Lehrbuch der reinen Mechanik

in zwei Theilen

Duhamel, Jean Marie Constant

1853

Vorbemerkungen

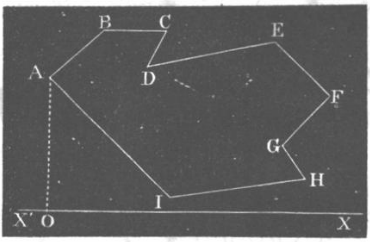
urn:nbn:at:at-ubi:2-6579

Vorbemerkungen *).

Projection eines geschlossenen Polygons auf eine Gerade.

Die Projection einer Geraden auf eine andere ist die Entfernung der Fusspunkte der von den Endpunkten der ersten auf die zweite gefällten Senkrechten, oder, mit anderen Worten, der Abstand der beiden durch die Endpunkte der ersten auf die zweite senkrecht geführten Ebenen. Ihr Werth ist gleich dem Product der gegebenen Geraden in den Cosinus des Winkels, welchen sie mit einer Parallelen zur anderen bildet, und welchen man Winkel der gegebenen Geraden nennt.

Fig. 1.



Dieses festgesetzt, betrachten wir (Fig. 1) ein geschlossenes Polygon, eben oder nicht, $ABCDEFGHI$, und eine Richtung $X'X$; A sei der Eckpunkt, welcher so ist, dass die Ebene AO, senkrecht auf $X'X$, alle anderen Eckpunkte auf einer Seite und im Sinn der gegebenen Richtung $X'X$ lässt.

---

*) Diese Vorbemerkungen haben zum Zweck, an einige häufig angewandte Formeln zu erinnern und den Sinn festzustellen, in welchem sie in diesem Buche genommen werden.

Wir nehmen einen Punkt, der von A ausgeht und das Polygon durchläuft, ohne jemals auf eine von ihm schon beschriebene Seite zurückzukommen.

Jede Seite, deren Richtung, in dem Sinne genommen, worin sie beschrieben wird, einen spitzen Winkel mit der Richtung $X'X$ macht, entfernt den beschreibenden Punkt von der Ebene AO; jede Seite, für welche dieser Winkel stumpf ist, nähert ihn derselben, und die Strecke, um welche er entfernt oder genähert wird, ist die Projection der beschriebenen Seite auf $X'X$. Darum, nach irgend einer Anzahl von durchlaufenen Seiten, wird die Entfernung des Punktes von der Ebene AO die Summe der Projectionen der Seiten sein, deren Richtungen mit $X'X$ spitze Winkel machen, weniger die Summe der Projectionen der anderen, welche stumpfe Winkel machen. Sie wird also die algebraische Summe der Producte der absoluten Seitenlängen sein mit den positiven oder negativen Cosinus der Winkel, welche die bezüglichen Richtungen dieser Seiten in dem Sinn, in dem sie beschrieben werden, mit der festen Richtung $X'X$ machen. Wenn nun das ganze Polygon durchlaufen und der Punkt also in A wieder angekommen ist, so ist seine Entfernung von der Ebene AO Null; woraus der Satz erhellt:

Die Summe der Producte der Absolutwerthe der Seiten eines geschlossenen Polygons in die Cosinus der Winkel, welche die Richtungen seiner Seiten mit einer festen Richtung machen, ist gleich der Null.

Man darf aber nicht vergessen, dass diese Richtungen in dem Sinn gemeint sind, in welchem die Seiten von einem Punkt durchlaufen werden, der sich im einen oder anderen Sinn auf diesem Polygon bewegt, der aber niemals auf die schon beschriebenen Seiten zurückkommt.

Winkel zweier Richtungen.

Wenn man drei rechtwinklige Axen hat, und durch den Ursprung zwei Richtungen führt, welche mit den positiven Axen die Winkel (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ machen, so kann man den Winkel V dieser beiden Richtungen mit einander bestimmen und ihn von seinem Nebenwinkel unterscheiden. In der That, nehmen wir auf der Richtung (α, β, γ) einen Punkt in irgend einer Entfernung r vom Ursprung; wenn man r positiv nimmt, so hat man die allgemeinen Formeln:

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma.$$

Projiciren wir jetzt auf die Richtung (α', β', γ') das durch x, y, z, r gebildete Polygon, das wir uns in dem von diesen Buchstaben angezeigten Sinn durchlaufen denken. Der Satz, den wir anwenden wollen, verlangt, dass die Seiten des Polygons absolut genommen werden. Wenn also x, y, z alle drei positiv sind, so wird man haben:

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - r\cos V = 0.$$

Wäre eine der Coordinaten, z. B. y, negativ, so würde der Absolutwerth dieser Polygonseite $-y$ sein; da aber die Richtung, in welcher sie durchlaufen würde, die der negativen y wäre, so würde der Cosinus $-\cos\beta'$ und der Ausdruck würde immer $y\cos\beta'$ sein; dergestalt ist die vorige Gleichung ganz allgemein, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, die Zeichen der Coordinaten beachtet. Ersetzt man x, y, z durch ihre Werthe, so fällt r hinaus und man erhält:

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Die Bedingung dafür, dass die beiden Richtungen senkrecht auf einander stehen, ist:

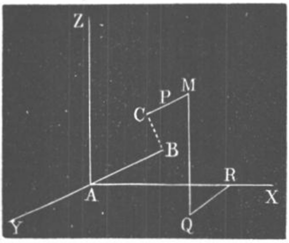
$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Länge der Senkrechten aus einem Punkt auf eine Ebene.

Nehmen wir an eine Ebene, die gegeben sei durch die Winkel α, β, γ, welche die Richtung AB der vom Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Senkrechten mit den Axen macht, und durch die Länge p dieses Stückes; die Lage dieser Ebene ist vollkommen bestimmt. Man giebt ferner die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes M im Raume, und verlangt den Ausdruck der Senkrechten MC, welche von M auf die Ebene gefällt ist, und die wir durch P bezeichnen wollen.

Zu dem Ende betrachten wir das geschlossene Polygon $ARQMCBA$ (Fig. 2), dessen drei ersten Seiten die Coordinaten x, y, z sind, und projiciren es auf die Richtung AB.

Fig. 2.



