Gleichungen (11) lehrt nun folgenden Satz:

Jede Bewegung eines Systems Punkte von endlicher Anzahl, die sehr wenig aus einer stabilen Gleichgewichtslage verrückt wurden, kann betrachtet werden als hervorgehend aus der Zusammensetzung der verschiedenen einfachen Schwingungen, deren das System fähig ist.

Die Anzahl dieser Schwingungen ist gleich jener der unabhängigen Coordinaten, wenn nicht unendlich viele dadurch möglich werden, dass Unbestimmtheit von $R_1$, $R_2$, ... eintritt. Die Schwingungen einer und derselben einfachen Schwingungsart geschehen in derselben Periode; ihre verschiedenen Richtungen und die Dauer der Periode hängen einzig und allein von der Natur des Systems ab, während ihre Amplituden und die Coëfficienten, mit welchen sie in der allgemeinen Auflösung auftreten, von dem Anfangszustande abhängen.

217. Betrachten wir als Beispiel den sehr einfachen Fall eines Punktes, welcher nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist und auf einer beliebigen Oberfläche bleiben muss. Entfernt man denselben aus seiner Gleichgewichtslage an der tiefsten Stelle der Oberfläche und ertheilt ihm eine sehr kleine Geschwindigkeit, so kann er je nach seinem Anfangszustand unendlich viele verschiedene Curven beschreiben. Da aber nur zwei Coordinaten unabhängig sind, so kann der bewegliche Punkt auch nur zwei Arten einfacher Schwingungen ausführen, und zwar finden dieselben statt in den beiden Krümmungslinien für den tiefsten Punkt der Oberfläche. Jede andere Bewegung geht aus der Verbindung dieser beiden in den passenden Verhältnissen hervor. Wenn alle Krümmungshalbmesser in diesem Punkte gleich wären, so könnte

jeder senkrechte Schnitt der Ort einfacher Schwingungen sein, und es würde somit unendlich viele Arten derselben geben.

218. Wenn die verschiedenen Wurzeln $r$, $r'$,... der Bestimmungsgleichung für $r$ unter einander commensurabel sind, so durchläuft das System periodisch dieselben Zustände.

Denn es bezeichne $\mu$ das grösste gemeinschaftliche Gemäss aller $r$, so werden sich wenigstens zwei $r$ angeben lassen, die wir durch $h\mu$, $h'\mu$ bezeichnen wollen, so dass $h$, $h'$ zu einander relative Primzahlen sind. Damit nun die Werthe von $\alpha$, $\beta$, . . . periodisch nach Verlauf eines Zeitintervalls $\theta$ wiederkehren, so müssen die Producte $r\theta$ sämmtlich Vielfache von $2\pi$ sein. Man muss also insbesondere für die durch $h\mu$, $h'\mu$ bezeichneten Werthe von $r$ haben:

$$h\mu\theta = 2\pi k, \quad h'\mu\theta = 2\pi k',$$

während $k$, $k'$ ganze Zahlen vorstellen. Diese müssen sich aber zu einander verhalten wie $h$, $h'$, und weil $h$, $h'$ relative Primzahlen, so sind diese selbst die kleinsten brauchbaren Werthe für $k$, $k'$. Man erhält bei dieser Annahme:

$$\theta = \frac{2\pi}{\mu};$$

ein kleinerer Werth von $\theta$ würde den beiden Werthen $h\mu$, $h'\mu$ für $r$ nicht genügen. Es liegt aber auf der Hand, dass dieser Werth von $\theta$, mit irgend einem der $n$ Werthe von $r$ multiplicirt, ein Vielfaches von $2\pi$ giebt: er ist also die Dauer der Periode.

Sie würde unendlich werden für $\mu = 0$, d. h. wenn kein gemeinschaftliches Gemäss für alle $r$ existirte. In diesem Falle ist daher die Bewegung nicht periodisch, und das System kann sich niemals in zwei identischen Zuständen bezüglich der Lagen und Geschwindigkeiten befinden; denn geschähe dies einmal, so würden alle auf den ersten der beiden identischen Zustände gefolgten wiederkehren, und die Bewegung wäre mithin periodisch.

---

# Verbesserungen.

## Zum ersten Theile.

Seite 6, Zeile 4 von oben: verabredeten statt passenden.
„ 21, „ 5 „ unten: in gleichen Zeiten statt in einer und derselben Zeit.
„ 86, „ 4 „ unten: $y$ statt $x$, $x$ statt $y$.
„ 87, „ 15 „ unten: $p$ statt $P$.
„ 87, „ 9 u. 8 von unten: so sind diese Kräfte proportional statt so müssen die Kräfte proportional sein.
„ 101, „ 10 von unten: $z_1$ statt $x_1$.
„ 147, „ 1 „ unten: 44 statt 42.
„ 148, „ 5 „ oben hinter Richtung schalte man ein: die parallel ist zu einer Ebene, welche Parallelen enthält zu der Axe des mittleren Paars und zu der ersten Seitenaxe.
„ 148, „ 17 „ unten: Axe statt Axen.

Zusatz zu Seite 177. — Wo nachstehend von ähnlichen Ellipsoiden die Rede ist, denke man hinzu, dass sie ähnlich liegen sollen.

Ein Körper sei begrenzt durch zwei ähnliche Ellipsoide mit den Halbaxen $a$, $b$, $c$ und $a'$, $b'$, $c'$. Ein anderer Körper werde begrenzt durch zwei ebenfalls unter sich ähnliche Ellipsoide, welche mit den beiden ersten homofocal sind, das äussere mit dem äusseren und das innere mit dem inneren; ihre Halbaxen seien $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$. Man hat dann $a : a' = A : A'$, und folglich verhalten sich die Inhalte der

beiden Körper wie $abc$ zu $ABC$ oder, was dasselbe ist, wie $a'b'c'$ zu $A'B'C'$.

Wenn ich in dem einen Körper irgend einen Punkt annehme, so kann ich durch diesen ein Ellipsoid führen, ähnlich zu den beiden Grenzflächen, und ich will unter dem correspondirenden Punkte des anderen Körpers denjenigen gewöhnlich so genannten Punkt verstehen, welcher auf einem Ellipsoide liegt, das mit jenem Ellipsoide homofocal und zu den Grenzflächen dieses Körpers ähnlich ist. Der correspondirende Punkt zu dem Punkte $x, y, z$ ist demnach $\frac{A}{a}x, \frac{B}{b}y, \frac{C}{c}z$.

Betrachte ich nun in dem einen Körper ein unendlich kleines Parallelopiped mit parallelen Kanten zu den Axen, und bestimme ich zu seinen Ecken die correspondirenden Punkte des anderen Körpers, so erhalte ich ein zweites unendlich kleines Parallelopiped, ebenfalls mit parallelen Kanten zu den Axen, und diese beiden Parallelopipeda verhalten sich wie $abc$ zu $ABC$. Das gleiche Verhältniss besteht zwischen einer beliebigen Summe solcher Parallelopipeda des einen Körpers und der correspondirenden Summe des anderen. Deshalb verhalten sich irgend zwei Stücke beider Körper, sobald sie durch Flächen begrenzt werden, von welchen alle Punkte paarweise correspondiren, wie die ganzen Körper.

Seite 186, Zeile 3 von oben: $\beta$ statt $b$.
„ 197, „ 5 „ unten: $Z''$ statt $Z'$.
„ 200, „ 6 „ unten: relativen statt bezüglichen.

Seite 293, Zeile 14 von unten setze man hinzu: Eine solche Curve ist die Projection der gegebenen auf die Verticalebene, welche die im tiefsten Punkt der gegebenen Curve an diese gezogene Tangente enthält.

## Zum zweiten Theile.

Seite 44, Zeile 2 von unten: $dr$ statt $dt$.
„ 104, „ 10 „ oben: geraden statt unmittelbaren.

In Nr. 69 setze man, von Seite 108, Zeile 19 von oben angefangen, überall $C$, wo $c$ steht.

Seite 121, Zeile 4 von unten: zu seinem Schwerpunkt gehören statt durch dessen Schwerpunkt gehen.

Seite 189, Zeile 20 von oben: Resultante statt Resultate.

Seite 203 setze man statt der Zeilen 11, 10, 9 von unten: und vermöge ihrer Herleitung bleibt diese Gleichung geltend, so lange als $\theta$, $\zeta$ sehr klein sind. Deshalb können die negativen Glieder um sehr wenig $c$ nicht übertreffen. Weil aber ein solches Uebertreffen jedem weiteren Wachsthum vorhergehen müsste, so bleiben die negativen Glieder beständig unter $c$, also $\theta$ und $\zeta$ sehr klein.

Seite 270, Zeile 4 von oben: Bewegungen statt Bewegung.

K. K.
UNIVERSITÄT INNSBRUCK
Physikalisches Institut

# ANHANG

ZU

# DUHAMEL'S LEHRBUCH

DER

# REINEN MECHANIK.

---

DEUTSCH BEARBEITET

VON

WILHELM WAGNER.

# Inhalt des Anhangs.

Seite

Gleichgewicht von Systemen mit veränderlicher Gestalt, welche aus starren Systemen zusammengesetzt sind . . . . . 1
Beispiele . . . . . 3

Von der Bewegung ohne Rücksicht auf ihre Ursachen . . . . . 6

Bewegung eines Punktes . . . . . 7
Geschwindigkeit . . . . . —
Gleichung der gleichförmigen Bewegung . . . . . 10
Gleichförmig veränderte Bewegung . . . . . 11
Von der veränderlichen geradlinigen Bewegung im Allgemeinen . . . 12
Krummlinige Bewegung eines Punktes . . . . . 14
Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten . . . . . —
Componenten der Geschwindigkeit parallel mit den Axen . . . . . 15
Abweichung . . . . . 16
Richtung der Abweichung . . . . . 18
Acceleration in der Abweichung . . . . . —
Die Abweichung zerlegt nach der Tangente und Normale . . . . . 19
Tangentiale und normale Componente der Acceleration in der abweichenden Bewegung . . . . . 21
Geometrische Bewegung eines starren Systems . . . . . 22
Winkelgeschwindigkeit . . . . . 24
Zwei Drehaxen treffen in demselben Punkt zusammen . . . . . 26
Parallele Drehaxen . . . . . 28
Gegenpaar von Drehungen . . . . . 29
Allgemeine Reduction einer jeden Bewegung . . . . . 30
Der besondere Fall, wo die Bewegung parallel ist zu einer Ebene . . 31
Allgemeine Reduction auf eine schraubenförmige Bewegung . . . . 32
Stetige Bewegung parallel mit einer festen Ebene . . . . . 33
Stetige Bewegung um einen festen Punkt . . . . . 34
Stetige Bewegung im Allgemeinen . . . . . —
Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze . . . . . 35
Richtung der Drehungsaxe . . . . . 39
Grösse der Drehung . . . . . 40
Beziehungen zwischen den Grössen $p$, $q$, $r$ . . . . . 43
Gleichungen für die Axe der Drehung und Gleitung . . . . . 45

Seite
Unendlich kleine Bewegung eines starren Systems . . . . . 48
Componenten der Geschwindigkeit . . . . . —
Augenblickliche Drehaxe . . . . . 49
Grösse der Winkelgeschwindigkeit . . . . . 50
Drehrichtung . . . . . —
Augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung . . . . . 51
Gleichungen für die augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung . 52
Virtuelle Verrückung eines starren Körpers. Gleichungen seines Gleichgewichts . . . . . 53
Geschwindigkeit und Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes . . . . . 55
Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung . . . . . —
Relative Geschwindigkeit . . . . . 57
Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung . . . . . 58
Abweichung in der relativen Bewegung . . . . . 62
Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze . . . . . 63
Andere Betrachtung der relativen Bewegung . . . . . 67

Richtung und Grösse der Kraft nach der hervorgebrachten Bewegung 72
Tangentiale und normale Componente der Kraft . . . . . 73
Bewegung durch eine die Trajectorie beständig tangirende Kraft . . 74
Bewegung durch eine zur Trajectorie beständig normale Kraft . . . 75
Bewegung durch eine gegen den Radius vector senkrechte Kraft . . 76

Arbeit einer Kraft. — Lebendige Kraft . . . . . 77
Neuer Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten . . . 78
Arbeit der Resultante von beliebigen Kräften . . . . . —
Lebendige Kraft . . . . . 79
Beziehung zwischen der lebendigen Kraft und Arbeit in der allgemeinen Bewegung eines Punktes . . . . . 80

Von den Kräften, welche die relative Bewegung eines Punktes hervorbringen können . . . . . 82
Der besondere Fall, wo das System nur eine fortschreitende Bewegung hat . . . . . 85
Der Fall, wo das System eine gleichförmige Rotationsbewegung hat. Anwendung auf die Erde . . . . . 86
Gesetz der Flächen in der relativen Bewegung . . . . . 87
Gleichung der lebendigen Kraft in der relativen Bewegung eines freien Punktes . . . . . 88
Relative Bewegung eines unfreien Punktes . . . . . —
Relative Bewegung eines Systems . . . . . 90

Schiefer Stoss zweier Kugeln gegen einander und einer Kugel gegen eine Ebene . . . . . 94

## Gleichgewicht von Systemen mit veränderlicher Gestalt, welche aus starren Systemen zusammengesetzt sind.

1. Wenn nicht alle Punkte eines Systems fest verbunden sind, so kann man nicht alle Kräfte in eine Kraft und ein Paar vereinigen. Zum Gleichgewicht wird jetzt erfordert und genügt es, dass an jedem einzelnen der starren Systeme die Kräfte sich im Gleichgewicht halten, welche auf dasselbe wirken und aus den gegebenen sowie jenen Kräften bestehen, welche aus seiner Verbindung mit den anderen Systemen entspringen. Wir nehmen an, dass die Verbindungen aus biegsamen Fäden oder starren Bändern bestehen, deren Endpunkte an verschiedenen Systemen befestigt sind; ferner mögen einige Körper sich mit ihren Oberflächen gegen einander drücken.

Im Gleichgewicht des Ganzen ist jeder biegsame Faden im Gleichgewicht und wird folglich durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gespannt, so dass jeder von den zwei durch den Faden verbundenen Körpern an dem anderen zieht.

Hat man statt der Fäden vollkommen starre, weder dehnbare noch zusammendrückbare Bänder oder Stäbe, so erheischt ihr Gleichgewicht, dass die Kräfte an den beiden Enden gleich und gerade entgegengerichtet sind; aber sie brauchen nicht im Sinne der Verlängerung zu wirken, sondern jeder Körper kann den anderen drücken.

Wenn zwei Körper sich mit ihren Oberflächen berühren, und diese Oberflächen durch ihren Widerstand nur normale Kräfte aufheben können, so werden im Gleichgewicht beide

Körper in der Richtung der gemeinschaftlichen Normale mit gleicher Kraft gegen einander gedrückt.

Wenn also die Verbindung durch biegsame Fäden, starre Bänder oder durch Contact von Oberflächen geschieht, so üben je zwei verbundene Körper auf einander unbekannte Wirkungen aus, welche gleich und entgegengesetzt sind. Ebenso müssen in allen anderen Fällen die durch die Verbindungen vermittelten Wirkungen paarweise gleich und entgegengesetzt sein.

Sind die starren Systeme einfache Maschinen wie der Hebel, das Wellrad etc., so stellt ihr Ganzes eine zusammengesetzte Maschine dar.

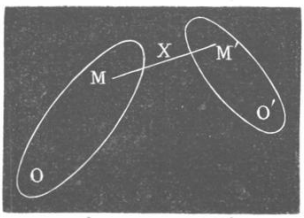
2. Um die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden, bildet man für jedes starre System die Gleichungen, deren Zahl zwischen 1 und 6 variiren kann. Indem man die von den Verbindungen ausgeübten Kräfte eliminirt, erhält man diejenigen Gleichungen, denen die gegebenen Kräfte genügen müssen, wenn das zusammengesetzte System im Gleichgewicht stehen soll; und die zur Elimination benutzten Gleichungen bestimmen Grösse und Richtung aller durch die Verbindungen ausgeübten Kräfte.

In dem besonderen Falle, wo das Gleichgewicht eines jeden starren Systems nur eine Gleichung erfordert, und wo aus der Verbindung von je zwei Systemen nur zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte hervorgehen, überzeugt man sich leicht, dass das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte nur eine Bedingungsgleichung hat.

In der That, ist $m$ die Zahl der Systeme, so erhält man $m$ Gleichungen, und es entspringen aus der Verbindung des ersten Systems mit dem zweiten, des zweiten mit dem dritten, etc. $m-1$ unbekannte Kräfte $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$. Von diesen enthält die erste Gleichung $X_1$, die zweite $X_1$ und $X_2$, die dritte $X_2$ und $X_3$, etc., endlich die letzte $X_{m-1}$. Findet man nun $X_1$ aus der ersten und substituirt in der zweiten; findet man aus dieser $X_2$ und substituirt in der dritten; etc., so erhält man eine Endgleichung, in welcher nur die gegebenen Kräfte vorkommen. Sie ist die einzige Bedingung des Gleichgewichts, während die vorhergehenden Gleichungen $X_1$, $X_2, \ldots, X_{m-1}$ bestimmen.

3. Erstes Beispiel. — Auf zwei Hebel, d. i. auf zwei starre Körper, welche um feste Punkte $O$, $O'$ frei beweglich sind, wirken beliebige Kräfte. Ein biegsamer Faden ist an beiden Körpern in den Punkten $M$, $M'$ befestigt, und das System befindet sich in einer solchen Lage, dass der Faden gerade ausgespannt ist: man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichts.

Fig. 1.

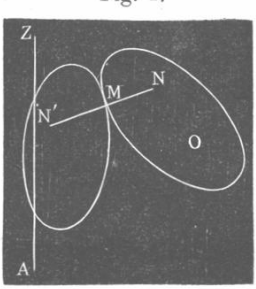



$X$ bezeichne die unbekannte Spannung. Den Hebel $MO$ greifen gegebene Kräfte an und die von $M$ gegen $M'$ gerichtete Kraft $X$. Man hat für sein Gleichgewicht die bekannten drei Gleichungen, deren jede $X$ in der ersten Potenz enthält. Ebenso steht der Hebel $M'O'$ im Gleichgewicht, während auf ihn gegebene Kräfte wirken und die von $M'$ gegen $M$ gerichtete Kraft $X$. Für ihn gelten drei neue Gleichungen, deren jede $X$ in der ersten Potenz enthält.

Findet man $X$ aus einer von diesen sechs Gleichungen, so kennt man die Spannung des Fadens, und das Einsetzen in die fünf anderen liefert die Bedingungen, denen die gegebenen Kräfte genügen müssen, wenn das System im Gleichgewicht stehen soll.

4. Zweites Beispiel. — Ein Körper ist frei beweglich um den festen Punkt $O$, ein anderer um die feste Axe $AZ$; beide Körper berühren sich in $M$, und es wirken beliebige Kräfte. Man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichts und die Grösse $X$ des gegenseitigen Drucks in $M$.

Fig. 2.




Auf den Körper $MO$ wirken gegebene Kräfte und die längs $MN$ gerichtete Kraft $X$. Sein Gleichgewicht wird durch drei Gleichungen ausgedrückt, welche $X$ enthalten. Auf den zweiten Körper wirken gege-

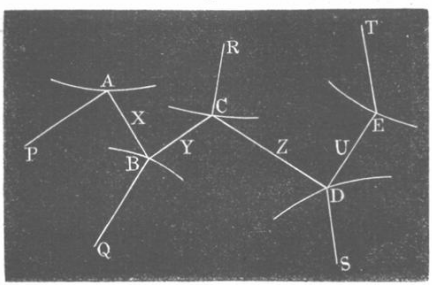
bene Kräfte und die längs $MN'$ gerichtete Kraft $X$. Sein Gleichgewicht führt zu einer Gleichung, welche $X$ enthält.

Von diesen vier Gleichungen bestimmt eine $X$, und durch Einsetzen geben die drei anderen die Bedingungen, welchen die gegebenen Kräfte genügen müssen.

5. Drittes Beispiel. — Betrachten wir ein Polygon, das durch starre Geraden gebildet wird, deren Winkel man ohne Widerstand verändern kann, und deren Endpunkte auf gegebenen festen Curven bleiben müssen.

Es stelle $ABCDE$ dieses Polygon vor; $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ seien die Resultanten der gegebenen Kräfte an $A$, $B$, $C$, $D$, $E$.

Fig. 3.




Damit ein beliebiger Eckpunkt im Gleichgewicht sei, so muss die Resultante aller ihn angreifenden Kräfte auf der entsprechenden Curve normal stehen.

Da auch jede Polygonseite im Gleichgewicht sein muss, so wirken an ihren Endpunkten zwei gleiche und gerade entgegengesetzte Kräfte, welche sie aufhebt, indem sie ihnen zwei gleiche Kräfte entgegensetzt. Bezeichnen wir diese von den einzelnen Polygonseiten hervorgebrachten Kräfte durch $X$, $Y$, $Z$, $U$.

Es seien $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ mit den entsprechenden Tangenten machen; $\alpha$, $\alpha'$ seien die Winkel der in der Geraden $AB$ gerichteten Kräfte $X$ mit den Tangenten in $A$ und $B$, $\beta$, $\beta'$ die Winkel der Kräfte $Y$ mit den Tangenten in $B$ und $C$, etc.

Das Gleichgewicht des Punktes $A$ ergiebt:

$$P \cos a + X \cos \alpha = 0;$$

das Gleichgewicht von $B$ liefert:

$$X \cos \alpha' + Q \cos b + Y \cos \beta = 0;$$

für die anderen Punkte erhält man:

$$Y \cos\beta' + R \cos c + Z \cos\gamma = 0,$$
$$Z \cos\gamma' + S \cos d + U \cos\delta = 0,$$
$$U \cos\delta' + T \cos e = 0.$$

Eliminirt man $X$, $Y$, $Z$, $U$, so bleibt eine Gleichung zwischen den gegebenen Kräften als Bedingung des Gleichgewichts. Die anderen Gleichungen bestimmen die Grösse von $X$, $Y$, $Z$, $U$. Der Sinn, in welchem diese Kräfte wirken, wird durch die Zeichen der Cosinus von $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ etc. bestimmt.

6. Bemerkenswerth ist der besondere Fall, wo eine der Geraden auf einer Curve normal steht. Es sei z. B. $BC$ normal auf der Curve in $B$, dann ist $\cos\beta = 0$, und die zwei ersten Gleichungen ergeben durch Elimination von $X$ eine Bedingung zwischen $P$ und $Q$, bei welcher die Gerade $AB$ für sich im Gleichgewicht sein würde. Und in der That hat die Kraft $Y$ keinen Einfluss auf $AB$, da sie durch den Widerstand der Curve in $B$ aufgehoben wird.

Die drei anderen Gleichungen geben, durch Elimination von $Z$ und $U$, die Bedingung für das Gleichgewicht des Systems $CDE$. In dieser Bedingung kommt eine willkürliche Kraft $Y$ vor, welche in $C$ längs $BC$ im einen oder anderen Sinne wirken und keine Verrückung erzeugen kann, weil sie durch den Widerstand in $B$ aufgehoben wird.

# Von der Bewegung ohne Rücksicht auf ihre Ursachen.

7. Bevor man die Bewegungen untersucht, welche durch bestimmte Kräfte erzeugt werden, ist es gut die Bewegung an sich zu betrachten unabhängig von jeder Ursache. Hat man sich erst vertraut gemacht mit ihren möglichen Modificationen und mit den Gesichtspunkten, unter welchen sie aufzufassen sind, so wird die Einsicht in die Wirkungsweise der Kräfte leichter. Man hat dann die Schwierigkeiten getrennt, statt sie vereinigt zu lassen.

Zuweilen bedient man sich in der Geometrie der Bewegung zur Erzeugung der Grössen. Aber die Zeit bleibt dabei unberücksichtigt; es kommt nur darauf an, dass die beweglichen Linien oder Flächen gleichzeitig ihre entsprechenden Lagen einnehmen, welche Zeit auch von einer Lage bis zur anderen verfliessen mag. Diese Gleichzeitigkeit ist allein wichtig, und die Bewegung bleibt übrigens unbestimmt.

Wir werden uns dagegen nur mit völlig bestimmten Bewegungen beschäftigen, bei denen die Zeit ein wesentliches Element ist, und wo es sich um die Lagen der verschiedenen Punkte des Systems in jedem Augenblick handelt. Unsere Aufgabe ist also kein Gegenstand der reinen Geometrie. Man könnte aus ihr eine besondere Wissenschaft machen; aber es scheint uns angemessen sie als einen Zweig der Mechanik, der allgemeinen Wissenschaft von der Bewegung, zu betrachten. Bevor man untersucht, welche Bewegung durch Kräfte hervorgebracht wird, muss man wissen was die Bewegung an sich ist; und es soll dies vorläufige Studium als Eingang in die Dynamik dienen. Wir beschränken uns darin auf die elementarsten und allgemeinsten Betrachtungen.

## Bewegung eines Punktes.

8. Der Begriff der Zeit ist einer von denen, welche sich auf keinen andern zurückführen und folglich auch nicht definiren lassen. Man muss aber die Gleichheit zwischen den Zeitgrössen definiren, damit dieselben messbar und der Rechnung unterwerfbar werden.

Wir nennen zwei Zeitintervalle gleich, wenn zwei identische Körper, welche sich zu Anfang dieser Intervalle in denselben Umständen befanden und durchaus gleichen Wirkungen und Einflüssen unterworfen wurden, am Ende identische Wege durchlaufen haben. Der Begriff der Gleichheit führt zu dem eines beliebigen Verhältnisses.

Die Bewegung eines Punktes heisst gleichförmig, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Wege durchläuft, wie klein auch diese Zeiten sein mögen.

Eine Bewegung, welche weder gleichförmig noch aus gleichförmigen Bewegungen von endlicher Dauer zusammengesetzt ist, wird veränderlich genannt.

9. Geschwindigkeit. — Die gleichförmigen Bewegungen können sich unterscheiden durch die während gleicher Zeit durchlaufenen Wege. Hieraus entspringt die zuerst etwas vage Idee von Geschwindigkeit. Um dies unerlässliche Element in die Rechnung einzuführen ist eine genaue Definition nothwendig, und wir werden unter der Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punktes den Weg verstehen, welchen er in der Zeiteinheit durchläuft, oder das Verhältniss des durchlaufenen Wegs zu der dabei verflossenen Zeit. Der Punkt, dessen Geschwindigkeit durch die Zahl 1 ausgedrückt wird, durchläuft also die Längeneinheit während der Zeiteinheit.

Nach dieser Definition fällt bei derselben Bewegung die

Grösse, welche wir Geschwindigkeit nennen, um so grösser aus, je grösser die Zeiteinheit ist, was sich mit der gewohnten Vorstellung von Geschwindigkeit nicht verträgt; aber der Quotient aus den Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen hängt nicht von der Zeiteinheit ab, denn er ist der Quotient aus den während gleicher Zeit zurückgelegten Wegen.

Die Zahl, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, hängt auch von der Längeneinheit ab und wird um so grösser, je kleiner diese Einheit ist. Diese Bemerkungen über den Einfluss der verschiedenen Einheiten sind nothwendig zur Beurtheilung der Homogenität in den Formeln der Bewegung.

Bemerkung. — Wollte man a priori den Begriff der Geschwindigkeit zulassen und keine Definition davon geben, so müsste man, wie bei der Zeit, die Gleichheit zwischen Grössen dieser Art definiren. Man würde dann die Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen gleich nennen, wenn die während derselben Zeit durchlaufenen Wege gleich sind. Die Addition von Geschwindigkeiten würde man definiren durch die Addition der in derselben Zeit durchlaufenen Wege. Daraus würde folgen, dass das Verhältniss zweier Geschwindigkeiten das der Wege ist, und somit würde die Geschwindigkeit eines Punktes gemessen durch den Weg, den er in der Zeiteinheit durchläuft, wenn man die Geschwindigkeit jenes Punktes zur Einheit nähme, der in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt.

10. Bei der veränderlichen Bewegung kann man unter Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick nicht mehr den, von diesem Augenblick ab, während der Zeiteinheit durchlaufenen Weg verstehen, weil dann die Geschwindigkeit des Beweglichen von den Aenderungen abhängen würde, welche die Bewegung nach dem Augenblicke erleidet, um den es sich handelt.

In der Theorie der Curven kann man wohl als Maass der Kreiskrümmung in einem beliebigen Punkte die Krümmung eines der Einheit gleichen Bogens nehmen; aber bei einer Linie, deren Krümmung nicht der Bogenlänge proportional ist, kann man nicht die in irgend einem Punkt stattfindende Krümmung durch jene eines der Einheit gleichen Bogens messen, der mit diesem Punkt anfängt.

Aehnliches lässt sich sagen über das specifische Gewicht in einem Punkte einer heterogenen Substanz, über die Temperatur in einem Punkte eines ungleich erwärmten Körpers, etc. Auch verfährt man in diesen verschiedenen Fällen auf analoge Weise.

Es sei $M$ in einem gewissen Augenblick der Ort eines Punktes, der mit veränderlicher Bewegung irgend eine Curve beschreibt. Nach einer Zeit $\theta$ wird er sich in einem anderen Punkt $N$ befinden, und der Quotient $\frac{MN}{\theta}$ drückt die mittlere Geschwindigkeit aus, mit welcher der Bogen $MN$ durchlaufen wurde. Lässt man nun $\theta$ unendlich abnehmen, so nähert sich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{MN}{\theta}$ einem festen Werthe, den wir die Geschwindigkeit des Beweglichen im Punkte $M$ nennen.

In der Sprache der Infinitesimalrechnung heisst also die Geschwindigkeit des Beweglichen in einem gegebenen Augenblick die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe, von diesem Augenblicke ab, einen unendlich kleinen Bogen beschreibt.

Bezeichnet $t$ die Zeit, $s$ die Bogenlängen der beschriebenen Linie, von irgend einem Punkt an gezählt, so ist $\frac{ds}{dt}$ die Grenze von $\frac{MN}{\theta}$. Mithin wird die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle der Bahn ausgedrückt durch die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit.

11. Es ist zu bemerken, dass der in unendlich kleiner Zeit beschriebene Bogen sich betrachten lässt als das Product dieser Zeit in die Geschwindigkeit zu Anfang derselben. Denn er würde genau das Product der Zeit in die mittlere Geschwindigkeit darstellen, welche sich von der oben definirten Geschwindigkeit zu Anfang des Intervalls nur um eine unendlich kleine Grösse unterscheidet. Man kann auch die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke des Intervalls nehmen. Das Resultat ist von dem gesuchten immer nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden und darf folglich allemal dafür gesetzt werden, wenn es sich nur um die Grenze von Quotienten oder Summen handelt.

