Lehrbuch der praktischen Physik

Kohlrausch, Friedrich

Leipzig [u.a.], 1910

Elastizität und Schall

urn:nbn:at:at-ubi:2-6442

Elastizität und Schall.

52. Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Dehnung.

Elastizitätsmoduln s. in Tab. 20.

Die Gestaltsänderung eines festen Körpers durch deformierende Kräfte heißt eine elastische, wenn sie nach Aufhören der Kräfte vollkommen verschwindet. — Kleine Deformationen wachsen den Kräften proportional; Hooke'sches Gesetz. Mit anderen Worten, durch eine elastische Deformation D entstehen in dem Körper molekulare, der Deformation entgegenwirkende, mit D proportionale Kräfte P.

Der Elastizitäts-Modul (oder -Koeffizient) charakterisiert die elastische Stärke des Materials dadurch, daß er für einen definierten Fall das Verhältnis P/D angibt. — Praktisch unterscheidet man den El.-Modul der Dehnung und den der Torsion. Der erstere, auch El.-Modul schlechthin genannt, bezeichnet die Kraft, welche sich durch eine Abstandsänderung paralleler Schichten entwickelt; über die zugehörigen Querverschiebungen vgl. **55a**. Auf die Dehnung läßt sich die Biegung zurückführen. Über Torsion vgl. **55**.

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft P bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde. Dann ist, wenn man den El.-Modul der Ausdehnung durch E bezeichnet, innerhalb der Proportionalitäts-Grenze

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}P \qquad \text{oder} \qquad E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q}.$$

E ist also das Verhältnis der Belastung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch die Belastung, welche die Länge eines Drahtes vom Querschnitt Eins verdoppeln würde, wenn das anfängliche Verhältnis der Verlängerung zur Belastung bis dahin bestehen bliebe.

Die Zahlengröße für einen El.-Modul hängt von den Einheiten ab, in denen Querschnitt und Gewicht gemessen werden:

Gebräuchliche technische Definition, E. Man pflegt die dehnende Kraft in kg-Gewichten, den Querschnitt meist in qmm zu messen (die Längeneinheit hebt sich heraus); Einheit von E ist dann das kg-Gew./mm^2.

Elastizitätsmodul E im CGS-System. Betrachtet man gr, kg usw. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheiten, so ist die dehnende Kraft $= gP$, wo g die Schwere bedeutet. Die Krafteinheit des CGS-Systems, die „Dyne", d. h. das Gewicht der Masse 1 gr an einem Orte, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sec^2 betrüge, ist also g mal kleiner, mithin der El.-M. $g$mal größer, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird. Einen in kg-Gew./mm² ausgedrückten El.-M. E hat man also, um den El.-M. E Dyne/cm² im CGS-System zu erhalten, erstens mit kg/gr = 1000, ferner mit cm²/mm² = 100 und endlich mit $g = 981$ cm/sec², also mit 98100000 zu multiplizieren. Vgl. Anh. 13.

E geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit im Körper in (cm/sec)². Vgl. **53**.

Mit wachsender Temperatur sinkt der El.-M. merklich, je nach dem Material recht ungleich; bei den untersuchten Metallen in mittlerer Temp. zwischen vielleicht $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{3}$ Prozent auf $+1^0$; vgl. Tab. 20.

Über den sog. zweiten El.-Modul vgl. **55**, über Querkontraktion **55a**.

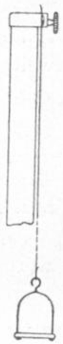
Kristalle. Die Elastizität von Kristallen („äolotropen" Körpern), d. h. von Körpern, die in allen ihren Teilen gleich beschaffen sind, deren elastische Eigenschaften jedoch, in jedem Punkte in derselben Weise, von der Richtung abhängen, läßt sich nicht durch zwei, sondern nur durch eine größere Anzahl von Elastizitäts-Konstanten erschöpfend beschreiben, die im allgemeinsten Falle auf 36 steigt. Zurückgeführt werden die Erscheinungen auf je drei von einander unabhängige, auf einander senkrechte „Hauptspannungen" und „Hauptdilatationen".

Über Kristall-Elastizität und ihre Literatur s. W. Voigt, die physikal. Eigenschaften der Kristalle, Leipz. 1898.

Wir beschränken uns auf homogene, als isotrop angenommene Körper.

Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Man befestigt das obere Ende des Drahtes (oder Stabes), belastet das untere wenn nötig zuerst so weit, daß der Draht gestreckt ist, und mißt seine Länge l. Der Querschnitt (vgl. S. 217) betrage q qmm. Man fügt eine Mehrbelastung P kg hinzu und bestimmt die Längenänderung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. Dann gilt

$$E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q}\frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$



Die Belastungsgrößen variiert man; vgl. das Beispiel, aber auch S. 219 die Frage nach der Abhängigkeit des El.-M. von der Dehnung.

Kann das obere Ende als unverschiebbar gegen die Meßvorrichtung am unteren Ende angenommen werden, ist z. B. ein dünner Draht dicht vor einem soliden vertikalen Maßstabe an diesem befestigt (Fig.), so mag man die Dehnung als Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Das Nachgeben einer Stütze kann auch dadurch vermieden werden, daß man sie mittels eines Fadens über einer Rolle durch eine der Belastung gleiche Kraft zugleich nach oben beansprucht.

Bei genauen Bestimmungen, sowie an Stäben oder stärkeren Drähten mißt man die Längenänderung als Differenz der Verschiebungen an beiden Enden. Hierzu dient z. B. ein auf einem Maßstabe (Kathetometer **22**) verschiebbares Mikroskop oder besser zwei feststehende Mikroskope mit Okularmikrometern (**21**, 4); die Marken können als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf einem angeklebten Papierstreifchen angebracht werden.

Elastizitätsgrenze. Die Dehnungen müssen innerhalb der El.-Gr. bleiben, das heißt, der Draht soll entlastet zur früheren Länge zurückkehren, was zu kontrolieren ist; s. aber auch unten „elastische Nachwirkung“. Die Elastizitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, daß man vor den Messungen stärker dehnt. — Selbst bei harten Metallen wird man die Hälfte der Belastung, bei welcher das Zerreißen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 20.

Ist ein Körper nach einer Richtung stark beansprucht (gedehnt, gebogen, gedrillt) gewesen, so daß seine Gestalt sich dauernd geändert hat, so pflegt seine neue Elastizitätsgrenze in der Richtung der vorausgegangenen Beanspruchung erweitert zu sein; man kann ihm, ohne dauernde Änderungen befürchten zu müssen, im neuen Zustande größere Deformationen (Dehnungen, Biegungen, Torsionen) zumuten, als von seinem natürlichen Zustande aus. Dies ist für eine genaue Messung vorteilhaft. Es werde indessen auf zweierlei hingewiesen.

Erstens ist der Molekularzustand des Körpers jetzt in der Weise unsymmetrisch geworden, daß der nach einer Richtung eingetretenen Erweiterung der El.-Grenze eine Verengung nach der entgegengesetzten gegenüber steht; es genügt jetzt unter Umständen eine sehr kleine Rückdeformierung, um die neue Gestalt dauernd zu ändern. (Bei ausschließlichen Dehnungsversuchen tritt dies, der Natur der Sache nach, nicht zu Tage; wohl aber, wenn Dehnungs- und Druckversuche, oder Biegungen bez. Torsionen entgegengesetzter Richtung auf einander folgen.)

Zweitens behalte man im Auge, daß in dem dauernd deformierten Körper ein anderer als der ursprüngliche Körper vorliegt; die Erfahrung zeigt, daß der El.-Modul sich gegen den früheren Zustand merklich geändert haben kann. Kommt es also darauf an, einen Körper gerade im ursprünglichen Zustande zu untersuchen, so darf man das Mittel, seine El.-Grenze durch vorgängiges Strecken usw. zu erweitern, nicht anwenden, sondern muß sich auf kleine Beanspruchungen beschränken.

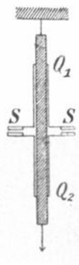
Dicke Stäbe (Bauschinger). Man überträgt den Unterschied der Verschiebungen beider Enden mittels paralleler Stangen komparatorisch mit Hilfe einer Gleitrolle oder eines Fühlhebels auf drehbare Spiegel oder auf Zeiger über einer Teilung; vgl. **25** u. **21**.

Der Stab sowohl wie die Last hängen dabei zentriert in Cardanischen Aufhängungen; die trotzdem auftretenden Biegungen müssen durch zwei zur Stabaxe symmetrische Beobachtungen eliminiert werden.

Siehe z. B. Martens, Materialienkunde I, 45 ff. u. 435 ff. 1898; Bach, Elastizität u. Festigkeit, 5. Aufl. § 8. 1905. — In beiden Werken auch eingehend die Methoden für Festigkeitsbestimmungen.

Verkürzungsmoduln werden im Prinzip ebenso an dicken Stäben und mit entsprechend großen zusammendrückenden Belastungen ermittelt.

Messungen an kurzen Stäben mittels Interferenzstreifen; vgl. **44** II u. **65** IV. Der Stab hängt zentriert an einem kurzen Stahldraht, an einem ebensolchen unten die Wagschale; s. Figurenskizze. Die Längenänderung zwischen zwei Querschnitten Q_1 Q_2 wird mittels zweier, den Stab eng umschließenden Röhren, die an Q_1 bez. Q_2 mit Spitzenschrauben befestigt sind, auf zwei Paare von Querstücken übertragen, an denen die planparallelen Glasplattenpaare S sitzen. Man beobachtet das Wandern der Fransen (Newton'scher Streifen oder Haidinger'scher Ringe), während die Belastung mittels eines Exzenters langsam erschütterungsfrei gewechselt wird; der Wanderung um eine Streifenbreite entspricht eine Längenänderung um $\frac{1}{2}$ Wellenlänge des angewandten Lichtes. Um Biegungen zu eliminieren, mißt man auf beiden Seiten.



Über die Ausführung vgl. Grüneisen, ZS f. Instr. 1907, 38; Ann. d. Ph. 22, 801. 1907; auch Shakespear, Phil. Mag. (5) 47, 539. 1899.

Querschnittsmessung. 1. Durch Messung des Durchmessers, für kleine Dicken mit Fühlhebel, Sphärometer oder Mikroskop (**21**).

2. Durch Wägung. Wiegen h mm eines Drahtes von der Dichtigkeit s (**15** u. Tab. 2) m mg, so ist der Querschnitt $q = m/(hs)$ mm².

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861$ mm². — Die Dehnungsversuche ergaben in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,89 mm	1,09 mm
3.	0,6 „	913,85 „	*4.*	2,6 „	914,96 „	1,11 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $P = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm.

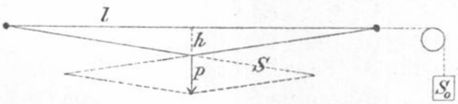
Hieraus folgt $$E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q} = \frac{913{,}8 \cdot 2{,}0}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im CGS-System ist dieser Elastizitätsmodul (S. 214 u. Anh. 13)

$$\mathsf{E} = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \cdot 10^9 [\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathrm{sec}^{-2}].$$

Über die gleichzeitige Anwendung zweier gleicher parallel aufgehangener Drähte, an denen unten ein Wagebalken befestigt ist, vgl. Cassie, Proc. Phys. Soc. London **18**, 215. 1902. In einem Spiegel an der Stirnseite des Balkens werden die Neigungen beobachtet, die durch wechselnde Belastung der einen oder anderen Seite entstehen. Auch kann die vertikale Schwingungsdauer des Balkens zur Bestimmung dienen, wobei das Trägheitsmoment aus Horizontalschwingungen abgeleitet wird (**29** III).

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in der Mitte belastet, so daß er geknickt wird. Es sei l die halbe Länge des Drahtes. S_0 bezeichne die ursprüngliche Spannung, h die durch die Belastung P bewirkte Senkung.



1. S_0 sei bekannt, nämlich als Gewicht über eine Rolle (Fig.), welches das eine Drahtende spannte, als dieses (ohne Verschiebung!) eingeklemmt wurde, so gilt für kleine h

$$E = \frac{1}{h^2}\left(P\frac{l}{h} - 2S_0\right)\cdot\frac{l^2}{q}. \qquad 1.$$

2. Die Ausgangsspannung sei unbekannt. Man beobachtet eine zweite Senkung h' durch die Belastung P' und rechnet

$$E = \frac{P'/h' - P/h}{h'^2 - h^2}\cdot\frac{l^3}{q}. \qquad 2.$$

Für größere Senkungen ist Ausdruck 2 mit $1 + 3(h^2 + h'^2)/(4l^2)$ zu multiplizieren. — P'/h' und P/h sind wenig verschieden, so daß h und h' genau beobachtet werden müssen.

Beweis. λ ergibt sich aus $(l+\lambda)^2 = l^2 + h^2$, wenn λ^2 vernachlässigt wird, $\lambda = \frac{1}{2}h^2/l$. Die Längsspannung S des Drahtes durch P ist $S = P\cdot l/2h$, also $E = (S - S_0)l/(\lambda q) = (Pl/2h - S_0)2l^2/(h^2 q)$, q. e. d. Denselben Ausdruck mit P' und l' zum Eliminieren von S_0 benutzend erhält man Gl. 2.