Wenn der Punkt M und der Punkt A sich auf verschiedenen Seiten der Ebene befinden, so haben wir die Gleichung:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - P - p = 0,$$

deren Allgemeinheit erkannt wird, wie in dem vorhergehenden Fall. Wenn, im Gegentheil, M und A auf derselben Seite der Ebene sind, so wird man haben:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma + P - p = 0.$$

Man hat also im ersten Fall:

(1) $$P = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p.$$

Im zweiten Fall müsste man das Zeichen des zweiten Gliedes der Gleichung ändern; also die Formel (1) giebt der Senkrechten einen positiven Werth, wenn der Punkt, aus dem man sie fällt, und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Ebene, und sie giebt ihr einen negativen Werth, wenn beide Punkte auf derselben Seite liegen. Diese Formel wird also gleiche Zeichen geben den Senkrechten, die auf einer und derselben Seite der Ebene liegen, und verschiedene Zeichen denjenigen, die auf verschiedenen Seiten liegen. Die Gleichung (1) führt augenblicklich auf die Gleichung der Ebene in rechtwinkligen Coordinaten. In der That, für alle Punkte der gegebenen Ebene, und für sie allein, hat man $P = 0$; die Gleichung dieser Ebene wird also sein, wenn man die Coordinaten im einen Sinn als positiv und im anderen als negativ betrachtet:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p.$$

Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so wird die Gleichung der Ebene zur Gleichung einer Geraden, und reducirt sich auf:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta = p.$$

Der Ausdruck für die Senkrechte auf diese Gerade, aus dem Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, wird:

$$P = x \cos\alpha + y \cos\beta - p.$$

Länge der Senkrechten aus einem Punkt au eine Gerade.

Wir setzen voraus eine Gerade, bestimmt durch die Coordinaten x, y, z eines ihrer Punkte, und durch die Winkel α, β, γ, welche ihre Richtung mit den positiven Coordinatenaxen macht, und suchen den Ausdruck der Senkrechten p, die auf diese Gerade aus dem Punkt mit den Coordinaten a, b, c gefällt ist.

Bezeichnen wir durch d die Länge der Geraden, welche die beiden Punkte $(a b c)$, $(x y z)$ verbindet, und durch δ den Winkel, den ihre Richtung mit der gegebenen Geraden macht; so haben wir $p = d \sin \delta$, und, wenn man vom Zeichen absieht:

$$\cos\delta = \frac{x-a}{d} \cos\alpha + \frac{y-b}{d} \cos\beta + \frac{z-c}{d} \cos\gamma,$$

woraus

$$d \sin\delta = \sqrt{d^2 - [(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]^2} = p;$$

setzt man für d^2 seinen Werth $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, so erhält man:

$$p = \sqrt{[(y-b)\cos\gamma - (z-c)\cos\beta]^2 + [(z-c)\cos\alpha - (x-a)\cos\gamma]^2 + [(x-a)\cos\beta - (y-b)\cos\alpha]^2}.$$

Rückt der Punkt a, b, c, aus dem man die Senkrechte fällt, in den Ursprung, so hat man:

$$p = \sqrt{[y\cos\gamma - z\cos\beta]^2 + [z\cos\alpha - x\cos\gamma]^2 + [x\cos\beta - y\cos\alpha]^2}.$$

Sätze über die Projectionen der Flächen.

Die Projection einer ebenen Fläche auf eine Ebene ist gleich der Fläche, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels beider Ebenen, oder des Winkels der Normale auf die erste Fläche, welche Axe derselben heisst, mit der Senkrechten auf die Projectionsebene.

So lange man nur die Absolutwerthe berücksichtigt, so kann man diese Senkrechten nehmen, in welchem Sinn man will; aber oft hat man eine Unterscheidung zu machen, z. B. wenn man Rotationsbewegungen in jenen Ebenen betrachtet. In diesem Fall wählt man zur Richtung der Axe diejenige, in Bezug auf welche die Bewegung in einem passenden Sinn vorgeht, den wir immer von links nach rechts voraussetzen für einen Beobachter, der in der Axe steht und die Füsse auf die Ebene gestützt hat.

Vorausgesetzt, dass man so für jede Fläche die Richtung ihrer Axe bestimmt habe, seien a, a', a'' .... ebene Flächen, die auf eine beliebige Weise im Raum liegen; α, β, γ, α', β', γ', etc. seien die Winkel ihrer bezüglichen Axen mit den positiven Coordinatenaxen. Wenn man diese Flächen auf die Coordinatenebenen projicirt, sie zuvor aber beziehungsweise durch beliebige Grössen m, m', m'', etc. multiplicirt, und wenn man die Projectionen als positiv oder als negativ betrachtet, je nachdem die Axen der Flächen spitze oder stumpfe Winkel mit den positiven Coordinatenaxen machen, so werden die algebraischen Summen dieser Projectionen auf die Ebenen YZ, ZX, XY bezüglich sein:

$$\Sigma m a \cos\alpha,\ \Sigma m a \cos\beta,\ \Sigma m a \cos\gamma.$$

Projicirt man nun diese drei Summen auf eine Ebene, deren Axe mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν bildet, so erhält man:

$$\cos\lambda\, \Sigma m a \cos\alpha + \cos\mu\, \Sigma m a \cos\beta + \cos\nu\, \Sigma m a \cos\gamma$$
$$= \Sigma m a\, (\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu) = \Sigma m a \cos V,$$

indem man unter V den Winkel der Axe der neuen Ebene mit der Axe einer beliebigen von den Flächen versteht. Man erhält also die algebraische Summe der Projectionen auf eine Ebene, deren Axe gegeben ist, sobald man die drei Summen kennt:

$$\Sigma m a \cos\alpha,\ \Sigma m a \cos\beta,\ \Sigma m a \cos\gamma,$$

welche wir durch A, B, C bezeichnen wollen; und ihr Ausdruck ist

$$A \cos\lambda + B \cos\mu + C \cos\nu,$$

oder

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ (\cos p \cos\lambda + \cos q \cos\mu + \cos r \cos\nu)$$
$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \cos U,$$

wenn man macht:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos p, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos q,$$

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos r,$$

und mit U den Winkel der Richtungen bezeichnet, die mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν und p, q, r machen.

Die durch $\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cos U$ ausgedrückte Summe ist ein Maximum für $U = 0$, und ist Null für $U = \frac{\pi}{2}$; woraus sogleich sich der folgende Lehrsatz ergiebt:

1. Die von den Winkeln p, q, r bestimmte Richtung ist die der Axe derjenigen Ebene, für welche die Summe der Projectionen der von beliebigen Grössen multiplicirten Flächen auf sie am grössten ist.

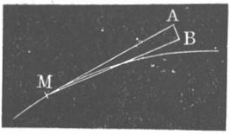
2. Diese Summe ist Null für alle senkrechten Ebenen auf diejenige, die dem Maximum entspricht.