So ist der in endlicher Zeit durchlaufene Weg die Grenze der Summe aus den Producten der unendlich kleinen Zeitelemente in die Geschwindigkeiten zu Anfang oder während dieser Elemente. Die Geschwindigkeit, so wie wir sie definirt haben, spielt also dieselbe Rolle bei der veränderlichen Bewegung, wenn man unendlich kleine Wege betrachtet, wie bei der gleichförmigen Bewegung; und dies ist der Grund, welcher die Beibehaltung des Namens rechtfertigt.

12. Endliche Gleichung der gleichförmigen Bewegung. — Die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer geraden oder krummen Linie kann dargestellt werden durch eine Gleichung ersten Grades zwischen der Zeit und Entfernung.

Man bezeichne mit $t$ die Zeit von einem bestimmten Augenblick an, mit $x$ die Entfernung des beweglichen Punktes $M$ von einem festen Anfangspunkt $O$, die Entfernung und den Anfangspunkt auf der unendlichen Linie $X'X$, welche der Punkt durchläuft, genommen; $a$ sei die Entfernung $OA$ des Ursprungs $O$ von dem Punkte, wo sich das Bewegliche für $t = 0$ befand; endlich sei $v$ die Geschwindigkeit oder der constante Weg, welcher in der Zeiteinheit durchlaufen wird. Gesucht wird eine Gleichung zwischen $x$ und $t$.

Der Weg während der Zeiteinheit ist $v$, also $vt$ während der Zeit $t$. Hat daher die Bewegung die Richtung $OX$ der positiven $x$, so ist:

$$x = a + vt;$$

hier sind $x$ und $a$ positiv oder negativ nach Lage der Punkte $A$ und $M$ gegen den Ursprung, $v$ ist eine absolute Zahl und $t$ eine positive Zahl, welche den Zeitpunkten nach dem Zeitanfang entspricht.

Man bemerkt aber, dass man die vorstehende Gleichung auch für die Epochen vor dem Zeitanfang beibehalten kann und deshalb nur $t$ negativ zu nehmen braucht.

Ferner kann man dieselbe Gleichung anwenden, wenn die Richtung der Bewegung jener der positiven $x$ entgegengesetzt ist; man muss dann $v$ negativ nehmen. — Auf diese Weise kann die allgemeine Gleichung

$$x = a + vt \tag{1}$$

alle gleichförmigen Bewegungen darstellen.

13. Differentialgleichung der gleichförmigen Bewegung. — Bei einer jeden Bewegung wird die Geschwindigkeit durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückt, in dem vorliegenden Falle also durch $\frac{dx}{dt}$.

Nimmt man $t$ zur unabhängigen Variablen, also $dt$ positiv, so ist $\frac{dx}{dt}$ positiv, wenn die Bewegung im Sinne der positiven $x$ stattfindet, und negativ im entgegengesetzten Fall. Schreiben wir daher $v = \frac{dx}{dt}$, so verstehen wir unter $v$ eine positive oder negative Zahl, je nachdem die Bewegung die Richtung der positiven oder negativen $x$ hat. Da übrigens die Wahl des Abscissen- und Zeitanfangs gleichgültig ist, und die gleichförmige Bewegung eine beliebige Beschaffenheit haben kann, so sind alle gleichförmigen Bewegungen in der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{2}$$

enthalten, wo $v$ eine positive oder negative Constante darstellt.

Sie folgt aus (1) durch Differentiation und umgekehrt diese aus ihr durch Integration, wobei eine willkürliche Constante $a$ eingeht.

14. Gleichförmig veränderte Bewegung. — Nach der gleichförmigen Bewegung folgt als einfachste diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit sich gleichförmig, d. h. der Zeit proportional ändert. Sie dient zur Vergleichung der verwickeltsten Bewegungen.

Die Bedingung, dass die Geschwindigkeit $v$ proportional mit der Zeit wachse, ergiebt, dass die Ableitung $\frac{dv}{dt}$ constant sein muss, sowie umgekehrt. Bezeichnet also $a$ irgend eine positive oder negative Constante, so ist die allgemeine Gleichung aller gleichförmig veränderten Bewegungen:

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2} = a, \text{ weil } v = \frac{dx}{dt};$$

hieraus folgt durch Integration:

$$(1) \qquad v = at + b = \frac{dx}{dt},$$

wie man schon vorher wissen konnte. Integrirt man neuerdings, so kommt:

$$(2) \qquad x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

wo $b$ und $c$ willkürliche Constanten.

Die Zunahmen der Geschwindigkeit sind positiv oder negativ zugleich mit der Constante $a$, welche den durch die Zeit getheilten Zuwachs der Geschwindigkeit misst, oder den Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit.

Man nennt die Constante $a$ die Acceleration, welche positiv oder negativ sein kann. Die Zeichen von $a$, $b$, $c$ in den Gleichungen (1) und (2) sind beliebig.

## Von der veränderlichen geradlinigen Bewegung im Allgemeinen.

15. Bisher konnte der Punkt sich auf irgend einer Linie bewegen. Jetzt aber nehmen wir an, um die Schwierigkeiten zu trennen, dass die Bewegung in gerader Linie stattfindet.

Der Begriff der Acceleration, den wir bei der gleichförmig veränderten Bewegung gaben, lässt sich in ähnlicher Weise ausdehnen wie der Begriff von Geschwindigkeit.

Es bezeichne $\Delta v$ den Zuwachs der Geschwindigkeit, wenn die Zeit von einem gewissen Augenblicke an um $\Delta t$ wächst. Denken wir uns eine gleichförmig veränderte Bewegung, deren Geschwindigkeit zu Anfang und Ende des Intervalls $\Delta t$ übereinstimmt mit der Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung. Die Acceleration $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ der Hülfsbewegung stellt die mittlere Acceleration der wirklichen Bewegung während des Intervalls $\Delta t$ dar, und sie nähert sich einer festen Grenze, wenn $\Delta t$ gegen die Null abnimmt.

Diese Grenze nennen wir die Acceleration der wirklichen Bewegung in dem betrachteten Augenblick. Ihr Ausdruck ist:

$$\frac{dv}{dt} \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Man sieht leicht, dass sie bei der veränderlichen Bewegung überhaupt für unendlich kleine Intervalle dieselbe Rolle spielt wie bei der gleichförmig veränderten Bewegung. Denn ist $\Delta t$ unendlich klein, so erhält man:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon$ auch unendlich klein, und folglich:

$$\Delta v = \frac{dv}{dt} \Delta t + \varepsilon \Delta t.$$

Das wirkliche Increment $\Delta v$ der Geschwindigkeit unterscheidet sich also von $\frac{dv}{dt} \Delta t$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, welche allemal vernachlässigt werden kann, wenn es sich nur um die Grenze von Summen oder Quotienten handelt. Mithin kann man in allen solchen Fällen das unendlich kleine Increment der Geschwindigkeit so berechnen, als ob die Bewegung sich gleichförmig änderte, und die oben definirte Acceleration der wirklichen Bewegung zu ihrer Acceleration hätte.

Bemerkung. — Wir haben die veränderliche Bewegung überhaupt auf zwei verschiedene Weisen als Grenze successiver Bewegungen von unendlich kleiner Dauer betrachtet. Das eine Mal waren diese elementaren Bewegungen gleichförmig, das andere Mal gleichförmig verändert.

Die ersten Bewegungen besitzen zu Anfang der unendlich kleinen Zeitintervalle einerlei $\frac{dx}{dt}$ oder gleiche Geschwindigkeit mit der wirklichen Bewegung; die zweiten besitzen gleiches $\frac{dx}{dt}$ und gleiches $\frac{d^2x}{dt^2}$, d. h. dieselbe Geschwindigkeit und Acceleration mit ihr. Die ersten Bewegungen haben, wenn man so sagen darf, eine Berührung erster Ordnung mit der vorgelegten Bewegung, und die anderen eine Berührung zweiter Ordnung. Auch kann man, selbst für unendlich kleine Zeit, die Bewegungen erster Art statt der wirklichen Bewegung nur zur Berechnung der Wegzuwachse setzen; während man

zur Berechnung der Zunahmen der Geschwindigkeit die anderen Bewegungen nehmen kann.

## Krummlinige Bewegung eines Punktes.

16. Richtung der Geschwindigkeit. — Die Definition, welche wir von der Grösse der Geschwindigkeit gaben, ist unabhängig von der Linie (Bahn oder Trajectorie), welche das Bewegliche beschreibt. Wenn aber die Bewegung krummlinig ist, so muss man noch den Begriff der Richtung einführen. Bei der geradlinigen Bewegung hat die Gerade, welche zwei unendlich nahe Lagen des Punktes verbindet, immer eine und dieselbe Richtung, nämlich die Richtung der beschriebenen Geraden, und man nennt diese die Richtung der Bewegung. Bei der krummlinigen Bewegung ändert die Gerade, welche eine bestimmte Lage des Punktes mit einer nach unendlich kleiner Zeit eingenommenen verbindet, ihre Richtung, wenn das Intervall sich verkürzt, und sie strebt gegen eine bestimmte Grenze hin, welche man bisweilen die Richtung der Bewegung in dem betrachteten Augenblick nennt, und welche wir die Richtung der Geschwindigkeit in diesem Augenblick nennen werden. Sie ist offenbar die im Sinne der Bewegung genommene Tangente an die Trajectorie.

Die Cosinus der Winkel, welche sie mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen macht, sind der Grösse und dem Zeichen nach

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds},$$

wenn man $ds$ als den Absolutwerth des Bogenelements betrachtet, und $dx$, $dy$, $dz$ als die positiven oder negativen Incremente der Coordinaten $x$, $y$, $z$ nach der unendlich kleinen Zeit $dt$.

17. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. — Wenn mehrere Kräfte auf einen Punkt wirken, so hat die Statik uns gelehrt, sie in eine zusammenzusetzen durch eine einfache geometrische Construction, wobei man die Kräfte in Grösse und Richtung durch Geraden darstellt, welche durch den angegriffenen Punkt gehen. Wenn diese Constructionen vorkommen, ohne dass es sich um Kräfte

handelt, so ist es bequem, analoge Bezeichnungen anzuwenden, welche kurz dasjenige andeuten, was ausserdem langer Umschreibungen bedürfte. In diesem Sinne werden wir zuweilen die Ausdrücke anwenden: Resultante von Geraden, welche, der Grösse und Richtung nach gegeben, von einem Punkt ausgehen; Componenten einer in Grösse und Richtung gegebenen Geraden.

In demselben Sinne verstehen wir die Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten. Um also die Componenten einer gegebenen Geschwindigkeit parallel mit drei gegebenen Geraden zu erhalten, construiren wir auf der Geraden, welche in Grösse und Richtung die zu zerlegende Geschwindigkeit vorstellt, ein Parallelepiped, von dem sie die Diagonale ist und dessen drei Seiten die vorgeschriebenen Richtungen der Componenten haben. Umgekehrt verfährt man bei der Zusammensetzung von drei Geschwindigkeiten; und wie gross auch die Anzahl der gegebenen oder gesuchten Componenten sei, so hat man doch immer nur dieselben Constructionen zu machen wie für Kräfte an einem Punkt. Wenn eine Componente parallel ist mit einer gegebenen Richtung, alle übrigen aber senkrecht darauf sind, so heisst sie die nach dieser Richtung zerlegte oder geschätzte Geschwindigkeit. Sie ist die Projection der Geschwindigkeit auf die gegebene Richtung. In der Folge werden wir den Nutzen dieser Transformationen einsehen. Aber vorläufig ist mit den Benennungen Componenten und Resultanten von Geschwindigkeiten kein anderer als der oben festgestellte Sinn zu verbinden.

18. Componenten der Geschwindigkeit parallel mit den Axen. — Nimmt man die Axen rechtwinklig, so werden die Componenten die Projectionen der Geschwindigkeit. Indem wir den Absolutwerth der Geschwindigkeit nehmen und ihre Richtung so, wie wir übereingekommen sind, nämlich im Sinne der Bewegung, müssen wir die Producte von $\frac{ds}{dt}$ respective in $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ bilden; dies giebt für die Componenten:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

welche Ausdrücke positiv oder negativ sind, je nachdem die

Richtung der Geschwindigkeit mit den positiven Axen spitze oder stumpfe Winkel bildet.

Man sieht leicht, dass die Componenten dieselben Ausdrücke auch bei schiefen Axen behalten.

Denn es sei $M$ irgend eine Lage des Punktes und $M'$ seine Lage nach einer sehr kleinen Zeit; $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ seien die Incremente der Coordinaten von $M$. Das Parallelepiped mit den Kanten $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ und der Diagonale $MM'$ strebt gegen ein Parallelepiped hin, dessen Kanten auch mit den Axen parallel sind und dessen Diagonale die Richtung der Tangente hat. Dieses Grenzparallelepiped ist aber demjenigen ähnlich, dessen Diagonale und Kanten die Geschwindigkeit und ihre Componenten darstellen; folglich sind die Quotienten dieser Componenten durch die Geschwindigkeit die Grenzen der Quotienten:

$$\frac{\Delta x}{MM'}, \frac{\Delta y}{MM'}, \frac{\Delta z}{MM'},$$

die Quotienten der Componenten durch die Geschwindigkeit sind also:

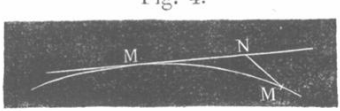
$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}.$$

Multiplicirt man sie mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, so erhält man für die Componenten die vorigen Ausdrücke:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Man mag bemerken, dass $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit eines Punktes ist, welcher sich auf der Axe der $x$ bewegt und immer dieselbe Abscisse wie der Punkt im Raum hat. Dasselbe gilt von den zwei anderen Componenten. Daraus sieht man, dass die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes die Geschwindigkeiten seiner rechtwinkligen oder schiefen Projectionen auf den drei Coordinatenaxen sind.

Fig. 4.




19. Abweichung. — Betrachten wir einen Punkt, der sich irgendwie veränderlich bewegt, und ziehen wir in einem beliebigen Au-

genblick in dem Punkt $M$, wo er sich auf der Trajectorie befindet, die Tangente. Nehmen wir nun an, in diesem Augenblicke beginne ein zweiter beweglicher Punkt sich von $M$ an auf der Tangente mit der Geschwindigkeit zu bewegen, die wir die Geschwindigkeit des ersten in $M$ nennen, und es seien $M'$, $N$ die gleichzeitigen Lagen beider Punkte nach irgend einer Zeit. Die Gerade $NM'$ zeigt an, um wieviel der erste Punkt von der Lage entfernt ist, die er würde eingenommen haben, wenn seine Geschwindigkeit in Grösse und Richtung constant wie in $M$ geblieben wäre. Die Betrachtung dieser Geraden ist äusserst wichtig für die Untersuchung der Bewegung, vorzugsweise dann, wenn das Zeitintervall zwischen den beiden Lagen $M$, $M'$ unendlich klein ist. Wir geben ihr den Namen Abweichung. Sie kann sowohl aus dem Gesichtspunkte der Grösse als dem der Richtung betrachtet werden; die Richtung nehmen wir immer von $N$ gegen $M'$ hin. Sie ist demnach vollständig bestimmt, wenn man ihre drei Componenten parallel mit den Axen in Grösse und Zeichen kennt. Diese wollen wir ausmitteln, indem wir die Bewegung als gegeben, d. h. die Coordinaten $x$, $y$, $z$ des beweglichen Punktes als bekannte Functionen der Zeit $t$ betrachten.

20. Componenten der Abweichung parallel mit den Axen. — Es sei $\theta$ ein unendlich kleines Zeitintervall; die Coordinaten von $N$ auf der Tangente sind am Ende desselben:

$$x + \frac{dx}{dt}\theta,\quad y + \frac{dy}{dt}\theta,\quad z + \frac{dz}{dt}\theta.$$

Für die Coordinaten des Punktes $M'$ auf der Trajectorie erhält man nach der Taylor'schen Formel, wenn man unter $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ unendlich kleine Grössen versteht:

$$x + \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2},$$

$$y + \frac{dy}{dt}\theta + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2},$$

$$z + \frac{dz}{dt}\theta + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Zieht man von diesen Coordinaten die ersten ab, so erhält man in Grösse und Zeichen die Componenten der Abweichung $NM'$; ihre Werthe sind:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2},\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}+\varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2},\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}+\varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Da $\theta$ unendlich klein ist, so kann man die zweiten Summanden weglassen, wodurch sich die Componenten reduciren auf:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\theta^2}{2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\theta^2}{2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\theta^2}{2}.$$

Die Abweichung selbst wird, unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen:

$$\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

21. Richtung der Abweichung. — Unter Richtung der Abweichung in einem beliebigen Punkt $M$ versteht man die Grenze, gegen welche die Richtung $NM'$ hinstrebt, wenn $M'$ sich $M$ nähert. Die Cosinus der Winkel, welche $NM'$ mit den rechtwinkligen Axen bildet, sind immer den Componenten von $NM'$ proportional und haben dieselben Zeichen wie diese; daraus folgt, dass die Richtung der Abweichung mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus den drei Grössen

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}$$

proportional sind und die Zeichen dieser Grössen haben. Die Werthe der Cosinus werden also erhalten, wenn man die vorstehenden drei Grössen theilt durch den Absolutwerth von:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Wäre die Bewegung geradlinig, so würde offenbar die Abweichung nach der Geraden selbst gerichtet sein; und in der That sind in diesem Falle die Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ proportional.

22. Acceleration in der Abweichung. — Mit Vernachlässigung der Grössen, welche in Bezug auf $\theta$ von höherer als der zweiten Ordnung und folglich gegen die Abweichung $NM'$ unendlich klein sind, ist der Werth der Abweichung:

$$NM'=\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck wächst wie der Weg eines Punktes, der, von der Ruhe ausgehend, sich gleichförmig beschleunigt bewegt, und dessen Acceleration

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

beträgt. Denkt man sich demnach die Abweichung als durch die Bewegung eines Punktes beschrieben, und bleibt man in der Annäherung bei den Unendlich-Kleinen zweiter Ordnung stehen, welche für die Berechnung der unendlich kleinen Incremente der Geschwindigkeit hinreichen, so kann man sagen, dass die abweichende Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, und dass ihre Acceleration den Werth hat:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Multiplicirt man denselben durch die oben berechneten Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Abweichung mit den Axen macht, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

in Grösse und Zeichen als die Componenten dieser Acceleration.

Es ist aber wohl zu beachten, dass diese Acceleration derjenigen Bewegung angehört, durch welche man sich die Abweichung beschrieben denkt, und nicht der wirklichen Bewegung auf der Trajectorie. Es würde natürlich sein, unter der Acceleration dieser Bewegung $\frac{dv}{dt}$ zu verstehen.

23. Die Abweichung zerlegt nach der Tangente und Normale. — Die Componenten der Abweichung parallel mit den Axen werden, mit Vernachlässigung der gegen sie selbst Unendlich-Kleinen, ausgedrückt durch:

$$\frac{\theta^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Fig. 5.

Es sei nun $NM'$ die Abweichung und $M'P$ die Senkrechte aus $M'$ auf die zu $M$ gehörende Tangente. Unserer Definition gemäss sind $NP$

und $PM'$ die Componenten von $NM'$ nach der Tangente und der Richtung $PM'$.

Die Tangentialcomponente $NP$ wird man in Grösse und Zeichen erhalten, wenn man die drei mit den Axen parallelen Componenten von $NM'$ auf die Tangente projicirt. Unter fortdauernder Voraussetzung rechtwinkliger Axen sind

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Tangente, im Sinne der Bewegung genommen, mit den Axen macht. Mithin erhält die Tangentialcomponente der Abweichung den Werth:

$$\frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{ds\, dt^2}.$$

Aus der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

folgt aber:

$$dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z = ds\, d^2s,$$

deshalb wird der vorstehende Ausdruck:

$$\frac{\theta^2}{2} \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\theta^2}{2} \frac{dv}{dt}.$$

Er ist der Werth der Tangentialcomponente.

Um die zweite Componente $PM'$ zu berechnen, hat man mit Vernachlässigung der gegen sie unendlich kleinen Grössen, wenn $R$ den Krümmungsradius der Trajectorie für den Punkt $M$ bezeichnet:

$$PM' = \frac{MM'^2}{2R}.$$

Da nun $MM'$ der in der Zeit $\theta$ durchlaufene Weg ist, so kann man $MM'$ durch $v\theta$ ersetzen, und erhält mit dem verlangten Grade der Annäherung

$$PM' = \frac{\theta^2}{2} \frac{v^2}{R}$$

als den Ausdruck der Normalcomponente, deren Richtung man in dem Krümmungsradius für den Punkt $M$ nehmen kann.

Man kann die beiden Componenten auch tangentiale und centripetale Abweichung nennen.

Aus ihren Ausdrücken sieht man, dass wenn die Bewegung gleichförmig ist, die Abweichung auf der Trajectorie

normal steht. Ist die Bewegung geradlinig, so wird $R$ unendlich, und die Abweichung ist im Sinne der Tangente, also der Bewegung gerichtet.

24. Tangentiale und normale Componente der Acceleration in der abweichenden Bewegung. — Aus den Ausdrücken für die Wege $NP$ und $PM'$ erhalten wir durch Division mit $\frac{\theta^2}{2}$ die gesuchten Componenten dieser Acceleration, nämlich $\frac{d^2s}{dt^2}$ oder $\frac{dv}{dt}$ als tangentiale und $\frac{v^2}{R}$ als normale Componente.

Man nennt sie auch zuweilen tangentiale und centripetale Acceleration.

---

## Geometrische Bewegung eines starren Körpers.

25. Betrachtet man zwei Lagen eines starren Körpers ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte und die zwischen beiden Lagen verflossene Zeit, so giebt es unzählig viele Arten der Ueberführung des Körpers aus der ersten Lage in die zweite, und man kann sich vornehmen, die einfachsten Arten zu bestimmen.

Es sei die wirklich stattfindende Verrückung des Körpers wie sie wolle, so kann man ihn doch immer auf folgende Art in seine neue Lage bringen. Man betrachte die Gerade, welche die zwei Lagen eines Punktes des Körpers oder eines fest damit verbundenen Punktes verbindet, und bewege diesen Punkt in ihr nach seiner neuen Lage; zugleich lasse man alle anderen Punkte des Körpers bis an die Endpunkte von Geraden fortschreiten, welche parallel und gleich sind mit der ersten; darauf halte man jenen Punkt in seiner neuen Lage fest und drehe den Körper um ihn herum so lange, bis zwei andere Punkte, die mit demselben nicht in gerader Linie liegen, ihre vorgeschriebenen neuen Lagen eingenommen haben: dann ist das Ziel erreicht.

Betrachten wir nun eine jede dieser beiden Bewegungen, Fortschreitung und Drehung, für sich.

Es ist klar, dass der zuerst betrachtete Punkt von der einen Lage in die andere kommen würde, wenn er irgend ein Polygon beschriebe, das in jener anfinge und in dieser aufhörte. Also kann man auch statt der ersten Bewegung eine Folge von anderen Fortschreitungen setzen, welche in Grösse und Richtung durch die Seiten des Polygons dargestellt werden.

Was die Bewegung um den fest gehaltenen Punkt be-

trifft, so lässt sich zunächst leicht zeigen, dass sie auf unendlich viele Arten in zwei Drehungen um feste Axen zerlegt werden kann. Denn betrachte ich ausser dem festen noch einen beliebigen Punkt in der Lage, in welche ihn die Fortschreitung geführt hat; verbinde ich diese Lage mit derjenigen, in welche der Punkt kommen soll, durch eine gerade Linie; lege ich durch den festen Punkt eine Ebene senkrecht auf diese Linie, und ziehe ich in dieser Ebene durch den festen Punkt irgend eine Gerade: so kann ich offenbar den betrachteten Punkt in seine vorgeschriebene Lage bringen, indem ich den Körper um diese Gerade drehe, denn es sind ja beide Lagen des betrachteten Punktes von dem Mittelpunkt seiner Drehung nothwendig gleich entfernt. Habe ich aber dies erreicht, so befinden sich zwei Punkte des Körpers in den Lagen, welche sie einnehmen sollen, und nun kann der Körper durch Drehung um die Verbindungslinie dieser beiden Punkte in seine vorgeschriebene Lage gebracht werden. Somit ist die Bewegung um den festen Punkt zurückgeführt auf Drehungen um Axen, welche durch diesen Punkt gehen.

Die Sätze, welche wir über Zusammensetzung und Zerlegung solcher Drehungen vortragen werden, sind gezogen aus der *Théorie nouvelle de la rotation des corps* von Poinsot; vorher wollen wir aber noch eine sehr einfache und nützliche Bemerkung machen. Wenn ein Körper sich um eine feste Axe um einen unendlich kleinen Winkel dreht, so hängen die unendlich kleinen Aenderungen der Coordinaten eines Punktes von seinen Coordinaten ab und von den Bestimmungsstücken der Aufgabe. Also werden für einen unendlich nahen Punkt diese Aenderungen von den ersten nur um Unendlich-Kleine gegen sie selbst verschieden sein, und man wird die einen Aenderungen für die anderen setzen können, wenn es sich nur um die Grenze von Summen oder Quotienten handelt. Man darf deshalb, wenn man die unendlich kleine Verrückung eines Körpers bestimmen will, welche durch entsprechende Drehung um eine Axe bewirkt wird, annehmen, der Körper ginge, anstatt von der gegebenen Anfangslage, von einer ihr unendlich nahen Lage aus; die Aenderungen der Coordinaten irgend eines Punktes vom Körper, unter dieser Voraussetzung berechnet, können für die gesuchten genommen werden. Hat man

daher einem Körper successive irgend eine endliche Zahl von unendlich kleinen Drehungen zu ertheilen, so kann man sich jede von ihnen als von dem Körper aus seiner Anfangslage vollführt denken, und kann die Summe aller so entstehenden Variationen der Coordinaten irgend eines Punktes betrachten als die Variation, welche die nach einander und in beliebiger Reihenfolge ausgeführten Drehungen bewirken.

Ferner sieht man leicht, dass wenn der Körper sich um denselben unendlich kleinen Winkel um eine der gegebenen unendlich nahe Axe dreht, die Variationen der Coordinaten irgend eines von der Axe endlich entfernten Punktes dadurch nur um Unendlich-Kleine gegen sie selbst alterirt werden. Denn mit Beschränkung auf die Unendlich-Kleinen erster Ordnung sind die Variationen der Coordinaten Producte des unendlich kleinen Winkels in endliche Functionen der Grössen, welche die Axe bestimmen. Und wenn diese Grössen unendlich wenig variiren, so entspringen daraus für die Variationen der Coordinaten unendlich kleine Aenderungen von höherer als der ersten Ordnung.

Wenn also ein starrer Körper successive um beliebig viele Axen unendlich kleine Drehungen macht, so begeht man in dem Ausdruck für die Variationen der Coordinaten irgend eines Punktes keinen Fehler in Bezug auf die Unendlich-Kleinen erster Ordnung, wenn man statt dieses Punktes einen unendlich nahen Punkt und statt der Axen andere unendlich nahe Axen nimmt, und man darf die Reihenfolge der einzelnen Drehungen beliebig abändern. Dieser Vortheile halber zerlegt man immer die Bewegungen während endlicher Zeit in solche, welche während der unendlich kleinen Elemente dieser Zeit ausgeführt werden. Auch wird beinahe Alles, was wir über Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen sagen werden, sich allein auf den Fall beziehen, wo diese Bewegungen unendlich klein sind.

26. Winkelgeschwindigkeit. — Betrachten wir die stetige Drehung eines starren Körpers, und führen wir durch die Axe eine Ebene, welche wir mit dem Körper fest verbinden. Ihre Lage bestimmt die Lagen aller Punkte des Körpers, und kann in jedem Augenblick gegeben sein durch den

Winkel $\psi$, den sie mit einer festen, durch die Axe gehenden Ebene macht.

Ist die Zunahme dieses Winkels der Zunahme der Zeit proportional, so ist die Winkelbewegung des Körpers gleichförmig. Aber auch die Bewegung irgend eines Punktes ist gleichförmig, und die Geschwindigkeiten der Punkte sind ihren Abständen von der Axe proportional. Unter Winkelgeschwindigkeit des Körpers versteht man in diesem Falle den Winkel, welchen die bewegliche Ebene in der Zeiteinheit beschreibt; sie ist die Geschwindigkeit aller Punkte, welche um die Längeneinheit von der Axe abstehen.

Ist die Winkelbewegung veränderlich, und der Winkel $\psi$ eine gewisse Function der Zeit, so nennt man Winkelgeschwindigkeit in irgend einem Augenblick die Grenze der mittleren Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein unendlich kleiner Winkel von diesem Augenblicke an beschrieben wird. Ihr Werth ist die Ableitung $\frac{d\psi}{dt}$ des Winkels nach der Zeit; und der in unendlich kleiner Zeit beschriebene Winkel kann, mit Vernachlässigung der Unendlich-Kleinen höherer Ordnung, betrachtet werden als das Product der Winkelgeschwindigkeit in diese Zeit.

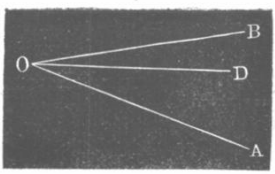
27. Offenbar kann ein Punkt in demselben Augenblicke nur eine Bewegung haben. Wenn man daher sagt, dass ein Körper gleichzeitig mehr als eine Bewegung habe, so meint man damit, dass der Körper in Bezug auf ein starres System bewegt sei, welches in Bezug auf ein anderes bewegt ist, das selbst wieder bewegt sein kann, etc., bis man endlich auf ein ruhendes System kommt. Daraus resultirt für den Körper eine gewisse Bewegung im Raum, welche stetig ist, wenn die componirenden Bewegungen es sind.

Betrachten wir diese gleichzeitigen Bewegungen während einer gewissen Zeit. Nehmen wir an, der Körper bewege sich zuerst allein und vollende seine Bewegung in Bezug auf das erste System; dann verbinde man den Körper und das erste System fest, und lasse beide ihre Bewegung in Bezug auf das zweite System ausführen; darauf verbinde man das erste und zweite System, und bewege sie in Bezug auf das dritte; etc. Man sieht ein, dass der Körper zuletzt sich in der Lage be-

finden wird, in die er kommen soll. Die gleichzeitigen Bewegungen bringen ihn also in dieselbe Lage, als wenn er sie nach einander ausführt.

28. Zwei Drehaxen treffen in demselben Punkte zusammen. — Es sei $OA$ die Richtung einer Axe, um welche ein starrer Körper irgend einen Winkel $2\alpha$ beschreibt. Wir nehmen die Richtung der Drehaxe immer so, dass einem Menschen, von dessen Füssen diese Richtung zum Kopfe geht, die Drehung von links nach rechts erscheint.