Elastische Nachwirkung (**55c**). Vermöge dieser wachsen die Deformationen, auch innerhalb der El.-Grenze, mehr oder weniger mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen tunlichst kurze Zeit wirken zu lassen; die Temperaturerniedrigung, welche die Ausdehnung begleitet, ist klein und verschwindet in dünnen Drähten schnell. Streng genommen hat man zwei El.-Moduln bei kurzer und bei Dauer-Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere selbst bei harten Körpern um mehrere Prozent kleiner sein kann.

Abweichungen von der Proportionalität. Die Dehnung wächst in Wirklichkeit mit der Belastung ein wenig beschleunigt. Bei dem gewöhnlichen Verfahren werden also aus größeren Dehnungen etwas kleinere El.-Moduln abgeleitet als aus geringen; die Unterschiede können Prozente betragen.

Ein Stab habe durch die Belastung p pro Querschnittseinheit bereits eine elastische Dehnung ε pro Längeneinheit erfahren; sein El.-M. in der Nachbarschaft dieses Zustandes heiße E_ε, d. h. es sei $d\varepsilon/dp = 1/E_\varepsilon$. Dann gilt erfahrungsmäßig nahe $E_\varepsilon = E_0 - a\varepsilon$, wo E_0 der El.-M. für kleine Dehnungen und a eine Konstante ist, die vom Material und von dessen Vorbehandlung abhängt. a ist unbedeutend für harte Drähte aus Platin, Silber, Kupfer, Stahl, Messing, Neusilber, groß hingegen z. B. für Gußeisen, Gesteine, Beton. Bei Zug- und Druckbeanspruchung hat a verschiedene Werte.

Aus obiger Formel ergibt sich die Dehnung ε vom natürlichen Zustande an, wenn $\frac{1}{2}a/E_0^2 = A$ bezeichnet wird,

$$\varepsilon = \frac{p}{E_0}(1 + Ap + 2A^2p^2) \quad \text{oder auch nahe} \quad \varepsilon = \frac{p}{E_0}\frac{1}{1-Ap}.$$

Vgl. die Versuche von J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891; ferner Bach, l. c. § 4, wo die Formel $\varepsilon = Cp^n$ als Interpolationsformel brauchbar gefunden wird; F. K. u. Grüneisen, Berl. Sitz. Ber. 1901, 1086; Berliner, Ann. d. Ph. 20, 527. 1906, besonders über Gußeisen; F. A. Schulze, Marburger Ber. 1908, 87; Grüneisen, Verh. D. Ph. Ges. 1906, 469. Über verschiedene Formeln: Mehmke, ZS f. Math. u. Phys. 1897.

Weiche Körper von faseriger Struktur, wie Leder oder Seile, folgen anderen Beziehungen zwischen der Belastung und der Dehnung.

53. Elastizitätsmodul aus Längsschwingungen.

In einem Körper von der Dichtigkeit s und dem in CGS-Einheiten ausgedrückten El.-M. E gilt für die in cm/sec gemessene Schallgeschwindigkeit U, d. i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elastischen Verdichtungs-(Longitudinal-)Welle, die wichtige einfache Beziehung

$$U^2 = \mathsf{E}/s, \quad \text{also} \quad \mathsf{E} = U^2 s \text{ Dyne/cm}^2. \qquad 1.$$

Der in kg-Gew./mm² ausgedrückte El.-M. ist (S. 215) $E = \mathsf{E}/98100000$. Wenn man, wie gebräuchlich, die Fortpfl.-Geschw. in m/sec ausdrückt und so mit U_m bezeichnet, so kommt demnach

$$U_m^2 = 9810\, E/s\, (\text{m/sec})^2, \quad \text{also} \quad E = U_m^2 s/9810 \text{ kg-Gew./mm}^2. \qquad 2.$$

Aus einer Wellenlänge Λ und der Schwingungszahl N folgt die Fortpflanzungs-Geschw. $= \Lambda N$ in den Λ und N zu Grunde gelegten Einheiten.

Schwingt ein an den Enden freier Stab mit einem Knoten oder ein an den Enden geklemmter Draht mit einem Bauch in der Mitte, so ist seine Länge gleich einer halben Wellenlänge. Aus der Schw.-Z. N und der Stablänge l findet sich also $U = 2lN$. 3.

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht von der Länge l cm oder $\frac{1}{100}l = l_m$ Meter werde zum Ansprechen seines longitudinalen

Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. N sei die Tonhöhe, d. h. Schwingungszahl/sec (vgl. **57** und Tab. 21). Dann ist nach Gl. 1 bis 3

$$\mathsf{E} = (2Nl)^2 s \frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2} \quad \text{oder} \quad E = \frac{(2Nl_m)^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen erzeugt man durch Reiben mit einem, für Metall oder Holz mit Kolophonium eingeriebenen, für Glas angefeuchteten wollenen Lappen.

Die Tonhöhe wird z. B. durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel ermittelt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**57** II, 3). — Es ist oft schwierig, nach dem Gehör die Oktave zu bestimmen, in welcher die sehr hohen Töne liegen; ein Fehler wird jedoch leicht bemerkt, weil er das Resultat mindestens um das vierfache fälscht.

Beispiel. Der Eisendraht von S. 217 gab bei der Länge $l = 136{,}1$ cm den Longitudinalton ais_3, also (Tab. 21) die Schwingungszahl $N = 1843$. Dichtigkeit $s = 7{,}61$; mithin

$$\mathsf{E} = (2 \cdot 1843 \cdot 136{,}1)^2 \cdot 7{,}61 = 1915 \cdot 10^9 \text{ Dyne/cm}^2$$

$$E = \frac{(2 \cdot 1843 \cdot 1{,}361)^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Mittels der raschen Schwingungen bestimmt fällt ein El.-M. in der Regel ein wenig größer aus als durch Ausdehnung bestimmt, weil es an Zeit fehlt erstens für den Ausgleich der Kompressionswärme und zweitens für die elastische Nachwirkung; vgl. S. 218 u. **55b**.

Über die Bestimmung aus Staubfiguren vgl. **56**.

54. Elastizitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

Im folgenden werden die Krümmungshalbmesser groß gegen die Dicke, die Durchbiegungen klein gegen die Länge des Stabes und homogenes und isotropes Material vorausgesetzt.

Ein gerader rechteckiger, am einen Ende horizontal eingeklemmter Stab von der Länge l, der Dicke (Höhe) a und der Breite b, alles in mm gemessen, erfährt durch eine Belastung von P kg am freien Ende eine Senkung (Durchbiegung) h (Beweis s. S. 222)

$$h = \frac{4}{E} \frac{l^3}{a^3 b} P \text{ mm.} \qquad 1.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt vom Halbmesser r ist statt $a^3 b$ zu setzen $3r^4\pi$ oder $3q^2/\pi$, wenn $q = r^2\pi$ den Querschnitt bedeutet. — Für einen beliebigen Querschnitt ist maßgebend das „Trägheitsmoment K der Querschnittsfigur, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale“, wobei man die Figur als eine Platte auffaßt, deren Flächeneinheit die Masseneinheit besitzt; z. B. für das obige Rechteck $K = ab \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{12} a^3 b$, für den Kreis $K = r^2 \pi \cdot \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{4} r^4 \pi$ (**29** I). Vorausgesetzt, daß diese Horizontale eine Hauptaxe des Trägheitsmoments ist, gilt dann

$$h = \frac{1}{3} \frac{1}{E} \frac{l^3}{K} P. \qquad 2.$$

h ist von der Gestalt aus zu rechnen, welche der etwa durch Eigengewicht schon etwas gebogene Stab ohne Belastung hat.

Ein beiderseitig aufgelegter, in der Mitte belasteter Stab erfährt eine 16mal kleinere Durchbiegung als die obige; vgl. S. 223.

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maßstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). Eine Belastung des freien Endes durch P kg bewirke die Senkung (den „Pfeil") h mm. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b; die freie Länge des Stabes sei $= l$, alles in mm. Dann ist nach Gl. 1 der El.-M.

$$E = 4 \frac{l^3}{a^3 b} \frac{P}{h} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

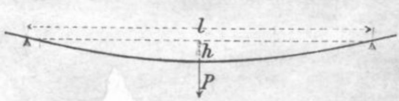
Über andere Querschnitte vgl. oben. Über die Bestimmung kleiner Querschnitte durch Wägen s. S. 217.

Man belaste, auch im folgenden, vor der Messung mit dem größten nachher anzuwendenden Gewicht und prüfe in jedem Falle, ob nach Entlasten die frühere Gestalt entsteht.

Eine Schwierigkeit bietet die feste Klemmung.

Dünne Drähte. Die Methode ist leicht auf dünne Drähte anwendbar, die man in einen Schraubstock mit glatten Backen klemmt. Über die Berechnung vgl. den Eingang und über die Bestimmung von r S. 217. Kleine Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden durch eine zweite Bestimmung eliminiert, bei der man den Draht um 90^0 gedreht hat.

II. Aufgelegter Stab. Man legt den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auf. Der Abstand der letzteren von einander sei gleich l. Eine Belastung P der Stabmitte bringe daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaßstab Kathetometer), so ist



$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{P}{h} \qquad \frac{l^3 P}{12 r^4 \pi h}$$

$$h = \frac{1}{4} \frac{l^3 P}{3 r^4 \pi E}$$

Dünne lange Stäbe biegen sich durch ihr Eigengewicht zu stark. Man kann dies mittels eines über eine (reibungsfreie) Rolle geführten Fadens mit Wagschälchen vermeiden, dessen Belastung die Stabmitte nach oben beansprucht.

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung P der Mitte bewirke im Falle II den Neigungswinkel α eines Endquerschnittes, so ist

$$E = \tfrac{3}{4} \frac{l^2}{a^3 b} \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

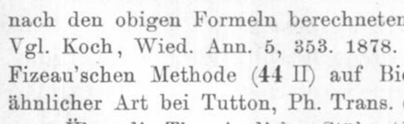
Zur Messung von α verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (**25**). Besser ist die Beobachtung beider Enden und die Mittelnahme. — Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, ein wenig geneigt, so daß das Licht der Skale von dem einen zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird. Fernrohr und Skale stehen jetzt einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg} \alpha = n/(4A + 2d)$. — A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886; über Korrektionen wegen schiefer Spiegelung vgl. Winkelmann u. Schott, ib. 51, 697. 1894. — Eine andere Spiegelmethode für kurze Stäbchen bei Voigt, Wied. Ann. 31, 474. 1887.

Alle Formeln setzen wie gesagt kleine Krümmungen voraus. Starke Krümmung ist wegen der Verschiebung der Enden auf ihren Lagern auch mit Reibung verbunden.

Dickere Stäbe. Verschwindet a^2 nicht gegen l^2, so kommt zu den nach den obigen Formeln berechneten E der Korrektionsfaktor $1 + 3a^2/l^2$. Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878. Siehe ebenda die Anwendung der Fizeau'schen Methode (**44** II) auf Biegungsmessung. Ein „Elasmometer" ähnlicher Art bei Tutton, Ph. Trans. (A) 202, 143. 1903.

Über die Theorie dicker Stäbe (de Saint-Venant) s. z. B. Love, Theory of Elast. 2. Aufl. 1906. § 227 ff; Übers. von Timpe, Leipz. 1907, S. 379.

Ableitungen für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien, vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen" Schicht. Dann wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun ε der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht,



nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke $\mathrm{d}\varepsilon$ sucht sich also mit der Kraft $E\varepsilon b \cdot \mathrm{d}\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ zusammen ein Drehmoment $2Eb\varepsilon^2 \cdot \mathrm{d}\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$. Das in einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehmoment ist also

$$2Eb\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\int_0^{a/2}\varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon = Eb\frac{a^3}{12}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Dieses elastische Drehmoment muß dem von dem angehängten Gewicht an diesem Querschnitt ausgeübten Moment $P(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}(l-x),$$

woraus $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \text{ und } y = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Am Ende x (merklich $= l$) ist hiernach die Neigung $\mathrm{tg}\,\varphi$ und die Senkung h

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_l = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{6}{E}\frac{Pl^2}{a^3 b}, \qquad y_l = h = \frac{4}{E}\frac{Pl^3}{a^3 b}$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da ferner ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}P$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\mathrm{tg}\,\varphi$ 8mal, die Senkung 16mal kleiner als obiges $\mathrm{tg}\,\varphi$ und h.

54a. Elastizitätsmodul aus Querschwingungen.

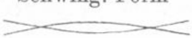
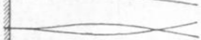
Schwingungszahlen N des Grundtons und der Obertöne cylindrischer Stäbe.

E bedeute den El.-M. in CGS-Einheiten; vgl. S. 214. Alle Dimensionen seien in cm gemessen. l ist die Länge, s die Dichte, m ist ein von der Nummer des Tones abhängiger Zahlenkoeffizient; s. unten.

a) Kreisquerschnitt vom Durchmesser d $\quad N = \frac{1}{4}\frac{d}{l^2}\frac{m^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{s}}/\mathrm{sec}.$

b) Rechteckiger Querschnitt mit der, zur Schwingungsrichtung parallelen Seite a $\quad N = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{a}{l^2}\frac{m^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{s}}/\mathrm{sec}.$

Für einen freien, bez. einen einseitig geklemmten Stab gilt:

	Schwing.-Form	m	Knotenabstände vom Ende
Grundton		4,730	$0{,}2242\,l$
2ter Ton		7,853	$\frac{1}{2}l$ und $0{,}1321\,l$
3ter „		11,00	$0{,}3558\,l$ und $0{,}0944\,l$
Grundton		1,875	
2ter Ton		4,694	$0{,}2261\,l$
3ter „		7,855	$0{,}4999\,l$ und $0{,}1321\,l$.