3. Sie ist dieselbe für alle Ebenen, deren Axen gleiche Winkel mit der Axe der Maximumebene machen.

Richtung der Normale, welche durch den Krümmungsmittelpunkt geht.

MA (Fig. 3) sei eine Verlängerung der Tangente im Punkt M an eine Curve von doppelter Krümmung, MB sei parallel zu der Tangente durch einen unendlich nahen Punkt, und liege auf derselben Seite von M wie die Verlängerung MA; wir nehmen $MB = MA = 1$, und beschreiben aus dem Mittelpunkt M den Zirkelbogen AB, welcher den Berührungswinkel AMB misst, den wir mit ω bezeichnen wollen. Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung MA mit den Coordinatenaxen bildet, seien a, b, c; und $a+da$, $b+db$, $c+dc$ diejenigen, welche sich auf die unendlich nahe Tangente beziehen.

Fig. 3.



Man weiss, dass die Ebene AMB zur Grenze die Berührungsebene hat; und es ist augenscheinlich, dass die Richtung der Sehne AB mit MA einen rechten Winkel zu machen und in die Berührungsebene hinein zu kommen trachtet; daher sie als Grenze die Richtung der aus dem Punkt M nach dem Krümmungsmittelpunkt gezogenen Normale hat. Indem man das Polygon MAB auf die drei Axen projicirt, und für die Sehne AB den Bogen ω setzt, so erhält man die drei folgenden Gleichungen, in denen λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die Richtung AB, oder die von M nach dem Krümmungsmittelpunkt gezogene Gerade mit den Axen macht:

$$da = \omega \cos\lambda, \quad db = \omega \cos\mu, \quad dc = \omega \cos\nu,$$

woraus

$$\omega = \sqrt{da^2+db^2+dc^2}, \quad \cos\lambda = \frac{da}{\omega}, \quad \cos\mu = \frac{db}{\omega}, \quad \cos\nu = \frac{dc}{\omega}.$$

Man vergesse aber nicht, dass die Cosinus a, b, c sich beziehen auf die Verlängerung der Tangente nach der Seite hin, nach welcher auf der Curve die Verrückung des Berührungspunktes vorgenommen wird, woraus sich dann die Zuwachse da, db, dc ergeben. Würde man sie auf entgegengesetzte Weise betrachten, so würden auch die Winkel λ, μ, ν auf die entgegengesetzte Verlängerung der Normale Bezug haben.

Winkel einer Senkrechten auf zwei Geraden mit den Axen.

Es seien (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ die von den Richtungen der gegebenen Geraden mit den positiven Axen der x, y, z gebildeten Winkel; und λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung der Senkrechten mit denselben Axen macht; man hat also die beiden Bedingungen:

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = 0,$$
$$\cos\alpha' \cos\lambda + \cos\beta' \cos\mu + \cos\gamma' \cos\nu = 0.$$

Diese zwei Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der drei unbekannten Cosinus, und geben:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \cos\beta' \cos\gamma - \cos\gamma' \cos\beta$$
$$: \cos\gamma' \cos\alpha - \cos\alpha' \cos\gamma : \cos\alpha' \cos\beta - \cos\beta' \cos\alpha;$$

und da die Summe der Quadrate der drei Cosinus der Einheit gleich ist, so findet man, wenn man vorher setzt

$$[\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta]^2 + [\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma]^2$$
$$+ [\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha]^2 = D^2,$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta}{\pm D}, \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma}{\pm D},$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha}{\pm D},$$

wo der Nenner mit einerlei Zeichen für alle drei Cosinus genommen werden muss, da diese in demselben Verhältniss wie ihre Zähler stehen sollen. Den Werth von D^2 kann man unter der Form darstellen:

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma')$$
$$- (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2;$$

er ist also gleich:

$$1 - \cos^2 V = \sin^2 V,$$

wenn V den Winkel der beiden Geraden bedeutet; man hat daher:

$$\cos\lambda = \pm \sin^{-1} V (\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta)$$
$$\cos\mu = \pm \sin^{-1} V (\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma)$$
$$\cos\nu = \pm \sin^{-1} V (\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha).$$

Man erhält auf diese Weise zwei entgegengesetzte Richtungen; und, in der That, bisher bestimmt nichts, in welchem Sinn man die Senkrechte nehmen will.

Unterscheidung des Sinnes der Senkrechten auf zwei Richtungen.

Durch den Ursprung seien zwei Parallelen gelegt zu den von den Winkeln $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ bestimmten Richtungen; wir nehmen auf der ersten einen beliebigen Punkt: seine Coordinaten x, y, z werden proportionirt sein den Cosinus der Winkel α, β, γ, und beziehlich von denselben Zeichen: durch diesen Punkt führen wir eine Parallele zu der Richtung $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$, und denken uns einen Punkt auf dieser Parallelen in Bewegung. Der Leitstrahl vom Ursprung nach diesem Punkt geht aus von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$, und nähert sich der Richtung $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$, die auch durch den Ursprung geht.

Denken wir uns jetzt einen Beobachter, der in der Senkrechten auf die Ebene der beiden Geraden steht und die Füsse auf diese Ebene gestützt hat; die Bewegung des Leitstrahls wird ihm vorzugehen scheinen von links nach rechts oder umgekehrt, je nachdem er auf der einen oder anderen Seite der Ebene sich befindet. Wir unterscheiden diese zwei Sinne, indem wir direct nennen denjenigen, in welchem die Bewegung von der Linken zur Rechten, und rückgängig den anderen, in dem sie von der Rechten zur Linken geschieht; und wir verstehen unter Richtung der Axe der Ebene der beiden Geraden, in welcher die Bewegung vorgeht, die Richtung der Senkrechten, in dem Sinn, für welchen diese Bewegung direct ist.

Die Werthe der Cosinus der Winkel λ, μ, ν, welche die Senkrechte mit den Coordinatenaxen macht, sind, nach den vorhergehenden Formeln, in denen man x, y, z an die Stelle von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ setzt:

$$\cos\lambda = \frac{y\cos\gamma' - z\cos\beta'}{\pm p},\quad \cos\mu = \frac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{\pm p},$$
$$\cos\nu = \frac{x\cos\beta' - y\cos\alpha'}{\pm p},$$

während p den Ausdruck bedeutet

$$\sqrt{[y\cos\gamma' - z\cos\beta']^2 + [z\cos\alpha' - x\cos\gamma']^2 + [x\cos\beta' - y\cos\alpha']^2};$$

so dass p nichts Anderes ist, als die vom Ursprung gefällte Senkrechte auf die durch den Punkt x, y, z gehende Parallele zu der Richtung $(\alpha'\beta'\gamma')$. Es handelt sich nur noch darum, zu wissen, welches Zeichen man p geben müsse, damit die Winkel λ, μ, ν der Richtung der Axe der Ebene angehören, so wie wir dieselbe definirt haben. Bemerken wir zunächst, wenn in einer beliebigen Ebene, die wir um der Einfachheit willen durch den Ursprung gehen lassen, ein Leitstrahl sich um diesen Punkt in einem gewissen Sinn bewegt; wenn ferner man diesen Leitstrahl auf eine andere Ebene projicirt, so ist die Axe der Bewegung des Leitstrahls in der neuen Ebene von den beiden Richtungen der Senkrechten auf diese neue Ebene diejenige, welche mit der Richtung der Axe der ersten Bewegung einen spitzen Winkel macht.