Fig. 6.




$OB$ sei eine zweite Axe, um welche der Körper den Winkel $2\beta$ beschreibt, nachdem die erste Drehung vollendet ist. Wir wollen zeigen, dass der Körper auch durch eine einzige Drehung um eine gewisse, durch den Punkt $O$ gehende Axe in seine neue Lage kommen kann.

Legen wir durch $OA$ eine Ebene, welche mit der Ebene $AOB$ den Winkel $\alpha$ gegen $OB$ hin macht, und durch $OB$ eine andere Ebene, die gegen $OA$ hin den Winkel $\beta$ mit $AOB$ bildet. Die Durchschnittslinie $OD$ dieser beiden Ebenen wird nach der ersten Drehung sich in der gegen die Ebene $AOB$ symmetrischen Lage befinden, und durch die zweite Drehung wird sie ihre vorige Lage wieder annehmen. Mithin muss der Körper in seine neue Lage kommen, wenn man ihn um die Axe $OD$ dreht.

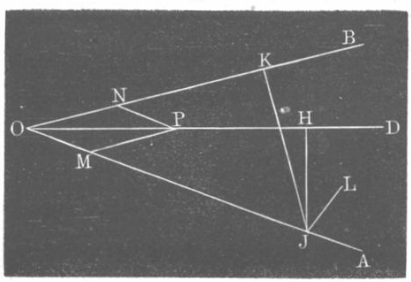
Dies findet statt bei jeder Grösse der Winkel $2\alpha$, $2\beta$; wir wollen aber insbesondere den Fall untersuchen, wo sie unendlich klein sind. In dem körperlichen Dreieck, das die Kanten $OA$, $OB$, $OD$ bilden, ist das Verhältniss der Sinus von $BOD$, $AOD$ gleich $\sin\alpha : \sin\beta$ oder gleich $\alpha : \beta$, weil $\alpha$ und $\beta$ unendlich klein sind. Statt der wahren Axe der den beiden successiven Drehungen zu substituirenden Drehung, welche unendlich wenig über die Ebene $AOB$ emporragt, kann ich die ihr unendlich nahe Gerade nehmen, welche in der Ebene $AOB$ selbst liegt und mit $OB$, $OA$ Winkel bildet, deren Sinus sich verhalten wie $\alpha : \beta$. Diese Gerade ist aber die Diagonale eines Parallelogramms, welches Längen zu Seiten

hat, die von $O$ an auf $OA$ und $OB$ proportional mit $\alpha$ und $\beta$ abgetragen sind.

Es fragt sich nun, in welchem Sinne man den Körper um diese Gerade drehen will, und wie gross der Winkel der Drehung sein muss. Die Richtungen $OA$, $OB$ waren die beiden Axen, um welche von links nach rechts successive die Winkel $2\alpha$, $2\beta$ beschrieben werden sollten. Wir werden die Richtung $OD$ der Diagonale zur Axe der zu substituirenden Drehung nehmen, diese also von links nach rechts um $OD$ stattfinden lassen.

Um die Grösse des Drehungswinkels zu bestimmen, wähle ich einen Punkt $J$ auf der Axe $OA$ der ersten Drehung. Dieser Punkt ändert seinen Ort erst bei der zweiten Drehung, und beschreibt dann eine unendlich kleine Gerade $JL$ senkrecht auf der Ebene $AOB$. Fällen wir die Perpendikel $JK$, $JH$ auf $OB$, $OD$. Die unendlich kleinen Drehungswinkel $JKL$, $JHL$ verhalten sich wie $JH$ zu $JK$ oder $\sin HOJ$ zu $\sin KOJ$ oder $ON$ zu $OP$. Die Grösse der Drehung, welche ich statt der beiden successiven Drehungen setzen kann, wird also durch die Diagonale des aus den Seiten $\alpha$, $\beta$ und dem Winkel $AOB$ construirten Parallelogramms bestimmt. Um die Richtung $OD$ dieser Diagonale findet diese Drehung von links nach rechts statt.

Fig. 7.



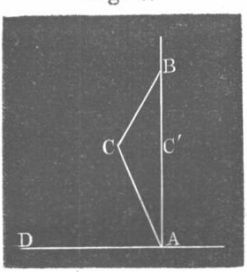

Denkt man sich die drei unendlich kleinen Drehungen um $OA$, $OB$ und $OD$ während gleicher unendlich kleiner Zeiten gleichförmig ausgeführt, so ist das Verhältniss ihrer Grössen auch das Verhältniss ihrer Winkelgeschwindigkeiten. Somit ergiebt sich der Satz: Wenn ein Körper nach einander während gleicher Zeiten um zwei Axen unendlich kleine Drehungen mit bestimm-

ten Winkelgeschwindigkeiten machen soll, und ich auf den Richtungen beider Axen, von ihrem Durchschnittspunkte an, Längen abtrage, welche den Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen gleich sind, so stellt die Diagonale des ergänzten Parallelogramms, in der Richtung vom Durchschnittspunkte ab, die Axe der resultirenden Drehung und die Grösse ihrer Winkelgeschwindigkeit dar.

Die Zusammensetzung und Zerlegung einer beliebigen Zahl von Drehungen um Axen, welche durch denselben Punkt gehen, geschieht also auf gleiche Weise wie bei Kräften.

29. Parallele Drehaxen. — Betrachten wir zwei parallele Axen mit Richtungen von gleichem Sinn, z. B. seien dieselben senkrecht über eine gewisse Ebene empor gerichtet. Ihre Projectionen auf diese Ebene seien die Punkte $A$ und $B$, und der Körper möge um die Axe $A$ den Winkel $2\alpha$ und nachher um die Axe $B$ den Winkel $2\beta$ beschreiben. Es sei $AC$ die Spur einer Ebene, welche durch die Axe $A$ geht und mit der Geraden $AB$ den Winkel $CAB = \alpha$ gegen $B$ hin macht; ebenso sei $BC$ die Spur einer anderen Ebene, die durch die Axe $B$ geht und den Winkel $CBA = \beta$ gegen $A$ hin mit $BA$ bildet.

Fig. 8.




Führen wir durch den Punkt $C$ eine Parallele zu den beiden Axen, so wird diese Parallele in ihre anfängliche Lage zurückgekehrt sein, wenn die beiden Drehungen vollzogen sind. Der Körper kann folglich auch in seine neue Lage gebracht werden durch eine Drehung um diese Gerade, und wir wollen diese Drehung von gleichem Sinn nehmen mit den beiden ersten.

Werden die Winkel $\alpha$, $\beta$ unendlich klein, so fällt der Punkt $C$ in die Gerade $AB$, etwa nach $C'$, und theilt diese im umgekehrten Verhältniss der Winkel $\alpha$, $\beta$ oder, wenn die Dre-

hungen während gleicher Zeiten geschehen, der Winkelgeschwindigkeiten.

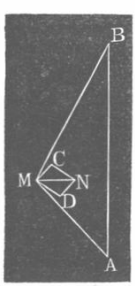
Um die Grösse der resultirenden Drehung und ihre Winkelgeschwindigkeit zu finden, so sei $AD$ die unendlich kleine Linie, welche der Punkt $A$ um $B$ beschreibt. Die unendlich kleinen Winkel $ABD$ und $AC'D$ verhalten sich wie $AC'$ zu $AB$. Werden daher die Winkelgeschwindigkeiten um $A$ und $B$ respective durch $BC'$ und $AC'$ repräsentirt, so wird es die resultirende Winkelgeschwindigkeit durch $AB$.

Das Gesetz für die Componirung zweier Drehungen von gleichem Sinn um parallele Axen ist also ganz so wie bei parallelen und gleich gerichteten Kräften. Dieselbe Uebereinstimmung findet auch noch statt bei entgegengesetzten Drehungen; dies erkennt man durch Ableitung aus dem betrachteten Fall oder durch directe Untersuchung.

30. Gegenpaar von Drehungen. — Sind die beiden Drehungen um parallele Axen gleich und von entgegengesetztem Sinn, so hat man nach Poinsot ein Gegenpaar von Drehungen. Wir verstehen unter Hebelarm und Axe eines solchen Gegenpaars den Hebelarm und die Axe eines Gegenpaars von Kräften, welche die Richtungen der beiden Drehaxen haben.

Es sei $M$ irgend ein Punkt des Körpers. Dieser Punkt bewegt sich in einer senkrechten Ebene auf den beiden Axen; und da er durch die beiden successiven Drehungen die unendlich kleinen Geraden $MC$, $CN$ beschreibt, welche senkrecht auf $MA$, $MB$ und mit den Längen dieser letzten proportional sind, so gelangt er an den Endpunkt $N$ der Diagonale $MN$ des aus $MC$, $MD$ construirten Parallelogramms. Nun sind die Dreiecke $MCN$, $AMB$ ähnlich wegen eines gleichen Winkels zwischen proportionirten Seiten, also ist $MN$ senkrecht auf $AB$. Aus einem Gegenpaar von Drehungen resultirt demnach eine Fortschreitung im Sinne der Axe dieses Paars, und diese Fortschrei-

Fig. 9.



tung bleibt ungeändert, wie man auch immer das Gegenpaar in seiner Ebene oder in einer parallelen Ebene stellen mag. Die Grösse der Fortschreitung ist für alle Punkte gleich, und man sieht, dass sie z. B. für den Punkt $A$ die Entfernung $AB$, multiplicirt mit dem Drehungswinkel, beträgt.

Da hiernach jede Fortschreitung sich in zwei Drehungen zerlegen lässt, so könnte man sich auf Betrachtung von Drehungen beschränken.

Fortschreitungen componiren sich wie Kräfte an einem Punkt; also gilt dasselbe für Gegenpaare von Drehungen. Trägt man daher auf der Axe eines jeden Gegenpaars eine Länge ab, welche gleich ist dem unendlich kleinen Drehungswinkel multiplicirt mit dem Hebelarm, so geben diese Längen, wenn man sie wie Kräfte von demselben Punkt an zusammensetzt, in Grösse und Richtung die resultirende Fortschreitung.

Statt einer Drehung um eine Axe $A$ kann man immer eine in Grösse und Richtung identische Drehung um eine andere, mit der ersten parallele Axe $B$ setzen und noch ein Gegenpaar von Drehungen mit dem Hebelarm $AB$. Denn man kann ja zwei mit der ersten Drehung gleiche und einander entgegengesetzte Drehungen um die Axe $B$ einführen: die Verrückung des Körpers wird dadurch nicht verändert.

31. Allgemeine Reduction einer jeden Bewegung. — Wenn ein Körper irgend welche unendlich kleine Drehungen und Fortschreitungen ausführen soll, so lassen sich dieselben immer reduciren auf eine Drehung um eine gewisse Axe, die durch einen ganz beliebigen Punkt geht, und auf eine Fortschreitung, welche von der Wahl dieses Punktes abhängt.

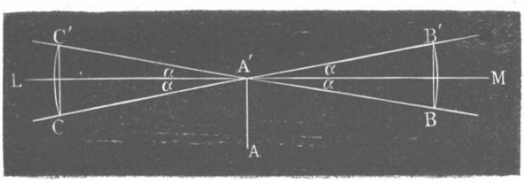
Denn ich setze statt irgend einer Drehung um ihre Axe eine identische Drehung um eine parallele Axe, die durch jenen willkürlich angenommenen Punkt geht, und noch eine Fortschreitung oder ein Gegenpaar von Drehungen, welches abhängt von der Lage der neuen Axe. Die Zusammensetzung aller Drehungen liefert immer eine und dieselbe resultirende Drehung um eine Axe von constanter Richtung, wo auch der

Punkt liegen mag, an den man alle Axen versetzt hat. Aber die anfänglich gegebenen Fortschreitungen oder Drehungspaare geben durch ihre Zusammensetzung mit den durch die Versetzung der Drehaxen eingeführten ein resultirendes Paar oder eine Fortschreitung, veränderlich an Grösse und Richtung.

32. Der besondere Fall, wo die Bewegung parallel ist zu einer Ebene. — Wenn alle Punkte eines Körpers Linien beschreiben, welche zu einer Ebene parallel sind, so kann man durch den Körper einen Schnitt führen mittelst einer festen zu der ersten parallelen Ebene: die Durchschnittsfigur wird sich in dieser festen Ebene bewegen; und da ihre Lage die Lage des Körpers bestimmt, so reicht die Betrachtung ihrer Bewegung hin.

Nun lässt sich leicht darthun, dass, welche unendlich kleine Verrückung auch die Figur erleiden mag, diese doch durch Drehung um einen gewissen Punkt erreicht werden kann. Denn man wird diese Verrückung immer erzielen können durch eine Fortschreitung, welche irgend einen Punkt $A$ in die Lage

Fig. 10.




$A'$ führt, die er einnehmen soll, und durch eine entsprechende Drehung $2\alpha$ um $A'$. Ziehen wir durch $A'$ eine Senkrechte $LM$ auf $AA'$ und zwei Geraden, die mit $LM$ den Winkel $\alpha$ machen; ziehen wir noch zwischen diesen die mit $AA'$ gleichen und parallelen Linien $BB'$, $CC'$.

Die beiden Punkte $B$, $C$, wenn man sie sich mit der beweglichen Figur fest verbunden denkt, werden durch die Fortschreitung nach $B'$, $C'$ gebracht; die darauf folgende Drehung führt entweder den Punkt $B'$ nach $B$ oder $C'$ nach $C$ zurück, je nachdem sie den einen oder anderen Sinn hat. Nehmen wir an, es komme $B'$ nach $B$: dann kann man die Figur in ihre neue Lage bringen, ohne dass $B$ seinen Ort verändert, also durch einfache Drehung um den Punkt $B$, dessen Lage

wir vollständig bestimmt haben. Der Körper wird dabei eine unendlich kleine Drehung um eine Axe ausführen, die durch $B$ geht und senkrecht ist auf der Ebene der Figur.

Euler hat zuerst die Bewegung einer Figur auf einer Kugel untersucht, in welcher Aufgabe die von uns behandelte enthalten ist.

33. Allgemeine Reduction auf eine schraubenförmige Bewegung. — Wir haben bereits eine jede Bewegung auf zwei andere zurückgeführt: auf eine Fortschreitung, welche von dem Punkte abhängt, den man zum Versammlungspunkte aller Drehaxen gewählt hat, und auf eine Drehung, welche in Richtung und Grösse constant ist. Zerlegen wir die Fortschreitung parallel mit der Axe dieser Drehung und senkrecht darauf. Da die Reihenfolge der unendlich kleinen Bewegungen gleichgültig ist, so dürfen wir anfangen mit der zur Axe parallelen Fortschreitung; es bleiben dann noch die senkrechte Fortschreitung und die Drehung auszuführen, welche sich, wie wir in der vorigen Nr. sahen, zusammensetzen in eine Drehung um eine mit der ersten parallele Axe.

Demnach lässt sich jede unendlich kleine Bewegung zurückführen auf Drehung um eine Axe und Fortschreitung parallel mit dieser Axe, eine Bewegung, welche einer Schraube in ihrer Mutter zukommt.

Um diese zur Axe parallele Fortschreitung zu erhalten, braucht man nur die ganze Fortschreitung, welche zu irgend einem Versammlungspunkte aller Drehaxen gehört, auf die resultirende Drehaxe zu projiciren. Sie wird immer dieselbe und ist gleich der gemeinschaftlichen Länge, um welche alle Punkte des Körpers, beim Uebergang in ihre neue Lage, sich von einer und derselben, gegen die Richtung der Axe senkrechten Ebene entfernen; sie ist zugleich die kleinstmögliche Fortschreitung.

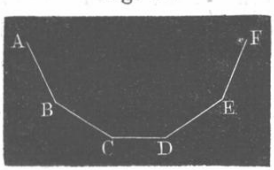
Man kann dasselbe Resultat durch Bezugnahme auf Kräfte und Kräftepaare erhalten. In der Statik wurde bewiesen, dass jedes System von Kräften und Kräftepaaren sich auf eine Kraft und ein Paar reduciren lässt, dessen Axe mit der Richtung dieser Kraft parallel ist. Daraus folgt, dass auch jedes System von unendlich kleinen Drehungen und Fortschreitun-

gen reducirt werden kann auf eine Drehung und eine Fortschreitung parallel mit der Axe dieser Drehung.

34. Stetige Bewegung parallel mit einer festen Ebene. — Wir brauchen in diesem Falle nur die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene zu betrachten. Zerlegen wir die Zeit in unendlich kleine Elemente. Die Bewegung während eines solchen Elements kann, wie gezeigt wurde, betrachtet werden als Drehung um einen bestimmten Punkt, den man den augenblicklichen Mittelpunkt der Drehung nennt; und alle diese Mittelpunkte liegen auf einem ganz bestimmten, in der Ebene festen geometrischen Ort. Diejenigen Punkte der beweglichen Figur, welche nach einander Mittelpunkte der Drehung werden, indem sie zusammenfallen mit den entsprechenden Punkten des auf der Ebene festen Orts, bilden einen in der Figur festen Ort, der sich mit dieser auf der Ebene bewegt. Kennt man seine Bewegung, so wird auch die Bewegung der Figur bekannt.

Es seien $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ etc. die successiven Mittelpunkte der Drehung; die Punkte der Figur, welche mit ihnen in dem Augenblick zusammenfallen, wo sie Mittelpunkte werden, seien durch $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ etc. bezeichnet. Wenn z. B. $B'$ in $B$ liegt, dann dreht sich die Figur so lange um $B$, bis $C'$ nach $C$ kommt; darauf rotirt sie um $C$, bis $D'$ mit $D$ zusammenfällt, und so fort. Folglich haben beide Polygone gleiche unendlich kleine Seiten, und rollen auf einander ohne zu gleiten; dabei nimmt die Figur nach einander alle Lagen ein, welche sie einnehmen soll.

Fig. 11.




Da wir uns die Zeitintervalle unendlich klein denken, so stellen die beiden Polygone zwei bestimmte Curven dar, von denen eine fest und die andere mit der Figur beweglich ist. Diese beiden Curven tangiren einander beständig, indem die bewegliche ihre Bogen auf gleichen Bogen der festen abrollt, so dass kein Gleiten stattfindet.

Wenn man also mit der Figur die Curve fest verbindet, welche den Ort aller augenblicklichen Mittelpunkte in Bezug

auf die Figur darstellt, so darf man nur diese Curve ohne Gleiten rollen lassen auf der in der Ebene festen Curve derselben Mittelpunkte: die Figur erhält dadurch ihre wirkliche Bewegung.

Handelt es sich um die Bewegung des ganzen Körpers, so braucht man nur die beiden Cylinderflächen ohne Gleiten auf einander rollen zu lassen, welche sich in jenen Curven auf die feste Ebene projiciren.

35. Stetige Bewegung um einen festen Punkt. — Wir zerlegen sie in unendlich kleine Bewegungen, welche während unendlich kleiner Zeitintervalle ausgeführt werden, und welche man betrachten kann als Drehungen um successive unendlich nahe Axen. Alle diese Axen bilden eine im Raum feste Kegelfläche. Man erhält eine zweite, bewegliche Kegelfläche, wenn man sich jede Axe in der Lage mit dem Körper verbunden denkt, welche sie gegen ihn in dem Augenblicke hat, wo sie zur Drehaxe wird. Beide Kegelflächen tangiren sich beständig mit einer Kante. Sie gleiten aber nicht auf einander, denn die Berührungskante hat als augenblickliche Drehaxe die Geschwindigkeit Null und verrückt sich folglich in einem unendlich kleinen Zeitintervall von erster Ordnung nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, so dass kein Gleiten stattfinden kann. Betrachtet man übrigens die beiden Kegelflächen als Vielkante mit unendlich kleinen Seitenflächen, so fallen immer gleiche Seitenflächen auf einander, mithin rollt die bewegliche Kegelfläche stets ihre Stücke auf gleichen Stücken der festen ab, und folglich ist kein Gleiten möglich.

Man kann demnach die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt durch zwei Kegel bestimmen, welche den festen Punkt zur Spitze haben, indem man den mit dem Körper verbundenen Kegel auf dem im Raume festen, ohne zu gleiten, rollen lässt.

Den vorigen Fall würde man erhalten, wenn man sich den festen Punkt im Unendlichen dächte.

36. Stetige Bewegung im Allgemeinen. — Die unendlich kleinen Bewegungen, in welche man sie zerlegt, lassen sich auf unendlich viele Arten in Fortschreitung und Drehung verwandeln; wir wollen aber diejenige Art voraussetzen, bei welcher die Fortschreitung zur Axe der Drehung parallel

ist. Alle augenblicklichen Axen der Drehung und Gleitung bilden eine im Raum feste Regelfläche und eine andere, welche in dem beweglichen Körper fest ist. Alle Erzeugungslinien der zweiten Regelfläche werden sich nach einander auf die der ersten legen: und zwar wird, wenn man sich die Fortschreitung zuerst ausgeführt denkt, eine Erzeugungslinie der zweiten Fläche durch Drehung mit der entsprechenden Erzeugungslinie der ersten zusammenfallen und auf ihr mit dem Körper fortgleiten; darauf wird sich die bewegliche Regelfläche um sie herum drehen, bis zum Zusammenfallen von zwei nächsten Erzeugungslinien; und so fort.

In dem Augenblicke, wo die Drehung um eine gemeinschaftliche Erzeugungslinie eine zweite Erzeugungslinie mit der entsprechenden der festen Fläche zusammenführt, haben beide Flächen zwei Erzeugungslinien gemeinschaftlich und tangiren sich folglich in der ganzen Ausdehnung derselben. Die Bewegung des Körpers kann demnach hervorgebracht werden durch eine mit dem Körper verbundene Regelfläche, welche sich auf einer anderen, im Raume festen Regelfläche bewegt, dergestalt dass beide Flächen sich beständig mit einer Erzeugungslinie tangiren, und dass die bewegliche Fläche auf der festen rollt und zugleich längs der gemeinschaftlichen Erzeugungslinie gleitet.

Das Verhältniss, in welchem Gleiten und Drehung stehen, hängt von der Natur der Bewegung ab und kann selbst Null sein. Ist eine Fläche abwickelbar, so ist es nothwendig auch die andere, weil die Elemente beider der ganzen Länge nach zusammenfallen.

Wenn der Körper einen festen Punkt hat, so werden die Flächen Kegelflächen, und das Gleiten wird Null.

## Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze.

37. Es wird nicht überflüssig sein zu zeigen, wie man die wichtigsten unter den vorstehenden Sätzen über die Bewegung eines festen Körpers durch den Calcul herleiten kann. Wir bestimmen die Lage des Körpers in jedem Augenblick durch die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $O$ dessel-

ben und durch die Winkel, welche die festen Axen $AX$, $AY$, $AZ$ mit drei rechtwinkligen Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ bilden, die mit dem Körper fest verbunden sind und durch jenen Punkt $O$ gehen.

Die Axen der $x'$, $y'$, $z'$ mögen mit denen der $x, y, z$ Winkel machen, deren Cosinus respective $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ sind; die Coordinaten des beliebigen Punktes vom Körper, durch welchen man die Axen der $x'$, $y'$, $z'$ führt, seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$, und die Richtung dieser Axen im Körper sei unabhängig gewählt von ihrem Anfangspunkte $O$. Man hat zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes in beiden Systemen die bekannten Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Wenn wir einen bestimmten Punkt $M$ des Körpers betrachten, so sind $x'$, $y'$, $z'$ constant. Wir wollen nun annehmen, es wachse die Zeit $t$ um eine endliche Grösse $\Delta t$, und wollen durch das Zeichen $\Delta$ auch die entsprechenden endlichen Incremente der übrigen Variablen andeuten. Dann geben die Gleichungen (1):

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta\xi + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c, \\ \Delta y = \Delta\eta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c', \\ \Delta z = \Delta\zeta + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c''. \end{cases}$$

Die ersten Seiten dieser neuen Gleichungen sind die Componenten der Verrückung des Punktes parallel mit den festen Axen; die ersten Summanden auf der zweiten Seite sind die Componenten der Verrückung von $O$; und auch die drei letzten Summanden in einer jeden der Gleichungen werden sich leicht interpretiren lassen. Denken wir uns nämlich den Punkt $O$ fest und die Richtung der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ so verändert, dass in der Zeit $\Delta t$ die Cosinus $a$, $b$, $c$, $a'$, etc. die vorigen Incremente $\Delta a$, $\Delta b$, etc. erhalten, so bleiben $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in den Gleichungen (1) constant, und die zweiten Seiten der Gleichungen (2) reduciren sich auf die drei letzten Summanden. Mithin stellen diese zweiten Theile auf der rechten Seite die Componenten der Verrückung dar, welche der Punkt $M$ dann erfährt, wenn man dem Körper um den festen Punkt $O$ eine Bewegung ertheilt, die in der Zeit $\Delta t$ die Neigungen der Axen

$X'$, $Y'$, $Z'$ gerade so verändert, wie es bei der wirklichen Bewegung geschieht. Es genügt, folglich, um jeden Punkt in seine vorgeschriebene Lage zu bringen, dass man den Körper die zwei Bewegungen nach einander ausführen lässt, welche einem jeden Punkt die betrachteten zwei Componenten der Verrückung ertheilen. Somit hat man folgenden Satz:

Jede endliche Verrückung eines starren Systems lässt sich dadurch erreichen, dass man diesem System zunächst eine gemeinsame Fortschreitung ertheilt, bei welcher irgend ein Punkt desselben in seine vorgeschriebene Lage kommt, und dann eine Drehung um diesen Punkt; und zwar bleibt die Drehung unverändert, welchen Punkt man auch für die Fortschreitung wählt, und sie hängt nur von den Aenderungen in der Richtung der Linien des Systems ab.

Es versteht sich von selbst, dass man eben so gut vor der Fortschreitung die Drehung um den Punkt $O$ in seiner alten Lage ausführen kann; die Werthe für $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ werden dadurch dieselben, und folglich kommt das System in die vorgeschriebene neue Lage. Uebrigens lässt sich dies unmittelbar durch geometrische Betrachtungen einsehen.

38. Vereinfachung der Bewegung um einen Punkt. — Wir werden zeigen, dass jede Veränderung der Lage eines Körpers, der einen festen Punkt hat, durch Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe erreicht werden kann.

Denkt man sich den Punkt $O$ fest, so ergeben die Gleichungen (2) für $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ Werthe, welche Null sind für alle Punkte des Körpers, die den Gleichungen genügen:

$$(3)\qquad \begin{cases} x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c = 0, \\ x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' = 0, \\ x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Demnach haben alle diese Punkte zu Anfang und zu Ende der Bewegung einerlei Lage. Eliminirt man $x'$ und $y'$ zwischen den Gleichungen (3), so fällt $z'$ von selbst weg; und wenn die daraus resultirende Bedingungsgleichung erfüllt ist, so werden alle Punkte einer gewissen, durch $O$ gehenden Ge-

raden den Gleichungen (3) genügen. Dass nun dies wirklich stattfindet, wird das Folgende darthun.

Die variablen Grössen $a$, $b$, $c$, $a'$, etc. müssen beständig den Gleichungen genügen:

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\quad b^2+b'^2+b''^2=1,\quad c^2+c'^2+c''^2=1,$$
$$ab+a'b'+a''b''=0,\quad ac+a'c'+a''c''=0,\quad bc+b'c'+b''c''=0.$$

Lässt man $a$, $b$, $c$, etc. um die Incremente $\Delta a$, $\Delta b$, etc. wachsen und zieht die vorstehenden Gleichungen ab, so ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{cases}(a+\frac{1}{2}\Delta a)\Delta a+(a'+\frac{1}{2}\Delta a')\Delta a'+(a''+\frac{1}{2}\Delta a'')\Delta a''=0,\\ (b+\frac{1}{2}\Delta b)\Delta b+(b'+\frac{1}{2}\Delta b')\Delta b'+(b''+\frac{1}{2}\Delta b'')\Delta b''=0,\\ (c+\frac{1}{2}\Delta c)\Delta c+(c'+\frac{1}{2}\Delta c')\Delta c'+(c''+\frac{1}{2}\Delta c'')\Delta c''=0;\end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases}a\Delta b+b\Delta a+a'\Delta b'+b'\Delta a'+a''\Delta b''+b''\Delta a''\\ \qquad+\Delta a\Delta b+\Delta a'\Delta b'+\Delta a''\Delta b''=0,\\ a\Delta c+c\Delta a+a'\Delta c'+c'\Delta a'+a''\Delta c''+c''\Delta a''\\ \qquad+\Delta a\Delta c+\Delta a'\Delta c'+\Delta a''\Delta c''=0,\\ b\Delta c+c\Delta b+b'\Delta c'+c'\Delta b'+b''\Delta c''+c''\Delta b''\\ \qquad+\Delta b\Delta c+\Delta b'\Delta c'+\Delta b''\Delta c''=0.\end{cases}$$

Multipliciren wir jetzt die Gleichungen (3) respective durch $a+\frac{1}{2}\Delta a$, $a'+\frac{1}{2}\Delta a'$, $a''+\frac{1}{2}\Delta a''$, und addiren sie; zufolge der ersten Gleichung (4) erhalten wir:

$$y'[(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta b+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta b'+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta b'']$$
$$+z'[(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta c+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta c'+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta c'']=0.$$

Zwei andere Gleichungen ergeben sich, wenn man die Gleichungen (3) mit:

$$b+\tfrac{1}{2}\Delta b,\quad b'+\tfrac{1}{2}\Delta b',\quad b''+\tfrac{1}{2}\Delta b''$$

und mit:

$$c+\tfrac{1}{2}\Delta c,\quad c'+\tfrac{1}{2}\Delta c',\quad c''+\tfrac{1}{2}\Delta c''$$

multiplicirt. Man kann also die Gleichungen (3) durch nachstehende ersetzen:

$$(6)\quad \begin{cases}y'(a\Delta b+a'\Delta b'+a''\Delta b''+\frac{1}{2}\Delta a\Delta b+\frac{1}{2}\Delta a'\Delta b'+\frac{1}{2}\Delta a''\Delta b'')\\ +z'(a\Delta c+a'\Delta c'+a''\Delta c''+\frac{1}{2}\Delta a\Delta c+\frac{1}{2}\Delta a'\Delta c'+\frac{1}{2}\Delta a''\Delta c'')=0,\\ z'(b\Delta c+b'\Delta c'+b''\Delta c''+\frac{1}{2}\Delta b\Delta c+\frac{1}{2}\Delta b'\Delta c'+\frac{1}{2}\Delta b''\Delta c'')\\ +x'(b\Delta a+b'\Delta a'+b''\Delta a''+\frac{1}{2}\Delta b\Delta a+\frac{1}{2}\Delta b'\Delta a'+\frac{1}{2}\Delta b''\Delta a'')=0,\\ x'(c\Delta a+c'\Delta a'+c''\Delta a''+\frac{1}{2}\Delta c\Delta a+\frac{1}{2}\Delta c'\Delta a'+\frac{1}{2}\Delta c''\Delta a'')\\ +y'(c\Delta b+c'\Delta b'+c''\Delta b''+\frac{1}{2}\Delta c\Delta b+\frac{1}{2}\Delta c'\Delta b'+\frac{1}{2}\Delta c''\Delta b'')=0.\end{cases}$$

Wir schreiben abkürzend:

$$(7)\begin{cases} c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'' + \frac{1}{2}\Delta c\Delta b + \frac{1}{2}\Delta c'\Delta b' + \frac{1}{2}\Delta c''\Delta b'' = p, \\ a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'' + \frac{1}{2}\Delta a\Delta c + \frac{1}{2}\Delta a'\Delta c' + \frac{1}{2}\Delta a''\Delta c'' = q, \\ b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'' + \frac{1}{2}\Delta b\Delta a + \frac{1}{2}\Delta b'\Delta a' + \frac{1}{2}\Delta b''\Delta a'' = r; \end{cases}$$

daraus folgt wegen (5):

$$(8)\begin{cases} b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'' + \frac{1}{2}\Delta b\Delta c + \frac{1}{2}\Delta b'\Delta c' + \frac{1}{2}\Delta b''\Delta c'' = -p, \\ c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'' + \frac{1}{2}\Delta c\Delta a + \frac{1}{2}\Delta c'\Delta a' + \frac{1}{2}\Delta c''\Delta a'' = -q, \\ a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'' + \frac{1}{2}\Delta a\Delta b + \frac{1}{2}\Delta a'\Delta b' + \frac{1}{2}\Delta a''\Delta b'' = -r. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6), welche mit den Gleichungen (3) gleichbedeutend sind, lassen sich demnach so schreiben:

$$(9)\qquad \begin{cases} qz' - ry' = 0, \\ rx' - pz' = 0, \\ py' - qx' = 0. \end{cases}$$

Man sieht nun leicht, dass diese Gleichungen sich auf zwei reduciren; denn multiplicire ich die erste mit $p$, die zweite mit $q$, die dritte mit $r$, und addire, so erhalte ich eine Gleichung, die ich statt einer der drei setzen kann; und weil diese Gleichung identisch ist, so reduciren sich die drei Gleichungen auf zwei. Es sind demnach unendlich viele Auflösungen möglich, und der Ort der Punkte, welche sie darstellen, ist eine durch $O$ gehende Gerade.