Weiterhin beträgt m für den Ton Nr. k: frei $(k+\frac{1}{2})\pi$, geklemmt $(k-\frac{1}{2})\pi$.

Über Theorie und frühere Literatur (u. A. Strehlke, Lissajous, A. Seebeck) vgl. Rayleigh, Theory of Sound, deutsch von Neesen, § 160ff. Ferner Aufsätze von Morrow im Phil. Mag. seit 1905.

Nach dem vorigen läßt sich, homogenes und isotropes Material vorausgesetzt, der El.-M. aus den Eigenschwingungszahlen eines Stabes, also, wenn diese innerhalb der musikalischen Skale liegen, aus den Tonhöhen (**57**; Tab. 21) berechnen. Man erregt die Schwingungen z. B. durch Anschlagen mit einem weichen Hammer oder durch Anstreichen. Beiderseits freie Stäbe werden an zwei Knoten in Fadenschlingen aufgehängt oder auf Kautschukfäden gelegt; an einseitig freien hält man die Stelle des dem Ende nächstliegenden beabsichtigten Knotens mit einer Spitze fest. — Die Knotenlinien können mit Streusand sichtbar gemacht werden.

Sind die Querdimensionen nicht klein gegen die Länge, so bedürfen die Formeln einer Korrektion wegen der Rotationsenergie der Querschnitte. Vgl. Rayleigh, l. c. § 186. — Ausführungen der Methode bei Strehlke, Pogg. Ann. 27, 505 u. 28, 512, 1833; Wertheim, ib. Ergbd. II, 1. 1848; F. A. Schulze (kleine Stäbe), Ann. d. Ph. 13, 583. 1904; Grüneisen l. c. (S. 217). — Über langsame Schw. dünner Stäbchen in Verbindung mit einer schweren Scheibe Voigt, Wied. Ann. 48, 674. 1893. — Weiche Stäbe (z. B. Wachs); auf solche überträgt man Transv.-Schw. eines harten Stabes mittels eines Stegs und mißt die Knotenabstände mit Sand. Vgl. Warburg, Pogg. Ann. 136, 285. 1869.

Membrane und Platten. Über Schwing.-Formen und Schwing.-Zahlen vgl. u. a. Chladni, Akustik, Leipz. 1830; Rayleigh l. c. § 193 u. 214ff. Ferner Platten: Kirchhoff, Pogg. Ann. 81, 258. 1850, ausführlich Ges. Abh. S. 237; Elsas, Wied. Ann. 19, 474. 1883; Melde, ib. 66, 767. 1898; F. A. Schulze, Ann. d. Ph. 24, 785. 1907. — Membrane: Antolik, Verh. Verein f. Natur- u. Heilkunde 14, 1, Pressb. 1903.

55. Torsionsmodul.

Der T.-M. werde, im CGS-System, d. h. in Dyne/cm² (vgl. Anh. 7 u. 13) ausgedrückt, mit Φ bezeichnet; in der technischen Einheit kg-Gew./mm² gemessen, durch F. Es ist (vgl. S. 215) $F = \frac{1}{98100000}\Phi$. Wir rechnen im allgemeinen mit Φ, weil die Beziehungen so am übersichtlichsten werden.

An einem einseitig geklemmten kreiscylindrischen Stabe oder Drahte von l cm Länge und r cm Halbmesser sei das freie Ende vermöge eines Drehmomentes $\mathfrak{D}$ Dyne $\times$ cm verdreht um den in absolutem Maße (**25**; Anh. Nr. 3) gemessenen Winkel α; $\alpha \times 57{,}30$ gibt also Bogengrade. Dann ist

$$\mathfrak{D} = \Phi\,\frac{\alpha}{l}\,\frac{\pi}{2}\,r^4 \quad \text{oder} \quad \Phi = \frac{1}{\alpha}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{l}{r^4}\,\mathfrak{D}. \qquad 1.$$

Man setzt voraus, daß $r\alpha/l$ klein bleibt; nur an dünnen langen Drähten darf also die Endverdrehung einen beträchtlichen Wert erreichen.

Beweis s. am Schluß. — Für F gelten dieselben Gleichungen, wenn l und r in mm und $\mathfrak{D}$ in kg-Gew. $\times$ mm gemessen sind.

I. Bestimmung durch Verdrehungen.

Ein Drehmoment von P kg-Gew. am Hebelarm h mm bewirke am einen Ende eines Kreiscylinders (Drahtes) von l mm Länge und r mm Radius einen Drehungswinkel von γ Bogengraden; dann ist nach obigem

$$F = \frac{57,3}{\gamma}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{l}{r^4}\,hP\,\frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \Phi = 98100000\,F\,\frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}.$$

Über die Ausführung s. z. B. Slotte, Act. Fenn. 35, Nr. 8, Helsingf. 1908.

II. Aus langsamen Schwingungen (Coulomb 1784).

An dem Drahte (l, r) hänge eine Masse vom Trägh.-Mom. K cm² gr. Nach Gl. 1 ist seine Direktionskraft (Anh. 11a) $D = \frac{\mathfrak{D}}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\frac{r^4}{l}\Phi$, folglich gilt für die Torsions-Schw.-D. t dieser Masse in sec (vgl. Anh. 12) die Gl.

$$t^2 = \pi^2 \frac{K}{D} = 2\pi \frac{l}{r^4}\frac{K}{\Phi}. \qquad 2.$$

Man belastet (Fig.) einen Draht von l cm Länge und r cm Halbmesser (**21**, 4 u. S. 217) mit einer geeignet gestalteten Masse vom Trägh.-Mom. (**29** I) K cm² gr und beobachtet (**28**) die Schw.-D. t sec. Nach Gl. 2 ist dann der T.-M.

$$\Phi = 2\pi \frac{l}{r^4}\frac{K}{t^2}\,\frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}$$

und

$$F = \frac{1}{98100000}\,\Phi\,\frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}. \qquad 3.$$

Ein Cylinder (Kreisscheibe; Fig.) vom Radius R und der Masse M hat das auf die Axe bezogene Tr.-Mom. $\frac{1}{2}R^2M$.

Man kann auch die Schw.-D. t_0 einer Masse von unbekanntem Tr.-Mom. und, nach Zufügung eines bekannten Tr.-Mom. K_1, die gemeinschaftliche Schw.-D. t_1 beobachten und in die Formel statt K/t^2 einsetzen $K_1/(t_1^2 - t_0^2)$. Vgl. **29** II.

Über die Anwendung auf dünne Stäbchen von rechteckigem Querschnitt (vgl. das folgende) s. Voigt, Wied. Ann. 48, 664. 1893.

Andere Querschnitte; St. Venant 1855. (Die Theorie anderer als kreisförmiger Querschnitte verwickelt sich dadurch, daß die Querschnittsgestalt sich durch das Drillen ändert.) Schreiben wir für einen Stab all-

gemein das Drehmoment $\mathfrak{D} = \Phi\alpha/l \cdot N$, so ist der Faktor N:
Ellipse von den Ganzaxen a und b $N = \frac{1}{16}\pi a^3 b^3/(a^2 + b^2)$.
Schmales Rechteck von den Seiten a und b; solange $b < \frac{1}{3}a$, gilt nahe $N = \frac{1}{3}ab^3(1 - 0{,}630\, b/a)$; mithin Grenzwert für dünnes Band $N = \frac{1}{3}ab^3$. Für dickere Rechtecke anstelle von 0,630 eine von St. Venant in Tafeln berechnete Funktion von b/a.

Man kann N auch aus dem Flächeninhalt q und dem auf die Stabaxe bezogenen Trägheitsmoment K der Querschnittsfigur (vgl. auch **54** im Eingang) berechnen, nämlich $N = \varkappa \cdot q^4/K$,
wo der Faktor $\varkappa$ für Ellipse[1]) und Kreis $\varkappa = 1/4\pi^2 = 0{,}0253$ ist. Für Rechtecke vom Seitenverhältnis

	1 (Quadrat)	2	3	4
gilt	$\varkappa = 0{,}0234$	0,0238	0,0249	0,0260.

St. Venant, Mém. sav. étr. XIV, 233. Paris 1856; C. R. 88, 142. 1879; Love-Timpe § 225; Auerbach, Winkelm. Hdb. 2. Aufl. I, 664. 1908.

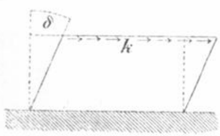
III. Aus Eigenschwingungen kreiscylindrischer Stäbe.

In einem Kreiscylinder (Dichte $= s$) pflanzt sich eine Torsionsverschiebung fort mit der Geschw. $U = \sqrt{\Phi/s}$ cm/sec. 4.

Man klemme den Stab (Länge $= l$ cm), in der Mitte von einem Drahtringe umschlossen, in den Schraubstock und errege mittels eines aufgeschlitzten, mit Kolophonium eingeriebenen Korkringes unter Fingerdruck den Torsionsgrundton von der Wellenlänge $2l$. Seine Schwingungszahl/sec sei $= N$. Dann gilt also (vgl. auch **53**) $N = \sqrt{\Phi/s}/2l$ oder $\Phi = 4N^2 l^2 s$ CGS. 5.

Schneebeli, Pogg. Ann. 140, 608. 1870; Grüneisen, Ann. d. Ph. 25, 827. 1908. Über rechteckige Stäbe F. A. Schulze ib. 13, 583. 1904.

Erläuterungen. Torsions- oder Gleit- oder Scheerungs- oder Schiebungs-Modul oder zweiter El.-M. Eine Platte von der Flächeneinheit sei in ihrer natürlichen Gestalt rechteckig.



Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Ebene wirke eine, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilte, der festen Fläche parallele Gesamtkraft von k Dynen. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen den kleinen „Scheerungswinkel" δ bilden. Dann ist Φ das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = \Phi\delta$.

Torsions-Drehmoment eines Kreiscylinders. Man denke sich diesen in dünne konzentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äußeren Halbmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Quer-

1) Für eine Ellipse a, b ist $q = \frac{1}{4}\pi ab$ und $K = \frac{1}{64}\pi ab(a^2 + b^2)$.

schnitt um den Winkel α, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\alpha\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Scheerungswinkel δ der Schichten gegeneinander. Somit wird die Torsionselastizität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho\, d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $\Phi \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho \cdot \alpha\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi\Phi\varrho^3 d\varrho \cdot \alpha/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so daß das über die ganze Endfläche des Drahtes integrierte (Tab. 50a) Drehmoment $\mathfrak{D}$, in Übereinstimmung mit Gl. 1, S. 224, beträgt:

$$\mathfrak{D} = 2\pi\Phi \frac{\alpha}{l} \int_0^r \varrho^3 d\varrho = \Phi \frac{\pi r^4}{2} \frac{\alpha}{l}.$$

Die beträchtlichen Abweichungen, denen die hierin ausgedrückte Abhängigkeit vom Durchmesser bei dünneren Drähten unterliegt, beweisen einen Mangel an Homogenität. Vgl. Baumeister, Wied. Ann. 18, 578. 1883.

Über das Verhältnis des Torsions- zum Dehnungsmodul s. unten.

55a. Poisson'sche Konstante μ (Querkontraktion).

Die elastische Dehnung durch Zug ist in der darauf senkrechten Richtung von einer Kontraktion begleitet, die jener Dehnung proportional ist. Bedeutet an einem Stabe λ/l die relative Dehnung und δ/d die damit verbundene relative Verkürzung des Durchmessers d, so ist also $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$ für einen bestimmten Stoff eine Konstante (Poisson); erfahrungsgemäß liegt sie zwischen 0,2 und 0,5.

Volumänderung φ durch elastische Dehnung. Das Volumen v eines Stabes ist proportional $l d^2$, die Änderungen φ, λ und $-\delta$ stehen also, vorausgesetzt, daß sie klein sind (S. 6), in der Beziehung (vgl. auch **55b**)

$$\frac{\varphi}{v} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\delta}{d} = \frac{\lambda}{l}(1 - 2\mu).$$

Da μ zwischen $\frac{1}{2}$ und 0 liegt, so ist φ/v jedenfalls positiv, aber $< \lambda/l$.

Verhältnis der Elast.-Moduln der Dehnung und der Torsion. Nach der Theorie (Poisson) ist $E:F$ oder $\mathsf{E}:\Phi = 2(1+\mu)$, wenn μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung bedeutet. Da nun $0 < \mu < \frac{1}{2}$ ist, so muß $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$ sein; für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ gilt $F = \frac{2}{5}E$. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elast., § 3 u. 92.

I. Direkte Methode.

Man mißt gleichzeitig Dehnung und Querkontraktion. Dies theoretisch einwandfreie Verfahren erfordert wegen der Kleinheit der zu messenden Änderungen meist empfindliche Spiegel- oder Interferenzapparate.