Dieses vorausgesetzt, betrachten wir zuerst die Projection des Leitstrahls auf die Ebene XY, und bezeichnen durch θ den Winkel, welchen seine Richtung mit der Richtung der positiven x bildet, dergestalt, dass die positive Axe der y einem $\theta = \frac{\pi}{2}$ entspricht. Die Bewegung wird direct sein, in Bezug auf die Axe der positiven z, wenn θ mit ihr zunimmt; und im entgegengesetzten Fall wird sie direct sein in Bezug auf die Axe der negativen z. Und man weiss ausserdem, dass ein Winkel wächst oder abnimmt immer zugleich mit dem algebraischen Werth seiner Tangente.

Die Projection des Leitstrahls nach dem Punkt (x, y, z) auf die Ebene XY macht mit der Axe der x einen Winkel, dessen Tangente zum allgemeinen Ausdruck hat $\frac{y}{x}$. Wenn der Punkt x, y, z in der Richtung $(\alpha' \beta' \gamma')$ um irgend eine Grösse m vorrückt, so wird diese Tangente $\frac{y + m \cos \beta'}{x + m \cos \alpha'}$; ihr Zuwachs ist also $\frac{m [x \cos \beta' - y \cos \alpha']}{x^2 + m x \cos \alpha'}$; und, da man m klein genug nehmen kann, damit der Nenner positiv sei, so wird das Zeichen dieses Zuwachses dasselbe sein wie das des Zählers, oder wie das Zeichen von $x \cos \beta' - y \cos \alpha'$.

Also, die Projection des Leitstrahls auf XY wird eine Bewegung haben, deren Axe die der positiven z ist, wenn man hat:

$$x \cos \beta' - y \cos \alpha' > 0;$$

und folglich werden die Axe der Bewegung im Raum und die Axe der positiven z einen spitzen Winkel machen. Ebenso werden die Projectionen auf YZ und XZ eine directe Bewegung haben in Bezug auf die Axen der positiven x und y, wenn man hat:

$$y \cos \gamma' - z \cos \beta' > 0, \quad z \cos \alpha' - x \cos \gamma' > 0.$$

Im Fall eine dieser Ungleichheiten entgegengesetzt sein sollte, so würde die Bewegung direct sein in Bezug auf die negative Axe; und die Axe der Bewegung im Raum würde einen stumpfen Winkel mit der entsprechenden positiven Axe machen.

Man sieht daher, dass die Cosinus der Winkel, welche die Axe der Bewegung, die wir betrachten, mit den positiven

Axen der x, y, z macht, einerlei Zeichen haben bezüglich mit den Zählern der vorher gefundenen Werthe; dass man also p positiv nehmen muss, was die folgenden Formeln giebt:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{y\cos\gamma' - z\cos\beta'}{p}, \quad \cos\mu = \dfrac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{p}, \\ \cos\nu = \dfrac{x\cos\beta' - y\cos\alpha'}{p}. \end{cases}$$

Wenn man jetzt x, y, z durch die proportionirten Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, welche mit den ersten einerlei Zeichen haben, ersetzt, so erhält man:

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \sin^{-1}V\,(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'), \\ \cos\mu = \sin^{-1}V\,(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'), \\ \cos\nu = \sin^{-1}V\,(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'), \end{cases}$$

wo V noch immer den Winkel der beiden Richtungen bezeichnet.

Diese Formeln beziehen sich auf die Axe der in der Ebene der beiden Richtungen (α, β, γ), (α', β', γ') von einem Leitstrahl vollzogenen Bewegung, welcher um ihren gemeinsamen Punkt läuft, indem er von der ersten ausgeht und der zweiten sich nähert. Wenn man unter gleichem Verfahren jede Richtung mit der anderen vertauschte, so würde man eine Bewegung im entgegengesetzten Sinn haben, und in der That würden die vorhergehenden Ausdrücke für die Cosinus augenscheinlich ihr Zeichen wechseln, ohne ihren absoluten Werth zu ändern.

Wenn der Winkel der beiden gegebenen Richtungen ein rechter wäre, so würde man erhalten:

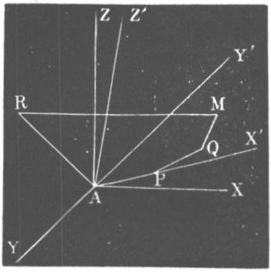
$$(3)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta', \\ \cos\mu = \cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma', \\ \cos\nu = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'. \end{cases}$$

Formeln für die Transformation der Coordinaten.

Nehmen wir uns vor, von einem System rechtwinkliger Coordinaten x, y, z überzugehen auf ein beliebiges System schiefer Coordinaten x', y', z', das denselben Ursprung hat, und setzen wir voraus, wie wir immer thun werden, die Anordnung der Axen sei eine solche, dass, wenn ein Leitstrahl sich um den Ursprung in den drei Winkeln der positiven Axen bewegt, von der Axe der x ausgehend gegen die Axe der y, dann gegen die Axe der z hin, und von da weiter nach der Axe der x zurück, dann die Richtungen der positiven Axen beziehungsweise die Axen dieser drei Bewegungen seien. Seien a, a', a'' die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der positiven x' mit den bezüglichen Richtungen der positiven x, y, z macht; b, b', b'' die Cosinus, welche sich auf die Richtung der positiven y', und c, c', c'' diejenigen, welche sich auf die Richtung der positiven z' beziehen.