Die Gleichungen (9) bestimmen demnach in Bezug auf die Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ die Gerade, um welche man den Körper drehen muss, um ihn in diejenige Lage zu bringen, welche er annimmt, wenn der Punkt $O$ fest bleibt und die Cosinus $a$, $b$, $c$, $a'$, etc. um $\Delta a$, $\Delta b$, etc. wachsen.

Somit ist bewiesen, dass jede Verrückung eines starren Körpers erzielt werden kann durch eine Fortschreitung, welche irgend einen seiner Punkte in die vorgeschriebene Lage bringt, und durch eine Drehung um eine gewisse, durch diesen Punkt gehende Axe; und es hängt weder die Richtung dieser Axe noch die Grösse des Drehungswinkels von dem gewählten Punkte ab.

Die Cosinus der Winkel, welche die Drehungsaxe mit $X'$, $Y'$, $Z'$ macht, sind proportional mit $p$, $q$, $r$, sie betragen folglich:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Demnach sind die Cosinus derselben Axe mit den Axen der $x$, $y$, $z$:

$$\frac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

39. Grösse der Drehung. — Wir wollen den Winkel kennen, den die Senkrechte beschreibt, welche aus irgend einem Punkte auf die Drehaxe gefällt ist. Wir wählen dazu einen Punkt, welcher auf einer der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ in der Entfernung 1 vom Ursprung $O$ liegt, z. B. auf $Z'$. Sein Abstand von der Drehaxe ist der Sinus ihres Winkels mit $OZ$, also $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. Die Strecke zwischen beiden Lagen dieses Punktes beträgt $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, wo $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ die Werthe haben, welche die Gleichungen (2) für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, $x'$, $y'$ gleich Null und $z'=1$ ergeben; die Strecke beträgt folglich:

$$\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}.$$

Theilt man diese Länge durch den Abstand des Punktes von der Drehaxe, so ergiebt sich der doppelte Sinus des halben Drehungswinkels; also, wenn $\omega$ den ganzen Winkel bezeichnet:

$$2\sin\tfrac{1}{2}\omega=\frac{\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Ebenso findet man, wenn man den Punkt auf den Axen der $y'$ und $x'$ annimmt:

$$\frac{\sqrt{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+r^2}}$$

und:

$$\frac{\sqrt{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{q^2+r^2}}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}{q^2+r^2}=\frac{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}{p^2+r^2}=\frac{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{p^2+q^2}$$

$$=\frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2+\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2+\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{2(p^2+q^2+r^2)}.$$

Demnach bestimmt folgende Formel den Winkel $\omega$:

$$(10) \qquad \sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2+\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2+\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}.$$

40. Die Verrückungen aller Punkte geben gleiche Projectionen auf die Drehaxe. — Denn denkt man sich eine feste Ebene senkrecht auf diese Axe, so werden alle Punkte des Systems durch die gemeinschaftliche Verschiebung um gleiche Stücke ihr näher kommen oder sich von ihr entfernen. Die Drehung aber ändert die Entfernung von dieser zur Axe senkrechten Ebene nicht. Mithin geben die Verrückungen aller Punkte eine gleiche Projection auf die Axe.

Es folgt hieraus, dass wenn man aus einem und demselben Punkte des Raums Geraden zieht, die parallel und gleich sind mit den Verrückungen aller Punkte des Systems, dass dann die Endpunkte aller dieser Geraden in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Um also die Richtung der Drehaxe zu erhalten, braucht man nur aus einem Punkte drei Geraden zu ziehen, welche gleich und parallel sind mit drei nicht zu einer und derselben Ebene parallelen Verrückungen; dann eine Ebene durch ihre Endpunkte zu legen, und auf diese Ebene eine Senkrechte zu errichten.

Wenn man damit anfängt, das System parallel mit der Axe um ein, der Projection der wirklichen Verrückungen auf die Axe gleiches Stück fortschreiten zu lassen, so ist nur noch eine Bewegung parallel mit einer zur Axe senkrechten Ebene nothwendig. Somit hat man den Satz:

Jede Verrückung eines festen Körpers ist erreichbar durch zwei successive Bewegungen: die erste senkrecht gegen eine Ebene, und die zweite parallel mit dieser Ebene.

41. Bewegung eines Körpers parallel mit einer Ebene. — Wir haben durch eine einfache Construction bewiesen, dass wenn diese Bewegung nicht in einer blossen Fortschreitung besteht, man eine Drehung an ihre Stelle setzen kann. Auch die Rechnung wird dies leicht zeigen.

Nehmen wir die Axen der $x$, $y$, $x'$, $y'$ in der gegebenen

Ebene, so kann man die Gleichungen (1) unter der bekannten Form darstellen:

$$x = \xi + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = \eta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

wenn $\alpha$ den Winkel der Axe der $x'$ mit der $x$-Axe bezeichnet. Man sieht nun leicht, dass es einen Punkt giebt, der vor und nach der Verrückung dieselbe Lage hat; denn man braucht nur $x', y'$ zu bestimmen aus den Bedingungen $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, welche geben:

$$\Delta\xi + x' \Delta\cos\alpha - y' \Delta\sin\alpha = 0,$$
$$\Delta\eta + x' \Delta\sin\alpha + y' \Delta\cos\alpha = 0.$$

Diese Gleichungen liefern nur ein System Werthe für $x'$, $y'$, also nur einen Punkt, der vor und nach der Verrückung dieselbe Lage hat. Seine Coordinaten können niemals unendlich werden, weil ihr gemeinsamer Nenner

$$(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\sin\alpha)^2$$

ist, und dieser nur dann Null sein kann, wenn

$$\Delta\cos\alpha = 0, \quad \Delta\sin\alpha = 0,$$

in welchem Falle der Winkel $\alpha$ sich nicht ändern und die Bewegung also in einer blossen Fortschreitung bestehen würde. Daraus folgt der Satz:

Jede Verrückung eines starren Körpers, dessen Punkte sich nur parallel mit einer festen Ebene bewegen, kann, wenn sie nicht in einer einfachen Fortschreitung besteht, hervorgebracht werden durch Drehung um eine auf dieser Ebene senkrechte Axe.

42. Jede Verrückung ist durch eine Schraubenbewegung erreichbar. — Denn jede Verrückung eines Körpers kann erzielt werden durch eine Fortschreitung und eine darauf folgende Drehung um eine Axe von fester Richtung. Statt der einen Fortschreitung kann man zwei sich folgende Fortschreitungen setzen: die eine parallel zu der Axe und von constanter Grösse; die andere senkrecht zur Axe und abhängend, gleich der absoluten Lage dieser Axe, von dem zur Bestimmung der Fortschreitung gewählten Punkte. Diese letzte Fortschreitung und die Drehung zusammen kann man durch eine Drehung um eine parallele Axe ersetzen. Also:

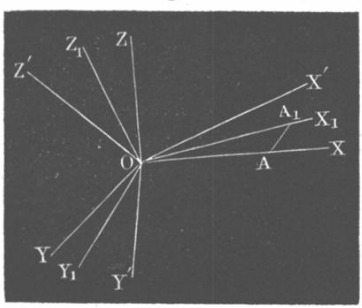
Jede Verrückung eines Körpers kann erreicht

werden, wenn man den Körper mit einer gewissen festen Geraden verbindet, ihn längs derselben gleiten und darauf sich um sie drehen lässt; und offenbar kann man diese beiden successiven Bewegungen durch eine Schraubenbewegung ersetzen.

Dieser Satz ist hier für irgend eine endliche Verrückung bewiesen. Vorher war er nur betrachtet worden in dem am allgemeinsten nützlichen Fall einer unendlich kleinen Verrückung.

43. Die Grössen $p$, $q$, $r$ haben Beziehungen zu einander, welche bisweilen zur Vereinfachung der Formeln dienen, und welche wir deshalb mittheilen wollen. Es sei $O$ der Ursprung der beweglichen Axen $X'$, $Y'$, $Z'$; wir denken uns ihn fest, und legen durch ihn drei Axen $OX$, $OY$, $OZ$ parallel zu den festen Axen. $OJ$ sei die Axe, um welche man das System drehen kann, um es in die durch die Incremente $\Delta a$, $\Delta b$ etc. bestimmte Lage zu bringen; die Cosinus der Winkel, welche $OJ$ mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ bildet, sind proportional mit $p$, $q$, $r$. Betrachten wir nun drei Axen, die zuerst mit $X$, $Y$, $Z$ zusammenfallen, aber mit $X'$, $Y'$, $Z'$ fest verbunden sind und sich folglich mit ihnen bewegen. Nach der vollbrachten Drehung seien $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ die Lagen dieser neuen Axen. Nehmen wir auf $OX$, $OX_1$ die der Einheit gleichen Längen $OA$, $OA_1$; da der Punkt, welcher vor der Drehung in $A$ war, durch die Drehung nach $A_1$ kommt, so ist $AA_1$ senkrecht gegen $OJ$.

Fig. 12.




Die Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ bilden in ihrer neuen Lage dieselben Winkel mit $OX_1$ wie in der alten Lage mit $OX$, denn $OX_1$ ist ja mit ihnen fest verbunden und coincidirte anfänglich mit $OX$; die Cosinus dieser Winkel sind demnach $a$, $b$, $c$. Mit $OX$ machen $X'$, $Y'$, $Z'$ in der neuen Lage Winkel, deren Cosinus $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ sind. Diese letzten

Cosinus sind die Projectionen von $OA$ auf $X'$, $Y'$, $Z'$, und die ersten sind die Projectionen von $OA_1$ auf dieselben Axen; folglich stellen $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$ die Projectionen der Geraden $A_1 A$ dar auf $X'$, $Y'$, $Z'$ in der neuen Lage, und also sind die Cosinus der Winkel, welche die Richtung $A_1 A$ mit $X'$, $Y'$, $Z'$ bildet, proportional mit $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$ und respective von denselben Zeichen. Daraus folgt, weil die Richtungen $OJ$ und $A_1 A$ senkrecht gegen einander stehen, dass:

$$p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0.$$

Betrachtet man statt $OX$ die Axen $OY$ und $OZ$, so erhält man zwei analoge Gleichungen; also hat man die drei Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0, \\ p\Delta a' + q\Delta b' + r\Delta c' = 0, \\ p\Delta a'' + q\Delta b'' + r\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Wenn ich nun auch auf jeder der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ einen Punkt in der Entfernung 1 vom Ursprung nehme, und ausdrücke, dass die Gerade, welche seine erste und zweite Lage verbindet, auf $OJ$ senkrecht steht, so erhalte ich folgende drei neue Gleichungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} (ap + bq + cr)\Delta a + (a'p + b'q + c'r)\Delta a' \\ \quad + (a''p + b''q + c''r)\Delta a'' = 0, \\ (ap + bq + cr)\Delta b + (a'p + b'q + c'r)\Delta b' \\ \quad + (a''p + b''q + c''r)\Delta b'' = 0, \\ (ap + bq + cr)\Delta c + (a'p + b'q + c'r)\Delta c' \\ \quad + (a''p + b''q + c''r)\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

44. Richtungen, auf welchen die Verrückungen aller Punkte gleiche Projectionen geben. — Wir wissen bereits, dass die Projectionen aller Verrückungen auf die Axe gleich sind; es wird aber nicht nutzlos sein zu zeigen, wie man direct zu dieser Einsicht gelangen kann.

Es habe eine gewisse Richtung diese Eigenschaft; die Winkel, welche sie mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ bildet, seien $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Die Verrückung irgend eines Punktes hat parallel mit denselben Axen die Componenten:

$$(13)\qquad \begin{cases} a\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z, \\ b\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z, \\ c\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z; \end{cases}$$

die Projection dieser Verrückung auf die Richtung, um welche es sich handelt, ist demnach:

$$(a\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z)\cos\lambda + (b\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z)\cos\mu + (c\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z)\cos\nu,$$

und es sind nun $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ so zu bestimmen, dass diese Grösse constant bleibt, welche Werthe man auch den Grössen $x'$, $y'$, $z'$ beilegt. Dazu ist es aber nothwendig und hinreichend, dass wenn man in dem vorstehenden Ausdruck für $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ die in (2) gegebenen Werthe setzt, dann die Coëfficienten der drei unabhängigen Variablen $x'$, $y'$, $z'$ Null werden. Dies ergiebt die drei Bedingungen:

$$(14)\left\{\begin{aligned}&(a\Delta a + a'\Delta a' + a''\Delta a'')\cos\lambda + (b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'')\cos\mu\\ &\quad + (c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'')\cos\nu = 0,\\ &(a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'')\cos\lambda + (b\Delta b + b'\Delta b' + b''\Delta b'')\cos\mu\\ &\quad + (c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'')\cos\nu = 0,\\ &(a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'')\cos\lambda + (b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'')\cos\mu\\ &\quad + (c\Delta c + c'\Delta c' + c''\Delta c'')\cos\nu = 0.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der drei Grössen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Man sieht aber leicht, dass diese Verhältnisse genau die von $p$, $q$, $r$ sind; denn schreibe ich diese letzten Grössen an die Stelle der ersten in den Gleichungen (14), so werden sie zufolge (12) Identitäten. Also fällt die durch (14) bestimmte einzige Richtung mit der Drehungsaxe zusammen; welches zu verificiren war.

Da alle Verrückungen gleiche Projectionen auf der Axe haben, so folgt, dass alle Verrückungen, welche mit der Axe einen gleichen, vom rechten verschiedenen Winkel machen, also auch alle parallelen Verrückungen einander gleich sind, und umgekehrt.

45. Gleichungen für die Axe der Drehung und Gleitung. — Die Punkte dieser Axe zeichnen sich vor allen anderen dadurch aus, dass ihre Verrückungen nur in der Richtung der Axe selbst geschehen. Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Verrückung eines beliebigen Punktes mit den Axen $X$, $Y$, $Z$ macht, sind proportional mit $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$; und die Cosinus der Winkel, welche die Drehaxe mit denselben Axen macht, sind proportional mit:

$$ap + bq + cr,\ a'p + b'q + c'r,\ a''p + b''q + c''r.$$

Demnach werden die auf der gesuchten Axe liegenden Punkte bestimmt durch die Gleichungen:

$$(15)\quad \frac{\Delta x}{ap+bq+cr}=\frac{\Delta y}{a'p+b'q+c'r}=\frac{\Delta z}{a''p+b''q+c''r};$$

und ersetzt man hier $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ durch ihre in (2) gegebenen Werthe, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades zwischen $x'$, $y'$, $z'$ und den Daten der Aufgabe, welche die gesuchte Gerade in Bezug auf die Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ darstellen. Wir wollen aber diese beiden Gleichungen auf die einfachste Form zurückführen; deshalb schreiben wir zunächst die vorstehenden so:

$$\frac{(a+\frac{1}{2}\Delta a)\Delta x}{(a+\frac{1}{2}\Delta a)(ap+bq+cr)}=\frac{(a'+\frac{1}{2}\Delta a')\Delta y}{(a'+\frac{1}{2}\Delta a')(a'p+b'q+c'r)}$$
$$=\frac{(a''+\frac{1}{2}\Delta a'')\Delta z}{(a''+\frac{1}{2}\Delta a'')(a''p+b''q+c''r)}.$$

Durch Addition der Zähler und Nenner ergiebt sich wieder ein gleicher Bruch. Die Summe der Nenner, wegen der ersten Gleichung (12) und

$$ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0,$$

reducirt sich auf $p$. Die Gleichungen (2) ergeben die Summe der Zähler gleich $h+qz'-ry'$, wenn man setzt:

$$(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta=h.$$

Demnach sind die Quotienten (15) gleich $\dfrac{h+qz'-ry'}{p}$.

Verfährt man in Bezug auf die Buchstaben $b$ und $c$ ebenso, wie wir in Bezug auf $a$ gethan haben, so zeigt sich, dass die Quotienten (15) auch den neuen Ausdrücken gleich sind:

$$\frac{i+rx'-pz'}{q},\ \frac{k+py'-qx'}{r},$$

während die Grössen $h$, $i$, $k$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$h=(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta,$$
$$i=(b+\tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta\xi+(b'+\tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta\eta+(b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta\zeta,$$
$$k=(c+\tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta\xi+(c'+\tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta\eta+(c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'')\Delta\zeta.$$

Die Gleichungen der gesuchten Axe sind also:

$$\frac{h+qz'-ry'}{p}=\frac{i+rx'-pz'}{q}=\frac{k+py'-qx'}{r}.$$

Wir wollen Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit $p$, des zweiten mit $q$, des dritten mit $r$ multipliciren und dann

die neuen Zähler und Nenner addiren; dies liefert den gleichen Bruch:

$$\frac{ph + qi + rk}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Die Werthe von $h$, $i$, $k$ ergeben, mit Rücksicht auf (11):

$$ph + qi + rk = (ap + bq + cr)\Delta\xi + (a'p + b'q + c'r)\Delta\eta + (a''p + b''q + c''r)\Delta\zeta.$$

Theilt man aber die zweite Seite dieser Gleichung durch $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, so erhält man die Projection der Verrückung des Ursprungs auf die Drehaxe. Wird diese Projection durch $v$ bezeichnet, so hat man:

$$ph + qi + rk = v\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Demnach haben die Projectionen der Axe auf den von den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ gebildeten Ebenen nachstehende Gleichungen:

$$\frac{h + qz' - ry'}{p} = \frac{i + rx' - pz'}{q} = \frac{k + py' - qx'}{r} = \frac{v}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

oder:

$$(16)\qquad \begin{cases} qz' - ry' = v\dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - h, \\ rx' - pz' = v\dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - i, \\ py' - qx' = v\dfrac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} - k. \end{cases}$$

46. Man kann sich in allen bisherigen Rechnungen die Verrückungen unendlich klein und während gleicher unendlich kleiner Zeiten ausgeführt denken; alle Incremente werden dann Differentiale, und die bisher erhaltenen Gleichungen ergeben Relationen zwischen den Grenzen der Differenzquotienten der Variablen oder zwischen ihren Differentialen. Man erhält diese Relationen, indem man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung vernachlässigt, und das Zeichen $\Delta$ mit $d$ vertauscht. Damit aber die Homogenität sichtbar hervortrete, so werden wir $p$, $q$, $r$ in den vorigen Formeln, wenn sie unendlich klein sind, durch $pdt$, $qdt$, $rdt$ darstellen. Uebrigens lassen sich die zu findenden Relationen direct aus den Gleichungen (1) herleiten durch Differentiation und ähnliche

Rechnungen wie die für endliche Verrückungen gemachten. Theilt man die Verrückungen und ihre Componenten $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ durch $\Delta t$, so geben diese Quotienten an der Grenze die Geschwindigkeiten und deren Componenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; und da die Geschwindigkeiten und Verrückungen sich nach denselben Regeln zusammensetzen, so sieht man ohne Mühe, dass alle für die Verrückungen gefundenen Sätze, wenn man auf die Grenze übergeht, analoge Sätze für die Geschwindigkeiten der Punkte des Körpers liefern. Wir werden diese Sätze rasch hinter einander vornehmen.

## Unendlich kleine Bewegung eines starren Systems.

47. Differenziirt man die Gleichungen (1) der Nr. 37 nach $t$, und betrachtet $x'$, $y'$, $z'$ als constant, so ergiebt sich:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind die mit $X$, $Y$, $Z$ parallelen Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Systems, der in Bezug auf die Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ die constanten Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ hat.

Sie gehen aus den Gleichungen (2) derselben Nummer hervor, indem man durch $\Delta t$ dividirt und auf die Grenze der Quotienten übergeht, wenn $\Delta t$ sich der Null nähert.

48. Componenten der Geschwindigkeit in der Richtung der beweglichen Axen. — Die Componente parallel mit $X'$ erhält man durch Multipliciren der Gleichungen (1) mit $a$, $a'$, $a''$ und Addiren; die Componenten parallel mit $Y'$ und $Z'$ ergeben sich auf dieselbe Weise, nur dass man mit $b$, $b'$, $b''$ und $c$, $c'$, $c''$ multiplicirt. Wir werden diese Componenten respective durch $u$, $v$, $w$ bezeichnen. Die Com-

ponenten der Geschwindigkeit des beweglichen Ursprungs seien $h$, $i$, $k$, setzen wir also:

$$(2)\qquad \begin{cases} a\dfrac{d\xi}{dt} + a'\dfrac{d\eta}{dt} + a''\dfrac{d\zeta}{dt} = h, \\ b\dfrac{d\xi}{dt} + b'\dfrac{d\eta}{dt} + b''\dfrac{d\zeta}{dt} = i, \\ c\dfrac{d\xi}{dt} + c'\dfrac{d\eta}{dt} + c''\dfrac{d\zeta}{dt} = k, \end{cases}$$

dann finden wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} u = h + qz' - ry', \\ v = i + rx' - pz', \\ w = k + py' - qx', \end{cases}$$

während $p$, $q$, $r$ durch die Gleichungen gegeben werden:

$$\begin{aligned} p\,dt &= c\,db + c'\,db' + c''\,db'', \\ q\,dt &= a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'', \\ r\,dt &= b\,da + b'\,da' + b''\,da''. \end{aligned}$$

Die ersten Summanden auf der rechten Seite in den Gleichungen (3) sind die Geschwindigkeitscomponenten der gemeinsamen Fortschreitung; und folglich sind die Geschwindigkeitscomponenten, welche von der Drehung um den fest gedachten Ursprung herrühren:

$$qz' - ry',\ rx' - pz',\ py' - qx'.$$

49. Augenblickliche Drehaxe. — Die Punkte, deren Geschwindigkeit in der Bewegung um den fest gedachten Ursprung Null ist, ergeben sich aus den drei nachstehenden Gleichungen, von denen aber nur zwei von einander unabhängig sind:

$$(4)\qquad qz' - ry' = 0,\ rx' - pz' = 0,\ py' - qx' = 0.$$

Sie liegen demnach auf einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$(5)\qquad \frac{\pm p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{\pm q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{\pm r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

wobei man entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen zusammen nehmen muss.

Man nennt diese Gerade die augenblickliche Drehaxe, weil man annehmen darf, dass die Bewegung während

einer unendlich kleinen Zeit um sie stattfindet, da die Fehler, welche aus dieser Annahme hervorgehen, für Punkte in endlicher Entfernung von der Axe unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.

Man kann also jede unendlich kleine Bewegung um einen festen Punkt betrachten als Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe.

Und folglich kann man jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers betrachten als resultirend aus einer Fortschreitung und einer Drehung um eine feste Axe.

50. Grösse der Winkelgeschwindigkeit. — Bei der Bewegung um eine feste Axe ist die Winkelgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit irgend eines Punktes, getheilt durch dessen Abstand von der Axe. Nimmt man den Punkt auf der Axe $Z'$ in der Entfernung 1 vom Ursprung, dessen Coordinaten also sind:

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 1,$$

so ergeben die Formeln (3) seine Geschwindigkeitscomponenten parallel mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ gleich $q$, $-p$, $0$; seine Geschwindigkeit ist demnach $\sqrt{p^2 + q^2}$. Sein Abstand von der Drehaxe ist der Sinus des Winkels dieser Axe und der Axe $Z'$ oder $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. Folglich ist der Werth der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \tag{6}$$

51. Drehrichtung. — Es bleibt noch die Drehrichtung des Systems zu bestimmen, oder, was dasselbe ist, die Richtung der Drehung, welche in irgend einer auf der Axe senkrechten Ebene stattfindet. Dazu hat man nur nöthig zu untersuchen, ob die oberen oder unteren Zeichen der Ausdrücke (5) der Richtung der Axe dieser Drehung entsprechen. Wir betrachten deshalb die Ebene, welche durch den Ursprung senkrecht auf die Drehaxe geführt ist, und wir wollen suchen die Richtung der Axe für die Drehung zu bestimmen, welche der Leitstrahl vom Ursprung nach irgend einem Punkt $x'$, $y'$, $z'$ dieser Ebene in derselben Ebene aus-

führt. Dieser Punkt bewegt sich, von irgend einer seiner Lagen an, in der Richtung seiner Geschwindigkeit, welche mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ Winkel macht, deren Cosinus proportional sind mit $u$, $v$, $w$ und mit diesen Grössen gleiche Zeichen haben. Um also die Axe der von dem Leitstrahl ausgeführten Drehung zu erhalten, braucht man nur in den Formeln (2) auf Seite 12 des ersten Theils statt der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ die des Leitstrahls und statt der Richtung $(\alpha'\beta'\gamma')$ die der Geschwindigkeit zu setzen. Daraus folgt, dass die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Drehaxe mit $X'$, $Y'$, $Z'$ macht, dieselben Zeichen haben wie die Ausdrücke

$$y'w - z'v,\ z'u - x'w,\ x'v - y'u;$$

und es fragt sich nur noch, ob die Zeichen dieser letzten übereinstimmen mit denen von $p$, $q$, $r$ oder ihnen entgegengesetzt sind.

Um dies zu entscheiden, nehmen wir der Einfachheit wegen $z' = 0$, dann ist:

$$u = -ry',\ v = rx',$$

und der dritte von den vorstehenden Ausdrücken wird:

$$r(x'^2 + y'^2),$$

also von demselben Zeichen wie $r$. Man muss folglich in den Ausdrücken (5) die oberen Zeichen nehmen.

Demnach sind die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Drehaxe mit den Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ bildet, in Grösse und Zeichen:

$$(7)\quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Multiplicirt man diese drei Cosinus mit der Winkelgeschwindigkeit, so erhält man ihre Componenten um die Axen $X'$, $Y'$, $Z'$. Sie sind in Grösse und Zeichen:

$$(8)\quad p,\ q,\ r.$$

52. Augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung. — Der Satz der Nr. 42 gilt für jede Bewegung eines Körpers, also auch wenn diese Bewegung unendlich klein ist; man hat folglich den schon früher geometrisch erwiesenen Satz:

Jede unendlich kleine Bewegung eines Kör-

pers lässt sich hervorbringen durch Drehung um eine Axe und Gleiten längs dieser Axe.

Diese augenblickliche Axe der Gleitung und Drehung lässt sich noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten. Substituirt man nämlich den unendlich kleinen Wegen, die man sich in gleichen Zeiten durchlaufen denkt, die Geschwindigkeiten, so erhält man den vorigen Satz folgendermaassen ausgedrückt:

Man kann die Geschwindigkeiten aller Punkte eines Körpers in einem beliebigen Augenblick betrachten als resultirend aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, welche gleich und parallel sind mit einer gewissen Geraden, und von den Geschwindigkeiten, welche diese Punkte bei einer gewissen Drehung um eine, mit jener Geraden parallele Axe haben würden.

Die zur Axe parallele Componente ist die Projection der Geschwindigkeit des beweglichen Ursprungs auf die Axe. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung beträgt $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, und die Richtung der Axe macht mit $X'$, $Y'$, $Z'$ Winkel, deren Cosinus proportional sind mit $p$, $q$, $r$ und die Zeichen dieser Grössen haben.

53. Gleichungen für die augenblickliche Axe der Drehung und Gleitung. — In Nr. 45 haben wir die Gleichungen dieser Axe für eine beliebige endliche Bewegung gegeben; aus ihnen gehen die gesuchten hervor, indem man durch $\Delta t$ dividirt und auf die Grenzen übergeht. Die dortigen Grössen $p$, $q$, $r$ gehen dann in diejenigen über, welche wir jetzt durch dieselben Buchstaben bezeichnen; $h$, $i$, $k$ werden die Componenten der Geschwindigkeit des Ursprungs im Sinne der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$, und wir wollen diese auch durch $h$, $i$, $k$ bezeichnen; endlich $v$, welches die Verrückung des Ursprungs, geschätzt im Sinne der Axe, darstellte, wird die Geschwindigkeit des Ursprungs, geschätzt nach derselben Richtung, oder die gleitende Geschwindigkeit. Wir werden sie durch denselben Buchstaben darstellen, und ihre Componenten parallel mit $X'$, $Y'$, $Z'$ durch $v'$, $v''$, $v'''$. Die Gleichungen der augenblicklichen Axe der Drehung und Gleitung werden nun in Bezug auf die beweglichen Axen:

$$(9)\qquad \begin{cases} qz' - ry' = v' - h, \\ rx' - pz' = v'' - i, \\ py' - qx' = v''' - k. \end{cases}$$

In Bezug auf die festen Axen erhält man ihre Gleichungen, indem man für $x'$, $y'$, $z'$ ihre Werthe in $x$, $y$, $z$ setzt. Somit ist die Lage dieser Axe sowohl im Körper als gegen ein festes Coordinatensystem in jedem Augenblick bestimmt, wenn die Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $a'$, etc. gegebene Functionen der Zeit sind.