Vgl. u. A. Röntgen, Pogg. Ann. 159, 601. 1876; Bauschinger, Der Civilingenieur 25, 81. 1879; Stromeyer, Proc. R. Soc. 55, 373. 1894; Benton, Ann. d. Ph. 3, 471. 1900; Morrow, Phil. Mag. (6) 6, 417. 1903; Grüneisen, ZS f. Instr. 1908, 89; Ann. d. Ph. 25, 829. 1908.

II. Aus dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der Dehnung E und der Torsion F.

Nach dem oben erwähnten Satze $F=\frac{1}{2}E/(1+\mu)$ ist

$$\mu=\tfrac{1}{2}(E/F)-1.$$

Inhomogenität oder Heterotropie bilden eine schwer zu vermeidende Fehlerquelle, die besonders an gezogenem Material beträchtlich auftritt.

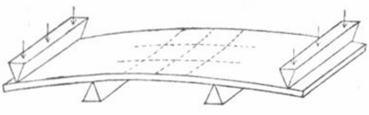
Siehe auch Voigt, Wied. Ann. 48, 674. 1893; Sommerfeld, Wüllner-Festschrift, 162. 1905, gleichzeitige Dehnungs- und Drehungsschwingungen, deren Verhältnis aus Lissajous'schen Figuren beurteilt wird.

III. Aus der Volumänderung bei einseitigem Zug.

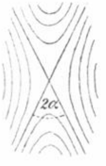
Vgl. hierüber **55b**.

IV. Aus der Oberflächengestalt eines gebogenen Stabes (Cornu).

Biegt man eine ebene Platte so, wie in der Figur, so treten zugleich transversale Kräfte auf, und zwar in der oberen, gedehnten, (Fig. S. 222) Hälfte als Zug, in der unteren, verkürzten, als Druck; beide zusammen bewirken eine sattelförmige Oberflächengestalt. Der Hauptkrümmungshalbmesser der primären Biegung geteilt durch den der Querbiegung gibt direkt die Größe μ.



Die obere Fläche sei eben poliert. Man bedeckt sie lose mit einer ebenen Glasplatte. Durch die Gestaltsänderung entstehen zwischen den beiden Platten Interferenzstreifen (**65** V), die zwei Systemen von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten angehören. Bezeichnet 2α den nach der Querrichtung der Platte offenen Winkel der Asymptoten, welcher bei senkrechter Beobachtung erscheint, so ist



$$\mu=\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Cornu, C. R. 69, 333. 1869; über die zur Ausführung dienende Anordnung und die Winkelmessung mit dem Dove'schen Reflexionsprisma vgl. Straubel, Wied. Ann. 68, 369. 1899.

55 b. Volumelastizitätsmodul. Kompressibilität.

Über Manometer und Druckpumpen s. **36**.

Druckwirkungen auf feste Körper. Die auf ein Flächenelement wirkende Druckkraft fällt hier, auch im Gleichgewichtszustande, im allgemeinen nicht in die Normale der Fläche; man unterscheidet normale und tangentiale Druckkomponenten. Allseitig gleicher normaler äußerer Druck äußert sich jedoch in homogenem isotropem Material nur in normalen Komponenten; die Gestalt eines Körpers bleibt bei der Zusammendrückung eine ähnliche.

Bei einem nicht homogenen oder einem heterotropen (kristallinischen, oder inneren Spannungen unterworfenen) Körper ist aber die Volumänderung auch unter allseitigem Druck von einer Gestaltsänderung begleitet. Wir schließen solches Material im folgenden aus, bemerken jedoch, daß gerade bei nicht kristallisierten Körpern die Homogenität usw. selten und von vorn herein schwer zu verbürgen ist, so daß sie im allgemeinen erst durch die Übereinstimmung der nach verschiedenen Methoden gefundenen Konstanten festgestellt wird. Bisher läßt diese Übereinstimmung noch viel zu wünschen.

Zusammendrückbarkeit oder Kompressibilität ($\varkappa$) eines festen oder flüssigen Körpers heißt seine relative Volumverminderung, wenn der allseitige äußere Druck um Eins zunimmt. $1/\varkappa = M$ ist der Volum-El.-Modul. Verkleinert sich durch eine Druckzunahme p das Volumen v um φ, so gilt in den Grenzen der Proportionalität

$$\varphi/v = \varkappa p = p/M. \qquad 1.$$

I. Bestimmung der Volumelastizität fester Körper.

Im Anschluß an die anderen elastischen Vorgänge werde p entweder in kg-Gew./mm^2(= 96,8 Atm) oder in der CGS-Einheit = Dyne/cm^2 gemessen. M drückt sich dann in denselben Einheiten aus; sein Zahlenwert ist, wie früher (S. 215), im CGS-System $981 \cdot 10^5$mal größer als im anderen.

Nach der Theorie bestehen zwischen den Moduln E der Dehnung, F der Torsion, μ der Querkontraktion (**52** bis **55a**) und M die Beziehungen

$$\text{I.}\quad \frac{1}{M} = \frac{9}{E} - \frac{3}{F}; \qquad \text{II.}\quad M = \tfrac{1}{3}\,\frac{E}{1-2\mu}. \qquad 2.$$

Zwei von den Größen genügen also zur Charakterisierung des Körpers, aber nur dann, wenn Isotropie verbürgt ist.

1. Aus der Volumvergrößerung eines longitudinal gedehnten Stabes oder Rohres; Cagniard Latour 1827.

Die Belastung der Querschnittseinheit betrage p. Ihr entspricht, wenn E den El.-M. der Dehnung bedeutet, die relative Verlängerung $\lambda/l = p/E$. Hiermit ist, nach der Definition von μ, eine rel. Volumvermehrung (**55a** im Eingang) $\varphi/v = (1-2\mu)p/E$ verbunden, also ist $E/(1-2\mu) = pv/\varphi$.

Aus Gl. 2 II folgt andrerseits $E/(1-2\mu) = 3M$; demnach gilt für die Volumvermehrung φ, welche dem auf die Querschnittseinheit wirkenden Zuge p entspricht,

$$\frac{\varphi}{v} = \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{M}\,p, \quad \text{woraus} \quad M = \tfrac{1}{3}\,\frac{v}{\varphi}\,p. \qquad 3.$$

Die Volumänderung wurde aus der Steighöhe einer Flüssigkeit ermittelt.

Dieselben Formeln gelten für das Innenvolum gedehnter kreiscylindrischer Röhren; bei der Anwendung auf Messungen entstehen Schwierigkeiten aus der Definition der Rohrenden und dem notwendigen Ausschluß von Biegungen. — Vgl. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 22, 95. 1891.

2. Aus der Verminderung des Innenvolumens eines geschlossenen Rohres oder einer Hohlkugel bei äußerer Druckerhöhung p; Regnault 1847.

Es gilt z. B. für eine Hohlkugel vom inneren und äußeren Halbmesser r_1 und r_2

$$\frac{\varphi}{v} = \frac{9}{2} \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \frac{1-\mu}{E} p. \qquad 4.$$

Wenn E anderweitig bestimmt ist, so berechnet sich hieraus μ, und dann M nach Gl. 2 II. Für ein Rohr gelten entsprechende Beziehungen.

Die Volumänderung wird aus der Steighöhe einer Flüssigkeitsfüllung in einer angesetzten Kapillare beurteilt.

Regnault, Mém. de l'acad. des sciences 21, 429. 1847.

Das Verfahren läßt sich, umgekehrt, zur Druckmessung gebrauchen.

3. Aus gleichzeitiger Messung der Verlängerung und Querkontraktion bei Zug.

Nach Gl. 2 II. — S. hierüber **55a**, I.

4. Aus der Verkürzung eines Stabes durch allseitigen Druck.

Schwierigkeiten der Messung liegen in der Längenbestimmung im Innern eines auf Hunderte von Atm. zu pumpenden Druckcylinders.

Der Stab steht auf dem Boden eines aufrecht gestellten Druckcylinders. Die Berührung des oberen Endes mit einer, von außen mikrometrisch verstellbaren Platinspitze wird durch den Schluß eines elektrischen Stromes erkannt. Verkürzt sich die Stablänge l um λ, wenn der Druck um p vermehrt wird, so gilt

$$\frac{\lambda}{l} = \tfrac{1}{3} \frac{1}{M} p, \quad \text{also} \quad M = \tfrac{1}{3} \frac{l}{\lambda} p. \qquad 5.$$

Als erhebliche Korrektion tritt die von λ abzuziehende Eigenverlängerung des Cylinders durch den Innendruck herein; vgl. Nr. 5.

Amagat l. c.; Richards, ZS f. ph. Ch. 61, 171. 1907.

Hat der Körper Drahtform, so kann man den Druckbehälter in Glaskapillaren endigen lassen, durch welche hindurch die

Verkürzung mikroskopisch gemessen wird. Anisotropie und Krümmungen sind als Fehlerquellen zu beachten.

Vgl. Buchanan, Proc. R. S. 73, 296. 1904.

5. Aus der Verlängerung eines cylindrischen, auch an den Enden geschlossenen Rohres bei Innendruckerhöhung.

Die Rohrlänge sei $=l$, der innere und äußere Halbmesser $=r_1$ und r_2; der Innendruck p bewirke die, ähnlich wie bei der Wärmeausdehnung (**44**) zu messende Verlängerung λ. Dann gilt für ein relativ langes Rohr nahe

$$\frac{\lambda}{l}=\tfrac{1}{3}\frac{1}{M}\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}p \quad \text{oder} \quad M=\tfrac{1}{3}\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\frac{l}{\lambda}p. \qquad 6.$$

Mallock, Proc. R. S. 74, 50. 1905. Hierzu die Bemerkungen und Verallgemeinerungen von Chree, ib. 74, 518. — Zur Theorie vgl. Lamé, Leç. s. la théor. de l'élast., Paris 1852, 188; Love-Timpe, § 100.

II. Kompressibilität von Flüssigkeiten; Canton, Oersted u. A., seit 1885 Amagat bei hohen Drucken.

Man komprimiert in einem „Piezometer", d. i. in einer Glasbirne mit angeblasener Kapillare (**23, 24**), durch einen, sowohl auf den Flüssigkeitsmeniskus wie auf die Außenwand wirkenden Druck. Zu der so beobachteten „scheinbaren Kompr." ist die Kompr. des Piezometergefäßes zu addieren, die nach einer der obigen Methoden zu bestimmen ist. — Es gilt der Satz, daß das Außen- und das Innenvolumen eines isotropen Hohlgefäßes, welches von außen und innen gleich stark gedrückt wird, beide ebenso verkleinert werden, wie gleich große massive Körper durch Außendruck.

Man kann die Veränderungen des Piezometers auch empirisch dadurch bestimmen oder eliminieren, daß man in ihm eine Flüssigkeit bekannter Kompr. (Wasser, Hg) beobachtet. — In jedem Falle die Kompr.-Wärme beachten! Vgl. unten.

Bei sehr hohen Drucken in undurchsichtigen Gefäßen dient die Methode des elektrischen Kontakts (I 4 und S. 134).

Vgl. u. A. Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 29, 165. 1886; 31, 1000. 1887; besonders Amagat, Ann. chim. phys. 29, 68 u. 505. 1893, Zusammenstellung der Meßmethoden und des Volumganges von Gasen und Flüssigkeiten bis 3000 At. und teilweise bis 260°; Rapp. au Congrès I, 551. 1900.

Auch feste Körper können, mit einer bekannten Flüssigkeit zusammen, im Piezometer in leicht ersichtlicher Weise untersucht werden.

Siehe z. B. Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 34, 531. 1888. — Richards, Publ. Carnegie Inst. Nr. 76 u. ZS f. phys. Ch. 61, S. 77, 171, 183. 1907.

Veränderlichkeit des Kompr.-Koeffizienten. Mit wachsendem Druck nimmt die Volumverminderung verzögert zu, d. h. $\varkappa$ nimmt ab. Mit wachsender Temperatur wächst $\varkappa$, und zwar teilweise beträchtlich.

Kompressionswärme; besonders unter I 2, 4, 5 und II zu berücksichtigen. — Bei rascher, „adiabatischer" Kompr. gilt für kleine Druckänderungen $\varDelta p$, wenn α der kubische Temp.-Ausd.-Koeff., s die Dichte, c_p die sp. Wärme (Tab. 2, 4, 11, 12), T die abs. Temp. ist, $\frac{\varDelta T}{T} = \frac{\alpha}{s c_p} \varDelta p$.

Vgl. z. B. Creelman u. Crocket, Proc. R. Soc. Edinb. 13, 311. 1885; Burton u. Marshall, Proc. R. S. 50, 130. 1891; Röntgen, Wied. Ann. 45, 560. 1892; Galopin, Arch. sc. phys. (3) 31, 382. 1894.

55c. Elastische Nachwirkung (W. Weber 1841).

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung" folgt langsamer. Bei Platin, Stahl, Quarz (wie es scheint, bei Kristallen allgemein) ist er sehr klein, erreicht aber bei manchen Metallen und Gläsern wohl 5%, bei organischen Körpern, wie Kokon oder Kautschuk 30%, ja in niederer Temperatur die größere Hälfte der Deformation. — Nachwirkungen können lange Zeiten, selbst Monate dauern.

Nachwirkungen zeigen sich auch an anderen Molekularvorgängen, wie an der Wärmeausdehnung, dem elektrischen Leitungswiderstand, bei der Magnetisierung und insbesondere auch als elektrischer Rückstand.