Betrachten wir irgend einen Punkt M (Fig. 4), dessen drei Coordinaten x', y', z' vorgestellt seien durch AP, PQ, QM; fällen wir $MR = x$ senkrecht auf YZ, und ziehen RA. Dieses geschlossene Polygon, projicirt auf AX, giebt, nach einem vorhergehenden Satz:

Fig. 4.



$$ax' + by' + cz' - x = 0,$$

wenn nur die vier Coordinaten x', y', z', x positiv sind. Wenn irgend eine von ihnen, z. B. y', negativ wäre, so würde die Polygonseite, da ihr Absolutwerth genommen werden muss, $-y'$ sein; aber, da sie jetzt im Sinne der negativen y' durchlaufen würde, so würde der Cosinusfactor sein Zeichen wechseln und $-b$ werden; der zu schreibende Ausdruck ist also immer by', und die Gleichung ist allgemein, sobald man als negativ die Coordinaten betrachtet, welche im entgegengesetzten Sinn der durch die gegebenen Cosinus bestimmten Axen gerichtet sind.

Man würde zwei andere analoge Gleichungen finden für die Coordinaten y und z. Die allgemeinen Transformationsgleichungen sind also:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a x' + b y' + c z', \\ y &= a' x' + b' y' + c' z', \\ z &= a'' x' + b'' y' + c'' z', \end{aligned} \right.$$

und man hat die nothwendig zu erfüllenden Bedingungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

wenn die neuen Axen rechtwinklig wären, so würde man ferner haben:

$$(3)\qquad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{cases}$$

so dass man nur drei von den neun Grössen a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' willkürlich annehmen kann.

Wenn beide Systeme rechtwinklig sind, so kann man vom zweiten zum ersten durch ähnliche Formeln zurückgehen; daher die Gleichungen (1), (2), (3) dann nach sich ziehen die folgenden:

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z, \\ y' = bx + b'y + b''z, \\ z' = cx + c'y + c''z; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt, ziehen diese Gleichungen die ersten nach sich, und die beiden Systeme (1), (2), (3) und (4), (5), (6) sind folglich identisch.

Die Grössen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ stehen noch in anderen wichtigen Beziehungen, welche aus den vorhergegangenen abgeleitet werden könnten, wobei aber anfangs eine Zweideutigkeit bleiben würde, die man nicht ohne einige Mühe verschwinden macht. Wir wollen zeigen, wie man sie erhalten kann auf eine viel einfachere Weise, und ohne jede Ungewissheit wegen der Zeichen.

Wir bemerken zuerst, dass man zwei Unterstellungen zu machen hat in Bezug auf die Ordnung der positiven Axen der beiden Coordinatensysteme. Wenn sie in derselben Ordnung sind, so kann man die Richtungen der x', y', z' zusammenfallen machen beziehungsweise mit denen der positiven x, y, z. Wenn sie in umgekehrter Ordnung sich befinden, und wenn man dann die Richtungen der x' und y' mit den Richtungen der positiven x und y hat zusammenfallen gemacht, so werden die Richtungen der z' und der positiven z gerade entgegengesetzt sein.

Da die Axe der x' senkrecht ist auf die Ebene der Axen der y' und z', so kann man die Winkel, welche sie mit den drei Axen der x, y, z macht, bestimmen nach der Formel (3) des vorigen Abschnittes, wo man $\sin V = 1$ voraussetzt; man muss ausserdem bemerken, ob die Axen der x', y', z' in derselben Ordnung sind wie die ersten. Unter dieser Voraussetzung ist die Axe der positiven x' die Axe der Bewegung eines Leitstrahls von AY' gegen AZ' hin; die Winkel α, β, γ der Formeln (3) beziehen sich also auf AY', und α', β' γ' auf AZ'; und umgekehrt würde es sein, wenn die Ordnung der drei Axen umgekehrt wäre.

Wenn man also, in den Formeln (3), a, a', a'' für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ setzt, so hat man, unter der Voraussetzung einer gleichen Anordnung der Axen in beiden Systemen:

$$a = b'c'' - c'b'', \quad a' = cb'' - bc'', \quad a'' = bc' - cb',$$

und im Fall der umgekehrten Anordnung:

$$a = c'b'' - b'c'', \quad a' = bc'' - cb'', \quad a'' = cb' - bc',$$

Gleichungen, welche sich von den ersten nur durch die Zeichen der zweiten Glieder unterscheiden.

Verfährt man ebenso für die Axen der y' und der z', so erhält man ähnliche Gleichungen, so dass die neun Grössen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ durch die folgenden Relationen verbunden sind, im Falle die Anordnung der Axen in beiden Systemen dieselbe ist:

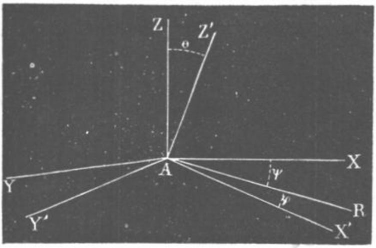
$$(7) \qquad \begin{cases} a = b'c'' - c'b'', & a' = cb'' - bc'', & a'' = bc' - cb', \\ b = c'a'' - a'c'', & b' = ac'' - ca'', & b'' = ca' - ac', \\ c = a'b'' - b'a'', & c' = ba'' - ab'', & c'' = ab' - ba'. \end{cases}$$

Im Fall die Anordnung der Axen umgekehrt wäre, so müsste man die Zeichen der zweiten Glieder dieser neun Gleichungen ändern.

Die neuen Axen x', y', z', anstatt durch neun Grössen, zwischen denen sechs Beziehungen stattfinden, können durch drei allein bestimmt werden, und wir wollen die Formeln kennen lehren, welche hierüber von Euler sind gegeben worden.

Wir nehmen an, die neuen Axen haben dieselbe Anordnung wie die alten, und wir bestimmen sie, indem wir geben den Winkel ψ, den die Spur AR (Fig. 5) der Ebene $Y'X'$ auf XY mit der Axe der positiven x macht; den Winkel θ, welchen die Ebene $X'Y'$ mit XY bildet, und der auch der Winkel der Axen AZ, AZ' ist; und endlich den Winkel φ, den AX' mit AR macht; es ist aber wesentlich, mit Bestimmtheit der Sinn anzugeben, in welchem jeder von diesen Winkeln genommen werden soll.

Fig. 5.



Wir zählen den Winkel ψ im Sinn der directen Bewegung von AX gegen AY, und er kann gehen von 0 bis 2π; aber auf welche von den beiden entgegengesetzten Richtungen AR, AR' soll er sich beziehen? Um sie zu bestimmen, denken wir uns eine directe Bewegung um AZ, welche AX nach AR und AY nach AY_1 führt; dann eine directe Bewegung um AR, die AZ zusammenfallen macht mit AZ', welches stattfinden wird, entweder nachdem man das System um den Winkel θ gedreht hat, den man immer kleiner als π voraussetzt, oder nachdem es um $2\pi - \theta$ gedreht worden ist; nun giebt es aber nur eine von den beiden Richtungen AR, AR', für welche der Drehungswinkel θ ist, und diese ist es, welche wir zur Bestimmung des Winkels ψ wählen.