Die Gleichung der Oberfläche, welche den Ort dieser Axen im Körper darstellt, würde man erhalten, wenn man die Zeit aus den Gleichungen der Axe zwischen $x'$, $y'$, $z'$ eliminirte; und die Gleichung der anderen Fläche, welche den Ort dieser Axen im Raume darstellt, würde sich ergeben durch Eliminiren der Zeit aus den Gleichungen der Axe zwischen $x$, $y$, $z$.

54. Virtuelle Verrückung eines starren Körpers. Gleichungen des Gleichgewichts. — Die Formeln (3) der Nr. 48, welche die Geschwindigkeitscomponenten für irgend einen Punkt eines bewegten Körpers ausdrücken, liefern unmittelbar die Componenten der virtuellen Geschwindigkeiten aller Punkte dieses Körpers; und die Anwendung des allgemeinen Princips der Statik wird die Gleichungen ergeben, welche für das Gleichgewicht von Kräften an einem freien starren Körper nothwendig und hinreichend sind. In der That, wenn ein starrer Körper aus einer Lage in eine unendlich nahe Lage übergeht, so kann man annehmen, dass alle seine Punkte unendlich kleine Strecken gleichförmig durchlaufen, mit Geschwindigkeiten, welche den Längen dieser Strecken proportional sind. Die Componenten dieser virtuellen Wege sind die Producte der bei ihrem Durchlaufen verflossenen Zeit $\theta$ in die durch die Formeln (3) gegebenen Geschwindigkeitscomponenten. Demnach ist die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte, deren Componenten $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$, etc. sind:

$$\theta\Sigma[X(h+qz'-ry')+Y(i+rx'-pz')+Z(k+py'-qx')].$$

Damit Gleichgewicht stattfinde, so muss nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten diese Summe Null sein für jede Verrückung, wenn man durch $\theta$ dividirt; sie muss

also Null sein für alle Werthe der sechs Grössen $h$, $i$, $k$, $p$, $q$, $r$, da man sich den Körper ganz frei denkt. Dazu ist aber nothwendig und hinreichend, dass die Coëfficienten einer jeden von diesen sechs Grössen Null seien, woraus die Gleichungen folgen:

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma Z = 0;$$
$$\Sigma(y'Z - z'Y) = 0,\ \Sigma(z'X - x'Z) = 0,\ \Sigma(x'Y - y'X) = 0.$$

Die Axen der $x'$, $y'$, $z'$ konnte man beliebig im Raume annehmen. Man kann sie also mit den Axen der $x$, $y$, $z$ zusammenfallen lassen. Dadurch werden die drei letzten Gleichungen:

$$\Sigma(yZ - zY) = 0,\ \Sigma(zX - xZ) = 0,\ \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Zum Schlusse empfehlen wir dem Leser die Abhandlung von Rodrigues „*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire.*“ Dieselbe steht im fünften Theile des Journals von Liouville.

---

## Geschwindigkeit und Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes.

55. Hat ein Punkt eine gewisse stetige Bewegung in Bezug auf ein starres System, und hat dieses System selbst eine stetige Bewegung im Raume, so sagt man, der Punkt besitze eine absolute stetige Bewegung, die aus den beiden anderen zusammengesetzt sei. Man würde, von einem beliebigen Zeitpunkte angefangen, die Lage des Punktes nach irgend einer Zeit erhalten, indem man ihn fest mit dem System verbände und dieses sich während einer gleichen Zeit bewegen liesse; dann müsste man den Punkt in dem unbeweglichen System sich bewegen lassen, bis er die vorgeschriebene relative Lage einnähme. Natürlich könnte man auch in umgekehrter Ordnung verfahren.

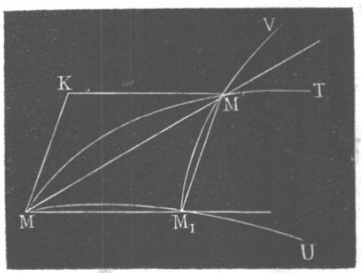
Am bequemsten bestimmt man die beiden componirenden Bewegungen, indem man sich dreier, mit dem System fest verbundener Axen bedient. Die relative Lage des Punktes wird dann durch seine Coordinaten in Bezug auf diese Axen gegeben, und die Bewegung des Systems durch die successiven Lagen derselben Axen. Kennt man die beiden componirenden Bewegungen, so sind die Coordinaten des Punktes in Bezug auf die beweglichen Axen bekannte Functionen der Zeit, sowie auch die Coordinaten des beweglichen Ursprungs und die Neigungen dieser Axen gegen feste Axen.

Wir wollen nun sehen, wie man für die resultirende oder zusammengesetzte Bewegung des Punktes die beiden wichtigen Elemente, Geschwindigkeit und Abweichung, bestimmen kann.

56. Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung. — Es sei $M$ die Lage des Punktes in einem

gewissen Augenblick; $MU$ die Trajectorie desjenigen Punktes des Systems, welcher in demselben Augenblick mit $M$ zusammenfällt, und $M_1$ seine Lage nach einer unendlich kleinen Zeit $\theta$; $M_1 V$ die Lage, welche nach dieser Zeit die mit dem starren System verbundene Linie einnimmt, auf welcher sich unser Punkt bewegt, oder mit anderen Worten die Lage der relativen Trajectorie; $M_1 M'$ der Bogen, welchen der Punkt auf dieser Curve während der Zeit $\theta$ zurückgelegt hat. Die Lage des Punktes nach der Zeit $\theta$ ist dann $M'$, und seine absolute Trajectorie wird eine Linie $MM'T$ sein, die durch $M$ und $M'$ geht.

Fig. 13.




Verbinde ich die Punkte $M$, $M'$, $M_1$ durch Geraden und lasse die Zeit $\theta$ gegen Null abnehmen, so haben diese Geraden zu Grenzen ihrer Richtungen die Tangenten an den drei Curven $MU$, $MT$ und $M_1 V$, die letzte Curve in ihrer Grenzlage gedacht, bei welcher $M_1$ in $M$ liegt. Für die Verhältnisse der Seiten des Dreiecks $MM'M_1$ gelten dieselben Grenzen wie für die Verhältnisse der Bogen $MM_1$, $M_1 M'$, $MM'$, welche während der Zeit $\theta$ durchlaufen werden, der erste durch den Punkt des Systems, der sich in $M$ befand, der zweite durch unseren beweglichen Punkt in seiner relativen Bewegung, und der dritte durch denselben Punkt in seiner zusammengesetzten Bewegung. Dividire ich aber diese drei Bogen durch $\theta$, so sind die Grenzen der drei Quotienten die Geschwindigkeiten in den drei Bewegungen, zu der Zeit wo das Bewegliche in $M$ ist. Die Verhältnisse dieser Geschwindigkeiten sind also die Grenzen für die Verhältnisse der Seiten in dem Dreieck $MM_1 M'$.

Um die hierin enthaltene Lösung unserer ersten Aufgabe einfach auszusprechen, bilden wir das Parallelogramm $MM_1 M' K$. Die Grenzrichtung der mit $M_1 M'$ parallelen Seite $MK$ ist die in $M$ an die relative Trajectorie gezogene Tangente, und das Parallelogramm hat zur Grenze ein Parallelogramm, dessen Seiten in $M$ Tangenten an die relative Trajectorie des Beweglichen und an die Trajectorie des mit die-

sem in $M$ coïncidirenden Punktes des Systems sind, und proportionale Längen haben mit den Geschwindigkeiten beider Punkte auf beiden Curven.

Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

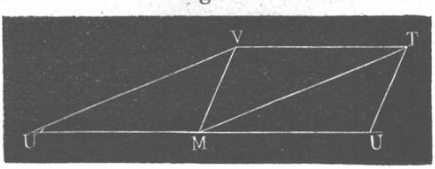
Die Geschwindigkeit des Beweglichen in seiner zusammengesetzten Bewegung wird in Grösse und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt, dessen beide Seiten in Grösse und Richtung die relative Geschwindigkeit des Beweglichen und die absolute Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems darstellen.

Oder kurz ausgedrückt nach der in Nr. 17 gegebenen Definition des Zusammensetzens von Geschwindigkeiten:

Die Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung ist die Resultante aus den Geschwindigkeiten in der relativen Bewegung und in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems.

57. Relative Geschwindigkeit. — Die Seiten $MV$, $MU$ des Parallelogramms $MUTV$ sollen in $M$ respective die relative Trajectorie und die Trajectorie des coïncidirenden Punktes des Systems tangiren, und ihre Längen sollen die Geschwindigkeiten in beiden Bewegungen darstellen. Wir haben gesehen, dass dann die Diagonale $MT$ in Grösse und Richtung die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung des Punktes im Raume darstellt.

Fig. 14.

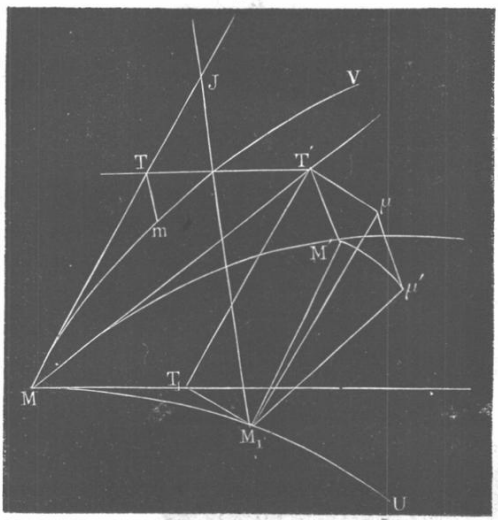



Verlängere ich aber $MU$ um $MU' = MU$, so wird $MV$ die Diagonale des Parallelogramms auf $MU'$ und $MT$. Ich kann also sagen:

Die relative Geschwindigkeit eines Punktes in Bezug auf ein bewegtes starres System ist die Resultante aus seiner absoluten und einer anderen Geschwindigkeit, welche gleich und entgegengesetzt ist der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems.

58. Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung. — Es sei $M$ die Lage des beweglichen Punktes in einem gewissen Augenblick; $MV$ die Linie, auf welcher er sich in dem Systeme bewegt, oder seine relative Trajectorie; $MU$ die Linie, welche der dem System angehörende Punkt $M$ beschreibt. Nach einer unendlich kleinen Zeit $\theta$ befinde sich das Bewegliche auf seiner relativen Trajectorie in $m$, und

Fig. 15.




der Punkt $M$ des Systems in $M_1$. $MT$, $MT_1$ seien diejenigen Stücke von den Tangenten an diesen beiden Curven, welche in der Zeit $\theta$ mit den in $M$ stattfindenden Geschwindigkeiten würden gleichförmig beschrieben werden.

Die Abweichung in der relativen Bewegung des Punktes, nach der Zeit $\theta$, ist $Tm$; in der Bewegung des Punktes $M$ des Systems ist sie $T_1 M_1$.

Die Diagonale $MT'$ des Parallelogramms $TMT_1T'$ giebt die Richtung der Tangente an die absolute Trajectorie des Beweglichen; und die Länge von $MT'$ stellt zugleich die Geschwindigkeit auf dieser Curve dar, so dass $MT'$ der Weg ist, welchen während der Zeit $\theta$ ein Punkt durchläuft, der sich auf dieser Tangente mit der Geschwindigkeit bewegt, die das Bewegliche in $M$ auf seiner absoluten Trajectorie hat.

Will man daher die Abweichung des Beweglichen in seiner zusammengesetzten oder absoluten Bewegung haben, so braucht man nur den Punkt $T'$ zu verbinden mit der Lage, welche das Bewegliche nach der Zeit $\theta$ auf seiner absoluten Trajectorie einnimmt, oder, mit anderen Worten, mit seiner wirklichen Lage im Raume. Diese wirkliche Lage nun zu bestimmen wird uns leicht fallen nach dem, was wir über die Bewegung der Systeme gesagt haben.

Betrachten wir deshalb zunächst das System während der Zeit $\theta$ als unbeweglich; der Punkt $M$ gelangt dann in die Lage $m$, und hier denken wir uns ihn mit dem System fest verbunden. Nun bewegen wir das System so, wie es sich in der That während der Zeit $\theta$ bewegt, und diese Bewegung zerlegen wir in eine gemeinsame Fortschreitung, welche $M$ nach $M_1$ führt, und in eine Drehung um eine gewisse Axe $M_1 J$, deren Richtung, sowie die Grösse des Drehungswinkels, nur von der Richtungsänderung der Linien des Systems abhängt. Da $\theta$ unendlich klein ist, so darf diese Axe mit der augenblicklichen Drehaxe vertauscht werden, und kann man den um $M_1 J$ zu beschreibenden Winkel betrachten als das Product der Zeit $\theta$ in die der Lage $M$ entsprechende Winkelgeschwindigkeit des Systems. Wir haben nun den mit dem Systeme verbundenen Punkt $m$ zu verfolgen.

Die Fortschreitung $MM_1$ bewirken wir durch die beiden anderen $MT_1$, $T_1 M_1$. Die Fortschreitung $MT_1$ führt die Gerade $MT$ in die Lage $T_1 T'$; die andere Fortschreitung $T_1 M_1$ bringt sie in die Lage $M_1 \mu$, wenn $T'\mu$ gleich und parallel mit $T_1 M_1$. Ziehe ich dann noch $\mu\mu'$ gleich und parallel mit $Tm$, so ist $\mu'$ die Lage von $m$ nach vollbrachter Fortschreitung. Vollführe ich nun die nothwendige Drehung um $M_1 J$, so beschreibt der Punkt $\mu'$ einen gewissen Kreisbogen $\mu' M'$ senkrecht auf der Ebene $JM_1\mu'$, dessen Radius die Senkrechte aus $\mu'$ auf die Axe $M_1 J$ ist. Nachdem diese Drehung vollbracht ist, so befinden sich alle Punkte in den Lagen, welche sie bei der wirklichen Bewegung nach der Zeit $\theta$ einnehmen; $M'$ ist die absolute Lage des Beweglichen, und folglich ist $T'M'$ die gesuchte Abweichung.

Das geschlossene Polygon $T'\mu\mu' M'$ zeigt, dass $T'M'$ die Resultante ist von den Linien $T'\mu$, $\mu\mu'$, $\mu' M'$, diese in den

Richtungen genommen, nach welchen sie von $T'$ aus durchlaufen werden. $T'\mu$ ist die parallel zu sich selbst versetzte Abweichung $T_1 M_1$; $\mu\mu'$ ist die ebenso versetzte Abweichung $Tm$. Was die dritte Linie $\mu' M'$ betrifft, so hat ihre Richtung zur Grenze die Senkrechte auf diejenige Ebene, welche geht durch die Grenzrichtung von $M_1 J$, also durch die augenblickliche Drehaxe, und durch die Grenzrichtung von $M_1 \mu'$, welche zugleich die Grenzrichtung von $M_1 \mu$, und zwar darum ist, weil $\mu\mu'$ unendlich klein von der zweiten und $M_1 \mu'$ von der ersten Ordnung. Folglich darf man die Linie $\mu' M'$ betrachten als senkrecht auf der Ebene, welche Parallelen enthält zu der augenblicklichen Drehaxe und zu der Richtung $MT$ der relativen Geschwindigkeit des Beweglichen.

Es ist wichtig, dass man bemerkt, dass der Sinn dieser Richtung der Sinn der augenblicklichen Drehung des Systems ist. Wollte man sie also betrachten als die Axe einer directen Drehung in der Ebene, auf welcher sie senkrecht steht, so würde diese Drehung von der augenblicklichen Axe gegen die Richtung der relativen Geschwindigkeit hin stattfinden.

Es bleibt uns nur noch übrig, das Maass der Grösse $\mu' M'$ zu finden. Bezeichnet $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems, $v_r$ die relative Geschwindigkeit, und $\delta$ den Winkel ihrer Richtung mit der augenblicklichen Drehaxe, so ist der Radius des durch $\mu'$ beschriebenen Kreisbogens $M_1 \mu' . \sin\delta$, wofür man $M_1 \mu . \sin\delta$ oder $\theta v_r \sin\delta$ setzen darf; der Mittelpunktswinkel ist $\theta\omega$, und folglich:

$$\mu' M' = \theta^2 \omega v_r \sin\delta.$$

Die Aufgabe ist jetzt vollständig gelöst, und das Resultat lässt sich so aussprechen:

Die Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung ist die Resultante von drei Linien. Davon sind die beiden ersten die Abweichungen in der relativen Bewegung des Punktes gegen das System, und in der Bewegung desjenigen Punktes vom System, welcher mit dem Beweglichen in dem betrachteten Augenblick coïncidirt. Die dritte Linie steht senkrecht auf einer Ebene, die parallel ist mit der augenblicklichen Axe des Systems und mit der relativen Geschwindigkeit des Punk-

tes, und sie hat den Sinn der augenblicklichen Drehung des Systems. Oder mit anderen Worten, sie hat die Richtung der Axe einer Bewegung, welche auf dem kürzesten Wege die Richtung der augenblicklichen Axe in die Richtung der relativen Geschwindigkeit des Punktes führt. Die Grösse dieser dritten Linie ist das Product des Quadrats der unendlich kleinen Zeit in die Winkelgeschwindigkeit des Systems und in die Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur augenblicklichen Axe senkrechte Ebene.

59. Wir haben gesehen, dass die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung nur abhängt von der relativen Geschwindigkeit gegen das System und von der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems. Aber die Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung ist durch die Abweichungen in den beiden componirenden Bewegungen noch nicht bestimmt. Sie würde es nur in dem Falle sein, wenn die Bewegung des Systems in einer blossen Fortschreitung bestände. Sobald aber auch eine Drehung stattfindet, so hat diese einen Einfluss, welcher unendlich klein von der zweiten Ordnung ist und darum nicht vernachlässigt werden darf.

60. Besondere Fälle. — 1) Reducirt sich die Bewegung des Systems auf eine Fortschreitung nach irgend einem Gesetz, so wird die Winkelgeschwindigkeit Null, und die dritte Componente fällt weg. In diesem Falle resultirt die Abweichung aus der Zusammensetzung der beiden Abweichungen, welche der relativen Bewegung und dem coïncidirenden Punkte des Systems angehören.

2) Geschieht die Fortschreitung in constanter Richtung und mit constanter Geschwindigkeit, so wird die Abweichung des coïncidirenden Punktes des Systems Null, und dann ist die Abweichung in der absoluten Bewegung identisch mit der Abweichung in der relativen Bewegung.

3) Reducirt sich die Bewegung des Systems auf eine Drehung um eine Axe, so beschreibt der coïncidirende Punkt des Systems einen Kreisbogen um diese Axe. Und geschieht diese Drehung gleichförmig, so ist die Abweichung dieses

Punktes nach dem Mittelpunkt seines Kreises gerichtet, und ist keine andere als die centripetale Abweichung.

61. Abweichung in der relativen Bewegung. — Aus dem Satze der Nr. 58 ziehen wir eine sehr wichtige Folgerung. Da man in jedem geschlossenen Polygone irgend eine Seite als die Resultante aller übrigen betrachten kann, so folgt, dass in dem Polygone $T'\mu\mu'M'$ die Linie $\mu\mu'$ die Resultante der drei vom Punkte $\mu$ aus durchlaufenen Linien $\mu T'$, $T'M'$, $M'\mu'$ ist. Bei dieser Bewegung wird die Abweichung $T'M'$ in ihrem wirklichen Sinne durchlaufen; aber die Abweichung $T_1M_1$ oder $T'\mu$ wird in dem entgegengesetzten Sinne genommen, und die Gerade $M'\mu'$ hat den entgegengesetzten Sinn von demjenigen, mit welchem sie in dem vorigen Falle zu nehmen war. Mit Rücksicht darauf hat man den folgenden wichtigen Lehrsatz:

Hat ein Punkt eine absolute Bewegung im Raume, und betrachtet man seine relative Bewegung gegen ein starres System, das selbst eine absolute Bewegung hat; d. h. betrachtet man die stetige Folge der Lagen, welche dieser Punkt in dem Systeme einnimmt, und welche ein Beobachter, der das System unbewegt glaubt, für absolute Lagen hält: so ist die Abweichung in der Bewegung auf dieser scheinbaren oder relativen Trajectorie die Resultante folgender drei Linien: 1) der Abweichung in der absoluten Bewegung; 2) der Abweichung in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems, diese Abweichung aber im entgegengesetzten Sinn genommen; 3) einer Linie, die gleich ist dem Product des Quadrats der unendlich kleinen Zeit in die Winkelgeschwindigkeit und in die Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur augenblicklichen Axe senkrechte Ebene. Diese dritte Linie steht senkrecht auf der durch diese Axe und die relative Geschwindigkeit gehenden Ebene, und ihre Richtung ist dem Sinne der augenblicklichen Drehung des Systems entgegengesetzt. Mit anderen Worten, sie ist die Axe einer Drehung, welche auf dem kürzesten

Wege die Richtung der relativen Geschwindigkeit in die Richtung der augenblicklichen Axe führt.

## Analytische Herleitung der vorstehenden Sätze.

62. Es wird nicht ohne Nutzen sein zu sehen, wie der Calcul zu den vorstehenden Sätzen führt.

Nehmen wir drei rechtwinklige Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$, die wir mit dem bewegten starren System fest verbinden; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ seien die Coordinaten ihres Ursprungs $O$. Zwischen den Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des beweglichen Punktes in Bezug auf diese Axen und seinen Coordinaten $x$, $y$, $z$ in Bezug auf feste Axen bestehen die bekannten Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Durch Differenziiren derselben erhält man:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x'\dfrac{da}{dt} + y'\dfrac{db}{dt} + z'\dfrac{dc}{dt} \\ \qquad + a\dfrac{dx'}{dt} + b\dfrac{dy'}{dt} + c\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x'\dfrac{da'}{dt} + y'\dfrac{db'}{dt} + z'\dfrac{dc'}{dt} \\ \qquad + a'\dfrac{dx'}{dt} + b'\dfrac{dy'}{dt} + c'\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x'\dfrac{da''}{dt} + y'\dfrac{db''}{dt} + z'\dfrac{dc''}{dt} \\ \qquad + a''\dfrac{dx'}{dt} + b''\dfrac{dy'}{dt} + c''\dfrac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Die ersten Seiten dieser Gleichungen sind die Componenten der absoluten Geschwindigkeit des Beweglichen, parallel mit den festen Axen.

Die vier ersten Summanden auf der zweiten Seite dieser Gleichungen sind die Werthe, welche $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ annehmen würden, wenn $x'$, $y'$, $z'$ constant wären; sie sind also die mit $X$, $Y$, $Z$ parallelen Componenten der Geschwindigkeit desjenigen Punktes vom System, welcher in dem betrachteten Augen-

blick mit dem Beweglichen zusammenfällt. Die mit $X'$, $Y'$, $Z'$ parallelen Componenten der relativen oder scheinbaren Geschwindigkeit des Beweglichen sind $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$; folglich stellen die drei letzten Summanden auf der zweiten Seite die Componenten dieser relativen Geschwindigkeit dar, parallel mit den festen Axen $X$, $Y$, $Z$. Somit hat man den schon geometrisch erkannten Satz:

Die Geschwindigkeit in der zusammengesetzten Bewegung eines Punktes ist die Resultante aus der Geschwindigkeit, welche dieser Punkt in Bezug auf das System hat, und aus der Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes vom Systeme.

Und daraus folgt:

Die relative Geschwindigkeit des Punktes ist die Resultante seiner absoluten Geschwindigkeit und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes vom System.

63. Zusatz zu Seite 12 des ersten Theils. — Trage ich vom Ursprung an auf der Richtung $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ eine Länge $q$ ab, und bezeichne ich die Coordinaten ihres Endpunktes durch $x'$, $y'$, $z'$, so ist:

$$x' = q\cos\alpha', \quad y' = q\cos\beta', \quad z' = q\cos\gamma',$$

und die Formeln (1) (auf derselben Seite) werden:

$$yz' - zy' = pq\cos\lambda, \quad zx' - xz' = pq\cos\mu, \quad xy' - yx' = pq\cos\nu.$$

Da nun $p$ die Länge der Senkrechten bedeutet, welche vom Ursprung gefällt ist auf diejenige Parallele zu der Richtung $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, welche durch den in der Richtung $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ genommenen Punkt $x$, $y$, $z$ geht, so stellt $pq$ den Inhalt des Parallelogramms dar, dessen Seiten die Geraden vom Ursprung nach den Punkten $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$ sind. Bezeichne ich diese Fläche durch $P$, so habe ich also die drei Gleichungen:

$$(A) \quad P\cos\lambda = yz' - zy', \quad P\cos\mu = zx' - xz', \quad P\cos\nu = xy' - yx',$$

in welchen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ der Axe einer Fläche angehören, die durch einen vom Ursprung ausgehenden Radius beschrieben wird, der sich auf dem kürzesten Wege von dem Punkte $x$, $y$, $z$ gegen $x'$, $y'$, $z'$ hin bewegt. Und nehme ich noch auf der Richtung dieser Axe die Länge $P$, so stellen die vorstehen-

den Ausdrücke in Grösse und Zeichen die Projectionen dieser Länge auf den Coordinatenaxen dar.

64. Durch nochmaliges Differenziiren der Gleichungen (2) erhält man:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2b}{dt^2} + z'\frac{d^2c}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2} + c\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc}{dt}\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + x'\frac{d^2a'}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2c'}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a'\frac{d^2x'}{dt^2} + b'\frac{d^2y'}{dt^2} + c'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc'}{dt}\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\frac{d^2a''}{dt^2} + y'\frac{d^2b''}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}\right)\\
&\quad + \left(a''\frac{d^2x'}{dt^2} + b''\frac{d^2y'}{dt^2} + c''\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Multiplicire ich diese Gleichungen mit $\frac{\theta^2}{2}$, so werden ihre ersten Seiten die mit den Axen $X$, $Y$, $Z$ parallelen Componenten der Abweichung, welche in der absoluten Bewegung des Punktes der unendlich kleinen Zeit $\theta$ entspricht.

Untersuchen wir jetzt die drei Theile, in welche wir die zweiten Seiten zerfällt haben. Der erste Theil drückt die Werthe aus, welche respective $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ annehmen, wenn man $x'$, $y'$, $z'$ constant lässt. Nach der Multiplication mit $\frac{\theta^2}{2}$ sind also die ersten Theile die Componenten der Abweichung desjenigen Punktes vom System, welcher mit dem Beweglichen coïncidirte. Die zweiten Theile sind die mit den Axen $X$, $Y$, $Z$ parallelen Componenten der Abweichung in der relativen Be-

wegung. Es handelt sich also nur noch darum, die dritten Theile zu interpretiren und zu sehen, von welcher Linie sie die Componenten parallel mit $X$, $Y$, $Z$ sind.

Bilden wir deshalb die Componenten dieser gesuchten Linie parallel mit $X'$, $Y'$, $Z'$; was dadurch geschieht, dass man die Projectionen der alten Componenten auf diese neuen Axen addirt. Dies liefert bis auf den Factor $\theta^2$ folgende drei Ausdrücke:

$$(4) \qquad q\frac{dz'}{dt} - r\frac{dy'}{dt},\ r\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt},\ p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt};$$

und es ist die Linie zu bestimmen, von welcher sie die Projectionen auf $X'$, $Y'$, $Z'$ sind.

Nun lehren uns aber die Formeln (A) der Nr. 63, dass wenn man durch den Punkt $O$ zwei Geraden $OJ$, $OV$ zieht, deren Componenten für die erste $p$, $q$, $r$ und für die zweite $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ parallel mit $X'$, $Y'$, $Z'$ sind, dass dann die Ausdrücke (4) die Projectionen des aus diesen beiden Linien construirten Parallelogramms auf den Ebenen der Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ darstellen: sie sind deshalb proportional mit den Cosinus der Winkel, welche die Axe dieser Fläche mit $X'$, $Y'$, $Z'$ macht, und ihre Zeichen beziehen sich auf die Richtung der Axe der Drehung, welche $OJ$ auf dem kürzesten Wege nach $OV$ führt.

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist gleich dem Product seiner zwei Seiten in den Sinus ihres Winkels: so dass die Linie, deren Projectionen die Ausdrücke (4) darstellen, und welche die Richtung der Axe der eben definirten Drehung hat, gleich $\omega v_r \sin\delta$ ist, wenn $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems, $v_r$ die relative Geschwindigkeit des Beweglichen und $\delta$ den Winkel ihrer Richtung mit der augenblicklichen Axe bezeichnet. Multiplicirt man diesen Werth mit $\theta^2$, so erhält man für die dritte Componente der Abweichung in der absoluten Bewegung des Punktes den schon gefundenen Werth:

$$\theta^2 \omega v_r \sin\delta.$$

Somit hat man den Satz der Nr. 58 und folgeweise auch den Satz der Nr. 61.

Bemerkung. — Ist die Bewegung des starren Systems

bekannt, d. h. sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ gegebene Functionen der Zeit, so kennt man mit der absoluten Bewegung des Punktes auch seine relative Bewegung, und umgekehrt. Denn in der That, sind $x$, $y$, $z$ bekannte Functionen von $t$, so geben die Gleichungen (1) die Grössen $x'$, $y'$, $z'$; und umgekehrt geben sie $x$, $y$, $z$, wenn man $x'$, $y'$, $z'$ als Functionen von $t$ kennt.

Kennt man blos eine der beiden Trajectorien, die absolute oder die relative, so findet man aus ihr leicht die andere. Sind z. B. die beiden Gleichungen zwischen $x$, $y$, $z$ gegeben, welche die absolute Trajectorie des Beweglichen bestimmen, so braucht man nur $x$, $y$, $z$, $t$ zwischen diesen und den Gleichungen (1) zu eliminiren, und man erhält dadurch zwei Gleichungen zwischen $x'$, $y'$, $z'$, welche die der relativen Trajectorie sind. Ebenso verfährt man, um die Gleichungen der absoluten Trajectorie zu finden, wenn die Gleichungen der relativen Trajectorie gegeben sind.