Von diesen mit der Zeit verschwindenden Abständen von einem neuen elastischen Gleichgewicht sind die dauernden Gestaltsänderungen zu unterscheiden, die einer Überschreitung der Elastizitätsgrenze usw. folgen. (Über solche Erscheinungen an Gußeisen s. z. B. Berliner, Ann. d. Ph. 20, 527. 1906). Die Trennung wird oft durch die Übereinanderlagerung beider Erscheinungen erschwert, und auch in der Theorie vermischt man sie häufig; die Trennung ist aber für die Erkenntnis der beiden Vorgänge unerläßlich.

Am leichtesten zu beobachten ist die Nachwirkung nach Deformationen, während sich die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, gedrillt gewesen war, mit der Zeit wieder herstellt.

Es sei s die Deformation, welche zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch besteht. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, welche, falls die primäre Deformation kurz gewirkt hatte, dem Gesetz folgt (F. K.)

$$-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a\frac{s}{t}, \quad \text{also } s = \frac{c}{t^a}. \qquad \text{I.}$$

Nur für die ersten, der Beobachtung nicht zugänglichen Bruchteile von Sekunden gilt die Formel nicht. a, welches die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Nachwirkung verschwindet, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant; es wurde, t nach Minuten gerechnet, an verschiedenen Körpern bei verschiedenen Vorgängen, zwischen $\frac{1}{6}$ und 1 gefunden. Die Konstante c, d. h. die zur Zeit 1 nach Aufhören der deformierenden Kräfte noch vorhandene Nachwirkung, ist cet. par. der Größe der vorangegangenen Deformation nahe proportional und wächst mit deren Dauer.

Nach längerer Dauer der primären Deformation gilt der allgemeinere Ausdruck
$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also} \quad s = C\cdot e^{-pt^m}, \qquad \text{II.}$$
worin $p = a/(1-n)$ und $m = 1-n$ ist. m wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderung von sehr kleinen Werten allmählich an, aber erfahrungsmäßig nicht über $\frac{1}{3}$; n liegt zwischen 1 und $\frac{2}{3}$.

Nach denselben Ausdrücken vollzieht sich die Annäherung an einen neuen Endzustand, der einer plötzlich einsetzenden konstanten Kraft oder Deformation entspricht.

F. K., Pogg. Ann. 119, 337. 1862; 128, 1. 1866; 158, 337. 1876.

Genähert lassen sich auch, z. B. an Glas, manche Nachwirkungen, die einer Deformation S von der Dauer T folgen, zur Zeit t nach dem Aufhören, durch $AS\cdot \lg[(T+t)/t]$ ausdrücken (Boltzmann). Falls umgekehrt zur Zeit Null eine konstant bleibende Deformation plötzlich eintritt, so gilt für die elastische Kraft zur Zeit t genähert der Ausdruck $P(1 - A\lg t)$; Die Konstante A hat in beiden Ausdrücken für denselben Körper und für die gleiche Art von Deformation denselben Wert.

Boltzmann, Pogg. Ann. Erg. VII, 624. 1876. — Weiteres Material, Theorien, umfangreiche Literatur bei Auerbach, Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. I, 796. 1908.

Um die Größe und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bestimmen, lasse man etwa eine Deformation S 1^{min} lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung s. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1 s_1$ und $t_2 s_2$ kommt in Formel I $a = \frac{\lg s_1 - \lg s_2}{\lg t_2 - \lg t_1}$ und $c = t_1^a s_1$ oder $= t_2^a s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich. c/S gibt die relative Größe der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung muß die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Größe zu geben. Dann gilt aber im allgemeinen der Wert $n = 1$ nicht mehr, so daß man die umständlichere Formel II nehmen muß.

Die Beobachtung ist für Torsion mit Ablesung an Spiegel und Skale (**25**) einfach. Der an den Draht gehängte Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel sei durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (8, 32) nahe bis zu aperiodischer Schwingung gedämpft (**108**). Man drillt am besten oben, mittels eines Torsionskopfes mit

Gradteilung, während der Schwingungskörper gegen eine Hemmung anliegt. — Ähnlich werden Biegungsnachwirkungen an eingespannten Stäben leicht beobachtet. — Die Messung von Längsnachwirkungen verlangt, außer an Kautschuk, Kokon u. dgl., große Längen oder sehr empfindliche Ablesevorrichtungen; die Wärmeausdehnung eliminiert man am einfachsten nach einem kongruenten ausgeruhten Nachbardraht.

Die Gefahr störender dauernder Gestaltsänderungen wird verringert, wenn der Körper vor einer längeren Frist einer größeren Deformation in gleichem Sinne unterworfen worden war.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einfluß. Bei harten Körpern steigert sie die anfängliche Größe der Nachwirkung, aber auch die Geschwindigkeit ihres Verschwindens. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur größer.

55d. Härte oder Eindringungsfestigkeit.

Nach einem, der Mineralogie entlehnten Verfahren beurteilte man die Härte einer Oberfläche nach ihrer Verletzbarkeit innerhalb einer Staffel kristallisierter Mineralien. Dies ist nicht eindeutig, denn eine Spitze verletzt unter Umständen selbst einen härteren Körper; auch hängt das Ritzvermögen von der Geschwindigkeit der Führung ab. Relativ brauchbar wird das Ritzverfahren, wenn man eine und dieselbe kegelförmige (Diamant-)Spitze mit bestimmter Belastung und Geschwindigkeit führt und die Breite des Risses mißt. Vgl. Martens, Handb. d. Materialienkunde I, 24. 1898.

Definition nach Hertz, 1882; Gesamm. Werke I, 155 u. 183. 1895. Die Härte wird in folgender Form durch einen Druck (Kraft/Flächeneinheit) dargestellt. Sie ist gleich dem Drucke, der im Zentrum einer kugelsegmentförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers die Spannungen die Elastizitätsgrenze erreichen.

Nach der Theorie ist der Druck im Zentrum das $\frac{3}{2}$fache des mittleren Druckes p_m auf der ganzen Druckfläche. Bedeutet nun p_m' den kleinsten Wert von p_m, bei welchem eine dauernde Veränderung eintritt, so gibt nach Hertz $\frac{3}{2}p_m'$ die gesuchte Härte in abs. Maße.

Spröde Körper erfahren durch Überschreiten der Grenze Zerstörungen. Plastische hingegen, z. B. Metalle, beginnen zu „fließen", d. h. sie erleiden dauernde Eindrücke, ohne den Zusammenhalt zu verlieren.

Größe der Eindrücke. Theorie. Zwei kugelige Oberflächen aus gleichem Material von den Elast.-Konstanten E und μ (**52 u. 55a**), von den Radien ϱ_1 und ϱ_2, seien durch die Belastung P zusammengepreßt; hierdurch entstehe ein Druckkreis vom Halbmesser r, also von der Flächengröße $r^2\pi$, so daß $p_m = P/(r^2\pi)$ ist. Bis zur Elastizitätsgrenze gilt dann $r^3 = \frac{3}{2}\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{P}{1/\varrho_1 + 1/\varrho_2}$, woraus, wenn $\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3}\frac{E}{1-\mu^2}\right)^{2/3}$ als eine Materialkonstante $= C$ bezeichnet wird, folgt

$$p_m = C\cdot\left[P\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right]^{1/3}. \qquad 1.$$

Preßt eine Kugel ($\varrho_1 = \varrho$) einen ebenen Körper ($\varrho_2 = \infty$), so kommt, mit derselben Bedeutung von C,

$$p_m = C \cdot \left(\frac{P}{\varrho^2}\right)^{1/3}. \qquad 2.$$

Formel 2 gilt auch für die Kreisdruckfläche, welche beim Zusammenpressen zweier über Kreuz gelegter gleicher Cylinder vom Radius ϱ entsteht.

Stellt nun P' die kleinste Belastung vor, bei der eine dauernde Änderung gerade eintritt, so gibt das nach diesen Gleichungen berechnete $\frac{3}{2}p'_m$ nach Hertz die Härte.

Die Hertz'sche Definition läßt sich nicht streng durchführen, weil die El.-Grenze im allgemeinen nicht scharf bestimmbar ist. Auch zeigen sich die theoretischen Formeln nicht streng gültig, insofern beim Zusammenpressen einer Ebene mit verschieden gekrümmten Linsen die so berechnete Härte mit der Linsenkrümmung wächst (Auerbach).

In der Technik gebräuchliche Verfahren.

Diese schließen sich der Hertz'schen Definition insofern an, als sie als Kriterium die Deformation in Pressungskreisen benutzen. Sie verfolgen diese jedoch bis weit oberhalb der El.-Grenze, z. B. bis zu 1 cm Durchmesser.

Bedeutet wieder p_m den Quotienten aus der Belastung P und der gesamten (dauernden + elastischen) Druckfläche, so ergeben die Versuche, daß p_m viel langsamer mit P wächst, als die Formeln 1 bez. 2 verlangen. Jedoch zeigt sich auch hier p_m als eine Funktion von $P(1/\varrho_1 + 1/\varrho_2)^2$, bez. von P/ϱ^2 (Stribeck). Man bekommt also stets das gleiche p_m (die gleiche Härtezahl), wenn man P dem Quadrate von ϱ proportional wählt (d. h. bei geometrisch ähnlicher Eindrückung). Es lassen sich also die mit verschiedenen ϱ erhaltenen Beziehungen zwischen p_m und P auf eine einzige „Härtekurve" reduzieren; durch diese ist das Material definiert.

Die Härtekurve läßt sich erfahrungsmäßig für nicht zu kleine Belastungen in einem einfachen Ausdruck darstellen. Es zeigt sich nämlich von etwa $2r = d = 1$ mm aufwärts nahe die Beziehung $P = a d^n$ erfüllt, wo a und n Konstanten des Materials sind; n wurde $= 2$ bis 2,4 gefunden. Setzt man diesen Wert von P in p_m ein, so entsteht $p_m = (4/\pi) \cdot a d^{n-2}$. Für $n = 2$ ist demnach $p_m = (4/\pi) a$ ein von der Belastung unabhängiges Härtemaß; der gewöhnliche, bei hartem Material stets gefundene Fall $n > 2$ bedeutet, daß p_m mit der Pressung wächst.

Diese Prüfungen pflegen folgendermaßen angeordnet zu werden.

A. Mit gegenseitiger Pressung von Stücken des Prüfmaterials:

1. Kugeldruck. Kugel gegen Kugel oder gegen Ebene; Hertz, Auerbach, Stribeck.

2. Cylinderdruck. Zwei Cylinder gleichen Durchmessers; Föppl.

Diese beiden, im Hertz'schen Sinne absoluten Verfahren sind wegen der verlangten besonderen Körperformen umständlich. Technisch gebräuchlicher sind deswegen die folgenden:

B. Mittels Pressung eines ebenen Probestückes durch einen sehr harten Körper (Stahl), der selbst nicht dauernd deformiert wird:

3. Brinell'sche Kugeldruckprobe. Pressung durch eine Stahlkugel; $2r = 5$ bis 20 mm. In der Praxis benutzt man als Maß der Härte das Verhältnis der Belastung zur sphärischen Oberfläche des Eindrucks. Vgl. jedoch Eug. Meyer und Martens u. Heyn, l. c. unten.

4. Kegeldruck (Ludwik). Pressung durch einen Stahlkegel von 90^0 Öffnungswinkel. Man pflegt den Eindruckhalbmesser r am oberen Rande des entstandenen Randwulstes zu messen und setzt die Härte

$$p_m = P/(r^2\pi).$$

Literatur: Hertz, s. oben. — Ferner zu 1) Auerbach, Wied. Ann. 43, 61. 1891 (Apparat zur Messung); 45, 262. 1892; 53, 1000. 1894; 58, 357. 1896 (Versuch, die mineralogische Skale auszuwerten); Ann. d. Ph. 3, 108. 1900 (Zahlenwerte). Stribeck, ZS Ver. deut. Ing. 51, 1445, 1500, 1542. 1907. — Zu 2) Föppl, Wied. Ann. 63, 103. 1897; Mitteil. Mech.-Techn. Labor. München, Heft 28, 34. 1902. — Zu 3) Kürth, Ph. ZS 8, 417. 1907. Auch Martens u. Heyn, ZS Ver. d. Ing. 52, 1719, 1908; hier wird empfohlen, die Eindrucktiefe der Kugel zu messen. — Zu 4) Ludwik, die Kegelprobe, Berlin 1908. — Zum ganzen besonders: Eug. Meyer, ZS Ver. d. Ing. 52, 645, 740 u. 835. 1908; Auszug Phys. ZS 9, 66. 1908.

Über Härte und Atomgewicht s. Rydberg, ZS f. ph. Ch. 33, 353. 1900; Benedicks, ib. 36, 529. 1901. — Über Beziehungen zur Zerreißfestigkeit und Streckgrenze Kürth, ZS Ver. deut. Ing. 52, 1560 u. 1608. 1908.

Bei allen diesen Verfahren und Definitionen ist übrigens im Auge zu behalten, daß sie in den Fällen, wo, etwa an rasch gekühlten Körpern, die Oberfläche anders beschaffen, und zwar meist härter ist als das Innere, den Zustand der Oberfläche nicht geben, und den des Inneren nur für größere Pressungen.