Man sieht hiernach, dass man von den alten Axen übergeht auf die neuen, indem man, im directen Sinn, das System der ersten sich drehen macht um einen Winkel ψ um AZ; indem man dann sie sich drehen lässt um einen Winkel θ um AR, und endlich um einen Winkel φ um AZ'. Nach der ersten Drehung werden die Axen in der Lage AR, AY_1, AZ sein, und wir bezeichnen durch x_1, y_1, z die nach diesen Richtungen gezählten Coordinaten. Nach der zweiten Drehung haben sie die Lage AR, AY_2, AZ', und wir bezeichnen durch

x_1, y_2, z' die entsprechenden Coordinaten. Endlich, nach der dritten Drehung, fallen sie zusammen mit den Axen AX', AY', AZ', für welche die Coordinaten x', y', z' sind.

Wir können also übergehen von den alten Axen auf die neuen mit Hülfe von drei Transformationen, bei welchen man, da eine Axe unbewegt bleibt, nur Anwendung zu machen hat von der Transformation der Coordinaten in einer Ebene.

Man weiss nun, um von einem System rechtwinkliger Coordinaten u, v überzugehen auf ein ebenfalls rechtwinkliges System u', v', welches gleich, d. h. so geordnet ist, dass, sobald die Richtung der positiven u' zusammenfällt mit der Richtung der positiven u, dann auch die Richtungen der positiven v und v' zusammenfallen, hat man die zwei Formeln:

$$u = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha,$$
$$v = u' \sin\alpha + v' \cos\alpha,$$

wo α den Winkel bezeichnet, um den man die Axe der u im Sinne von u gegen v drehen muss, damit sie in die Axe der positiven u' falle. Diese Formeln würden sich in den Zeichen ändern, wenn die Anordnung der Axen umgekehrt wäre. Hiernach hat man die folgenden Gleichungen:

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi, \quad z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta,$$
$$x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Durch Eliminiren der Zwischengrössen x_1, y_1, y_2 erhält man die gesuchten Formeln:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) + z'\sin\psi\sin\theta, \\ y &= x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) - z'\cos\psi\sin\theta, \\ z &= x'\sin\theta\sin\varphi + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Die Vergleichung der Formeln (1) und (8) führt zu folgenden Gleichungen, welche dieselbe Allgemeinheit haben, wie diejenigen, aus denen man sie ableitet:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
a &= -\sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\theta + \cos\varphi\,\cos\psi,\\
b &= -\sin\psi\,\cos\varphi\,\cos\theta - \sin\varphi\,\cos\psi,\\
c &= \sin\theta\,\sin\psi;\\
a' &= \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\theta + \cos\varphi\,\sin\psi,\\
b' &= \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\theta - \sin\varphi\,\sin\psi,\\
c' &= -\sin\theta\,\cos\varphi;\\
a'' &= \sin\theta\,\sin\varphi,\\
b'' &= \sin\theta\,\cos\varphi,\\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Man könnte diese Formeln auch direct durch die sphärische Trigonometrie erhalten; dann würde aber noch eine mühsame Discussion nöthig sein, um ihre Allgemeinheit strenge zu erweisen.

Aus ihnen ergeben sich die folgenden, welche man gut thut zu bemerken:

$$(10)\qquad tang\,\varphi = \frac{a''}{b''},\quad tang\,\psi = -\frac{c}{c'};$$

differenziirt man die Gleichungen (9) in Bezug auf irgend eine Veränderliche t, so erhält man sehr nützliche Formeln.

Wenn man setzt:

$$c\,db + c'\,db' + c''\,db'' = p\,dt,\quad a\,dc + a'\,dc' + a''\,dc'' = q\,dt,$$
$$b\,da + b'\,da' + b''\,da'' = r\,dt;$$

woraus folgt, vermöge der Gleichungen (3):

$$b\,dc + b'\,dc' + b''\,dc'' = -p\,dt,\quad c\,da + c'\,da' + c''\,da'' = -q\,dt,$$
$$a\,db + a'\,db' + a''\,db'' = -r\,dt;$$

so findet man:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
p &= \cos\varphi\,\frac{d\theta}{dt} + \sin\varphi\,\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},\\
q &= -\sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt} + \cos\varphi\,\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},\\
r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

Ueber die geometrische Bewegung eines Systems von unveränderlicher Form.

Wenn man zwei auf einander folgende Stellungen betrachtet, die ein System von unveränderlicher Form einnimmt, ohne Rücksicht auf die Kräfte, welche es bewegt haben, und auf die Zeit, die es gebraucht hat, um von der einen in die andere zu kommen, so sieht man sogleich, dass es eine Unzahl von Wegen giebt, um es von der ersten in die zweite zu bringen; und man kann sich die Aufgabe stellen, die einfachsten und vortheilhaftesten Bewegungen zu bestimmen, mit Hülfe welcher man in jedem Fall diesen Uebergang bewerkstelligen kann.

Welche Verrückung auch immer ein System mag erlitten haben, so kann man es in seine neue Stellung überführen, indem man zuerst alle Punkte bewegt nach Linien, die parallel und gleich sind mit einer, welche die beiden Lagen eines und desselben Punktes des Systems, oder irgend eines Punktes, den man unveränderlich damit verbunden hat, verknüpft; dann, indem man diesen Punkt festhält und das System um ihn dreht, so lange bis zwei andere Punkte, die nicht mit dem Mittelpunkt in gerader Linie sind, ihre Lagen eingenommen haben.

Betrachten wir jetzt jede von diesen beiden Bewegungen, Verschiebung und Drehung, etwas näher.

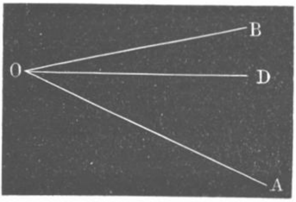
Es ist klar, dass der Punkt, den man betrachtet, von einer Lage in die andere kommen würde, indem er ein beliebiges Polygon beschriebe, das in der einen anfinge und in der anderen endigte. Woraus folgt, dass die erste Bewegung ersetzt werden kann durch eine Reihe von anderen Verschiebungen, die der Grösse und Richtung nach durch die verschiedenen Seiten des Polygons vorgestellt werden, und dass daher die Bewegungen dieser Art gerade so zusammengesetzt und zerlegt werden können, wie Kräfte, welche an einem Punkt angebracht sind.