Es ist leicht, diese Betrachtungen dadurch zu verallgemeinern, dass man statt des Punktes ein starres System nimmt, dessen Bewegung durch drei seiner Punkte bestimmbar ist. Die relative Bewegung lässt sich stets aus der absoluten finden, und umgekehrt. Wir können aber hier nicht näher darauf eingehen.

## Andere Betrachtung der relativen Bewegung.

65. Im Vorhergehenden haben wir die relative Bewegung als eine der Bewegungscomponenten eines Körpers oder materiellen Punktes betrachtet. Wir haben untersucht, wie die Bestimmungsstücke dieser Bewegung dazu dienen können, die Geschwindigkeit und Abweichung in der zusammengesetzten Bewegung zu bestimmen; und daraus haben wir umgekehrt den Ausdruck dieser Grössen in der relativen Bewegung abgeleitet.

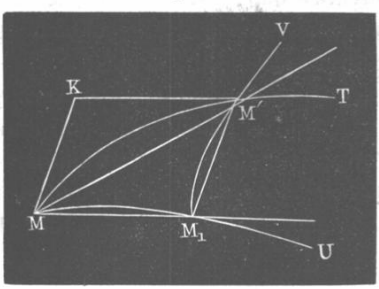
Man kann aber auch die relative Bewegung direct betrachten, und dabei auf mehre Weisen verfahren. Der Weg, den wir einschlagen werden, ist derjenige, dessen allgemeiner Gedanke sich bei den verschiedensten Aufgaben wiederholt, und er führt am natürlichsten auf die Betrachtung der absoluten Bewegung zurück.

Wir denken uns nämlich die beiden absoluten Bewegungen ausgeführt, verbinden darauf den Punkt oder Körper mit dem System, gegen welches seine relative Bewegung untersucht wird, und ertheilen ihrem Ganzen eine Bewegung, welche das System in seine alte Lage zurückbringt.

Indem wir diese neue Bewegung hinzufügen und die resultirende absolute Bewegung suchen, so ist diese letzte genau die fragliche relative Bewegung gegen das System. Dies ist die schon lange befolgte Methode, welche wir auf die beiden Hauptaufgaben bei der Bewegung eines Punktes anwenden werden.

66. Geschwindigkeit in der relativen Bewegung. — Es sei $M$ eine Lage des Beweglichen, $M'$ die Lage nach einer unendlich kleinen Zeit, $M_1$ die Lage, welche nach dieser Zeit der Punkt des Systems einnimmt, der mit dem Beweglichen in $M$ coïncidirte. Verbinden wir diese Punkte durch Geraden und ergänzen das Parallelogramm $MM_1M'K$. Betrachten wir jetzt den Punkt $M'$ als mit dem Systeme verbunden, und führen wir dieses in seine alte Lage zurück. Dazu brauchen wir nur dem Ganzen eine Fortschreitung zu ertheilen, welche $M_1$ nach $M$ und $M'$ nach $K$ führt, und dann eine Drehung um $M$, welche die neue Lage des Punktes $M'$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung alterirt, da $MK$ von der ersten Ordnung ist. Wir können also diese Grösse vernachlässigen und annehmen, dass $M'$ in $K$ bleibt. Nun haben die Richtungen der drei Geraden $MK$, $MM'$, $MM_1$ zu Grenzen die Tangenten an der relativen und der absoluten Trajectorie des Beweglichen und an der Trajectorie des coïncidirenden Punktes des Systems, und die Grenzen der Verhältnisse dieser drei Geraden sind die Verhältnisse der Geschwindigkeiten auf diesen Trajectorien. Daraus folgt, wie vorher:

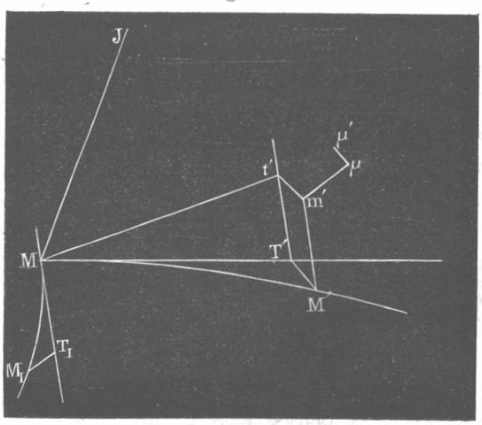
Fig. 16.



Die relative Geschwindigkeit ist die Resultante der absoluten Geschwindigkeit und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des coïncidirenden Punktes des Systems.

67. Abweichung in der relativen Bewegung. — Die zu berechnende Grösse ist von der zweiten Ordnung; wir

Fig. 17.




können also nicht mehr die Drehung vernachlässigen, da diese eine Grösse zweiter Ordnung einführt.

Es sei $M$ die Lage des Beweglichen in einem gewissen Augenblick, $M'$ seine Lage nach einer unendlich kleinen Zeit $\theta$, und $T'$ die Lage, welche dann auf der Tangente ein Punkt einnehmen würde, der von $M$ zugleich mit dem Beweglichen ausginge und sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit bewegte, welche dieses in $M$ hat; $T'M'$ ist die Abweichung in der absoluten Bewegung. $T_1 M_1$ sei die Abweichung nach der Zeit $\theta$ in der Bewegung desjenigen Punktes des Systems, welcher mit dem Beweglichen in $M$ coïncidirte. Die Längen $MT'$, $MT_1$ sind den Geschwindigkeiten in $M$ auf den beiden Trajectorien proportional.

Um nun die Abweichung in der relativen Bewegung zu erhalten, könnte man in $M$ die Tangente an die relative Trajectorie führen, auf ihr einen Punkt sich gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit während der Zeit $\theta$ bewegen lassen,

während sie mit dem Systeme sich bewegt, mit welchem sie fest verbunden ist, und dann müsste man diesen Punkt in der Lage, in welche er auf diese Weise gekommen ist, mit $M'$ verbinden: die gerade Verbindungslinie wäre in Grösse und Richtung die Abweichung in der relativen Bewegung.

Dieses vorausgeschickt, betrachten wir den Punkt $M'$ als mit dem System verbunden, und führen dieses in seine anfängliche Lage zurück; die relative Abweichung wird dadurch in eine leicht zu bestimmende Lage gebracht.

Ertheilen wir zuerst dem System die beiden Fortschreitungen $M_1 T_1$ und $T_1 M$, welche den Punkt $M_1$ in seine alte Lage $M$ zurückbringen. Ziehe ich $M' m'$ gleich und parallel mit $T_1 M$, $m' \mu$ gleich und parallel mit $M_1 T_1$, so erhalte ich $\mu$ als die Lage von $M'$ nach den beiden Fortschreitungen.

Darauf muss man das System um die durch $M$ gehende augenblickliche Axe mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ während der Zeit $\theta$ zurückdrehen, wobei der Punkt $\mu$ einen unendlich kleinen Bogen $\mu \mu'$ beschreibt, den wir sogleich bestimmen werden; $\mu'$ ist also die Lage des Beweglichen, wenn das System in seine alte Lage zurückgekehrt ist.

In dieser alten Lage befindet sich die Tangente an der relativen Trajectorie in der Richtung $Mt'$, und zugleich ist die Länge $Mt'$ der gleichförmig mit der relativen Geschwindigkeit während der Zeit $\theta$ durchlaufene Weg, während welcher Zeit auch die Längen $MT'$ und $MT_1$ gleich $T't'$ auf den Tangenten der beiden anderen Trajectorien durchlaufen werden; woraus folgt, dass die relative Abweichung $t'\mu'$ ist.

Aber $t'\mu'$ ist die Resultante der drei Linien $t'm'$ oder $T'M'$, $m'\mu$ oder $M_1 T_1$ und $\mu\mu'$. Die erste von ihnen ist die Abweichung in der absoluten Bewegung; die zweite die entgegengesetzt genommene Abweichung in der Bewegung des coïncidirenden Punktes des Systems.

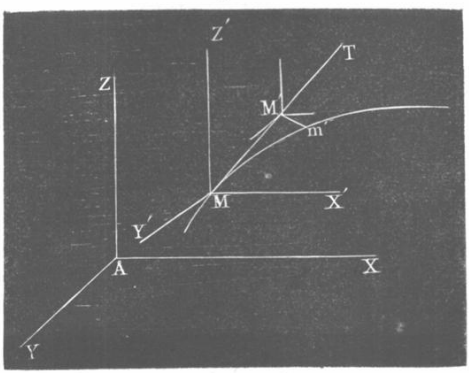
Was die dritte Linie $\mu\mu'$ betrifft, die durch den Punkt $\mu$ beim Drehen um die augenblickliche Axe $MJ$ beschrieben wird, so kann man dieselbe ersetzen durch jene, welche der Punkt $t'$ beschreibt, der von $\mu$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung entfernt ist. Ihre Richtung ist also senkrecht auf der Ebene $JMt'$, welche durch die augenblickliche Axe und die relative Geschwindigkeit geht, und sie muss

im Sinne der oben angegebenen Drehung genommen werden. Ihre Länge ist das Product des Drehungswinkels $\omega\theta$ in den Abstand des Punktes $t'$ von $MJ$, welcher gleich ist dem Product aus $Mt'$ und $\sin JMt'$; und da $Mt' = \theta v_r$, wenn $v_r$ die relative Geschwindigkeit bezeichnet, so hat der Bogen $\mu\mu'$ zum Ausdruck $\theta^2 \omega v_r \sin JMt'$ mit Vernachlässigung der Unendlich-Kleinen von höherer Ordnung. Somit haben wir den Satz der Nr. 61 wieder gefunden.

---

68. Richtung und Grösse der Kraft nach der hervorgebrachten Bewegung. — Betrachten wir irgend eine Lage $M$ eines Punktes von der Masse $m$, dessen Coordi-

Fig. 18.




naten $x$, $y$, $z$ bestimmte Functionen der Zeit $t$ sind. Wenn die Kraft, welche auf ihn wirkt, von diesem Augenblicke an zu wirken aufhörte, so würde er sich auf der Tangente $MT$ bewegen mit der Geschwindigkeit $v$, die er in $M$ hat. Nehmen wir daher drei Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ an, welche stets mit den festen parallel bleiben, und deren Ursprung auf $MT$ mit der constanten Geschwindigkeit $v$ fortschreitet, so wird die Bewegung des Punktes $m$ in Bezug auf diese Axen identisch sein mit derjenigen Bewegung, welche dieser Punkt gegen feste Axen haben würde, wenn er sich ohne Geschwindigkeit in ihrem Ursprung befände, und dieselbe Kraft auf ihn wirkte. Die relative Bewegung des Punktes ist seine abweichende Bewegung, und die gerade Linie $M'm'$, welche er dabei beschreibt, ist seine Abweichung. Wenn also der Punkt in $M$ keine Geschwindigkeit hätte, aber dieselbe Kraft wie bei der wirklichen Bewegung auf ihn wirkte, so würde er in unend-

lich kleiner Zeit eine mit der Abweichung gleiche und parallele Linie gleichförmig accelerirt beschreiben. Daraus ergeben sich die beiden nachstehenden Sätze:

1) Die Richtung der Kraft, welche in irgend einem Augenblicke auf das freie Bewegliche wirkt, ist die Richtung der Abweichung in diesem Punkt.

2) Die Intensität dieser Kraft, auf die Einheit der Masse bezogen, wird gemessen durch die Acceleration in der abweichenden Bewegung.

Aus dem ersten folgt ein anderer wichtiger Satz:

Die Richtung der Kraft in jedem Punkte der Trajectorie ist enthalten in der Krümmungsebene dieser Curve für diesen Punkt, denn die Abweichung, da sie stets einen Punkt der Curve und einen Punkt der Tangente verbindet, hat zur Grenzrichtung eine Gerade, welche in dieser Ebene liegt.

Die Richtung der Abweichung macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus den Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ proportional sind; und die Acceleration in der abweichenden Bewegung hat den Werth $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$. Wenn wir daher durch $\varphi$ die beschleunigende Kraft bezeichnen, welche auf das Bewegliche wirkt, so haben wir:

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2};$$

und die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen bildet, sind:

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Daher sind die Componenten der beschleunigenden Kraft in Grösse und Zeichen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Durch Multipliciren mit $m$ erhält man die bewegende Kraft und ihre Componenten.

69. Tangentiale und normale Componente der Kraft. — Die tangentiale Componente der Acceleration in

der abweichenden Bewegung ist $\frac{d^2 s}{dt^2}$, und die normale Componente $\frac{v^2}{R}$. Die beschleunigende Kraft und die Acceleration haben einerlei Richtung und einerlei Maass. Also ist auch $\frac{d^2 s}{dt^2}$ die tangentiale Componente der beschleunigenden Kraft und $\frac{v^2}{R}$ ihre nach dem Mittelpunkt der Krümmung gerichtete normale Componente oder die Centripetalkraft. Die entsprechenden Componenten der bewegenden Kraft für die Masse $m$ sind $m\frac{d^2 s}{dt^2}$, $m\frac{v^2}{R}$.

70. Bewegung durch eine die Trajectorie beständig tangirende Kraft. — In irgend einer Lage des Beweglichen sind die Cosinus der Winkel, welche die Kraftrichtung mit den Axen bildet, proportional mit $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$; und nach der Voraussetzung sollen diese Winkel denjenigen Winkeln gleich sein, welche die in diesem Punkt an die Trajectorie gezogene Tangente mit den Axen bildet, und deren Cosinus proportional sind mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Man hat also die Gleichungen:

$$\frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)}.$$

Diese geben durch Integriren, wenn man mit $c$, $c'$, $c''$ drei willkürliche Constanten bezeichnet:

$$log\ c\,\frac{dx}{dt} = log\ c'\,\frac{dy}{dt} = log\ c''\,\frac{dz}{dt},$$

folglich:

(1) $$c\,\frac{dx}{dt} = c'\,\frac{dy}{dt} = c''\,\frac{dz}{dt}.$$

Integrirt man neuerdings und bezeichnet durch $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ drei neue willkürliche Constanten, so kommt:

(2) $$cx + \alpha = c'y + \alpha' = c''z + \alpha''.$$

Da also die Coordinaten des Beweglichen zweien Gleichungen

ersten Grades genügen, so folgt, dass die Trajectorie eine Gerade ist.

Die Anfangslage des Beweglichen ist ein Punkt dieser Geraden. Die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit bestimmen vermöge (1) die Verhältnisse der Coëfficienten $c$, $c'$, $c''$. Die Gerade ist folglich bestimmt, da man ihre Richtung und einen ihrer Punkte kennt.

71. Bewegung durch eine zur Trajectorie beständig normale Kraft. — Die bekannte Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Geraden auf einander giebt unmittelbar:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Die erste Seite, verdoppelt, ist die Ableitung von:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

oder von $v^2$, wenn $v$ die Geschwindigkeit, wie immer, bezeichnet. Bedeutet daher $v_0$ ihren Anfangswerth, so hat man:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v_0{}^2.$$

Um die Bewegung zu bestimmen, wären noch zwei Gleichungen nothwendig; uns kam es aber blos darauf an, den nachstehenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Wenn die Richtung der Kraft, welche einen materiellen Punkt angreift, immer auf seiner Trajectorie normal steht, so ist die Bewegung dieses Punktes gleichförmig.

Anmerkung. — Die Resultate der zwei letzten Nummern kann man auch aus den Formeln für die tangentiale und normale Componente der Kraft ableiten.

In der That, tangirt diese Kraft beständig die Trajectorie, so ist ihre Normalcomponente Null, also in jedem Punkte $\frac{v^2}{R}$ $=0$ oder $R=\infty$. Die Linie ist daher gerade, weil ihr Krümmungsradius in jedem Punkte unendlich.

Und steht die Kraft immer normal, so ist ihre Tangentialcomponente $\frac{d^2s}{dt^2}$ immer Null, folglich $\frac{ds}{dt}$, oder die Geschwindigkeit, constant.

72. Bewegung durch eine gegen den Radius vector senkrechte Kraft. — Betrachten wir noch den Fall, wo die Kraft senkrecht steht auf einer, durch einen festen Punkt gehenden Linie. Dies findet z. B. statt für einen Punkt, der auf einer Geraden bleiben muss, die sich nach irgend einem Gesetz um einen ihrer Punkte dreht, und deren normaler Druck die einzige auf den Punkt wirkende Kraft ist.

Die gegebene Bedingung wird dann ausgedrückt durch die Gleichung:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Setzen wir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

daraus folgt:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = r\frac{dr}{dt}.$$

Durch nochmaliges Differenziiren kommt:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$= r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

und diese Gleichung reducirt sich vermöge der ersten auf:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Nennt man $\omega$ den vom Radius vector im Raume beschriebenen Winkel, so hat man:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2.$$

Und setzt man diesen Werth von $ds^2$ in die vorige Gleichung, so wird diese zu:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Wenn das Gesetz der Winkelbewegung durch eine Gleichung zwischen $\omega$ und $t$ gegeben wird, so kann man aus dieser Gleichung $\omega$ und aus der vorstehenden $r$ als Function von $t$ bestimmen. Die Grösse von $r$ hängt nur von der Beziehung zwischen $\omega$ und $t$ ab, und nicht von der Leitlinie des Kegels, welchen die Gerade durch ihre Drehung beschreibt. Würde man z. B. die Kegelfläche durch Abwickeln zu einer Ebene machen, so würde der bewegliche Punkt, bei demselben Ge-

setze zwischen $\omega$ und $t$, in dieser Ebene die abgewickelte Curve durchlaufen.

## Arbeit einer Kraft. — Lebendige Kraft.

73. Um zu begreifen, wie man zu der Bezeichnung Arbeit gekommen ist, denken wir uns, man lasse durch Menschen in gerader Linie und mit gleichförmiger Bewegung Erz aus der Tiefe eines Schachts auf die Oberfläche emporheben. Jeder von diesen Menschen wird beständig eine dem Gewicht des Körpers, den er hebt, gleiche Anstrengung machen; die Zeit, während welcher man ihn anwenden muss, wird proportional sein dem Totalgewichte, das er heben, und der Höhe, auf welche er es heben soll. Also wird das, was man gewöhnlich die Arbeit eines dieser Menschen nennt, und folglich auch die Ausgabe, eine Grösse sein, welche proportional ist diesem Gewichte und der Höhe, d. h. proportional der verticalen Kraft, welche wirkt, und der Strecke, um welche ihr Angriffspunkt sich hebt.

Betrachtungen dieser Art sind es, welche veranlasst haben, dass man den Namen Arbeit einer Kraft dem Producte dieser Kraft in den Weg giebt, welcher ihr Angriffspunkt durchläuft, wenn er in der Richtung der Kraft verrückt wird.

In dem weniger einfachen Falle, wo der Angriffspunkt der Kraft sich nicht in der Richtung dieser Kraft bewegt, hat man erkannt, dass der hervorgebrachte Nutzen und die verursachte Ausgabe proportional sind dem Producte der Kraft in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt im Sinne der Kraft durchläuft, oder proportional dem Producte der Kraft in die Projection des Wegs auf die Kraftrichtung. Man giebt diesem Product allgemein den Namen Arbeit der Kraft.

Nach dieser Definition wird die Arbeit durch die Zahl 1 gemessen, wenn die Kraft der Einheit gleich ist, und ihr Angriffspunkt die Längeneinheit im Sinne der Kraft zurücklegt. Die Einheit der Arbeit ist also diejenige Arbeit, welche dem Gewichte 1 Kilogramm entspricht, das um 1 Meter vertical gehoben wird.

Die Arbeit einer Kraft ist positiv, wenn die Projection

des Wegs die Richtung der Kraft hat, oder wenn der Weg einen spitzen Winkel mit dieser Richtung macht. Im entgegengesetzten Falle, also wenn dieser Winkel stumpf wird, ist die Arbeit negativ. Sie ist Null, wenn der Winkel recht ist, d. h. wenn der Punkt sich weder im Sinne der Kraft noch im entgegengesetzten Sinne bewegt.

Wenn die Kraft nicht constant ist, so muss man, um die hervorgebrachte Arbeit nach der vorigen Definition zu berechnen, die Bewegung in unendlich kleine Theile zerlegen, denn innerhalb eines solchen Intervalls darf man die Kraft als constant betrachten. Die totale Arbeit ist die Summe der elementaren Arbeitsgrössen, also das zwischen den beiden Grenzen genommene Integral $\int P ds \cos\varphi$, worin $P$ die variable Kraft, $ds$ das Element der beschriebenen Curve und $\varphi$ den Winkel der Richtung der Bewegung mit der Richtung der Kraft $P$ bezeichnet.

Auf diese Weise verstehen wir immer in Richtung und Grösse die elementare oder endliche Arbeit irgend einer Kraft.

74. Neuer Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. — Wie man sieht, ist das virtuelle Moment einer Kraft von derjenigen elementaren Arbeitsgrösse dieser Kraft nicht verschieden, welche der virtuellen Verrückung ihres Angriffspunktes entspricht. Man kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in nachstehende Fassung bringen:

Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewicht ist, so wird die algebraische Summe der Arbeitsgrössen aller Kräfte Null bei jeder unendlich kleinen, mit den Verbindungen des Systems verträglichen Verrückung.

Und wenn umgekehrt diese Summe Null wird bei allen möglichen Verrückungen, so ist das System im Gleichgewicht.

75. Arbeit der Resultante von beliebigen Kräften. — Kräfte, welche ein starres System angreifen und eine Resultante haben, werden in das Gleichgewicht gebracht, wenn man eine mit dieser Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft einführt. Die Summe der virtuellen Arbeitsgrössen wird dann Null, folglich ist die virtuelle Arbeit der Hülfskraft, mit Ausnahme des Zeichens, gleich der Summe der Ar-

beiten der gegebenen Kräfte. Da nun die Hülfskraft und die Resultante gleich und entgegengesetzt sind, also gleiche und entgegengesetzte Arbeitsgrössen geben, so kommt man zu nachstehender Folgerung:

Die Arbeit der Resultante von Kräften, welche ein starres System angreifen, ist in Grösse und Zeichen gleich der Summe der Arbeiten der Componenten bei jeder unendlich kleinen Verrückung dieses Systems.

Die Kräfte werden dabei als positiv betrachtet. Oft ist es aber nützlich die Componenten der Kräfte parallel mit den Coordinatenaxen einzuführen, und dann erhält man mit positiven und negativen Kräften zu thun. Auf Seite 124 des ersten Theils ist gezeigt, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ die, positive oder negative, elementare Arbeitsgrösse einer Kraft mit den, positiven oder negativen, Componenten $X$, $Y$, $Z$ ist, wenn $dx$, $dy$, $dz$ die, positiven oder negativen, Componenten der Verrückung des Angriffspunktes sind.

76. Lebendige Kraft. — Betrachten wir zuerst die geradlinige Bewegung eines Punktes von der Masse $m$, auf welchen eine bewegende Kraft $F$ wirkt. Man hat die Gleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F.$$

Die elementare Arbeit dieser Kraft, welche dem Wege $dx$ entspricht, ist $Fdx$; und die vorstehende Gleichung giebt:

$$(1) \qquad Fdx = m \frac{d^2 x}{dt^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\, d.mv^2,$$

wenn $v$ die Geschwindigkeit oder $\frac{dx}{dt}$ bezeichnet. Man sieht also, dass der unendlich kleine Zuwachs der Arbeit der Kraft gleich ist dem halben Zuwachse der Grösse $mv^2$. Man nennt diese Grösse $mv^2$ die lebendige Kraft des Beweglichen.

Die Gleichung (1) lässt sich jetzt in folgender Weise aussprechen:

In der geradlinigen Bewegung eines freien Punktes ist die elementare Arbeitsgrösse der wirkenden Kraft gleich dem halben zugehörigen Incremente der lebendigen Kraft dieses Punktes.

Variirt die Kraft $F$ auf irgend eine Weise mit der Lage des Punktes und auch mit der Zeit, so bleibt der vorstehende Satz immer wahr für die unendlich kleinen Intervalle, in welche man die Bewegung zerspalten kann. Bezeichnen $v_0$ und $v$ die Werthe der Geschwindigkeit zu Anfang und Ende eines endlichen Intervalls, so erhält man durch Summiren der Gleichungen (1), welche sich auf alle Elemente dieses Intervalls beziehen:

$$(2) \qquad {}^1/_2 m v^2 - {}^1/_2 m v_0{}^2 = \int F dx.$$

Man kann die Summe $\int$ ausführen, wenn $F$ nur von $x$ abhängt; und bezeichnet man in diesem Falle durch $\varphi(x)$ diejenige Function, von welcher $F$ die Ableitung ist, und durch $x_0$ und $x$ die extremen Werthe der Abscisse, so wird die vorstehende Gleichung

$$^1/_2 m v^2 - {}^1/_2 m v_0{}^2 = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

In allen möglichen Fällen ist aber $\int F dx$ die Summe der in allen unendlich kleinen Intervallen hervorgebrachten, positiven oder negativen, Arbeitsgrössen und folglich die in dem endlichen Intervall hervorgebrachte totale Arbeit, also kann man die Gleichung (2) so aussprechen:

In der geradlinigen Bewegung eines freien materiellen Punktes ist die Arbeit der Kraft in irgend einem Intervall gleich dem halben entsprechenden Zuwachse der lebendigen Kraft des Beweglichen.

77. Beziehung zwischen der lebendigen Kraft und Arbeit in der allgemeinen Bewegung eines Punktes. — 1. Denken wir uns zuerst den Punkt frei und eine bewegende Kraft $F$ auf ihn wirkend, deren Componenten parallel mit den Axen $X, Y, Z$ seien. Die Gleichungen seiner Bewegung sind, wenn $m$ seine Masse bezeichnet:

$$(1) \qquad m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \; m \frac{dy^2}{dt^2} = Y, \; m \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Nun ist $Xdx + Ydy + Zdz$ nach Nro. 75 die Arbeit der Kraft $F$ für eine Verrückung, welche die Componenten $dx$, $dy$, $dz$ hat. Durch Multipliciren der Gleichungen (1) respective mit $dx$, $dy$, $dz$ und Addiren erhält man:

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)$$

oder:

(2) $$Xdx + Ydy + Zdz = {}^1/_2\, d\,.\,mv^2.$$

Das erste Glied ist die Arbeit der Kraft $F$ oder die algebraische Summe der Arbeitsgrössen der Kräfte, von denen $F$ die Resultante ist. Die Gleichung (2) drückt also den nachstehenden Satz aus:

In der Bewegung eines freien Punktes ist die Summe der elementaren Arbeitsgrössen aller Kräfte, welche ihn angreifen, gleich dem halben zugehörigen Incremente der lebendigen Kraft des Beweglichen.

Da diese Gleichheit für jedes unendliche kleine Intervall stattfindet, so besteht sie für irgend eine Summe solcher Intervalle, also für ein endliches Intervall; woraus der Satz folgt:

Die Summe der Arbeitsgrössen aller Kräfte, welche einen freien materiellen Punkt angreifen, während irgend einer endlichen Zeit, ist gleich dem halben Zuwachse der lebendigen Kraft dieses Punktes während desselben Intervalls.

Wenn die totalen Componenten $X, Y, Z$ die partiellen Ableitungen einer und derselben Function $\varphi(x,y,z)$ sind, so wird der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ gleich $d\,.\,\varphi(x,y,z)$, und die Gleichung (2) wird integrabel.

Bezeichnen $x_0$, $y_0$, $z_0$, $v_0$ die Werthe von $x$, $y$, $z$, $v$ zu Anfang des beliebigen Intervalls, das man betrachtet, so giebt die Gleichung (2), wenn man sie bis zu irgend einer, den Coordinaten $x$, $y$, $z$ entsprechenden Grenze integrirt:

(3) $${}^1/_2\, mv^2 - {}^1/_2\, mv_0{}^2 = \varphi(x,y,z) - \varphi(x_0,y_0,z_0).$$

2. Denken wir uns jetzt, der Punkt sei genöthigt auf einer festen Curve oder Fläche zu bleiben, an welcher er sich nicht reibt, und die folglich nur eine zu seiner Trajectorie normale Kraft ausübt. $X, Y, Z$ sollen wieder die totalen Componenten aller äusseren Kräfte bezeichnen, welche auf den Punkt wirken.

Führt man zu diesen Kräften diejenige ein, welche die Curve oder Fläche ausübt, so darf man den Punkt als frei betrachten, und folglich die Gleichung (2) anwenden, indem

man diese normale Kraft unter allen denjenigen einbegreift, welche in das erste Glied eingehen. Nun ist aber die elementare Arbeit einer zur Trajectorie normalen Kraft Null, weil die Projection des unendlich kleinen Bogens auf die Normale Null ist. Es bleibt daher in dem ersten Gliede nur die Arbeit der äusseren Kräfte, und man hat also auch in diesem Falle:

(4) $$Xdx + Ydy + Zdz = {}^1/_2 d.mv^2;$$

und wenn:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d.\varphi(x, y, z),$$

so folgt:

(5) $${}^1/_2 mv^2 - {}^1/_2 mv_0^2 = \varphi(x,y,z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Demnach ist die Beziehung zwischen der Arbeit der äusseren Kräfte und der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes dieselbe, ob der Punkt frei ist oder sich auf einer festen Curve oder Fläche ohne Reibung bewegt.

Wenn die Schwere die einzige äussere Kraft ist, so wird:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg,$$

und die Gleichung (5) liefert:

$${}^1/_2 mv^2 - {}^1/_2 mv_0^2 = mg(z_0 - z).$$

## Von den Kräften, welche die relative Bewegung eines Punktes hervorbringen können.

78. Die Aufgabe, welche wir uns stellen, ist diese:

Gegeben sind die Kräfte und alle Bedingungen, durch welche die absolute Bewegung eines materiellen Punktes bestimmt ist; gegeben ist ferner die absolute Bewegung eines starren Systems: man soll finden die Kräfte und alle Bedingungen, welche eine absolute Bewegung dieses Punktes bestimmen würden, die identisch wäre mit seiner relativen Bewegung gegen das System.

Wir wollen also die Betrachtung der relativen Bewegung zurückführen auf die einfachere Betrachtung der absoluten Bewegung; und wir suchen, wie man die Bestimmungsstücke der absoluten Bewegung des Punktes modificiren muss, damit die daraus hervorgehende absolute Bewegung identisch sei mit derjenigen Bewegung, welche dieser Punkt in Bezug auf das System hat.

Wenn $AX$, $AY$, $AZ$ drei feste Coordinatenaxen und $A'X'$, $A'Y'$, $A'Z'$ drei mit dem System fest verbundene Axen sind, so wird, indem wir die Lagen des Punktes auf beide Axen beziehen, seine absolute Bewegung bestimmt durch die successiven Werthe von $x, y, z$, und seine relative Bewegung durch die successiven Werthe von $x', y', z'$.

Der gegebene Anfangszustand des Punktes und des Systems bestimmt den relativen Anfangszustand, d. h. die Anfangswerthe von $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$.