Zug-, Bruch- und Torsionsfestigkeit.

Man pflegt die Tragkraft eines longitudinal beanspruchten Prismas oder Cylinders vom Querschnitt q gleich Cq zu setzen. Ferner den Bruchwiderstand eines an den Enden aufgelegten Stabes von der Länge l, gegen eine Belastung seiner Mitte, für ein rechtwinkliges Prisma von der Höhe a und der Breite b gleich $C'\frac{2}{3}a^2b/l$; für einen Kreiscylinder vom Halbmesser r gleich $C'\pi r^3/l$. Endlich den Zerdrehungswiderstand eines Kreiscylinders (r) gegen ein Drehmoment gleich $C''\frac{1}{2}\pi r^3$.

C, C' und C'', die Zug-, Bruch- und Torsions-Festigkeitskonstanten des Materials sind von gleicher Größenordnung.

Die obigen Beziehungen unterliegen starken Abweichungen; z. B. nimmt die Zugfest.-K. im allgemeinen mit wachsendem Querschnitt ab.

Formeln für allgemeinere Fälle hat besonders St. Venant abgeleitet.

Eingehendes z. B. bei Bach, Elastizität und Festigkeit; Martens, Handb. d. Materialienkunde. Vgl. auch Brodmann, Festigkeit von Glasstäben, Gött. Nachr. 1894, 44.

56. Messung von Wellenlängen; Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Die Schallgeschwindigkeit [1]) in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $u_t = 331\sqrt{1 + 0{,}00367\,t}$ m/sec. Mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur genähert berücksichtigt, wenn man 0,004 statt 0,00367 setzt (**18**); z. B. $u_{18} = 343$. — Vgl. ferner **53**.

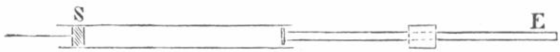
Zwei gegen einander laufende gleiche Wellenzüge erzeugen stehende Wellen von einem Knotenabstand gleich der halben Wellenlänge.

I. Staubfiguren (Kundt 1866).

1. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern.

Die Schallgeschwindigkeit in einem Stabe (oder einer Röhre) läßt sich auf diejenige in der Luft dadurch zurückführen, daß man die Wellen des longitudinalen Stabtones auf Luft überträgt und in dieser mißt.

Man klemmt den horizontal gelegten Stab an seiner Mitte fest ein. Das eine Ende E wird longitudinal gerieben (s. unten), das andere ragt in eine, mindestens 30 mm weite (vgl. S. 239), am hinteren Ende durch einen dicht schließenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen, Korkstaub oder geglühte Kieselsäure (aber sehr wenig) enthält.



Die Stöße des freien Endes erzeugen in der Glasröhre stehende Luftschwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet man die richtige Stellung, bei der nämlich das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschließen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöße an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Luftwelle, L die Länge des Stabes, d. i. die halbe Länge seiner Welle (vgl. **53**), so verhalten sich die Schallgeschwindigkeiten U im Stabe und u in der Luft $U:u = L:l$, also gilt (vgl. den Eingang)

$$U = 331\sqrt{1 + 0{,}004\,t}\,\frac{L}{l}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

1) Die Einzelwerte für 0° (z. B. Regnault, Bureau des Longitudes, Moll u. van Beek, Violle, Wüllner, Thiesen) liegen zwischen 330 und 333; s. u. a. Wüllner, 6. Aufl. I, 963. 1907; Violle, Rapports au Congrès 1900, I, 228; Thiesen, Ann. d. Ph. 25, 506. 1908. Der richtige Wert in freier Luft liegt wohl 332 näher als 331. Da hier fast nur Fortpflanzungen in Röhren in Betracht kommen, ist 331 eingesetzt, um die berechneten Werte in nicht zu engen Röhren unkorrigiert (vgl. S. 239) gebrauchen zu können.

Der El.-M. ist dann (**53**), wenn s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet,
$$E = \frac{U^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Um eine genauere Länge der Staub-Halbwelle zu erhalten, messe man den Abstand eines Paares von Knoten (oder mehrerer Paare; z. B. wenn $2n$ Punkte gemessen werden, Nr. 1 bis $n+1$, 2 bis $n+2 \ldots n$ bis $2n$), die weiter auseinander liegen, und dividiere ihn (oder das Mittel) durch die Anzahl der zwischenliegenden Wellen. Über Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. **3** II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staub-Halbwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase betrug also $331\sqrt{1+0{,}004 \cdot 17} \cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sec; mithin El.-M. des Glases, dessen Dichte $= 2{,}7$ war (**15** B, 1 oder 3),
$$E = 4890^2 \cdot 2{,}7/9810 = 6580 \text{ kg-Gewicht/mm}^2.$$

Längere Stäbe kann man, anstatt in der Mitte, auch in $\frac{1}{4}$ vom Ende klemmen und in der Mitte reiben, dann ist die Wellenlänge im Stabe gleich der ganzen Stablänge, also das wie oben berechnete U durch 2 zu dividieren.

2. Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Man setzt im folgenden den Gaszustand voraus, der hinreichend genau durch $vp/(273+t) =$ Const. dargestellt wird; vgl. S. 79. Bemerkungen über Abweichungen s. daselbst, sowie S. 82 u. 159. Besonders bei tiefer Temp. und hohem Druck sind die allgemeineren Zustandsgleichungen heranzuziehen.

Berechnung (Laplace 1816). Es bedeute s die Dichtigkeit, p den in CGS-Einheiten (Dyne/cm²) gemessenen (**36** I) Druck eines Gases, ferner sei das Verhältnis seiner sp. Wärmen bei konst. Druck u. konst. Volumen (**50 b**) (welchem die Erwärmung bei plötzlicher Verdichtung proportional ist) $c_p/c_v = \varkappa$; dann gilt für die in cm/sec gemessene Schall-Geschw. u die Beziehung
$$u^2 = \varkappa p/s. \qquad 1.$$

Nennt man h den in cm Quecksilber (0°; 45° geogr. Breite) gemessenen Gasdruck, so ist (**36** I) $p = 13333\,h$. Bedeutet ferner s_0 das sp. Gew. des Gases bei 0° unter 76 cm Quecksilberdruck, so wird (**18**) für eine Temp. t, wenn $\alpha\,(= 0{,}00367)$ der Ausd.-Koeff. der Gase, $s = s_0 \dfrac{h}{76} \dfrac{1}{1+\alpha t}$.
Werden diese Ausdrücke für p und s in 1. eingesetzt, so hebt h sich heraus (die Schallgeschw. hängt nicht vom Drucke ab) und es kommt
$$u^2 = \varkappa\, 13333 \cdot 76\,(1+\alpha t)/s_0 = 1013300\,\varkappa\,(1+\alpha t)/s_0 \,(\text{cm/sec})^2, \text{ oder,}$$
u in m/sec gemessen:
$$u^2 = 101{,}33 \cdot \varkappa \frac{1+\alpha t}{s_0} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2. \qquad 2.$$
Für zwei Gase gilt demnach das Verhältnis
$$\frac{u^2}{u'^2} = \frac{\varkappa}{\varkappa'} \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} \frac{s_0'}{s_0}. \qquad 3.$$

Diese Beziehungen dienen für ein Gas von bekanntem $\varkappa$ und s_0 zur Berechnung seiner Schallgeschwindigkeit und zu den Aufgaben unter IV.

Verzögerung in Röhren. Die Sch.-Geschw. wird hier, durch Reibung und Wärmeaustausch, um eine Korrektion verkleinert, die der Rohrweite (d cm) und der Wurzel aus der Schw.-Zahl N/sec umgekehrt proportional ist (Helmholtz, Kirchhoff). Für Luft in gewöhnlicher Temp. folgt aus Versuchen von Low, Stevens, J. Müller, F. A. Schulze, als Korrektionsfaktor etwa $1 - 0{,}45/(d\sqrt{N})$; 3 Promille für $d = 3$ cm u. $N = 2000$. — Vgl. aber Sturm, Ann. d. Ph. 14. 822. 1904. Siehe auch Thiesen, Ann. d. Ph. 24, 401. 1907; Fürstenau, ib. 27, 735. 1908.

Messung mit Staubwellen; **56** I (l = Halbwellenlänge).

1. Man erregt Wellen bekannter Frequenz N (**57**) und rechnet
$$u = 2lN.$$

2. Man vergleicht das Gas mit der Luft (S. 237), indem man in beiden Mitteln Figuren mit demselben angeriebenen Stabe oder mit derselben, vor der Rohrmündung angestrichenen Stimmgabel oder angeblasenen Pfeife erzeugt. Den entstehenden Wellenlängen sind die Schallgeschwindigkeiten proportional. Wird also dabei beobachtet l' in trockener Luft von der Temp. t' und l im Gase von der Temp. t, so gilt für das Gas bei 0^0 die Sch.-Geschw.
$$331\,\frac{l}{l'}\sqrt{\frac{1+0{,}00367\,t'}{1+0{,}00367\,t}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$
(Über 331 vgl. übrigens Anm. S. 237.)

Beiderseitig geschlossene Röhren. Anreiben erzeugt scharfe Knotenpunkte im eingeschlossenen Gase nur dann, wenn die der Tonhöhe des Rohres entsprechende Halbwellenlänge nahe ein ganzer Bruchteil der Rohrlänge ist. Durch ausprobierte Endbelastungen (beiderseitig angekittete Metallscheibchen) kann man dies bewirken; vgl. Behn u. Geiger, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 657. — Über Tonerregung an einem angeschmolzenen Stab und Messungen an Dämpfen von höheren Temperaturen Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 157, 353. 1876; Strecker, Wied. Ann. 13, 20. 1881.

Anreiben eines Stabes. Außer auf das Freihandverfahren (S. 219) sei auf die, durch Laufwerk angetriebene rotierende Reibscheibe (R. König) hingewiesen, deren Umfang, mit zwei Kautschukschläuchen und darüber gespanntem befeuchtetem Seidenstoff belegt, die zu diesem Zweck sehr fest eingespannte Glasröhre einseitig reibt. (Die Endverbreiterung, welche die Stöße überträgt, wird, haltbarer als durch ein aufgekittetes Scheibchen, durch Aufblasen hergestellt.) Vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 11, 410. 1903.

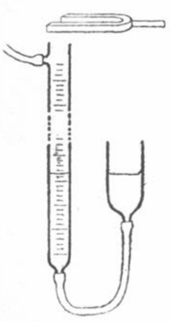
Tropfbare Flüssigkeiten. Es bedeute s die Dichtigkeit, $\varkappa$ die Kompressibilität (**55b**) in CGS, d. h. die Zahlen in Tab. 19a geteilt durch 1013300 (**36**), dann ist $U^2 = 1/\varkappa s$.

Auch hier lassen sich Schallgeschw. mittels Kundt'scher Staubwellen

(Bimssteinsand) bestimmen; vgl. z. B., auch über Lit., Dörsing, Ann. d. Ph. 25, 227. 1908; über den bedeutenden Einfluß der Weite und Wandstärke auch Korteweg, Wied. Ann. 5, 525. 1878.

II. Akustische Bestimmungen von Wellenlängen in Gasen.

1. **Stehende Wellen durch Reflexion** (Quincke). Die Tonquelle, z. B. die Zinken oder der Resonanzkasten einer Stimmgabel, befindet sich vor dem offenen Ende eines hinten eben geschlossenen weiten (30 mm) Rohres. Durch Reflexion an der Hinterwand bilden sich stehende Wellen. Mittels eines engen (8 mm), verschiebbar eingeführten Rohres, von welchem ein Kautschukschlauch zum einen Ohre führt, tastet man die Wellen ab. Das andere Ohr ist verstopft; Kratzen des Hörrohres wird

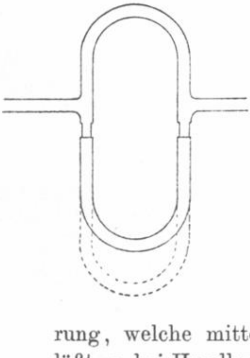


durch einige umgebundene Fäden (in hoher Temperatur Asbest) vermindert. Die an einer mm-Teilung abgelesene Strecke zwischen aufeinanderfolgenden Stellungen maximaler (oder minimaler) Tonstärke ist je $\frac{1}{2}$ Wellenlänge.

Statt des verschiebbaren Hörrohres vor dem festen Boden kann eine feststehende Höröffnung mit Schlauch und ein verschiebbarer Boden dienen. Eine einfache Anordnung s. Fig., wo das verstellbare Wasserniveau den Boden bildet.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 190. 1866; Stevens, Ann. der Ph. 7, 285. 1902. Kalähne, ib. 11, 225. 1903 (hohe Temp.); 20, 398. 1906. Hier auch die weitere Literatur.

2. **Interferenz-Doppelrohr** (Quincke). Der Ton wird in das eine Ende eines verzweigten Kanals geschickt, dessen einer



Zweig mittels eines Posaunenauszuges meßbar verlängert werden kann. Vom anderen Ende führt man wie oben einen Schlauch zum Ohre. Die Summe der beiderseitigen Verschiebungen zwischen zwei Stellungen minimaler Tonstärke gibt die Wellenlänge. Denn die beiden Wellenzüge interferieren jedesmal abschwächend, wenn ihre Weglängen sich um ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge unterscheiden.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 179. 1866. Eine Abänderung, welche mittels eines T-Stückes die eine der Öffnungen verschieben läßt, s. bei Handke u. Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 121.