Was die Drehung um den festen Punkt angeht, so ist leicht einzusehen, dass sie auf eine Unzahl von Arten in zwei Bewegungen um feste Axen zerlegt werden kann; denn man kann irgend einen Punkt aus einer Lage in seine andere bringen, indem man das System dreht um eine beliebige durch den festen Punkt gezogene Gerade, die in der Ebene liegt, welche man durch den festen Punkt senkrecht auf die Gerade geführt hat, welche die zwei Lagen des betrachteten Punktes verbindet, die nothwendig beide gleich weit vom Mittelpunkt abstehen. Nachdem das System jetzt zwei Punkte in der Lage hat, die sie einnehmen sollen, so ist gewiss, dass alle anderen in ihre Lage gebracht werden durch eine Umdrehungsbewegung um die Gerade, welche die beiden ersten verbindet. Die Frage ist also zurückgeführt auf die Betrachtung der Umdrehungsbewegungen um Axen, welche durch den festen Punkt hindurchgehen. Die Sätze, die wir darlegen werden, sind gezogen aus der *Théorie nouvelle de la Rotation des corps* von Poinsot; aber, bevor wir uns in diese Auseinandersetzung einlassen, wollen wir eine sehr einfache und sehr nützliche Bemerkung machen. Wenn ein Körper um eine feste Axe sich dreht, um eine unendlich kleine Winkelgrösse, so werden die unendlich kleinen Coordinatenänderungen irgend eines Punktes abhängen von den Coordinaten dieses Punktes, und von den anderen Daten der Aufgabe. Für einen unendlich nahen Punkt unterscheiden sich also diese Aenderungen von den ersten nur um gegen sie selbst wieder unendlich kleine Grössen, und man kann die einen Aenderungen für die anderen setzen. Man kann daher auch, bei der Bestimmung der unendlich kleinen Verrückung eines Körpers, der um eine Axe sich dreht, annehmen, dass der Körper, anstatt auszugehen von der gegebenen, ausginge von einer unendlich benachbarten Stellung; die Coordinatenänderungen eines jeden seiner Punkte so berechnet, können für die gesuchten genommen werden. Wenn man also einen Körper nach einander einer Anzahl von auf einander folgenden unendlich kleinen Umdrehungen zu unterziehen hat, so kann man jede von ihnen betrachten als vollbracht von der ursprünglichen Stellung des Körpers aus, und die Gesammtsumme der Coordinatenveränderungen eines jeden Punktes kann angesehen werden als die Veränderung, welche hervorgeht aus den auf einander folgend und in beliebiger Ordnung vorgenommenen Drehungen.

Zusammensetzung von Drehungen.

OA (Fig. 6) sei die Richtung einer Axe, um welche ein festes System sich dreht um irgend eine Winkelgrösse 2α, während der Sinn der Drehung in der vorher bezeichneten Weise bestimmt ist.

Fig. 6.

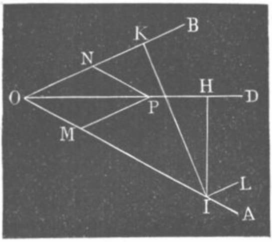


Dann sei OB eine zweite Axe, um welche das System um eine Winkelgrösse 2β sich dreht, nachdem die erste Drehung vollendet ist. Wir wollen zeigen, dass das System in dieselbe Lage kommen würde durch eine einzige Drehung um eine Axe, die durch denselben Punkt O geht.

In der That, führen wir durch OA eine Ebene, welche mit der Ebene AOB den Winkel α macht nach der Seite von OB hin, und durch OB eine andere Ebene, die mit AOB den Winkel β macht nach der Seite von OA hin. Augenscheinlich wird nach der ersten von beiden Drehungen die Durchschnittslinie OD der beiden Ebenen ihre symmetrische Lage in Bezug auf die Ebene AOB eingenommen haben, und nach der zweiten Drehung wird sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt sein. Das System würde also auch in seine zweite Lage kommen, wenn man es drehen würde um die Axe OD.

Diese Folgerung findet statt, wie gross auch immer die Winkel 2α, 2β seien; wir wollen aber insbesondere den Fall untersuchen, wo sie unendlich klein sind. In dem von den Kanten OA, OB, OD gebildeten körperlichen Dreieck verhalten sich die Sinus der Winkel BOD, AOD wie $\sin\alpha : \sin\beta$; also der Grenzwerth von $\frac{\alpha}{\beta}$, welcher Quotient das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ist, wenn man sich diese Winkel in einer und derselben Zeit beschrieben denkt, ist gleich dem Sinusverhältniss der Winkel, die mit OB, OA gebildet werden durch die Grenze der Axenrichtung OD, welche in die Ebene OAB hineinfällt. Die beiden unendlich kleinen Drehungen, von denen der Quotient der Winkelgeschwindigkeiten bekannt ist, setzen sich demnach in eine einzige zusammen um die Diagonale OP des Parallelogrammes als Axe, das man construirt hat mit den Geraden OM, ON (Fig. 7), die diesen Winkelgeschwindigkeiten proportional, vom Punkt O angefangen, auf den entsprechenden Axen abgetragen sind.

Fig. 7.

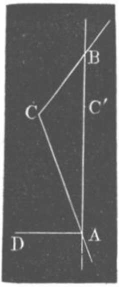


Es bleibt nur noch übrig, den Sinn der resultirenden Bewegung und die Grösse ihrer Winkelgeschwindigkeit zu finden. Zu diesem Zwecke wählt man einen beliebigen Punkt I auf der Axe OA, um welche die erste Drehung geschah; er wird seinen Ort ändern erst bei der zweiten Drehung, und wird eine unendlich kleine Gerade IL beschreiben senkrecht auf die Ebene AOB (Fig. 7). Fällen wir die Senkrechten IK, IH auf OB, OD. Die unendlich kleinen Winkel, um welche der Punkt I sich dreht, um OB oder OD, um in seine Lage L zu gelangen, werden durch Bewegungen von einerlei Sinn hervorgebracht, und verhalten sich umgekehrt wie IK und IH, oder $\sin KOI$ und $\sin HOI$, oder umgekehrt wie OP und ON. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit wird daher vorgestellt sein durch die Diagonale OP, weil die Winkelgeschwindigkeit um OB es durch ON ist. Ferner, nach dem was wir gesagt haben, ist der Sinn der Drehung um OD von der Linken zur Rechten, wie um OB. Daher endlich, wenn man auf den Richtungen zweier Axen, von ihrem Durchschnittspunkte angefangen, Grössen nimmt, welche die Winkelgeschwindigkeiten von Drehungen nach einander um diese beiden Axen vorstellen, so stellt die Diagonale des aus beiden Stücken construirten Parallelogrammes die Richtung der Axe der resultirenden Drehung vor und die Grösse ihrer Winkelgeschwindigkeit.