Somit kennt man schon den Anfangszustand des Punktes in der absoluten Bewegung, die identisch sein würde mit seiner relativen Bewegung. Es bleibt also nur die beschleunigende Kraft zu bestimmen, welche man in jedem Augenblick an dem Punkt in dieser absoluten Bewegung anbringen muss.

Wir wissen, wie in jeder absoluten Bewegung die beschleunigende Kraft in Richtung und Grösse durch die Abweichung bestimmt wird. Wenden wir diese Regel auf die relative Abweichung des Punktes an, welche die Abweichung in der gesuchten absoluten Bewegung ist, so lernen wir diejenige Kraft kennen, welche auf den in einem identischen Anfangszustand mit seinem relativen Anfangszustand befindlichen Punkt wirken müsste, damit dieser eine absolute Bewegung erhielte, die identisch wäre mit seiner relativen Bewegung. Diese Kraft werden wir mit dem Namen relative Kraft bezeichnen. Um sonach die Lösung unserer Aufgabe zu erhalten, brauchen wir uns nur die in Nr. 61 angegebene Zerlegung der relativen Abweichung zurückzurufen.

Da diese Zerlegung nach demselben Gesetze gemacht ist wie die Zerlegung von Kräften, so würden, wenn wir die Kraft durch die Abweichung darstellten, auch die Componenten der Kraft durch die Componenten der Abweichung dargestellt sein. Aber nicht durch die Abweichung selbst messen wir die beschleunigende Kraft, sondern durch die Acceleration derjenigen Bewegung, vermöge welcher wir uns die Abweichung beschrieben denken, also durch den Quotienten dieser Abweichung durch $\frac{\theta^2}{2}$, wenn $\theta$ das der Abweichung entsprechende unendlich kleine Zeitintervall bezeichnet. Folglich erhält man

die Componenten der relativen beschleunigenden Kraft, indem man mit $\frac{\theta^2}{2}$ die Componenten der relativen Abweichung dividirt. Man hat daher den nachstehenden Satz:

Die relative beschleunigende Kraft ist die Resultante von drei anderen beschleunigenden Kräften.

Die erste ist die gegebene Kraft selbst.

Die zweite ist die Trägheitskraft, welche durch den Punkt des Systems entwickelt wird, der mit dem Beweglichen in dem Augenblick, den man betrachtet, coïncidirt.

Die dritte hat den Werth $2\omega v_r \sin\delta$, wenn $v_r$ die relative Geschwindigkeit des Beweglichen, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems um seine augenblickliche Drehaxe und $\delta$ den Winkel der Richtung der relativen Geschwindigkeit mit der augenblicklichen Drehaxe bezeichnet. Die Richtung dieser dritten Kraft steht senkrecht auf der durch die augenblickliche Axe und die relative Geschwindigkeit gehenden Ebene, und hat den der augenblicklichen Drehung entgegengesetzten Sinn: mit anderen Worten, sie ist die Axe einer Drehung, welche auf dem kürzesten Wege die Richtung der relativen Geschwindigkeit in die Richtung der augenblicklichen Axe des Systems bringen würde.

Diese Zerlegung der relativen Kraft verdankt man Coriolis, welcher die zweite Componente, im entgegengesetzten Sinne genommen, Zugkraft, und die dritte Componente zusammengesetzte Centrifugalkraft genannt hat. Die relative Bewegung war zuerst von Newton bei den Planeten betrachtet worden, indem er für die beweglichen Axen eine blos fortschreitende Bewegung annahm. Clairaut hatte später die relative Bewegung in einer Ebene untersucht für irgend eine Bewegung der Axen in dieser Ebene; aber er hatte einen Fehler begangen, welcher vor Kurzem von Bertrand berichtigt wurde. Coriolis ist der Erste, welcher den allgemeinen Ausdruck der fingirten Kräfte gegeben hat, deren Einführung die relative Bewegung auf eine absolute zurückführt.

79. Man muss aber wohl bemerken, dass diese fingirten

Kräfte, da sie nicht gegeben sind und von der relativen Bewegung selbst durch die Grössen $v_r$ und $\delta$ abhängen, das Problem äusserst verwickelt machen. Diese Zerlegung der relativen Kraft, die in verschiedenen Aufgaben sehr nützlich sein kann, ist nichts Anderes als eine Interpretation der Differentialgleichungen, welche man unmittelbar aufstellen würde, um zu der Untersuchung der Gleichungen der relativen Bewegung überzugehen; und auf diesem Wege ist Coriolis zu dem Ausdruck der Componenten der relativen Kraft gelangt. In dem Falle, wo durch die Natur der Daten die absolute Bewegung des Punktes vollständig bestimmt werden kann, muss man nicht die relative Kraft anwenden, sondern die absolute Bewegung bestimmen; man ist dann auf eine Combination bekannter Bewegungen zurückgeführt, also auf eine Aufgabe der Phoronomie. In den verwickeltsten Fällen setzt sich das System der zu behandelnden Gleichungen zusammen aus den drei Gleichungen der absoluten Bewegung des Punktes und einer oder zwei Bedingungsgleichungen, worin vorkommen können die absoluten Coordinaten $x, y, z$, die relativen Coordinaten $x', y', z'$ und andere von der Bewegung des Systems abhängende Grössen; ausserdem hat man die Gleichungen, welche die Coordinaten in den beiden Systemen verknüpfen, und deren Coëfficienten gegebene Functionen der Zeit sind.

Wenn der Punkt frei ist, oder die Bedingungsgleichungen nur von $x$, $y$, $z$ abhängen, so kann die absolute Bewegung für sich bestimmt werden; nicht aber dann, wenn diese Gleichungen von der Bewegung des Systems abhängen, wie es beinahe immer der Fall ist.

80. Der besondere Fall, wo das System nur eine fortschreitende Bewegung hat. — Hat das System der beweglichen Axen nur eine fortschreitende Bewegung, in Folge welcher alle Punkte gleiche und parallele, nach irgend einem Gesetz variirende Geschwindigkeiten haben und irgend welche identische Curven beschreiben, so wird die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ Null, und die dritte Componente der relativen Kraft verschwindet. Der allgemeine Satz reducirt sich dann auf folgenden:

Wenn die beweglichen Axen beständig zu sich parallel bleiben, so ist die relative beschleunigende

Kraft die Resultante der gegebenen beschleunigenden Kraft und einer gleichen und entgegengesetzten mit derjenigen Kraft, welche die Bewegung irgend eines Punktes des Systems bestimmen würde.

Auf diesen besonderen Fall beschränkt man sich gewöhnlich in den Elementarbüchern, er genügt für die Berechnung der relativen Bewegung der Planeten. Den vorstehenden Satz kann man unmittelbar erhalten, auf dieselbe Weise wie wir den allgemeinen Satz erhalten haben.

Ist die fortschreitende Bewegung des Systems geradlinig und gleichförmig, so verschwindet auch die zweite Componente, und die relative Kraft ist keine andere als die gegebene Kraft selbst.

81. Der Fall, wo das System eine gleichförmige Rotationsbewegung hat. Anwendung auf die Erde. — In diesem Falle ist die Trägheitskraft eines Punktes des starren Systems oder die zweite Componente der relativen Kraft genau die Centrifugalkraft in diesem Punkte; die dritte Componente ist immer $2\omega v_r \sin\delta$. Sehen wir zu, was diese Ausdrücke in dem Falle werden, wo das starre System die Erde ist.

Die Bewegung um die Sonne wird hervorgebracht durch eine an allen Molekeln wirkende Kraft, welche für gleiche Massen, wie diese auch in der Erde liegen mögen, als dieselbe betrachtet werden kann: sie ändert deshalb die relativen Bewegungen nicht in schätzbarem Grade, und wir können davon absehen. Wir denken uns also, dass die Erde eine gleichförmige Rotation um ihre unbewegliche Axe habe; sie vollendet die ganze Rotation in einem Sterntag, d. h. in einer durch die Zahl 86164 ausgedrückten Zeit, woraus folgt

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073,$$

was eine sehr kleine Grösse ist. Der Winkel $\delta$ ist derjenige, den die relative Geschwindigkeit mit der Erdaxe macht, oder das Complement des Winkels, den sie mit dem Aequator macht, so dass $v_r \sin\delta$ die Projection der relativen Geschwindigkeit auf den Aequator darstellt.

Nimmt man die relative Geschwindigkeit wenig beträchtlich an, so ist die dritte Componente sehr klein im Vergleich zu den beiden anderen; und wenn man sie in einer ersten

Annäherung vernachlässigt, so kommt man zu folgendem Satz:

Die scheinbare Bewegung eines Punktes auf der Erdoberfläche kann berechnet werden, indem man die Erde als unbeweglich annimmt und zu den Kräften, welche in der That auf diesen Punkt wirken, die Centrifugalkraft hinzufügt.

Wenn die Anziehung der Erde die einzige auf den Punkt wirkende Kraft ist, so erhält man das Resultat, welches wir schon in Nr. 214 des ersten Theils bei Berechnung der Kraft gefunden haben, welche die Körper im Zustande der Ruhe sollicitirt, wenn man die Rotation der Erde berücksichtigt.

Die Componente, welche wir in dem obigen Satze vernachlässigt haben, verursacht Störungen, von welchen wir hier nicht näher sprechen. Sie ist die Ursache des seit langer Zeit bemerkten Phänomens der Abweichung der Körper gegen Osten, wenn man sie ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen lässt. Sie bringt ferner die Bewegung der Schwingungsebene des Pendels hervor, von welcher Poisson glaubte, dass sie wegen der Kleinheit dieser Kraft unmerklich sein müsse, welche aber Foucault's schöne Versuche uns kennen gelehrt haben.

82. Allgemeine Bemerkung. — Da die relative Bewegung übereinstimmt mit einer absoluten Bewegung, in welcher der Anfangszustand derselbe wäre wie der relative Anfangszustand, und in welcher die Kraft die Resultante der gegebenen Kraft und der beiden fingirten Kräfte, d. h. die relative Kraft sein würde, so folgt, dass alle für die absolute Bewegung eines freien Punktes bewiesenen Sätze auch noch Geltung haben in der relativen Bewegung, wenn man den Punkt als unter dem Einflusse der relativen Kraft stehend betrachtet. Wir werden einige Beispiele davon geben.

83. Gesetz der Flächen in der relativen Bewegung. — Wenn die relative Kraft eines Beweglichen beständig durch einen und denselben Punkt des bewegten Systems geht, so ist die relative Trajectorie des Beweglichen eben, und der von dem constanten Punkte zu dem Beweglichen gehende Strahl beschreibt relative Flächen, welche den entsprechenden Zeiten proportional sind.

Umgekehrt

Wenn der aus einem constanten Punkte des Systems zu dem Beweglichen gehende Strahl Flächen beschreibt, deren Projectionen auf drei rechtwinklige mit dem System verbundene Ebenen proportional den Zeiten wachsen; oder mit anderen Worten, wenn die relative Trajectorie eines Beweglichen eben ist, und die Flächen, welche der von einem constanten Punkt dieser Ebene zu dem Beweglichen gehende Strahl beschreibt, proportional der Zeit wachsen, so geht die relative auf das Bewegliche wirkende Kraft immer durch diesen constanten Punkt.

84. Gleichung der lebendigen Kraft in der relativen Bewegung eines freien Punktes. — Betrachtet man die mit der relativen Bewegung identische absolute Bewegung, so ist während einer unendlich kleinen Zeit das halbe Increment der lebendigen Kraft gleich der Arbeit während dieser Zeit. Mit Einführung der Benennungen der relativen Bewegung ist also die elementare Arbeit der relativen Kraft gleich dem derselben Zeit entsprechenden halben Incremente der relativen lebendigen Kraft. Die Arbeit einer Kraft ist gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten, und die relative Arbeit der dritten Componente der relativen Kraft ist Null, weil diese Componente auf der relativen Geschwindigkeit und somit auf der relativen Trajectorie senkrecht steht. Man kann demnach folgenden Satz aussprechen:

In der relativen Bewegung eines freien Punktes ist das halbe Increment der lebendigen Kraft während eines unendlich kleinen Intervalls gleich der entsprechenden Arbeit der wirklichen Kraft plus der Arbeit derjenigen Trägheitskraft, welche der Punkt entwickeln würde, wenn er in dem Augenblick, den man betrachtet, mit dem System verbunden wäre.

85. Relative Bewegung eines unfreien Punktes. — Betrachten wir jetzt den Fall, wo der Punkt, dessen relative Bewegung man sucht, nicht vollkommen frei ist. Er kann einer oder zwei Bedingungsgleichungen unterworfen sein, und diese können auf irgend eine Weise die Zeit sowie die

absoluten und relativen Coordinaten des Punktes enthalten. Da die Gleichungen für die Transformation der Coordinaten es möglich machen, die einen durch die anderen auszudrücken, so können wir annehmen, dass diese Bedingungsgleichungen nur die Zeit und z. B. die relativen Coordinaten enthalten. Der Punkt wird dann durch jede Gleichung genöthigt, auf einer mit der Zeit variablen Fläche zu bleiben, die in jedem Augenblick der Gestalt und Lage nach in Bezug auf das System der beweglichen Axen gegeben ist.

Diese Oberfläche übt in jedem Augenblick eine normale Kraft aus; und nimmt man diese zu den auf den Punkt wirkenden Kräften hinzu, so kann man die Fläche wegnehmen und den Punkt als vollkommen frei betrachten, wenn nur diese einzige Bedingung vorhanden war. Daraus folgt nachstehender Satz:

Ist das Bewegliche gezwungen, auf einer gegebenen, in Gestalt und Lage variablen Fläche zu bleiben, so bestimmt sich die relative Kraft wie in dem Falle eines freien Punktes, sofern man zu der gegebenen Kraft eine unbestimmte Kraft hinzunimmt, die normal ist zu dieser Fläche in dem Punkte, wo sich das Bewegliche in dem betrachteten Augenblick befindet.

Hat man statt der einen Oberfläche zwei, so verfährt man ebenso für die zweite und erhält eine zweite unbestimmte, zu der zweiten Fläche normale Kraft. Diese zwei Kräfte setzen sich in eine der Grösse nach unbestimmte Kraft zusammen, welche liegen muss in der Normalebene der Durchschnittscurve der beiden Flächen.

Man sieht, dass in dem Falle, wo der Punkt nur einer Bedingungsgleichung unterworfen ist, dadurch eine neue unbekannte Grösse eingeführt wird, zugleich aber eine bekannte Gleichung zwischen seinen Coordinaten und der Zeit. Ist der Punkt zwei Gleichungen unterworfen, so treten zwei Unbekannte auf. Man hat also immer eine gleiche Zahl von Unbekannten und Gleichungen.

Nach der allgemeinen Bemerkung, welche wir gemacht haben bezüglich der Ausdehnung der in der absoluten Bewegung bewiesenen Sätze auf die relative Bewegung, ist es fast

unnöthig zu sagen, dass die Gleichung der relativen lebendigen Kraft Geltung hat, wenn der Punkt auf einer Fläche oder Curve von constanter Form bleiben muss, die mit dem System der beweglichen Axen unveränderlich verbunden ist. Und in der That, da die von ihr ausgeübte Kraft auf der relativen Trajectorie des Beweglichen normal steht, so giebt sie eine elementare Arbeit gleich Null.

## Relative Bewegung eines Systems.

86. Wenn alle materiellen Punkte, welche das System zusammensetzen, vollkommen frei und unabhängig von einander wären, so würde die Theorie der relativen Bewegung eines freien Punktes anwendbar sein, und man brauchte nur in jedem Punkte die beiden fingirten Kräfte der Nr. 78 einzuführen, um die relative Bewegung des Systems auf eine absolute zurückzubringen.

87. Nehmen wir jetzt an, es seien gewisse Punkte des Systems genöthigt, auf gegebenen Oberflächen oder Curven zu bleiben, die fest oder beweglich, von constanter oder variabler Form sein können. Daraus resultiren für diese Punkte unbekannte, gegen diese Flächen oder Curven normale Kräfte. Wenn man die Werthe derselben kennte, so könnte man sie zu den gegebenen Kräften hinzunehmen und die Punkte als frei betrachten, und dann würde man sich in dem vorigen Falle befinden. Man brauchte nachher nur in jedem Punkte die beiden von der Bewegung der Axen abhängenden fingirten Kräfte einzuführen, um auf eine absolute Bewegung zurückzukommen. Aber, obgleich jene normalen Kräfte unbekannt sind, so kann man sie doch so einführen, wie wenn sie bekannt wären. Die Zahl der zu bestimmenden Grössen wird dadurch vermehrt; aber die Zahl der Gleichungen wird es um ebensoviel. Denn die Coordinaten eines Punktes, der auf einer Oberfläche bleiben muss, müssen beständig der Gleichung dieser Fläche genügen. Muss der Punkt auf zwei Flächen, also auf einer gegebenen Curve bleiben, so treten dadurch zwei unbekannte, gegen diese Flächen normale Kräfte auf; zugleich aber hat man zwei Gleichungen zwischen seinen Coordinaten: so dass die Zahl der Gleichungen und die Zahl

der Unbekannten immer um gleichviel zunehmen, und das Problem vollständig bestimmt ist. Die Gleichungen dieser Flächen oder Curven können als Functionen der Zeit und der absoluten oder relativen Coordinaten gegeben sein, und man kann sie mit Hülfe der Formeln für die Transformation der Coordinaten ausdrücken in demjenigen dieser beiden Systeme, in welchem man will.

88. Sind zwei Punkte des Systems genöthigt in constanter Entfernung von einander zu bleiben, so entspringen hieraus zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche längs der Geraden gerichtet sind, die beide Punkte verbindet, und welche respective an jedem von beiden Punkten angreifen. Führt man diese Kräfte ein, so kann man die Punkte als frei betrachten; aber man muss ausdrücken, dass ihre Entfernung constant ist: was eine neue Gleichung liefert zugleich mit der neuen Unbekannten, welche die Grösse der Kraft ist. Diese Bedingungen können sich beliebig vervielfältigen. Derselbe Punkt kann mit beliebig vielen anderen Punkten verbunden und genöthigt sein, auf einer oder zwei Flächen zu bleiben. Jede dieser Bedingungen führt immer eine Unbekannte und eine Gleichung ein, und somit ist die Aufgabe bestimmt. Aus dem Vorstehenden folgt nun der Satz:

Wenn verschiedene Punkte eines bewegten Systems genöthigt sind in constanten Entfernungen von einander zu bleiben und sich auf Oberflächen oder Linien von constanter oder variabler Lage und Gestalt zu befinden, so ist die Bewegung dieses Systems in Bezug auf drei bewegliche Axen identisch mit einer absoluten Bewegung, welche man in folgender Weise gegen feste Axen bestimmt: Man lässt das System ausgehen von einem mit dem relativen identischen Anfangszustand; man bringt zunächst in jedem Punkt Kräfte an, deren Componenten durch dieselben Functionen der Zeit und der neuen absoluten Coordinaten ausgedrückt werden, wie die gegebenen Kräfte es durch die Zeit und die relativen Coordinaten sind; man fügt zu diesen Kräften solche fingirte Kräfte hinzu, wie sie in dem Falle eines freien Punktes bestimmt worden sind; endlich un-

terwirft man die Punkte den Bedingungen, dass sie die gegebenen Entfernungen von einander behalten und sich auf Flächen oder Curven bewegen müssen, welche zu Gleichungen in Bezug auf die festen Axen die gegebenen, in den relativen Coordinaten ausgedrückten Gleichungen haben.

89. Der allgemeine Fall. — Die Bedingungen, unter welchen wir die relative Bewegung eines Systems untersucht haben, kommen am häufigsten vor. Nur aus diesem Grunde haben wir sie vorausgeschickt, denn wir hätten mit dem ganz allgemeinen Falle anfangen können, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Nehmen wir an, die Verbindungen des Systems seien durch Gleichungen ausgedrückt, welche die Zeit und die absoluten Coordinaten $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, $z''$, ... irgend einer Zahl von Punkten $M$, $M'$, $M''$, ... enthalten. Wir haben bewiesen, dass die absolute Bewegung dieselbe bleibt, wenn man die Verbindungen unterdrückt und in jedem Punkt Kräfte einführt, welche durch die Gleichungen bestimmt werden, die diese Verbindungen ausdrücken. Diese Kräfte für irgend einen Punkt $M$, der in irgend einem System von Axen die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hat, sind normal gegen die verschiedenen Flächen, welche man für den Augenblick, den man betrachtet, erhält, indem man $x$, $y$, $z$ in allen Gleichungen, worin sie vorkommen, als die einzigen Variablen ansieht; und die Werthe der Componenten dieser Kräfte parallel mit den $x$, $y$, $z$ sind die Producte aus den partiellen Derivirten dieser Gleichungen nach $x$, $y$, $z$ und einem gemeinschaftlichen Factor, welcher nicht gegeben und derselbe ist für alle Derivirten, die von derselben Gleichung herrühren: so dass es dieser Unbekannten eben so viel als Gleichungen giebt und folglich möglich ist, nicht nur die Coordinaten aller Punkte für jeden Augenblick zu bestimmen, sondern auch die Grössen und Richtungen der Kräfte, welche statt der Verbindungen gesetzt werden können und dann erlauben, dass man alle Punkte als vollkommen frei betrachtet.

Führen wir also diese, die Verbindungen ersetzenden Kräfte ein, so kommen wir auf den ersten Fall zurück, und die gesuchte relative Bewegung stimmt mit einer absoluten

Bewegung überein, in welcher diese Kräfte hinzugefügt sind zu den gegebenen und zu den fingirten Kräften, welche sich auf die relative Bewegung eines freien Punktes beziehen. Weil aber die von den Verbindungen herrührenden Kräfte neue Unbekannten von der Zahl der gegebenen Gleichungen einschliessen, so muss man diese Gleichungen zu ihrer Bestimmung anwenden, um in Allem eben so viel Gleichungen zu haben als Unbekannten.

Wenn wir nun in allen diesen Gleichungen, welche nur absolute Coordinaten enthalten sollten, diese durch die relativen Coordinaten ersetzen vermittelst der Gleichungen für die Transformation der Coordinaten, so wird an den Verbindungen nichts geändert. In irgend einem Augenblick kann man zu Coordinatenaxen drei Geraden nehmen, die zusammenfallen mit den beweglichen Axen in der Lage, welche diese in diesem Augenblick einnehmen. Die Verbindungsgleichungen werden dann die gegebenen Gleichungen sein, ausgedrückt in den relativen Coordinaten. Die Componenten der einzuführenden Kräfte parallel mit diesen Axen werden dargestellt durch die partiellen Derivirten der Gleichungen nach den relativen Coordinaten, welche Derivirten multiplicirt sind durch gemeinschaftliche Factoren von der Anzahl der Gleichungen, wie wir oben wiederholend auseinandergesetzt haben. Daraus folgt nachstehender Satz:

Die relative Bewegung eines Systems von Punkten, die verbunden sind durch irgend welche Gleichungen zwischen der Zeit und den relativen Coordinaten dieser Punkte, ist identisch mit einer absoluten Bewegung desselben Systems unter folgenden Voraussetzungen: 1) Das System muss ausgehen von einem mit dem relativen identischen Anfangszustande; 2) es müssen die Kräfte wirken, deren Componenten durch dieselben Functionen der Zeit und der Coordinaten der Punkte ausgedrückt werden, wie es die Componenten der gegebenen Kräfte durch die Zeit und die relativen Coordinaten sind; 3) man muss hinzunehmen die fingirten Kräfte; 4) man muss das System Verbindungen unterwerfen, die ausgedrückt werden durch Gleichungen,

welche die gegenwärtigen Coordinaten in derselben Weise enthalten wie die gegebenen Gleichungen die relativen Coordinaten.

## Schiefer Stoss.

90. Die Mittelpunkte zweier Kugeln von den Massen $m$, $m'$ bewegen sich nicht in derselben Geraden. Die Lagen dieser Mittelpunkte in dem Augenblicke der Berührung seien $O$, $O'$. Wir wollen Grösse und Richtung ihrer Geschwindigkeiten nach dem Stosse finden. Denken wir uns deshalb in dem Augenblicke, wo die Berührung beider Kugeln eintritt, eine jede ihrer Geschwindigkeiten in zwei andere zerlegt, von denen die eine nach der gemeinsamen Normale $OO'$ gerichtet ist, und die andere in der gemeinsamen Tangentialebene liegt. $N$, $T$ seien diese Componenten für die Masse $m$, und $N'$, $T'$ für die Masse $m'$.

Nach dem, was von der Wirkung momentaner Kräfte bewiesen wurde, können wir zuerst die Geschwindigkeiten berechnen, welche aus ihrer Wirkung auf das System resultiren würden, wenn dieses nur die längs $OO'$ gerichteten Geschwindigkeiten besässe; die so berechneten Geschwindigkeiten müssen wir dann zusammensetzen mit den in der Tangentialebene liegenden Componenten.

Wir betrachten also zunächst die beiden Kugeln $m$, $m'$ als in derselben Geraden $OO'$ bewegt und mit den Geschwindigkeiten $N$, $N'$ zusammenstossend. Wir beschränken uns auch hier auf die zwei Fälle, wo beide Körper ganz unelastisch oder vollkommen elastisch sind.

1) Sind die Körper unelastisch, so geben ihnen die beiden normalen Kräfte eine gemeinsame, längs $OO'$ gerichtete Geschwindigkeit $v$, welche den Werth hat:

$$v = \frac{mN + m'N'}{m + m'},$$

wenn man die Grössen $N$, $N'$, $v$ als positiv betrachtet in der einen Richtung auf der Normale und als negativ in der anderen. Ausser dieser gemeinsamen Geschwindigkeit haben die beiden Kugeln noch respective die auf $OO'$ senkrechten Geschwindigkeiten $T$, $T'$.

2) Nehmen wir jetzt an, die beiden Körper seien vollkommen elastisch und nur mit ihren längs $OO'$ gerichteten Geschwindigkeiten begabt. Sie bewegen sich dann auf dieser Geraden mit den Geschwindigkeiten $N$, $N'$ und besitzen nach dem Stosse Geschwindigkeiten $v$, $v'$, deren Ausdrücke wir den Formeln auf Seite 106 des zweiten Theils entnehmen:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} v = \dfrac{(m - m')N + 2m'N'}{m + m'}, \\ v' = \dfrac{(m' - m)N' + 2mN}{m + m'}. \end{cases}$$

Wenn wir diese mit den in der Tangentialebene gerichteten Componenten $T$, $T'$ verbinden, so erhalten wir Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

91. Für $m = m'$ findet man:

$$v = N', \quad v' = N,$$

die Kugeln haben also ihre primitiven normalen Geschwindigkeiten ausgetauscht, wie wir es schon bei dem geraden Stosse gesehen haben.

92. War die Masse $m'$ vor dem Stosse in Ruhe, so ist $N' = 0$ und folglich:

$$v = \frac{m - m'}{m + m'} N, \quad v' = \frac{2m}{m + m'} N.$$

Wächst daher $m'$ unendlich, so wird $v'$ Null und $v$ wird $-N$. Indem man diese Geschwindigkeit $-N$ zusammensetzt mit der in der Tangentialebene liegenden Componente $T$, erhält man eine Geschwindigkeit, welche der des Punktes $m$ vor dem Stosse gleich ist, in der Ebene der Normale und der einfallenden Geschwindigkeit liegt, und deren Richtung mit der Normale denselben Winkel macht wie die Richtung der primitiven Geschwindigkeit. Man drückt dies so aus: Wenn eine vollkommen elastische Kugel auf ein unbewegliches und elastisches Hinderniss stösst, so wird sie in der Weise reflectirt, dass ihre Geschwindigkeit dieselbe bleibt, und dass die Richtungen der Bewegung ihres Mittelpunktes vor und nach dem Stosse in derselben, durch die Normale in dem Einfallspunkte gehenden Ebene liegen und mit dieser Normale gleiche Winkel machen.

93. Dieses Reflexionsgesetz elastischer Körper lässt sich

direct beweisen. Wenn die Kugel $m$ die feste Oberfläche trifft, so wirkt auf sie eine variable normale Kraft $F$, welche eine Function der Entfernung $f$ des Mittelpunktes von der festen Oberfläche ist. Das Integral $\int F df$ in der ganzen Ausdehnung des Stosses genommen ist also Null, und die lebendige Kraft bleibt ungeändert. Die Geschwindigkeit ist also dieselbe vor und nach dem Stosse. Weil nun die zu der festen Oberfläche normale Kraft durch ihre Wirkung auf die Kugel die Geschwindigkeit derselben parallel mit der Tangentialebene nicht ändert, so folgt, dass nach dem Stosse die ganze Geschwindigkeit der Kugel und ihre eine Componente dieselben sind wie vorher: also muss auch die andere Componente dieselbe und darum der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel sein.

94. Nehmen wir endlich an, die reflectirende Fläche, statt fest zu sein, habe eine Bewegung, welche durch die einfallende Kugel nicht alterirt werden kann. Man braucht dann nur in den Formeln (a) zu setzen $m' = \infty$, und man findet:

$$v = -N + 2N' = -(N - 2N'),\ v' = N'.$$

Also hat jetzt die normale Componente der Geschwindigkeit nach der Reflexion nicht mehr denselben Werth wie vorher, sondern einen um das Doppelte der normalen Geschwindigkeit der reflectirenden Fläche davon verschiedenen. Die Kugel würde sich daher nach dem Stosse in der zu dem Einfallspunkte gehörigen Tangentialebene dieser Oberfläche bewegen, wenn $N = 2N'$ wäre.

Indem ich dem Publikum den Schluss meiner Bearbeitung von Duhamel's Mechanik übergebe, darf ich für diese späte Vollendung um Nachsicht bitten. Es entschuldigen mich Unterbrechungen bei der Arbeit, welche zu beseitigen nicht in meiner Macht stand, sowie gewissenhafte Sorgfalt bei ihrer Ausführung. Nur grosse Sorgfalt und Correctheit können einer solchen Arbeit Werth verleihen, und dem Publikum wird es deshalb sicher lieber sein, einige Monate später in den Besitz des vollständigen Werkes zu gelangen, als wenn ich mich bestrebt hätte so rasch, aber auch so uncorrect zu arbeiten, wie es bei einer anderen concurrirenden Uebersetzung des Duhamel'schen Werkes geschehen ist. Um diesen Ausspruch zu rechtfertigen, halte ich mich für verpflichtet, mindestens einen Theil der Mängel, welche mir bei der Durchsicht jener Uebersetzung auffielen, am Schlusse dieser Worte vorzuführen *).