Über Messungen mit Membranen in Pfeifen s. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 8, 584. 1879. — Vgl. ferner **57**, 4.

3. **Resonanz.** In einem elastischen Körper, besonders in einer abgegrenzten Gasmasse entstehen durch die Zuführung regelmäßiger Anstöße Eigenschwingungen, deren Intensität ein Maximum ist, wenn die Schwingungszahl mit einem Eigenton des Körpers zusammentrifft.

Der Ton einer Sirene von meßbar veränderlicher Schwingungszahl wird einem geschlossenen Rohr (l etwa $=100$; $2r = 5$ bis 6 cm) am einen Ende durch eine enge (1 mm weite) Öffnung zugeführt. Die Wellenlänge des (tiefsten) Tones, für welchen das Maximum der, durch eine Metallmembran (Neusilber, $^1/_3$ mm stark) hindurch beobachteten Resonanz eintritt, ist gleich der doppelten Rohrlänge.

Thiesen, Ann. d. Ph. 25, 506. 1908. S. über die Anwendung eines Saitenunterbrechers Fürstenau, l. c. (S. 237). Vgl. noch **57** II, 5.

4. **Aus der Tonhöhe einer Pfeife.** Eine und dieselbe kleine Pfeife wird mit dem zu untersuchenden und mit einem Gase von bekannter Schallgeschwindigkeit angeblasen. Vorbehaltlich Korrektionen aus der Stärke des Anblasens usw. verhalten sich die Schallgeschwindigkeiten wie die Tonhöhen. Vgl. Wachsmuth, Ann. d. Ph., Boltzmannband, 923. 1904.

III. Messung sehr kleiner Wellenlängen mit Beugungsgittern.

Über die theoretischen Grundlagen des Verfahrens vgl. Optik **65** I.

Die Wellen, nötigenfalls mittels eines Hohlspiegels parallel gemacht, fallen auf ein Stabgitter (Drähte; Glasstäbe) von einigen mm Gitterperiode. Man sucht mit einem Schalldruckmesser (**57 a**, 4) die Richtungen der Energiemaxima (nur das mittelste und die beiderseitig nächsten pflegen deutlich zu sein) hinter dem Gitter und rechnet wie in **65** I. Altberg, Ann. d. Ph. 23, 267. 1907; bis etwa $\lambda = 1$ mm abwärts.

Oder man untersucht die gebeugt r e f l e k t i e r t e n Strahlen mittels Drehung des Gitters vor einem zweiten Hohlspiegel, der sie auf den Schalldruckmesser konzentriert. Dieckmann, Ann. d. Ph. 27, 1066. 1908; bis etwa $\lambda = \frac{1}{2}$ mm (ca. 700000 Schw./sec). S. daselbst die Berechnungsweise und die Literatur über das Erzeugen der schnellen Schwingungen, besonders durch elektrische Funkenstrecken.

IV. Anwendungen von Schallgeschwindigkeiten.

1. B e s t i m m u n g v o n G a s d i c h t e n. Ist $c_p/c_v = \varkappa$ bekannt (vgl. **50 b** u. Tab. 12 a), so folgt aus der Sch.-Geschw. u m/sec das spez. Gewicht bei 0° und 760 mm Quecks. (Formel 2, S. 238)

$$s_0 = 101{,}33\,\varkappa\,\frac{1+\alpha t}{u^2}.$$

2. Bestimmung des Verhältnisses $\varkappa = c_p/c_v$. Aus dem bekannten spez. Gewicht s_0 (0^0, 760 mm) und der Sch.-Geschw. u bei t folgt

$$\varkappa = 0{,}00987 \frac{s_0 u^2}{1+\alpha t}.$$

Über tiefe Temp. u. hohe Drucke vgl. z. B. Valentiner, Ann. d. Ph. 15, 74. 1904; P. P. Koch, ib. 26, 551 u. 27, 311. 1908.

3. Messung von Temperaturen. Als Gas werde trockene Luft angenommen. Der Sch.-Geschw. u entspricht die Temperatur

$$t = 0{,}00249\, u^2 - 273.$$

Sind die Wellenlängen eines und desselben Tones (vgl. **57**) λ und λ' bei den Temperaturen t und t', so gilt

$$\frac{273+t}{273+t'} = \frac{u^2}{u'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

Über hohe Temperaturen vgl. Kalähne, Ann. der Ph. 11, 225. 1903.

Die Formeln unter Nr. 1, 2 u. 3 setzen merklich vollkommenen Gaszustand voraus; vgl. den Eingang.

57. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

Über physikalische Akustik s. besonders Rayleigh, Theory of Sound, deutsch von Neesen 1879. Second Ed. 1894/95.

Ein Wellenzug enthält einen einfachen Ton, wenn seine Schwingung sinusförmig ist (Ohm). Weitaus die meisten Tonquellen geben Schwingungen anderer periodischer Form, die, besonders mit Hilfe Fourierscher Reihen, in den Grundton (Ton der langsamsten, im Klange enthaltenen Periode) und in Obertöne zerlegt werden können.

I. Gebräuchliche Tonquellen.

1. Sirene (Cagniard la Tour 1820), durch Anblasen, elektromagnetisch oder durch einen Motor (8, 26) angetrieben. Der Grundton ist durch die Periode der Stöße gegeben; begleitende Geräusche und Obertöne hängen von den Umständen ab.

2. Stimmgabel, angeschlagen, angestrichen oder elektromagnetisch angetrieben; fundamental wegen ihrer, auch von der Temperatur wenig beeinflußten, Konstanz ihrer Schwingungszahl[1]) und, richtig behandelt, wegen der Schwäche ihrer, vom Grundton weit abliegenden Obertöne, die außerdem mittels eines auf den Grundton abgestimmten Resonanzkastens relativ noch weiter abgeschwächt werden können. — Zur optischen Darstellung der Schwingungen dienen Spiegel an den Zinken, am besten nicht weit von der Mitte befestigt. Der schwingende Strahl fällt auf einen zweiten, geeignet bewegten Spiegel. — Schreibende Stimmgabel s. S. 244.

1) Normalstimmgabeln werden von der P.-T. Reichsanstalt geprüft.

Neue Literatur z. B. Hartmann-Kempff, Ann. d. Ph. 13, 124. 1904 (Einfluß der Amplitude); Sieveking u. Behm, ib. 15, 793. 1904; Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 111; Kielhauser, die Stimmgabel, Leipz. 1907. — Stimmgabel vor einer Öffnung mit Luftstrom Rayleigh, Ph. Mag. 13, 316. 1907.

3. Transversal schwingende gestreckte Stäbe (vgl. **54a**), rechteckig oder cylindrisch, angeschlagen oder angestrichen; im allgemeinen zahlreicher, zu einander unharmonischer Töne fähig. Um den Grundton zu bevorzugen, stütze man in dessen, nahe um $^2/_9$ von den Enden entfernten Knotenpunkten. Wichtig besonders als Normale für hohe Töne (R. König). — Über Stimmplatten s. Melde, Wied. Ann. 66, 767. 1898; ib. 67, 781. 1899.

4. Schwingende Federn (Zungen), meist durch Anblasen oder elektromagnetisch erregt. Für tiefere Töne am freien Ende beschwert. Auch als Tonnormale verwendet (Appunn).

5. Longitudinal schwingende Stäbe, angerieben; s. S. 220 u. 239. Die je nach der Anzahl der Knoten entstehenden Tonhöhen verhalten sich wie 1:2:3...; harmonische Tonreihe.

6. Gespannte Drähte und Saiten. Längs: angerieben s. S. 220. Besonders auch für sehr hohe Töne zuverlässig brauchbar. Über Anwendung zur Bestimmung der oberen Hörgrenze s. F. A. Schulze, ZS f. Ohrenheilk. 56, 167. 1908. — Quer: angeschlagen, angestrichen oder elektromagnetisch betrieben (Saitenunterbrecher); s. unten Monochord. — Tonreihe: 1:2:3...

Über optische Untersuchung der Schwingungsform s. z. B. Krigar-Menzel u. Raps, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1891, 613.

7. Gassäulen (Pfeifen), meist über Schneiden angeblasen, auch durch empfindliche Flammen erregbar. Von Korrektionen abgesehen: a) Beiderseitig offen oder geschlossen: Grundton $= u/(2l)$ (vgl. S. 238); Tonreihe 1:2:3... b) Einseitig geschlossen: Grundton $= u/(4l)$; Tonreihe 1:3:5... — Relativ kurze („kubische“) sowie Zungenpfeifen folgen anderen Beziehungen.

Galton-Pfeifen, mit einem Gummiball, zuverlässiger mit einem Gebläse von konstantem Druck über eine kreisförmige Schneide angeblasene kurze, cylindrische Luftmassen, deren Länge nebst der hierdurch bestimmten Maulweite mikrometrisch verändert werden kann. Tabellen geben die zugehörigen Tonhöhen, die bis über 50000 Schw./sec reichen können. Ausführung z. B. von Edelmann, Ann. d. Ph. 2, 469. 1900. — Über Eichung, Fehlerquellen, Literatur vgl. besonders F. A. Schulze, ib. 24, 785. 1907; Hegener, Beiträge z. Anat. usw. des Ohres 1, 321. 1908.

8. Schwingungen in elektrischen Lichtbögen und Funkenstrecken. In Hertz'schen Funkenstrecken bis 200000/sec (vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 23, 267. 1907), im Poulsen-Lichtbogen bis zur Ordnung 800000 (Dieckmann, Ann. d. Ph. 27, 1066. 1908). S. auch **125**.

Relative Schwingungen der *reinen* Dur-Tonleiter:

c	d	e	f	g	a	h	c_1
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Einfachste Ton-Intervalle:

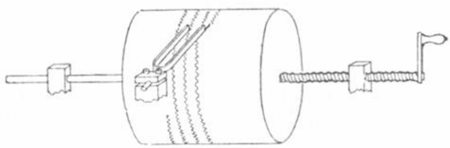
Oktav	Quint	Quart	Große u. kl. Terz		Gr. u. kl. ganzer u. halber Ton		
2:1	3:2	4:3	5:4	6:5	9:8	10:9	16:15
$\frac{c_1}{c}$	$\frac{g}{c}\ \frac{h}{e}\ \frac{c_1}{f}$	$\frac{f}{c}\ \frac{g}{d}\ \frac{a}{e}\ \frac{c_1}{g}$	$\frac{e}{c}\ \frac{a}{f}\ \frac{h}{g}$	$\frac{g}{e}\ \frac{c_1}{a}$	$\frac{d}{c}\ \frac{g}{f}\ \frac{h}{a}$	$\frac{e}{d}\ \frac{a}{g}$	$\frac{f}{e}\ \frac{c_1}{h}$

Gleichschwebende Stimmung hat jeden halben Ton $= 2^{1/12} = 1{,}0595$; Tab. 21.

Die obere Hörgrenze ist, individuell verschieden, von der Ordnung 20000 Schw./sec.

II. Bestimmung der Schwingungszahl.

1. **Graphisch.** Tönender fester Körper. Man befestigt diesen neben einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl und läßt beide mittels an-



geklebter leichter biegsamer Spitzen (feine Metallfeder, Streifchen aus einer Federspule, geschabtes Celluloid usw.) Sinuskurven in eine dünne Rußschicht schreiben. Die nebeneinander liegenden Wellen werden abgezählt.

Oder man läßt neben die Kurve des Körpers in bekanntem Takte Marken zeichnen und zählt die zwischen ihnen liegenden Wellen. Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschluß (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschluß geht durch die primäre Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der sekundären mit der Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind; die Induktionsfunken durch die Schreibspitze zeichnen sich auf der Rußschicht ab. — Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Ruß eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze; Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

Auch lichtempfindliche Schichten werden angewendet. S. auch die in der Physiologie viel gebrauchten Chronographen von Ludwig, Marey u. A.

Tonwellenzüge in Luft. Man läßt solche auf eine freie rußende Acetylen-Flamme wirken. Diese zuckt im Takte des Tons und zieht Rußringe auf einen mit bekannter Geschwindigkeit vorbeibewegten Streifen. Marbe, Ph. ZS 7, 543. 1906; 8, 92. 1907.

2. **Aus Schwebungen.** Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich nach der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie miteinander erzeugen. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weiß man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton der höhere und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden, der Ton einer Pfeife durch Annähern der Hand an eine Öffnung.

In einer fortlaufenden Reihe benachbarter Tonquellen, die mit einander schweben, ist die Schw.-Z. jedes Tones gleich der Summe der sekundlichen Schwebungsfrequenzen von ihm bis zu seiner höheren Oktav. Andere Tonhöhen lassen sich mittels Schwebungen einreihen (Scheibler'scher Tonmesser).

3. **Mit dem Monochord.** Eine gespannte weiche Saite von l m Länge, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das Gewicht p hat, besitzt eine Schwingungszahl N ihres Grundtones (Mersenne 1636)

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Durch Längen- oder Spannungsänderung kann man also zum Zweck von Vergleichungen eine beliebige, aus der Formel zu berechnende Tonhöhe hervorbringen. — Die eigene Elastizität der Saite macht die Schwingungszahl etwas größer als berechnet. Messing- oder besser noch Silberdraht, auch besponnener Klaviersaitendraht ist geeignet. Vgl. Rayleigh, § 118ff., besonders 137.