Man folgert daraus, dass die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen um Axen, die durch denselben Punkt gehen, auf gleiche Weise geschieht wie jene von Kräften, die nach diesen Axen gerichtet und der Grösse nach durch die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten vorgestellt sind.

A und B seien die Projectionen zweier parallelen Axen, deren Richtungen in demselben Sinne, z. B. über der senkrechten Ebene, auf welche sie projicirt sind, genommen werden. Dann seien noch 2α, 2β die Winkel, um welche das System nach einander sich dreht um A und B. AC (Fig. 8) sei die Spur einer Ebene, die durch die Axe A geht und mit AB den Winkel $CAB = \alpha$ gegen B hin macht; ebenso sei BC und mache den Winkel $CBA = \beta$ gegen A hin. Die Parallele zu den Axen, durch den Punkt C, wird nach beiden in der angegebenen Ordnung vollzogenen Drehungen in ihre anfängliche Lage zurückkehren. Die fragliche Verrückung würde also hervorgebracht durch eine Drehung um diese Gerade.

Fig. 8.



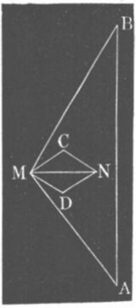
Wenn die Winkel α, β unendlich klein sind, so liegt der Punkt C auf der Geraden AB in einem Punkt C', welcher sie theilt im umgekehrten Verhältnisse der Winkel α, β, oder der Winkelgeschwindigkeiten.

Weiter, wenn die Drehung um A vollzogen ist und dann die Drehung um B geschieht, da der Punkt A auf derselben Seite von C' und von B liegt, und da die Drehung um C' ihn in denselben Punkt führen soll, so folgt daraus, dass sie in demselben Sinne geschehen muss wie die beiden anderen. Es bleibt nur noch, die Geschwindigkeit der resultirenden Drehung zu kennen. AD sei die unendlich kleine Linie, die der Punkt A um B beschreibt, dieselbe Linie beschreibt er um C', und die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie AB und AC'. Also, wenn die Winkelgeschwindigkeiten um A und B dargestellt sind beziehungsweise durch BC' und AC', so ist die resultirende Winkelgeschwindigkeit dargestellt durch AB.

Das Gesetz der Zusammensetzung zweier Drehungen von gleichem Sinne um parallele Axen ist also einerlei mit dem Gesetze der Zusammensetzung paralleler Kräfte von gleichem Sinne. Man würde dieselbe Einerleiheit finden auch im Fall von Drehungen entgegengesetzten Sinnes, durch Ableiten aus dem vorhergehenden Fall wie in der Zusammensetzung der Kräfte, oder durch unmittelbare Behandlung.

Wären die beiden Drehungen gleich und von entgegengesetztem Sinne, so hätte man das, was Poinsot Drehungspaar nennt. Der Erfolg dieser beiden Drehungen ist Verschiebung des Systems parallel mit der Axe des Drehungspaares. Denn es sei M (Fig. 9) ein beliebiger Punkt des Systems, so bewegt er sich in einer Ebene senkrecht auf die Axen; und wenn er für die einzelnen Drehungen die unendlich kleinen Linien MC, MD beschreibt, die beziehungsweise senkrecht auf die Geraden MA, MB und ihren Längen proportional sind, so kommt er an am Endpunkt N der Diagonale des auf MC, MD verzeichneten Parallelogrammes. Nun sind die Dreiecke MCN, AMB ähnlich, weil sie einen gleichen Winkel zwischen proportionirten Seiten haben, woraus folgt, dass MN senkrecht ist auf AB. Die Wirkung eines Drehungspaares ist also eine Verschiebungsbewegung im Sinn der Axe dieses Paares. Um den durchlaufenen Raum zu kennen, genügt es, irgend einen Punkt zu betrachten, A z. B., und es ist leicht zu sehen, dass er sich verschiebt um eine Grösse, die gleich ist der Entfernung AB, multiplicirt mit dem Drehungswinkel.

Fig. 9.



Und da wir gesehen haben, dass die Verschiebungsbewegungen sich zusammensetzen wie Kräfte, die an einem und demselben Punkt angebracht sind, so folgt, dass Drehungspaare auf gleiche Weise zusammengesetzt werden; und wenn man auf die Axe eines jeden derselben eine Länge aufträgt gleich dem Drehungswinkel, multiplicirt mit dem Hebelarme des betreffenden Paares, d. h. mit dem Abstand der beiden Drehungsaxen, so geben diese Längen, zusammengesetzt wie Kräfte von demselben Punkt an, der Grösse und Richtung nach die resultirende Verschiebungsbewegung.

Man bemerkt, dass eine Drehung um eine Axe A immer ersetzt werden kann durch eine identische Drehung um eine parallele Axe B und ein Drehungspaar, dessen Hebelarm AB ist; denn es genügt dazu, zwei Drehungen einzuführen um die

Axe B, die der ersten gleich und unter einander von entgegengesetztem Sinn sind, wodurch an der Verrückung nichts geändert wird.

Welche auch immer die unendlich kleinen Drehungen und Verschiebungen sein mögen, denen ein System unterliegt, so lassen sie sich zurückführen auf eine Drehung um eine Axe durch einen willkürlichen Punkt und eine von diesem Punkt abhängende Verschiebung.

In der That, jede Drehung um eine Axe kann umgesetzt werden in eine identische Drehung um irgend eine parallele Axe, und eine Verschiebung, oder ein Paar von Drehungen, abhängend von der Lage der neuen Axe. Alle Drehungen zusammengesetzt, geben eine und dieselbe resultirende Drehung um eine Axe von constanter Richtung, wo auch der Punkt sein mag, nach dem man alle Axen verlegt hat. Aber die gegebenen Verschiebungsbewegungen oder Drehungspaare, zusammengesetzt mit denjenigen, welche man eingeführt hat, geben ein resultirendes Paar oder eine Verschiebung, veränderlich an Grösse und Richtung.

Man könnte zeigen, wie Poinsot für Kräftepaare es gethan hat, dass der Punkt, um den es sich handelt, so gewählt werden kann, dass die Axe dieses Paares parallel ist zur Axe der resultirenden Drehung. Daraus folgt, dass jede unendlich kleine Verrückung des Systems hervorgebracht werden kann durch eine Bewegung, ähnlich der einer Schraube in ihrer Mutter, eine Bewegung, die in gewissen Fällen sich vereinfacht zu einer Drehung oder zu einer Verschiebung allein.