Ein zweiter Gewinn, welchen ich den Besitzern meiner Bearbeitung darbiete, rührt daher, dass von dem Originale, dessen Werth ein allgemein anerkannter ist, inzwischen eine neue Auflage erschien, welche interessante Zusätze und einen neuen Abschnitt, „Phoronomie", enthält. Der Anhang, welchen ich meiner Bearbeitung am Schlusse beigegeben, bringt diese Phoronomie so wie alle wichtigen Zusätze der neuen Auflage des Originals.

Berlin, im Juli 1854.

Wagner.

---

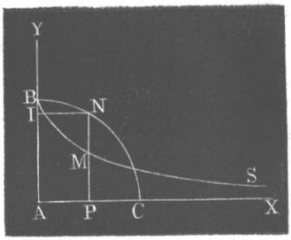
*) In Nr. 63 führt das Original den sehr einfachen Beweis, daß der Schwerpunkt eines homogenen Cylinders diejenige Gerade hälftet, welche die Schwerpunkte seiner (parallelen) Grundflächen verbindet. Offenbar liegt dieser Schwer-

punkt auf einer Ebene, die parallel ist mit den Grundflächen und gleich weit von ihnen absteht. Um zu zeigen, daß er auch auf der fraglichen Geraden liegt, zerschneidet man den Cylinder durch irgend ein System unter sich und mit den Kanten paralleler Ebenen in unendlich dünne Scheiben. In Bezug auf eine beliebige dieser Ebenen verhalten sich die Momente zweier solchen Scheiben wie die Momente ihrer unendlich schmalen Grundflächen, welche Elemente von den Grundflächen des Cylinders sind. Daraus folgt das Moment des ganzen Cylinders gleich Null in Bezug auf diejenige unter den parallelen Ebenen, bezüglich welcher das Moment seiner Grundflächen Null wird; diese Ebene geht aber durch die Schwerpunkte beider Grundflächen hindurch. Und weil für ein anderes System Gleiches gilt, so liegt in der That der gesuchte Schwerpunkt auf jener Geraden. — Hören wir nun die Uebersetzung: „Bildet man ferner ein System von unendlich nahen Ebenen, die einander und den Kanten parallel sind, so zerfällt der Cylinder in eine Reihe Parallelopipeda, deren obere und untere Begrenzungsflächen die Elemente der Cylinderbasis und deren Momente proportional den Momenten ihrer Grundflächen sind in Beziehung auf jede ihren Kanten parallele Ebene. Eben deshalb muss die Summe der Momente sowohl der Seitenflächen als der Parallelopipeda in Bezug auf dieselbe Ebene Null sein.“ — Wir bemerken zur Erklärung dieses Unsinns, daß ein Druckfehler des Originals, *faces* statt *bases*, denselben veranlaßt. Die einschlagende Stelle lautet nämlich: „*le cylindre se trouvera décomposé en parallélépipèdes dont les bases seront les éléments des bases du cylindre, et dont les moments seront proportionnels à ceux de leurs bases par rapport à tout plan parallèle à leurs faces finies. Donc les sommes des moments, soit des faces, soit des parallélépipèdes, seront nulles pour le même plan.*“

In Nr. 99 wird aus der Differentialgleichung der Tractorie $BMS$ (die Evolvende der Kettenlinie), $y\,dx = -\,dy\sqrt{m^2-y^2}$, gefolgert:

$$\int_0^x y\,dx = -\int_m^y dy\,\sqrt{m^2-y^2},$$

wo die Grenzen $x$, $y$ Coordinaten eines und desselben Punktes dieser Curve bezeichnen, so daß z. B. $x = AP$, $y = MP$. Die Gleichung drückt daher in dem Falle der Figur aus, daß die Fläche $BMPA$ gleich ist jenem Segment des mit dem Radius $AB = m$ beschriebenen Kreisquadranten, welches abgeschnitten wird von einer Parallelen zu $AX$, die durch $M$ geht. — Die Uebersetzung hat den Fehler in der Figur des Originals nicht verbessert; sie sagt, es seien $BIN$ und $BMPA$ gleich.




In Nr. 133 fehlt der Uebersetzung ein Zusatz, dessen das Original bedarf, nämlich daß die Kugel nur dann einen äußeren Punkt bei jeder Entfernung so anzieht, als ob ihre ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre, wenn sie aus homogenen concentrischen Schichten besteht.

In Nr. 226 hat das Original die Formel:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

worauf es fortfährt: „*On tirera de là que* $d\theta$ *est de signe contraire à* $dt$ *tant que le mouvement reste dans le même sens*

$$dt = \frac{-l\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}}.\text{“}$$

Es ist klar, daß durch ein Druckversehen hinter *là* die Worte *en observant* fehlen. — Die Uebersetzung schreibt, darum unbekümmert: „Man schliesst hieraus“ (aus der Formel), „dass $d\vartheta$ von entgegengesetztem Zeichen mit $dt$ ist, so lange die Bewegung in demselben Sinne verharrt, also . . .“ — Richtig wäre: »Man erhält hieraus, weil $d\theta$ dem Zeichen nach $dt$ entgegengesetzt ist, so lange die Bewegung in demselben Sinne beharrt: . . .«.

In Nr. 4 des zweiten Bandes finden wir folgende Behauptung: „Man darf also immer voraussetzen, dass ein bewegter Punkt irgend eine gegebene Curve durch die Wirkung einer Kraft beschreibe, deren Richtung durch irgend einen festen Punkt geht.“ — Sie bedarf erstlich der Beschränkung, daß die Curve eben sei, und dann muß noch der feste Punkt in ihrer Ebene liegen.

Das Princip von d'Alembert sagt, auf Momentankräfte angewendet, daß an einem materiellen System vermöge seiner Verbindungen Gleichgewicht stattfindet zwischen den Kräften, welche gewirkt haben, und den anderen, welche durch die hervorgebrachten Größen der Bewegung gemessen werden, letztere entgegengesetzt mit ihren Richtungen genommen. — Dem entgegen hat die Nr. 42 folgende Stelle: „*il y a équilibre entre les forces mesurées par les quantités de mouvement acquises et les forces instantanées prises en sens contraires de leurs directions.*“ Dieser theoretische Fehler und der analoge bei stetigen Kräften kommen später noch häufig vor; auch berichtigt ihn das Erratum mehrfach. — Hier, wo dies nicht geschehen ist, spricht die Uebersetzung ihn treu nach: „Gleichgewicht . . . zwischen den durch die Quantitäten der Bewegung gemessenen Kräften und den in entgegengesetztem Sinne mit ihren Richtungen genommenen momentanen Kräften.“ — Ihre Treue in diesem Punkt geht so weit, daß in Nr. 98, wo das Original durch denselben Fehler Gleichgewicht zwischen den Kräften $-X$, $-Y$, $-Z$ und dem System der anderen $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ behauptet, die Uebersetzung, wie das Erratum des Originals, eine Hälfte des Fehlers verbessert, die andere aber nicht; sie behauptet nämlich Gleichgewicht zwischen $+X$, $+Y$, $+Z$ und $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$.

In Nr. 69 soll die Stabilität des Gleichgewichts untersucht werden. Vorausgesetzt wird dabei ein System, dessen Verbindungen von der Zeit unabhängig sind, und auf welches Kräfte wirken von solcher Beschaffenheit, daß der Ausdruck $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ das vollständige Differential einer Function $\varphi(x, y, z, x', \ldots)$ darstellt. — Das Original sagt: „*un système de points assujettis à des liaisons quelconques indépendantes du temps, et telles que* $\Sigma$ *soit la différentielle exacte d'une fonction* $\varphi$.“ Die Auslassung *soumis à l'action de forces* hinter *et* liegt auf der Hand; zum Ueberfluß findet man sie auf der folgenden Seite hinzugesetzt. — Die Uebersetzung bringt den voranstehenden falschen Satz und läßt den nachfolgenden richtigen weg: „betrachten

wir das Gleichgewicht eines Systems von Punkten, deren Verbindungen von der Zeit unabhängig und der Art sein mögen, dass $\Sigma$ das exacte Differential einer Function $\varphi$ ausmacht." — Ferner erfährt man hier, wie das Gleichgewicht stabil „bleibt", während das System seine kleinen Bewegungen macht.

Ein geschickter Besserungsversuch findet sich in Nr. 75. — Das Original enthält hier den Satz: „*Pour que le volume*" (Druckfehler, soll *volant* heißen) „*charge moins les supports, il est utile de lui donner la moindre masse possible, et pour cela on lui donne la forme d'une roue dont la masse est presque tout entière à la circonférence.*" — Die Uebersetzung sagt: „Damit dieser Körper die Unterlagen weniger belaste, und das kleinstmögliche Volumen erhalte, giebt man ihm die Form eines Rades, dessen Masse fast ganz in der Peripherie liegt." — Richtig übersetzt kann diese Stelle so lauten: »Man nimmt dieselbe« (die Masse, den *volant*), »damit sie die Stützen weniger belaste, so klein als für den Zweck möglich, und deshalb giebt man ihr die Form eines Rades (das sog. Schwungrad) . . .«

Eine ganz unzählbare Menge von anderen offenbaren Druckfehlern des Originals giebt die Uebersetzung sorgfältig wieder. Wir werden nur einige derselben hervorheben.

Kann ein Punkt eine Oberfläche nicht verlassen, so genügt es für sein Gleichgewicht auf ihr, wenn die Resultante der ihn angreifenden Kräfte senkrecht auf der Oberfläche steht. — Daraus folgert die Uebersetzung in Nr. 18 des ersten Bandes, daß „die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Resultante mit den Axen bildet, denen proportional sind, welche sich auf die Normale beziehen."

Die Nr. 100 soll zeigen, daß die Eckpunkte eines Seilpolygons, welches durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte gespannt wird, auf einer und derselben Parabel liegen. Unter den Bestimmungsstücken dieser Parabel wird ausdrücklich die constante Horizontalspannung mit $m$ bezeichnet; dagegen wurde unter $a$ der halbe Horizontalabstand der beiden Aufhängepunkte verstanden. — Ein Druckversehen des Originals bewirkt nun, daß in den Formeln der Nr. 100 an der Stelle von $m$ überall $a$ steht. — Die Uebersetzung macht diese Ungereimtheit pünktlich nach.

In Nr. 196 steht folgender Satz: „*Les valeurs de $x'$, $y'$, $z'$ seront donc les mêmes que seraient les coordonnées absolues d'un point qui serait sollicité par une force absolue ayant pour composantes les expressions* (4), *et*" (fehlt *qui aurait*) „*pour vitesse et position initiales, la vitesse relative et la position relative initiales.*" — Die Uebersetzung: „Die Werthe von $x'$, $y'$, $z'$ sind also dieselben, wie die absoluten Coordinaten eines Punktes, auf den eine absolute Kraft wirkte, welche die Ausdrücke (4) zu Componenten und zur anfänglichen Geschwindigkeit und Lage die relative Anfangsgeschwindigkeit und Lage hätte."

Original und Uebersetzung bringen in Nr. 203 die Formel:

$$m(v^2 - k^2) = \mp \int_{r_0}^{r} R\,dr \mp \int_{r'_0}^{r'} R'\,dr' \mp \text{etc.},$$

welcher auf der rechten Seite der Factor 2 fehlt.

In Nr. 226 sieht man die Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$$

so integrirt:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}\cos\vartheta + C;$$

daraus wird gefolgert:

$$\frac{k^2}{L^2} = \frac{g}{L}\cos\alpha + C,$$

und nun erst taucht beim Einsetzen des $C$, wie im Original, der verlorene Factor 2 auf. — Doch ein Verdienst hat hier die Uebersetzung, sie setzt ein großes $L$ statt des kleinen.

Die Nr. 237 stempelt, wie der Druckfehler des Originals, $a\alpha$, $b\beta$ zu Halbaren der Ellipse

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = a^2\alpha^2\beta^2.$$

Von der Sorgfalt, mit welcher die Revision mitunter für genaue Uebereinstimmung des Textes und der Uebersetzung wachte, legt ein Zeugniß ab die Formel (4) der Nr. 30 zweiten Bandes:

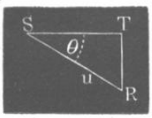
$$\frac{d\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right]}{d\alpha} = \frac{\left[\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right]}{dx},$$

wenngleich der rechtsstehende Ausdruck jenem des Originals

$$\frac{\left[\varphi(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right]}{dx}$$

nicht ganz congruent ist, da ihm ein Stück Strich fehlt.

In Nr. 144 „findet man $x = \frac{d^2}{a}$, und da $f^4 = a^4 r$, so folgt $f^2 = a^2\sqrt{r}$ und $x = a\sqrt{r}$." — Die Schuld liegt beim Original, warum schreibt dieses $d$ statt $f$?




Aus Nr. 148 erfahren wir, daß die Kathete $RT$ eines bei $T$ rechtwinkligen Dreiecks gleich $u \tang\theta$ oder $RS \tang RST$ ist. — Das Original schreibt ja so.

In Nr. 150 behauptet ein Druckfehler des Originals, *au-dessous* statt *au-dessus*, wenn der Schwerpunkt des eingetauchten Körpers tiefer liege als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit (die allemal stabile Gleichgewichtslage), so sei der Abstand $a$ beider negativ zu nehmen. — Die Uebersetzung behauptet es natürlich mit.

Aus Nr. 200 kann man lernen, daß $(2n+1)\pi$ ein Vielfaches der ganzen Peripherie ist, da recht ausdrücklich, mit dem Druckfehler des Originals, behauptet wird, es sei:

$$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\ \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

in Bezug auf $x$ um den Inder $2l$ periodisch.

Diese Beispiele statt aller von ähnlicher Art. Nun zur Classe des eige-

nen Unsinns. Vielleicht erwartet man diesen von der Uebersetzung, an welcher die Kräfte Eggers und Schlömilch wirkten, am wenigsten.

Auf Seite 8 des ersten Theils des Originals soll $MA$ die Tangente im Punkte $M$ einer Curve von doppelter Krümmung bezeichnen, und $MB$ eine Parallele zu der in einem unendlich nahen Punkte an diese Curve gezogenen Tangente sein, so daß $MA$ und $MB$ den Contingenzwinkel bilden. — Die Uebersetzung sagt auf Seite 7: „Sei $MA$ eine Verlängerung der Tangente im Punkte $M$ einer Curve doppelter Krümmung, $MB$ eine in einem unendlich nahen Punkte zur Tangente parallele Linie . . . .“

Nr. 192. „*Nous allons chercher les formules au moyen desquelles on peut déterminer la direction et la grandeur soit de la vitesse, soit de la force, d'après les fonctions de t qu'expriment x, y et z.*“ — Uebersetzung: „Wir wollen nun die Formeln suchen, mit deren Hülfe man die Richtung und Grösse sei es der Geschwindigkeit, sei es der Kraft, als Functionen der Zeit $t$ bestimmen kann, welche durch $x$, $y$ und $z$ ausgedrückt ist.“ — Richtig übersetzt würde diese Stelle lauten: »Wir wollen die Formeln aufsuchen, vermöge welcher man Richtung und Größe, sowohl der Geschwindigkeit als der Kraft, aus denjenigen Functionen von $t$ bestimmen kann, welche $x$, $y$, $z$ ausdrücken.«

In Nr. 237 verdeutscht die Uebersetzung „*suivant l'axe des y*“, wo *suivant* »parallel mit« bedeutet, durch „gegen die Axe der $y$.“

Das Princip der kleinsten Wirkung setzt voraus, daß die Gleichung der lebendigen Kraft stattfindet. Diese Voraussetzung macht die Nr. 238 in der Annahme

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(x, y, z),$$

aus welcher folgt:

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C.$$

Sie betrachtet nun die wirkliche Trajectorie des Punktes zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte $A$, $B$ und wiederholt zunächst eine frühere Bemerkung, nämlich daß der materielle Punkt, welche andere Curve man ihn auch von $A$ nach $B$ zu durchlaufen zwingen mag, doch immer unter dem Einfluß derselben Kräfte mit derselben Geschwindigkeit in $B$ ankommt, wenn er nur in $A$ allemal eine gleich große Geschwindigkeit hatte. — Die Uebersetzung faßt diese Bemerkung so: „Fixirt man die beliebige Curve zwischen $A$ und $B$, und zwingt den materiellen Punkt dadurch auf ihr zu bleiben, dass man ihn der Einwirkung äusserer Kräfte unterwirft, so wird übrigens seine Geschwindigkeit immer durch dieselbe Formel ausgedrückt.“ — Die einschlagende Stelle des Originals lautet: „*si l'on fixait la courbe quelconque que l'on considère entre A et B, et qu'on assujettit le point matériel à y rester, en le soumettant à l'action des mêmes forces extérieures, sa vitesse serait toujours donnée par la même formule.*“ — Man übersetzt also richtig: »Bemerken wir, daß wenn man eine beliebige Curve zwischen $A$ und $B$ fest macht, den materiellen Punkt sich auf ihr zu bewegen zwingt und ihn denselben äußeren Kräften unterwirft, daß dann seine Geschwindigkeit noch immer durch die nämliche Formel gegeben wird.«

Die Nr. 25 des zweiten Theils hat den Satz: „*Si l'on prend pour origine des temps l'instant où l'on a* $\theta = 0$, *la planète est au sommet le plus voisin du foyer, qui correspond à* $r = a(1 - e)$, *et qu'on nomme le périhélie.*“ — Uebersetzung: „Wählt man zum Anfangspunkte der Zeiten den

Augenblick, wo $\vartheta = 0$ ist, so befindet sich der Planet in dem Scheitel, welcher demjenigen Brennpunkte am nächsten liegt, für den $r = a(1-e)$ wird, und den man das Perihel nennt.“ — Richtig würde man übersetzen: »so befindet sich der Planet in demjenigen Scheitel, welcher dem Brennpunkt am nächsten liegt, und für den $r = a(1 - e)$ ist.«

Nr. 72. „ . . . $\Sigma P dp - \Sigma Q dq = 0$, *équation qui sera satisfaite si le système, quel qu'il soit, est en équilibre; et qui en est la condition suffisante, s'il est à liaison complète.*“ — Uebersetzung: „und diese Gleichung wird erfüllt, wenn das System im Gleichgewicht ist, vorausgesetzt, dass eine vollkommene Verbindung vorhanden ist.“

In Nr. 110 bemerkt das Original von den Componenten der beschleunigenden Kraft irgend eines Punktes: „*Ces composantes sont, comme on le sait, les dérivées secondes, par rapport au temps, des coordonnées du point, estimées parallèlement à trois directions invariables quelconques.*“ — Die Uebersetzung bringt hier Einschränkungen an und sagt: „Die genannten Componenten sind bekanntlich die partiell in Beziehung auf die Zeit genommenen zweiten Differentialquotienten der Coordinaten, vorausgesetzt, dass das Coordinatensystem unveränderlich und rechtwinklig ist.“ — Sie sollte aber sagen: »Diese Componenten parallel mit drei beliebigen festen Richtungen sind die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach der Zeit.«

In dem Abschnitte, welcher von der Drehung um einen festen Punkt in Folge der Trägheit handelt, bemerkt die Nr. 113, daß wenn man mit den Gleichungen:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2, \tag{12}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \tag{15}$$

noch die Bedingung $p^2 + q^2 + r^2 = Const.$ verknüpft, dann die Componenten $p$, $q$, $r$ der Winkelgeschwindigkeit (sofern $A$, $B$, $C$ ungleich sind) constante Werthe erhalten; woraus sofort folgt, daß die Drehung jetzt immer um eine und dieselbe Axe geschieht. — Die Uebersetzung lehrt: „Verbindet man mit den Gleichungen die Bedingung, dass die Winkelgeschwindigkeit constant sei, so erhält man zwischen $p$, $q$, $r$ drei Gleichungen, welche sie bestimmen, wenn $A$, $B$ und $C$ ungleich sind und die Drehungsaxe fest ist.“ — Das Original: „*on aurait entre p, q, r trois équations, qui les détermineraient si A, B et C sont inégaux, et l'axe de rotation serait fixe.*“

Die Nr. 118 hat zum Gegenstand die geometrische Darstellung der Drehung um einen festen Punkt mit Hülfe zweier Kegel, eines festen und eines beweglichen, welcher auf dem ersten rollt. Der im absoluten Raum feste Ort aller augenblicklichen Dreharen bildet eine transcendente Kegelfläche; dieselbe hat zur Basis auf der festen Tangentialebene des Centralellipsoids die Serpoloide, macht daher im Allgemeinen unendlich viele wellenförmige Windungen und legt sich um diejenige Senkrechte herum, welche aus dem festen Punkt auf diese Tangentialebene gefällt ist. Der im Körper feste Ort aller augenblicklichen Dreharen bildet eine Kegelfläche zweiten Grades. Diese beiden Kegelflächen tangiren einander in jedem Augenblick; die bewegliche rollt auf der festen ohne zu gleiten, da ihre Berührungskante die augenblickliche Drehare ist. — So will es das Original; dies hält aber die Uebersetzung nicht ab, zu sagen: „Es kann also die Bewegung des Körpers mit Hülfe eines Kegels vom zweiten Grade construirt werden, der fest mit dem Körper verbunden ist und auf

einem andern Körper rollt, dessen Oberfläche sich unaufhörlich dreht, indem sie um die Axe des resultirenden Paares schwingt."

Wenn zwei mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllte Gefäße durch einen horizontalen Canal communiciren, und man zwei Horizontalebenen durch dessen höchste und tiefste Kante legt, so muß während des Gleichgewichts in allen Punkten einer und derselben mittleren Horizontalebene ein gleicher Druck stattfinden; und dies gilt noch für die beiden Grenzebenen. Deswegen bemerkt die Nr. 137: „*les parties situées en dessous du canal seront soumises à l'action d'une pression égale à leur partie supérieure.*" — Die Uebersetzung meint: „Ebenso sind die unterhalb des Canals liegenden Theile der Wirkung eines Druckes unterworfen, welcher gleich ist ihrem oberen Theile." Der Uebersetzer kann sich merken, daß *à* hier »an« heißt.

In Nr. 139 entdeckt man die Alternative: „In beiden Fällen ist das Trapez zu einem Dreieck geworden, dessen Spitze entweder in der Oberfläche des Wassers oder in der Grundlinie liegt." — Das Original: „*Le trapèze est alors réduit à un triangle: dans le premier cas, son sommet est à fleur d'eau, et, dans le second, c'est sa base qui s'y trouve.*"

Nr. 140. „Die auf eine krumme Wand ausgeübten Druckkräfte lassen sich nicht immer auf eine Einzelkraft zurückführen, weil ihre Richtungen nicht parallel laufen; wirken sie aber auf ein starres System, so können sie auf höchstens zwei Kräfte reducirt werden." Ferner: „Im entgegengesetzten Falle kann man das Kräftesystem auf eine Einzelkraft und auf ein Paar reduciren, auch letzteres, wenn man will, auf zwei Kräfte zurückführen. — Die betreffenden Stellen des Originals lauten: „*mais, comme elles sont appliquées à un système rigide, elles sont toujours réductibles à deux forces au plus*" und „*le système des forces se trouvera réduit à une force et un couple, et l'on pourra, si l'on veut, le réduire à deux forces seulement*".

Denken wir uns einen Körper ganz oder zum Theil eingetaucht in eine Flüssigkeit, und diese im Gleichgewicht. Nehmen wir das Niveau der Flüssigkeit zur Ebene der $x$, $y$ und die Richtung der Schwere zur Axe der $z$; es sei $\varrho$ die nur mit $z$ variirende Dichte der Flüssigkeit. Nennt man den Druck am Niveau $P$, so ist $P + g\int_0^z \varrho\, dz$ der Druck in der Tiefe $z$; der Unterschied der beiden Drucke in den Tiefen $z_1$ und $z$ beträgt daher $g\int_{z_1}^{z} \varrho\, dz$. Betrachtet man nun von dem eingetauchten Theil einen Faden, der sich in dem Rechteck $dx\,dy$ auf die Ebene der $x$, $y$ projicirt und von $z_1$ bis $z$ erstrecken mag: sein Gewicht, wenn man ihn mit Flüssigkeit, in gleicher Höhe von der Dichte der äußeren, erfüllt sich denkt, ist $g\,dx\,dy\int_{z_1}^{z} \varrho\, dz$. Die allein zu betrachtenden verticalen Druckcomponenten auf das obere und untere Ende des Fadens sind, absolut genommen, $P\,dx\,dy + g\,dx\,dy\int_0^{z_1} \varrho\, dz$ und $P\,dx\,dy + g\,dx\,dy\int_0^{z} \varrho\, dz$; die erste ist von der zweiten abzuziehen. Es bleibt also die verticale, nach oben

gerichtete Kraft $g\,dx\,dy \int_{z_1}^{z} \varrho\,dz$ übrig, welche jenem Gewicht gleich ist. — Die Uebersetzung sagt dagegen in Nr. 141: „Componenten in entgegengesetztem Sinne, welche sich auf eine Kraft reduciren, die von unten nach oben gerichtet und gleich dem Gewichte der Flüssigkeit ist, welche denjenigen Theil des Körpers ausfüllt, der die nämliche Projection $dx\,dy$ besitzt, wobei dieser Theil Flüssigkeit bis zu der Höhe" (also vielleicht höher als der eingetauchte Körper) „fortgesetzt angenommen wird, welche die den Körper umgebende Flüssigkeit hat, und der Körper homogen oder heterogen sein kann. Es folgt daraus, dass der Körper in entgegengesetzter Richtung mit der Schwere getrieben wird, weil" (sollte heißen »wie«) „der Theil der Flüssigkeit, dessen Stelle er einnimmt, es in der Richtung der Schwere werden würde." — Die verunstaltete Stelle des Originals lautet: „*cette portion de liquide étant supposée continuée à hauteur égale comme*" (in gleicher Höhe so fortgesetzt angenommen wird wie) „*le liquide qui entoure le corps, et qui peut être homogène ou hétérogène. Il suit de là que le corps est poussé en sens contraire de la pesanteur, comme le serait, dans le sens de cette force, la partie du liquide dont il tient la place.*"

Ein Ellipsoid schwimmt bekanntlich dann in stabilem Gleichgewicht, wenn seine verticale Hauptaxe die kleinste ist, wie auch das Original lehrt. — Vielleicht war es in Nr. 156 die Revision, die für Uebereinstimmung des Textes und der Figur sorgte, denn wir lesen: „dass die verticale Axe des Ellipsoids die grösste sein müsse."

In Nr. 181 lesen wir: „die von dem d'Alembert'schen Princip gelieferten Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = \varrho\,(g - u'),\ \frac{dp}{dy} = -\,\varrho\,v',\ \frac{dp}{dz} = -\,\varrho\,w',$$

wo $u'$, $v'$, $w'$, welche Grössen Differentialquotienten nach $t$ sind, die Componenten der Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte bedeuten." — Das Original sagt: „*$u'$, $v'$, $w'$ étant les dérivées, par rapport au temps, des composantes de la vitesse en un point quelconque*". — Man übersetzt also richtig: »worin $u'$, $v'$, $w'$ die Ableitungen der Geschwindigkeitscomponenten irgend einer Molekel in einem gewissen Punkt« (es handelt sich um eine permanente Bewegung) »nach der Zeit bezeichnen.«

In Nr. 187, für die kleinen Bewegungen einer elastischen Flüssigkeit, werden die Gleichungen gefunden:

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{3}$$

wo $\gamma$ die Condensation und $\varphi$ diejenige Function von $x$, $y$, $z$, $t$ bezeichnet, deren partielle Ableitungen nach $x$, $y$, $z$ in jedem Augenblick die Componenten der Geschwindigkeit darstellen. Zur Bestimmung der willkürlichen Functionen, welche durch die Integration eingehen, muß man die Anfangswerthe von $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ kennen. Der Anfangswerth von $\frac{d\varphi}{dt}$ wird durch den nothwendig bekann-

ten für $y$ gegeben. Von den Anfangswerthen der Componenten der Geschwindigkeit wird vorausgesetzt, daß sie die partiell nach $x$, $y$, $z$ genommenen Ableitungen einer Function von $x$, $y$, $z$ bilden, und man erhält aus ihnen diese Function mit einer willkürlichen Constante. Auf diese Constante kommt bei der vorliegenden Aufgabe nichts an, weil alle gesuchten Größen bloß durch Differenziiren von $\varphi$ gefunden werden; sie darf deshalb ganz außer Acht bleiben, und man kann somit die Function $\varphi$, für $t = 0$, als durch die bekannten Anfangswerthe von $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ bestimmt betrachten. — Hören wir nun die Uebersetzung in dem Passus: „und da letztere" (die Constante) „keinen Einfluss auf die gesuchten Grössen haben kann, weil sie alle durch Differentiation der Function $\varphi$ erhalten werden, so braucht man derselben keine Rechnung zu tragen, und kann die allgemeine Function $\varphi$ als bekannt betrachten, wenn man sie für $t = 0$ kennt." Die Gleichung (3) zu integriren, ist man hiernach überhoben, man kennt ja $\varphi$ überhaupt, da man es für $t = 0$ kennt. — Das Original sagt: „*et l'on peut considérer la fonction générale $\varphi$ comme connue lorsqu'on y fait $t = 0$.*"

In Nr. 192 sieht man *branche d'une courbe* durch „Werth einer Curve" übersetzt.

In Nr. 196 will das Original die Bewegung eines Gases in einer endlichen Röhre betrachten; die Uebersetzung macht sie „unendlich". — Einen Anfangszustand in unendlicher Ausdehnung macht sie zu einem „unbestimmten" Anfangszustand.

In Nr. 198 sagt das Original von einem Werthe für $\varphi$, er genüge allen Bedingungen mit alleiniger Ausnahme des Anfangszustandes. — Die Uebersetzung sagt von ihm, daß „er jedem ausser dem anfänglichen Zustande genügt."

*Résoudre par rapport à* heißt in Nr. 206 „reduciren auf".

Nr. 210. „*On chercherait ensuite le mouvement sur le cercle osculateur de la seconde section, d'après le déplacement et la composante de la vitesse parallèlement au second plan.*" — Uebersetzung: „nachher ist die Bewegung auf dem Krümmungskreise des zweiten Schnittes, welcher durch die Verrückung und die Componente der Geschwindigkeit nach der zweiten Ebene bestimmt ist, zu ermitteln."

Man wird an diesen Proben genug haben; sie mögen als Beweis dienen, daß die Eggers'sche Uebersetzung ein Werk ist, welches „hinsichtlich der richtigen Verdeutschung des Originals und dessen Ergänzung und Berichtigung nach dem neuesten Standpunkt der Wissenschaft" keinen Wunsch übrig läßt. — Wer sich die Mühe geben will, dem verspricht das Buch noch eine reiche Ausbeute an ähnlichen Curiositäten.