4. **Aus der Wellenlänge in Luft.** Wenn u die Fortpfl.-Geschw. (**56**), λ die Wellenlänge des Tons in Luft, so ist $N = u/\lambda$. Man mißt λ z. B. durch Übertragen des Tones auf Kundt'sche Staubfiguren (**56** I) oder auf eine Quincke'sche Röhre (**56** II). Oder man läßt den Ton von einer ebenen Wand reflektieren und tastet die Interferenzknoten oder Bäuche ab, bei tieferen Tönen z. B. vor einer vertikalen Wand mit einer empfindlichen Flamme (Rayleigh), bei hohen, selbst bei nicht mehr hörbaren

Tönen einer Galtonpfeife, nahe über einer Tischplatte mittels einer kleinen, auf einen Korkring geklebten und mit Sand bestreuten Glimmerplatte. Vgl. noch **56** II u. III.

S. hierüber F. A. Schulze, Ann. d. Ph. 24, 785. 1907.

5. **Mit Resonatoren.** Man probiert einen Resonator von bekannter Schwingungszahl aus, der auf die gesuchte Tonhöhe anspricht. Resonatoren sind meist abgegrenzte Luftmassen. Nahe einheitlichen Ton gibt der Kugelresonator (Helmholtz); für eine Kugel vom Volumen V mit verhältnismäßig enger Öffnung von der Fläche F ist die Eigentonhöhe prop. mit $u \cdot F^{\frac{1}{4}} V^{-\frac{1}{2}}$, wenn u die Schallgeschw. im Gase.

Multiple Res. s. Rayleigh, Phil. Mag. 13, 319. 1907; Reihen, die vermöge verschiedener Einsatzöffnungen von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{4}$ Ton fortschreiten, Edelmann, Ph. ZS 7, 510. 1906.

Cylinderresonatoren. Die Tonhöhe berechnet sich am einfachsten für einen beiderseitig geschlossenen Cylinder; die Länge kann durch Ausziehen regulierbar sein. Enge Öffnungen in den Endplatten dienen zum Einlaß des Schalles und zum Hören. Vgl. **56** II 3. — Man beachte das Ansprechen auch auf Obertöne.

Über Luftresonatoren vgl. Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage II u. IV.

Feste dünne Platten (Glas, kreisförmig) können vermöge der Chladni'schen Klangfiguren, aus welchen sich die Schwingungszahl ergibt (Kirchhoff), als Resonatoren gebraucht werden.

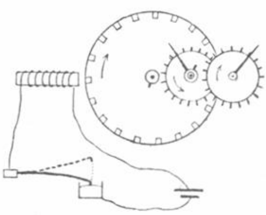
Vgl. Rayleigh (Neesen), Theor. of Sound I, § 193 ff.; Anwendungen bis über 30000 Schw./sec bei F. A. Schulze l. c.

Resonanz durch Berührung; besonders auch auf sehr hohe Schw.-Z. anwendbar. Eine an den tönenden Körper gekittete kleine Korkschneide berührt das freie Ende eines geklemmten flach liegenden Stabes, dessen Länge man variiert, bis einer von seinen Tönen auf den zu bestimmenden anspricht. Die Knoten werden aus Sandlinien erkannt, die Schw.-Zahl nach den Formeln S. 223 berechnet, nachdem der Stab bei irgend einer Länge nach einem bekannten Ton geeicht ist. Melde, Wied. Ann. 52, 238. 1894; auch 66, 767. 1898.

6. **Mit der Sirene.** Man erhält eine Sirene mit Zählwerk auf der Höhe des zu bestimmenden Tones und zählt die Umdrehungen während einer gemessenen Zeit.

7. **Phonisches Rad** (La Cour, Rayleigh). Mit einem Zählwerk ist eine hohle Trommel verbunden, die etwas (reines) Quecksilber

enthält. Durch seine Trägheit und Reibung wirkt dieses ausgleichend auf den Gang und erteilt insbesondere, wenn die Trommel während einer Rotation plötzlich stehen bleiben möchte, einen Stoß nach vorwärts.



Auf der Peripherie sind in gleichen Abständen Eisenstäbchen eingelassen. Die Trommel rotiert vor einem Elektromagnetpol. Wird dieser in einem bestimmten Takt erregt, so reguliert eine Geschwindigkeit, die man der Trommel durch einen Anstoß gegeben hat, sich von selbst so, daß die Eisenstäbe den Pol im gleichen Takt oder mit einem ganzen Vielfachen dieser Geschwindigkeit passieren.

Das phonische Rad zählt also Oszillationen, die man auf bewegliche elektrische Kontakte übertragen hat, z. B. die von schwingenden Federn, Stimmgabeln usw. Da die Ordnungszahl der Schwingungen so gut wie immer bekannt ist, so wird eine besondere Untersuchung darüber, um wie viele Stäbchen sich bei jeder Schwingung die Trommel fortschiebt, selten gefordert. Andernfalls findet man sie leicht dadurch, daß die Umdrehungszahl durch vorübergehendes Bremsen mit dem Finger auf die nächst niedrige Zahl ermäßigt wird.

La Cour, Das phonische Rad; deutsch von Kareis, Leipzig 1880; s. auch Rayleigh, Phil. Mag. 13, 330. 1907. — Über Umlaufzähler auch **119**.

8. **Stroboskopisch.** Man reguliert die Umdrehungsgeschwindigkeit eines durch ein Laufwerk getriebenen Kreises mit Löchern so, daß die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder usw., mit bloßem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Löcher betrachtet, scheinbar still steht. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sec, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = mk$. Erblickt man mehrere ruhende Bilder, so dividiert man das Resultat durch deren Anzahl.

Täuschungen, die, wie leicht ersichtlich, die Ordnungszahl fälschen können, werden sicherer vermieden, wenn die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit reguliert wird, daß noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sec s stroboskopische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS \pm s)/t$, und zwar $+$, wenn bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

Die Umdrehungszahl erkennt man mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läßt, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades des Laufwerks.

57a. Schallintensität in Gasen.

Bezeichnungen und Definitionen für harmonische (Sinus-) Wellen. s Dichtigkeit des ruhenden Gases; $\varkappa = c_p/c_v$ (**50b** u. Tab. **12a**). Ferner u Schallgeschw. (**56**); Λ Wellenlänge; $N = u/\Lambda$ Schw.-Zahl; A ganze Schwing.-Weite; $v_0 = \pi A u/\Lambda = \pi N A$ Max.-Geschw. eines Teilchens; alles in cm und sec. Endlich die ganzen relativen max. Schwankungen: der Dichte $\delta = 2 v_0/u = 2\pi N A/u$, und des Druckes $\Delta = \varkappa\delta = 2\pi\varkappa N A/u$.

Intensität J ist die auf 1 ccm bezogene mittlere räumliche Energiedichte (Potential- und Bewegungsenergie). Es gilt für fortschreitende Wellen:

$$J = \tfrac{1}{2} s v_0^2 = \tfrac{1}{2} s(\pi N A)^2 = \tfrac{1}{8} s u^2 \delta^2 = \tfrac{1}{8} s u^2 (\Delta/\varkappa)^2 \text{ Erg cm}^{-3}. \qquad 1.$$

Die Int. stehender Wellen ergibt sich, wenn v_0 usw. für sie die obige Bedeutung behalten, aus ihrer Zusammensetzung aus zwei fortschr. Wellen von $\frac{1}{2} v_0$ usw., offenbar ($= 2 \cdot \frac{1}{4}$) gleich der Hälfte der Ausdrücke 1.

Die Energiemenge, welche bei fortschreitenden Sinuswellen in 1 sec durch ein zur Bewegungsrichtung senkrechtes qcm wandert, wird in Erg cm^{-2} sec^{-1} aus den Ausdrücken 1 gleich Ju erhalten.

I. Aus der maximalen Dichte- oder Druckänderung.

1. **Optisch** (A. Toepler u. Boltzmann). Man läßt zwei Lichtstrahlen interferieren, von denen der eine durch die tönende, der andere durch ruhende Luft geht. Die schwingenden Interferenzstreifen werden entweder nach dem stroboskopischen Prinzip (S. 247, Nr. 8) verlangsamt und sichtbar gemacht, oder, indem man sie bis auf ein schmales Querbündel abblendet, auf eine rotierende Trommel photographiert (wodurch auch die Form der Schwingungen aufgezeichnet wird).

Aus der in Streifenabständen gemessenen Verschiebung des Streifensystems gegen die markierte Null-Lage ergibt sich die Änderung des Brechungsverhältnisses n und hieraus die Änderung der Dichte nach dem Satze, daß $n - 1$ der Dichte proportional ist (**60**).

Vgl. Toepler und Boltzmann (strobosk.), Pogg. Ann. 141, 321. 1870; Einfache Anordnungen, besonders zur Demonstration, bei Mach, Opt.-akust. Versuche, Prag 1873; Raps (photogr.), Wied. Ann. 50, 193. 1893.

Über Messung der Druckänderung in Pfeifen mittels Ventilmanometers vgl. Kundt, Pogg. Ann. 134, 563. 1868; Raps, Wied. Ann. 36, 273. 1889.

Eine Anordnung, bei der die Druckänderungen am Beobachtungsort aus den mikroskopisch gemessenen Ausschlägen einer Telephonmembran berechnet werden, besonders für absolute Hörschärfemessungen brauchbar, bei M. Wien, Pflüger's Archiv 97, 1. 1903.

2. **Mit dem Vibrationsmanometer** (M. Wien). Die sonst in das Ohr gesteckte Öffnung eines auf den zu untersuchenden Ton abgestimmten Kugelresonators (**57**, 5) ist erweitert und durch eine, ebenfalls auf diesen Ton abgestimmte Membran geschlossen. Die Schwingungen der Membran werden auf einen anliegenden leichten Spiegel (**36** IV, Fig. 1) übertragen, der das Bild einer an ihm reflektierten Lichtlinie in ein Band auszieht, dessen Breite der Druckamplitude $\varDelta$ proportional ist; ihr Quadrat gibt ein relatives Maß der Schallstärke. Über die Reduktion auf absolutes Maß vgl. Wien l. c., S. 837—843.

M. Wien, Wied. Ann. 36, 834. 1889.

II. Aus der Wirkung von Schallwellen auf Wände.

3. **Rayleigh'sche Scheibe.** Eine innerhalb Schallwellen befindliche Scheibe sucht sich senkrecht zur Bewegungsrichtung zu stellen. Eine relativ sehr dünne Kreisscheibe vom Halbmesser r (etwa 2 mm), deren Normale gegen die Schallbewegung um ϑ geneigt ist, erfährt in fortschreitenden Sinuswellen (über s, N, A s. vor. S.) genähert das Drehmoment $D = \frac{2}{3}\pi^2 s N^2 A^2 r^3 \sin 2\vartheta$. Man mißt D durch das Torsionsmoment der Aufhängung (feiner Quarzfaden). Nach Gl. 1 ist also $J = \frac{3}{4}\frac{D}{r^3 \sin 2\vartheta}$.

Über einen Korrektionsfaktor wegen der Scheibendicke vgl. König und Zernov l. c.

Rayleigh, Phil. Mag (5) 14, 186. 1882; Grimsehl, Wied. Ann. 34, 1028. 1888; W. König, ib. 43, 43. 1891; 50, 639. 1893; Lebedew, ib. 62, 163. 1897. Besonders auch Zernov, Ann. d. Ph. 21, 131. 1906; 26, 79. 1908.

4. **Aus der Druckkraft von Schallwellen.** Stehende Schallwellen von der räuml. Energiedichte J (S. 248) üben auf eine vollkommen reflektierende, zur Schallbewegung senkrechte Wand einen Druck aus $p = J(\varkappa + 1)/2$ (Rayleigh). p wird mit einer empfindlichen Wage oder an einer Coulombschen Drehwage gemessen.

Rayleigh, Phil. Mag. (6) 10, 366. 1905; vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 11, 405. 1903; über relative Messung auch 23, 267. 1907; Zernov, ib. 21, 136. 1908. — Man beachte, daß Rayleigh früher, ohne Rücksicht auf die Kompressionswärme, gefunden hatte $p = J$; Phil. Mag. (6) 3, 338. 1902. Diese Formel liegt der Altberg'schen zu Grunde.

Nr. 1 und 2 sind nur auf Sinusschwingungen, 3 und 4 auf die Gesamtenergie jeder Schwingungsform anwendbar.

Über mechanische Wirkungen von Schallwellen vgl. auch Dvorak, Pogg. Ann. 157, 42. 1876, Wied. Ann. 3, 328. 1878.

Alle Methoden vereinfachen sich, wenn es nur auf relative Messungen ankommt. Eine hierfür bequeme Methode s. Sieveking und Behm, Ann. d. Ph. 15, 793. 1904. Vgl. auch die Messung der relativen Intensität der Partialtöne eines Klanges mit dem Phonographen, L. Hermann, Pflüger's Archiv 53, 1. 1883. — Über den Vorschlag zu einer Methode mit Telephon und elektrischem Detektor (Molybdenit) s. Pierce, Proc. Am. Acad. 43. 377. 1908.